



HAL
open science

Sections efficaces et taux de réaction astrophysique nucléaire

P. Descouvemont

► **To cite this version:**

P. Descouvemont. Sections efficaces et taux de réaction astrophysique nucléaire. École thématique. Ecole Joliot Curie "Astrophysique nucléaire: du microcosme au macrocosme astrophysique", Spa, (Belgique), du 10-16 septembre 2000 : 19ème session, 2000. cel-00653827

HAL Id: cel-00653827

<https://cel.hal.science/cel-00653827v1>

Submitted on 20 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SECTIONS EFFICACES ET TAUX DE REACTION EN ASTROPHYSIQUE NUCLEAIRE

P. Descouvemont

*Physique Nucléaire Théorique et Physique Mathématique, C.P. 229,
Université Libre de Bruxelles - B 1050 Bruxelles - Belgique*

Résumé

Nous discutons les principaux problèmes rencontrés en astrophysique nucléaire. Une présentation générale des différents types de réactions est illustrée par quelques exemples. Nous développons plus particulièrement les modèles de potentiel et de la matrice R , abondamment utilisés dans la littérature, et nous les appliquons à quelques réactions typiques. D'autres méthodes, directes ou indirectes, sont brièvement passées en revue. Finalement le calcul des taux de réaction est présenté ¹.

Abstract

We discuss the main problems encountered in nuclear astrophysics. A general presentation of the different types of reactions is illustrated by some examples. We develop more specifically the potential and R -matrix models, often used in the literature, and we apply them to some typical reactions. Other direct or indirect methods are briefly presented. Finally we discuss the calculation of reaction rates.

1 Introduction

On sait depuis plus d'une cinquantaine d'années que l'énergie produite dans les étoiles trouve son origine dans les réactions nucléaires [1]. Celles-ci jouent un double rôle dans l'évolution stellaire: d'une part, l'énergie libérée permet de compenser la contraction gravitationnelle de l'étoile, et d'autre part, les réactions nucléaires conduisent à la nucléosynthèse des éléments à partir de l'hydrogène primordial [2]. L'hypothèse de la chaîne $p-p$, produisant ${}^4\text{He}$ à partir de 4 protons a été émise dans les années 30, mais les bases de la théorie de la nucléosynthèse stellaire ont été établies à la fin des années 50 par Burbidge *et al.* [3], dans un article connu sous la nomenclature de B^2FH . En utilisant les données disponibles à l'époque, Burbidge *et al.* ont pu expliquer la nucléosynthèse de la plupart des éléments, et en particulier du ${}^{12}\text{C}$ par le processus triple α . Ces auteurs ont proposé différents mécanismes, tels que la combustion de H et He, les processus s , r et p , qui sont bien établis actuellement, et qui permettent de prédire l'abondance de la plupart des éléments présents dans l'univers. Une revue des progrès réalisés depuis B^2FH a été récemment publiée par Wallerstein *et al.* [4], qui montrent combien cet article a eu de l'impact dans les travaux qui ont suivi. Un aperçu de la situation actuelle en astrophysique nucléaire peut également être trouvé dans les références [5, 6]. Les références [7, 8] fournissent des compilations de données existantes.

Un obstacle majeur rencontré par B^2FH était lié à la mauvaise connaissance des taux de réactions thermonucléaires. Il est bien connu que les énergies rencontrées dans les plasmas stellaires sont très petites par rapport à la barrière coulombienne. En conséquence, les sections efficaces entre particules chargées sont extrêmement faibles, et souvent impossibles à mesurer en laboratoire [9]. Une autre limitation expérimentale provient de la courte durée de vie de certains éléments impliqués dans l'évolution

¹ Une version plus complète de ces notes est disponible à <http://pntpm.ulb.ac.be/spa> ou par email à pdesc@ulb.ac.be

stellaire. Un exemple typique est ^{13}N dont la durée de vie est de l'ordre de 10 minutes, et qui joue un rôle déterminant dans le processus appelé "cycle CNO chaud" rencontré notamment dans les novae. Un grand nombre d'expériences ont été réalisées pour déterminer avec précision les sections efficaces d'intérêt astrophysique [9]. En particulier, le développement de faisceaux d'ions radioactifs a permis une avancée importante dans l'étude des réactions impliquant un noyau de courte durée de vie [10].

Malgré ces développements expérimentaux, la détermination des sections efficaces aux énergies d'intérêt astrophysique nécessite presque toujours un complément théorique. Plusieurs modèles ont été appliqués aux réactions d'intérêt astrophysique, mais ils sont toujours plus ou moins dépendants de l'existence de données expérimentales. Certains modèles fournissent une extrapolation des données obtenues à plus hautes énergies, et utilisent les paramètres pour extrapoler la section efficace; la méthode de la matrice R [11] est un exemple typique. D'autres modèles, tels que le modèle de potentiel [12, 13], permettent de calculer les sections efficaces à partir des fonctions d'onde du système; dans ce cas, les données expérimentales sont utilisées pour tester la précision du modèle, ou pour contraindre certains de ses paramètres.

Dans ce texte, nous passons en revue différents modèles fréquemment utilisés en astrophysique nucléaire. Plus particulièrement, nous développons les modèles de potentiel et de la matrice R , qui sont simples à mettre en oeuvre. Nous présentons brièvement les méthodes indirectes. Le texte est divisé en deux parties: la première traite du calcul des sections efficaces, et la deuxième montre comment utiliser ces sections efficaces pour déterminer les taux de réaction qui sont utilisés dans les études d'évolution stellaire.

2 Sections efficaces

2.1 Energies d'intérêt astrophysique

Considérons une réaction entre deux noyaux de masses A_1 et A_2 , et de charges Z_1 et Z_2 . La grandeur utile dans les applications astrophysiques est le taux de réaction, défini par

$$N_A \langle \sigma v \rangle = N_A \int \sigma(E) v N(E, T) dE, \quad (2.1)$$

où N_A est le nombre d'Avogadro, $\sigma(E)$ la section efficace de la réaction, v la vitesse relative et $N(E, T)$ la distribution d'énergie E à la température T . Dans les calculs, l'étoile est supposée être un gaz parfait à l'équilibre thermodynamique ce qui permet d'utiliser la distribution de Maxwell-Boltzmann [2]; nous avons donc

$$N_A \langle \sigma v \rangle = N_A \left(\frac{8}{\pi \mu m_N (k_B T)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \int \sigma(E) E \exp(-E/k_B T) dE, \quad (2.2)$$

où μ est la masse réduite du système (sans dimension), m_N est la masse du nucléon (nous négligeons la différence de masse entre le proton et le neutron) et k_B la constante de Boltzmann. Pour évaluer (2.2), il faut connaître la dépendance en énergie de la section efficace $\sigma(E)$. Comme nous le verrons dans la suite, elle varie à basse énergie comme

$$\sigma(E) \sim \exp(-2\pi\eta)/E, \quad (2.3)$$

où η est le paramètre de Sommerfeld

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}. \quad (2.4)$$

En utilisant (2.3) dans (2.2), et en approchant l'intégrand par une gaussienne, on peut montrer [2, 14] que celui-ci présente à maximum à l'énergie du pic de Gamow définie par

$$\begin{aligned} E_0 &= \left[\pi \frac{e^2}{\hbar c} Z_1 Z_2 k_B T (\mu m_N c^2 / 2)^{1/2} \right]^{2/3} \\ &\approx 0.122 \mu^{1/3} (Z_1 Z_2 T_9)^{2/3} \text{ MeV}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

avec une largeur à mi-hauteur

$$\begin{aligned}\Delta E_0 &= 4(E_0 k_B T/3)^{\frac{1}{2}} \\ &\approx 0.237 (Z_1^2 Z_2^2 \mu)^{1/6} T_9^{5/6} \text{ MeV},\end{aligned}\quad (2.6)$$

où T_9 est la température exprimée en $10^9 K$. Le pic de Gamow définit l'intervalle d'énergie dans lequel la section efficace doit être connue pour calculer le taux de réaction. Pour les réactions entre particules chargées, les énergies d'intérêt astrophysique sont toujours beaucoup plus petites que l'énergie de la barrière coulombienne où, en première approximation, la section efficace atteint son maximum. A titre d'exemple, l'énergie du pic de Gamow pour la réaction ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ à la température solaire est de l'ordre de 20 keV, alors que l'énergie de la barrière Coulombienne est de l'ordre de 1 MeV. Il en résulte la caractéristique principale des sections efficaces d'intérêt astrophysique: leurs valeurs sont extrêmement faibles et en général trop petites pour être mesurées en laboratoire. Excepté pour la réaction ${}^3\text{He}({}^3\text{He},2p)\alpha$ qui a été récemment étudiée expérimentalement aux énergies astrophysiques [15], toutes les sections efficaces expérimentales nécessitent une extrapolation pour atteindre les énergies du pic de Gamow.

2.2 Fonctions de collision

Les sections efficaces rencontrées en astrophysique sont essentiellement de deux types: les sections efficaces de capture, dans lesquelles les deux noyaux fusionnent en émettant un photon, et les sections efficaces de transfert, où un échange de nucléons est effectué entre les noyaux en collision. Pour être complet, citons également les réactions de capture faible $p(p,e^+\nu)d$ et ${}^3\text{He}(p,e^+\nu){}^4\text{He}$. L'étude de ces réactions fait appel à la théorie des collisions [16], qui sera brièvement développée ici.

Considérons un système de deux noyaux de spins et parités (I_1, π_1) et (I_2, π_2) , de masses et charges (A_1, Z_1) et (A_2, Z_2) . Dans un cadre non-relativiste, le hamiltonien de ce système s'écrit

$$H = \sum_i^A T_i + \sum_{i<j}^A V_{ij}, \quad (2.7)$$

où A est le nombre total de nucléons ($A = A_1 + A_2$), T_i l'énergie cinétique du nucléon i , et V_{ij} l'interaction nucléon-nucléon. La fonction d'onde $\Psi^{\nu_1\nu_2}(\mathbf{k})$ correspondant à une collision où les noyaux sont dans les états de spin $I_1\nu_1$ et $I_2\nu_2$ dans la voie d'entrée a comme comportement asymptotique

$$\Psi^{\nu_1\nu_2}(\mathbf{k}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{v}} \sum_{\nu'_1\nu'_2} \phi^{I_1\pi_1\nu'_1} \phi^{I_2\pi_2\nu'_2} \left(\exp(i\mathbf{k}\cdot\rho) \delta_{\nu_1\nu'_1} \delta_{\nu_2\nu'_2} + f_{\nu_1\nu_2,\nu'_1\nu'_2}(\theta) \exp(ik\rho)/\rho \right), \quad (2.8)$$

où $\mathbf{k} = (k, \Omega_k)$ est le vecteur d'onde, θ l'angle de diffusion, $f(\theta)$ l'amplitude de diffusion et $\phi^{I_i\pi_i\nu_i}$ les fonctions propres des hamiltoniens internes des noyaux 1 et 2, apparaissant dans le comportement asymptotique du hamiltonien (2.7). Si ρ est la coordonnée relative entre les noyaux 1 et 2, ce hamiltonien tend vers

$$H \underset{\rho \rightarrow \infty}{\sim} H_1 + H_2 + T_{cm} + T_\rho + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\rho}, \quad (2.9)$$

où T_{cm} est l'énergie de centre de masse, T_ρ l'énergie cinétique relative, et H_1, H_2 les hamiltoniens internes. Différents commentaires doivent être faits sur le comportement asymptotique (2.8). (i) Un traitement rigoureux de l'interaction coulombienne nécessiterait une généralisation de l'onde plane incidente $\exp(i\mathbf{k}\cdot\rho)$ et de l'onde sphérique sortante $\exp(ik\rho)/\rho$; l'approximation faite ici permet de simplifier la présentation sans nuire à la généralité. (ii) Nous avons négligé les voies inélastiques en supposant que seule l'orientation du spin des noyaux peut être affectée pendant la collision; à nouveau, la généralisation est simple, mais alourdit les expressions. (iii) La fonction d'onde est normalisée au flux unité [2] ce qui explique le facteur $1/\sqrt{v}$. Cette normalisation est la plus courante en théorie des collisions.

Dans les applications, la fonction d'onde est développée en ondes partielles

$$\Psi^{\nu_1\nu_2}(\mathbf{k}) = \sum_{JM\pi\ell I} \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} \langle I_1 I_2 \nu_1 \nu_2 | I \nu \rangle \langle \ell I m \nu | J M \rangle \Psi_{\ell I}^{JM\pi} Y_{\ell}^{m*}(\Omega_{\mathbf{k}}), \quad (2.10)$$

où nous avons fait apparaître différents nombres quantiques: le spin de voie I , le moment orbital relatif ℓ , le spin total J et la parité π du système ($\pi = \pi_1\pi_2(-)^{\ell}$). En effectuant un développement similaire du comportement asymptotique (2.8), on montre que

$$\Psi_{\ell I}^{JM\pi} \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} \sum_{\ell' I'} g_{\ell I, \ell' I'}^{J\pi, as}(\rho) \varphi_{\ell' I'}^{JM\pi}(\Omega_{\rho}, \xi_1, \xi_2), \quad (2.11)$$

où la fonction de voie est définie par

$$\varphi_{\ell I}^{JM\pi}(\Omega_{\rho}, \xi_1, \xi_2) = \left[Y_{\ell}(\Omega_{\rho}) \otimes [\phi^{I_1\pi_1}(\xi_1) \otimes \phi^{I_2\pi_2}(\xi_2)] \right]^{JM}, \quad (2.12)$$

ξ_1 et ξ_2 étant les ensembles de coordonnées internes des noyaux 1 et 2. La fonction asymptotique $g_{\ell I, \ell' I'}^{J\pi, as}(\rho)$ est solution de l'équation de Schrödinger coulombienne [17]

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu m_N} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right) + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\rho} - E \right] g_{\ell I, \ell' I'}^{J\pi, as}(\rho) = 0, \quad (2.13)$$

et s'écrit sous la forme:

$$g_{\ell I, \ell' I'}^{J\pi, as}(\rho) = i^{\ell+1} \left[I_{\ell}(k\rho) \delta_{\ell\ell'} \delta_{II'} - U_{\ell I, \ell' I'}^{J\pi} O_{\ell'}(k\rho) \right] / \rho, \quad (2.14)$$

où I_{ℓ} et O_{ℓ} sont les fonctions coulombiennes entrantes et sortantes qui seront présentées en détails au paragraphe suivant. Dans (2.14), $U^{J\pi}$ est la matrice de collision qui contient l'information sur la collision. La matrice de collision, unitaire et symétrique, dépend de l'interaction nucléaire. Remarquons que la normalisation au flux unité adoptée en (2.8) impose un facteur supplémentaire $\sqrt{\pi(2\ell+1)/v}/k$ au comportement asymptotique (2.14). Le choix adopté ici permet une écriture plus simple des sections efficaces de capture (voir §2.4).

