



HAL
open science

Désintégration beta : théorie, QRPA...

C. Volpe

► **To cite this version:**

C. Volpe. Désintégration beta : théorie, QRPA.... École thématique. Ecole Joliot Curie "Astrophysique nucléaire : du microcosme au macrocosme astrophysique", Spa, (Belgique), du 10-16 septembre 2000 : 19ème session, 2000. cel-00653823

HAL Id: cel-00653823

<https://cel.hal.science/cel-00653823>

Submitted on 20 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉSINTÉGRATION BETA : THÉORIE, QRPA, ...

CRISTINA VOLPE

Groupe de Physique Théorique, Institut de Physique Nucléaire, F-91406 Orsay Cedex, France

RÉSUMÉ

Ce cours s'attachera dans un premier temps à présenter une revue rapide de la théorie élémentaire de la désintégration β : l'interaction $\mathcal{V} - \mathcal{A}$, les processus de désintégration β dans les noyaux, les demi-vies partielle et totale, les transitions permises de Fermi et de Gamow-Teller. Le concept de distribution de force (ou probabilité de transition), nécessaire pour les calculs de temps de vie, sera introduit. La deuxième partie sera consacrée à une description détaillée d'une des approches microscopiques utilisée extensivement dans les calculs de désintégration β en astrophysique : l'Approximation des Phases Aléatoires (RPA) dans ses différentes versions (avec échange de charge, pour des quasi-particules ou QRPA, avec échange de charge pour des quasi-particules). Les distributions de force microscopiques obtenues dans ces approches seront présentées. Ensuite le concept de règle de somme sera introduit à travers l'exemple de la règle de somme Ikeda pour les transitions de Gamow-Teller. Le problème de la force manquante dans ces transitions sera mentionné. Dans la troisième partie quelques exemples seront présentés montrant comment les effets de structure peuvent modifier, de manière significative, les distributions de force et donc les temps de vie de noyaux importants pour l'astrophysique.

ABSTRACT

In the first part we shall present a brief review of the elementary theory of β decay: the $\mathcal{V} - \mathcal{A}$ interaction, the β decay processes in nuclei, the partial and total half-life, the allowed Fermi and Gamow-Teller transitions. The concept of strength distribution (or transition probability distribution), necessary to calculate half-lives, will be introduced. The second part will be devoted to a detailed description of one of the microscopic approaches extensively used in β decay calculations in astrophysics, namely the Random-Phase-Approximation (RPA) and its different versions (charge-exchange RPA, RPA among Quasi-particles or QRPA, charge-exchange QRPA). The microscopic strength distribution obtained within these approaches will be presented. Besides, the concept of sum rules will be introduced by illustrating the example of the Ikeda sum rule for Gamow-Teller transitions. The problem of the missing (or "quenched") Gamow-Teller strength will be mentioned. We shall discuss, in the third part, some examples showing how nuclear structure may modify in a significant way the strength distribution and therefore the half-life of nuclei which play a role in astrophysical processes.

1 Introduction

La désintégration β des noyaux atomiques joue un rôle important dans maints processus en astrophysique nucléaire, comme par exemple dans la nucléosynthèse d'éléments lourds lors du processus r , le processus de capture rapide de neutrons¹). Ce cours n'est pas une revue des calculs de désintégration β pour l'astrophysique, ni de toutes les approches utilisées jusqu'à

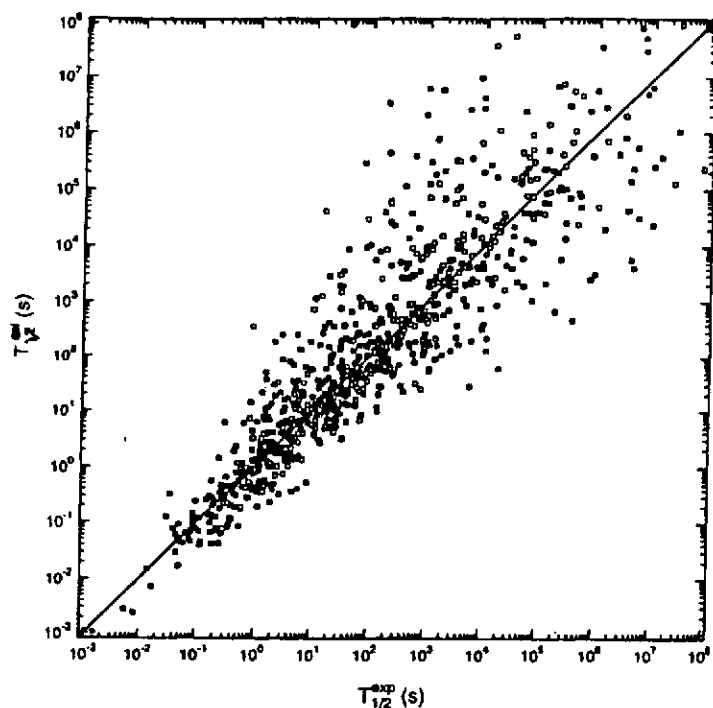


FIG. 1 - Exemple de résultat d'un calcul de demi-vie à grande échelle en comparaison avec l'expérience²⁾.

présent pour ces calculs. Deux types de modèles sont actuellement utilisés en astrophysique, certains se basent sur une description statistique approchée des propriétés des noyaux comme la "Gross Theory"³⁾; d'autres sont des approches microscopiques, tels que les Approximations de Tamm-Dancoff⁴⁾ (TDA), des Phases Aléatoires (RPA) (avec échange de charge⁵⁾, avec échange de charge pour des Quasi-particules^{2),6),7)} ou QRPA) ou encore le modèle en couches⁸⁾ et la théorie des systèmes finis de Migdal⁹⁾.

Ce cours se veut une introduction à la théorie de la désintégration β et à une de ces approches microscopiques : l'Approximation des Phases Aléatoires et ses diverses variantes (avec échange de charge, pour des quasi-particules, avec échange de charge pour des quasi-particules)¹⁾. Nous mentionnerons certains effets de la structure des noyaux sur les temps de vie de désintégration β et l'importance d'utiliser des approches capables de prendre en compte, sinon le maximum d'aspects de structure des noyaux, aux moins les plus pertinents. Il existe d'autres effets dont nous ne parlerons pas ici, dus au fait que la désintégration β a lieu dans des milieux à haute température¹⁾.

Dans les calculs de temps de vie, on rencontre deux difficultés majeures : *i)* il s'agit toujours de calculs à grande échelle (fig.1); *ii)* il faut très souvent extrapoler notre connaissance de la structure, acquise en étudiant les propriétés des noyaux le long de la vallée de stabilité, à des noyaux près des lignes d'instabilités (au-delà desquelles les noyaux ne sont plus liés). Pour ces raisons, les choix des approches et des paramétrisations sont souvent très délicats. D'une part, le fait qu'il faille considérer plusieurs milliers de noyaux à la fois amène parfois à traiter de manière schématique certains aspects de structure; d'autre part, une description microscopique cohérente des propriétés des noyaux dans leur état fondamental et dans les états excités, est nécessaire et demande un effort considérable dans des calculs à si grande échelle. De plus les prédictions loin de la vallée de stabilité (par exemple des masses¹⁰⁾) sont parfois très contradictoires. Le vaste programme de recherche actuel, aussi bien expérimental que théorique, sur les noyaux

1. Cependant certains aspects, comme par exemple ceux reliés aux symétries et brisures de symétrie, ne seront pas traités ici.

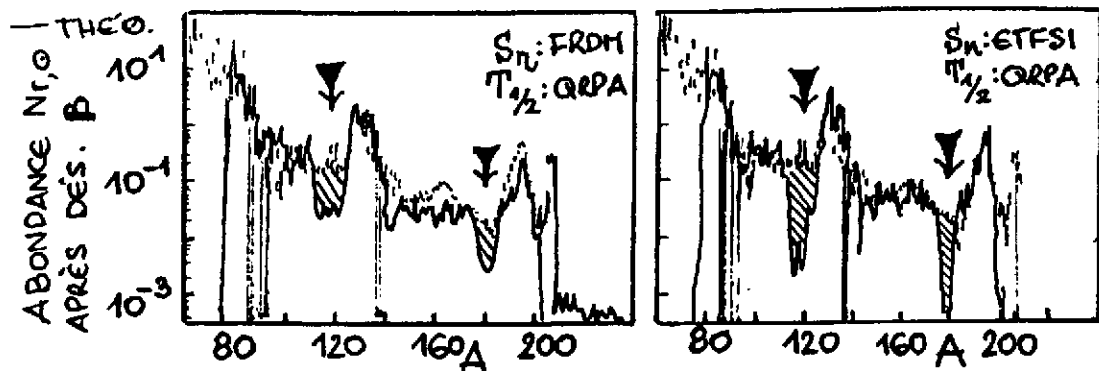


FIG. 2 – Le problème de l'existence des creux dans l'abondance des éléments r a fait l'objet d'un vif débat dans les dernières années.

exotiques, apportera des connaissances indispensables à l'astrophysique nucléaire, et permettra de réduire les incertitudes concernant la description des propriétés des noyaux, incertitudes qui s'ajoutent à toutes les difficultés de modélisation des processus astrophysiques eux-mêmes, dans leur globalité. Il suffit par exemple de penser au vif débat qui, depuis quelques années, enflamme les esprits : les creux dans l'abondance des éléments r (fig.2) trouvent-ils leur origine dans une atténuation de la magie (pour les noyaux riches en neutrons autour de $N=82^{11}$), ou dans des modélisations simplifiées du processus de nucléosynthèse¹²⁾ (la connaissance du site où ce processus aurait lieu reste l'un des grands problèmes des astrophysiciens¹⁾)?

Malgré toutes ces difficultés, les calculs de temps de vie des noyaux pour l'astrophysique ont fait énormément de progrès dans les derniers vingt ans. Bien sûr, beaucoup d'améliorations doivent encore être apportées, comme par exemple l'inclusion systématique de la déformation des noyaux ou l'étude des contributions provenant des transitions interdites.

Ce cours comporte trois parties. La première est une introduction à la théorie de la désintégration β avec une attention particulière sur les transitions permises de Fermi et de Gamow-Teller. Après quelques rappels concernant l'approximation de champ moyen et la base à N particules- N trous, la deuxième partie est dédiée à la présentation, à l'aide de la méthode des équations du mouvement, de l'Approximation des Phases Aléatoires et de ses variantes. Pour que le cours soit le plus complet possible, de brefs rappels sur les formalismes du spin, de l'isospin des nucléons et des noyaux et de la seconde quantification sont inclus. Dans la troisième partie nous présenterons des exemples d'effets de la structure des noyaux sur les temps de vie de désintégration β . Nous mentionnerons les effets des corrélations dans le fondamental RPA, de la déformation et de l'interaction résiduelle dans la voie particule-particule (inclue dans la RPA pour des Quasi-particules ou QRPA). Tout au long de ce cours plutôt que décrire d'une manière rigoureuse et détaillée toutes les dérivations, nous ne présenterons que les étapes importantes de celles-ci (en renvoyant le lecteur à des ouvrages pour ce qui ne peut pas être traité ici), afin de dégager les concepts essentiels et les approximations inhérentes aux approches utilisées.

2 LA DÉSINTÉGRATION β

2.1 L'interaction $\mathcal{V} - \mathcal{A}$

En 1934 Fermi^{(13), (14), (15)} propose, pour décrire le processus de désintégration β (fig.3), la densité hamiltonienne de type courant-courant

$$H_{INT}(\tau) = G_F J_H^{\mu\dagger}(\tau) \cdot J_\mu^L(\tau) \quad (1)$$

par analogie avec l'électromagnétisme. Dans (1), G_F est la constante d'interaction faible (aussi appelée constante de Fermi) et J_μ^L , $J_H^{\mu\dagger}$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) sont les quadrivecteurs de courant faible leptonique (L) et hadronique (H) respectivement. Ils se différencient des courants électromagnétiques par le fait qu'ils peuvent modifier (augmenter ou diminuer) leur charge. Bien que l'hamiltonien (1) ait permis de décrire les processus observés pendant longtemps, les courants faibles n'ont aucune raison *a priori* d'avoir une nature purement vectorielle telle que Fermi le propose.

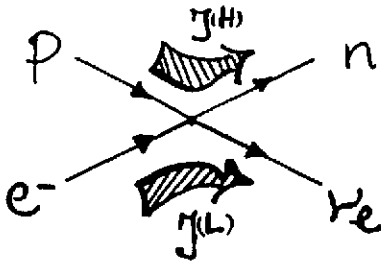


FIG. 3 - Diagramme pour la désintégration β du proton, $p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ montrant les deux courants faibles, hadronique $J_H^{\mu\dagger}(\tau)$ et leptonique $J_\mu^L(\tau)$.

β de noyaux polarisés. La mesure, par Wu et al.⁽¹⁷⁾, d'une forte asymétrie dans la désintégration β du ^{60}Co confirme brillamment cette hypothèse.

Afin de prendre en compte la violation de la parité, les courants dans (1) sont généralisés à la combinaison d'un terme vecteur (\mathcal{V}) et un terme vecteur-axial (\mathcal{A}) $J_H^{\mu\dagger}(\tau) = J_{H,\mathcal{V}}^{\mu\dagger}(\tau) - J_{H,\mathcal{A}}^{\mu\dagger}(\tau)$. En effet, un vecteur, par exemple la position \vec{r} ou l'impulsion \vec{p} d'une particule, change de signe sous une transformation de parité \mathcal{P} , i.e. $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$, $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ tandis qu'un vecteur axial, comme le moment angulaire $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ne change pas de signe, $\vec{L} \rightarrow (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{r} \times \vec{p}$. Par conséquent, si le terme vecteur $J_{H,\mathcal{V}}^{\mu\dagger}(\tau)$ reste invariant sous \mathcal{P} , le terme vecteur axial $J_{H,\mathcal{A}}^{\mu\dagger}(\tau)$ change de signe, de sorte que le courant $J_H^{\mu\dagger}(\tau)$ viole la parité. L'interaction (1) avec les courants $J_{\mathcal{V}} - J_{\mathcal{A}}$ est appelée $\mathcal{V} - \mathcal{A}$.

Outre la désintégration β des noyaux et du neutron, l'interaction $\mathcal{V} - \mathcal{A}$ permet de décrire différents processus semi-leptoniques de courant chargé de basse énergie (l'énergie transférée au noyau est petite). La capture muonique et les réactions neutrino-noyaux de basse énergie en sont des exemples. Néanmoins, l'interaction courant-courant présente des difficultés dans la description de processus faibles où l'énergie transférée est grande. Ceci est dû au fait que la théorie est non-renormalisable⁽¹⁴⁾. De nos jours, elle est remplacée par la théorie électrofaible de Glashow-Weinberg-Salam^{(14), (15)} (GWS). Dans ce modèle les processus faibles sont dus à l'échange des bosons de jauge W^\pm , Z^0 (fig.4). Dans la limite où le moment transféré au noyau est très petit devant la masse des bosons de jauge ($q < M_{W^\pm Z^0}$), ce qui est le cas du processus de

En 1956 Lee et Yang⁽¹⁶⁾ suggèrent une solution brillante du puzzle $\theta - \tau$. Les particules θ et τ , ayant la même masse, se désintègrent à travers les processus faibles nonleptoniques $\theta \rightarrow 2\pi$ et $\tau \rightarrow 3\pi$, donnant lieu à deux états finals de parités opposées. Lee et Yang proposent une hypothèse alternative, il ne s'agit pas de la désintégration de deux particules différentes ayant accidentellement la même masse, mais plutôt de la même particule² se désintégrant en deux modes de parités opposées : l'interaction faible viole la parité. Ils proposent également des expériences visant à mettre en évidence cette violation, entre autre la mesure d'une asymétrie dans le spectre des électrons émis lors de la désintégration

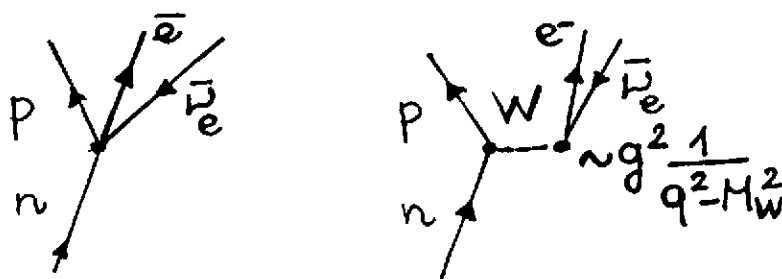


FIG. 4 - Diagrammes pour la désintégration β du neutron, dans le cadre de l'interaction $\mathcal{V} - \mathcal{A}$ (gauche) et de la théorie de Glashow-Weinberg-Salam (droite).

désintégration β , la théorie GWS se réduit à l'interaction $\mathcal{V} - \mathcal{A}$.

2.2 La désintégration β des noyaux

La désintégration β d'un noyau^{14),15),18)} (Z, N) désigne les trois processus :

$$\text{Désintégration } \beta^- : (Z, N) \rightarrow (Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}_e \quad (2)$$

$$\text{Désintégration } \beta^+ : (Z, N) \rightarrow (Z - 1, N + 1) + e^+ + \nu_e \quad (3)$$

$$\text{Capture électronique} : (Z, N) + e^- \rightarrow (Z - 1, N + 1) + \nu_e \quad (4)$$

correspondant aux processus élémentaires :

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (5)$$

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (6)$$

$$p + e^- \rightarrow n + \nu_e \quad (7)$$

Ces processus ont lieu seulement si la somme des masses initiales (M_f) est plus grande que la somme des masses finales (M_i), c'est-à-dire, si la valeur $Q_\beta = (\sum_f M_f - \sum_i M_i)c^2$ est positive. La masse du neutron étant supérieure à la masse du proton, seule la désintégration du neutron libre est permise, parmi les trois processus élémentaires (5-7). Les autres sont parfois possibles dans les noyaux.

