



**HAL**  
open science

## QCD et le confinement

P.A.M. Guichon

► **To cite this version:**

P.A.M. Guichon. QCD et le confinement. École thématique. Ecole Joliot Curie "Matière hadronique : de la structure du nucléon au déconfinement des quarks", Maubuisson, (France), du 7-12 septembre 1998 : 17ème session, 1998. cel-00652928

**HAL Id: cel-00652928**

**<https://cel.hal.science/cel-00652928v1>**

Submitted on 16 Dec 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# QCD et le confinement

*P.A.M. GUICHON*

*DAPNIA - SPhN  
CEA Saclay  
F-91191 GIF-SUR-YVETTE Cedex*

## **Abstract**

Ce cours est une introduction à la Chromodynamique Quantique et aux calculs non perturbatifs sur réseau. Son objectif principal est de donner au lecteur le moyen de comprendre l'intense activité qui règne dans ce domaine. Après lecture de ce cours on doit être (presque) capable de calculer le potentiel quark antiquark statique, et donc d'interpréter le phénomène de confinement à partir de la théorie fondamentale des interactions fortes.

# 1 Introduction

La chromodynamique quantique (QCD) est la théorie de l'interaction forte. En raison de son caractère asymptotiquement libre, ses prédictions perturbatives ont pu être testées aux plus hautes énergies accessibles. La constante de couplage renormalisée dépend de l'échelle d'énergie et tend vers zéro lorsque celle-ci augmente. Dans une réaction quelconque, même à très haute énergie, il y a toujours des échanges "mous" qui interdisent un développement perturbatif, mais les théorèmes de factorisation[1] permettent, dans certaines conditions cinématiques, de décomposer l'amplitude en une partie non perturbative<sup>1</sup> et une partie calculable perturbativement. C'est sur cette dernière que portent les tests expérimentaux.

La partie non perturbative a son origine dans le confinement. Quelle que soit la réaction, l'état initial ou final contient des hadrons physiques dans lesquels sont confinés les quarks et les gluons, ce qui ne peut être décrit dans le cadre perturbatif.

Pour le physicien nucléaire, le confinement, et plus généralement les phénomènes non perturbatifs, sont les aspects les plus importants de QCD. En effet les noyaux sont, en moyenne, constitués de quasi-particules qui ont les nombres quantiques des nucléons. L'intervention de QCD dans la dynamique nucléaire est donc essentiellement dans les phénomènes non perturbatifs qui construisent les hadrons à partir des quarks et des gluons.

Cela ne veut pas dire qu'une description effective qui ignore complètement la sous-structure des hadrons soit satisfaisante car la distance moyenne entre nucléons, à la densité normale de la matière nucléaire, n'est guère plus que deux fois le rayon du nucléon mesuré en diffusion d'électrons. Cette remarque naïve a conduit à bien des spéculations sur le rôle direct des quarks dans la dynamique nucléaire, mais aucun des effets exotiques prédits n'a été observé. Ce "multi-quark fiasco"[2] est dû à l'utilisation injustifiée de modèles de quark rustiques, suffisants pour un nucléon isolé, mais incapables de prédire correctement ce qui se passe lorsque deux nucléons se rapprochent. En fait si on veut comprendre le rôle de QCD dans la physique nucléaire, il faut d'abord comprendre les phénomènes non perturbatifs, et le confinement est en tête de liste.

Si on explore la littérature sur le sujet, on réalise qu'il existe des pistes intéressantes. Par exemple la plus en vogue[3] est la condensation des monopoles magnétiques qui, par un effet Meissner dual, conduit à la formation de tubes de flux qui confinent les quarks. Cependant aucune de ces idées n'est vraiment déduite de QCD. Il s'agit d'hypothèses et la principale activité dans ce domaine est d'analyser les calculs sur réseau pour voir si l'idée en question permet de comprendre, "en gros", ce qui domine dans le calcul non perturbatif.

La première chose à faire est donc de comprendre ce qu'est un calcul sur réseau et c'est l'objectif principal de ce cours. C'est un sujet en pleine évolution, et pas seulement à cause de l'augmentation de la puissance de calcul. En fait les progrès les plus spectaculaires sont dus à des travaux purement théoriques[4] qui permettent, à précision égale, d'utiliser une maille de réseau plus grande. Ce sont aussi des développements théoriques[5], hérités des théories super-symétriques, qui donnent l'espoir que l'on pourra bientôt traiter correctement les quarks légers.

L'idée de ce cours n'est pas de faire une revue de l'état de l'art des calculs sur réseau. Il existe des revues récentes sur ce sujet[6, 7]. L'objectif est plutôt qu'à la fin de ce cours le lecteur se sente capable d'effectuer lui-même un calcul. Pour cela il faut viser un objectif assez simple et le choix naturel est le calcul de l'énergie potentielle entre deux quarks statiques. Cela permet d'évacuer le problème pas vraiment résolu des quarks légers tout en gardant l'essentiel,

---

<sup>1</sup>C'est la cas, par exemple, des distributions de partons.

c'est-à-dire le confinement.

Nous commencerons par rappeler comment on dérive le Lagrangien de QCD à partir du principe d'invariance de jauge locale. Nous passerons ensuite à la quantification canonique en insistant sur les difficultés particulières liées à l'invariance de jauge. La loi de Gauss, qui est une contrainte que doivent vérifier les états physiques, sera étudiée en détail. Nous expliquerons ensuite comment satisfaire cette contrainte avec les matrices de lien et les boucles. L'étape suivante sera la régularisation de la théorie par le réseau. L'obligation physique de la régularisation sera commentée et on montrera comment les lois d'échelle permettent de contrôler que le résultat d'un calcul de QCD a un sens quand la maille du réseau tend vers zéro. Pour aller plus loin nous aurons besoin d'introduire la matrice de transfert et sa représentation fonctionnelle. C'est l'outil de base pour les calculs non perturbatifs et nous verrons qu'il est opérationnel quand la théorie est formulée sur le réseau. Nous combinerons enfin l'ensemble des concepts en calculant le potentiel quark-antiquark. L'appendice contient un résumé des notations et conventions ainsi que quelques rappels mathématiques.

## 2 Rappels sur QCD

### 2.1 Généralités

Commençons par préciser les degrés de liberté. Il y a 6 saveurs possibles: up, down, strange, charm, bottom et top. On les distingue par un indice de saveur ( $i, j, \dots = 1, \dots, 6$ ). Pour chaque saveur il y a  $N_c = 3$  couleurs qui seront indexées par ( $m, n, \dots = 1, \dots, N_c$ ). La plupart du temps on garde  $N_c$  arbitraire, ce qui permet de traiter des cas plus simples ( $N_c = 2$ ) ou limites ( $N_c \rightarrow \infty$ ). Finalement, pour chaque saveur et chaque couleur, il y a deux degrés de liberté d'hélicité et deux degrés de liberté de charge dont l'ensemble est décrit par un spineur de Dirac d'indice ( $\alpha, \beta, \dots = 1, \dots, 4$ ). Le champ de quark est donc de la forme

$$q_\alpha^{i,m}(x), \quad i = 1, \dots, 6; \quad m = 1, \dots, N_c; \quad \alpha = 1, \dots, 4.$$

En l'absence d'interaction, il satisfait l'équation de Dirac libre, que nous écrivons pour la dernière fois avec tous les indices ( $i$  et  $m$  sont fixés)

$$i \sum_{\beta, \mu} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu q_\beta^{i,m}(x) - M_i q_\alpha^{i,m}(x) = i \gamma \cdot \partial q^{i,m}(x) - M_i q^{i,m}(x) = 0. \quad (1)$$

Dorénavant les indices de Dirac ne seront plus apparents et le plus souvent nous utiliserons la convention de sommation sur les indices répétés, sauf s'il y a une ambiguïté. Les masses  $M_i$  ne dépendent que de la saveur. Les symétries approchées (symétrie de saveur ou symétrie chirale) qui existent lorsque l'on peut considérer les masses comme égales ou négligeables sont expliquées, avec leur conséquences, dans le cours de M.Knetch. Dans la suite de ce cours, qui traite du confinement, la saveur ne joue aucun rôle. On va donc considérer le cas d'une seule saveur et l'indice  $i$  sera supprimé.

Une transformation de jauge (de couleur) globale est définie par la substitution

$$q^m(x) \rightarrow \sum_n g^{mn} q^n(x), \quad (2)$$

ou de façon compacte

$$q(x) \rightarrow gq(x). \quad (3)$$

Dans l'équation (3)  $g$  est une matrice du groupe  $SU(N_c)$  dont quelques propriétés utiles sont rappelées dans l'appendice. Lorsque  $g$  dépend du point  $x$ , c'est-à-dire

$$q(x) \rightarrow g(x)q(x), \quad (4)$$

la transformation de jauge est dite locale (TJL).

On construit la chromodynamique quantique en imposant qu'elle soit invariante sous les transformations de jauge locales. Cela revient à dire qu'en chaque point de l'espace temps, on peut choisir arbitrairement le repère de couleur. Le prix à payer est l'introduction d'un autre champ, dont le quanta est le gluon, qui transmet l'information d'un point à un autre.

Ce principe de jauge, c'est-à-dire la promotion d'une symétrie globale exacte en une symétrie locale, est à la base des théories de champs modernes. Il n'y a pas actuellement de justification théorique si ce n'est que la méthode est élégante et produit des théories qui marchent. Dans le cadre de certaines théories unifiées on pense que ce principe est une relique à basse énergie des dimensions qui ont été compactifiées pour retomber sur un espace-temps à 4 dimensions.

## 2.2 Lagrangien de QCD

Pour construire QCD on part du fait que l'équation de Dirac n'est pas invariante sous une TJL. En effet

$$i\gamma.\partial q - Mq = 0 \rightarrow i\gamma.\partial(gq) - M(gq) = g(i\gamma.\partial q - Mq) + i\gamma.(\partial g)q = i\gamma.(\partial g)q \neq 0. \quad (5)$$

Donc l'équation transformée n'est satisfaite que si  $g$  est une constante. Le problème vient de ce que

$$\partial_\mu q \rightarrow g\partial_\mu q + (\partial_\mu g)q, \quad (6)$$

c'est-à-dire que  $\partial_\mu q$  ne se transforme pas comme  $q$ .

Pour y remédier définissons la dérivée covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu, \quad (7)$$

où  $A_\mu$  est le champ de jauge, qu'on appelle parfois potentiel. Dans une théorie non Abélienne,  $A_\mu$  est une matrice et il est implicite que  $\partial_\mu$  est multiplié par la matrice unité. Déterminons la loi de transformation  $A_\mu \rightarrow A'_\mu$  pour que  $D_\mu q$  se transforme comme  $q$ . On a

$$D_\mu q \rightarrow g\partial_\mu q + (\partial_\mu g)q + iA'_\mu gq = gD_\mu q - giA_\mu q + (\partial_\mu g)q + iA'_\mu gq. \quad (8)$$

Si les trois derniers termes de l'équation (8) se compensent, on aura la propriété recherchée. Il faut donc

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + i(\partial_\mu g)g^{-1} = g(A_\mu - i\partial_\mu)g^{-1}, \quad (9)$$

où on a utilisé la relation  $\partial_\mu(gg^{-1}) = 0$ .

L'équation de Dirac modifiée

$$i\gamma.Dq - Mq = 0, \quad (10)$$

est alors invariante sous les TJL simultanées

$$\begin{aligned} q &\rightarrow gq, \\ A &\rightarrow g(A - i\partial)g^{-1}. \end{aligned}$$

Puisque  $g$  est une matrice unitaire, la combinaison  $ig\partial g^{-1}$  est une matrice hermitique. Pour être compatible avec la loi de transformation (9) on impose au champ  $A$  d'avoir la même propriété et on le développe sur les générateurs de l'algèbre de Lie du groupe ( $T_\alpha, \alpha = 1, N_c^2 - 1$ , voir l'appendice pour les détails)

$$A_\mu = \sum_\alpha A_\mu^\alpha T_\alpha. \quad (11)$$

Le champ de jauge est donc spécifié par la donnée de  $(N_c^2 - 1)$  champs réels indépendants  $A_\mu^\alpha(x)$  dont les quanta sont les gluons. Notons que la position (en haut ou en bas) de l'indice  $\alpha$  est sans importance, *contrairement aux indices de Lorentz*.

Reste à trouver les équations qui déterminent les champs  $A_\mu$ , c'est-à-dire l'analogie des équations de Maxwell. Elles doivent bien sûr être invariantes sous une TJJ et le plus simple est de les dériver comme équations d'Euler-Lagrange d'une action invariante de jauge. Considérons le tenseur antisymétrique

$$F^{\mu\nu} = \sum_\alpha F_\alpha^{\mu\nu} T_\alpha = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + i[A^\mu, A^\nu], \quad (12)$$

où le dernier terme est le commutateur matriciel. On vérifie facilement que, dans une TJJ définie par (9), on a

$$F^{\mu\nu} \rightarrow g F^{\mu\nu} g^{-1}, \quad (13)$$

et donc la quantité

$$\text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (14)$$

est invariante de Lorentz et invariante de jauge par la propriété de la trace. L'action la plus simple que l'on puisse construire est

$$S(A, \bar{q}, q) = \int d^4x \left( -\frac{1}{2g_{QCD}^2} \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) + i\bar{q}\gamma \cdot D(A)q - M\bar{q}q \right), \quad (15)$$

où la sommation sur les indices de couleur des quarks est sous entendue. Le coefficient devant la trace dépend des unités et de la normalisation du champ de jauge et le signe est choisi pour avoir une densité d'énergie positive. Si on fait le changement d'échelle  $A \rightarrow g_{QCD}A$  on retrouve une définition souvent utilisée de l'action de QCD. Le choix de l'équation (15) permet de minimiser le nombre de fois où  $g_{QCD}$  apparaît dans les équations.

Il est clair que l'équation d'Euler-Lagrange de  $S(A, \bar{q}, q)$  par rapport au champ de quark est bien l'équation de Dirac invariante de jauge (10). Pour trouver celles que vérifie le champ de jauge il faut d'abord exprimer  $S(A, \bar{q}, q)$  en fonction des champs indépendants  $A_\mu^\alpha(x)$ . On obtient alors l'ensemble d'équations couplées

$$i\gamma \cdot \partial q - Mq = A \cdot \gamma q, \quad (16)$$

$$\partial_\mu F_\alpha^{\mu\nu} = g_{QCD}^2 \bar{q}\gamma^\nu T_\alpha q - f_{\alpha\beta\gamma} F_\beta^{\mu\nu} A_{\gamma\mu}. \quad (17)$$

Notons que les facteurs  $A \cdot \gamma$  ou  $\gamma^\nu T_\alpha$  agissent à la fois sur l'indice de Dirac et sur l'indice de couleur.

Si on compare avec l'électrodynamique, l'équation (16) est l'équivalent de l'équation du mouvement en présence de la force de Lorentz tandis que l'équation (17) donne la loi de Gauss ( $\nu = 0$ ) et la loi de Biot et Savart ( $\nu = 1, 2, 3$ ). On voit bien dans le second membre de l'équation (17) que les gluons contribuent au courant de couleur. Les deux autres équations de Maxwell sont implicites dans la définition (12) de  $F^{\mu\nu}$ .