Pour des voies fermées ($E < 0$), la solution de (2.13) est la fonction de Whittaker [17], qui tend vers zéro à grandes distances; nous avons donc

$$g_{\ell I, \ell' I'}^{J\pi, as}(\rho) = C_{\ell I, \ell' I'}^{J\pi} W_{-\eta, \ell + \frac{1}{2}}(2k\rho) / \rho, \quad (2.15)$$

où C est une constante de normalisation, appelée aussi "constante de normalisation asymptotique".

2.3 Les fonctions coulombiennes

L'équation (2.13) peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d^2 g_{\ell}}{dx^2} + \left(1 - \frac{2\eta}{x} - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right) g_{\ell} = 0, \quad (2.16)$$

où η est le paramètre de Sommerfeld donné par (2.4), et $x = k\rho$ où k est le nombre d'onde

$$k = \sqrt{2\mu m_N E / \hbar^2}. \quad (2.17)$$

Les solutions de (2.16) sont les fonctions coulombiennes régulière $F_{\ell}(x, \eta)$ et irrégulière $G_{\ell}(x, \eta)$ dont les comportements asymptotiques [17] sont

$$\begin{aligned} F_{\ell}(x, \eta) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \\ G_{\ell}(x, \eta) &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \infty \\ F_{\ell}(x, \eta) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sin(x - \ell\pi/2 - \eta \log 2x + \sigma_0) \\ G_{\ell}(x, \eta) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \cos(x - \ell\pi/2 - \eta \log 2x + \sigma_0), \end{aligned} \quad (2.18)$$

où le déphasage coulombien σ_ℓ est donné par

$$\sigma_\ell = \arg[\Gamma(\ell + 1 + i\eta)] = \sigma_0 + \sum_{s=1}^{\ell} \arctan \frac{\eta}{s}. \quad (2.19)$$

A partir des fonctions coulombiennes F_ℓ et G_ℓ , on définit les fonctions entrantes I_ℓ et sortantes O_ℓ par

$$I_\ell(x) = O_\ell^*(x) = e^{i(\sigma_\ell - \sigma_0)} (G_\ell(x, \eta) - iF_\ell(x, \eta)), \quad (2.20)$$

où, pour simplifier les notations, nous n'avons plus écrit la dépendance en η . A basse énergie, on montre [18, 19] que

$$\begin{aligned} F_\ell(x, \eta) &\rightarrow \sqrt{\pi x} \exp(-\pi\eta) I_{2\ell+1}(x) \\ G_\ell(x, \eta) &\rightarrow \sqrt{4x/\pi} \exp(\pi\eta) K_{2\ell+1}(x), \end{aligned} \quad (2.21)$$

où $I_{2\ell+1}$ et $K_{2\ell+1}$ sont les fonctions de Bessel modifiées. Les dépendances en x et η peuvent donc se factoriser. L'expression (2.21) montre que la fonction F_ℓ décroît très vite avec l'énergie, alors que G_ℓ augmente exponentiellement.

Dans de nombreuses applications [11], apparaît la constante

$$\begin{aligned} L_\ell &= ka \frac{O'_\ell(ka)}{O_\ell(ka)} = S_\ell(ka) + iP_\ell(ka) \text{ pour } E \geq 0, \\ &= 2ka \frac{W'_{-\eta, \ell+1/2}(2ka)}{W_{-\eta, \ell+1/2}(2ka)} = S_\ell(ka) \text{ pour } E \leq 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

où a est une distance caractéristique. En utilisant (2.20) pour des énergies positives, on obtient le facteur de pénétration P_ℓ et le facteur de déplacement S_ℓ

$$\begin{aligned} P_\ell(x) &= x/[F_\ell^2(x) + G_\ell^2(x)] \\ S_\ell(x) &= [F_\ell(x)F'_\ell(x) + G_\ell(x)G'_\ell(x)] P_\ell(x). \end{aligned} \quad (2.23)$$

A basses énergies, le facteur de pénétration varie comme

$$P_\ell \sim \exp(-2\pi\eta), \quad (2.24)$$

où l'on a utilisé (2.21). Le facteur de pénétration intervient toujours directement ou indirectement dans le calcul des sections efficaces. Sa dépendance en énergie est essentiellement déterminée par (2.24), ce qui justifie l'approximation (2.3). Ce facteur de pénétration est donc responsable de la décroissance très rapide des sections efficaces lorsque l'énergie diminue. Remarquons que ce raisonnement ne s'applique qu'à des réactions entre particules chargées. Si l'un des noyaux en collision est un neutron, nous avons $\eta = 0$ et l'on montre que le facteur de pénétration varie comme $k^{2\ell+1}$.

Si l'énergie est négative, le facteur de pénétration s'annule et seul le facteur de déplacement S_ℓ subsiste. A la figure 2.1, nous présentons les facteurs P_ℓ et S_ℓ pour les systèmes $\alpha + {}^3\text{He}$ et $\alpha + n$. Comme attendu, le facteur de pénétration pour les systèmes chargés varie très rapidement avec l'énergie. En raison de la barrière centrifuge, il diminue également lorsque ℓ augmente. Le facteur de déplacement varie plus lentement avec l'énergie. Dans la suite, nous utiliserons l'approximation de Thomas, qui consiste à supposer que S_ℓ varie linéairement avec E dans un petit domaine d'énergie. Pour les systèmes neutres, le facteur de déplacement pour $\ell = 0$ présente une dérivée discontinue à énergie nulle. Ce résultat est à la base de propriétés particulières pour les réactions présentant une résonance $\ell = 0$ au voisinage du seuil neutron, mais nous ne développerons pas ce thème ici.

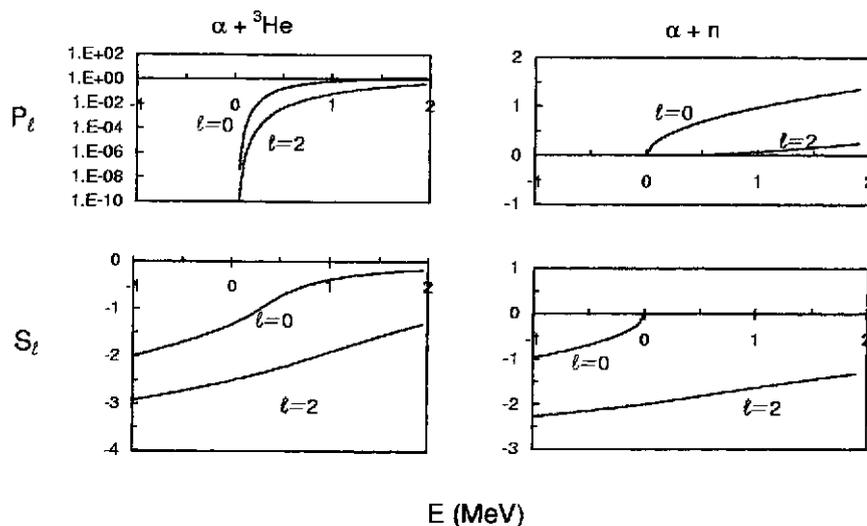


Figure 2.1: Facteurs P_l et S_l pour les systèmes $\alpha + {}^3\text{He}$ et $\alpha + n$.

2.4 Sections efficaces de capture

Parmi les réactions d'intérêt astrophysique se trouvent beaucoup de réactions de capture radiative, principalement (p, γ) , (α, γ) ou (n, γ) . Les sections efficaces théoriques s'obtiennent par un calcul de perturbation, en supposant que le hamiltonien d'émission d'un photon H_e est petit devant le hamiltonien nucléaire. Dans ce qui suit, nous présentons les formules de base qui permettent d'aboutir à la section efficace. Un développement plus complet de la théorie des transitions électromagnétiques peut être trouvé dans la référence [20].

Dans un processus de capture radiative, deux noyaux fusionnent pour former un état lié (de spin J_f et de parité π_f) du système à $A_1 + A_2$ nucléons. Si $\Psi^{J_f M_f \pi_f}$ est la fonction d'onde de l'état final, la section efficace de capture vers cet état s'écrit [16]

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega_\gamma}(E, J_f \pi_f) = \frac{k_\gamma}{2\pi\hbar} \frac{1}{(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)} \sum_{q\nu_1\nu_2 M_f} |\langle \Psi^{J_f M_f \pi_f} | H_e(q, \Omega_\gamma) | \Psi^{\nu_1 \nu_2}(E) \rangle|^2, \quad (2.25)$$

où le photon émis est caractérisé par un nombre d'onde k_γ , un angle d'émission Ω_γ et une polarisation q . La conservation de l'énergie impose la relation

$$E_\gamma = \hbar k_\gamma c = E - E_f, \quad (2.26)$$

où E_f est l'énergie de l'état final.

Pour expliciter (2.25), il est nécessaire de développer le hamiltonien électromagnétique H_e en multipôles électriques (E) et magnétiques (M); on a

$$H_e(q, \Omega_\gamma) = \sum_{\sigma\lambda\mu} (-)^{\lambda+1} q^\sigma \alpha_\lambda^\sigma \mathcal{M}_{\lambda\mu}^\sigma \mathcal{D}_{\mu-q}^\lambda(\Omega_\gamma), \quad (2.27)$$

où l'indice σ prend les valeurs 0 ou E (1 ou M) pour les multipôles électriques et magnétiques [20], et $\mathcal{D}_{\mu-q}^\lambda(\Omega_\gamma)$ est la fonction de Wigner. Les constantes α_λ^σ sont données par

$$\alpha_\lambda^E = i\alpha_\lambda^M = \frac{(ik_\gamma)^\lambda}{(2\lambda + 1)!!} \left[\frac{2\pi(\lambda + 1)(2\lambda + 1)}{\lambda} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.28)$$

En utilisant l'approximation des grandes longueurs d'onde ($k_\gamma r \ll 1$, où r est une dimension typique du système) qui est toujours valable dans les réactions de capture à basse énergie, les opérateurs

multipolaires électriques et magnétiques sont définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\lambda\mu}^E &= e \sum_i^A g_{\ell}(i) r_i^{\lambda} Y_{\lambda}^{\mu}(\hat{r}_i) \\ \mathcal{M}_{\lambda\mu}^M &= \mu_N \sum_i^A \left[\frac{2g_{\ell}(i)}{\lambda+1} \ell_i + g_s(i) s_i \right] \cdot \nabla r_i^{\lambda} Y_{\lambda}^{\mu}(\hat{r}_i), \end{aligned} \quad (2.29)$$

où r_i , ℓ_i et s_i sont respectivement les coordonnées d'espace, le moment cinétique orbital et le spin intrinsèque du nucléon i , et μ_N est le magnéton de Bohr

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_N c}. \quad (2.30)$$

Dans (2.29), on a utilisé le formalisme de l'isospin pour définir les opérateurs $g_{\ell}(i)$ et $g_s(i)$ par

$$\begin{aligned} g_{\ell}(i) &= \frac{1}{2} - t_{i3} \\ g_s(i) &= g_p \left(\frac{1}{2} - t_{i3} \right) + g_n \left(\frac{1}{2} + t_{i3} \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

où t_i est l'isospin du nucléon i , et g_p, g_n sont les facteurs gyromagnétiques du proton ($g_p = 5.586$) et du neutron ($g_n = -3.826$). Remarquons également que la définition (2.29) des multipôles électriques utilise l'approximation de Siegert, qui est basée sur l'hypothèse que les forces nucléaires ne dépendent pas des vitesses et que les fonctions d'onde sont solutions exactes du Hamiltonien. Bien que ces conditions ne soient pas toujours remplies, le théorème de Siegert est utilisé dans la plupart des applications. Des détails peuvent être trouvés dans la référence [20]. Les éléments de matrice des opérateurs multipolaires vérifient les règles de sélection

$$\begin{aligned} |J_i - J_f| &\leq \lambda \leq J_i + J_f \\ \pi_i \pi_f &= (-)^{\sigma+\lambda}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

où $(J_i \pi_i)$ et $(J_f \pi_f)$ sont les nombres quantiques des états initial et final respectivement.

Une autre règle de sélection importante concerne les transitions E1. A l'approximation des grandes longueurs d'onde, l'opérateur E1 peut s'écrire

$$\mathcal{M}_1^E \sim R_{cm} - \sum_i t_{i3} r_i, \quad (2.33)$$

où R_{cm} est le centre de masse du système. Le premier terme étant impair dans les coordonnées d'espace, ses éléments de matrice s'annulent. L'application du théorème de Wigner-Eckart au second terme conduit à la règle de sélection sur l'isospin

$$\Delta T = \pm 1 \quad (2.34)$$

si le noyau est caractérisé par $N = Z$ (c'est-à-dire $T = 0$). Dans ces noyaux, les transitions E1 sont donc interdites si l'on néglige les impuretés d'isospin. Un exemple bien connu est la réaction $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ où la multipolarité E1, interdite si l'on néglige les termes d'isospin non nul dans les fonctions d'onde, est du même ordre de grandeur que la multipolarité E2.