2.2.1 Le temps de vie partiel pour les transitions permises

Une observable caractérisant la désintégration β des noyaux est la *demi-vie* $t_{1/2}$ reliée à la probabilité de transition par unité de temps $\lambda_{i \rightarrow f}$ (ou *taux de désintégration*)^{14),15),18)} par

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda_{i \rightarrow f}} \quad (8)$$

où i indique l'état (initial) du noyau père et f l'état (final), fondamental ou excité, du noyau fils (fig.5). Celle-ci se calcule à partir de la règle d'or de Fermi^{14),15),18)} :

$$d\lambda_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f; e^-, \bar{\nu}_e | H_{INT} | i \rangle|^2 d\rho_f \quad (9)$$

où $d\rho_f$ est la densité d'états finals et H_{INT} est l'hamiltonien d'interaction $\mathcal{V} - \mathcal{A}$. Suivant (1), $d\lambda_{i \rightarrow f}$ peut se factoriser

$$d\lambda_{i \rightarrow f} = \frac{2\pi}{\hbar} G_F^2 |\langle f | J_H^{\mu \dagger} | i \rangle|^2 |\langle e^-, \bar{\nu}_e | J_\mu^L | 0 \rangle|^2 d\rho_f \quad (10)$$

2. Il s'agit du meson K^0 .

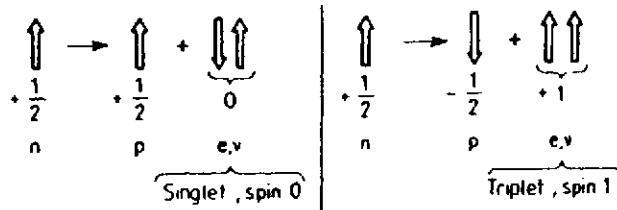


FIG. 6 – Dans la désintégration β deux types de transitions peuvent avoir lieu : i) les TRANSITIONS dites DE FERMI où $n \leftrightarrow p$; ii) les TRANSITIONS dites DE GAMOW-TELLER où $n \leftrightarrow p$ avec inversion éventuelle de leurs spins. Par exemple, la désintégration β du neutron est une transition à la fois de Fermi et de Gamow-Teller (cf. 2.5).

où $\langle f | J_H^{\mu\dagger} | i \rangle$, $\langle e^-, \bar{\nu}_e | J_\mu^L | 0 \rangle$ sont respectivement les éléments de matrices hadronique et leptonique.

De manière générale, l'élément de matrice hadronique dépend des moments de l'électron \vec{p}_e et de l'antineutrino $\vec{p}_{\bar{\nu}_e}$ à travers des fonctions du type³ $\exp(i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar})$. Dans le cas de la désintégration β , l'impulsion transférée est très petite : l'énergie de l'électron émis est typiquement de l'ordre de quelques MeV. Par exemple, pour $p_e \sim 1.5 \text{ MeV}/c$ on a :

$$\frac{\lambda_e}{2\pi} = \frac{\hbar}{p_e} \simeq \frac{197.3}{1.5} \simeq 130 \text{ fm} \quad (11)$$

La longueur d'onde de l'électron émis est donc très grande devant le rayon d'un noyau qui est de l'ordre de quelques fermi. Par conséquent, $\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar} \ll 1$ et donc $\exp(i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar}) \simeq 1$. Les transitions obtenues dans cette approximation sont dites *permises* (de Fermi et de Gamow-Teller), tandis que celles correspondant aux termes d'ordre supérieur (prenant en compte la taille finie du noyau) sont dites *interdites* (du premier ordre, du deuxième ordre, etc...). Jusqu'à présent, la majorité des calculs de désintégration β pour l'astrophysique n'inclut que les transitions permises. Dans la suite nous ne discuterons que ces transitions.

Afin d'obtenir le taux de désintégration, nous intégrons la probabilité de transition partielle (10) sur la densité $d\rho_f$ d'états finals de l'électron et de l'antineutrino. En sortant de l'intégrale l'élément de matrice hadronique qui, dans le cas des transitions permises, ne dépend plus des impulsions et en prenant la limite non relativiste^{14),15)} pour cet élément de matrice, il vient :

$$\lambda_{i \rightarrow f} = G_F^2 \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} |\langle f | F | i \rangle|^2 \int_{m_e c^2}^{E_i - E_f} dE_e p_e (E_i - E_f - E_e)^2 \mathcal{F}(Z_f, E_e) \quad (12)$$

où E_i (E_f) est l'énergie initiale (finale) du noyau père (fils) (fig.5). En écrivant $E_i - E_f = Q_\beta - E_f^*$, E_f^* étant l'énergie d'excitation du noyau fils, nous voyons que seuls les états excités du noyau fils dont l'énergie est dans la "fenêtre" du Q_β peuvent être peuplés.

La fonction de Fermi $\mathcal{F}(Z_f, E_e)$ prend en compte la modification de la fonction d'onde de l'électron (ou positron) émis, due à l'interaction coulombienne avec la charge Z_f du noyau fils.

En ce qui concerne l'opérateur F , si l'on considère la désintégration β du neutron, il est facile de montrer^{14),15)} qu'en prenant la limite non relativiste du courant hadronique dans (10)

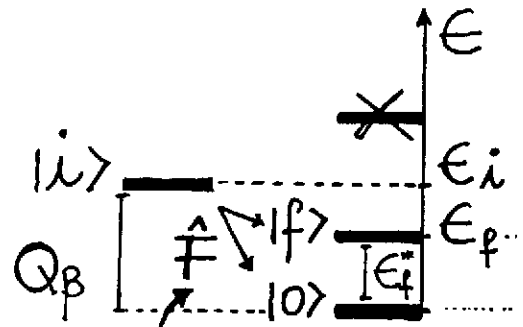


FIG. 5 – Représentation schématique de la transition par désintégration β d'un état $|i\rangle$ du noyau père à un état $|f\rangle$ du noyau fils, fondamental ou excité, d'énergie E_f^* .

3. Plus précisément, l'électron et l'antineutrino sont décrits par des spineurs de Dirac.

et en se rappelant que ce courant contient un terme vecteur et vecteur axial (cf. 2.1), deux types de transitions peuvent avoir lieu. La composante temps du terme vecteur, $J_{H,\nu}^{\mu,\dagger}$ ($\mu = 0$), engendre des transitions où un proton se transforme en neutron (ou vice-versa); les composantes d'espace du terme vecteur axial, $J_{H,A}^{\mu,\dagger}$ ($\mu = 1, 2, 3$), engendrent des transitions dans lesquelles il peut y avoir en plus une inversion de leurs spins (fig.6). Les autres composantes ne donnent pas de contribution. Les *transitions permises* du premier type sont dites *de Fermi* tandis que celles du deuxième type sont dites *de Gamow-Teller*. Nous écrivons les opérateurs de transition F (12) associés à ces deux transitions en utilisant les formalismes du spin (cf. 2.3) et de l'isospin (cf. 2.4).

Il est commode de réécrire la relation (12) de la manière suivante :

$$\lambda_{i \rightarrow f} = G_F^2 \bar{\mathcal{K}}^{-1} |\langle f|F|i \rangle|^2 f(Z_f, E_{fi}) \quad (13)$$

où $\bar{\mathcal{K}}^{-1} = m_e^5 c^4 / 2\pi^3 \hbar^7$, $E_{fi} = E_f - E_i$ et $f = f(Z_f, E_{fi})$ est l'intégrale de Fermi. En utilisant (8) et (13), nous obtenons donc l'expression pour la valeur $ft_{1/2}$ (en unité de temps) :

$$ft_{1/2} = \frac{\mathcal{K}}{G_F^2 |M_{fi}|^2} \quad (14)$$

où $\mathcal{K} = \ln 2 \bar{\mathcal{K}}^{-1}$ et $|M_{fi}|^2 = |\langle f|F|i \rangle|^2$.

Nous voyons que la désintégration est d'autant plus lente que la *probabilité de transition* $|M_{fi}|^2$ est petite. De plus, la relation (14) montre que le produit $ft_{1/2} |M_{fi}|^2 = \mathcal{K}/G_F^2$ est une constante universelle. Par conséquent, toutes désintégrations entre états ayant la même probabilité de transition ont la même valeur $ft_{1/2}$ (ou même "vitesse" de désintégration).

Selon l'énergie d'excitation E_f^* , le noyau fils décroît par émission γ , émission de neutron (si l'énergie d'excitation est plus grande que le seuil d'émission de neutron S_n) et parfois fission (fig.7). Ces aspects jouent un rôle important dans certains processus astrophysiques, par exemple dans la nucléosynthèse d'éléments lourds lors du *processus r*¹⁾.

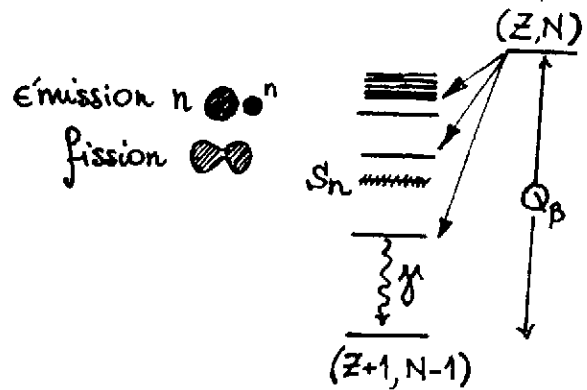


FIG. 7 - Selon la valeur de E_f^* , le noyau fils décroît par émission γ , émission de neutron ou parfois fission.

2.2.2 La demi-vie totale et la distribution de force $S(E)$

Un ou plusieurs états du noyau fils peuvent être peuplés dans le processus de désintégration β (fig.5). Nous parlons alors de demi-vie totale $T_{1/2}$ reliée au taux de désintégration total $\Lambda = \sum_f \lambda_{i \rightarrow f}$ (12) par une relation analogue à (8). En utilisant (13), on déduit^{(14),(15),(18)} :

$$\frac{1}{T_{1/2}} = \frac{G_F^2}{\mathcal{K}} \sum_f |\langle f|F|i \rangle|^2 f(Z_f, E_{fi}) \quad (15)$$

Il est important de remarquer que l'observable $T_{1/2}$ dépend : i) *des probabilités de transition* entre l'état initial et les états finals, dues à l'opérateur F , $|M_{fi}|^2 = |\langle f|F|i \rangle|^2$; ii) des masses des noyaux (à travers la valeur Q_β) (12). Seuls les états excités du noyau fils dont l'énergie est dans la "fenêtre" du Q_β peuvent être peuplés et contribuent à $T_{1/2}$.

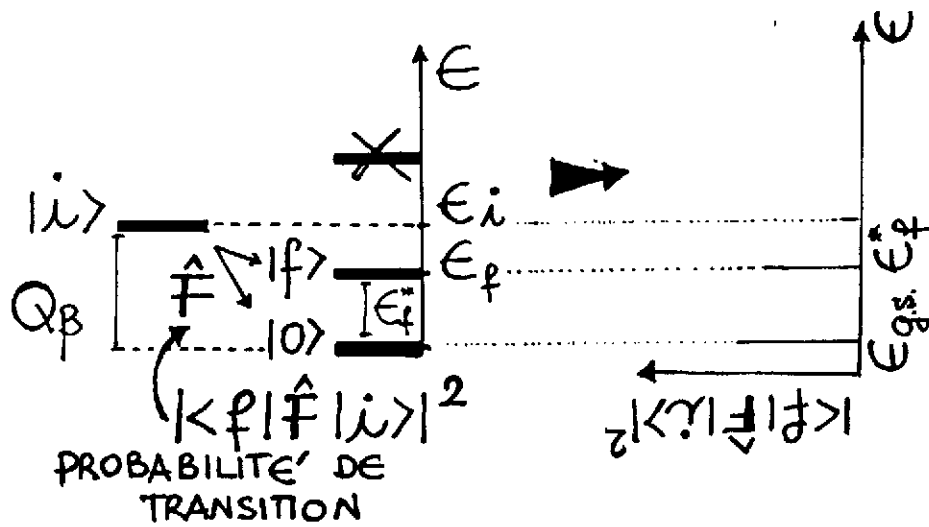


FIG. 8 - A chaque état dont l'énergie est située dans la "fenêtre" de la valeur Q_β , et pour un opérateur F donné, est associée la probabilité de transition ou FORCE $|\langle f|F|i\rangle|^2$. Nous obtenons ainsi la DISTRIBUTION DE FORCE $S(E)$ (16).

A chaque état d'énergie E_f^* est associée une probabilité de transition $|M_{fi}|^2$ (appelée aussi force) à partir de laquelle on construit la distribution de force (fig.8)^{19),20),21)} :

$$S(E) = \sum_f |\langle f|F|i\rangle|^2 \delta(E - E_f^*) \quad (16)$$

Cette distribution de force est une quantité très importante dans la détermination des $T_{1/2}$ des noyaux car la demi-vie totale (15) dépend de l'intégrale de $S(E)$. Celle-ci dépend des propriétés de structure des noyaux (leur déformation, les corrélations d'appariement, leur magicité, ...). Elle peut être estimée soit en utilisant des méthodes qui se basent sur une description statistique approchée des propriétés des noyaux comme la "Gross Théorie"³⁾; soit à travers des approches microscopiques, telles que les Approximations de Tamm-Dancoff⁴⁾ (TDA), des Phases Aléatoires (RPA) (avec échange de charge⁵⁾, avec échange de charge pour des Quasi-particules^{2),6),7)} ou QRPA) ou encore le modèle en couches⁸⁾ et la théorie des systèmes finis de Migdal⁹⁾. Dans la deuxième partie de ce cours nous présenterons l'Approximation des Phases Aléatoires et ses diverses variantes. Nous spécifierons la distribution de force $S(E)$ dans chacun de ces cas.

2.3 Les formalismes du spin et de l'isospin

L'état de spin d'une particule de spin 1/2 peut être décrit par un spineur à deux composantes¹⁹⁾ :

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Les opérateurs de spin $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$ peuvent être écrits en fonction des matrices de Pauli, $\vec{s} = \vec{\sigma}/2$, où :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Il est facile de voir que les états (17) sont les états propres de la troisième composante (ou projection) du spin $s_z = \sigma_z/2$ (18) correspondant aux valeurs propres $\bar{s}_z = \pm 1/2$, i.e.

$$s_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} \sigma_z |\uparrow\rangle = \frac{1}{2} |\uparrow\rangle \quad s_z |\downarrow\rangle = \frac{1}{2} \sigma_z |\downarrow\rangle = -\frac{1}{2} |\downarrow\rangle \quad (19)$$

A partir de ces opérateurs, nous pouvons construire les opérateurs $s_{\pm} = s_x \pm i s_y$:

$$s_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

dont l'action sur (17) est d'inverser la projection du spin:

$$s_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad s_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \quad (21)$$

Neutrons et protons peuvent être traités comme deux états d'une même particule d'isospin $\bar{t} = 1/2$, en utilisant un formalisme tout à fait semblable à celui du spin⁴. De manière analogue à (17), nous avons:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (22)$$

(la convention dans laquelle les états de proton et de neutron sont interchangés est aussi souvent utilisée). Les opérateurs d'isospin peuvent s'écrire en fonction de matrices τ_i ($i = x, y, z$) analogues à (18). Comme dans (19), les états (22) sont les vecteurs propres de la troisième composante (ou projection) t_z de l'isospin $\vec{t} = (t_x, t_y, t_z)$, de valeurs propres $\bar{t}_z = \pm 1/2$.

L'opérateur t_- (t_+), analogue de s_- (s_+) (20) transforme, $p \rightarrow n$ (et vice-versa) (21). Nous verrons (cf. 2.5) que les opérateurs F (12) décrivant les transitions permises de Fermi et de Gamow-Teller (cf. 2.2.1) dépendent de t_+ , t_- .

Finalement, l'action de l'opérateur (de Casimir) \bar{t}^2 , analogue de \bar{s}^2 , est:

$$\bar{t}^2 |p\rangle = (t_z^2 - t_z + t_+ t_-) |p\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) |p\rangle = \bar{t}(\bar{t} + 1) |p\rangle \quad (23)$$

avec $\bar{t} = 1/2$. (De même, pour l'état $|n\rangle$.)

2.4 L'isospin des noyaux

Nous venons de rappeler les opérateurs d'isospin des nucléons. Dans le cas de la désintégration β des noyaux, c'est l'isospin des noyaux qui peut être modifié. Il faut donc généraliser les opérateurs t_+ , t_- , t_z , \bar{t}^2 au cas d'un système de N -nucléons¹⁹). L'isospin d'un noyau s'obtient en appliquant les règles habituelles du couplage des moments angulaires. Nous avons:

$$T_z = \sum_{k=1}^N t_z(k) \quad T_{\pm} = \sum_{k=1}^N t_{\pm}(k) \quad (24)$$

Nous voyons que les opérateurs T_z, T_{\pm} agissent sur l'isospin d'une particule à la fois: ce sont des opérateurs à un corps. De même que dans (23), l'opérateur d'isospin total est donné par $\bar{T}^2 = T_z^2 - T_z + T_+ T_-$.

Évaluons les valeurs propres de \bar{T}^2, T_z dans un exemple: considérons un noyau ayant un excès de neutrons, décrit dans un modèle de particules indépendantes où les orbitales des neutrons et protons sont dégénérées. Soit $|\phi_0\rangle$ l'état fondamental de ce noyau (fig.9), en utilisant le

4. Il s'agit de l'algèbre SU(2).

fait que la projection de l'isospin total du système est la somme des projections des isospins de chaque nucléon (24), nous obtenons :

$$T_z|\phi_0\rangle = \sum_{k=1}^N t_z(k)|\phi_0\rangle = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)|\phi_0\rangle = \frac{(Z - N)}{2}|\phi_0\rangle = \bar{T}_z|\phi_0\rangle \quad (25)$$

La valeur propre de T_z mesure donc la moitié de la différence entre le nombre de protons et de neutrons. Nous déterminons la valeur propre de l'isospin total en partant de l'équation (25) et du fait que $T_-|\phi_0\rangle = 0$ (24) (à cause du principe d'exclusion de Pauli) :

$$\vec{T}^2|\phi_0\rangle = (T_z^2 - T_z + T_+T_-)|\phi_0\rangle = \bar{T}_z(\bar{T}_z - 1)|\phi_0\rangle = \bar{T}(\bar{T} + 1)|\phi_0\rangle \quad (26)$$

avec $\bar{T} = -\bar{T}_z = (N - Z)/2$.

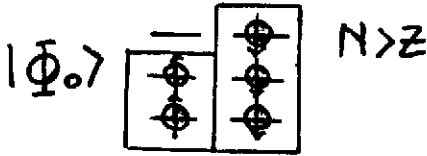


FIG. 9 - Exemple schématique de la fonction d'onde $|\phi_0\rangle$ d'un noyau ayant $N > Z$ (voir texte).

une autre d'un multiplet d'isospin.

2.5 Les transitions de Fermi et de Gamow-Teller

À l'aide des opérateurs de spin $\sigma_{i=x,y,z}$ (18) et d'isospin t_{\pm} , spécifions les opérateurs F (12) pour les transitions permises de Fermi, F_F , et de Gamow-Teller, \vec{F}_{GT} , (fig.6)¹⁴ :

$$F_F \equiv \sum_{k=1}^N t_{\pm}(k) \quad \vec{F}_{GT} \equiv \sum_{k=1}^N \vec{\sigma}(k)t_{\pm}(k) \quad (27)$$

L'opérateur de Fermi coïncide avec l'opérateur d'isospin T_{\pm} (24) qui modifie la valeur propre de T_z d'une unité (sans changer \bar{T}).