### 3 Quantification canonique

#### 3.1 Système discret

Commençons par le cas le plus simple, c'est-à-dire un système à un degré de liberté, noté  $q(t)$ , dont le Lagrangien est

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q). \quad (18)$$

On suppose que le système est isolé, donc que  $L$  ne dépend du temps qu'à travers les coordonnées. Le moment conjugué de  $q$  est  $p = \partial L / \partial \dot{q} = m\dot{q}$ . On construit le Hamiltonien

$$H(p, q) = p\dot{q} - L = \frac{p^2}{2m} + V(q), \quad (19)$$

et on élève les variables conjuguées  $(p, q)$  au rang d'opérateurs, que l'on note  $(\hat{p}, \hat{q})$ . On postule alors les relations de commutation canoniques à temps égal ( $\hbar = 1$ )

$$[\hat{p}(t), \hat{q}(t)] = -i. \quad (20)$$

L'état d'un système quantique est décrit par un vecteur  $|\psi(t)\rangle$  dont l'évolution temporelle est donnée par l'équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(\hat{p}, \hat{q}) |\psi(t)\rangle.$$

Comme le Hamiltonien est indépendant du temps, les arguments,  $\hat{p}$  et  $\hat{q}$ , de  $H$  peuvent être évalués à  $t = 0$ , ce qui sera sous-entendu par la suite. Il est souvent commode d'utiliser une représentation où  $\hat{q}$  est diagonal au temps  $t = 0$

$$\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle \quad (21)$$

$$\langle q|q'\rangle = \delta(q - q'). \quad (22)$$

Dans cette représentation on a

$$\langle q|\hat{p}|\psi(t)\rangle = -i \frac{\partial}{\partial q} \psi(q, t) \quad (23)$$

où l'on a défini la fonction d'onde en représentation  $q$  :  $\langle q|\psi(t)\rangle = \psi(q, t)$ . Le problème se ramène alors à résoudre une équation différentielle

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(q, t) = \left( -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right) \psi(q, t). \quad (24)$$

Pour un système à  $N$  degrés de liberté la transposition est évidente. Partant du Lagrangien  $L(q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N)$  on définit les moments conjugués  $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ , on construit le Hamiltonien  $H(q_1, p_1, \dots, q_N, p_N)$  et on impose les relations de commutation  $[\hat{p}_i(t), \hat{q}_j(t)] = -i\delta_{ij}$ . En représentation  $q$  le système est décrit par une fonction d'onde  $\psi(q_1, \dots, q_N, t)$  qui satisfait l'équation de Schrödinger.

## 3.2 Théorie de champs

Dans une théorie de champs, les  $N$  coordonnées  $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t))$  sont remplacées par une fonction  $\phi(\vec{x}, t)$ . Imaginons que l'on a discrétisé l'espace avec un réseau cubique de maille  $a$  et dont on note les sites  $\vec{X}_i$ . On peut définir les coordonnées

$$\phi(\vec{X}_i, t) = \frac{1}{a^3} \int_a d\vec{x} \phi(\vec{x}, t), \quad (25)$$

et  $\phi(\vec{x}, t)$  peut être considéré comme la limite lorsque  $a$  tend vers zéro de l'ensemble des coordonnées  $\phi(\vec{X}_i, t)$ . On peut donc transposer les concepts du cas discret. Par exemple l'état du système dans la représentation où l'opérateur  $\hat{\phi}(\vec{X}_i, t = 0)$  est diagonal

$$\hat{\phi}(\vec{X}_i, t = 0)|\phi_i \rangle = \phi_i|\phi_i \rangle, \quad (26)$$

sera décrit par une fonction d'onde

$$\Psi(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N; t), \quad (27)$$

dont l'évolution temporelle sera donnée par une équation de Schrödinger

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\phi_1, \dots, \phi_N; t) = H(\phi_1, \dots, \phi_N; \hat{\Pi}_1, \dots, \hat{\Pi}_N) \Psi(\phi_1, \dots, \phi_N; t), \quad (28)$$

avec dans cette représentation

$$\hat{\Pi}_i = -i \frac{\partial}{\partial \phi_i}. \quad (29)$$

Puisque l'évolution temporelle est entièrement fixée par le Hamiltonien, il suffit de donner la fonction d'onde à  $t = 0$ , ce qui sera souvent sous entendu. Dans la suite, pour simplifier les équations, nous utiliserons la notation continue qui est plus compacte que la notation discrétisée. Nous noterons

$$\Psi(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) = \Psi[\phi(\vec{x})] \quad (30)$$

la fonction d'onde dans la représentation où l'opérateur  $\hat{\phi}(\vec{x})$  est diagonal

$$\hat{\phi}(\vec{x})|\phi(\vec{x}) \rangle = \phi(\vec{x})|\phi(\vec{x}) \rangle, \quad (31)$$

et

$$\hat{\Pi}(\vec{x}) = -i \frac{\delta}{\delta \phi(\vec{x})}. \quad (32)$$

etc... On gardera à l'esprit que les manipulations formelles avec les opérations fonctionnelles sont en fait justifiées par la discrétisation.

## 3.3 QCD

Essayons maintenant d'appliquer ces notions à QCD. On sait que les théories de jauge posent des difficultés spéciales parce que certaines variables ne sont pas indépendantes. La méthode générale pour quantifier de tels systèmes a été élaborée par Dirac[8] mais elle est un peu lourde à mettre en oeuvre. Nous nous contenterons d'une approche plus intuitive qui conduit au résultat correct.



D'après l'équation (15) le Lagrangien de QCD est, après évaluation de la trace

$$L(A, \bar{q}, q) = \int d\vec{x} \mathcal{L} = \int d\vec{x} \left( -\frac{1}{4g_{QCD}^2} F_{\alpha}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^{\alpha} + i\bar{q}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}q - A_{\alpha}^{\mu}\bar{q}\gamma_{\mu}T_{\alpha}q - M\bar{q}q \right). \quad (33)$$

Notons  $\Pi_{\mu}^{\alpha}$  et  $\Pi(q)$  les moments conjugués de  $A_{\alpha}^{\mu}$  et  $q$ . Par définition

$$\Pi(q) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 q} = iq^{\dagger} \quad (34)$$

$$\Pi_{\mu}^{\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial^0 A_{\alpha}^{\mu}} = -\frac{1}{g_{QCD}^2} F_{\mu 0}^{\alpha} \quad (35)$$

et un peu d'algèbre conduit au Hamiltonien

$$H = \int d\vec{x} \left( \frac{g_{QCD}^2}{2} \vec{\Pi}_{\alpha} \cdot \vec{\Pi}_{\alpha} + \frac{1}{2g_{QCD}^2} \vec{B}_{\alpha} \cdot \vec{B}_{\alpha} + h_q - \bar{q}\vec{\gamma} \cdot \vec{A}_{\alpha} T_{\alpha} q - A_{\alpha}^0 G_{\alpha} \right) \quad (36)$$

où l'on a défini le champ magnétique

$$B_{\alpha}^1 = F_{\alpha}^{23}, B_{\alpha}^2 = F_{\alpha}^{31}, B_{\alpha}^3 = F_{\alpha}^{12},$$

le Hamiltonien du quark libre

$$\int d\vec{x} h_q = \int d\vec{x} \left( -i\bar{q}\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} q + M\bar{q}q \right), \quad (37)$$

et l'opérateur de Gauss

$$G_{\alpha} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_{\alpha} - f_{\alpha\beta\gamma} \vec{\Pi}_{\beta} \cdot \vec{A}_{\gamma} - q^{\dagger} T_{\alpha} q \quad (38)$$

qui va être important dans la discussion sur le confinement.

### 3.3.1 Quarks

Pour les quarks, la définition (34) conduit à postuler les relations d'anticommution<sup>2</sup>

$$\{q_{\alpha}^{\dagger}(\vec{x}, t), q_{\alpha'}(\vec{x}', t)\} = \delta_{\alpha, \alpha'} \delta(\vec{x} - \vec{x}'). \quad (39)$$

afin de respecter l'antisymétrie par rapport à l'échange de deux quarks. Evidemment, puisque l'opérateur  $q$  n'est pas normal<sup>3</sup>, il ne peut pas être diagonalisé. Il n'y a donc pas de représentation diagonale et on sait qu'il faut utiliser la représentation en nombre d'occupation. C'est ce que nous ferons dans le calcul pratique, mais pour alléger la discussion de la section suivante nous utiliserons une notation pas très rigoureuse où  $q$  sera traité comme si il admettait une représentation diagonale.<sup>4</sup>

En pratique nous allons considérer les quarks comme des sources de couleur externes, ce qui revient à supposer qu'ils sont infiniment lourds. Il est clair que pour étudier le spectre des hadrons légers ou bien la symétrie chirale, cette approximation est insuffisante. Mais il y a un

<sup>2</sup>On restore provisoirement l'indice de spineur en espérant qu'il n'y a pas confusion avec l'indice de couleur  $\alpha$  !

<sup>3</sup>Il ne commute pas avec son hermitique conjugué.

<sup>4</sup>En fait le caractère fermionique des quarks ne joue pas de rôle dans ce cours. On aurait aussi bien pu prendre des bosons comme champs de matière.

consensus (quasi-) général<sup>5</sup> en faveur du fait que le confinement ne dépend pas de l'existence des quarks légers. En outre il n'y a pas pour l'instant de formulation satisfaisante de QCD non perturbatif avec des quarks légers.

Dans la limite  $M \rightarrow \infty$  on peut négliger les termes  $\gamma \cdot \vec{\nabla}$  et  $\bar{q} \vec{\gamma} \cdot \vec{A}_\alpha T_\alpha q$  car ils sont d'ordre  $1/M$  et la contribution des quarks au Hamiltonien se réduit à  $M$  multiplié par le nombre de quarks.

### 3.3.2 Gluons

Pour les gluons, un problème apparaît quand on considère la définition du moment conjugué  $\Pi_\mu^\alpha$ . En effet, en raison de l'antisymétrie de  $F_{\mu\nu}$  on a

$$\Pi_0^\alpha \equiv 0, \quad \forall t. \quad (40)$$

Si on élève  $\Pi_\mu^\alpha$  et  $A_\mu^\alpha$  au rang d'opérateurs et qu'on impose les relations de commutation

$$[\hat{\Pi}_\mu^\alpha(\vec{x}, t), \hat{A}_\nu^\beta(\vec{x}', t)] = -i\delta_{\alpha\beta}\eta_{\mu\nu}\delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (41)$$

alors, d'après l'expression (36), on a

$$[H, \hat{\Pi}_0^\alpha(\vec{x}, t)] = -iG^\alpha(\vec{x}, t). \quad (42)$$

Si  $\Pi_0^\alpha$  doit être nul quelque soit  $t$ , comme l'impose l'équation (40), il faut qu'il soit une constante du mouvement et donc il doit commuter avec  $H$ . D'après (42) ceci n'est possible que si on l'a aussi

$$G^\alpha(\vec{x}, t) = 0, \quad \forall t \quad (43)$$

c'est-à-dire si la loi de Gauss est satisfaite. Cependant il est facile de vérifier que

$$[H, G^\alpha(\vec{x}, t)] = 0, \quad (44)$$

ce qui montre que *si la loi de Gauss est satisfaite à  $t = 0$ , elle le sera à tout  $t$* , et à cause de l'équation (42), ce sera vrai aussi pour la condition  $\Pi_0^\alpha = 0$ .

Le fait que les deux conditions n'ont à être imposées qu'au temps  $t = 0$  rappelle le problème des conditions initiales en mécanique classique. En mécanique quantique les conditions initiales sont remplacées par la donnée d'un vecteur d'état (la fonction d'onde). L'interprétation correcte est donc que les seuls états admissibles, ou physiques, sont ceux qui vérifient, à  $t = 0$ , les deux contraintes

$$\hat{\Pi}_0^\alpha(\vec{x}, 0)|\text{Physique}\rangle = 0, \quad (45)$$

$$G^\alpha(\vec{x}, 0)|\text{Physique}\rangle = 0. \quad (46)$$

Remarquons que de telles contraintes sur les états sont compatibles car

$$[\hat{\Pi}_0^\alpha(\vec{x}, 0), G^\alpha(\vec{y}, 0)] = 0, \quad (47)$$

$$[G^\alpha(\vec{x}, 0), G^\beta(\vec{y}, 0)] = i\delta(\vec{x} - \vec{y})f_{\alpha\beta\gamma}G^\gamma(\vec{x}, 0). \quad (48)$$

Dans ce sous-espace le Hamiltonien se simplifie

<sup>5</sup>Voir cependant la ref.[9].

$$H = \int d\vec{x} \left( \frac{g_{QCD}^2}{2} \vec{\Pi}_\alpha \cdot \vec{\Pi}_\alpha + \frac{1}{2g_{QCD}^2} \vec{B}_\alpha \cdot \vec{B}_\alpha + h_q - \bar{q}\vec{\gamma} \cdot \vec{A}_\alpha T_\alpha q \right), \quad (49)$$

ou encore, dans la limite statique que nous considérons désormais

$$H = nM + \int d\vec{x} \left( \frac{g_{QCD}^2}{2} \vec{\Pi}_\alpha \cdot \vec{\Pi}_\alpha + \frac{1}{2g_{QCD}^2} \vec{B}_\alpha \cdot \vec{B}_\alpha \right). \quad (50)$$

La première contrainte (45) est facile à satisfaire. Dans la représentation où  $\hat{A}_\mu^\alpha(\vec{x}, t = 0)$  est diagonal, avec valeur propre  $A_\mu^\alpha(\vec{x})$ ,  $\hat{\Pi}_0^\alpha$  est proportionnel à la dérivée par rapport à  $A_0^\alpha$ . Il suffit donc que la fonction d'onde ne dépende que des composantes spatiales  $A_i^\alpha$ .

La seconde contrainte (46), la loi de Gauss, est beaucoup moins triviale et pour se persuader de son importance, remarquons que dans le Hamiltonien statique il n'y a plus de couplage entre les quarks et les gluons. Si confinement il y a, il provient certainement de la réalisation de la loi de Gauss.

## 4 L'espace des boucles

### 4.1 Forme intégrale de la loi de Gauss

Pour construire l'espace des états qui satisfont la contrainte (46) et dans lequel on doit diagonaliser le Hamiltonien (50), il est commode de remplacer l'équation différentielle (46) par sa forme intégrale.<sup>6</sup> Pour cela, considérons une matrice  $\omega(\vec{x}) = \omega^\alpha(\vec{x})T_\alpha$  fonction du point  $\vec{x}$  et construisons l'opérateur

$$Q(\omega) = - \int d\vec{x} \left[ \vec{\Pi}_\alpha \cdot \left( \vec{\nabla} \omega^\alpha + f^{\alpha\beta\gamma} \vec{A}_\beta \omega_\gamma \right) + q^\dagger T^\alpha q \omega_\alpha \right]. \quad (51)$$

Pour que cet opérateur existe, il faut

$$\omega^\alpha(\vec{x}) \rightarrow 0 \text{ quand } |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (52)$$

car on ne peut pas faire d'hypothèses trop restrictives sur le comportement des champs à l'infini. Tout ce que l'on peut exiger, c'est que la densité d'énergie tende vers zéro assez vite pour que le Hamiltonien existe. D'après l'expression (50), on voit que cela implique seulement

$$|\Pi| < 1/|\vec{x}|^{3/2} \text{ quand } |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (53)$$

ce qui n'est pas suffisant pour garantir l'existence de  $Q(\omega)$  pour  $\omega$  quelconque.