En utilisant les développements (2.27) du hamiltonien électromagnétique et (2.10) de la fonction de collision, on obtient la section efficace de capture intégrée sur les directions du photon

$$\sigma_c(E, J_f \pi_f) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{2J_f + 1}{(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)} \frac{k_{\gamma}}{\hbar v} \sum_{\sigma \lambda J_i I \ell_i} \frac{|\alpha_{\lambda}^{\sigma}|^2}{2\lambda + 1} \left| \langle \Psi^{J_f \pi_f} || \mathcal{M}_{\lambda}^{\sigma} || \Psi_{\ell_i I}^{J_i \pi_i}(E) \rangle \right|^2. \quad (2.35)$$

Dans les applications pratiques, la somme apparaissant dans (2.35) ne fait intervenir qu'un petit nombre de termes. D'une part, J_f et π_f étant donnés, les règles de sélection (2.32) limitent les valeurs

possibles de $\lambda J_i \pi_i$. D'autre part, il est bien connu que les éléments de matrice des opérateurs multipolaires décroissent rapidement avec l'ordre de multipôle. Finalement, les réactions d'intérêt astrophysique se produisant à basse énergie, le moment cinétique orbital est souvent limité à la valeur la plus basse autorisée par les règles de sélection. La multiple somme de (2.35) se réduit donc souvent à un seul terme.

2.5 Sections efficaces de transfert

Dans une réaction de transfert, un ou plusieurs nucléons sont échangés entre la cible et le projectile. Un exemple typique en astrophysique est la réaction $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ où 2 protons et un neutron passent de la particule α au ^{13}C , pour former ^{16}O . La réaction de transfert étant un processus d'origine nucléaire, les sections efficaces dominent les sections efficaces de capture, qui résultent de l'interaction électromagnétique. Dans notre exemple, la section efficace $^{13}\text{C}(\alpha, n)^{16}\text{O}$ est nettement plus grande (plusieurs ordres de grandeur) que la section efficace $^{13}\text{C}(\alpha, \gamma)^{17}\text{O}$.

Pour établir la section efficace de transfert, la fonction d'onde (2.8) doit être étendue au cas où la voie initiale (i) est différente de la voie finale (f). L'amplitude de diffusion s'écrira donc sous la forme $f_{i\nu_1\nu_2, f\nu'_1\nu'_2}(\theta)$ où les indices $\nu_1\nu_2$ et $\nu'_1\nu'_2$ se rapportent aux projections du spin des deux noyaux dans les voies initiale (i) et finale (f) respectivement. Nous ne traitons ici que des voies à deux corps. Si Ω est la direction des noyaux dans la voie finale, la section efficace de transfert s'écrit

$$\frac{d\sigma_t}{d\Omega}(E, i \rightarrow f) = \frac{1}{(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)} \sum_{\nu_1\nu_2, \nu'_1\nu'_2} |f_{i\nu_1\nu_2, f\nu'_1\nu'_2}(\theta)|^2, \quad (2.36)$$

où l'on a sommé sur les orientations finales et moyenné sur les orientations initiales. Un calcul simple, mais quelque peu laborieux, conduit à la section efficace intégrée

$$\sigma_t(E, i \rightarrow f) = \frac{\pi}{k^2} \sum_{J\pi} \frac{2J + 1}{(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)} \sum_{\ell\ell'} |U_{\ell\ell'}^{J\pi}(E)|^2. \quad (2.37)$$

La discussion faite au §2.4 et relative au nombre de termes dans cette expression reste valable. Aux énergies d'intérêt astrophysique, seules quelques ondes partielles jouent un rôle important.

2.6 Autres types de processus

2.6.1 Capture par interaction faible

La réaction initiale dans la nucléosynthèse stellaire est la réaction de capture faible $p(p, e^+\nu)d$ qui produit des neutrinos dont l'énergie maximum est de 0.42 MeV. Comme le hamiltonien d'interaction faible est beaucoup plus petit que les hamiltoniens nucléaire et électromagnétique, la section efficace est minuscule. Une estimation basée sur des conditions expérimentales optimales [9] indique un événement par million d'années! Heureusement, les calculs théoriques de la section efficace sont très précis [21]. On montre que la section efficace est proportionnelle à

$$\sigma_{pp}(E) \sim | \langle \Psi_d^{1+} | \mathcal{M}_F + \lambda^2 \mathcal{M}_{GT} | \Psi_{pp}(E) \rangle |^2, \quad (2.38)$$

où Ψ_d^{1+} est la fonction d'onde du deuton, $\Psi_{pp}(E)$ est la fonction de collision à l'énergie E et \mathcal{M}_F et \mathcal{M}_{GT} sont les opérateurs de Fermi et de Gamow-Teller

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_F &= \sum_i t_i^+ \\ \mathcal{M}_{GT} &= \sum_i \sigma_i t_i^+. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dans (2.38), λ^2 est le rapport des constantes de Gamow-Teller et de Fermi. Des calculs effectués avec des interactions nucléon-nucléon précises conduisent à $S(0) \approx 3.9 \times 10^{-25}$ MeV-b [21], soit une valeur considérablement plus petite que celles rencontrées dans les réactions de capture ou de transfert.

La réaction ${}^3\text{He}(p, e^+ \nu){}^4\text{He}$ joue également un rôle dans le spectre des neutrinos solaires car elle produit des neutrinos dont l'énergie maximale est de 19 MeV [22]. Sa contribution à la nucléosynthèse est par contre tout à fait négligeable. Bien que, a priori, le même formalisme que celui développé plus haut pourrait être utilisé, il est facile de voir que les éléments de matrice de (2.38) s'annulent si l'on considère que la particule α possède une structure en couches fermées. Ceci a deux conséquences: d'une part, la section efficace est encore plus petite que la section efficace proton-proton; d'autre part, le calcul fait intervenir des termes du second ordre, à la fois dans les fonctions d'onde et dans le hamiltonien d'interaction faible. Il en résulte que le calcul est très délicat et que cette réaction reste actuellement mal connue dans l'interprétation du spectre des neutrinos solaires. On consultera les références [23, 24, 25, 26] pour des calculs récents.

2.6.2 Réactions de capture de neutrons

Les réactions du type (n, γ) sont à la base du processus s , qui produit des éléments lourds par captures successives de neutrons suivies de décroissances β . Le formalisme développé ici peut bien entendu s'appliquer à ces réactions, mais l'absence de charge du neutron conduit à des propriétés particulières. Lorsque $\eta = 0$, les fonctions coulombiennes F_ℓ et G_ℓ se simplifient [17] et s'écrivent

$$\begin{aligned} F_\ell(x) &= x j_\ell(x) \\ G_\ell(x) &= -x y_\ell(x), \end{aligned} \quad (2.40)$$

où $j_\ell(x)$ et $y_\ell(x)$ sont les fonctions de Bessel sphériques de première et de deuxième espèce respectivement. A titre d'exemple, on a

$$\begin{aligned} j_0(x) &= \frac{\sin(x)}{x} \\ y_0(x) &= -\frac{\cos(x)}{x}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

et, pour $\ell = 0$, les facteurs de pénétration et de déplacement (2.23) s'écrivent simplement

$$\begin{aligned} P_0 &= ka \\ S_0 &= 0. \end{aligned} \quad (2.42)$$

La définition (2.35) de la section efficace de capture conduit au comportement à basse énergie

$$\sigma_{n\gamma} \sim k^{2\ell_i - 1}, \quad (2.43)$$

que l'on obtient facilement en utilisant les comportements asymptotiques de $j_\ell(x)$ et $y_\ell(x)$. Cette dépendance en énergie se retrouve dans tous les types de réactions impliquant des neutrons. Elle montre le changement de régime brutal entre $\ell_i = 0$, où la section efficace croît comme $1/k$ lorsque l'énergie diminue, et $\ell_i > 0$ où la section efficace tend vers zéro à énergie nulle.

A titre d'exemple, nous présentons à la figure 2.2 les sections efficaces des réactions ${}^7\text{Li}(n, \gamma){}^8\text{Li}$ et ${}^{12}\text{C}(n, \gamma){}^{13}\text{C}(1/2^+)$. La première montre le comportement en $1/k$ caractéristique des ondes s , et la deuxième présente une variation en k typique des ondes p . Pendant longtemps, seule la section efficace thermique (à 0.025 eV) était disponible pour la réaction ${}^{12}\text{C}(n, \gamma){}^{13}\text{C}$. Les astrophysiciens ayant besoin de la section efficace vers 25 keV, l'estimation étant faite en supposant une variation en $1/k$, ce qui conduisait à $\sigma_{n\gamma}(25 \text{ keV}) = \sigma_{n\gamma}(0.025 \text{ eV})/1000$. La mesure de la section efficace entre 0 et 200 keV [30] a montré que cette extrapolation n'était pas valable car l'onde p joue un rôle déterminant dans la section efficace.

2.6.3 Processus à trois corps

Quelques réactions d'intérêt astrophysique font intervenir trois noyaux dans la voie d'entrée [14]. La plus importante est le processus 3α dans lequel trois particules α fusionnent pour conduire à la nucléosynthèse

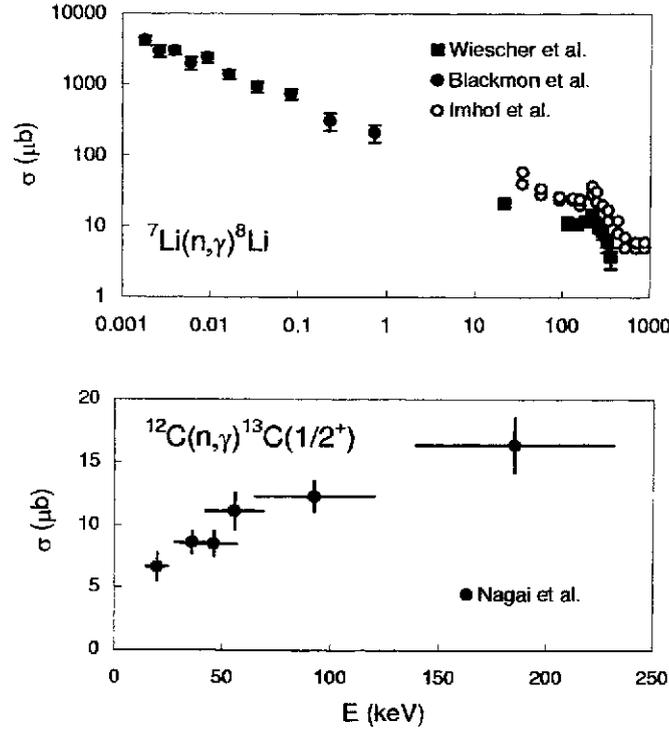


Figure 2.2: Sections efficaces ${}^7\text{Li}(n,\gamma){}^8\text{Li}$ et ${}^{12}\text{C}(n,\gamma){}^{13}\text{C}(1/2^+)$. Les données proviennent des références [27, 28, 29] pour la réaction ${}^7\text{Li}(n,\gamma){}^8\text{Li}$ et de la référence [30] pour la réaction ${}^{12}\text{C}(n,\gamma){}^{13}\text{C}$.

de ${}^{12}\text{C}$. Ce noyau est produit en deux étapes [31]: dans la première, deux particules α se combinent pour former le ${}^8\text{Be}$, qui est instable. Cependant, dans un plasma stellaire, la durée de vie de ${}^8\text{Be}$ ($\sim 10^{-16}$ s) est plus grande que le temps moyen entre deux collisions ($\sim 10^{-19}$ s). On arrive donc à un équilibre entre ${}^8\text{Be}$ et $\alpha + \alpha$, et la seconde étape du processus, la réaction ${}^8\text{Be}(\alpha,\gamma){}^{12}\text{C}$, conduit à la formation de ${}^{12}\text{C}$.

D'autres processus à trois corps jouent un rôle, toutefois mineur, dans différents scénarios stellaires. Par exemple, la réaction $\alpha(\alpha n,\gamma){}^9\text{Be}$ permet la nucléosynthèse de ${}^9\text{Be}$ [32, 33]. D'autres processus plus exotiques, tels que $\alpha(\alpha n,\gamma){}^6\text{He}$ ont été proposés [32] mais sont mal connus actuellement.

2.6.4 Effets d'écrantage

Dans les plasmas stellaires, les atomes sont entièrement ionisés, et les réactions nucléaires impliquent des noyaux "nus". La situation en laboratoire est différente puisque les cibles ne sont en général pas ou peu ionisées. Lorsque les énergies sont très basses, l'influence du cortège électronique ne peut plus être négligée. L'effet d'écrantage est quantifié par un potentiel U_e qui s'ajoute à l'énergie E que l'on aurait sans le nuage électronique [34]. Le facteur d'écrantage est défini par

$$f(E) = \frac{\sigma_{exp}(E)}{\sigma_{th}(E)} = \frac{\sigma_{th}(E + U_e)}{\sigma_{th}(E)}, \quad (2.44)$$

où $\sigma_{exp}(E)$ est la section efficace expérimentale, affectée par l'écrantage électronique et $\sigma_{th}(E)$ la section efficace théorique en présence de noyaux "nus". En supposant que les facteurs astrophysiques (voir §2.7) aux énergies E et $E + U_e$ sont identiques, on obtient

$$f(E) = \exp(\pi\eta U_e/E), \quad (2.45)$$

si $U_e \ll E$, ce qui est vérifié dans la pratique [34]. Les valeurs typiques de U_e sont inférieures à 1 keV.

L'effet d'écrantage a été observé pour la première fois dans la réaction ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$ [35], puis dans des réactions impliquant des isotopes de Li [36]. Un exemple est donné à la figure 2.3 où la section efficace expérimentale ${}^6\text{Li}(p,\alpha){}^3\text{He}$ est comparée à un calcul théorique purement nucléaire [37]. On voit clairement que le calcul ne peut pas reproduire l'augmentation du facteur astrophysique à basse énergie. En introduisant un potentiel d'écrantage de l'ordre de $U_e = 510$ eV, l'accord avec l'expérience s'améliore sensiblement.