De manière générale, la probabilité totale de transition $|M_{fi}|^2$ (14) contiendra des contributions provenant des opérateurs de Fermi, $|M^F|^2$, et de Gamow-Teller, $|M^{GT}|^2$:

$$|M_{fi}|^2 = G_F^2 \left[|M^F|^2 + g_A^2 |M^{GT}|^2 \right] \quad (28)$$

où la constante de couplage $g_A = G_A/G_F$ donne l'intensité relative des couplages de type Fermi et Gamow-Teller et

$$|M^F|^2 \equiv \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{f,i} |\langle f | \sum_{k=1}^N t_{\pm}(k) | i \rangle|^2 \quad (29)$$

$$|M^{GT}|^2 \equiv \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{\mu} \sum_{f,i} |\langle f | \sum_{k=1}^N \sigma_{\mu}(k)t_{\pm}(k) | i \rangle|^2 \quad (30)$$

L'isospin et la troisième composante de l'isospin peuvent être utilisés pour caractériser les états des noyaux¹⁹. Écrivons l'hamiltonien total décrivant le noyau comme $H = H_{NUC} + H_{COUL}$, où H_{NUC} prend en compte l'interaction nucléaire entre les nucléons et H_{COUL} l'interaction coulombienne. Nous avons $[H_{NUC}, \vec{T}] = 0$ tandis que $[H_{COUL}, \vec{T}] \neq 0$, c.à.d. que l'isospin est une bonne symétrie du hamiltonien si l'on ignore l'interaction coulombienne. Dans ce cas, les états caractérisés par différentes valeurs propres de T_z , mais par la même valeur propre de T sont dégénérés en énergie (fig.10). Ils constituent un multiplet d'isospin et sont aussi appelés états isobariques analogues (IAS). C'est l'opérateur T_{\pm} (24) qui permet de passer d'une composante à

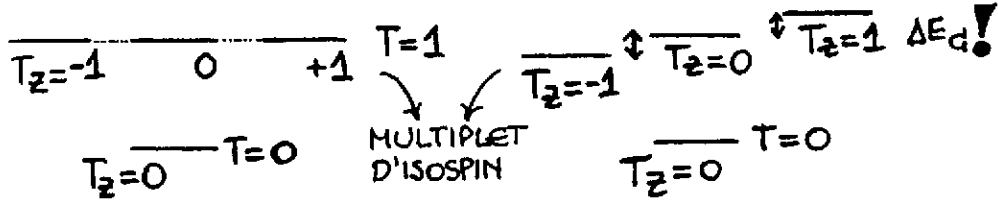


FIG. 10 - Les états correspondant à différentes valeurs propres de T_z , mais même valeur propre de T constituent un MULTIPLÉT D'ISOSPIN. Si l'on ignore l'interaction coulombienne, ces états sont dégénérés en énergie.

TAB. 1 - Règles de sélection¹⁴⁾ pour les valeurs propres du moment angulaire (J), de la parité (π), de l'isospin (T) et de la projection de l'isospin (T_z) pour les transitions permises de Fermi et de Gamow-Teller (27).

| | F_F | F_{GT} |
|--------------|---------|------------------------------------|
| ΔJ | 0 | 0, ± 1 (no $0 \rightarrow 0$) |
| $\Delta \pi$ | 0 | 0 |
| ΔT | 0 | 0, ± 1 (no $0 \rightarrow 0$) |
| ΔT_z | ± 1 | ± 1 |

où⁵ $\frac{1}{2J_i+1} \sum_{f,i}$ indique que nous avons fait la moyenne sur les états de spin initiaux et sommé sur les états de spin finals⁶.

Les états initial $|i\rangle$ et final $|f\rangle$ sont caractérisés par les nombres quantiques associés aux symétries du hamiltonien (parité π , moment angulaire total J et projection du moment angulaire M_J , isospin total T et projection de l'isospin T_z, \dots). À chaque opérateur de transition sont associées des règles de sélection spécifiques (tab.1). Du fait que $F_F \equiv T_{\pm}$, cet opérateur ne peut modifier ni le moment angulaire, ni l'isospin de l'état initial. Par contre, l'opérateur \vec{F}_{GT} peut modifier le spin de l'état initial (et donc le moment angulaire total). Dans les deux cas la parité n'est pas changée car ni F_F ni \vec{F}_{GT} ne modifient la partie orbitale des fonctions d'onde.

Nous allons décrire deux exemples de désintégrations β : les transitions superpermises de Fermi et la désintégration β du neutron (fig.6). Nous montrerons comment déduire les constantes de couplage G_F et g_A (28) à partir de ces processus.

Exemple: Les transitions superpermises de Fermi ^{14),22)}

Considérons le processus de désintégration β :

$${}^{14}\text{O} \rightarrow {}^{14}\text{N}^*(2.31 \text{ MeV}) + e^- + \bar{\nu}_e \tag{31}$$

dont la valeur $ft_{1/2} = 3130 \text{ s}$. S'agissant d'une transition $0^+ \rightarrow 0^+, T = 1$, seul l'opérateur F_F (27) y contribue (tab.1). Les transitions ont lieu entre les membres d'un même multiplet d'isospin (fig.10). Calculons la probabilité de transition associée. La projection de l'isospin (25) de ${}^{14}\text{O}$ est $\bar{T}_z = (Z - N)/2 = 1$ et celle de ${}^{14}\text{N}$ est $\bar{T}_z = 0$. En utilisant l'action des opérateurs T_{\pm} (24) sur les vecteurs de la base¹⁹⁾ (c'est la même que les opérateurs du moment angulaire),

5. σ_{μ} ($\mu = -1, 0, 1$) sont les opérateurs $\vec{\sigma}$ dans la représentation sphérique.

6. Les termes croisés de type $\sum_{f,i} M^F M^{GT,*}$ s'annulent après la moyenne sur les états de spin initiaux et la somme sur les états de spin finals.

il vient :

$$|M^F|^2 = |\langle \bar{T} = 1, \bar{T}_z = 0 | T_- | \bar{T} = 1, \bar{T}_z = 1 \rangle|^2 = \bar{T}(\bar{T} + 1) - \bar{T}_z(\bar{T}_z - 1) = 2 \quad (32)$$

Nous voyons que toutes les transitions entre un état $|\bar{T} = 1, \bar{T}_z = 1\rangle$ et un état $|\bar{T} = 1, \bar{T}_z = 0\rangle$ ont la même probabilité (32) et donc la même valeur $ft_{1/2}$ (14), quelque soit le noyau.

À partir de (14) et (32), nous pouvons estimer la constante faible G_F :

$$G_F^2 = \frac{\mathcal{K}}{ft_{1/2} |M_{fi}|^2} = \frac{2\pi^3 \hbar^7 \ln 2}{m_e^5 c^4} \frac{1}{6260s} \quad (33)$$

d'où $G_F = 1.137 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$. Les transitions superpermises de Fermi sont utilisées afin de déterminer la constante faible $G_F^{(23)}$.

Exemple : La désintégration du neutron ^{14),22)}

Il s'agit d'une transition à la fois de Fermi et de Gamow-Teller (fig.6), pour laquelle $ft_{1/2} = 1092 \text{ s}$. Calculons les probabilités de transition associées (29-30):

$$|M^F|^2 = \frac{1}{2} |\langle \bar{t} = \frac{1}{2}, \bar{t}_z = \frac{1}{2} | t_+ | \bar{t} = \frac{1}{2}, \bar{t}_z = -\frac{1}{2} \rangle|^2 = \frac{1}{2} [\bar{t}(\bar{t} + 1) - \bar{t}_z(\bar{t}_z + 1)] = 1 \quad (34)$$

et

$$|M^{GT}|^2 = \frac{1}{2J_i + 1} \sum_{\mu} \sum_{m_f, m_i} |\langle f | \sigma_{\mu} t_+ | i \rangle|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mu} \sum_{m_f, m_i} |\langle f | \sigma_{\mu} | i \rangle|^2 \quad (35)$$

En écrivant $\langle f | \sigma_{\mu} | i \rangle^* \langle f | \sigma_{\mu} | i \rangle = \langle i | \sigma_{\mu} | f \rangle \langle f | \sigma_{\mu} | i \rangle$, et utilisant la relation de fermeture ainsi que la propriété $\sigma_{\mu}^2 = 1$, on obtient :

$$|M_{GT}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{m_i} \langle m_i | \sum_{\mu} \sigma_{\mu}^2 | m_i \rangle = \frac{3}{2} \sum_{m_i} \langle m_i | m_i \rangle = 3 \quad (36)$$

D'après (14,28,33,34,36) on a :

$$1092 \text{ s} [1 + 3g_A^2] = \mathcal{K}/G_F^2 = 6260 \text{ s} \quad (37)$$

d'où on tire $|g_A| = 1.256$. La désintégration β du neutron permet donc une estimation de la constante de couplage $g_A^{(23)}$.

Nous reviendrons sur cette valeur quand nous parlerons du problème de la force "manquante" dans les transitions de Gamow-Teller (cf. 3.12) et discuterons la valeur *effective* de cette constante ($g_A^{eff} = 0.7 - 0.8g_A$) utilisée dans la majorité des calculs de désintégration β pour l'astrophysique.

3 LES MODÈLES MICROSCOPIQUES

En présentant les modèles microscopiques nous suivront deux cheminements parallèles (fig.11), selon que les noyaux à décrire sont magiques ou bien loin des fermetures des couches. Dans le premier cas où l'appariement ne joue pas un rôle important, nous partirons de l'approximation de champ moyen (par exemple d'Hartree-Fock). Nous montrerons comment à partir des états de particule simple, nous pouvons obtenir une base d'états à 1particule-1trou ($1p - 1t$), 2particules-2trous ($2p - 2t$), ... Nparticules-Ntrous ($Np - Nt$). Celle-ci peut être utilisée pour résoudre l'équation de Schrödinger indépendante du temps de manière approchée afin de déterminer les états excités. Nous déterminerons les états collectifs à $1p - 1t$: c'est la RPA. Nous introduirons aussi la RPA *avec échange de charge* qui permet de décrire les états excités des

noyaux isobares ayant $\Delta T_z = \pm 1$ (fig.10,(25)). Pour les noyaux à couches ouvertes, partant de l'approximation de champ moyen pour des quasi-particules (par exemple d'Hartree-Fock-Bogolioubov), nous déterminerons les états excités collectifs à 2-quasiparticules: c'est la RPA pour des Quasi-particules ou QRPA et avec échange de charge pour des quasi-particules (fig.11).

Commençons par rappeler quelques concepts concernant le formalisme de la seconde quantification.

3.1 Le formalisme de la seconde quantification

Introduisons des opérateurs de création a_k^\dagger et de destruction (ou annihilation) a_k . Le premier crée une particule dans l'état quantique k tandis que le deuxième la détruit (fig.12):

$$a_k^\dagger |-\rangle = |k\rangle \quad a_k |k\rangle = |-\rangle \quad (38)$$

L'état $|-\rangle$ est vide de particule et correspond au vide des opérateurs a_k , i.e. $a_k |-\rangle = 0$. Dans le formalisme de la seconde quantification¹⁹⁾ (ou des nombres d'occupation), les propriétés d'anti-symétrie ou de symétrie des fonctions d'onde des fermions et des bosons se traduisent par les relations d'anti-commutation et de commutation des opérateurs a, a^\dagger .

FERMIONS: À l'aide des opérateurs (38), la propriété d'anti-symétrie de la fonction d'onde s'exprime par la relation:

$$a_k^\dagger a_{k'}^\dagger |-\rangle = |k, k'\rangle = -|k', k\rangle = -a_{k'}^\dagger a_k^\dagger |-\rangle \quad (39)$$

et le fait qu'il ne peut pas y avoir deux particules dans le même état quantique k par:

$$a_k^\dagger a_k^\dagger |-\rangle = 0 \quad (40)$$

Les propriétés (39-40) peuvent être résumées par la relation:

$$\{a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\} = 0 \quad (41)$$

où les crochets désignent l'anti-commutateur

$$\{a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\} \equiv a_k^\dagger a_{k'}^\dagger + a_{k'}^\dagger a_k^\dagger \quad (42)$$

De manière toute à fait analogue, on déduit les autres relations d'anti-commutation¹⁹⁾:

$$\{a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\} = \{a_k, a_{k'}\} = 0 \quad \{a_k, a_{k'}^\dagger\} = \delta_{k,k'} \quad (43)$$

BOSONS: Il est facile de montrer que dans le cas où l'opérateur B_k^\dagger et son hermitique conjugué B_k crée ou détruit un boson, ils doivent satisfaire aux relations de commutation¹⁹⁾:

$$[B_k^\dagger, B_{k'}^\dagger] = [B_k, B_{k'}] = 0 \quad [B_k, B_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \quad (44)$$

où

$$[B_k^\dagger, B_{k'}^\dagger] \equiv B_k^\dagger B_{k'}^\dagger - B_{k'}^\dagger B_k^\dagger \quad (45)$$

Écrivons maintenant la forme explicite des opérateurs à 1- et 2-corps dans le formalisme de la seconde quantification.

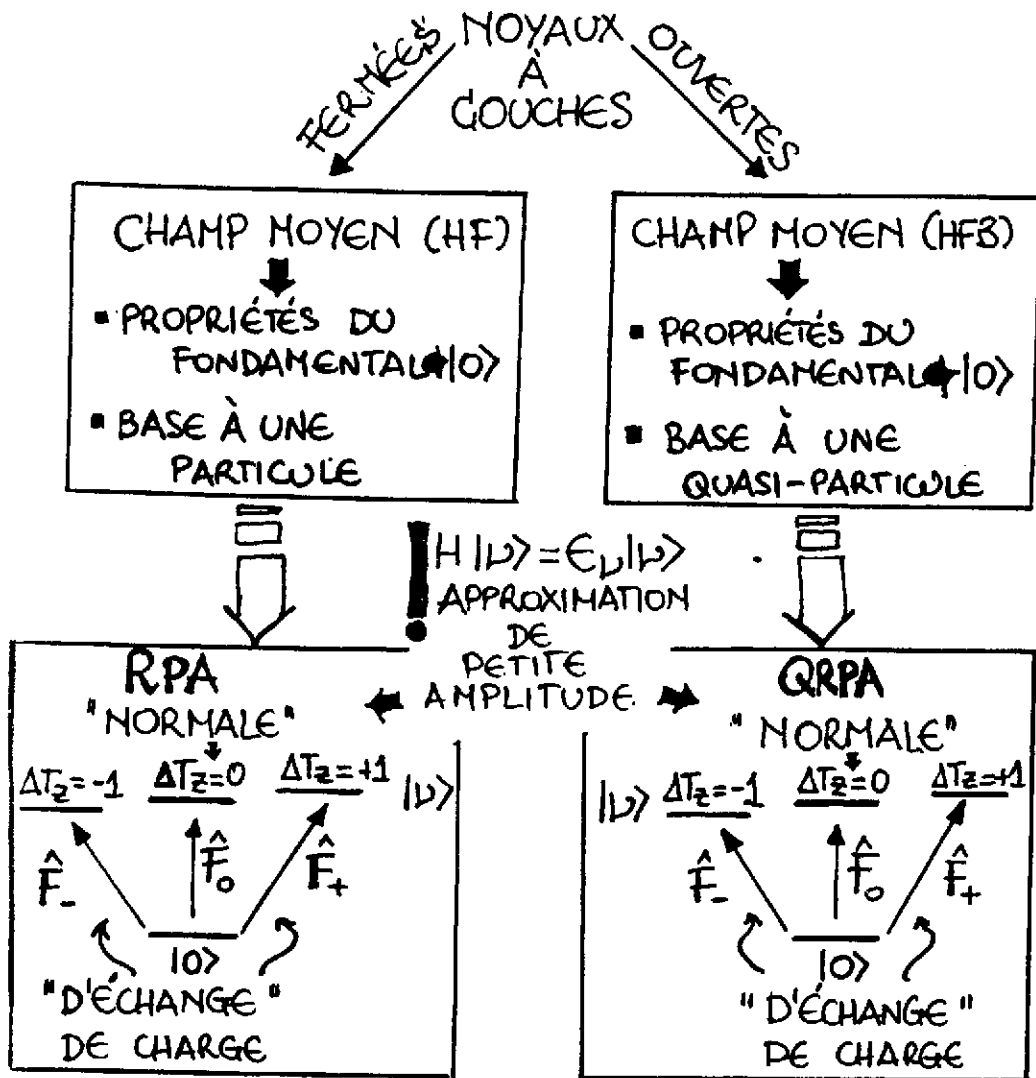


FIG. 11 - Schéma suivi dans la présentation de l'Approximation des Phases Aléatoires et de ses variantes. Pour les noyaux à couches fermées, le point de départ est le champ moyen. Il permet de décrire les propriétés de l'état fondamental des noyaux (densité, énergie de liaison, rayon quadratique moyen, etc ...) et donne une base d'états de particule simple. À partir de l'état fondamental d'un noyau donné, l'Approximation des Phases Aléatoires permet de décrire certains états excités (collectifs à 1 particule-1 trou) de ce même noyau ($\Delta T_z = 0$). La RPA avec échange de charge permet de décrire les états excités des noyaux isobares du noyau initial ($\Delta T_z = \pm 1$). Si les noyaux sont à couches ouvertes, les corrélations d'appariement sont incluses dans le champ moyen et les états de particule deviennent des états de quasi-particule. La RPA bâtie sur ces états est dite RPA pour des Quasi-particules (QRPA) et avec échange de charge pour des quasi-particules.

$$a_{p_{3/2}}^\dagger \left| \begin{array}{c} \text{---} p_{3/2} \\ \ominus \ominus s_{1/2} \end{array} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} \text{---} p_{3/2} \\ \ominus \bullet s_{1/2} \end{array} \right\rangle \quad a_{p_{3/2}} \left| \begin{array}{c} \text{---} p_{3/2} \\ \oplus \oplus s_{1/2} \end{array} \right\rangle = \left| \begin{array}{c} \text{---} p_{3/2} \\ \oplus \oplus s_{1/2} \end{array} \right\rangle$$

FIG. 12 - L'action d'un opérateur de création (gauche) ou de destruction (droite) sur une fonction d'onde est de créer ou de détruire une particule dans un état quantique donné comme dans cet exemple.

OPÉRATEURS À 1-CORPS : Ce sont les opérateurs qui agissent sur une seule particule à la fois :

$$F = \sum_{i=1}^N f(i) \quad (46)$$

Les opérateurs de Fermi, de Gamow-Teller (27) ou l'opérateur énergie cinétique sont des exemples d'opérateurs à 1-corps. Dans le formalisme de la seconde quantification, ils s'écrivent sous la forme^{19),21)} :

$$F = \sum_{k,k'} \langle k|F|k' \rangle a_k^\dagger a_{k'} \quad (47)$$

où, appliqués à un état $|k_1, k_2, \dots\rangle$, $a_{k'}$ détruit la particule dans l'état k' tandis que a_k^\dagger crée une particule dans l'état k , ceci avec le poids $\langle k|F|k' \rangle$ (fig.13). Par exemple, l'opérateur nombre s'écrit :

$$n = \sum_k n_k = \sum_k a_k^\dagger a_k \quad (48)$$

Nous voyons que $a_k^\dagger a_k |k_1, k_2, \dots\rangle = l |k_1, k_2, \dots\rangle$ où $l = 1$ ou 0 suivant que l'état k est occupé ou pas. En appliquant n (48) à un état quelconque nous obtenons le nombre total de particules.