En utilisant les relations de commutation (39, 41) on démontre facilement l'égalité

$$\left[ Q(\omega), \vec{A} \right]_{op} = \left[ \omega, \vec{A} + i\vec{\nabla} \right] \quad (54)$$

<sup>6</sup>Dans la suite on ne spécifiera plus que les opérateurs sont évalués au temps  $t = 0$  et pour des raisons d'encombrement dans les notations on va omettre le chapeau qui servait à spécifier la nature opératoire de l'objet.

où l'indice "op" précise qu'il s'agit du commutateur des opérateurs, alors qu'à droite de l'équation (54) il s'agit du commutateur matriciel et du commutateur du gradient avec la fonction<sup>7</sup>. En raisonnant par récurrence on obtient

$$\left[ Q(\omega), \left[ Q(\omega), \dots \left[ Q(\omega), \vec{A} \right] \dots \right] \right]_{\text{op}} = \left[ \omega, \left[ \omega, \dots \left[ \omega, \vec{A} + i\vec{\nabla} \right] \dots \right] \right]. \quad (55)$$

et si on applique la formule de Baker, Capbell, Hausdorff

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \dots + \frac{1}{n!} [A, [A, \dots [A, B] \dots]] + \dots$$

d'une part aux opérateurs  $(Q(\omega), \vec{A})$ , d'autre part aux matrices et à l'opérateur  $\vec{\nabla}$ , la relation (55) implique alors

$$e^{iQ(\omega)} \vec{A} e^{-iQ(\omega)} = g(\vec{A} + i\vec{\nabla}) g^{-1}, \quad \text{avec } g = e^{i\omega(\vec{x})},$$

ou encore, en terme de composantes de couleur

$$e^{iQ(\omega)} \vec{A}_\alpha e^{-iQ(\omega)} = 2Tr \left( T_\alpha \left( g T_\beta g^{-1} \vec{A}_\beta + i g \vec{\nabla} g^{-1} \right) \right). \quad (56)$$

Un raisonnement similaire conduit à

$$e^{iQ(\omega)} q e^{-iQ(\omega)} = g q.$$

L'opérateur  $\exp(iQ(\omega))$  est donc une représentation de la transformation de jauge  $g(\omega)$ .

Retournons maintenant au problème initial, c'est-à-dire la réalisation de la loi de Gauss. En intégrant par partie l'expression (51) on voit que l'on a

$$Q(\omega) = \int d\vec{x} \omega_\alpha G^\alpha$$

le terme de surface étant nul puisque  $\omega(\infty) = 0$ . Donc la loi de Gauss (46) qui définit le sous-espace des états physiques est équivalente à

$$e^{iQ(\omega)} |\text{physique}\rangle = |\text{physique}\rangle,$$

ce qui revient à imposer que la fonction d'onde  $\Psi^{\text{phys.}}(\vec{A}, q)$  vérifie

$$\Psi^{\text{phys.}} \left( g(\vec{A} + i\vec{\nabla}) g^{-1}, gq \right) = \Psi^{\text{phys.}} \left( \vec{A}, q \right). \quad (57)$$

pour toutes les transformations de jauge  $g(\vec{x}) = \exp(i\omega(\vec{x}))$  qui tendent vers la matrice unité quand  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ .

Cette condition aux limites n'est pas importante dans les calculs pratiques sur réseau car les fonctions d'onde sont très localisées et donc insensibles au comportement à l'infini des transformations de jauge. Par contre elle joue un rôle important dans la formulation continue dans la limite d'un volume infini. En effet puisque tous les points à l'infini doivent donner la même valeur  $g(\infty) = 1$ , ils deviennent équivalents. On peut donc les identifier et l'espace  $\mathbb{R}^3$  devient la sphère à trois dimensions  $S_3$ . Les applications continues de  $S_3$  dans  $SU(N)$

<sup>7</sup>C'est le prix à payer pour avoir une notation compacte. En cas de doute on peut expliciter tous les indices.

peuvent être caractérisées par la classe d'homotopie[10] à laquelle elles appartiennent: deux applications sont dans la même classe si on peut les déformer continuellement l'une dans l'autre.

Par exemple, si on suppose que  $\omega(\vec{x})$  est continue partout, alors la suite

$$\{e^{it\omega(\vec{x})}, t \in [0, 1]\}$$

interpole de façon continue entre 1 et  $\exp(i\omega(\vec{x}))$ . La classe d'homotopie de  $g(\vec{x}) = \exp(i\omega(\vec{x}))$  est donc celle de l'identité. On dit aussi classe *triviale*.

Il est évident que si deux applications sont dans la même classe, elles diffèrent par un facteur multiplicatif qui est dans la classe triviale. Donc pour décrire toutes les applications continues de  $S_3$  dans  $SU(N)$  il suffit de considérer la classe triviale et un représentant dans les autres classes. L'ensemble des classes a une structure de groupe, dit groupe d'homotopie. Dans le cas  $S_3 \rightarrow SU(N)$ , il est isomorphe au groupe commutatif des entiers  $\mathbb{Z}$  et dans le cas particulier du groupe  $SU(2)$  on a une représentation simple

$$\{\exp[2in\pi\hat{x}^\alpha T_\alpha f(|\vec{x}|)], n \text{ entier, } f \text{ continue, } f(0) = 1, f(\infty) = 0\}$$

Mis à part les condition aux bornes,  $f$  est quelconque. On voit que cela correspond au choix

$$\omega^\alpha(\vec{x}) = 2n\pi f(|\vec{x}|)\hat{x}^\alpha \quad (58)$$

qui, sauf pour  $n = 0$ , n'est pas une fonction continue puisque la limite  $\vec{x} \rightarrow 0$  dépend du chemin suivi.

Si l'on revient sur la dérivation de la forme intégrale de la loi de Gauss, on voit qu'à aucun moment on n'a besoin d'imposer que  $\omega(\vec{x})$  soit continue. Il faut seulement que l'opérateur  $Q(\omega)$  existe, et que  $g(\vec{x}) = \exp(i\omega(\vec{x}))$  soit continue, ce qui est vrai pour une fonction du type (58). Donc la loi de Gauss est équivalente à l'invariance de la fonction d'onde sous toutes les transformations de jauge continues, y compris celles qui ne sont pas homotopiques à l'identité.

Cependant il existe un autre point de vue qui, heureusement, conduit en pratique au même résultat. Il consiste à imposer que  $\omega$  soit continue. Alors la fonction d'onde ne doit être invariante que sous les transformations de jauge triviales. Mais le Hamiltonien, lui, est invariant sous *toutes* les transformations de jauge. On a donc une symétrie et la fonction d'onde doit se transformer comme une représentation, qu'on peut choisir irréductible, du groupe de symétrie. Puisque la fonction d'onde est déjà invariante sous les transformations de jauge triviales, il suffit de considérer celles du groupe d'homotopie. Comme celui-ci est Abélien, ses représentations irréductibles sont de dimension un et de la forme

$$n \in \mathbb{Z} \rightarrow e^{in\theta}, \theta \in \mathbb{R}.$$

Dans cette optique la loi de Gauss s'écrirait donc

$$\Psi^{\text{phys.}}(g(\vec{A} + i\vec{\nabla})g^{-1}, gq) = e^{in\theta}\Psi^{\text{phys.}}(\vec{A}, q) \text{ si } g \in \text{classe } n.$$

Toutes les évidences phénoménologiques indiquent que le paramètre angulaire  $\theta$  est très petit, et probablement nul. Si on accepte la valeur  $\theta = 0$ , on voit alors que l'on aboutit à la même interprétation de la loi de Gauss, c'est-à-dire l'invariance des états physiques sous toutes les transformations de jauge continues. C'est ce qui sera sous entendu par la suite.

## 4.2 Les matrices de lien

Le but du jeu est de construire des objets, fonction de  $\vec{A}$  et  $q$  qui soient invariants de jauge. Ils serviront à construire les fonctions d'onde physiques.

Soit une courbe  $\mathcal{C}$  dans l'espace qui joint les points  $\vec{a}, \vec{b}$ . Considérons un point  $\vec{x}$  appartenant à la courbe et définissons la matrice de lien  $U(\vec{a}, \vec{x})$  par l'équation<sup>8</sup>

$$i\vec{v} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{a}, \vec{x}) = U(\vec{a}, \vec{x}) \vec{A}(\vec{x}) \cdot \vec{v}, \quad U(\vec{a}, \vec{a}) = 1, \quad (59)$$

où  $\vec{v}$  est la tangente à la courbe au point  $\vec{x}$  et le gradient est par rapport à  $\vec{x}$ . Implicitement  $U$  dépend de  $\vec{A}$  et  $\mathcal{C}$  et la condition initiale  $U(\vec{a}, \vec{a}) = 1$  ne s'applique évidemment qu'à une courbe de longueur nulle, par opposition à une courbe fermée. Formellement on a la solution

$$U(\vec{a}, \vec{x}) = P \exp \left( -i \int_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{l} \right)$$

où l'intégrale curviligne est calculée le long de  $\mathcal{C}$  et où  $P$  désigne le produit ordonné. En pratique, cette expression n'est pas utilisable pour une courbe quelconque.

On démontre facilement que la quantité

$$X(\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}) = U(\vec{a}, \vec{x}) U^\dagger(\vec{b}, \vec{x})$$

est en fait indépendante du point  $\vec{x}$  de la courbe. Pour le voir il suffit de multiplier l'équation (59) par  $U^\dagger(\vec{b}, \vec{x})$  et de retrancher l'hermitique conjuguée de la même équation où on a permuté  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . On en déduit

- $U(\vec{a}, \vec{x}) U^\dagger(\vec{a}, \vec{x}) = U(\vec{a}, \vec{a}) U^\dagger(\vec{a}, \vec{a}) = 1$ , donc  $U(\vec{a}, \vec{x})$  est unitaire.
- $U(\vec{a}, \vec{x}) U^\dagger(\vec{b}, \vec{x}) = U(\vec{a}, \vec{b}) U^\dagger(\vec{b}, \vec{b}) = U(\vec{a}, \vec{b})$ .
- $U(\vec{b}, \vec{a}) = U(\vec{b}, \vec{x}) U^\dagger(\vec{a}, \vec{x}) = U^\dagger(\vec{a}, \vec{b})$ .
- $U(\vec{a}, \vec{x}) U(\vec{x}, \vec{b}) = U(\vec{a}, \vec{b})$ .

En pratique, c'est cette dernière propriété qui est utilisée pour calculer  $U$ . En effet il suffit de découper la courbe en segments  $(\vec{x}_i, \vec{x}_i + d\vec{x}_i)$  suffisamment petits pour que  $\vec{A}$  soit constant et la solution est

$$U(\vec{x}_i, \vec{x}_i + d\vec{x}_i) = e^{-i\vec{A}(\vec{x}_i) \cdot d\vec{x}_i}. \quad (60)$$

Cherchons maintenant la transformée  $U_g$  de  $U$  quand  $\vec{A}$  est soumis à une transformation de jauge  $\vec{A}(\vec{x}) \rightarrow \vec{A}_g = g \left( \vec{A} + i\vec{\nabla} \right) g^{-1}$ . On voit facilement que si  $U(\vec{a}, \vec{x})$  satisfait l'équation (59) alors

$$i\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( U(\vec{a}, \vec{x}) g^{-1}(\vec{x}) \right) = U(\vec{a}, \vec{x}) g^{-1}(\vec{x}) \vec{A}_g(\vec{x}) \cdot \vec{v}.$$

Donc  $U_g^{-1}$  vérifie la même équation linéaire que  $U_g$ . Par conséquent on a

$$U_g(\vec{a}, \vec{x}) = K U(\vec{a}, \vec{x}) g^{-1}(\vec{x}),$$

<sup>8</sup>Attention, ici  $\vec{A} = \vec{A}_\alpha T^\alpha$  et  $\vec{A}_\alpha$  désigne évidemment la valeur propre de l'opérateur de champ. C'est une collection de nombres réels.

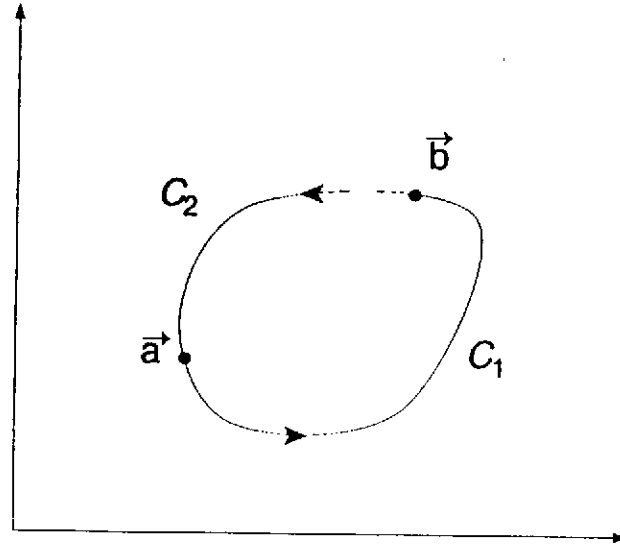


Figure 1:

et la condition  $U_g(\vec{a}, \vec{a}) = U(\vec{a}, \vec{a}) = 1$  entraîne  $K = g(\vec{a})$ .

En résumé nous avons obtenu la propriété fondamentale des matrices de lien

$$U(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow g(\vec{a})U(\vec{a}, \vec{b})g^{-1}(\vec{b}) \text{ quand } \vec{A}(\vec{x}) \rightarrow g(\vec{x}) \left( \vec{A} + i\vec{\nabla} \right) g^{-1}(\vec{x}), \quad (61)$$

qui va nous permettre de construire des objets invariants de jauge, comme on le montre dans la suite de cette section.