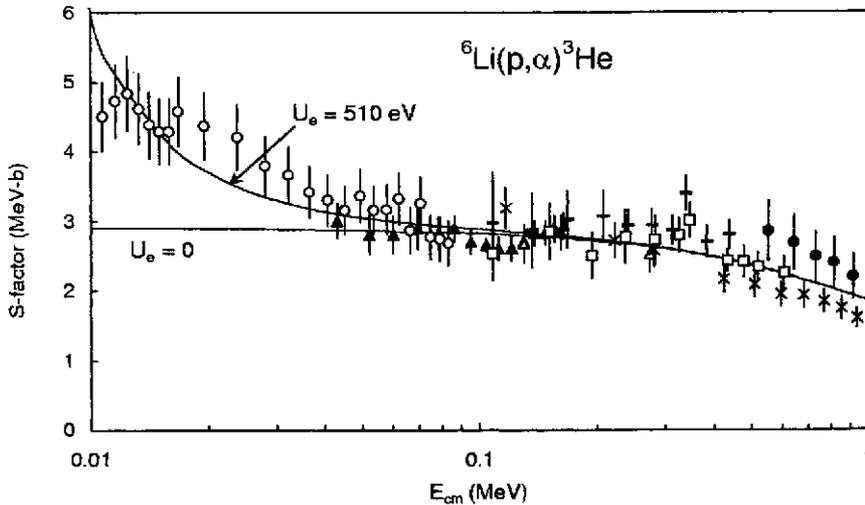


Figure 2.3: Facteur astrophysique ${}^6\text{Li}(p,\alpha){}^3\text{He}$ avec et sans potentiel d'écrantage, comparé aux données expérimentales (extrait de la référence [37]).

Remarquons que, pour déterminer U_e , il est nécessaire de connaître la section efficace entre noyaux "nus". Celle-ci est généralement obtenue par un ajustement des données à plus hautes énergies, où l'effet d'écrantage est supposé être négligeable. Cette méthode doit être utilisée avec prudence car elle peut dépendre du modèle utilisé et de la limite en énergie adoptée [37]. Le problème peut également être abordé de manière plus fondamentale, en essayant de calculer U_e à partir d'un modèle atomique. Plusieurs travaux ont été effectués dans cette direction [38, 39] mais les résultats obtenus sous-estiment généralement le potentiel d'écrantage observé.

2.7 Discussion qualitative des sections efficaces

Nous avons vu précédemment que les réactions d'intérêt astrophysique se produisent à des énergies nettement inférieures à la barrière coulombienne, où la section efficace entre particules chargées varie très vite avec l'énergie. Il est donc plus commode d'utiliser le facteur astrophysique

$$S(E) = \sigma(E)E \exp(2\pi\eta), \quad (2.46)$$

où la partie coulombienne a été éliminée. Pour des réactions non-résonnantes, le facteur S varie lentement avec l'énergie.

Dans les systèmes légers, il n'est pas exagéré de dire que chaque réaction possède ses propres particularités. Il est cependant possible d'établir des "catégories" qui regroupent des réactions présentant des propriétés similaires. Une classification est effectuée à la table 2.1, où nous établissons d'abord une hiérarchie entre les réactions de transfert (processus nucléaire), de capture radiative (processus électromagnétique) et de capture faible. Les sections efficaces suivent cette hiérarchie, comme on peut le constater en examinant les facteurs astrophysiques des réactions ${}^6\text{Li}(p,\alpha){}^3\text{He}$ et ${}^6\text{Li}(p,\gamma){}^7\text{Be}$ présentés aux figures 2.3 et 2.4 respectivement. La voie d'entrée étant la même dans les deux réactions, les

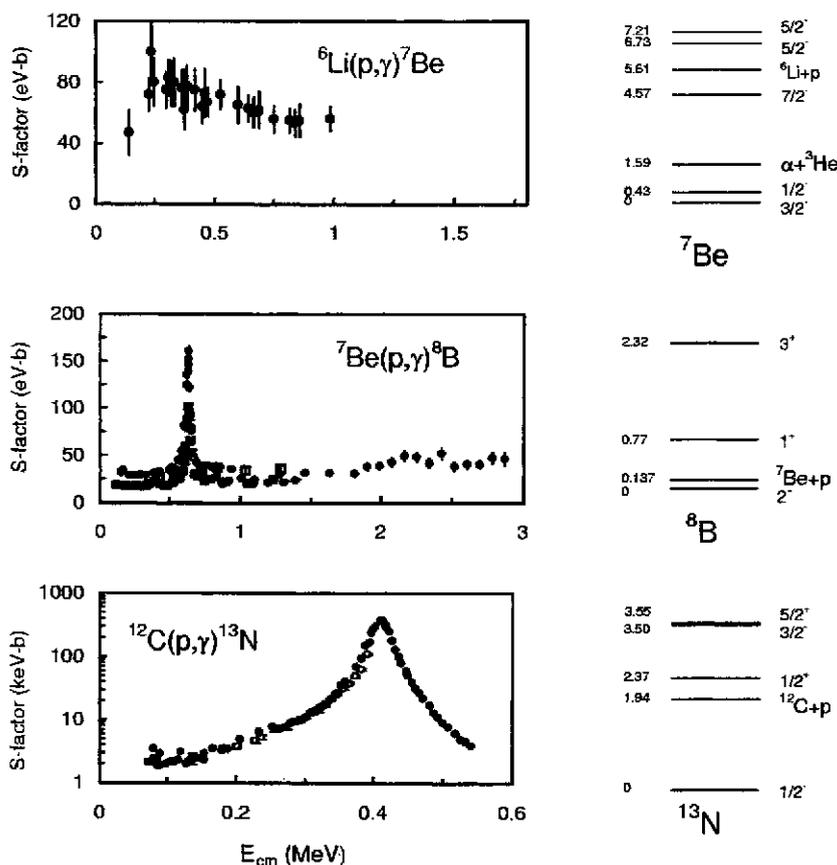


Figure 2.4: Facteurs astrophysiques de quelques réactions typiques (voir texte). Les références aux données expérimentales sont données à la référence [7]. Le spectre du noyau unifié est présenté à droite du facteur astrophysique.

dépendances en énergie sont très similaires. Par contre, l'amplitude est plus de 10^4 fois plus grande pour la réaction ${}^6\text{Li}(p,\alpha){}^3\text{He}$. Cette différence s'observe également entre les réactions résonnantes ${}^{22}\text{Ne}(\alpha,n){}^{25}\text{Mg}$ et ${}^{22}\text{Ne}(\alpha,\gamma){}^{26}\text{Mg}$. D'une manière générale, si une voie de transfert est ouverte, elle domine toujours largement la capture radiative. A titre d'information, nous donnons à la table 2.1 une estimation du facteur astrophysique à énergie nulle. Remarquons que les comparaisons entre les facteurs S doivent être faites avec prudence puisque cette grandeur est proportionnelle à la section efficace, mais dépend également des charges.

Dans chaque type de processus, une distinction peut être faite selon que la réaction est résonnante ou non-résonnante. Une réaction non-résonnante (également appelée "directe") ne présente pas de résonance aux énergies astrophysiques. Des exemples typiques sont ${}^6\text{Li}(p,\alpha){}^3\text{He}$ et ${}^6\text{Li}(p,\gamma){}^7\text{Be}$ présentés aux figures 2.3 et 2.4. Le ${}^7\text{Be}$ présente deux résonances $5/2^-$ situées au-delà de 1 MeV; elles sont caractérisées par un moment angulaire $\ell = 1$ et ne sont pas dans le domaine astrophysique.

Les sections efficaces peuvent être décomposées en ondes partielles

$$\sigma(E) = \sum_{\ell} \sigma_{\ell}(E), \quad (2.47)$$

où $\sigma_{\ell}(E)$ est la section efficace due à l'onde partielle ℓ . Les formules (2.35) et (2.37) montrent qu'il n'existe pas d'interférence entre les différentes ondes partielles dans les sections efficaces intégrées. Supposons que la réaction présente une résonance isolée dans l'onde partielle ℓ_R . Deux cas doivent être envisagés, selon que ℓ_R est égal ou non au moment cinétique le plus bas ℓ_{min} autorisé par les règles de sélection (en général, $\ell_{min} = 0$, mais $\ell_{min} > 0$ se rencontre parfois). Si $\ell_R \neq \ell_{min}$, l'équation (2.47)

Table 2.1 Classification des principales réactions d'intérêt astrophysique.

Processus		Exemples	$S(0)$ (MeV-b)
Nucléaire	Non - résonnant	${}^6\text{Li}(p,\alpha){}^3\text{He}$	≈ 3
	résonnant $\left\{ \begin{array}{l} \ell_R = \ell_{min} \\ \ell_R > \ell_{min} \end{array} \right.$	${}^3\text{He}(d,p)\alpha$	≈ 6
		${}^{11}\text{B}(p,\alpha){}^8\text{Be}$	≈ 300
Etat sous le seuil	${}^{22}\text{Ne}(\alpha,n){}^{25}\text{Mg}$	$\approx 10^8$	
		${}^{13}\text{C}(\alpha,n){}^{16}\text{O}$	$\approx 10^7$
Electromagnétique	Non - résonnant	${}^6\text{Li}(p,\gamma){}^7\text{Be}$	$\approx 10^{-4}$
	résonnant $\left\{ \begin{array}{l} \ell_R = \ell_{min} \\ \ell_R > \ell_{min} \end{array} \right.$	${}^{12}\text{C}(p,\gamma){}^{13}\text{N}$	$\approx 10^{-3}$
		${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$	$\approx 2 \times 10^{-5}$
Etat sous le seuil	${}^{22}\text{Ne}(\alpha,\gamma){}^{26}\text{Mg}$	$\approx 2 \times 10^3$	
		${}^{12}\text{C}(\alpha,\gamma){}^{16}\text{O}$	≈ 0.5
Faible	Non-résonnant	$p(p,e^+\nu)d$	$\approx 4 \times 10^{-25}$
		${}^3\text{He}(p,e^+\nu){}^4\text{He}$	$\approx 10^{-22}$

devient

$$\sigma(E) \approx \sigma_{\ell_R}(E) + \sigma_{\ell_{min}}(E), \quad (2.48)$$

et la résonance se superpose à un terme non-résonnant. Cette situation se rencontre par exemple dans les réactions ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ et ${}^{11}\text{B}(p,\alpha){}^8\text{Be}$. Dans le premier cas, la résonance 1^+ à $E_{cm} = 0.63$ MeV s'ajoute au fond continu. La même situation se produit pour ${}^{11}\text{B}(p,\alpha){}^8\text{Be}$ où la résonance $2^+(\ell = 1)$ située à $E_x = 16.11$ MeV ($E_{cm} = 0.15$ MeV) se superpose à un terme lentement variable correspondant à $\ell = 0$.

La situation est différente si $\ell_R = \ell_{min}$; on a, dans ce cas,

$$\sigma(E) \approx \sigma_{\ell_R}(E) \approx \sigma_{\ell_{min}}(E), \quad (2.49)$$

et la distinction entre terme résonnant et non-résonnant ne peut plus être faite simplement. Il existe une confusion dans la littérature qui provient du fait que certains auteurs utilisent (2.48) en considérant $\sigma_{\ell_{min}}$ comme étant une contribution d'origine non-résonnante. Dans leur esprit, $\sigma_{\ell_R}(E)$ a une forme de Breit-Wigner et $\sigma_{\ell_{min}}(E)$ est un terme "de capture directe" calculé, par exemple, à partir du modèle de potentiel. Nous reviendrons sur ce problème dans la suite.

Les réactions ${}^{12}\text{C}(p,\gamma){}^{13}\text{N}$ et ${}^{15}\text{N}(p,\alpha){}^{12}\text{C}$ fournissent des exemples de sections efficaces dominées par une résonance $\ell = 0$ de basse énergie. Dans les deux cas, la section efficace est déterminée par les propriétés de la résonance, non seulement au voisinage de celle-ci, mais également en-dehors de ce voisinage. Dans ce type de réaction, le facteur $S(0)$ dépend essentiellement des propriétés de la résonance.

Certaines réactions sont influencées par un état sous le seuil. Cette situation correspond à une résonance d'énergie négative dont l'effet se manifeste principalement à basses énergies et se caractérise par une augmentation du facteur astrophysique. Un exemple typique est la réaction ${}^{12}\text{C}(\alpha,\gamma){}^{16}\text{O}$ dont la composante E1 est donnée à la figure 2.5. L'état 1_1^- situé 0.040 MeV sous le seuil $\alpha+{}^{12}\text{C}$ conduit à une augmentation de facteur S à basse énergie. Ce domaine étant difficilement accessible à l'expérience, la présence de cet état rend la détermination de la section efficace ${}^{12}\text{C}(\alpha,\gamma){}^{16}\text{O}$ particulièrement difficile.