FIG. 13 - Représentation schématique de l'action d'un opérateur à 1-corps (gauche) et à 2-corps (droite), le premier modifiant l'état d'une seule particule à la fois et le deuxième l'état de deux particules.

OPÉRATEURS À 2-CORPS : Ce sont les opérateurs qui agissent sur deux particules à la fois :

$$F = \sum_{i,j=1}^N f(i,j) \quad (49)$$

Dans le formalisme de la seconde quantification, un opérateur du type (49) s'écrit^{19),21)} :

$$F = \sum_{k,k',l,l'} \langle k,k'|F|l,l' \rangle a_k^\dagger a_{k'}^\dagger a_l a_{l'} \quad (50)$$

où, appliqués à un état $|k_1, k_2, \dots\rangle$, $a_l a_{l'}$ détruisent deux particules dans les états l, l' tandis que $a_k^\dagger a_{k'}^\dagger$ créent deux particules dans les états k, k' (fig.13). Un exemple d'opérateur à 2-corps est donné par l'interaction à deux corps.

Ceci peut être, bien sûr, généralisé aux opérateurs à 3-,4-,..., N-corps.

3.2 L'approximation de champ moyen

L'approximation de champ moyen^{19),20),21),24)} permet de décrire les propriétés des noyaux dans leur état fondamental (densité, énergie de liaison, rayon quadratique moyen, etc...). Cette approximation consiste à considérer que chaque nucléon du noyau se meut de façon indépendante des autres sous l'action du champ moyen créé par l'ensemble des nucléons. Ce champ détermine l'énergie ϵ_ν et la fonction d'onde ϕ_ν de chaque particule. Il peut être soit un potentiel phénoménologique (par exemple de type Woods-Saxon ou oscillateur harmonique), soit le potentiel auto-cohérent d'Hartree-Fock.

L'hypothèse faite dans l'approximation de champ moyen d'Hartree-Fock^{19),20),21)} est qu'un déterminant de Slater (correspondant au produit anti-symétrisé des fonctions d'onde des particules simples) (38) :

$$|HF\rangle = \prod_{i=1}^N a_i^\dagger |-\rangle \quad (51)$$

représente une bonne approximation de l'état fondamental du hamiltonien à deux corps décrivant un système de N-fermions :

$$H = \sum_{i=1}^N T(i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N V(i,j) \quad (52)$$

où le premier opérateur est l'énergie cinétique et le deuxième est l'interaction à deux corps.

En minimisant l'énergie $\langle HF|H|HF\rangle$ sur des fonctions d'onde d'essai de type (51), nous déduisons les équations d'Hartree-Fock qui s'écrivent, dans l'espace des coordonnées :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi_\nu(\vec{r}) + \int d\vec{r}' U(\vec{r}, \vec{r}') \phi_\nu(\vec{r}') = \epsilon_\nu \phi_\nu(\vec{r}) \quad (53)$$

où le potentiel U dépend à son tour des fonctions d'onde (il est dit auto-cohérent). Afin de résoudre ces équations, il faut donc utiliser des procédures itératives dans lesquelles on démarre avec un potentiel $U^{(0)}$ d'essai, à partir duquel on détermine une première estimation des fonctions d'onde ϕ_ν . On utilise celles-ci pour calculer le nouveau potentiel $U^{(1)}$ ($U^{(0)} \rightarrow \phi_\nu \rightarrow U^{(1)} \rightarrow \dots$) et ainsi de suite jusqu'à ce que la procédure converge, c'est-à-dire jusqu'à ce que $U^{(n-1)} \rightarrow \phi_\nu \rightarrow U^{(n)} = U^{(n-1)}$. Le potentiel $U(\vec{r}, \vec{r}')$ contient, bien sûr, un terme direct et un terme d'échange provenant de l'anti-symétrisation des fonctions d'onde.

Dans cette approximation l'hamiltonien (52) peut être réécrit (à une constante près)^{19),20),21)} comme :

$$H = H_{HF} + V_{RES} = \sum_{\nu} \epsilon_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + V_{RES} \quad (54)$$

où H_{HF} est l'hamiltonien à 1-corps d'Hartree-Fock et ϵ_{ν} sont les énergies de particules simples obtenues en résolvant (53). Le terme V_{RES} correspond à la partie de l'interaction à deux corps (52) qui n'a pas été incluse dans le champ moyen²⁰⁾. Par la suite nous verrons qu'une partie de cette interaction résiduelle, notamment l'interaction particule-trou et particule-particule, sera incluse dans les approximations RPA et QRPA qui se situent par conséquent au-delà du champ moyen. La fonction d'onde d'Hartree-Fock (51) obtenue en remplissant les N états de particule simple les plus bas en énergie (53) est l'état fondamental du hamiltonien H_{HF} (fig.14,(54)). Cet ensemble d'états est appelé *mer de Fermi* et le dernier état occupé, *surface de Fermi* (fig.14). Il est pratique pour la suite d'appeler *trou* un état non occupé sous la surface de Fermi. Dans cette logique on appelle *états de trou* les états en dessous de la mer de Fermi et *états de particule* les états au-dessus. Par exemple, dans ce langage, l'état fondamental $|HF\rangle$ est un état à $|0p - 0t\rangle$ parce que il n'y a aucun trou dans la mer de Fermi et aucune particule au-dessus. Nous indiquerons dans la suite les états de trou avec les indices i, j, k, l et les états de particule avec m, n, p, q .

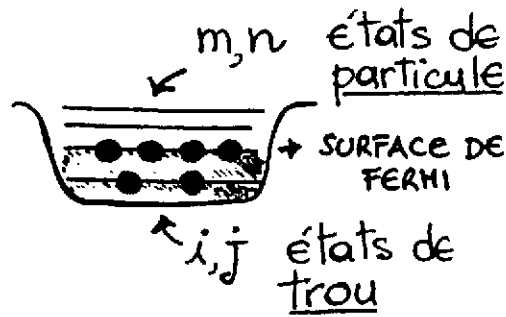


FIG. 14 – Représentation schématique de l'état fondamental d'un noyau dans une approximation de champ moyen. Les ÉTATS DE TROU correspondent aux états occupés dans l'état fondamental, le dernier détermine la SURFACE DE FERMI. Ils constituent la MER DE FERMI. Les états inoccupés au-dessus de la mer de Fermi correspondent aux ÉTATS DE PARTICULE.

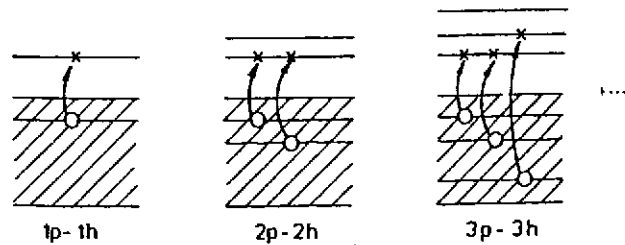


FIG. 15 – Diagrammes schématiques des états à $|1p - 1t\rangle$ (1particules-1trou), $|2p - 2t\rangle$ (2particules-2trous),... $|Np - Nt\rangle$ (Nparticules-Ntrous).

À partir des états de particule simple déterminés dans l'approximation de champ moyen, il est possible, en principe, de définir une base appelée base à N particules- N trou ($Np - Nt$) (fig.15) sur laquelle diagonaliser l'hamiltonien total (54).

3.3 La base des états à $Np-Nt$

Considérons l'action de l'opérateur $a_m^\dagger a_i$ sur l'état $|HF\rangle$ (51). Il détruit une particule d'état quantique i dans la mer de Fermi (laissant un trou) et crée une particule dans l'état quantique m au-dessus de la mer de Fermi (fig.15). L'état $|1p-1t\rangle$ qui en résulte est appelé état à 1particule-1trou. De même, l'action de l'opérateur $a_m^\dagger a_n^\dagger a_i a_j$ sur $|HF\rangle$ est de créer deux particules au-dessus de la mer de Fermi et laisser deux trous dans la mer de Fermi. C'est un état à 2particules-2trous, $|2p - 2t\rangle$. De manière analogue, nous pouvons créer des états avec un nombre arbitraire de particule-trou, jusqu'à l'état ayant N particules- N trous, $|Np - Nt\rangle$, où tous les nucléons occupent des états de particule. L'ensemble de ces états constitue une base^{19),20),21)} que nous appellerons la base à $Np-Nt$. En utilisant cette base, l'hamiltonien (54) peut être écrit sous forme matricielle.

CAS $V_{RES} = 0$: Il est facile de montrer que la matrice correspondante à H (54) avec $V_{RES} = 0$ est diagonale^{19),20),21)} dans la base des états à $|kp - kt\rangle$ ($k = 1, 2, \dots, N$), les valeurs propres correspondantes étant donnée par $E_k = E_{HF} + \sum_{m_r, i_r=1}^k (\epsilon_{m_r} - \epsilon_{i_r})$, où E_{HF} est l'énergie du fondamental Hartree-Fock et $(\epsilon_{m_r} - \epsilon_{i_r})$ sont les énergies nécessaires pour exciter une paire particule-trou (fig.16).

Explicitons la distribution de force $S(E)$ (16) associée à un opérateur de transition à un corps F (47) (nécessaire aux calculs de temps de vie). Elle présente des pics aux énergies nécessaires pour créer des excitations à $|kp - kt\rangle$ ($k = 1, 2, \dots, N$), $E_f^* = E_k - E_{HF} = \sum_{m_r, i_r=1}^k (\epsilon_{m_r} - \epsilon_{i_r})$. L'amplitude de ces pics ne dépend que des fonctions d'onde de particule

$$\begin{array}{l}
 \blacksquare \boxed{V_{RES} = 0} \Rightarrow |0p-0t\rangle \quad |1p-1t\rangle \quad |2p-2t\rangle \dots |Np-Nt\rangle \\
 |HF\rangle = |0p-0t\rangle \\
 \langle \hat{H}_{HF} \rangle = \begin{array}{l} |1p-1t\rangle \\ |2p-2t\rangle \\ \vdots \\ |Np-Nt\rangle \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 E_0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & E_0 + \epsilon_m - \epsilon_i & 0 & 0 \\
 \hline
 0 & 0 & E_0 + \epsilon_m + \epsilon_n - \epsilon_i - \epsilon_j & 0 \\
 \hline
 \vdots & 0 & 0 & \ddots \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & E_0 + \sum \epsilon_p - \sum \epsilon_q \\
 \hline
 \end{array}$$

FIG. 16 – Si l'on néglige l'interaction résiduelle, la matrice associée à l'hamiltonien (coïncidant avec l'hamiltonien d'Hartree-Fock) (54) est diagonale sur la base à $Np-Nt$, les valeurs propres étant les énergies nécessaires pour exciter les k paires particule-trou ($k = 1, 2, \dots, N$) (voir texte).

$$\begin{array}{l}
 |HF\rangle = |0p-0t\rangle \quad |1p-1t\rangle \quad |2p-2t\rangle \dots \\
 |HF\rangle = |0p-0t\rangle \\
 \langle \hat{H} \rangle = \begin{array}{l} |1p-1t\rangle \\ |2p-2t\rangle \\ \vdots \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{|c|c|c|c|}
 \hline
 E_0 + \langle 0|V|0\rangle & \langle 0|V|1\rangle & \langle 0|V|2\rangle & \dots \\
 \hline
 \langle 1|V|0\rangle & E_0 + \epsilon_m - \epsilon_i + \langle 1|V|1\rangle & \langle 1|V|2\rangle & \dots \\
 \hline
 \langle 2|V|0\rangle & \langle 2|V|1\rangle & E_0 + \sum \epsilon_p - \epsilon_t + \langle 2|V|2\rangle & \dots \\
 \hline
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
 \hline
 \end{array}$$

FIG. 17 – Si l'on inclut (une partie de) l'interaction résiduelle, la matrice associée à l'hamiltonien (54) n'est plus diagonale sur la base à $Np-Nt$. Après la diagonalisation, les états propres sont un mélange des états à $Np-Nt$ (voir texte).

simple. Par exemple, pour un état $|1p-1t\rangle$ donné, il vient⁷ :

$$\langle f|F|i\rangle = \langle 1p-1t|F|0p-0t\rangle = \sum_{k,k'} \langle k|F|k'\rangle \langle 0p-0t|a_i^\dagger a_m a_k^\dagger a_{k'}|0p-0t\rangle = \langle m|F|i\rangle \quad (55)$$

L'amplitude à l'énergie $\epsilon_m - \epsilon_i$ ne dépend donc que des fonctions d'onde de particule simple ϕ_m, ϕ_i . (Les états de trou sont des états de particule à une phase près^{19),20),21)}).

CAS $V_{RES} \neq 0$: Suite à l'inclusion (d'une partie) de l'interaction résiduelle, la matrice associée à l'hamiltonien H (54) présente des termes supplémentaires le long et en dehors de la diagonale. Ceux-ci correspondent aux couplages des états entre eux, par exemple, des états $|1p-1t\rangle$ avec les états $|1p-1t\rangle, |2p-2t\rangle, \dots, |Np-Nt\rangle$ (fig.17). Après la diagonalisation, les énergies propres E_ν sont modifiées par rapport à $E_{HF} + \sum_{m,i=1}^k (\epsilon_m - \epsilon_i)$ et les fonctions d'onde de l'état fondamental $|0\rangle$ et des états excités $|\nu\rangle$ sont un mélange des états de la base à $Np-Nt$:

7. Il faut utiliser le théorème de Wick^{19),20),21)}.

$$|0\rangle = c_0|0p - 0t\rangle + \sum_{m,i} c_{mi}^0 a_m^\dagger a_i |0p - 0t\rangle + \dots \quad (56)$$

$$|\nu\rangle = c_0^\nu |0p - 0t\rangle + \sum_{m,i} c_{mi}^\nu a_m^\dagger a_i |0p - 0t\rangle + \dots \quad (57)$$

Par conséquent, l'inclusion de l'interaction résiduelle modifie nécessairement la distribution de force microscopique $\mathcal{S}(E)$. Nous le verrons par la suite dans les cas de la RPA (où l'interaction résiduelle particule-trou est incluse) et dans le cas de la QRPA (où les interactions résiduelles particule-trou et particule-particule sont incluses).

En conclusion, la diagonalisation de la matrice totale correspondant à l'opérateur H (54) nous donne, en principe, les valeurs propres E_ν et les vecteurs propres $|\nu\rangle$, solutions exactes de l'équation de Schrödinger. En pratique, la dimension de cette matrice est trop grande pour que l'on puisse accomplir cette tâche. Il est donc nécessaire de tronquer l'espace, ce qui mène à des solutions approchées de l'équation de Schrödinger. Nous déterminerons ces solutions à l'aide de la méthode des équations du mouvement²⁰. De manière qualitative, différentes approches correspondent à différents niveaux de troncation. Par exemple, nous déterminons les états collectifs à 1p-1t en RPA, les états collectifs à 2p-2t avec la SRPA (Seconde RPA) tandis que dans le modèle en couches nous essayons d'aller le plus loin possible dans cette hiérarchie.

3.4 La méthode des équations du mouvement

Soient les opérateurs de création Q_ν^\dagger et de destruction Q_ν , tels que :

$$Q_\nu^\dagger |0\rangle = |\nu\rangle \quad Q_\nu |0\rangle = 0 \quad (58)$$

c'est-à-dire qu'en appliquant l'opérateur Q_ν^\dagger à l'état fondamental exact du système, nous générons tous les états excités exacts et que l'état $|0\rangle$ correspond au vide de ces opérateurs (fig.18). Réécrivons l'équation de Schrödinger $H|\nu\rangle = E_\nu|\nu\rangle$ sous la forme $HQ_\nu^\dagger|0\rangle = E_\nu Q_\nu^\dagger|0\rangle$ et retranchons le terme $Q_\nu^\dagger H|0\rangle = Q_\nu^\dagger E_0|0\rangle$. Il vient :

$$[H, Q_\nu^\dagger] |0\rangle = HQ_\nu^\dagger|0\rangle - Q_\nu^\dagger H|0\rangle = (E_\nu - E_0)|0\rangle \quad (59)$$

En multipliant à gauche par δQ_ν et en soustrayant $[H, Q_\nu^\dagger] \delta Q_\nu |0\rangle = 0$ (58), on déduit :

$$\delta Q_\nu [H, Q_\nu^\dagger] |0\rangle - [H, Q_\nu^\dagger] \delta Q_\nu |0\rangle = E_\nu^* [\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger] |0\rangle \quad (60)$$

Le terme de gauche est un double commutateur :

$$[\delta Q_\nu, [H, Q_\nu^\dagger]] |0\rangle = E_\nu^* [\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger] |0\rangle \quad (61)$$

En multipliant (61) par $\langle 0|$, on obtient :

$$\langle 0| [\delta Q_\nu, [H, Q_\nu^\dagger]] |0\rangle = E_\nu^* \langle 0| [\delta Q_\nu, Q_\nu^\dagger] |0\rangle \quad (62)$$

Cette équation est bien évidemment équivalente à l'équation de Schrödinger. En pratique, on doit résoudre (62) de manière approchée. Pour ce faire on choisit des opérateurs O_ν^\dagger, O_ν approchés et on évalue les commutateurs (62) sur un vide approché. Selon le choix de ces opérateurs et du vide correspondant, nous pouvons déduire maintes approches²⁰ utiles pour la spectroscopie des système à N-corps. Nous montrerons comment la méthode des équations des mouvements permet d'obtenir la RPA.

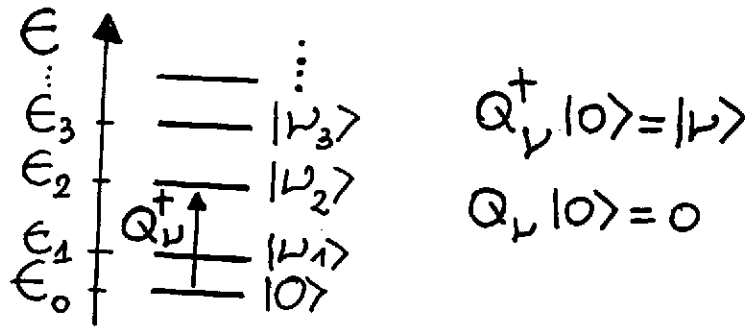


FIG. 18 - En appliquant l'opérateur Q_ν^\dagger à l'état fondamental exact du système, nous générons tous ses états excités. L'état $|0\rangle$ corresponde au vide de ces opérateurs.