On se souvient que la matrice de lien  $U(\vec{a}, \vec{b})$  dépend de la courbe  $C$  qui relie  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ . Dans les paragraphes suivants nous devons le préciser en la notant  $U(\vec{a}, C, \vec{b})$ . Considérons une courbe orientée fermée  $C$  et deux points  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sur cette courbe. Soit  $C_1$  le premier segment de courbe qui va de  $\vec{a}$  à  $\vec{b}$ , et  $C_2$  celui qui ferme la courbe (voir figure 1). On a

$$\begin{aligned} U(\vec{a}, C, \vec{a}) &= U(\vec{a}, C_1, \vec{b})U(\vec{b}, C_2, \vec{a}), \\ U(\vec{b}, C, \vec{b}) &= U(\vec{b}, C_2, \vec{a})U(\vec{a}, C_1, \vec{b}) \neq U(\vec{a}, C, \vec{a}), \end{aligned}$$

mais, en raison de la propriété de la trace, la variable de boucle définie par

$$L(C) = \text{Tr}(U(\vec{a}, C, \vec{a})) = \text{Tr}(U(\vec{b}, C, \vec{b}))$$

est indépendante du point choisi pour la calculer. Elle est aussi invariante de jauge puisque

$$L(C) = \text{Tr}(U(\vec{a}, C, \vec{a})) \rightarrow \text{Tr}(g(\vec{a})U(\vec{a}, C, \vec{a})g^{-1}(\vec{a})) = \text{Tr}(U(\vec{a}, C, \vec{a})) = L(C).$$

Les variables de boucle peuvent être calculée sur le réseau en utilisant la propriété

$$U(\vec{a}, \vec{x})U(\vec{x}, \vec{b}) = U(\vec{a}, \vec{b}),$$

et constituent la base de l'espace des états physiques sans quarks. Pour tenir compte de ces derniers il faut rajouter les liens ouverts avec un quark et un anti-quark à chaque bout. Par exemple si

$$|(\vec{a}, m), (\vec{b}, n) \rangle$$

est l'état qui décrit un quark statique en  $\vec{a}$  avec l'indice de couleur  $m$  et un antiquark en  $\vec{b}$  avec l'indice  $n$ , un état invariant de jauge sera

$$\sum_{m,n} U_{mn}(\vec{a}, \vec{b}) |(\vec{a}, m), (\vec{b}, n) \rangle$$

où  $U$  est la matrice de lien pour une courbe (quelconque) qui joint  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ .

## 5 Les lois d'échelle

### 5.1 Régularisation

Si, comme nous le supposons, l'effet dynamique des quarks n'a pas une influence qualitative sur le confinement, nous nous retrouvons avec une théorie qui n'a pas de paramètre dimensionné. Par conséquent toutes les observables dimensionnées vont être proportionnelles à une certaine puissance de la maille du réseau. Comme à la fin du calcul il faut faire  $a \rightarrow 0$ , il faut introduire une échelle d'énergie de façon consistante avec cette limite.

Notons tout d'abord que la régularisation introduite par l'équation (25) n'était jusqu'à présent qu'un artifice mathématique pour traiter une théorie de champ comme un système discret. En fait la régularisation est une nécessité physique de la quantification. En effet le concept de champ continu doit être considéré comme une idéalisation puisque, pour le mesurer avec une résolution parfaite, le principe d'incertitude nous dit qu'il faudrait une énergie infinie. Il faut donc incorporer cette limitation dans l'approche théorique et c'est le rôle de la régularisation.

Si la théorie a une limite lorsqu'on laisse tendre la résolution vers zéro, la façon de régulariser ne doit pas avoir d'importance pour les résultats physiques. Ici nous avons choisi la régularisation par le réseau parce qu'elle permet de satisfaire les contraintes de la loi de Gauss, c'est-à-dire l'invariance de jauge des états physiques. Ceci a une double importance.

- D'une part nous avons vu que dans la limite statique les quarks n'interagissent qu'à travers la loi de Gauss. Il faut donc la satisfaire correctement si on veut obtenir le potentiel de confinement.
- D'autre part la théorie de perturbation nous a enseigné que la renormalisation d'une théorie de jauge n'est possible que grâce à des compensations entre les divergences quadratiques des diagrammes de Feynman. Ces compensations ne se font que si le calcul respecte exactement l'invariance de jauge. Dans le cas non perturbatif on peut imaginer que quelque chose d'analogue se produit. Si le calcul (numérique) ne respecte pas exactement l'invariance de jauge, la renormalisation échouera en ce sens que la théorie n'aura pas de limite quand  $a \rightarrow 0$ .

Pour terminer cette discussion sur la régularisation, notons qu'elle a des conséquences observables qui sont confirmées par l'expérience. En effet le fait d'introduire une résolution brise certaines symétries du Lagrangien de départ. Lorsque la résolution tend vers zéro toutes ne sont pas restaurées. Ce sont les anomalies, un phénomène purement quantique mais bien tangible. Par exemple la désintégration  $\pi_0 \rightarrow 2\gamma$  est correctement prédite par l'anomalie associée à la violation de la symétrie axiale isoscalaire[11].



## 5.2 Groupe de renormalisation

Dans cette section, comme il n'y a pas de risque de confusion entre la constante de couplage et la transformation de jauge, on note  $g = g_{QCD}$ . Au passage insistons sur le fait qu'il s'agit de la constante de couplage nue, qu'il ne faut pas confondre avec la constante de couplage renormalisée  $g_R(Q^2)$  qui dépend d'une échelle d'énergie externe (cinématique).

Pour des raisons historiques on présente la renormalisation en considérant la limite  $(1/a) = K \rightarrow \infty$ , ce qui évidemment ne change pas le problème et pour simplifier la discussion nous allons considérer des observables qui ne dépendent pas d'une échelle d'énergie externe. C'est le cas pour la masse d'une particule, son rayon carré moyen, la tension de la corde, etc... C'est suffisant pour notre propos. On trouvera une discussion plus complète dans les références [12, 13, 14].

Supposons que, pour  $K$  et  $g$  donnés, on soit capable de calculer<sup>9</sup>, à partir du Hamiltonien de QCD, une observable de référence  $O_R(K, g)$  dont la valeur expérimentale  $O_R^{exp}$  est connue. Si  $K$  est grand devant toutes les échelles d'énergie qui contrôlent la valeur de  $O_R^{exp}$  alors on doit avoir

$$O_R(K, g) = O_R^{exp},$$

ce qui constitue une équation implicite pour  $g$

$$g = g(K, O_R^{exp}) = g(K),$$

car  $O_R^{exp}$  est un nombre fixé si nous gardons la même observable de référence.

On utilise ensuite cette valeur  $g(K)$  pour calculer d'autres observables  $O, O' \dots$  et si la théorie a un sens, alors  $O(K, g(K))$  doit devenir indépendant de  $K$  lorsque  $K \rightarrow \infty$ . Ceci implique que toute observable doit, pour  $K$  assez grand, satisfaire l'équation du groupe de renormalisation

$$\frac{\partial O}{\partial K} + \frac{dg}{dK} \frac{\partial O}{\partial g} = 0. \quad (62)$$

On peut résoudre cette équation si on connaît la fonction de Callan-Zymanzik  $\beta_{CZ}(g)$  définie par

$$\beta_{CZ}(g) = K \left[ \frac{dg}{dK} \right]_{K=K(g)}, \quad (63)$$

où  $K(g)$  est la fonction inverse de  $g(K)$ . En effet une observable qui ne dépend pas d'une échelle externe est, pour des raisons dimensionnelles, de la forme

$$O(K, g) = K^D \tilde{O}(g),$$

où  $D$  est la dimension de  $O$  ( $D = 1$  pour une masse etc...). L'équation (62) s'écrit donc

$$D \tilde{O}(g) + \beta_{CZ}(g) \frac{d\tilde{O}}{dg} = 0,$$

dont la solution est

$$\tilde{O}(g) = \tilde{O}(g_0) \exp \left( - \int_{g_0}^g dz \frac{D}{\beta_{CZ}(z)} \right). \quad (64)$$

Dans l'équation (64)  $g$  et  $g_0$  doivent correspondre à des valeurs de  $K$  grandes car c'est dans ces conditions que l'équation (62) doit être satisfaite. Donc on n'a besoin de  $\beta_{CZ}(g)$  que dans cette région qu'il nous faut définir.

<sup>9</sup>Voir section 8.

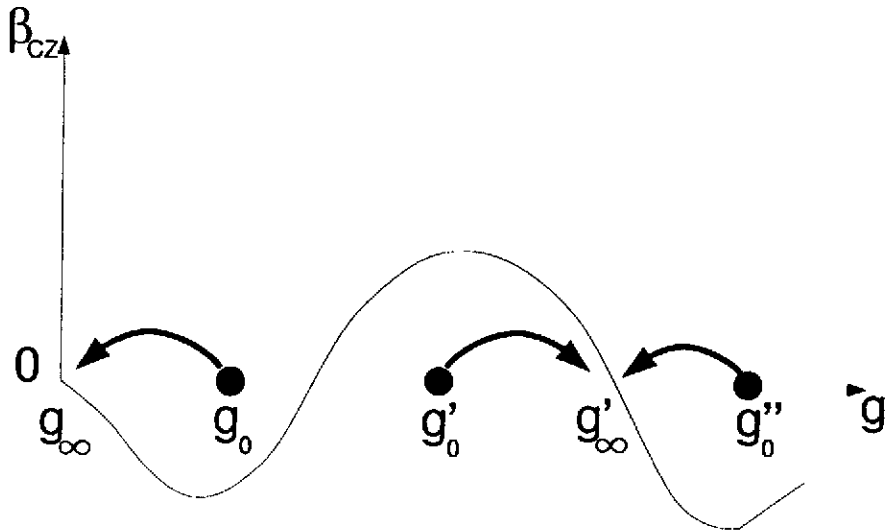


Figure 2:

Pour cela montrons d'abord que  $g(K \rightarrow \infty)$  est solution de  $\beta_{CZ}(g) = 0$ . Si on pose  $u = \ln(K)$ , la définition (63) s'écrit

$$\frac{dg}{du} = \beta_{CZ}(g), \quad (65)$$

dont la solution formelle est

$$g(u) = \int_{u_0}^u dv \beta[g(v)].$$

Par hypothèse  $g(\infty)$  existe et donc l'intégrale doit avoir une limite quand  $u \rightarrow \infty$  ce qui implique

$$\beta_{CZ}[g(\infty)] = 0. \quad (66)$$

Supposons que l'observable  $O$  soit une masse. Etant donné que le Hamiltonien (50) est une fonction paire de  $g$ ,  $O$  est aussi une fonction paire ainsi que  $\partial O / \partial K$ . Par contre  $\partial O / \partial g$  est impaire et donc l'équation (62) montre que  $\beta_{CZ}(g)$  est une fonction impaire de  $g$ . Par conséquent si  $\beta_{CZ}(0)$  existe, ce que nous supposons, on a  $\beta_{CZ}(0) = 0$ , c'est-à-dire que  $g(\infty) = 0$  est une solution possible de l'équation (66). Le problème est de savoir si c'est la bonne solution, car la fonction  $\beta_{CZ}(g)$  peut avoir d'autres zéros.

Considérons pour cela l'équation (65) et essayons de la résoudre par itération en partant d'une valeur  $g_0$  correspondant à un cutoff<sup>10</sup>  $u_0 = \ln K_0$ . Soit

$$u_1 = u_0 + \Delta u, \quad g_1 = g(u_1),$$

...

$$u_n = u_{n-1} + \Delta u, \quad g_n = g(u_n)$$

et supposons que la fonction  $\beta_{CZ}$  a la forme de la figure 2. Si on part du point  $g_0$ , on a  $dg/du = \beta_{CZ}(g_0) < 0$  et donc

$$g_1 \sim g_0 + \Delta u \frac{dg}{du} < g_0.$$

<sup>10</sup>désolé...

A l'itération suivante on se retrouve dans la même situation donc la suite va converger vers la solution  $g_\infty = 0$ . Par contre si on part des points  $g'_0$  ou  $g''_0$  la suite va converger vers  $g'_\infty \neq 0$ . Tous les cas sont possibles a priori mais la région  $g \sim 0$  peut être étudiée avec la théorie de perturbation et on trouve [15]

$$\beta_{CZ}(g) = -\frac{11N_c}{48\pi^2}g^3 + O(g^5). \quad (67)$$

Puisque  $\beta < 0$ , on est dans la situation de la liberté asymptotique: si le point de départ  $g_0$  (correspondant au cutoff  $K_0$ ) est suffisamment près de zéro, alors la limite continue de QCD est au point  $g = 0$ .

Ceci n'est cependant pas garanti puisque la détermination de  $g_0$  passe par un calcul non perturbatif. Par exemple il se pourrait que, pour n'importe quelle valeur de  $K_0$ , la comparaison entre le calcul et la valeur physique d'une observable donne une valeur de  $g_0$  dans la région de  $g'_0$  ou  $g''_0$  comme sur la figure 2.

### 5.3 Lois d'échelle

Pour se convaincre que ce n'est pas le cas, on suppose que l'équation (67) est correcte et on l'utilise pour établir la relation entre  $g$  et  $K$  en intégrant l'équation (63), ce qui donne

$$\frac{1}{g^2(K)} - \frac{11N_c}{24\pi^2} \ln(K) = \frac{1}{g^2(K_0)} - \frac{11N_c}{24\pi^2} \ln(K_0).$$

Cette combinaison est manifestement indépendante de  $K$  et on peut donc introduire l'échelle absolue de QCD,  $\Lambda$ , en posant

$$\frac{1}{g^2(K_0)} - \frac{11N_c}{24\pi^2} \ln(K_0) = -\frac{11N_c}{24\pi^2} \ln \Lambda,$$

d'où la relation

$$\frac{1}{g^2(K)} = \frac{11N_c}{24\pi^2} \ln \left( \frac{K}{\Lambda} \right). \quad (68)$$

Notons que  $\Lambda$  n'est pas le paramètre introduit dans la renormalisation perturbative, mais on peut les relier. Par exemple si on compare au schéma de soustraction<sup>11</sup> MOM on trouve [16] au même ordre des perturbations et pour  $N_c = 2$

$$\Lambda_{MOM} = 57.5\Lambda. \quad (69)$$

Si on utilise à nouveau l'approximation (67) dans l'équation (64) on déduit l'évolution d'une observable en fonction de  $g$

$$\tilde{O}(g) = C^{te} \times \exp \left( -\frac{12\pi^2 D}{11N_c^2} \frac{2N_c}{g^2} \right). \quad (70)$$

Dans l'expression (70) on a fait apparaître le paramètre traditionnel  $\beta = 2N_c/g^2$  qu'il ne faut pas confondre avec  $\beta_{CZ}$ .

On voit donc que si la limite continue de QCD correspond bien à  $g = 0$ , le graphe de  $\ln \tilde{O}$  en fonction de  $\beta$  doit être une droite avec une pente  $p$  bien déterminée  $p = -12\pi^2 D/11N_c^2$ . Ceci peut être testé par les calculs sur réseau.

<sup>11</sup>Momentum subtraction scheme.

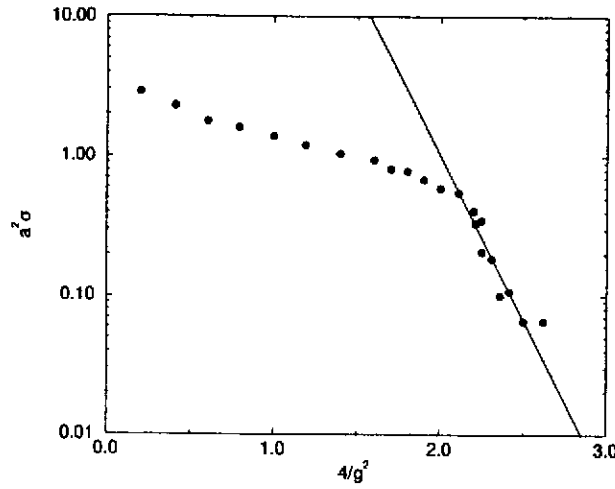


Figure 3: Les points sont le résultat du calcul de la ref. [17]. La pente de la droite est la prédiction perturbative.