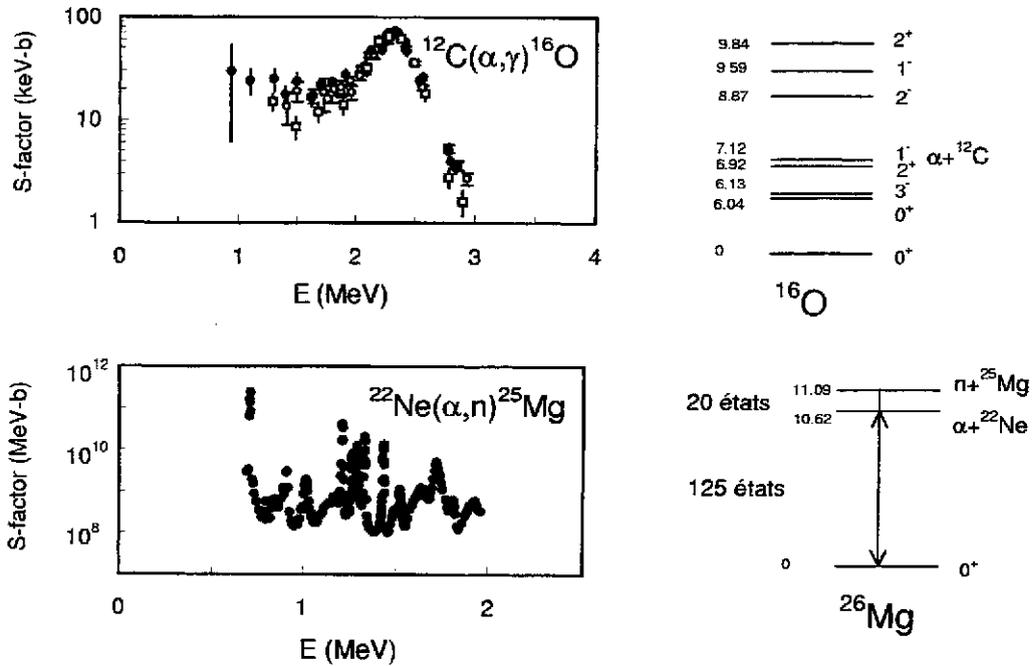


Figure 2.5: Voir légende à la figure 2.4.

En raison de l'extrême importance de cette réaction dans les modèles stellaires, une littérature très importante lui est consacrée (voir par exemple la référence [40]).

Lorsque la densité de niveaux au voisinage du seuil devient élevée (ce qui se produit principalement dans les noyaux de masse $A \geq 14$), la section efficace présente un comportement dit "multirésonnant" et de nombreuses résonances étroites se superposent. Dans ce cas, il est nécessaire de faire appel à des théories statistiques [41] qui peuvent, de manière approchée, rendre compte de ces densités de niveaux élevées. Un exemple typique est présenté à la figure 2.5, avec la réaction $^{22}\text{Ne}(\alpha, n)^{25}\text{Mg}$.

Dans la hiérarchie présentée à la table 2.1, figurent en dernière position les réactions de capture faible. Comme nous l'avons discuté au §2.6.1, les sections efficaces sont minuscules. Remarquons que nous n'avons pas discuté ici d'autres réactions d'intérêt astrophysique, telles que les réactions de fusion ou de spallation [5]. Ces réactions font intervenir des noyaux plus lourds ou des énergies plus élevées, et ne rentrent pas dans le cadre de ce travail.

3 Le modèle de potentiel

3.1 Introduction

La résolution de l'équation de Schrödinger associée au hamiltonien (2.7), qui fait intervenir individuellement tous les nucléons du système, est un problème extrêmement complexe qui n'a pas de solution exacte dès que le nombre de nucléons dépasse trois. Dans le modèle de potentiel [12, 13, 42, 43, 44], on suppose que les nucléons des deux noyaux en collision conduisent à une interaction moyenne entre ces noyaux, qui ne dépend que de la distance relative. En d'autres termes, excepté pour quelques propriétés spécifiques, la structure interne des noyaux n'est pas prise en compte.

Considérons les coordonnées absolues \mathbf{r}_i des nucléons; les centres de masse des deux noyaux s'écrivent

$$\mathbf{R}_1 = \frac{1}{A_1} \sum_{i=1}^{A_1} \mathbf{r}_i$$

$$\mathbf{R}_2 = \frac{1}{A_2} \sum_{i=A_1+1}^A \mathbf{r}_i, \quad (3.1)$$

ce qui permet de définir la coordonnée relative ρ et la coordonnée du centre de masse du système \mathbf{R}_{cm} par

$$\begin{aligned} \rho &= \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_{cm} &= \frac{1}{A} (A_1 \mathbf{R}_1 + A_2 \mathbf{R}_2). \end{aligned} \quad (3.2)$$

A l'intérieur de chaque noyau, définissons les coordonnées internes

$$\begin{aligned} \xi_1^i &= \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_1 \text{ pour } i \leq A_1 \\ \xi_2^i &= \mathbf{r}_i - \mathbf{R}_2 \text{ pour } i > A_1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dans le modèle de potentiel, le hamiltonien (2.7) s'écrit

$$H = H_1 + H_2 + T_{cm} + T_\rho + V(\rho), \quad (3.4)$$

où H_1 et H_2 sont les hamiltoniens internes des noyaux 1 et 2, T_{cm} est l'énergie du centre de masse et $V(\rho)$ est le potentiel. Comme les quatre termes de (3.4) agissent dans des espaces différents, la fonction d'onde totale se factorise

$$\Psi_{\ell I}^{JM\pi} = g_{\ell I}^{J\pi}(\rho) \varphi_{\ell I}^{JM\pi}(\Omega_\rho, \xi_1^i, \xi_2^j), \quad (3.5)$$

où la fonction de voie $\varphi^{JM\pi}$ a été définie en (2.12), et où le mouvement du centre de masse a été éliminé. Dans cette définition, la fonction relative $g_{\ell J}^{J\pi}(\rho)$ est obtenue par

$$[T_\rho + V(\rho)] g_{\ell J}^{J\pi}(\rho) = E g_{\ell J}^{J\pi}(\rho), \quad (3.6)$$

où E est l'énergie relative des deux noyaux. Le modèle de potentiel réduit donc l'équation de Schrödinger à une équation purement radiale

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu m_N} \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right) + V(\rho) - E \right] g_{\ell J}^{J\pi}(\rho) = 0. \quad (3.7)$$

où $V(\rho)$ est le potentiel d'interaction. Remarquons que le potentiel peut dépendre de ℓ et de J . Par ailleurs, les fonctions internes ϕ^{I_1} et ϕ^{I_2} ne jouent aucun rôle dans le calcul de l'énergie du système. Elles peuvent apparaître dans certains types d'éléments de matrice.

L'équation de Schrödinger (3.7) doit être résolue numériquement pour la plupart des potentiels noyau-noyau tels que ceux utilisés dans la suite. L'équation est intégrée numériquement par la méthode de Numérov [45, 46]. Pour les états liés, l'énergie est obtenue en imposant à la solution d'être de carré sommable. On peut montrer que les énergies propres correspondent aux racines d'une équation algébrique [45, 46]. Pour les états libres, la solution numérique est ajustée, à grandes distances, par une combinaison linéaire des ondes coulombiennes I_ℓ et O_ℓ , ce qui permet de déterminer le déphasage. Pour des calculs à une voie, celui-ci s'obtient directement à partir de la matrice de collision

$$U_\ell = \exp(2i\delta_\ell). \quad (3.8)$$

La fonction d'onde est ensuite normalisée au flux unité, pour respecter les conditions du §2.

3.2 Choix du potentiel

Dans le modèle de potentiel, toute la physique du problème est déterminée par l'interaction noyau-noyau $V(\rho)$. Selon le type d'application auquel on s'intéresse, le choix de ce potentiel sera guidé par des contraintes expérimentales. Dans les réactions de capture, il est crucial que le potentiel reproduise l'énergie de l'état final. Si des déphasages sont disponibles, le potentiel de l'état initial sera choisi de manière à les reproduire le plus précisément possible. Les formes le plus fréquemment utilisées sont les potentiels de Woods-Saxon

$$V(\rho) = \frac{V_0}{1 + \exp((\rho - \rho_0)/a)}, \quad (3.9)$$

ou Gaussien

$$V(\rho) = V_0 \exp(-(\rho/a)^2). \quad (3.10)$$

Outre les contraintes éventuelles liées aux données expérimentales, le potentiel d'interaction doit également respecter une contrainte dont l'origine est microscopique [12]. La fonction d'onde (3.5) est une forme simplifiée d'une définition plus générale

$$\Psi_{\ell I}^{JM\pi} = \mathcal{A} g_{\ell I}^{J\pi}(\rho) \varphi_{\ell I}^{JM\pi}(\Omega_\rho, \xi_1^i, \xi_2^j), \quad (3.11)$$

où \mathcal{A} est l'opérateur d'antisymétrisation entre tous les nucléons. Cette définition est utilisée dans les modèles microscopiques [47] où tous les nucléons sont pris en compte. La présence de l'antisymétriseur permet de tenir compte exactement du principe de Pauli, mais alourdit considérablement les calculs. On peut montrer que, sous certaines hypothèses que nous ne détaillerons pas ici, il existe, pour chaque système, des fonctions radiales non nulles qui annulent exactement $\Psi_{\ell I}^{JM\pi}$ par la présence de l'opérateur \mathcal{A} . Ces fonctions sont appelées "ondes interdites". Nous renvoyons aux références [48, 12, 13] pour plus d'informations. La présence des ondes interdites peut être simulée par un choix approprié du potentiel. Buck *et al.* [48] ont montré que le potentiel devait contenir un nombre d'états liés n_r égal au nombre d'ondes interdites. Cette prescription conduit à l'utilisation de potentiels dits "profonds" puisqu'ils contiennent n_r états additionnels. Le calcul de n_r dépend du système et de l'onde partielle considérés. Dans le cas des systèmes noyau-nucléon, n_r est facile à déterminer. A la table 3.1, nous donnons les valeurs de n_r pour les systèmes étudiés dans la suite.

Table 3.1 Ondes interdites de quelques systèmes.

$\alpha + {}^3\text{He}$		${}^7\text{Be} + \text{p}$		${}^{12}\text{C} + \text{p}$	
ℓ	n_r	ℓ	n_r	ℓ	n_r
0	2	0	1	0	1
1,2	1	≥ 1	0	≥ 1	0
≥ 3	0				

Pour être complets, signalons que la présence des ondes interdites peut également être simulée par une singularité à l'origine du potentiel $V(\rho)$. Les deux approches sont liées par une transformation supersymétrique [49] qui, à partir d'un potentiel profond, permet de déterminer un potentiel équivalent (c.-à-d. donnant les mêmes déphasages) au potentiel initial. Nous n'aborderons pas cette méthode ici.

3.3 Sections efficaces

Pour utiliser les opérateurs multipolaires électromagnétiques (2.29), il est nécessaire de les expliciter dans le système de coordonnées défini en 3.1. Remarquons d'abord que nous éliminons le mouvement du centre de masse en utilisant la transformation proposée par Gartenhaus et Schwartz [50]. Dans cette transformation, un opérateur O' invariant par translation s'écrit

$$O' = O(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{cm}, \mathbf{p}_i - \mathbf{P}_{cm}/A), \quad (3.12)$$

où \mathbf{R}_{cm} et \mathbf{P}_{cm} représentent la coordonnée et l'impulsion du centre de masse. Moyennant cette transformation, les opérateurs $E1$, $E2$ et $M1$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1\mu}^E &= e \left(Z_1 \frac{A_2}{A} - Z_2 \frac{A_1}{A} \right) \rho Y_1^\mu(\Omega_\rho) \\ \mathcal{M}_{2\mu}^E &= \mathcal{M}_{2\mu}^E(\xi_1) + \mathcal{M}_{2\mu}^E(\xi_2) + e \left(Z_1 \left(\frac{A_2}{A} \right)^2 + Z_2 \left(\frac{A_1}{A} \right)^2 \right) \rho^2 Y_2^\mu(\Omega_\rho) \\ \mathcal{M}_{1\mu}^M &= \mathcal{M}_{1\mu}^M(\xi_1) + \mathcal{M}_{1\mu}^M(\xi_2) + \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \mu_N \frac{Z_1 A_2^2 + Z_2 A_1^2}{A_1 A_2 A} \ell_\mu, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où l'on a fait apparaître les opérateurs $E2$ et $M1$ liés à la structure interne des noyaux. Nous retrouvons une des règles de sélection discutée en 2.4, à savoir que l'opérateur $E1$ s'annule pour des systèmes où $Z_1/A_1 = Z_2/A_2$, c'est-à-dire pour des systèmes d'isospin zéro.

Nous donnons ici les éléments de matrice de (3.13) pour des systèmes formés de noyaux de spin zéro. L'extension au cas général est présentée à l'appendice A. Si les noyaux ont un spin zéro, les éléments de matrice entre fonctions (3.5) s'obtiennent par

$$\begin{aligned} \langle \Psi^{J_f} || \mathcal{M}_\lambda^E || \Psi^{J_i} \rangle &= F_E \int_0^\infty g^{J_f}(\rho) \rho^{\lambda+2} g^{J_i}(\rho) d\rho \\ \langle \Psi^{J_f} || \mathcal{M}_1^M || \Psi^{J_i} \rangle &= F_M \int_0^\infty g^{J_f}(\rho) \rho^2 g^{J_i}(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned} F_E &= e \left[Z_1 \left(\frac{A_2}{A} \right)^\lambda + Z_2 \left(-\frac{A_1}{A} \right)^\lambda \right] \left[\frac{(2\lambda+1)(2J_i+1)}{4\pi(2J_f+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \langle J_i 0 \lambda 0 | J_f 0 \rangle \\ F_M &= \mu_N \frac{Z_1 A_2^2 + Z_2 A_1^2}{A_1 A_2 A} \delta_{J_i J_f} \sqrt{\frac{3J_f(J_f+1)}{4\pi}}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dans les cas de spin non-nul, les formules (3.14) et (3.15) contiennent des termes additionnels liés aux moments internes des noyaux 1 et 2. La conclusion générale est cependant identique: les éléments de matrice se réduisent à des intégrales à une dimension et à des facteurs géométriques. Connaissant les éléments de matrice, la section efficace de capture peut être calculée avec (2.35).

3.4 Applications

3.4.1 Introduction

Nous présentons ici quelques applications du modèle de potentiel aux réactions de capture radiative. Nous avons choisi trois exemples typiques:

- les réactions non résonnantes ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ et ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$,
- la réaction ${}^{12}\text{C}(p, \gamma){}^{13}\text{N}$ qui présente une résonance ($\ell = 0$) à basse énergie. Comme nous l'avons vu précédemment, le facteur astrophysique est fortement dominé par cette résonance.