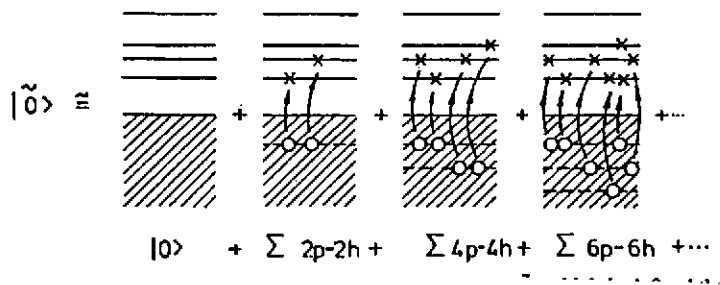


FIG. 19 - Le vide $|RPA\rangle$ contient des excitations à $2p-2t$, $4p-4t$, etc. ... contrairement au vide $|HF\rangle$ où toutes les particules occupent les niveaux les plus bas en énergie.

3.5 L'Approximation des Phases Aléatoires (RPA)

3.5.1 Le fondamental $|RPA\rangle$ et les opérateurs O_ν^\dagger, O_ν

Considérons l'opérateur de création O_ν^\dagger et son hermitique conjugué O_ν :

$$O_\nu^\dagger = \sum_{m,i} [X_{m,i}^\nu a_m^\dagger a_i - Y_{m,i}^\nu a_i^\dagger a_m] \quad O_\nu = \sum_{m,i} [X_{m,i}^{*\nu} a_i^\dagger a_m - Y_{m,i}^{*\nu} a_m^\dagger a_i] \quad (63)$$

dépendant des amplitudes complexes (X^ν, Y^ν) et tels que

$$O_\nu^\dagger |RPA\rangle = |\nu\rangle \quad O_\nu |RPA\rangle = 0 \quad (64)$$

c'est-à-dire que l'état $|RPA\rangle$ est le vide des opérateurs O_ν . L'action de O_ν^\dagger sur ce vide est d'une part de créer une excitation particule-trou, à travers le terme $a_m^\dagger a_i$, avec le poids $X_{m,i}^\nu$, d'autre part de détruire une paire trou-particule, à travers le terme $a_i^\dagger a_m$, avec le poids $Y_{m,i}^\nu$. Afin que ceci soit possible, il faut que le vide $|RPA\rangle$ contienne des particules à la fois en dessous et au-dessus de la mer de Fermi, c'est-à-dire qu'il contienne des corrélations. Par exemple, si cet état coïncidait avec $|HF\rangle$ (51) le terme $a_i^\dagger a_m$ ne donnerait aucune contribution. En effet, il est possible de montrer^(19),20),21) que le vide $|RPA\rangle$ inclut des excitations à $2p-2t$, $4p-4t$, etc... (fig.19), l'action de $a_i^\dagger a_m$ n'est donc pas nulle.

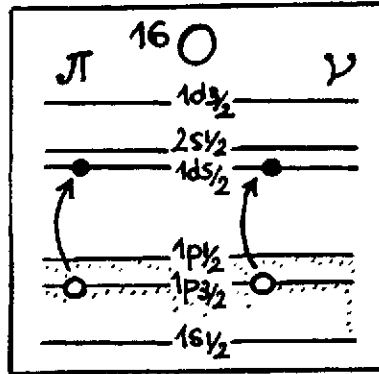


FIG. 20 - Exemples d'excitations à $1p-1t$ dans le noyau O^{16} , couplées au moment angulaire $J^\pi = 1^-$.

Dans un calcul RPA pour un noyau donné, il faut donc choisir un espace d'états modèle et regarder toutes les excitations possibles à $1p-1t$, couplées à un moment angulaire donné (fig.20). Cet espace doit être suffisamment grand pour satisfaire les règles de somme (3.11).

En conclusion, les états $|\nu\rangle$ correspondent à des sommes corrélées d'excitations particule-trou et trou-particule. Ils sont caractérisés par les amplitudes complexes (X^ν, Y^ν) (63) et leur énergie E_ν . Celles-ci sont déterminées par les équations de la RPA que nous allons dériver.

3.5.2 Les équations de la RPA sous forme matricielle

Considérons une variation (63) :

$$\delta O_\nu = \sum_{m,i} \left[\delta X_{m,i}^{*,\nu} a_i^\dagger a_m - \delta Y_{m,i}^{*,\nu} a_m^\dagger a_i \right] \quad (65)$$

et remplaçons les opérateurs et le vide exacts $Q_\nu^\dagger, \delta Q_\nu, |0\rangle$ (58) par $O_\nu^\dagger, \delta O_\nu, |RPA\rangle$ (63-64) dans (62) :

$$\sum_{m,i} \delta X_{m,i}^{*,\nu} \left\{ \langle RPA | [a_i^\dagger a_m, [H, O_\nu^\dagger]] | RPA \rangle - E_\nu \langle RPA | [a_i^\dagger a_m, O_\nu^\dagger] | RPA \rangle \right\} = 0 \quad (66)$$

$$\sum_{m,i} \delta Y_{m,i}^{*,\nu} \left\{ \langle RPA | [a_m^\dagger a_i, [H, O_\nu^\dagger]] | RPA \rangle - E_\nu \langle RPA | [a_m^\dagger a_i, O_\nu^\dagger] | RPA \rangle \right\} = 0 \quad (67)$$

Il faut donc résoudre les deux équations :

$$\langle RPA | [a_i^\dagger a_m, [H, O_\nu^\dagger]] | RPA \rangle = E_\nu \langle RPA | [a_i^\dagger a_m, O_\nu^\dagger] | RPA \rangle \quad (68)$$

$$\langle RPA | [a_m^\dagger a_i, [H, O_\nu^\dagger]] | RPA \rangle = E_\nu \langle RPA | [a_m^\dagger a_i, O_\nu^\dagger] | RPA \rangle \quad (69)$$

Dans ce but il faut évaluer des valeurs moyennes de commutateurs comme :

$$\langle RPA | [a_i^\dagger a_m, O_\nu^\dagger] | RPA \rangle = \sum_{\bar{m}, \bar{i}} \left\{ X_{\bar{m}, \bar{i}}^\nu \langle RPA | [a_i^\dagger a_m, a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{i}}] | RPA \rangle - Y_{\bar{m}, \bar{i}}^\nu \langle RPA | [a_i^\dagger a_m, a_{\bar{i}}^\dagger a_{\bar{m}}] | RPA \rangle \right\} \quad (70)$$

Introduisons à ce point l'*approximation de quasi-boson*^{19),20),21)}. Elle consiste à remplacer les valeurs moyennes telles que (70), évaluée sur le vide $|RPA\rangle$, par des valeurs moyennes évaluées

sur le vide $|HF\rangle$. Par exemple, nous écrivons :

$$\langle RPA | [a_i^\dagger a_m, a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{i}}] | RPA \rangle \approx \langle HF | [a_i^\dagger a_m, a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{i}}] | HF \rangle = \delta_{i,\bar{i}} \delta_{m,\bar{m}} \quad (71)$$

Cette approximation est d'autant plus justifiée que les corrélations dans le vide $|RPA\rangle$ sont petites.

Nous pouvons aussi formuler l'approximation de quasi-boson à travers les méthodes de développement en bosons²¹⁾. Considérons une transformation qui nous permet de remplacer des produits d'opérateurs de fermions par un opérateur de boson :

$$a_m^\dagger a_i \rightarrow B_{mi}^\dagger + \dots \quad a_i^\dagger a_m \rightarrow B_{mi} + \dots \quad (72)$$

c'est-à-dire qu'elle permet de traiter une paire de fermions (particule-trou) comme un boson. Il est clair que ceci ne peut être exact que si l'on considère une série infinie de termes. En pratique, nous sommes obligés de tronquer à un certain ordre. Il est possible de montrer que la RPA est équivalente à l'ordre le plus bas dans le développement en bosons²¹⁾ (72). Suivant (43,44,72) nous avons alors :

$$[a_i^\dagger a_m, a_{\bar{m}}^\dagger a_{\bar{i}}] \rightarrow [B_{mi}, B_{\bar{m}\bar{i}}^\dagger] = \delta_{m,\bar{m}} \delta_{i,\bar{i}} \quad (73)$$

en accord avec (71).

En utilisant l'approximation de quasi-boson et les relations (63,68-69), il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{n,j} [X_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [H, a_n^\dagger a_j]] | HF \rangle + Y_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [H, a_j^\dagger a_n]] | HF \rangle] \\ = E_\nu \sum_{n,j} X_{nj}^\nu \langle HF | [a_i^\dagger a_m, a_n^\dagger a_j] | HF \rangle \end{aligned} \quad (74)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n,j} [X_{nj}^\nu \langle HF | [a_m^\dagger a_i, [H, a_n^\dagger a_j]] | HF \rangle + Y_{nj}^\nu \langle HF | [a_m^\dagger a_i, [H, a_j^\dagger a_n]] | HF \rangle] \\ = E_\nu \sum_{n,j} Y_{nj}^\nu \langle HF | [a_m^\dagger a_i, a_j^\dagger a_n] | HF \rangle \end{aligned} \quad (75)$$

Définissons les matrices :

$$A_{mi,nj} = \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [H, a_n^\dagger a_j]] | HF \rangle \quad B_{mi,nj} = \langle HF | [a_i^\dagger a_m, [H, a_j^\dagger a_n]] | HF \rangle \quad (76)$$

et récrivons (74-75) :

$$\sum_{n,j} [A_{mi,nj} X_{nj}^\nu + B_{mi,nj} Y_{nj}^\nu] = E_\nu X_{mi}^\nu \quad (77)$$

$$\sum_{n,j} [B_{mi,nj}^* X_{nj}^\nu + A_{mi,nj}^* Y_{nj}^\nu] = -E_\nu Y_{mi}^\nu \quad (78)$$

Nous arrivons aux équations de la RPA sous forme matricielle^{19),20),21)} :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^* & A^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\nu \\ Y^\nu \end{pmatrix} = E_\nu \begin{pmatrix} X^\nu \\ -Y^\nu \end{pmatrix} \quad (79)$$

où⁸

$$A_{mi,nj} = (\epsilon_m - \epsilon_i) \delta_{mn} \delta_{ij} + \langle mj | \tilde{V}_{RES} | ni \rangle \quad B_{mi,nj} = \langle mn | \tilde{V}_{RES} | ij \rangle \quad (80)$$

et les éléments de matrice sont anti-symétrisés. Les solutions E_ν et (X^ν, Y^ν) des équations RPA (79), caractérisant les états excités, dépendent d'une part des énergies nécessaires pour exciter les états particule-trou et d'autre part de l'interaction résiduelle entre les particules et les trous. L'interaction résiduelle (54) incluse au niveau de la RPA (79-80) est appelée *interaction résiduelle dans la voie particule-trou*.

8. Il faut utiliser le théorème de Wick^{20),21)}.

Propriétés des solutions RPA : Il est facile de montrer^{20),21)} que les solutions des équations (79) ont les propriétés suivantes :

- 1) les valeurs propres apparaissent par paires ($E^\nu, -E^\nu$) correspondant respectivement aux vecteurs propres (X^ν, Y^ν) et ($Y^{*,\nu}, X^{*,\nu}$).
- 2) Les vecteurs propres satisfont à la condition d'orthogonalité :

$$\langle \nu | \nu' \rangle = \sum_{m,i} \left(X_{m,i}^{*,\nu} X_{m,i}^{\nu'} - Y_{m,i}^{*,\nu} Y_{m,i}^{\nu'} \right) = \delta_{\nu,\nu'} \quad (81)$$

- 3) Les quantités $|X_{m,i}^\nu|^2, |Y_{m,i}^\nu|^2$ représentent les probabilités de trouver les excitations particule-trou $a_m^\dagger a_i |RPA\rangle$ et trou-particule $a_i^\dagger a_m |RPA\rangle$ dans l'état excité $|\nu\rangle$:

$$\langle RPA | a_i^\dagger a_m | \nu \rangle \approx \langle HF | [a_i^\dagger a_m, O_\nu^\dagger] | HF \rangle = X_{m,i}^\nu \quad (82)$$

$$\langle RPA | a_m^\dagger a_i | \nu \rangle \approx \langle HF | [a_m^\dagger a_i, O_\nu^\dagger] | HF \rangle = Y_{m,i}^\nu \quad (83)$$

où nous avons utilisé (63) et l'approximation de quasi-boson (71).

L'approximation Tamm-Dancoff (TDA) : Cette approche^{19),20),21)} peut être considérée comme un cas particulier de la RPA. En effet, en prenant $Y^\nu = 0$ dans (63), nous avons :

$$O_\nu^\dagger = \sum_{m,i} X_{m,i}^\nu a_m^\dagger a_i \quad O_\nu = \sum_{m,i} X_{m,i}^{*,\nu} a_i^\dagger a_m \quad (84)$$

dont le vide correspondant est l'état $|HF\rangle$:

$$O_\nu^\dagger |HF\rangle = |\nu\rangle \quad O_\nu |HF\rangle = 0 \quad (85)$$

Les états $|\nu\rangle$ sont des sommes corrélées d'excitations particule-trou caractérisées par leur énergie E_ν et l'amplitude complexe X^ν . Celles-ci sont déterminées par les équations TDA :

$$AX^\nu = E^\nu X^\nu \quad (86)$$

avec

$$A_{mi,nj} = (\epsilon_m - \epsilon_i) \delta_{mn} \delta_{ij} + \langle mj | \tilde{V}_{RES} | ni \rangle \quad (87)$$

que l'on obtient soit en remplaçant les opérateurs approchés (84) et leur vide (85) dans (62) soit en prenant $Y^\nu = 0$ dans (79).

Calculs auto-cohérents et phénoménologiques La réalisation d'un calcul RPA nécessite le choix de certains "ingrédients" en ce qui concerne le champ moyen d'abord (point de départ du calcul) et ensuite la RPA. Au niveau du champ moyen, il faut choisir le potentiel qui peut être soit phénoménologique, par exemple un potentiel de Woods-Saxon ou un oscillateur harmonique, soit le potentiel auto-cohérent obtenu en résolvant les équations d'Hartree-Fock (53). Ceci nous donne les énergies et les fonctions d'onde de particule simple nécessaire à la construction de la base à $Np - Nt$ et au calcul RPA (80). Au niveau de la RPA, il faut choisir l'interaction résiduelle dans la voie particule-trou (79-80) qui peut être soit une interaction schématique, par exemple de type séparable (cf. 3.5.3) soit une interaction dérivée de la même fonctionnelle densité d'énergie que le champ moyen^{21),24),25)}. Un exemple de fonctionnelle densité d'énergie est donnée par les forces effectives de Skyrme et de Gogny^{21),24)}. Si l'interaction résiduelle dans la voie particule-trou et le champ moyen dérivent d'une même fonctionnelle, les calculs RPA sont dits *auto-cohérents*. Les forces effectives dans la voie particule-trou sont choisies de façon à reproduire les propriétés des Résonances Géantes, des vibrations collectives des noyaux atomiques (cf. 3.8).

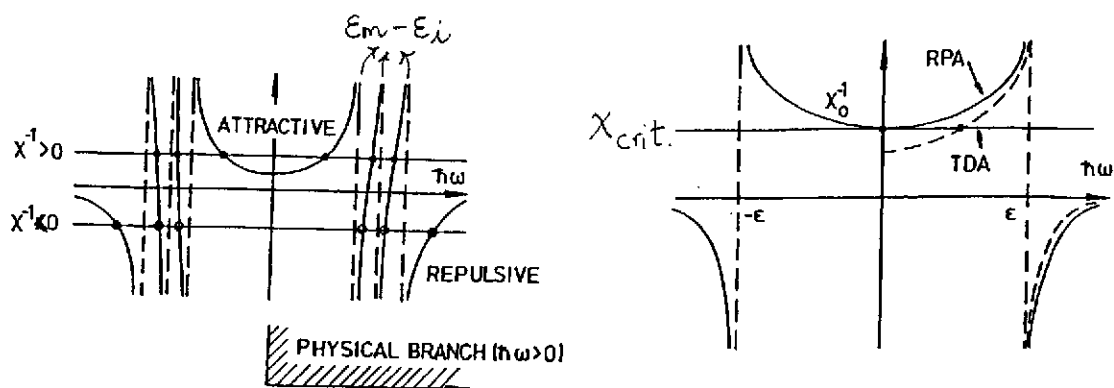


FIG. 21 - Solutions des équations RPA dans le cas d'une interaction résiduelle schématique séparable dans la voie particule-trou (voir texte). Les énergies RPA sont données par l'intersection des droites χ^{-1} avec les courbes, dans les cas où les énergies $\epsilon_m - \epsilon_i$ ne sont pas dégénérées (gauche), ou sont dégénérées (droite).

3.5.3 Un modèle schématique

Étudions le cas d'une interaction résiduelle schématique séparable dans la voie particule-trou^{19),20),21)} :

$$V_{RES}(i, j) = -\chi \sum_{i, j} D(i) D^*(j) \quad (88)$$

(l'opérateur D est, par exemple, l'opérateur dipolaire ou quadrupolaire). Les éléments de matrice dans A et B (80) sont alors⁹ :

$$\langle m j | V_{RES} | n i \rangle = -\chi D_{mi} D_{nj}^* \quad \langle m n | V_{RES} | i j \rangle = -\chi D_{mi} D_{nj} \quad (89)$$

où $D_{mi} = \langle m | D | i \rangle$. Dans ce cas les équations de la RPA (79) deviennent algébriques :

$$(\epsilon_m - \epsilon_i - E_\nu) X_{mi}^\nu - D_{mi} \mathcal{N} = 0 \quad (90)$$

$$(\epsilon_m - \epsilon_i + E_\nu) Y_{mi}^\nu - D_{mi}^* \mathcal{N} = 0 \quad (91)$$

où $\mathcal{N} = \chi \sum_{n j} (D_{nj}^* X_{nj} + D_{nj} Y_{nj})$. En résolvant le système (90-91), nous obtenons les amplitudes :

$$X_{mi}^\nu = \mathcal{N} \frac{D_{mi}}{(\epsilon_m - \epsilon_i - E_\nu)} \quad Y_{mi}^\nu = \mathcal{N} \frac{D_{mi}^*}{(\epsilon_m - \epsilon_i + E_\nu)}, \quad (92)$$

les énergies E_ν sont les solutions de :

$$\frac{1}{\chi} = 2 \sum_{mi} \frac{|D_{mi}|^2 (\epsilon_m - \epsilon_i)}{(\epsilon_m - \epsilon_i)^2 - E_\nu^2}, \quad (93)$$

dont la solution graphique est représentée (fig.21, gauche). Nous voyons que :

- les énergies apparaissent par paires ($E_\nu, -E_\nu$). Evidemment, seules les solutions d'énergie positive sont physiques;
- les énergies E_ν sont décalées par rapport aux énergies $\epsilon_m - \epsilon_i$ (à cause de l'interaction résiduelle dans la voie particule-trou);

9. Seul le terme directe est inclu.

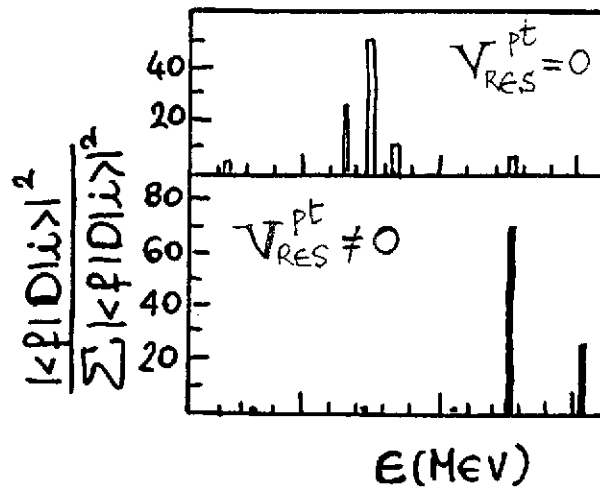


FIG. 22 – Exemple montrant l'effet de l'interaction résiduelle particule-trou sur la distribution de force associée à l'opérateur dipolaire.