Il faut une quantité du type  $\tilde{O}$ , c'est -à-dire qui ne dépend que de  $g$ , et la plus simple à calculer sur le réseau est la tension de la corde<sup>12</sup>  $\sigma$  multipliée par  $a^2$ . Sur la figure 3 on a reproduit le calcul historique de M. Creutz pour  $N_c = 2$  [17], c'est-à-dire  $\sigma a^2$  en fonction de  $g$  jusqu'à  $\beta = 2.6$ . Au delà, les effets de taille finie du réseau deviennent dominants. Pour  $\beta > 2.2$  les points s'alignent à peu près sur une droite dont la pente coïncide avec la prédiction perturbative<sup>13</sup>,  $p = 6\pi^2/11$ . On dit qu'on a atteint le régime asymptotique. Dans le cas  $N_c = 3$ , le résultat est similaire [12, 18], l'évolution perturbative commençant à  $\beta = 6/g^2 \sim 6$ .

Une autre façon de présenter le résultat de ce calcul est d'en tirer  $g(K)$  en imposant que  $\sigma$  soit égale à sa valeur expérimentale  $\sigma^{\text{exp.}} \sim (420\text{MeV})^2$ , ce qui donne la valeur de  $a$  pour chaque point de la courbe de la figure 3. Le résultat est montré sur la figure 4 où on a tracé  $g^2$  en fonction de  $K = 1/a$ . A partir de  $K = 600\text{MeV}$  les points sont en bon accord avec la courbe continue qui est la prédiction perturbative de l'équation (68) avec  $\Lambda \sim 4\text{MeV}$ . Cette valeur n'est pas déterminée de façon très précise car la variation logarithmique est très lente. D'après l'équation (69) elle correspond à  $\Lambda_{\text{MOM}} \sim 230\text{MeV}$  ce qui est le bon ordre de grandeur. Une comparaison plus précise avec les valeurs déduites des expériences à haute énergie serait un peu hasardeuse car  $\Lambda_{\text{MOM}}$  dépend du nombre de saveurs de quarks, alors qu'ici ils ne jouent aucun rôle dynamique. D'autre part le petit écart entre la courbe asymptotique et les points du calcul indique qu'il faudrait peut être utiliser l'ordre supérieur des perturbations pour  $\beta_{\text{CZ}}$ .

En conclusion, nous avons une bonne évidence que la limite continue de QCD est effectivement à  $g = 0$ . Il est aussi apparent que les lois d'échelle asymptotiques définies par l'équation (70) sont vérifiées à partir d'une valeur de  $K$  relativement basses. En effet si on prend  $\beta \sim 2.2$  comme point de départ du régime asymptotique, la valeur correspondante du cutoff est  $a \sim 0.3\text{fm}$  ou encore  $K \sim 660\text{MeV}$ .

Si on suppose que le régime asymptotique est parfaitement établi à partir d'une valeur

<sup>12</sup>C'est le terme linéaire du potentiel statique entre quarks.

<sup>13</sup>Dans la revue [15] il y a une coquille dans la figure 34. La pente indiquée est  $p = 16\pi^2/11$  au lieu de  $p = 6\pi^2/11$ . Certains auteurs ont reproduit religieusement cette erreur, mais on ne sait pas s'ils ont réussi à la démontrer.

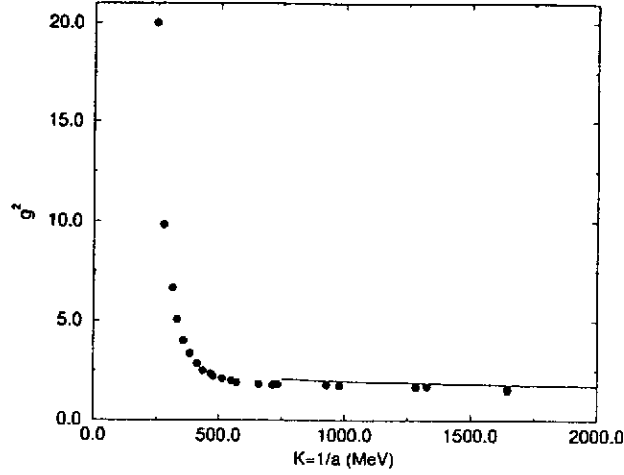


Figure 4: Variation de  $g^2$  en fonction de  $K$ . Les points sont déduits de ceux de la figure 3. La courbe continue est la prédiction perturbative de l'éq.(68) avec  $\Lambda = 4\text{MeV}$ .

critique  $\beta_c$  et pour toutes les observables, il est évident que le rapport de deux observables de même dimension<sup>14</sup> est indépendant de  $\beta$  pour  $\beta > \beta_c$ , puisque la dépendance est alors entièrement déterminée par l'équation (70). La valeur calculée à  $\beta = \beta_c$  est donc la valeur de la limite continue et la valeur absolue d'une observable  $O$  de dimension  $D$  est reliée à la valeur physique de la tension de la corde selon

$$O = (420\text{MeV})^D \frac{\tilde{O}(\beta_c)^{D-2}}{[a^2\sigma](\beta_c)}.$$

## 6 Matrice de transfert et intégration fonctionnelle

### 6.1 La matrice de transfert

Dans la section précédente nous avons anticipé en présentant des résultats de calculs sur réseau. Il s'agit maintenant d'expliquer la méthode de calcul. La première étape est la formulation du problème sous forme d'intégrale fonctionnelle et pour cela nous partons de la matrice de transfert.

Bien que QCD ait un domaine de validité énorme, il est clair que pour les calculs non perturbatifs sur réseau, nous sommes intéressés essentiellement aux systèmes près de leur l'état fondamental, par exemple le vide à basse température, le nucléon et peut être ses premiers états excités. Pour cela, la méthode de la matrice de transfert est bien adaptée. De plus cette méthode a cet avantage qu'il n'est pas nécessaire de construire explicitement tout l'espace des états invariants de jauge, comme ce serait le cas si on voulait diagonaliser le Hamiltonien [12, 19].

Considérons d'abord le cas général et donnons-nous un Hamiltonien  $H$  et  $|X\rangle$  un état quelconque, qui n'est pas état propre de  $H$ . Les états propres de ce dernier sont notés  $|n\rangle$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad E_0 < E_1 < \dots$$

<sup>14</sup>Si elles n'ont pas la même dimension il suffit de prendre le rapport des puissances appropriées.

La matrice de transfert  $\mathcal{T}$  est définie par

$$\mathcal{T}(t) = \langle X | e^{-Ht} | X \rangle,$$

et, en insérant un ensemble d'états propres de  $H$ , elle s'écrit

$$\mathcal{T}(t) = \sum_n |\langle X | n \rangle|^2 e^{-E_n t} = e^{-E_0 t} \left[ |\langle X | 0 \rangle|^2 + \sum_{n \geq 1} |\langle X | n \rangle|^2 e^{-(E_n - E_0)t} \right]. \quad (71)$$

Comme  $E_n - E_0 > 0$ , le deuxième terme de l'expression entre crochets tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini. Donc, à condition que l'état  $|X\rangle$  ait un recouvrement non nul avec  $|0\rangle$ , le premier terme va dominer la somme<sup>15</sup> et on aura

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-\ln(\mathcal{T}(t))}{t} = E_0, \quad (72)$$

ce qui montre que si on sait calculer la matrice de transfert on peut en extraire l'énergie de l'état d'énergie le plus bas qui a un recouvrement avec l'état  $|X\rangle$ . En changeant ce dernier, on sélectionnera l'état fondamental avec les nombres quantiques voulu. Remarquons que la normalisation de  $\mathcal{T}(t)$  peut être changée par un facteur indépendant du temps sans que cela affecte la valeur de  $E_0$ .

En fait c'est tout ce dont nous avons besoin pour calculer le potentiel quark-antiquark, mais l'expression (71) montre qu'une fois  $E_0$  déterminée, on a aussi accès à la fonction d'onde. On peut aussi calculer directement la valeur moyenne d'un opérateur  $v$  à condition d'évaluer

$$\mathcal{T}(t, \lambda) = \langle X | e^{-(H + \lambda v)t} | X \rangle,$$

car on a

$$\langle 0 | v | 0 \rangle = \left. \frac{\partial E_0(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (73)$$

Venons-en maintenant au potentiel entre un quark et un antiquark statiques. Soit  $|\Omega\rangle$  un état ayant les nombres quantiques du vide et  $|R\rangle$  un état invariant de jauge décrivant un système avec un quark et un antiquark, séparés par une distance  $R$ . Posons

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(t, \Omega) &= \langle \Omega | e^{-Ht} | \Omega \rangle, \\ \mathcal{T}(t, R) &= \langle R | e^{-Ht} | R \rangle, \end{aligned}$$

où  $H$  est le Hamiltonien de QCD, éq.(50). D'après (72),  $(-\ln(\mathcal{T}(t, \Omega))/t)$  tend vers l'énergie du vide exact et  $(-\ln(\mathcal{T}(t, R))/t)$  tend vers l'énergie de l'état propre de QCD avec un quark et un antiquark séparés par une distance  $R$ . Le potentiel est donc

$$V_{q\bar{q}}(R) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-\ln(\mathcal{T}(t, R))/t + \ln(\mathcal{T}(t, \Omega))/t) - 2M.$$

On peut simplifier un peu en remarquant que l'on a

<sup>15</sup>Ceci suppose qu'il y a un intervalle fini entre le fondamental et le premier état excité. C'est la raison pour laquelle la méthode ne peut pas être utilisée dans le cas de la diffusion.

$$\langle R|e^{-Ht}|R \rangle = e^{-2Mt} \langle R|e^{-H_g t}|R \rangle,$$

où  $H_g$  est la partie purement gluonique de  $H$ . On voit donc que les termes dépendant des masses se compensent et on a

$$V_{q\bar{q}}(R) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \ln \frac{\mathcal{T}_g(t, R)}{\mathcal{T}_g(t, \Omega)}, \quad (74)$$

où l'indice  $g$  indique que  $\mathcal{T}$  doit être évalué avec  $H_g$ .

Dans la section 4.2, nous avons vu comment construire un état  $|R \rangle$  invariant de jauge en utilisant les matrices de lien. Il nous reste à trouver le moyen de calculer la valeur moyenne de l'opérateur  $\exp(-H_g t)$  entre de tels états.

## 6.2 Evaluation par l'intégrale fonctionnelle.

Nous allons considérer un système à un degré de liberté, la transposition à QCD étant ensuite évidente. Le système quantique est défini par

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2M} + V(\hat{q}), \quad (75)$$

où  $\hat{q}, \hat{p}$  sont les opérateurs position et moment conjugué qui satisfont les relations de commutation  $[\hat{p}, \hat{q}] = -i$ . Il nous suffit de savoir calculer

$$\mathcal{T}(t) = \langle q_f = q_N | e^{-Ht} | q_i = q_0 \rangle$$

pour pouvoir ensuite évaluer n'importe quel élément de matrice de l'opérateur  $\exp(-Ht)$ .

Divisons l'intervalle de temps  $t$  en  $N$  intervalles  $\delta t = t/N$  et écrivons

$$\mathcal{T}(t) = \int dq_1 \dots dq_{N-1} \langle q_N | e^{-H\delta t} | q_{N-1} \rangle \dots \langle q_{i+1} | e^{-H\delta t} | q_i \rangle \dots \langle q_1 | e^{-H\delta t} | q_0 \rangle.$$

On a, pour  $\delta t$  suffisamment petit,

$$\begin{aligned} \langle q_{i+1} | e^{-H\delta t} | q_i \rangle &= \int dp_{i+1} \langle q_{i+1} | p_{i+1} \rangle \langle p_{i+1} | e^{-H\delta t} | q_i \rangle \\ &\simeq \int dp_{i+1} \langle q_{i+1} | p_{i+1} \rangle \langle p_{i+1} | 1 - \delta t \left( \frac{\hat{p}^2}{2M} + V(\hat{q}) \right) | q_i \rangle \\ &= \int dp_{i+1} \langle q_{i+1} | p_{i+1} \rangle \langle p_{i+1} | q_i \rangle \left( 1 - \delta t \left( \frac{p_{i+1}^2}{2M} + V(q_i) \right) \right) \\ &\simeq \int \frac{dp_{i+1}}{(2\pi)^3} \exp(ip_{i+1}(q_{i+1} - q_i)) \exp \left( -\delta t \left( \frac{p_{i+1}^2}{2M} + V(q_i) \right) \right) \\ &= \int \frac{dp_{i+1}}{(2\pi)^3} \exp \left( -\delta t \left( \frac{p_{i+1}^2}{2M} - ip_{i+1}\dot{q}_i + V(q_i) \right) \right), \end{aligned}$$

où l'on a défini<sup>16</sup> la vitesse

<sup>16</sup>Ce n'est pas une vitesse physique car, puisqu'on intègre sur  $q_i$  et  $q_{i+1}$ , elle est en général supérieure à un.

$$\dot{q}_i = \frac{q_{i+1} - q_i}{\delta t}.$$

L'intégration sur  $p_{i+1}$  peut être faite explicitement car

$$\int \frac{dp_{i+1}}{(2\pi)^3} \exp\left(-\delta t \left(\frac{p_{i+1}^2}{2M} - ip_{i+1}\dot{q}_i\right)\right) = C^{te} \exp\left(-\frac{M\dot{q}_i^2}{2}\delta t\right),$$

où la constante est sans importance. On obtient finalement

$$\langle q_{i+1} | e^{-H\delta t} | q_i \rangle = C^{te} \exp(-\delta t L(q_i, \dot{q}_i)),$$

où l'on a défini le Lagrangien Euclidien

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{M\dot{q}_i^2}{2} + V(q_i).$$

La matrice de transfert s'écrit donc

$$\mathcal{T}(t) = C^{te} \int dq_2 \dots dq_{N-1} \exp\left(-\delta t \sum_i L(q_i, \dot{q}_i)\right) \quad (76)$$

et, en définissant les "trajectoires"  $q(t)$  par

$$q(0) = q_0, \quad q(\delta t) = q_1, \quad q(2\delta t) = q_2, \dots, \quad q(t) = q_N,$$

ceci s'écrit encore de façon symbolique

$$\mathcal{T}(t) = C^{te} \int [dq] \exp\left(-\int dt L(q, \dot{q})\right). \quad (77)$$

où  $\int [dq]$  désigne l'intégration sur toutes les trajectoires qui satisfont  $q(0) = q_0, q(t) = q_N$ .