Ces trois exemples donnent un bon aperçu des différentes situations qui peuvent se présenter dans les systèmes légers.

3.4.2 Les réactions ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$, ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$ et ${}^{12}\text{C}(p, \gamma){}^{13}\text{N}$

Nous utilisons un potentiel gaussien (3.10) pour l'interaction nucléaire. Le potentiel coulombien est paramétrisé par une forme point-sphère

$$\begin{aligned}
 V_c(\rho) &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2R_c} \left(3 - (\rho/R_c)^2 \right) \text{ pour } \rho \leq R_c \\
 &= \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\rho} \text{ pour } \rho > R_c,
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

où R_c est le rayon de la sphère (typiquement la somme des rayons nucléaires).

Les paramètres utilisés sont donnés à la table 3.2. Pour les réactions ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ et ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$, ils sont inspirés de ceux utilisés aux références [44] et [51] respectivement. Dans chaque cas, le potentiel final est ajusté de manière à reproduire l'énergie de liaison. Pour le système ${}^{12}\text{C}+p$, l'état initial est décrit par un potentiel différent de celui de l'état final; il est déterminé par l'énergie et la largeur de la résonance $1/2^+$ ($E_{cm} = 0.42$ MeV, $\Gamma_p = 32$ keV) de ${}^{13}\text{N}$. Remarquons que ces potentiels sont indicatifs; ils ne sont pas ajustés sur les sections efficaces et ne peuvent pas être considérés comme "optimaux".

Table 3.2 Paramètres des potentiels gaussiens.

	${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$	${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$	${}^{12}\text{C}(p, \gamma){}^{13}\text{N}$
R_c (fm)	3.25	2.4	2.7
<u>Etat final</u>			
E_f (MeV)	-1.59, -1.16	-0.137	-1.94
ℓ_f	1	1	1
J_f	$3/2^-, 1/2^-$	2^+	$1/2^-$
a (fm)	2.48	2.8	2.7
V_0 (MeV)	-86.6, -84.8	-44.81	-56.4
<u>Etat initial</u>			
ℓ_i	0, 2	0, 2	0
J_i	$1/2^+, 3/2^+, 5/2^+$	2^-	$1/2^+$
a (fm)	2.48	2.8	2.7
V_0 (MeV)	-67.7	-44.81	-70.5

Les facteurs astrophysiques sont représentés à la figure 3.1, et comparés aux données expérimentales disponibles. Le noyau ${}^7\text{Be}$ présentant deux états liés, le facteur S contient deux termes relatifs aux états $3/2^-$ et $1/2^-$. En raison du facteur E_γ^3 apparaissant dans la section efficace $E1$, la contribution de l'état fondamental est supérieure à la contribution de l'état excité $1/2^-$. En-dessous de 0.5 MeV, l'onde s représente la majeure partie du facteur S , mais l'onde d ne peut plus être négligée au-delà de 1 MeV.

La section efficace ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$ présente une résonance 1^+ à $E_{cm} = 0.63$ MeV. Cette résonance possède un moment orbital $\ell = 1$ et décroît vers l'état fondamental par une transition $M1$; sa contribution à basse énergie est donc négligeable et elle ne sera donc pas prise en compte ici. Dans le but d'évaluer la sensibilité du facteur S en fonction du potentiel, nous avons utilisé plusieurs valeurs de a , et réajusté V_0 pour reproduire la faible énergie de ${}^8\text{B}$ (-0.137 MeV). L'effet est essentiellement un facteur d'échelle, comme nous le verrons plus loin. A nouveau, l'onde d ne peut plus être négligée au-delà de 0.5 MeV.

Le facteur astrophysique ${}^{12}\text{C}(p, \gamma){}^{13}\text{N}$ est essentiellement déterminé par les propriétés de la résonance $1/2^+$ à 0.42 MeV. Contrairement à la réaction ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$, cette résonance a un moment cinétique $\ell = 0$, et son effet s'étend jusqu'à énergie nulle. Avec les paramètres adoptés, le modèle de potentiel surestime les données d'un facteur 2 environ. Cet effet est bien connu, et provient du fait que l'on suppose

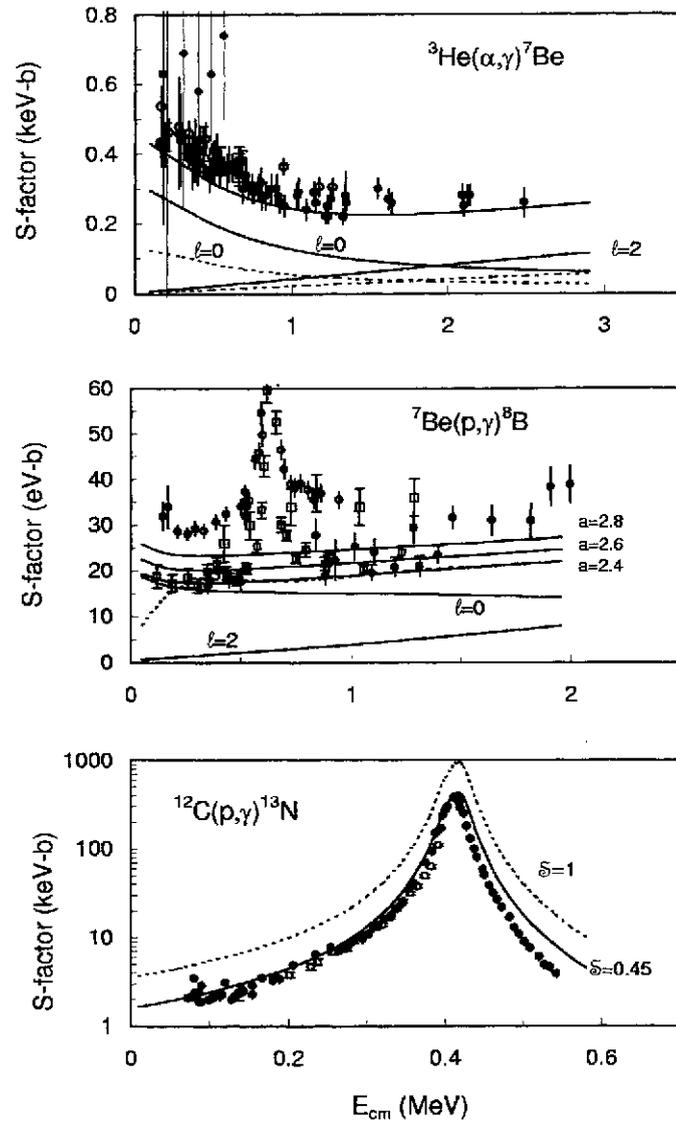


Figure 3.1: Facteurs astrophysiques dans le modèle de potentiel. ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$: les traits pleins correspondent à l'état fondamental $3/2^-$, et les traits pointillés correspondent à l'état excité $1/2^-$. ${}^7\text{Be}(p, \gamma){}^8\text{B}$: les calculs sont faits pour différentes portées du potentiel gaussien; les traits pointillés sont obtenus en utilisant une limite supérieure de 50 fm pour l'intégrale radiale.

que l'état fondamental de ^{13}N possède une structure $^{12}\text{C}+p$ seulement. Une fonction d'onde réaliste de ^{13}N devrait contenir un mélange de plusieurs configurations, telles que $^{12}\text{C}^*+p$, ce qui réduirait la composante $^{12}\text{C}+p$. Cet effet peut être simulé par l'introduction d'un facteur spectroscopique S qui multiplie la fonction d'onde de ^{13}N , et donc le facteur astrophysique [43]. En utilisant $S = 0.45$, on constate que l'accord entre la théorie et l'expérience est excellent entre 0 et 0.4 MeV. Un tel facteur n'est pas nécessaire pour ^7Be et ^8B qui présentent des composantes $\alpha+^3\text{He}$ et $^7\text{Be}+p$ dominantes dans leur état fondamental; le facteur spectroscopique est donc proche de l'unité.

3.4.3 Analyse des sections efficaces

Comme nous l'avons vu au §3.3, les sections efficaces sont déterminées par des intégrales impliquant les fonctions d'onde initiale et finale. Définissons

$$I(\rho) = g^{J_f}(\rho)\rho^{\lambda+2}g^{J_i}(\rho), \quad (3.17)$$

dont l'intégrale conduit à la section efficace pour les multipôles électriques [voir (3.14)]. A la figure 3.2, nous présentons cet intégrant à une énergie typique (0.02 MeV pour $^7\text{Be}(p,\gamma)^8\text{B}$, et 0.1 MeV pour $^3\text{He}(\alpha,\gamma)^7\text{Be}$ et $^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$). Les conclusions dépendent très peu de l'énergie considérée.

La figure 3.2 montre que, pour la réaction $^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$, le maximum (appelé ρ_{max}) de $I(\rho)$ se trouve vers 4 fm, alors qu'il est aux environs de 10 fm pour $^3\text{He}(\alpha,\gamma)^7\text{Be}$. A basse énergie, la fonction initiale $g^{J_i}(\rho)$ décroît rapidement dans la région d'interaction nucléaire, puisque le facteur de pénétration est petit. Par contre, la fonction finale $g^{J_f}(\rho)$ est maximale dans la région nucléaire ($\leq 4-5$ fm) et décroît exponentiellement au-delà. A grande distance, on a

$$g^{J_f}(\rho) = C_f W_{-\eta, \ell_f + \frac{1}{2}}(2k\rho)/\rho \sim C_f \exp(-k\rho)/\rho^{\eta+1} \quad (3.18)$$

où C_f est l'amplitude et k le nombre d'onde. La décroissance est d'autant plus rapide que k est grand, et donc que l'énergie de liaison est importante. De ceci, il résulte que le produit (3.17) présente toujours un maximum. Une situation extrême est fournie par la réaction $^7\text{Be}(p,\gamma)^8\text{B}$ où $\rho_{max} \simeq 40$ fm, et où l'intégrant (3.17) possède des valeurs non négligeables jusqu'à des distances de l'ordre de 150 fm. Cet effet est dû à la très petite énergie de liaison de ^8B (-0.137 MeV). Pour cette raison, l'intégrale apparaissant en (3.14) doit être effectuée sur un domaine très grand. Les courbes continues de la figure 3.1 ont été obtenues en intégrant jusque 200 fm; la courbe en traits interrompus est obtenue en utilisant 50 fm comme limite supérieure. On voit clairement que, dans ces conditions, la dépendance en énergie en-dessous de 0.2 MeV n'a plus de sens. A la référence [13], ce problème est discuté de façon plus générale, et des formules permettant d'évaluer la position du maximum sont développées.

3.4.4 Le modèle de capture extranucléaire

La figure 3.2 montre que, lorsque l'énergie de liaison est faible, la contribution à l'intégrale (3.14) provient essentiellement des grandes distances. Ce résultat est à la base du modèle de capture extranucléaire [52] dont le domaine de validité dépend bien entendu de l'énergie de liaison. Le grand avantage de ce modèle est qu'il ne nécessite pas de potentiel. La fonction d'onde finale est donnée par son comportement asymptotique (3.18) et la fonction initiale par une onde coulombienne. Dans ce modèle, le déphasage est supposé nul, ou égal à l'approximation de sphère dure.

Moyennant ces hypothèses, le facteur astrophysique peut s'écrire

$$S_f(E) \approx |C_f|^2 \tilde{S}_f(E), \quad (3.19)$$

où $\tilde{S}_f(E)$ est une intégrale qui ne dépend que de propriétés basiques du système telles que les masses des noyaux, l'énergie de liaison et les moments cinétiques. Cette fonction est donc *indépendante* du modèle utilisé. Toute l'information qu'un modèle ou une expérience peut fournir est l'amplitude C_f , encore appelée constante de normalisation asymptotique ou constante de vertex [53]. En utilisant les

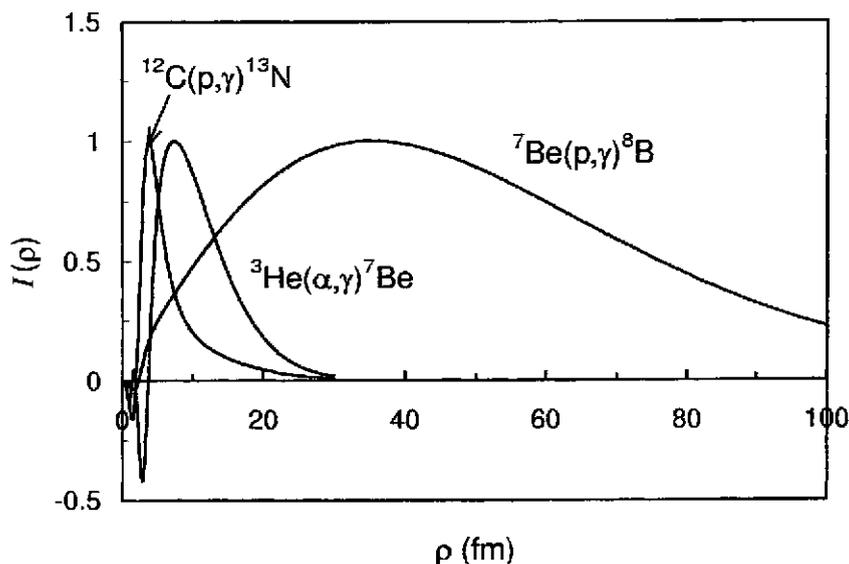


Figure 3.2: Intégrand (3.17) à 0.02 MeV pour ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$, et à 0.1 MeV pour ${}^3\text{He}(\alpha,\gamma){}^7\text{Be}$ et ${}^{12}\text{C}(p,\gamma){}^{13}\text{N}$. La normalisation est arbitraire.

propriétés des fonctions coulombiennes, il est possible de développer ce modèle pour obtenir le facteur à énergie nulle $S_f(0)$, ainsi que ses dérivées [19]. Ce résultat permet d'expliquer les facteurs S obtenus à la figure 3.1 pour la réaction ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$. En utilisant différents potentiels (correspondant à différentes valeurs de a), les dépendances en énergie ne sont que très peu modifiées. L'effet du potentiel se manifeste au-travers de la constante C_f .