– Selon la valeur de χ , il y a trois régimes possibles :

- 1) $\chi < 0$: les énergies E_ν sont, en moyenne, poussées vers le haut par l'interaction résiduelle répulsive. Il existe un état dont l'énergie est plus grande que tous les $\epsilon_m - \epsilon_i$;
- 2) $0 < \chi < \chi_{crit.}$ (voir ci-dessous);
- 3) $\chi > \chi_{crit.}$: les énergies E_ν sont, en moyenne, poussées vers le bas par l'interaction résiduelle attractive. Il existe un état dont l'énergie est plus petite que tous les $\epsilon_m - \epsilon_i$.

Un cas particulier est celui où les énergies $\epsilon_m - \epsilon_i$ sont toutes dégénérées et égales à ϵ (fig.21, droite). Dans ce cas il est facile de montrer que¹⁹⁾ :

- Il n'y a qu'une seule solution, d'énergie $\bar{E}^2 = \epsilon^2 - 2\chi\epsilon \sum_{mi} |D_{mi}|^2$ ($\bar{E} > \epsilon$ si $\chi > 0$ ou $\bar{E} < \epsilon$ si $\chi < 0$);
- Pour $0 < \chi < \chi_{crit.}$ les équations RPA n'ont pas de solutions physiques : en effet les énergies RPA sont complexes ! Ceci correspond à ce que l'on appelle l'instabilité de la RPA, due au fait que l'état de départ $|HF\rangle$ n'est plus l'état le plus bas en énergie.
- La probabilité de transition vers cet état due à un opérateur $F = D$ est : $|\langle \bar{\nu} | D | 0 \rangle|^2 = \epsilon / \bar{E} \sum_{m,i} |\langle m | D | i \rangle|^2$, c'est-à-dire que toutes les excitations à 1p-1t contribuent de manière cohérente.

Pour conclure, l'exemple de l'interaction particule-trou schématisé (88) que nous venons de considérer illustre certaines propriétés génériques des états excités RPA : d'une part, une interaction résiduelle répulsive (attractive) pousse, en moyenne, vers le bas (haut) les énergies E_ν par rapport aux énergies nécessaires pour exciter des paires particule-trou; d'autre part les probabilités de transitions vers les états RPA, $\langle f | F | i \rangle = \langle \nu | F | RPA \rangle$ (16), sont modifiées par rapport aux valeurs (55), car plusieurs excitations à 1p-1t contribuent (fig.22) (dans 3.7 nous verrons leur expression explicite). Si leur nombre est grand, on dit que l'état est collectif.

3.6 L'Approximation des Phases Aléatoires avec échange de charge

En partant du fondamental d'un noyau donné, la RPA avec échange de charge²⁶⁾ permet de décrire les états excités collectifs à 1p-1t dans les noyaux isobares (fig.11). Afin de décrire les

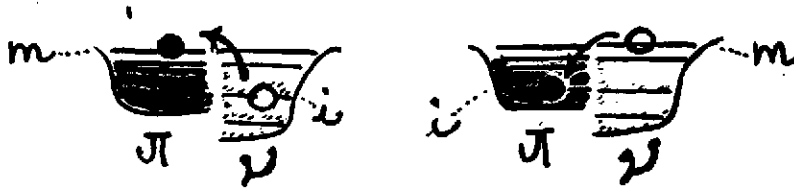


FIG. 23 - Représentation schématique d'une EXCITATION PROTON - TROU DE NEUTRON ($\Delta T_z = 1$).

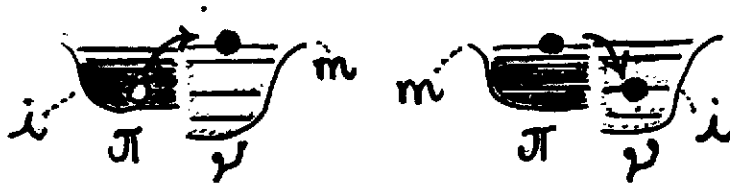


FIG. 24 - Représentation schématique d'une EXCITATION NEUTRON - TROU DE PROTON ($\Delta T_z = -1$).

états dans les deux voies $\Delta T_z = \pm 1$ (25), il faut deux opérateurs de création :

$$O_{\nu,+1}^\dagger = \sum_{mi} [\tilde{X}_{mi}^\nu p_m^\dagger n_i - \tilde{Y}_{mi}^\nu p_i^\dagger n_m] \quad \Delta T_z = +1 \quad (94)$$

$$O_{\nu,-1}^\dagger = \sum_{mi} [\tilde{X}_{mi}^\nu n_m^\dagger p_i - \tilde{Y}_{mi}^\nu n_i^\dagger p_m] \quad \Delta T_z = -1 \quad (95)$$

et d'annihilation (leurs hermitiques conjugués). En appliquant ces opérateurs au vide $|RPA\rangle$, p_m^\dagger ou n_m^\dagger crée un proton ou un neutron dans un état de particule; tandis que p_i^\dagger ou n_i^\dagger crée un proton ou un neutron dans un état de trou. Par conséquent, l'application de $p_m^\dagger n_i$ et $p_i^\dagger n_m$ (94) sur le vide génère des *excitations proton-trou de neutron* (fig.23) tandis que l'application de $n_m^\dagger p_i$ et $n_i^\dagger p_m$ (95) produit des *excitations neutron-trou de proton* (fig.24). Ces états sont caractérisés par leurs énergies et les amplitudes $(\tilde{X}^\nu, \tilde{Y}^\nu)$, $(\tilde{X}^\nu, \tilde{Y}^\nu)$. En remplaçant (94-95) dans (62) et en faisant l'hypothèse de quasi-boson, on déduit les équations de la RPA avec échange de charge analogues aux équations de la RPA sans échange de charge (79,80).

3.7 La distribution de force $S(E)$ en RPA

Déterminons la distribution de force (16) dans le cadre de la RPA. Considérons l'opérateur de transition à un corps (fig.25,(47)) :

$$F_0 = \sum_{l,l'} \langle l | F_0 | l' \rangle a_l^\dagger a_{l'} \quad (96)$$

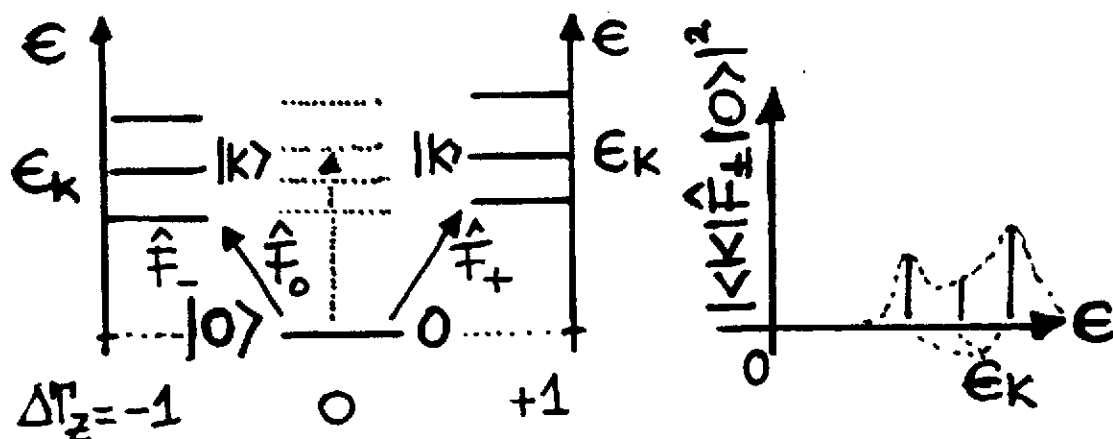


FIG. 25 - Représentation schématique des distributions de force $S(E)$ associées aux opérateurs F_0 (96), $F_{\pm 1}$ (98-99).

(a_i^\dagger, a_ν agissent sur le même type de particule) et évaluons les probabilités de transition du fondamental aux états excités RPA (63-64) :

$$\begin{aligned} \langle \nu | F_0 | RPA \rangle &= \langle RPA | [Q_\nu, F_0] | RPA \rangle \approx \langle HF | [Q_\nu, F_0] | HF \rangle = \\ &= \sum_{m,i} [\langle m | F_0 | i \rangle X_{m,i}^{*\nu} + \langle i | F_0 | m \rangle Y_{m,i}^{*\nu}] \end{aligned} \quad (97)$$

En RPA, $S(E)$ présente donc des pics aux énergies RPA (79) dont l'amplitude correspond à la probabilité d'excitation $|\langle f | F_0 | i \rangle|^2 = |\langle \nu | F_0 | RPA \rangle|^2$ (97). Nous voyons que, contrairement à (55), la probabilité de transition vers un état $|\nu\rangle$ dépend à la fois des fonctions d'onde de particule simple et des amplitudes (X^ν, Y^ν). De plus, plusieurs paires particule-trou y contribuent.

Considérons les opérateurs :

$$F_+ = \sum_{l,l'} \langle l | F_+ | l' \rangle p_l^\dagger n_{l'} \quad \Delta T_z = +1 \quad (98)$$

$$F_- = \sum_{l,l'} \langle l | F_- | l' \rangle n_l^\dagger p_{l'} \quad \Delta T_z = -1. \quad (99)$$

En RPA avec échange de charge, $S(E)$ associée à $F_{\pm 1}$ présente des pics dont les amplitudes sont analogues à (97), la seule différence étant que les fonctions d'onde ϕ_m et ϕ_i correspondent maintenant aux états de particule simple des protons et neutrons.

3.8 Les Résonances Géantes

Les excitations collectives à 1p-1t sont connues depuis très longtemps. Ce sont les Résonances Géantes, des modes de vibrations collectifs des noyaux atomiques. Une première indication expérimentale de l'existence des Résonances Géantes a été donnée dès 1937²⁷⁾, mais ce n'est qu'après 1947 qu'elles ont fait l'objet d'études systématiques^{27),28),29)}. Ces états sont essentiellement caractérisés par leur énergie, leur largeur et leur collectivité. Du point de vue microscopique, elles sont bien décrites dans le cadre de la RPA¹⁰⁾. La Résonance Géante Dipolaire, qui a été la

10. Cependant une description détaillée de la largeur nécessite d'aller au-delà de la RPA.

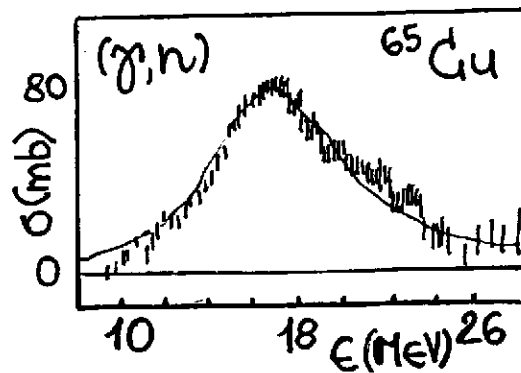


FIG. 26 - Exemple de mesure de section efficace de photoabsorption (γ, n) . Ces mesures ont permis de mettre en évidence et d'étudier de manière systématique la Résonance Géante Dipolaire dans les noyaux atomiques.

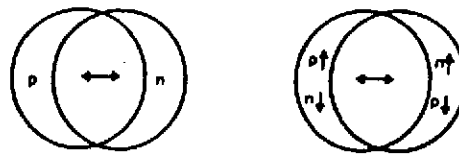


FIG. 27 - Ce schéma montre la Résonance Géante Dipolaire ($J^\pi = 1^-, \Delta T = 1, \Delta S = 0$) et la Résonance Géante de Gamow-Teller ($J^\pi = 1^+, \Delta T = 1, \Delta S = 1$).

première à être découverte³⁰⁾ dans une mesure de photoabsorption (γ, n) (fig.26), en fournit un exemple. Cet état a été interprété comme une vibration collective dans laquelle les protons et les neutrons oscillent en opposition de phase^{31),32)} (fig.27). La Résonance de Gamow-Teller correspond à une oscillation où les nucléons vibrent avec les spins haut et bas en opposition de phase (fig.27). Cette résonance a par exemple été étudiée à travers des réactions (p, n) ou (n, p) . Ces études permettent de connaître la distribution de force de Gamow-Teller en dehors de la "fenêtre" du Q_β et donnent donc des informations sur cette résonance complémentaires à celles provenant de l'étude de la désintégration β (fig.28).

3.9 Les états de quasi-particule

Afin de décrire les propriétés des noyaux à couches ouvertes (fig.11), il faut généraliser l'approximation de champ moyen (cf. 3.2) et inclure les corrélations d'appariement^{19),20),21),24)}. En utilisant par exemple l'approximation d'Hartree-Fock-Bogolioubov, il est possible de montrer que l'hamiltonien total (52) peut être écrit sous une forme analogue à (54) :

$$H = H_{HFB} + V_{RES} = \sum_{\nu} E_{\nu} \alpha_{\nu}^{\dagger} \alpha_{\nu} + V_{RES} \quad (100)$$

où E_{ν} sont les énergies de quasi-particules et α_{ν}^{\dagger} (α_{ν}) sont les opérateurs de création (annihilation) de quasi-particules satisfaisant à des relations d'anticommutation (43). Dans cette approximation, l'état fondamental est le vide associé à ces opérateurs. Ceux-ci sont reliés aux opérateurs de particule a^{\dagger}, a (51,54) par des transformations dites de Bogolioubov comme $\alpha_{\nu}^{\dagger} = u_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} - v_{\nu} a_{\nu}$.

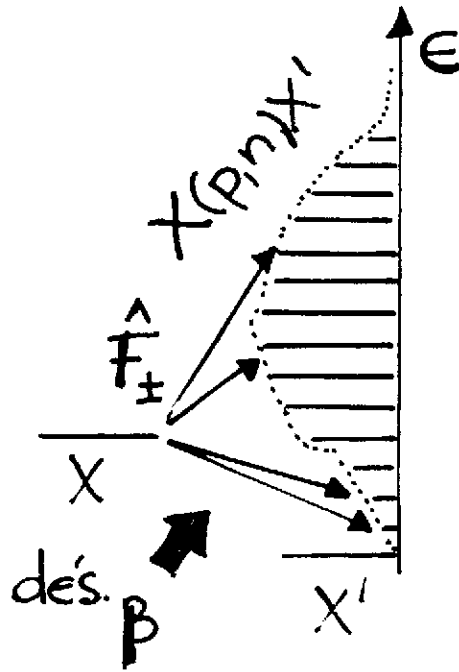


FIG. 28 - L'étude de réactions comme (p,n) ou (n,p) permet de connaître la distribution de force de Gamow-Teller en dehors de la "fenêtre" du Q_β et donne des informations complémentaires à celles provenant de la désintégration β .

Nous avons vu que dans l'approximation de champ moyen, en absence d'appariement, l'état fondamental est donné par la mer de Fermi (fig.14), la probabilité d'occupation des états de particule étant nulle tandis que la probabilité d'occupation des états de trou est égale à 1 (fig.29). L'inclusion des corrélations d'appariement rend la surface de Fermi diffuse : un état de quasi-particule est partiellement un état de particule, avec une probabilité u^2 , et partiellement un état de trou, avec une probabilité v^2 .

3.10 L'Approximation des Phases Aléatoires avec échange de charge pour des Quasi-Particules

3.10.1 Le fondamental $|QRPA\rangle$ et les opérateurs O_ν^\dagger, O_ν

Considérons l'opérateur de création O_λ^\dagger ¹¹ :

$$O_\lambda^\dagger = \sum_{p,n} [X_{pn}^\lambda \alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger - Y_{pn}^\lambda \alpha_p \alpha_n] \quad (101)$$

où $\alpha_p^\dagger, \alpha_n^\dagger$ (α_p, α_n) créent (détruisent) des quasi-particules protons et neutrons respectivement¹². L'opérateur O_λ^\dagger et son hermitique conjugué O_λ sont tels que

$$O_\lambda^\dagger |QRPA\rangle = |\lambda\rangle \quad O_\lambda |QRPA\rangle = 0 \quad (102)$$

c'est-à-dire que l'état $|QRPA\rangle$ est le vide des opérateurs O_λ . Il est possible de montrer^{19),20),21)} que, de façon analogue au vide $|RPA\rangle$, l'état $|QRPA\rangle$ contient déjà des excitations de quasi-particule, c'est-à-dire que $|QRPA\rangle = c_0 |HFB\rangle + \sum_{p,n,p',n'} c_1^{p,n,p',n'} \alpha_p^\dagger \alpha_n^\dagger \alpha_{p'} \alpha_{n'} |HFB\rangle + \dots$

Les états excités $|\lambda\rangle$ (102) sont des sommes corrélées d'excitations à deux quasi-particules dont les énergies E_λ et les amplitudes complexes (X^λ, Y^λ) sont déterminées par les équations

11. Toute la discussion est similaire dans l'Approximation des Phases Aléatoires pour des Quasi-Particules (QRPA) sans échange de charge.

12. Dans l'Approximation des Phases Aléatoires pour des Quasi-Particules, sans échange de charge, les opérateurs α^\dagger et α se réfèrent au même type de particule (protons ou neutrons).