Notons quelques points concernant la représentation (77) de la matrice de transfert:

- En pratique, c'est l'équation (76) qu'on doit utiliser. L'équation (77) n'est qu'une notation compacte pour l'expression (76)
- Pour un système qui admet un état fondamental, on peut toujours choisir  $V(q) > 0$ . Par suite on a aussi  $L(q, \dot{q}) > 0$ , et donc le facteur  $\exp(-\int dt L(q, \dot{q}))$  peut être considéré comme une densité de probabilité, ce qui permet d'évaluer l'intégrale par des méthodes d'échantillonnage statistique de type Monte-Carlo.
- Si, au lieu de calculer la matrice de transfert, on avait calculé le propagateur  $\exp(-iHt)$  on aurait évidemment abouti au résultat

$$\langle q_N | e^{-iHt} | q_0 \rangle = C^{te} \int [dq] \exp\left(-i \int dt L(q, \dot{q})\right)$$

avec

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{M\dot{q}_i^2}{2} - V(q_i).$$

Cette représentation fonctionnelle peut être très utile dans les développements formels, en particulier dans la théorie de perturbation. Mais pour les calculs non perturbatifs avec des nombres à la fin, elle n'est pas utilisable car le facteur  $\exp(-i \int dt L(q, \dot{q}))$  n'est pas une densité de probabilité. L'intégrale fonctionnelle devient incalculable numériquement en raison des oscillations.



### 6.3 Transposition à QCD.

Pour faire la transposition il suffit de comparer le Hamiltonien (50) à celui de (75). On doit faire la substitution

$$\begin{aligned} q &\rightarrow \vec{A}_\alpha(\vec{x}), \\ p &\rightarrow \vec{\Pi}_\alpha(\vec{x}), \end{aligned}$$

et on a donc la correspondance

$$\begin{aligned} \int d\vec{x} \left( \frac{g_{QCD}^2}{2} \vec{\Pi}_\alpha \cdot \vec{\Pi}_\alpha \right) &\leftrightarrow \frac{p^2}{2M}, \\ \int d\vec{x} \left( \frac{1}{2g_{QCD}^2} \vec{B}_\alpha \cdot \vec{B}_\alpha \right) &\leftrightarrow V(q), \end{aligned}$$

qui montre que  $M$  correspond à  $1/g_{QCD}^2$ . On en déduit le terme d'énergie cinétique

$$\frac{M\dot{q}^2}{2} \rightarrow \frac{1}{2g_{QCD}^2} \int d\vec{x} \partial_0 \vec{A}_\alpha \cdot \partial_0 \vec{A}_\alpha$$

où l'on a défini la "vitesse"

$$\partial_0 \vec{A}_\alpha(\vec{x}, i) = \frac{\vec{A}_\alpha(\vec{x}, i+1) - \vec{A}_\alpha(\vec{x}, i)}{\delta t}.$$

La matrice de transfert pour QCD s'écrit donc<sup>17</sup> en notation compacte

$$\langle X | e^{-H_g t} | X \rangle = C^{te} \int [dA] dA_f dA_i \langle X | A_f \rangle e^{-S(A)} \langle A_i | X \rangle, \quad (78)$$

avec

$$S(A) = \int_0^t dt \int d\vec{x} \frac{1}{2g_{QCD}^2} \left[ \partial_0 \vec{A}_\alpha \cdot \partial_0 \vec{A}_\alpha + \vec{B}_\alpha \cdot \vec{B}_\alpha \right]. \quad (79)$$

Dans l'équation (78)  $\langle A | X \rangle$  désigne la fonction d'onde d'un état invariant de jauge<sup>18</sup> et l'intégration fonctionnelle se fait sur toutes les trajectoires  $\vec{A}_\alpha(\vec{x}, t)$  qui satisfont les conditions aux limites

$$A(\vec{x}, 0) = A_i(\vec{x}), \quad A(\vec{x}, t) = A_f(\vec{x}).$$

On peut remarquer que  $S(A)$  est en fait l'action de QCD avec  $A_0 = 0$  et le terme magnétique changé de signe. Manifestement  $S(A) > 0$  donc le facteur  $\exp(-S(A))$  est bien une densité de probabilité.

Il faut maintenant donner un sens à l'écriture très vague de l'équation (78) et pour cela il faut passer par la discrétisation, ce qui nous amène à la formulation de QCD sur réseau [20].

<sup>17</sup>On se souvient que l'on n'a besoin que de la partie gluonique.

<sup>18</sup>Rappelons que le Hamiltonien  $H_g$  n'est défini que dans l'espace des états invariants de jauge. Dans le cas à 1 degré de liberté, le problème ne se posait pas.

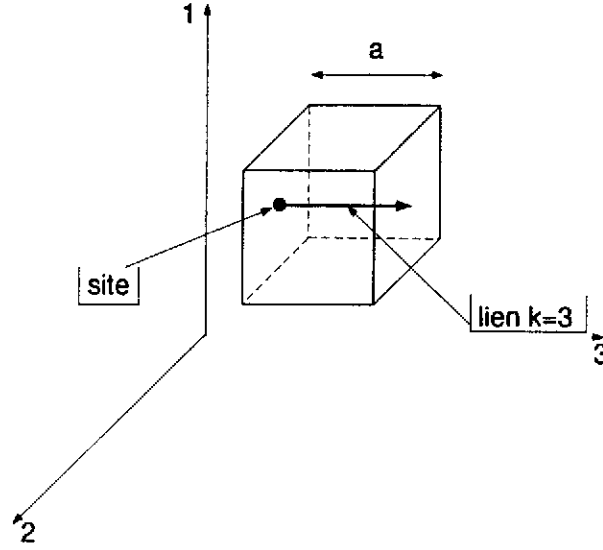


Figure 5:

## 7 QCD sur réseau

L'intervalle  $[0, t]$  a déjà été découpé en  $N$  petits intervalles  $\delta t$  que l'on numérote avec l'indice  $i_t$ . Pour chaque valeur de  $i_t$  introduisons un réseau à trois dimensions (1, 2, 3) de maille  $a$  dont les  $N_s^3$  sites sont repérés par l'indice global  $n_s = (n_1, n_2, n_3)$ . A chaque site  $n_s$  on a trois directions possibles que l'on note ( $k_d = 1, 2, 3$ ). Le couple  $(n_s, k_d)$  définit un lien, c'est-à-dire le segment orienté qui va de  $n_s$  à  $n'_s = n_s + \vec{k}_d$  avec la notation symbolique  $n_s + \vec{k}_d = (n_1 + 1, n_2, n_3)$  si  $k = 1$ , etc...

Pour chaque lien on définit le cube de volume  $a^3$  comme sur la figure 5. La régularisation sur réseau remplace, pour tout point  $\vec{x}$  du volume associé au lien  $(n_s, k_d)$ , le champ  $A(\vec{x}, i_t)$  de composantes  $(A_\alpha^{k_d}(\vec{x}, i_t), k_d = 1, 2, 3; \alpha = 1, N_c)$  par sa valeur moyenne

$$A_\alpha(n_s, i_t, k_d) = \frac{1}{a^3} \int_{\text{cube}} d\vec{x} A_\alpha^{k_d}(\vec{x}, i_t). \quad (80)$$

Les valeurs moyennes (80) sont les variables d'intégration de l'intégrale fonctionnelle (78). C'est une intégrale multiple de dimension  $D = (3 \times (N_c^2 - 1) \times N_s^3 \times N)$ , chaque variable  $A_\alpha(n_s, i_t, k_d)$  parcourant l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ . L'invariance de jauge qui est imposé aux états physiques va permettre de transformer cet intervalle infini en un intervalle compact.

La régularisation permet de calculer explicitement les matrices de lien élémentaires pour les courbes infinitésimales  $(n_s, k_d)$ . En effet, pour  $a$  suffisamment petit, l'équation de définition (59) admet la solution

$$U(n_s, i_t, k_d) = e^{-iaA(n_s, i_t, k_d)} = e^{-iaT_\alpha A_\alpha(n_s, i_t, k_d)}. \quad (81)$$

On se souvient que les états invariants de jauge peuvent être construit à partir des matrices de lien. Comme l'action (79) est invariante sous les transformations de jauge indépendantes du temps, on doit aussi pouvoir l'écrire en fonction des matrices de lien<sup>19</sup>. On en conclut que dans l'intégrale (78), l'intégrand ne dépend en fait que des matrices de liens.

<sup>19</sup>C'est ce qui est fait plus loin.

Or l'équation (81) nous montre que lorsque  $A_\alpha(n_s, i_t, k_d)$  parcourt  $\mathbb{R}$  la matrice  $U(n_s, i_t, k_d)$  parcourt le groupe  $G = SU(N)$  une infinité de fois, en donnant le même résultat à chaque "tour", puisque l'intégrand ne dépend que des  $U(n_s, i_t, k_d)$ . Comme on évalue toujours des rapports de deux intégrales du genre (78), on obtiendra le même résultats si on prend les  $U(n_s, i_t, k_d)$  comme variables d'intégration et qu'on intègre une seule fois sur le groupe. C'est la formulation dite "compacte"<sup>20</sup> de QCD sur réseau, et c'est la seule qui a donné des résultats concrets.

Le prix à payer est que nous passons d'une intégration sur un espace qui était le simple produit cartésien  $\mathbb{R}^D$  à l'intégration sur le groupe, c'est-à-dire un espace courbe. Par exemple  $SU(2)$  est isomorphe à une sphère à trois dimensions. Ce petit problème technique à été résolu depuis longtemps par les mathématiciens qui ont montré qu'il n'existe qu'une seule définition de l'intégrale qui soit compatible avec la structure de groupe. Rappelons l'argument.

Notons  $U$  une des matrices de lien. L'intégration n'est jamais que la limite d'une somme discrète donc on peut raisonner avec un groupe discret dont nous notons les éléments  $\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ , où  $n$  est le nombre d'éléments. Nous remplaçons l'intégrale

$$\int_G dU f(U) \quad (82)$$

où  $f(U)$  est une fonction réelle de  $U$  par

$$\sum_{i=1, n} f(U_i).$$

Soit  $V$  un élément particulier du groupe. D'après la structure de groupe, les ensembles

$$\{VU_1, VU_2, \dots, VU_n\} \text{ et } \{U_1V, U_2V, \dots, U_nV\}$$

ne sont que deux permutations de

$$\{U_1, U_2, \dots, U_n\}$$

et comme la somme est une opération commutative, on doit avoir

$$\sum_{i=1, n} f(VU_i) = \sum_{i=1, n} f(U_iV) = \sum_{i=1, n} f(U_i).$$

En théorie des groupes, ce résultat est connu sous le nom de théorème du réarrangement. Si on transpose ce résultat à l'intégrale continue (82) on voit que l'intégration sur le groupe compact doit être définie de façon telle que<sup>21</sup>

$$\int_G dU f(VU) = \int_G dU f(UV) = \int_G dU f(U).$$

La mesure  $dU$  qui satisfait cette condition est la mesure de Haar, ou mesure invariante. Elle est unique à une constante près qui n'a pas d'importance pourvu qu'elle soit toujours la même. On trouvera sa construction explicite dans la référence [21].

<sup>20</sup>Cette désignation fait référence au caractère compact du groupe  $SU(N_c)$ .

<sup>21</sup>Dans le cas d'un groupe non compact ceci est impossible. Il faut des mesures différentes pour le cas  $\int dU f(UV)$  et le cas  $\int dU f(VU)$ .

Introduisons maintenant la notation

$$[dU(i_t)] = \prod_{n_s, k_d} dU(n_s, i_t, k_d),$$

où  $dU(n_s, i_t, k_d)$  est la mesure de Haar pour le lien  $(n_s, k_d)$  au temps  $i_t$ , et désignons par  $\{U(i_t)\}$  l'ensemble des valeurs des matrices  $U(n_s, i_t, k_d)$  au temps  $t$  pour tous les liens  $(n_s, k_d)$ . Alors la formulation compacte de la matrice de transfert de QCD s'écrit

$$\langle X | e^{-H_g t} | X \rangle = C^{te} \int_G [dU(0)][dU(1)] \dots [dU(N)] \langle X | \{U(N)\} \rangle e^{-S(A)} \langle \{U(0)\} | X \rangle, \quad (83)$$

avec

$$S(A) = \frac{\delta t a^3}{2g_{QCD}^2} \sum_{i_t, n_s, k_d, \alpha} \left( \frac{A_\alpha(n_s, i_t + 1, k_d) - A_\alpha(n_s, i_t, k_d)}{\delta t} \right)^2 + B_\alpha^2(n_s, i_t, k_d). \quad (84)$$

Dans l'équation précédente, le champ magnétique régularisé est<sup>22</sup> (pour  $k_d = 3$ , les autres possibilités se déduisant par permutation circulaires)

$$B_\alpha(n_s, i_t, 3) = -\Delta_1 A_\alpha(n_s, i_t, 2) + \Delta_2 A_\alpha(n_s, i_t, 1) - f_{\alpha\beta\gamma} A_\beta(n_s, i_t, 1) A_\gamma(n_s, i_t, 2), \quad (85)$$

où la différence finie est définie par

$$\Delta_1 A(n_s, i_t, k_d) = \frac{A(n_s + \vec{1}, i_t, k_d) - A(n_s, i_t, k_d)}{a}. \quad (86)$$

Il est facile de vérifier que l'expression (84) reproduit l'action continue (79) lorsque  $a \rightarrow 0$ , à condition de bien réaliser que  $B_\alpha(n_s, i_t, 3)$ , éq.(87), n'est pas la moyenne de  $B_\alpha^3(\vec{x}, t)$  dans le volume associé au lien  $(n_s, 3)$ .