L'importance de la réaction ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ a conduit de nombreux groupes expérimentaux et théoriques à développer différentes techniques pour déterminer C_f . Ces méthodes indirectes consistent à réaliser un transfert d'un proton sur ${}^7\text{Be}$, en utilisant des réactions telles que ${}^7\text{Be}(d,n){}^8\text{B}$ ou ${}^7\text{Be}({}^3\text{He},d){}^8\text{B}$ par exemple [54]. Ces méthodes indirectes, sur lesquelles nous reviendrons dans la suite, dépendent cependant d'un modèle d'analyse, ce qui rend la constante C_f peu précise en général.

3.5 Limitations du modèle de potentiel

L'avantage principal du modèle de potentiel est sa simplicité. Il fait toutefois l'hypothèse implicite que l'état final de la réaction possède la structure de la voie d'entrée. Ceci est également vrai pour les résonances, qui doivent pouvoir être décrites par la structure noyau-noyau choisie. Cette situation se rencontre par exemple dans la réaction ${}^{16}\text{O}(\alpha,\gamma){}^{20}\text{Ne}$ où l'état fondamental 0_1^+ de ${}^{20}\text{Ne}$ ainsi que la résonance large 0_4^+ sont bien décrits par une structure $\alpha+{}^{16}\text{O}$, mais où les résonances 0_2^+ et 0_3^+ ne possèdent pas la structure $\alpha+{}^{16}\text{O}$. D'autres configurations, telles que $\alpha+{}^{16}\text{O}^*$ ou $p+{}^{19}\text{F}$ doivent être envisagées mais, d'une part, la simplicité du modèle disparaît et, d'autre part, le choix des potentiels devient de plus en plus difficile. Il est clair que la probabilité que cette situation se présente est d'autant plus grande que la densité de niveaux est élevée. Un autre exemple bien connu est la réaction ${}^{15}\text{O}(\alpha,\gamma){}^{19}\text{Ne}$ où la majorité des états de basse énergie de ${}^{19}\text{Ne}$ peuvent être reproduits par un modèle $\alpha+{}^{15}\text{O}$, mais où la résonance d'intérêt astrophysique ($3/2^+$ à $E_{cm} = 0.50$ MeV) présente vraisemblablement une autre structure.

4 La méthode de la matrice R

4.1 Introduction

La méthode de la matrice R a été introduite dans les années 50 [55, 11]. Son but principal est de paramétrer des grandeurs connues expérimentalement, telles que des sections efficaces ou des déphasages, avec un petit nombre de paramètres (réels), et ensuite d'utiliser ces paramètres pour extrapoler les données, ou en déduire des résultats complémentaires. La théorie de la matrice R introduit la notion de "pôles" qui, physiquement, correspondent à des états liés ou à des résonances du système (nous ne considérons ici que les systèmes à deux noyaux). Les paramètres de la matrice R sont alors liés, mais pas rigoureusement égaux, aux propriétés de ces états: énergie, largeur en particules, largeur γ , etc. Ce problème de relation entre les paramètres expérimentaux (appelés grandeurs "observées") et théoriques (appelés grandeurs "calculées" ou "formelles") est une des principales limitations de la méthode. Le passage d'un type de paramètres à l'autre sera brièvement discuté dans la suite. De nombreuses applications de la méthode de la matrice R ont été réalisées depuis une trentaine d'années par différents auteurs, notamment par F.C. Barker, qui a étudié plusieurs réactions d'intérêt astrophysique, telles que $^{12}\text{C}(\alpha, \gamma)^{16}\text{O}$ [56], $^{12}\text{C}(p, \gamma)^{13}\text{N}$ [57] ou $^7\text{Be}(p, \gamma)^8\text{B}$ [58], mais aussi d'autres processus, tels que la désintégration β de ^6He et ^8He [59].

La méthode de la matrice R suppose qu'il existe une région (sphérique, de rayon a) dans laquelle la physique du problème est déterminée par les paramètres mentionnés plus haut. Dans la région extérieure, l'interaction entre les deux particules du système prend une forme simplifiée. En physique nucléaire, cette interaction se limite à la force coulombienne.

La méthode de la matrice R peut également être appliquée dans un autre but. Dans beaucoup de calculs variationnels, les fonctions de base sont bien adaptées au système dans une région limitée de l'espace, mais ne peuvent pas décrire des états de diffusion. La méthode de la matrice R est alors un complément idéal pour l'étude des collisions. Les paramètres "formels" ne sont pas ajustés à des données, mais calculés à partir des fonctions de base du système. En physique nucléaire, cette situation se rencontre par exemple dans les calculs microscopiques, où les fonctions de base sont gaussiennes [60]; nous discuterons brièvement les modèles microscopiques au chapitre 5. De nombreuses applications de la méthode ont également été réalisées en physique atomique [61].

4.2 Sections efficaces élastiques

4.2.1 Définition de la matrice R

Nous ne traitons ici que les problèmes à une voie; la fonction d'onde est donc caractérisée par le moment orbital ℓ . L'extension aux cas à plusieurs voies est directe, mais alourdit considérablement les notations [11, 62]. Le but est de résoudre l'équation de Schrödinger dans une région limitée de l'espace, ce qui rend l'opérateur d'énergie cinétique non-hermitique. Pour éliminer ce problème on utilise plutôt l'équation de Bloch-Schrödinger

$$(H - E + \mathcal{L}(L)) \Psi^{\ell m} = \mathcal{L}(L) \Psi^{\ell m}, \quad (4.1)$$

où $\mathcal{L}(L)$ est l'opérateur de Bloch

$$\mathcal{L}(L) = \frac{\hbar^2}{2\mu m_N a} \delta(\rho - a) \left(\frac{d}{d\rho} - \frac{L}{\rho} \right) \rho, \quad (4.2)$$

qui rend le hamiltonien hermitique dans la région intérieure ($\rho \leq a$); la constante L est définie par (2.22).

Soit un ensemble u_i^ℓ de N fonctions propres de $H + \mathcal{L}(0)$ avec les valeurs propres E_i^ℓ , et orthonormées sur la région intérieure. La fonction d'onde $\Psi^{\ell m}$ peut s'écrire, dans la région intérieure

$$\Psi_{int}^{\ell m} = \sum_i A_i^\ell u_i^\ell(\rho) Y_\ell^m(\Omega_\rho), \quad (4.3)$$

où les A_i^ℓ sont des coefficients à déterminer. Dans la région extérieure, nous avons, d'après (2.14)

$$\Psi_{ext}^{\ell m} = \frac{(I_\ell(k\rho) - U^\ell(E)O_\ell(k\rho))}{\rho} i^{\ell+1} Y_\ell^m(\Omega_\rho), \quad (4.4)$$

qui correspond à l'équation (2.14) pour un système à une voie. Comme l'opérateur de Bloch est un opérateur de surface, l'équation (4.1) peut se résoudre sur la région intérieure, en remplaçant $\Psi^{\ell m}$ par $\Psi_{ext}^{\ell m}$ dans le membre de droite. Nous avons donc

$$(H - E + \mathcal{L}(L)) \Psi_{int}^{\ell m} = \mathcal{L}(L) \Psi_{ext}^{\ell m}. \quad (4.5)$$

En projetant cette équation sur u_i^ℓ , et en utilisant la propriété

$$F_\ell'(x) G_\ell(x) - F_\ell(x) G_\ell'(x) = 1, \quad (4.6)$$

on en déduit

$$A_i^\ell = i^\ell \exp(i(\delta_{HS} + \delta_C)) \left(\frac{\hbar^2 k}{\mu m_N} \right)^{1/2} \sum_j (B^{-1})_{ij} \sqrt{\tilde{\Gamma}_j}, \quad (4.7)$$

où δ_{HS} est le déphasage sphère dure et δ_C^ℓ le déphasage Coulombien définis par

$$\begin{aligned} \delta_C^\ell &= \arg \Gamma(\ell + 1 + i\eta), \\ \delta_{HS}^\ell &= -\arctan F_\ell(ka)/G_\ell(ka). \end{aligned} \quad (4.8)$$

La matrice B_{ij} est définie par

$$B_{ij} = (E_i - E) \delta_{ij} - L \tilde{\gamma}_i \tilde{\gamma}_j, \quad (4.9)$$

$\tilde{\gamma}_i$ et $\tilde{\Gamma}_i$ étant les largeurs réduite et totale calculées

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_i &= \left(\frac{\hbar^2 a}{2\mu m_N} \right)^{1/2} u_i^\ell(a) \\ \tilde{\Gamma}_i &= 2P_\ell(E_i) \times (\tilde{\gamma}_i)^2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

où la notation $P_\ell(E_i)$ signifie que le facteur de pénétration est évalué à l'énergie E_i et au rayon a . Dans la suite, nous conviendrons de noter les grandeurs calculées par un tilde (\sim). La largeur réduite est liée à l'amplitude de la fonction d'onde au rayon a . Cette définition s'applique aussi bien aux états d'énergie négative qu'aux résonances, dont l'énergie est positive. Pour les états liés, la largeur totale est nulle. Une grande largeur réduite indique une importante structure en amas de l'état considéré, alors qu'une petite largeur réduite correspond à un état peu déformé. On utilise souvent la largeur réduite sans dimension θ_i^2 définie par [11]

$$\theta_i^2 = (\tilde{\gamma}_i)^2 / \gamma_W^2, \quad (4.11)$$

où γ_W^2 est la largeur de Wigner $\gamma_W^2 = 3\hbar^2/2\mu m_N a^2$. La largeur réduite dépend peu de l'énergie de la résonance; par contre, le facteur de pénétration conduit à une forte sensibilité de la largeur totale par rapport à l'énergie.

En utilisant la condition de continuité

$$\Psi_{int}^{\ell m}(a) = \Psi_{ext}^{\ell m}(a), \quad (4.12)$$

on déduit la matrice de collision

$$U^\ell = \frac{I_\ell(ka)}{O_\ell(ka)} \left(1 + i \sum_{ij} (B^{-1})_{ij} \sqrt{\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_j} \right). \quad (4.13)$$

Rappelons que la matrice B est complexe; cette propriété est nécessaire pour assurer l'unitarité de la matrice de collision. On montre à l'appendice B que la matrice de collision peut également s'écrire

$$U^\ell = \frac{I_\ell(ka)}{O_\ell(ka)} \frac{1 - L^* R^\ell}{1 - L R^\ell} = \exp(2i\delta^\ell), \quad (4.14)$$

où nous avons introduit la matrice R^ℓ définie par

$$R^\ell(E) = \sum_\lambda \frac{\tilde{\gamma}_\lambda^2}{E_\lambda - E}, \quad (4.15)$$

et le déphasage

$$\delta^\ell = \delta_C^\ell + \delta_{HS}^\ell + \delta_R^\ell. \quad (4.16)$$

Le déphasage sphère dure représente le déphasage que l'on aurait avec $R^\ell = 0$. Ceci correspond à des largeurs réduites nulles, et donc à un potentiel infini dans la région intérieure, ce qui justifie la dénomination "sphère dure". Dans la définition (4.16) du déphasage, apparaît le déphasage "matrice R " δ_R^ℓ défini par

$$\delta_R^\ell = \arctan \frac{P_\ell(E) R^\ell(E)}{1 - S_\ell(E) R^\ell(E)}, \quad (4.17)$$

où P_ℓ et S_ℓ sont les facteurs de pénétration et de déplacement définis en (2.23). En pratique, on définit le déphasage nucléaire par

$$\delta_N^\ell = \delta_{HS}^\ell + \delta_R^\ell, \quad (4.18)$$

et, par simplification, nous utiliserons la dénomination "déphasage" pour (4.18).

Remarquons que dans les problèmes à une voie, la matrice R est de dimension unité. Rigoureusement, il faudrait plutôt parler de "fonction R ", mais nous garderons la dénomination "matrice R " utilisée traditionnellement. Les équations (4.10) et (4.15) illustrent bien les deux types d'applications mentionnés plus haut. Soit les grandeurs E_i et $\tilde{\gamma}_i^2$ sont utilisées comme paramètres pour ajuster le déphasage, soit elles sont calculées à partir des fonctions de base u_i^ℓ .

4.2.2 Lien entre grandeurs "observées" et "calculées"

Comme nous l'avons vu en 4.2.1, les énergies de pôles E_i et les largeurs réduites $\tilde{\gamma}_i^2$ sont associées aux pôles de la matrice R , et dépendent donc des conditions choisies, telles que la base u_i^ℓ ou la frontière a . L'énergie de résonance "observée" E_i^r correspond à une énergie où la partie réelle de la matrice de collision s'annule; en d'autres termes, l'énergie de résonance est définie par

$$S_\ell(E_i^r) R^\ell(E_i^r) = 1. \quad (4.19)$$

Par ailleurs, la largeur d'une résonance Γ_i peut être définie par l'approximation de Breit-Wigner au voisinage de la résonance

$$\delta_R^\ell(E) \approx \arctan \frac{\Gamma_i(E)}{2(E_i^r - E)}, \quad (4.20)$$

ce qui donne, en utilisant (4.17)

$$\Gamma_i(E) = 2P_\ell(E) \frac{R_\ell(E_i^r)}{[S_\ell(E) R_\ell(E)]'_{E=E_i^r}} = 2P_\ell(E) \gamma_i^2, \quad (4.21)$$

ce qui définit γ_i^2 comme étant la largeur réduite *observée* de la résonance. On écrit également

$$\Gamma_i(E) = \Gamma_i \frac{P_\ell(E)}{P_\ell(E_i^r)}, \quad (4.22)$$

où Γ_i est la largeur calculée à l'énergie de la résonance; c'est la grandeur disponible dans les tables.