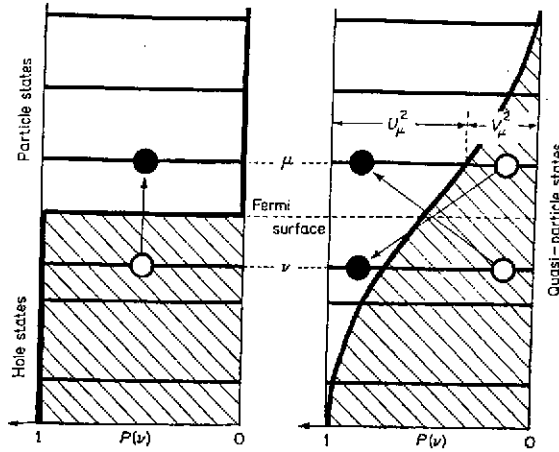


FIG. 29 – Représentation schématique des états de particule simple et de quasi-particule dans l'approximation de champ moyen. En l'absence d'appariement (gauche), les états de particule (au-dessus de la mer de Fermi) ont une probabilité d'occupation nulle tandis que les états de trou (en dessous de la mer de Fermi) ont une probabilité d'occupation égale à 1. L'inclusion des corrélations d'appariement rend la surface de Fermi diffuse (droite). Les états dits DE QUASI-PARTICULE sont partiellement des états de particule (avec une probabilité u^2) et partiellement des états de trou (avec une probabilité v^2).

de la QRPA. En utilisant la méthode des équations du mouvement (62), celles-ci peuvent être dérivées de la même façon que les équations de la RPA sans (cf. 3.5.2) et avec échange de charge (cf. 3.6). Dans ce cas l'hypothèse de quasi-boson (71) consiste à remplacer des valeurs moyennes sur le vide $|QRPA\rangle$ par des valeurs moyennes sur le vide $|HFB\rangle$. Les équations de la QRPA sous forme matricielle s'écrivent^{20,21)}

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^\lambda \\ Y^\lambda \end{pmatrix} = E_\lambda \begin{pmatrix} X^\lambda \\ -Y^\lambda \end{pmatrix} \quad (103)$$

où

$$A_{pn,p'n'} = E_{p,p'} \delta_{n,n'} + E_{n,n'} \delta_{p,p'} + g_{pt} \langle p, n | V_{RES}^{pt} | p', n' \rangle (u_p v_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) + g_{pp} \langle p, n | V_{RES}^{pp} | p', n' \rangle (u_p u_n u_{p'} u_{n'} + v_p v_n v_{p'} v_{n'}) \quad (104)$$

$$B_{pn,p'n'} = g_{pt} \langle p, n | V_{RES}^{pt} | p', n' \rangle (v_p u_n u_{p'} v_{n'} + v_p u_n v_{p'} u_{n'}) - g_{pp} \langle p, n | V_{RES}^{pp} | p', n' \rangle (u_p u_n v_{p'} v_{n'} + v_p v_n u_{p'} u_{n'}) \quad (105)$$

où $E_{p,p'}$, $E_{n,n'}$ sont les énergies des quasi-particules protons et neutrons et les quantités u_i , v_i donnent les amplitudes d'occupation, ou non-occupation, des états de quasi-particules de protons ($i = p$) et neutrons ($i = n$).

Il est important de remarquer que, contrairement à (79-80) les matrices A et B (104-105) n'incluent pas seulement l'interaction résiduelle dans la voie particule-trou, V_{RES}^{pt} , mais aussi dans la voie particule-particule, V_{RES}^{pp} . Les solutions E_λ , (X^λ, Y^λ) dépendent donc du choix des ces deux interactions résiduelles¹³.

Quand l'appariement devient négligeable (i.e. $u_{i,i=p,n} \rightarrow 0$, $v_{i,i=p,n} \rightarrow 1$), les équations de la QRPA (103-105) se réduisent aux équations de la RPA (79-80).

3.10.2 La distribution de force $S(E)$ en QRPA

Il s'agit tout d'abord de réécrire F_0 (96) et F_\pm (98) en fonction des opérateurs de quasi-particule à travers les transformations de Bogolioubov. Ensuite, il faut évaluer les amplitudes de transition

13. Nous reviendrons sur le choix de g^{pp} dans les exemples (cf. 4).

$\langle k|F|0\rangle : \langle \lambda|F_0|QRPA\rangle$ en QRPA ou $\langle \lambda|F_{\pm}|QRPA\rangle$ en QRPA avec échange de charge (fig.25). On a par exemple

$$\langle \lambda|F_{\pm}|QRPA\rangle \approx \sum_{p,n} \langle n|F_{\pm}|p\rangle \left[X_{p,n}^{\lambda} u_n v_p + Y_{p,n}^{\lambda} u_p v_n \right] \quad (106)$$

La distribution de force (16) associée à F_{\pm} en QRPA avec échange de charge présente donc des pics aux énergies E_{λ} (103) dont les amplitudes dépendent de trois "ingrédients": *i*) les fonctions d'onde de particule simple; *ii*) les amplitudes (X^{λ}, Y^{λ}); *iii*) les amplitudes d'occupation u, v . Plusieurs excitations à deux quasi-particules contribuent.

3.11 Les règles de somme

Introduisons les moments d'une distribution de force³³⁾ $S(E)$ (16):

$$m_p = \int_0^{\infty} S(E) E^p dE = \sum_{k>0} |\langle k|F|0\rangle|^2 E_k^p \quad (107)$$

où nous avons pris l'état initial égal à l'état fondamental, $|i\rangle = |0\rangle$. Le moment correspondant à $p = 0$, $m_0 = \sum_k |\langle k|F|0\rangle|^2$, n'est rien d'autre que l'intégrale de la distribution de force. De manière générale, on a besoin d'un nombre infini de moments (107) pour spécifier complètement la distribution de force associée à un opérateur F .

Pour un opérateur F_0 donné (fig.25,(96)), les règles de somme permettent d'évaluer certains moments³³⁾ (107). Par exemple, la règle de somme de Thomas-Reiche-Khun (TRK)³³⁾ concerne la distribution de force associée à un opérateur dipolaire. Elle nous dit que le moment m_1 est égal à NZ/A (à un facteur près). D'après l'étude systématique de la Résonance Géante Dipolaire (fig.27), nous savons que cet état sature complètement la règle de somme TRK.

Pour les processus avec échange de charge, où les opérateurs F_{\pm} (98-99) interviennent, les règles de somme relient les moments associés aux distributions de force dans les deux voies $\Delta T_z = \pm 1$ ³³⁾. C'est le cas de la règle de somme Ikeda³³⁾, concernant les distributions de force associées aux opérateurs de Gamow-Teller (fig.30,(27)). Seule une fraction de cette règle de somme est observée dans l'étude de la Résonance de Gamow-Teller. C'est *le problème de la force manquante dans les transitions de Gamow-Teller*, sur lequel nous reviendrons plus tard.

Si nous sommes intéressés par la distribution de force liée à un phénomène de résonance comme une Résonance Géante (cf. 3.8), peu de moments sont nécessaires^{33),34)} pour caractériser $S(E)$. En effet, la distribution peut être paramétrisée par une lorentzienne, il suffit donc de déterminer son centroïde, sa largeur et l'intégrale totale. Dans ce cas, les règles de somme offrent une démarche alternative aux calculs microscopiques de $S(E)$.

Dans les calculs de désintégration β , le $T_{1/2}$ dépend seulement de la queue de la distribution de force (15) (fig.28). Dans ce cas, les règles de somme ne permettent pas de caractériser cette distribution de force; néanmoins, elles donnent des contraintes qu'il est important de satisfaire. Nous allons illustrer ce concept en présentant la règle de somme Ikeda, importante pour le processus de désintégration β .

3.11.1 La règle de somme Ikeda

Considérons $F_{GT}^{\pm} = \sum_{\mu=-1}^1 \sum_{k=1}^N \sigma_{\mu}(k) t_{\pm}(k)$ et les moments associés non-pondérés en énergie:

$$\begin{aligned} m_0^{\beta-} &= \sum_f |\langle f|F_{GT}^+|0\rangle|^2 = \sum_f \left| \langle f| \sum_{\mu=-1}^1 \sum_{k=1}^N \sigma_{\mu}(k) t_{+}(k) |0\rangle \right|^2 = \\ &= \sum_f \langle 0| \sum_{\mu,k} \sigma_{\mu}(k) t_{-}(k) |f\rangle \langle f| \sum_{\mu',k'} \sigma_{\mu'}(k') t_{+}(k') |0\rangle = \end{aligned}$$

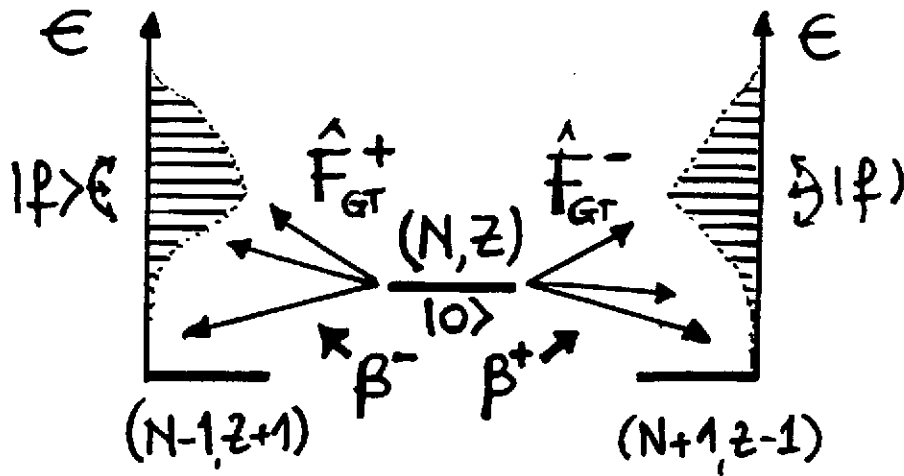


FIG. 30 – Pour les distributions de force associées aux opérateurs F_{\pm} (98-99), les règles de somme relient certains moments de $S(E)$ dans les deux voies. Par exemple, la règle de somme Ikeda nous dit que $m_0^{\beta^-} - m_0^{\beta^+} = 3(N - Z)$, où m_0^{β} sont les moments non-pondérés en énergie (107) des distributions de force correspondant aux opérateurs F_{GT}^{\pm} (27).

$$= \sum_f \langle 0 | \sum_{\mu, \mu', k, k'} \sigma_{\mu}(k) \sigma_{\mu'}(k') t_{-}(k) t_{+}(k') | 0 \rangle \quad (108)$$

et de même pour $m_0^{\beta^+}$. Il vient

$$\begin{aligned} m_0^{\beta^-} - m_0^{\beta^+} &= \langle 0 | \sum_{\mu, \mu', k, k'} \sigma_{\mu}(k) \sigma_{\mu'}(k') [t_{-}(k), t_{+}(k')] | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | \sum_{\mu, k} \sigma_{\mu}^2(k) [-2t_z(k)] | 0 \rangle = -6 \langle 0 | T_z | 0 \rangle \end{aligned} \quad (109)$$

d'où (25)

$$m_0^{\beta^-} - m_0^{\beta^+} = 3(N - Z) \quad (110)$$

Nous remarquons les propriétés suivantes :

- la règle de somme Ikeda (109) est indépendante du modèle utilisé;
- elle donne une contrainte sur l'intégrale de la distribution de force, mais ne contraint pas les probabilités de transitions individuelles $|\langle f | F | 0 \rangle|^2$;
- en général, elle concerne à la fois la voie $\Delta T_z = -1$ et la voie $\Delta T_z = 1$. Cependant, dans le cas des noyaux riches en neutrons, par exemple, elle donne des informations sur une des voies. En effet, dans ce cas $m_0^{\beta^+} \approx 0$ à cause du principe d'exclusion de Pauli et donc $m_0^{\beta^-} \approx 3(N - Z)$.
- dans les noyaux ayant $N = Z$ nous obtenons $m_0^{\beta^-} = m_0^{\beta^+}$, mais nous ne connaissons pas la valeur absolue de m_0 .

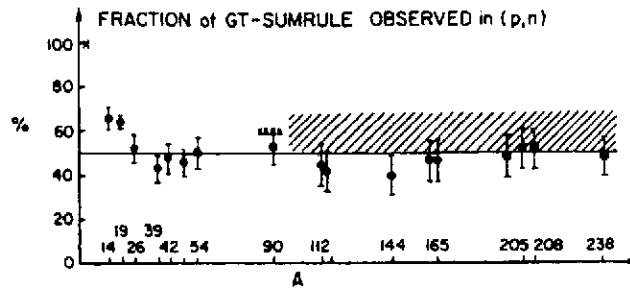


FIG. 31 - Seule une fraction (environ 60%) de la règle de somme Ikeda (110) est observée dans les réactions avec échange de charge²²⁾ (p,n) ou (n,p). La partie hachurée montre l'incertitude reliée à la manière dont le bruit de fond est soustrait.

De manière toute à fait analogue à (108-110), il est facile de prouver la règle de somme pour les transitions de Fermi :

$$m_0^{\beta-} - m_0^{\beta+} = (N - Z) \quad (111)$$

associée aux opérateurs $F_F^{\pm} = \sum_{k=1}^N t_{\pm}(k)$ (27). Cette règle de somme est elle aussi indépendante du modèle utilisé.

Les règles de somme donnent des contraintes sur les modèles : dans un calcul microscopique des distributions de force, il faut vérifier que l'espace de configurations est suffisamment grand pour que les règles de somme indépendantes du modèle soient satisfaites. Cependant, ceci ne nous garantit pas que la force est "correctement" distribuée, c'est-à-dire qu'elle reproduit les distributions de force mesurées. Par exemple, la règle de somme Ikeda est satisfaite en RPA et QRPA³⁵⁾, mais la distribution de force de Gamow-Teller obtenue dans cette approche est en désaccord avec l'expérience.

3.12 Le problème de la force de Gamow-Teller manquante

Depuis une trentaine d'années le problème de la force manquante fait l'objet d'un vif débat^{22),36),37),38)} : différents résultats expérimentaux indiquent une atténuation des transitions de Gamow-Teller. Par exemple, seule une fraction (environ 60%) de la règle de somme Ikeda (110) est observée dans les réactions avec échange de charge (p,n) ou (n,p) (fig.31). Une atténuation des transitions de Gamow-Teller est également observée dans la désintégration β ³⁹⁾ (fig.32).

Les deux explications le plus débattues cherchent l'origine de cette atténuation soit dans des aspects de modélisation nucléaire soit dans des degrés de liberté supplémentaires subnucléoniques. Selon la première explication, la force "manquante" est située au-delà du pic correspondant à la résonance de Gamow-Teller, poussée par l'interaction résiduelle entre les états à $1p-1t$ et les états à $2p-2t$ ^{22),36),37),40)}. Selon la deuxième explication, la force "manquante" est située à très haute énergie, poussée par le couplage entre les états à $1p-1t$ et les états $1\Delta - 1t$ ^{22),36),37)} (fig.33).

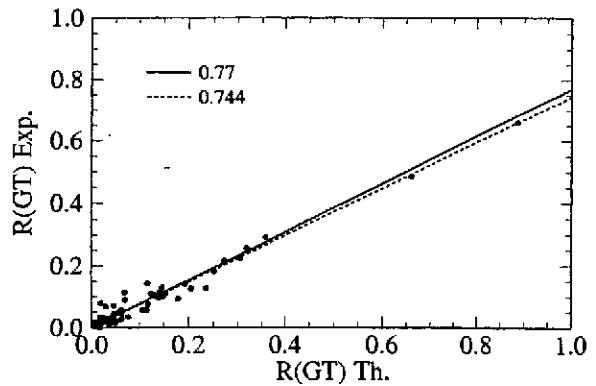


FIG. 32 - Comparaison entre la somme des probabilités de transitions de Gamow-Teller mesurées et calculées en modèle en couches³⁹⁾ dans la désintégration β de 64 noyaux ayant $A=41-50$. La valeur mesurée est en moyenne 0.77 fois plus petite que la valeur théorique.

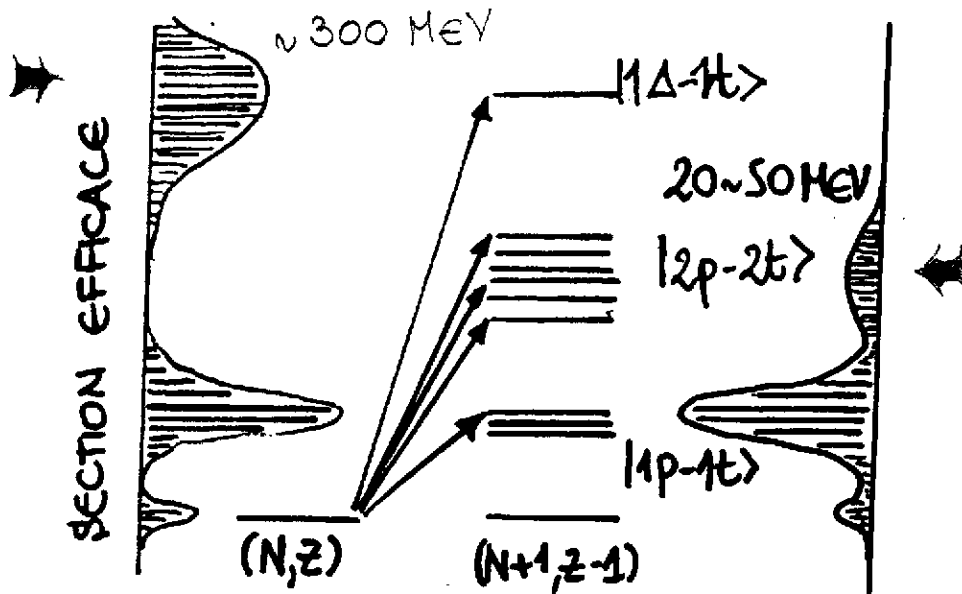


FIG. 33 - LE PROBLÈME DE LA FORCE 'MANQUANTE' POUR LES TRANSITIONS DE GAMOW-TELLER Représentation schématique des deux hypothèses les plus débattues concernant son origine. A) Du fait de l'interaction résiduelle entre les états à $1p-1t$ et $2p-2t$ la force "manquante" est située au-delà du pic de la résonance de Gamow-Teller. B) La force est située à très haute énergie à cause du couplage entre les états à $1p-1t$ et les états à $1\Delta-1t$.

Bien qu'à présent, le débat soit encore ouvert, des résultats expérimentaux récents⁴¹⁾ semblent indiquer que la force "manquante" est effectivement située autour de 50 MeV en accord avec des calculs incluant l'interaction résiduelle entre les états à $1p-1t$ et $2p-2t$ (fig.34). En effet, on observe $93 \pm 5\%$ de la règle de somme Ikeda dans la réaction $^{90}\text{Zr}(p, n)^{90}\text{Nb}$.

Pour prendre en compte ces faits expérimentaux dans les calculs des temps de vie pour les transitions de Gamow-Teller, une valeur effective pour la constante de couplage $g_A^{eff} = 0.7 - 0.8 g_A$ (28,37) est très souvent utilisée.

4 APPLICATIONS

Nous mentionons, d'une manière (très !) qualitative, les effets des corrélations dans le fondamental QRPA, de la déformation et de l'interaction résiduelle dans la voie particule-particule sur les demi-vies des noyaux.

Les corrélations dans le fondamental QRPA : Les premiers calculs microscopiques utilisent l'Approximation de Tamm-Dancoff⁴⁾ (cf. 3.5.2) et négligent les corrélations dans le fondamental RPA. Une deuxième série de calculs²⁾ a permis de montrer que ces corrélations ont des effets importants sur les demi-vies des noyaux (fig.35).