Il nous reste à exprimer  $S(A)$  en fonction des variables  $U$ . Pour le terme cinétique considérons la contribution d'un lien particulier dont l'étiquette  $(n_s, k_d)$  sera omise pour simplifier l'écriture. On a donc besoin de

$$\sum_\alpha (A_\alpha(i_t + 1) - A_\alpha(i_t))^2. \quad (87)$$

En utilisant l'équation de définition (81), et en développant à l'ordre  $a^3$  on obtient

$$Tr(U^\dagger(i_t + 1)U(i_t)) = Tr(1) - \frac{a^2}{4} \sum_\alpha (A_\alpha(i_t + 1) - A_\alpha(i_t))^2 + O(a^3), \quad (88)$$

$$Tr(U^\dagger(i_t)U(i_t + 1)) = Tr(1) - \frac{a^2}{4} \sum_\alpha (A_\alpha(i_t + 1) - A_\alpha(i_t))^2 + O'(a^3). \quad (89)$$

Pour un groupe  $SU(N_c)$  avec  $N_c \geq 3$  on a en général

$$Tr(U^\dagger(i_t + 1)U(i_t)) \neq Tr(U^\dagger(i_t)U(i_t + 1)),$$

<sup>22</sup>Attention aux signes. Par définition  $B^3 = \partial^1 A^2 \dots = -\partial_1 A^2 \dots$  et c'est  $\partial_1 A^2$  qui apparaît dans la différence finie.

donc ces quantités ne sont pas réelles. Leur partie imaginaire commence à l'ordre  $a^3$  comme le montrent les équations (88, 89). Ce n'est pas gênant du point de vue théorique puisque l'on doit prendre la limite  $a \rightarrow 0$ , mais en pratique on travaille toujours avec  $a$  fini. Pour garantir que l'énergie cinétique est réelle<sup>23</sup> pour tout  $a$ , on prend la demi-somme de (88) et (89), d'où l'expression

$$\sum_{\alpha} (A_{\alpha}(i_t + 1) - A_{\alpha}(i_t))^2 = \frac{2}{a^2} \text{Tr} (2 - U^{\dagger}(i_t + 1)U(i_t) - U^{\dagger}(i_t)U(i_t + 1)) + O(a). \quad (90)$$

La dérivation du terme magnétique est un peu plus compliquée. Pour simplifier l'écriture on se place à  $i_t$  fixé et on omet provisoirement cet indice. On considère la contribution du lien  $(n_s, k_d = 3)$ , les autres se déduisant par permutation circulaire. On a donc besoin de

$$\sum_{\alpha} B_{\alpha}^2(n_s, 3) = \sum_{\alpha} (-\Delta_1 A_{\alpha}(n_s, 2) + \Delta_2 A_{\alpha}(n_s, 1) - f_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta}(n_s, 1) A_{\gamma}(n_s, 2))^2$$

Calculons la variable de boucle associée au chemin fermé élémentaire, ou plaquette,  $P = (n_s, n_s + \vec{1}, n_s + \vec{1} + \vec{2}, n_s + \vec{2}, n_s)$ , c'est-à-dire

$$W(P) = e^{iaA(n_s, 2)} e^{iaA(n_s + \vec{2}, 1)} e^{-iaA(n_s + \vec{1}, 2)} e^{-iaA(n_s, 1)}.$$

Pour cela on commence par développer (voir éq.(86))

$$\begin{aligned} A(n_s + \vec{2}, 1) &= A(n_s, 1) + a\Delta_2 A(n_s, 1), \\ A(n_s + \vec{1}, 2) &= A(n_s, 2) + a\Delta_1 A(n_s, 2), \end{aligned}$$

puis on applique la formule

$$e^{aW_1} e^{aW_2} = e^{aW_1 + aW_2 + a^2[W_1, W_2]/2 + O(a^3)}$$

autant de fois que nécessaire. On obtient alors, après un petit calcul

$$W(P) = e^{ia^2 T_{\alpha} B_{\alpha}(n_s, 3) + O(a^3)}.$$

Le terme en  $a^3$  est linéaire dans le générateur, donc si on prend la trace on obtient

$$\text{Tr}(W(P)) = \text{Tr}(1) - \frac{a^4}{4} \sum_{\alpha} B_{\alpha}^2(n_s, 3) + O(a^5).$$

Pour garantir la réalité du terme magnétique, on symétrise comme pour la partie cinétique, d'où l'expression

$$\sum_{\alpha} B_{\alpha}^2(n_s, 3) = \frac{2}{a^4} \text{Tr} (2 - W(P) - W(P)^{\dagger}) + O(a). \quad (91)$$

Il n'y a plus qu'à reporter les équations (90) et (91) dans l'action (84). Bien que ce ne soit pas indispensable on va faire  $\delta t = a$  comme c'est l'usage le plus courant. Pour le terme magnétique il est clair que la sommation sur  $k_d = 1, 2, 3$  est équivalente à sommer sur les trois faces du cube dont le sommet est  $n_s$ , et donc la somme sur  $n_s$ , et  $k_d$  est équivalente à la somme sur toutes les plaquettes du réseau. Cela conduit au résultat final

$$S(U) = \frac{1}{g_{QCD}^2} \sum_{i_t} \left\{ \sum_{n_s, k_d} \text{Tr} (1 - U^{\dagger}(n_s, i_t + 1, k_d)U(n_s, i_t, k_d)) + \sum_P \text{Tr} (1 - W(P)) + c.c. \right\} \quad (92)$$

où *c.c.* désigne le complexe conjugué.

<sup>23</sup>Cela revient à imposer au Hamiltonien d'être hermitien.

## 8 Application: Le potentiel quark-antiquark

### 8.1 Première approche

Nous allons utiliser le matériel mis au point dans les sections précédentes pour calculer le potentiel entre deux sources de couleur statiques. Rappelons le résultat établi précédemment (éq. 74)

$$V_{q\bar{q}}(R) = \lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{1}{t} \ln \frac{\mathcal{T}_g(t, R)}{\mathcal{T}_g(t, \Omega)}.$$

Pour l'état de vide le choix le plus simple est une fonction d'onde constante, c'est-à-dire indépendante des variables  $U$ . Elle est manifestement invariante de jauge et il y a une bonne chance pour que son recouvrement avec le vrai vide de QCD ne soit pas nul. On a donc,

$$\mathcal{T}_g(t, \Omega) = C^{te} \int_G [dU(1)][dU(2)] \dots [dU(N)] e^{-S(U)}, \quad (93)$$

où  $S(U)$  est donnée par l'équation (92).

Considérons un quark statique positionné au site  $n_s$  et d'indice de couleur  $m$ . L'état qui le décrit est noté, en nombre d'occupation,  $|q(n_s, m) \rangle$ . Il est le résultat de l'action de l'opérateur de création sur le vide de Dirac. Dans une transformation de jauge<sup>24</sup>  $g$

$$|q(n_s, m) \rangle \rightarrow \sum_{m'} g(n_s)_{mm'}^* |q(n_s, m') \rangle.$$

et, pour un état d'antiquark  $|\bar{q}(n_s, m) \rangle$

$$|\bar{q}(n_s, m) \rangle \rightarrow \sum_{m'} g(n_s)_{mm'} |\bar{q}(n_s, m') \rangle.$$

Pour fixer les idées plaçons le quark à l'origine des coordonnées du réseau,  $n_s = (0, 0, 0)$ , et l'antiquark sur l'axe 1 à une distance  $R = La$ . Dans ce qui suit les indices  $(n_2, n_3)$  sont nuls partout donc on ne les spécifie pas pour alléger l'écriture. Définissons la matrice unitaire

$$C(U, i_t) = U(0, i_t, 1)U(1, i_t, 1)U(2, i_t, 1) \dots U(L-1, i_t, 1) \quad (94)$$

c'est-à-dire la matrice de lien associée au segment de droite qui relie les quarks. Dans une transformation de jauge on a, d'après l'équation (61)

$$C(U, i_t) \rightarrow g(0)C(U, i_t)g^\dagger(L)$$

Donc l'état défini par

$$\langle \{U\} | R \rangle = \sum_{m, \bar{m}} C_{m\bar{m}}(U, i_t) |q(0, m), \bar{q}(L, \bar{m}) \rangle$$

est invariant de jauge. En effet

<sup>24</sup>Rappelons que l'opérateur de champ de quark  $q$  est une combinaison linéaire d'opérateurs de création d'antiquark et de destruction de quark. La définition (4) impose donc que l'opérateur de création de quark se transforme suivant  $g^*$ .

$$\begin{aligned}
\sum_{m, \bar{m}} C_{m\bar{m}} |q(0, m), \bar{q}(L, \bar{m})\rangle &\rightarrow \sum_{m, \bar{m}, m', \bar{m}'} (g(0)Cg^\dagger(L))_{m\bar{m}} g(0)_{m\bar{m}'}^* g(L)_{\bar{m}\bar{m}'} |q(0, m'), \bar{q}(L, \bar{m}')\rangle \\
&= \sum_{m, \bar{m}, m', \bar{m}'} g^\dagger(0)_{m'm} (g(0)Cg^\dagger(L))_{m\bar{m}} g(L)_{\bar{m}\bar{m}'} |q(0, m'), \bar{q}(L, \bar{m}')\rangle \\
&= \sum_{m', \bar{m}'} C_{m'\bar{m}'} |q(0, m'), \bar{q}(L, \bar{m}')\rangle.
\end{aligned}$$

Si on calcule la matrice de transfert avec l'expression (83), on obtient donc

$$\begin{aligned}
\langle R | e^{-H_g t} | R \rangle &= C^{\text{te}} \int_G [dU(0)][dU(1)] \dots [dU(N)] e^{-S(U)} \\
&\quad \sum_{m', \bar{m}'} C_{m'\bar{m}'}^*(U, 0) \sum_{m, \bar{m}} C_{m\bar{m}}(U, N) \langle q(0, m'), \bar{q}(L, \bar{m}') | q(0, m), \bar{q}(L, \bar{m}) \rangle, \\
&= C^{\text{te}} \int_G [dU(0)][dU(1)] \dots [dU(N)] e^{-S(U)} \text{Tr} (C^\dagger(U, 0)C(U, N)). \quad (95)
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que la matrice  $C$  est unitaire.

L'expression (95) peut être utilisée telle quelle pour évaluer le potentiel quark-antiquark. Bien qu'elle donne les mêmes résultats que l'approche présentée ci-dessous, elle est peu utilisée car sa convergence numérique est moins bonne.

## 8.2 Deuxième approche: le réseau à 4 dimensions

Comme nous l'avons signalé, le formalisme Hamiltonien conduit à une fonction d'onde qui ne dépend pas de  $A_0$ . Sur le réseau ce rôle serait joué par les matrices de lien allant dans la direction temporelle. L'idée est de mettre ces liens en jeu, d'une part pour avoir une formulation plus symétrique et, d'autre part, pour améliorer la convergence. Dans l'expression (95) on voit que la fonction d'onde apparaît au temps  $t = 0$  et  $t = N$ . La seule corrélation est dans le facteur  $\exp(-S(U))$ . Etant donné qu'on calcule l'intégrale multiple par une méthode de Monte-Carlo, les tirages à  $t = 0$  et  $t = N$  vont être très indépendants lorsque  $N$  devient grand<sup>25</sup> et le recouvrement avec la fonction d'onde exacte risque d'être faible et donc la convergence ralentie. La pratique a montré que l'on peut améliorer cet état de fait en mettant en jeu les liens temporels.

Ceci est possible en faisant le changement de variable suivant

$$U(n_s, i_t, k_d) = g^\dagger(n_s, i_t) \tilde{U}(n_s, i_t, k_d) g(n_s + \vec{k}_d, i_t). \quad (96)$$

où  $g$  est une matrice de  $SU(N_c)$  fonction quelconque du site  $n_s$  et du temps  $i_t$ . C'est une transformation de jauge qui dépend du temps et donc ni la fonction d'onde, ni l'action  $S(U)$  ne sont invariantes. La matrice de transfert (95) devient, dans ces nouvelles variables<sup>26</sup>

$$\langle R | e^{-H_g t} | R \rangle = C^{\text{te}} \int_G [dU(0)][dU(1)] \dots [dU(N)] e^{-S(g^\dagger \tilde{U} g)} \text{Tr} (C^\dagger(g^\dagger \tilde{U} g, 0)C(g^\dagger \tilde{U} g, N))$$

<sup>25</sup>On rappelle qu'il faut faire tendre  $N$  vers l'infini.

<sup>26</sup>Ci-dessous la notation  $g^\dagger \tilde{U} g$  représente évidemment le côté droit de l'équation (96)

mais par application du théorème du réarrangement, on a (voir section 6) pour deux éléments quelconques du groupe  $a, b$

$$\int_G dU F(a\tilde{U}b) = \int_G d\tilde{U} F(a\tilde{U}b),$$

et donc on peut écrire, quelques soient les valeurs des  $g(n_s, i_t)$ .

$$\langle R|e^{-H_{g^t}}|R \rangle = C^{te} \int_G [d\tilde{U}(0)][d\tilde{U}(1)] \dots [d\tilde{U}(N)] e^{-S(g\tilde{U}g^\dagger)} Tr \left( C^\dagger(g^\dagger\tilde{U}g, 0) C(g^\dagger\tilde{U}g, N) \right) \quad (97)$$

Si on intègre sur tous les  $g(n_s, i_t)$ , le côté gauche de (97), qui n'en dépend pas, va être simplement multiplié par le facteur

$$\int_G dg(0, 0) dg(0, 1) \dots$$

que l'on peut absorber dans la constante. D'où la nouvelle expression

$$\langle R|e^{-H_{g^t}}|R \rangle = C^{te} \int_G [d\tilde{U}][dg] e^{-S(g\tilde{U}g^\dagger)} Tr \left( C^\dagger(g^\dagger\tilde{U}g, 0) C(g^\dagger\tilde{U}g, N) \right) \quad (98)$$

où  $[d\tilde{U}]$  et  $[dg]$  désignent les produits des mesures d'intégration pour tous les  $\tilde{U}$  et tous les  $g$ .

Il nous reste à déterminer les deux facteurs de l'intégrand dans l'expression (98). Dans le terme magnétique de l'action (92), les liens sont au même temps. En raison de l'invariance de la variable de boucle dans une transformation de jauge à temps constant, il suffit donc de substituer  $U \rightarrow \tilde{U}$ . Le terme qui change est

$$\begin{aligned} & Tr \left( U^\dagger(n_s, i_t + 1, k_d) U(n_s, i_t, k_d) \right) = \\ & Tr \left( g^\dagger(n_s + \vec{k}_d, i_t + 1) \tilde{U}^\dagger(n_s, i_t + 1, k_d) g(n_s, i_t + 1) g^\dagger(n_s, i_t) \tilde{U}(n_s, i_t, k_d) g(n_s + \vec{k}_d, i_t) \right) \end{aligned}$$

Définissons le lien temporel<sup>27</sup>

$$\tilde{U}(n_s, i_t, 0) = g(n_s, i_t) g^\dagger(n_s, i_t + 1) \quad (99)$$

qui nous permet d'écrire

$$Tr \left( U^\dagger(n_s, i_t + 1, k_d) U(n_s, i_t, k_d) \right) = Tr \left( \tilde{U}^\dagger(n_s, i_t + 1, k_d) \tilde{U}^\dagger(n_s, i_t, 0) \tilde{U}(n_s, i_t, k_d) \tilde{U}(n_s + \vec{k}_d, i_t, 0) \right). \quad (100)$$

On reconnaît dans l'expression (100) la variable de boucle associée à la plaquette spatio-temporelle

$$(n_s, i_t) \rightarrow (n_s + \vec{k}_d, i_t) \rightarrow (n_s + \vec{k}_d, i_t + 1) \rightarrow (n_s, i_t + 1) \rightarrow (n_s, i_t).$$

Il est clair que l'on a intérêt à introduire un réseau quadri-dimensionnel dont les sites sont repérés par l'indice global  $\nu$

<sup>27</sup>Jusqu'à maintenant, on avait  $k_d = 1, 2$  ou  $3$ .