La déformation : La déformation modifie le champ moyen et donc les états de particule simple d'une manière significative²¹⁾ (fig.36). Par conséquent, la distribution de force (16) dépend de la déformation car les probabilités de transitions sont intimement liées au spectre de particule simple (fig.37). Les mesures des demi-vies (15) peuvent donc donner des indications sur la déformation des noyaux^{43),44)} (fig.38) (s'il n'y a pas, bien sûr, des incertitudes dans les calculs qui

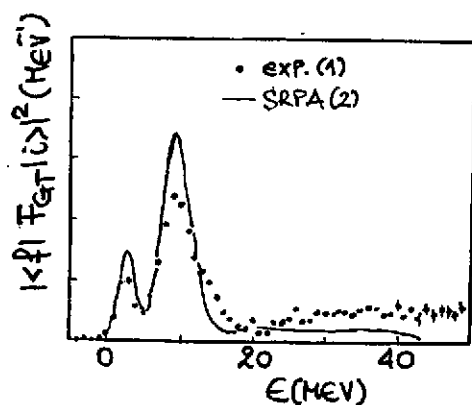


FIG. 34 – Distribution de force de Gamow-Teller mesurée dans la réaction $^{90}\text{Zr}(p,n)^{90}\text{Nb}$ en comparaison avec des calculs de Seconde RPA⁽⁴²⁾ (incluant l'interaction résiduelle entre les états à $1p-1t$ et $2p-2t$).

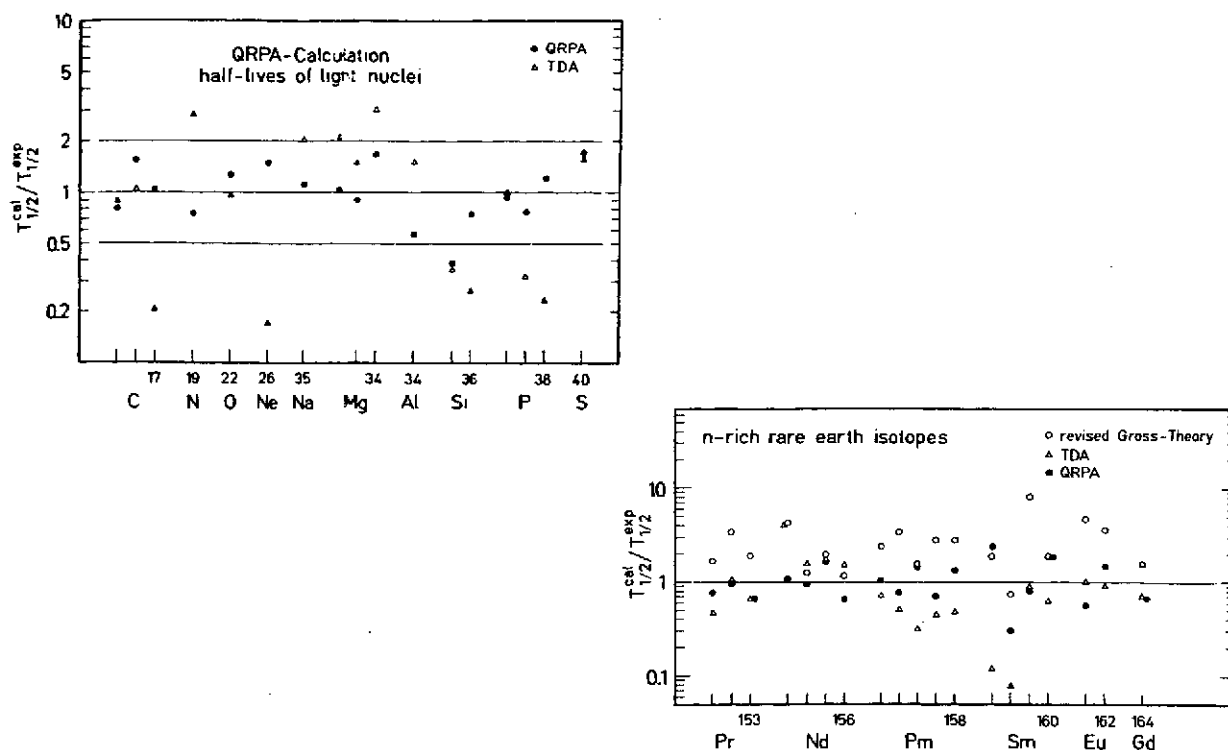


FIG. 35 – Comparaison entre les demi-vies calculées et mesurées pour des noyaux légers et lourds, les approches utilisées étant la QTDA (triangles) et la QRPA (cercles)⁽²⁾. L'inclusion des corrélations dans le fondamental peut modifier les demi-vies jusqu'à facteur dix dans le cas des noyaux légers tandis que les effets sont moins importants dans le cas des noyaux lourds.

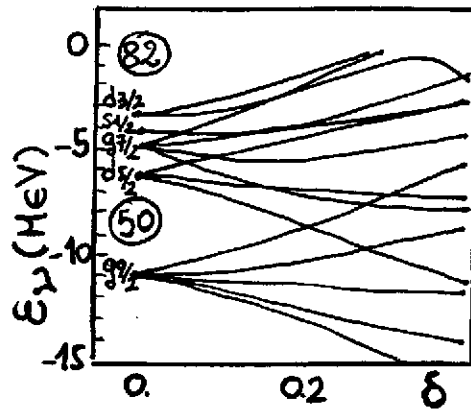


FIG. 36 - Modification des énergies de particule simple avec la déformation. La valeur $\delta = 0$ correspond à un noyau sphérique.

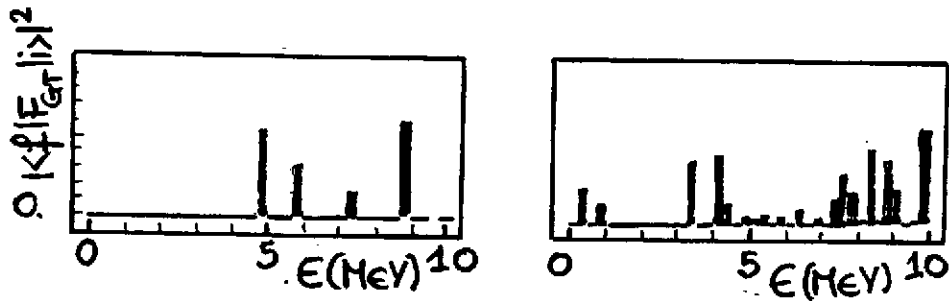


FIG. 37 - Exemples "typiques" de distributions de force pour un noyau sphérique et un noyau déformé. Beaucoup plus de transitions sont possibles dans ce dernier cas. La déformation affecte d'une manière importante les distributions de force.

donnent des effets du même ordre).

L'interaction résiduelle dans la voie particule-particule: Beaucoup de calculs dits de QRPA négligent l'interaction résiduelle dans la voie particule-particule^{2),6)} ((104-105), $g_{pp} = 0$). Un travail récent⁷⁾ a montré cependant que les effets de cette interaction résiduelle peuvent être très importants. En fait, ceci est déjà connu de par certains travaux⁴⁵⁾, où la QRPA est utilisée dans l'étude de la double β . Le choix du paramètre g_{pp} (104-105), qui règle l'intensité de la force dans cette voie, représente un point délicat de ces calculs. En effet, g_{pp} peut être fixé de manière à reproduire les demi-vies mesurées dans une certaine région de masse (figs. 39,40). Cette valeur peut ensuite être utilisée pour déterminer les demi-vies d'autres noyaux dans la même

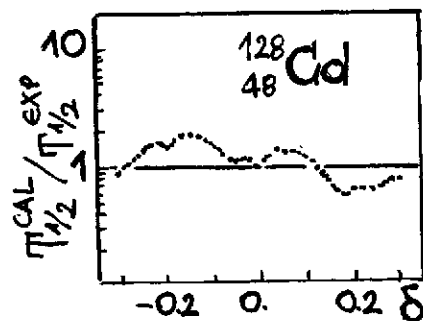


FIG. 38 - Comparaison entre la demi-vie calculée (en QRPA) et mesurée en fonction de la déformation dans le cas du $^{128}\text{Cd}^{2)}$. Exemple montrant la sensibilité de la demi-vie à la déformation.

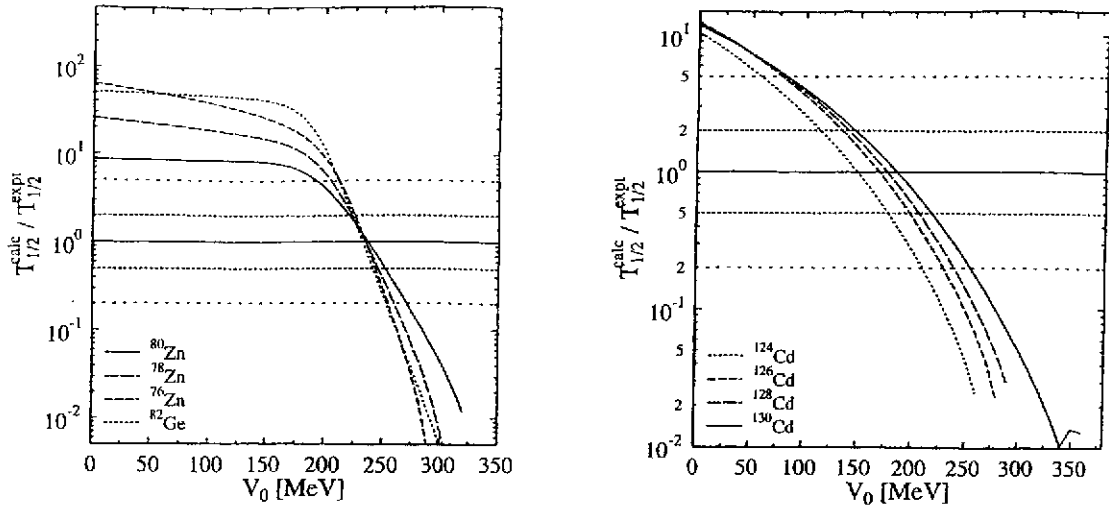


FIG. 39 – Rapport entre les demi-vies calculées et mesurées en fonction du paramètre $V_0 (= g_{pp})$ qui règle l'intensité de l'interaction résiduelle dans la voie particule-particule (eqs.103-105) pour des noyaux autour de $N = 50$ (gauche) et $N = 82$ (droite)⁷⁾. Les demi-vies sont très sensibles aux choix de ce paramètre, elles peuvent changer de quatre ordres de grandeur (!).

région mais difficiles à atteindre expérimentalement, par exemple riches en neutrons autour des fermetures de couches $N = 50$ et $N = 82$ (ces noyaux dits des “points d'attente” jouent un rôle important dans le processus r^1). Au vu de la grande sensibilité des demi-vies à cette interaction (fig.39), on peut se demander si cette démarche est la plus appropriée dans l'extrapolation des demi-vies de noyaux loin de la vallée de stabilité⁹⁾.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Goriely, Contribution à cette école.
2. A. Staudt et al. Z. Phys. A 334 (1989) 47; H. Homma et al., Phys. Rev. C 54 (1996) 2972.
3. T. Tachibana, M. Yamada, Y. Yoshida, Prog. Theor. Phys. 84 (1990) 641; H. Nakata, T. Tachibana, M. Yamada, Nucl. Phys. A 625 (1997) 521.
4. H.V. Klapdor et al. Z. Phys. A 299 (1981) 213; H.V. Klapdor, J. Metzinger et T. Oda, Atomic Data and Nuclear Data Tables 31 (1984) 81.
5. J.Krumlinde et P.Möller, Nucl. Phys. A 417 (1984) 419.
6. P. Moller et J. Randrup, Nucl. Phys. A 514 (1990) 1.
7. J. Engel et al., Phys. Rev. C 60 (1999) 014302.
8. E. Caurier et al., Nucl. Phys. A 653 (1999) 439.
9. I.N. Borzov et al., Z. Phys. A 355 (1996) 117; I.N. Borzov, S. Goriely, J.M. Pearson, Nucl. Phys. A 621 (1997) 307c; I.N. Borzov et S. Goriely, Phys. Rev. C 62 (2000) 035501.
10. G.. Audi, Contribution à cette école.
11. K.L.Kratz, B. Pfeiffer et K.F. Thielemann, Nuck. Phys. A 630 (1998) 352c; B. Pfeiffer, K.L.Kratz, F.K. Thielemann, Z.Phys. A 357 (1997) 235; K.L. Kratz, B. Pfeiffer et F.K.

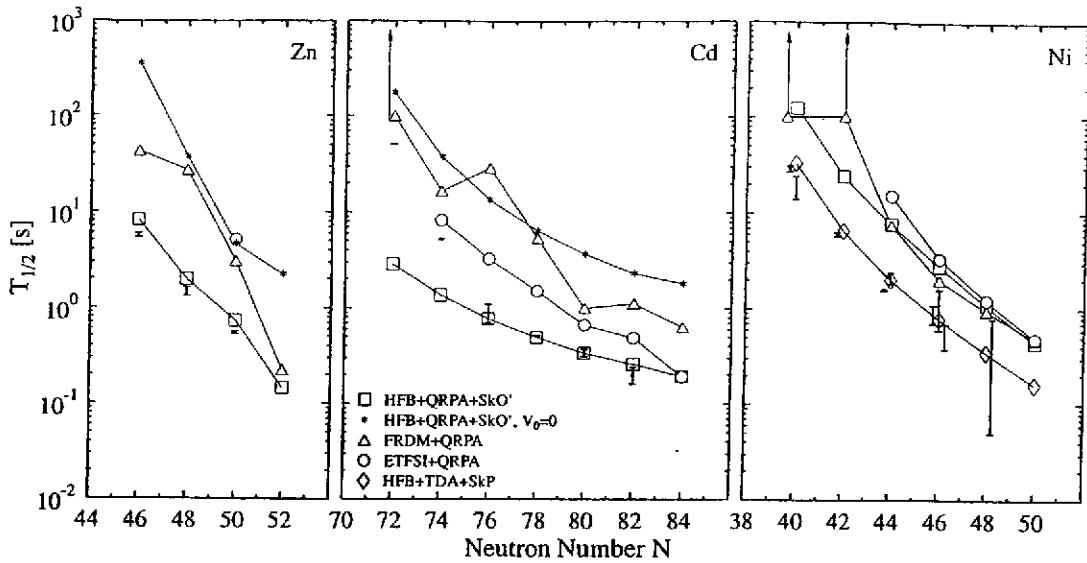


FIG. 40 - Comparaison⁷⁾ entre les temps de vie calculés pour des isotopes de Zn, Cd, Ni avec (HFB+QRPA+SkO') et sans (HFB+QRPA+SkO', $V_0 = 0$) interaction résiduelle dans la voie particule-particule et les résultats obtenus avec (FRDM+QRPA)⁶⁾, (ETFSI+QRPA)⁹⁾, (HFB+TDA+SkP).

Thielemann, Contribution à Hirschegg XXIV "Extremes of Nuclear Structure", Hirschegg, 15-20 janvier, 1996; B. Chen et al., Phys. Lett. B 355 (1995) 37.

12. J.M. Pearson, R.C. Nayak et S. Goriely, Phys. Lett. B 387 (1996) 455.
13. E. Fermi, Ric. Sci 2 (1933) part 12; E. Fermi, Zf. Physik 88 (1934) 161.
14. K. Grotz and V. Klapdor, *The weak interaction in nuclear, particle and astrophysics*, Ed. Adam Hilger (1990).
15. F. Halzen and A.D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, Ed. John Wiley and Sons (1984).
16. T.D. Lee and C.N. Yang, Phys. Rev. 104 (1956) 254; T.D. Lee and C.N. Yang, Phys. Rev. 105 (1957) 1671.
17. C.S. Wu et al., Phys. Rev. 105 (1957) 1413.
18. K.S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*, Ed. John Wiley and Sons (1998).
19. Kris L.G.Heyde, *The nuclear shell model*, Ed. Springer and Verlag (1990).
20. D.J. Rowe, *The nuclear collective motion*, Ed. Butler and Tanner (1970).
21. P. Ring and P. Schuck, *The nuclear many-body problem*, Ed. Springer and Verlag (1981).
22. J.P. Blaizot, *Modes d'excitation de spin-isospin des noyaux*, Contribution à "Structure nucléaire aux frontières de la stabilité", École Joliot-Curie de Physique Nucléaire, 12-16 septembre 1983.
23. I.S.Towner et al., Contribution à "Conference on Exotic Nuclei and Atomic Masses (ENAM 95)", Arles, juin 1995; J.C.Hardy et I.S.Towner, Contribution à "Conference on Exotic Nuclei and Atomic Masses (ENAM 98)", Michigan, juin 1998; I.S. Towner, *The nucleus as a Laboratory for studying Symmetries and Fundamental Interaction*, ed. by E.M. Henley and W.C. Haxton.

24. J. Meyer, Contribution à cette école.
25. N. Van Giai, Prog. Theor. Phys. Suppl. 74-75 (1983) 330.
26. N. Auerbach, A. Klein et N. Van Giai, Phys. Lett. B 106 (1981) 347; N. Auerbach, L. Zamick et A. Klein, Phys. Lett. B 118 (1982) 256.
27. W. Bothe et W. Gentner, Z. Physik 106 (1937) 236.
28. A. van der Woude et références incluses, Nucl. Phys. A 599 (1996)393c.
29. J. Speth, Int. Rev. Nucl. Phys. 7 (1991).
30. G.C. Baldwin et G.S. Klaiber, Phys. Rev. 71 (1947) 3.
31. H. Steinwedel et J.H.D. Jensen, Z.Na. 5a (1950) 413.
32. M. Goldhaber et E. Teller, Phys. Rev. 74 (1948) 1046.
33. E. Lipparini et S. Stringari, Phys. Rep. 175 (1989) 103.
34. O. Bohigas, A.M. Lane et J. Martorell, Phys. Rep. 51 (1979) 267.
35. B. Lauritzen, Nucl. Phys. A 489 (1988) 237.
36. F. Osterfeld, Rev. Mod. Phys. 64 (1992) 491.
37. A. Arima, Contribution à "New Facet on Spin Giant Resonances in Nuclei", 17-20 novembre 1997, Tokyo.
38. E. Caurier et al., Phys. Rev. C 50 (1994) 225; E. Caurier et al., Phys. Rev. C 52 (1995) R1736; E. Caurier, A.Poves et A.P. Zuker, Phys. Rev. Lett. 74 (1995) 1517.
39. G. Martinez-Pinedo et al., Phys. Rev. C 53 (1996) 2602.
40. G.F. Bertsch et I. Hamamoto, Phys. Rev. C 26 (1982) 1323.
41. T. Wasaka, Phys. Rev. C 55 (1997) 2909.
42. S. Drozd et al., Phys. Lett. B 166 (1986) 18.
43. O. Sorlin et al., Phys. Rev. C 47 (1993) 2941; O. Sorlin et al., Nucl. Phys. A 632 (1998) 205; O. Sorlin et al., Nucl. Phys. A 660 (1999) 3.
44. O. Sorlin, Contribution à cette école.
45. P. Vogel et M.R. Zirnbauer, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 3148; J. Engel, P. Vogel et M.R. Zirnbauer, Phys. Rev. C 37 (1988) 731.