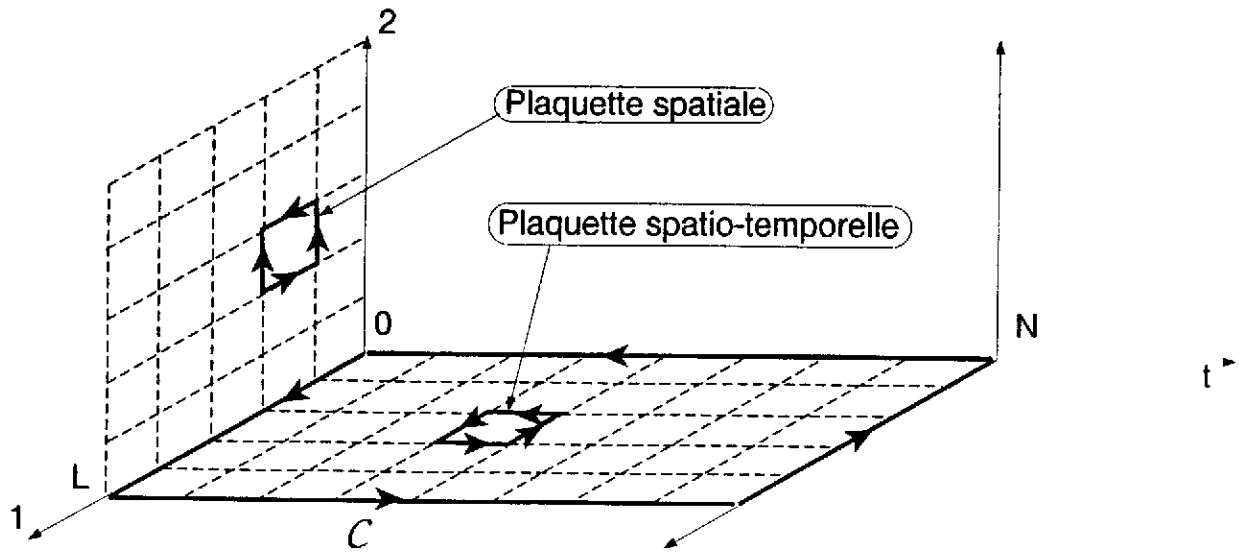


Figure 6:

### 8.3 Résultats

Nous sommes arrivés au bout de nos peines. Il ne reste plus qu'à calculer numériquement des intégrales à  $4 \times N_s^3 \times N \times (N_c^2 - 1)$  dimensions. Le calcul présenté sur la figure 3 correspond à  $N_s = N = 10$  et  $N_c = 2$ , c'est-à-dire 120000 variables. Les calculs actuels peuvent aller jusqu'à  $N_s = 30$ ,  $N = 40$ . Pour un aussi grand nombre de variables seules les méthodes d'échantillonnage statistique sont envisageables. Tout le problème revient à générer un ensemble de configurations  $\{V\}, \{V'\}, \{V''\} \dots$ , où  $\{V\}$  désigne l'ensemble des matrices de lien du réseau, avec un poids statistique égal à  $\exp(-S(V))$ . La façon de procéder est expliquée dans les références [12, 13].

Une fois que les configurations sont générées, il ne reste plus qu'à calculer des moyennes statistiques comme celles qui apparaissent dans les équations (103,104). Il faut noter qu'il n'est pas toujours nécessaire de disposer d'un ordinateur spécialisé pour faire de la physique sur réseau. On peut "acheter" des configurations produites par un autre groupe et les utiliser à sa façon. Evidemment dans ce cas là, on n'a pas le contrôle de la constante de couplage, ou de la maille du réseau. Il faut donc bien s'assurer que la génération a été faite dans la région où le régime d'échelle est déjà établi.

Un exemple de potentiel entre quarks statiques calculé suivant la méthode exposée dans la section précédente est montré sur la Figure 7. Il a été réalisé [22] sur la machine parallèle CM2 de Wuppertal en 1993 pour un réseau de  $32^4$  sites. La valeur  $\beta = 6.4$  correspond à une maille  $a = 0.056\text{fm}$ , ce qui constitue un des records<sup>28</sup> pour  $SU(3)$ . A courte distance on voit clairement la forme Coulombienne en  $1/r$  tandis qu'à grande distance le potentiel devient linéaire. C'est le confinement.

Merci à Vincent Brindejonc et Joseph Cugnon pour avoir relu ce cours et corrigé les anomalies. Merci à Lyx de m'avoir préservé de Latex.

<sup>28</sup>Dans ce calcul des valeurs de  $a$  encore plus faibles ont été utilisées, mais le réseau était alors trop petit pour qu'on puisse déterminer le potentiel.

$$\nu = (\nu_0 = i_t, \nu_1 = n_1, \nu_2 = n_2, \nu_3 = n_3).$$

La direction des liens sera repérée par l'indice  $\mu = (0, 1, 2, 3)$  et les matrices associées notées

$$\begin{aligned} V_\mu(\nu) &= \tilde{U}(n_s, i_t, k_d) \quad \mu = k = 1, 2, 3 \\ V_\mu(\nu) &= \tilde{U}(n_s, i_t, 0) \quad \mu = 0. \end{aligned}$$

Si on reporte l'expression (100) dans l'action  $S(g\tilde{U}g^\dagger)$ , on obtient alors

$$S(g\tilde{U}g^\dagger) = S(V) = \frac{1}{g_{QCD}^2} \sum_P \text{Tr} (1 - W(P)) + c.c. \quad (101)$$

où  $W(P)$  désigne les variables de boucles associées aux plaquettes élémentaires  $P$  du réseau quadri-dimensionnel.

Le deuxième facteur de l'expression (98) se traite de façon analogue. D'après la définition de la fonction d'onde  $C(U)$ , éq.(94) on a (en ignorant les indices  $(n_1, n_2)$ )

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( C^\dagger(g^\dagger\tilde{U}g, 0)C(g^\dagger\tilde{U}g, N) \right) &= \text{Tr} \left( g^\dagger(L, 0)C^\dagger(\tilde{U}, 0)g(0, 0)g^\dagger(0, N)C(\tilde{U}, N)g(L, N) \right) \\ &= \text{Tr} \left( C^\dagger(\tilde{U}, 0)g(0, 0)g^\dagger(0, N)C(\tilde{U}, N)g(L, N)g^\dagger(L, 0) \right). \end{aligned} \quad (102)$$

On voit que l'on peut écrire le produit  $g(0, 0)g^\dagger(0, N)$  et  $g(L, N)g^\dagger(L, 0)$  en fonction des matrices de lien temporel, éq.(99),

$$\begin{aligned} g(0, 0)g^\dagger(0, N) &= \tilde{U}(0, 0, 0)\tilde{U}(0, 1, 0)\tilde{U}(0, 2, 0) \dots \tilde{U}(0, N, 0) \\ g(L, N)g^\dagger(L, 0) &= \tilde{U}^\dagger(L, N, 0)\tilde{U}^\dagger(L, N-1, 0)\tilde{U}^\dagger(L, N-1, 0) \dots \tilde{U}^\dagger(L, 0, 0) \end{aligned}$$

et donc on reconnaît dans l'expression (102) la variable de boucle  $W(C)$ , ou boucle de Wilson [20], associée au chemin spatio-temporel  $C$  indiqué sur la figure 6.

Finalement, il est clair que l'on peut remplacer l'intégration sur toutes les variables  $g$  par l'intégration sur tous les liens temporels. Le calcul du potentiel revient alors à calculer les intégrales multi-dimensionnelles

$$\langle W \rangle = \frac{1}{Z} \int_G [dV] e^{-S(V)} W(C) \quad (103)$$

$$Z = \int_G [dV] e^{-S(V)} \quad (104)$$

avec  $dV$  le produit des mesures associées à chaque lien du réseau quadri-dimensionnel et on aura, pour le potentiel quark-antiquark

$$aV_{q\bar{q}}(La) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \langle W \rangle .$$

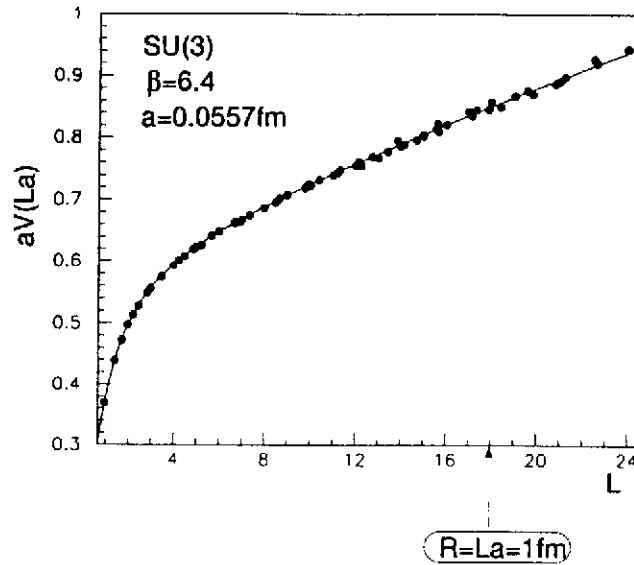


Figure 7:

## 9 Appendice

### 9.1 Notations

Dans le cours on utilise les notations suivantes. Les 4-vecteurs sont  $(x^\mu, \mu=0,3)$  avec  $x^0 = t$ . Un abus de notation assez courant est d'utiliser une flèche pour désigner les composantes contravariantes d'espace, c'est-à-dire:  $x^\mu = (t, \vec{x})$  sauf pour l'opérateur gradient:  $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu = (\partial/\partial t, \vec{\nabla})$ . En cas de doute on écrit explicitement les indices. Le tenseur métrique est noté  $\eta_{\mu\nu}$  pour éviter la confusion avec les transformations de jauge que l'on note  $g$ . Il est diagonal et  $\eta_{\mu\mu} = (1, -1, -1, -1)$ . Le produit scalaire est noté avec un point  $x.y = x_\mu y^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$  et il y a sommation implicite sur les indices répétés.

### 9.2 Matrices de Dirac

Les matrices de Dirac,  $(\gamma^\mu, \mu = 0, 3)$  sont des matrices  $4 \times 4$  qui satisfont l'algèbre de Clifford:  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$ . On a  $\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$ . Dans ce cours on n'a pas besoin d'une représentation explicite de ces matrices.

### 9.3 Groupe $SU(N)$

Le groupe  $SU(N)$  est l'ensemble des matrices  $U$  de dimension  $N \times N$  qui vérifient

$$U^\dagger U = U U^\dagger = 1, \det(U) = 1.$$

Les éléments du groupe sont donc paramétrisés par  $N^2 - 1$  paramètres réels. Les  $N^2 - 1$  générateurs  $T_\alpha$  de l'algèbre de Lie du groupe vérifient les relation de commutation

$$[T_\alpha, T_\beta] = i f_{\alpha\beta\gamma} T_\gamma,$$

où les constantes de structure  $f_{\alpha\beta\gamma}$  sont complètement anti-symétriques si on choisit la normalisation utilisée dans ce cours:

$$\text{Tr}(T_\alpha T_\beta) = \frac{1}{2} \delta_{\alpha\beta}$$

L'espace des paramètres, ou espace topologique du groupe, est le produit [10]

$$S_3 \times S_5 \times \dots \times S_{2N-1}$$

où  $S_n$  est la sphère unité à  $n$  dimensions. Si on considère une application de l'espace physique compactifié<sup>29</sup>  $S_3$  sur le groupe  $SU(N)$  cette application peut être déformée de façon continue de telle sorte que l'image de tous les points sur  $S_5 \times \dots \times S_{2N-1}$  soit la même. C'est l'effet lasso: si on essaie d'attraper un ballon ( $S_2$ ) avec un lasso ( $S_1$ ), la boucle glisse et se contracte en un point. C'est vrai en général pour toute application d'une sphère dans une autre de dimension supérieure. Donc du point de vue topologique il n'y a que la composante  $S_3$  de  $SU(N)$  qui donne lieu à des effets non triviaux. C'est pour cela que la discussion des effets topologiques peut être restreinte au cas de  $SU(2)$  dont l'espace topologique est  $S_3$ .

Toute matrice de  $SU(2)$  peut s'écrire

$$U = a + i\vec{b} \cdot \vec{\tau}, \text{ avec } a, b^\alpha \in \mathbb{R}, a^2 + \vec{b} \cdot \vec{b} = 1$$

où ( $\tau^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ) sont les matrices de Pauli. Elles satisfont les relations

$$\tau_\alpha \tau_\beta = \delta_{\alpha\beta} + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \tau^\gamma.$$

Les générateurs du groupe sont  $T^\alpha = \tau^\alpha/2$ . Si on définit le vecteur  $\vec{\theta} = |\theta| \hat{\theta}$  par

$$\cos |\theta| = a, \hat{\theta} = \vec{b}$$

on peut écrire

$$U = \cos |\theta| + i \sin |\theta| \vec{\tau} \cdot \hat{\theta} = e^{i\vec{\theta} \cdot \vec{\tau}}.$$

On peut restreindre  $|\theta|$  à l'intervalle  $[0, \pi]$ , mais lorsque  $|\theta| = \pi$  on a  $\vec{b} = 0$  et donc la direction  $\hat{\theta}$  n'est plus définie. Par conséquent si on considère une matrice continue  $U(\vec{x}) = \exp(i\vec{\theta}(\vec{x}) \cdot \vec{\tau})$ , en général  $\vec{\theta}(\vec{x})$  n'est pas continue au point  $\vec{x}_0$  où  $|\theta(\vec{x})| = \pi$ .

## References

- [1] A.H. Mueller, Phys.Rev. D18 (1978) 3705.
- [2] N. Isgur, Relativistic dynamics and quark-nuclear physics, J. Wiley & Sons, New York, 1986.
- [3] G. t'Hooft, Nucl.Phys. B190 (1981) 455.
- [4] K. Jansen et al., Phys. Lett. B372 (1996) 275.
- [5] T. Blum and A. Soni, hep-lat/9712004.
- [6] R. Gupta, hep-lat/9807028.
- [7] J.W. Negele, Lectures on QCD, Springer-Verlag (1997), 36.
- [8] P.A.M. Dirac, Lectures on quantum mechanics, Yeshiva University, New York (1964).

<sup>29</sup>Comme expliqué dans le cours, c'est la conséquence d'une condition aux limites.

- [9] V.N. Gribov, Phys. Scripta T15 (1987) 164.
- [10] B. Doubrovine, S. Novikov, A. Fomenko, Géométrie contemporaine 2, Éditions Mir, Moscou (1982).
- [11] S.L. Adler, Phys. Rev. 177 (1969) 2426. J.S. Bell and R. Jackiw, Nuov. Cim. 51 (1969) 47.
- [12] M. Creutz, Quarks, Gluons and lattices, Cambridge University Press, Cambridge UK (1983).
- [13] I. Montvay and G. Münster, Quantum Fields on a lattice, Cambridge University Press, Cambridge UK (1994).
- [14] M. Gell-Mann and F. Low, Phys. Rev. 95 (1954) 47.
- [15] J.B. Kogut, Rev. Mod. Phys. 55 (1983) 775.
- [16] R. Dashen et D.J. Gross, Phys. Rev. D23 (1981) 2340.
- [17] M. Creutz, Phys. Rev. D21 (1980) 2308.
- [18] M. Creutz et K.J.M. Moriarty, Phys. Rev. D26 (1982) 2166.
- [19] J.B. Kogut and L. Susskind, Phys. Rev. D11 (1975) 395.
- [20] K. Wilson, Phys. Rev. D10 (1974) 2445.
- [21] M. Hamermesh, Group theory and its application to physical problems, Addison&Wesley, Reading MA (1962).
- [22] G.S. Bali and K. Schilling, Phys. Rev. D47 (1993) 661.