Si le nombre de pôles N est quelconque, le passage des grandeurs observées aux grandeurs formelles est assez ardu (voir la référence [63]). Pour illustrer le problème, nous choisissons ici le cas simple $N = 1$, dans lequel la matrice de collision (4.13) conduit au déphasage

$$\delta_R^\ell(E) = \arctan \frac{\tilde{\Gamma}_1(E)}{2(E_1 - E - S_\ell(E)\tilde{\gamma}_1^2)}, \quad (4.23)$$

qui est équivalent au déphasage (4.20) si l'on pose

$$\begin{aligned} E_1^r &= E_1 - \gamma_1^2 S_\ell(E_1^r) \\ \gamma_1^2 &= \tilde{\gamma}_1^2 / (1 + \tilde{\gamma}_1^2 S_\ell'(E_1^r)), \end{aligned} \quad (4.24)$$

où la notation S_ℓ' représente la dérivée de S_ℓ par rapport à l'énergie. Ces formules permettent de passer aisément d'un type de paramètres à l'autre. Pour obtenir (4.24) nous avons utilisé l'approximation de Thomas, qui consiste à linéariser le déplacement au voisinage de l'énergie E_1^r

$$S_\ell(E) \approx S_\ell(E_1^r) + (E - E_1^r) S_\ell'(E_1^r). \quad (4.25)$$

Cette approximation est en général très précise (voir figure 2.1). Le terme $\tilde{\gamma}_1^2 S_\ell'(E_1^r)$ est appelé "facteur de déplacement"; il est d'autant plus important que $\tilde{\gamma}_1^2$ est grand ou, en d'autres termes, que la structure en amas est marquée. On constate donc que la différence entre grandeurs observées et calculées provient de deux définitions différentes de l'approximation de Breit-Wigner. Dans la définition (4.23), qui fait appel aux grandeurs calculées, le facteur de déplacement apparaît explicitement; la définition usuelle (4.20) ne tient pas compte de ce terme. Les deux expressions sont équivalentes à condition de redéfinir les paramètres de la résonance.

4.3 Sections efficaces de transfert

4.3.1 Formalisme

La théorie de la matrice R développée jusqu'ici ne concerne que des systèmes à une voie ou, en d'autres termes, des matrices R de dimension 1. Pour traiter les réactions de transfert, il est bien entendu nécessaire de généraliser ce formalisme à plusieurs voies. Nous exposons ici les résultats principaux sans donner les démonstrations. Des détails peuvent être trouvés dans les références [11, 37, 62]. L'extension de la définition (4.15) aux problèmes à plusieurs voies s'écrit

$$R_{\alpha\beta}(E) = \sum_i \frac{\tilde{\gamma}_{i,\alpha} \tilde{\gamma}_{i,\beta}}{E_i - E}, \quad (4.26)$$

où $\tilde{\gamma}_{i,\alpha}$ est la largeur réduite du pôle i dans la voie α . Dans la réaction ${}^6\text{Li}(p,\alpha){}^3\text{He}$ par exemple, les labels α et β prennent les valeurs 1 et 2 correspondant aux voies ${}^6\text{Li}+p$ et $\alpha+{}^3\text{He}$, et l'élément non-diagonal R_{12} se rapporte au transfert entre ces deux voies. On montre également que la matrice de collision (4.13) se généralise de la façon suivante

$$U(E) = (Z^*(E))^{-1} Z(E), \quad (4.27)$$

où un élément de la matrice Z s'écrit

$$Z_{\alpha\beta}(E) = I_\alpha(E) \delta_{\alpha\beta} - a \sqrt{k_\alpha k_\beta} R_{\alpha\beta}(E) I_\beta'(E), \quad (4.28)$$

et où nous avons omis l'indice ℓ pour alléger les notations.

En toute généralité, le passage des grandeurs "formelles" aux grandeurs "observées" est assez compliqué si le nombre de pôles est quelconque. Nous nous limitons ici au cas où $N = 1$, et aux systèmes à 2 voies (les indices α et β sont limités aux valeurs 1 et 2). En utilisant (4.27) et (4.28), nous avons

$$\begin{aligned} U_{11} &= \frac{I_1}{O_1} \frac{1 - R_{11}L_1^* - R_{22}L_2}{1 - R_{11}L_1 - R_{22}L_2}, \\ U_{22} &= \frac{I_2}{O_2} \frac{1 - R_{11}L_1 - R_{22}L_2^*}{1 - R_{11}L_1 - R_{22}L_2}, \\ U_{12} &= U_{21} = \frac{2ia\sqrt{k_1k_2}\sqrt{R_{11}R_{22}}}{O_1O_2(1 - R_{11}L_1 - R_{22}L_2)}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

où L_1 et L_2 représentent les constantes (2.22) dans les voies 1 et 2. L'énergie de résonance E_1^r est donc reliée à l'énergie du pôle E_1 par

$$E_1^r - E_1 + \tilde{\gamma}_1^2 S_1(E_1^r) + \tilde{\gamma}_2^2 S_2(E_1^r) = 0, \quad (4.30)$$

qui étend (4.24) aux systèmes à 2 voies. De la même manière, les largeurs réduites "observées" s'écrivent

$$\gamma_\alpha^2 = \tilde{\gamma}_\alpha^2 / \left(1 + \tilde{\gamma}_1^2 S_1'(E_1^r) + \tilde{\gamma}_2^2 S_2'(E_1^r) \right), \quad (4.31)$$

où S'_α est la dérivée du déplacement par rapport à l'énergie. Les relations (4.30) et (4.31) permettent donc de faire le lien entre les grandeurs expérimentales $(E_1^r, \gamma_1^2, \gamma_2^2)$ et les paramètres de la matrice R $(E_1, \tilde{\gamma}_1^2, \tilde{\gamma}_2^2)$. Ce formalisme est illustré aux paragraphes suivants.

4.3.2 Exemple: la réaction ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$

La réaction ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$ présente une résonance $3/2^+$ vers $E = 0.25$ MeV [64, 35]. Les moments orbitaux dans les voies d'entrée et de sortie valent donc $\ell_i = 0$ et $\ell_f = 2$, respectivement. La section efficace (2.37) est calculée avec la définition (4.27) de la matrice de collision, et les données expérimentales [35, 64] sont ajustées avec $a = 4$ fm et $a = 5$ fm.

Table 4.1 Paramètres de la matrice R pour la réaction ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$. Les largeurs réduites observées γ_d^2 et γ_p^2 correspondent à $\Gamma_d = 0.026$ MeV et $\Gamma_p = 0.19$ MeV. Les énergies sont exprimées en MeV.

	$a = 4$ fm	$a = 5$ fm
E_1^r	0.210	0.210
γ_d^2	0.147	0.098
γ_p^2	0.038	0.027
E_1	0.127	0.158
$\tilde{\gamma}_d^2$	0.710	0.111
$\tilde{\gamma}_p^2$	0.045	0.031

Les paramètres obtenus sont présentés à la table 4.1 et les facteurs S correspondant sont donnés à la figure 4.1. Pour les deux valeurs de a , nous avons pris les mêmes énergie et largeurs de la résonance ($E_1^r = 0.210$ MeV, $\Gamma_d = 0.026$ MeV, $\Gamma_p = 0.19$ MeV). La sensibilité du facteur S à énergie nulle est d'environ 10%. Au-delà de 500 keV, l'ajustement sous-estime les données expérimentales, ce qui provient du fait que des ondes partielles $\ell_i > 0$ devraient être introduites.

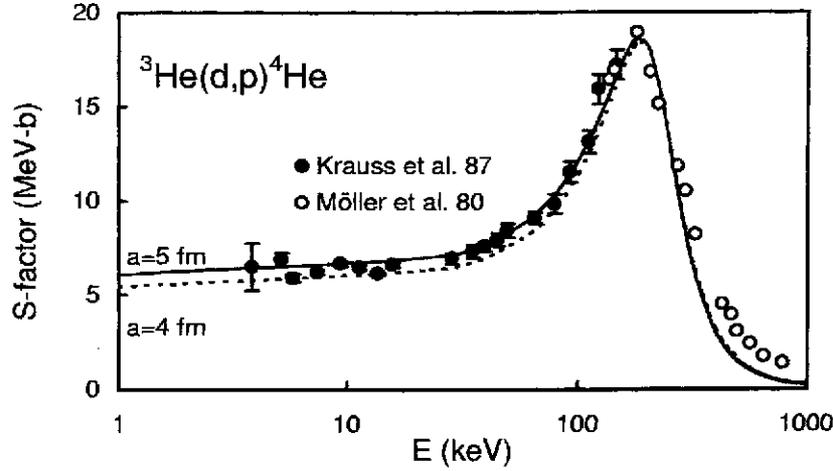


Figure 4.1: Ajustement en matrice R du facteur astrophysique ${}^3\text{He}(d,p){}^4\text{He}$. Les données expérimentales proviennent des références [35] et [64].

4.4 Sections efficaces de capture

4.4.1 Formalisme

Le traitement des sections efficaces de capture est plus difficile car il nécessite le calcul d'éléments de matrice des opérateurs électromagnétiques. Dans l'esprit de la matrice R , un élément de matrice évalué entre deux fonctions Ψ_i et Ψ_f se sépare en deux contributions

$$\langle \Psi_f | \mathcal{M}_\lambda^\sigma | \Psi_i \rangle = \langle \Psi_f | \mathcal{M}_\lambda^\sigma | \Psi_i \rangle_{int} + \langle \Psi_f | \mathcal{M}_\lambda^\sigma | \Psi_i \rangle_{ext}, \quad (4.32)$$

où \mathcal{M}_{int} et \mathcal{M}_{ext} représentent les termes intérieur et extérieur respectivement. En utilisant le développement (4.3) de la fonction d'onde de collision avec la définition (4.7), on obtient

$$\langle \Psi_f | \mathcal{M}_\lambda^\sigma | \Psi_i \rangle_{int} = i^\ell \exp(i(\delta_{HS} + \delta_C)) \left(\frac{\hbar^2 k}{\mu m_N} \right)^{1/2} \sum_{ij} (B^{-1})_{ij} \sqrt{\tilde{\Gamma}_i} \langle \Psi_f | \mathcal{M}_\lambda^\sigma | u_j \rangle, \quad (4.33)$$

où la matrice B est donnée en (4.9). Pour l'élément de matrice extérieur, nous utilisons les formes asymptotiques (2.14) et (2.15) des fonctions de collision, ce qui mène, pour les multipôles électriques, à

$$\langle \Psi_f | \mathcal{M}_\lambda^E | \Psi_i \rangle_{ext} = C_f F_E \int_a^\infty W_{-\eta_f, \ell_f + 1/2}(2k_f \rho) \left[I_{\ell_i}(k\rho) - U^{\ell_i} O_{\ell_i}(k\rho) \right] \rho^\lambda d\rho, \quad (4.34)$$

où C_f est l'amplitude de la fonction d'onde finale, et F_E le facteur géométrique déterminé en 3.3, dans le cadre du modèle de potentiel. Une expression similaire s'obtient pour les multipôles magnétiques. Dans la région extérieure, un élément de matrice se calcule comme dans le modèle de potentiel, avec les formes asymptotiques des fonctions d'onde.

Dans (4.33), nous pouvons définir la probabilité de transition du pôle i vers l'état final

$$B(\sigma\lambda, i \rightarrow f) = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} |\langle \Psi_f | \mathcal{M}_\lambda^\sigma | u_i \rangle|^2, \quad (4.35)$$

qui correspond à la définition standard de la probabilité de transition entre deux états liés. La largeur γ associée à cette transition s'écrit

$$\tilde{\Gamma}_{\gamma, i} = \frac{8\pi(\lambda + 1)}{\hbar\lambda(2\lambda + 1)!!^2} k_\gamma^{2\lambda + 1} B(\sigma\lambda, i \rightarrow f), \quad (4.36)$$

k_γ étant le nombre d'onde du photon émis. Pour une transition donnée, nous pouvons donc écrire la section efficace de capture sous la forme

$$\sigma_c = \frac{\pi}{k^2} \frac{2J_i + 1}{(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)} |U_\gamma|^2, \quad (4.37)$$

où U_γ est défini par

$$U_\gamma = i^\ell \exp(i(\delta_{HS} + \delta_C)) \sum_{ij} (B^{-1})_{ij} \sqrt{\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_{\gamma,j}} + C_f F_E \sqrt{\frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} \frac{8\pi(\lambda + 1)k_\gamma^{2\lambda+1}}{\hbar v \lambda}} \\ \times \int_a^\infty W_{-\eta_f, \ell_f + 1/2}(2k_f \rho) [I_{\ell_i}(k\rho) - U^{\ell_i} O_{\ell_i}(k\rho)] \rho^\lambda d\rho. \quad (4.38)$$

La définition (4.37) permet une écriture similaire pour les sections efficaces de capture et de transfert. Dans (4.38), le premier terme correspond à la contribution interne; le second terme est la contribution externe, parfois appelée "capture directe". Remarquons que ces deux contributions ne sont pas indépendantes: la matrice de collision U^{ℓ_i} apparaissant dans le second terme dépend des largeurs $\tilde{\Gamma}_i$ par l'intermédiaire de (4.13).

Il est possible de décomposer (4.38) en utilisant la définition (4.13) de la matrice de collision [65]. De cette façon, le terme extérieur ne dépend plus de la matrice de collision, mais les largeurs γ du terme intérieur sont remplacées par des largeurs γ effectives qui tiennent compte de termes correctifs. Cette technique présente l'avantage de faire disparaître la matrice de collision de la contribution extérieure, mais introduit des largeurs complexes, et dont la phase varie d'un pôle à l'autre. Nous ne développerons pas cette approche ici.

Dans beaucoup d'applications, un des deux termes de (4.38) domine nettement l'autre. Si la capture s'effectue vers un état fortement lié, k_f est grand, et la contribution extérieure peut être négligée. On aboutit alors à l'expression

$$\sigma_c \approx \frac{\pi}{k^2} \frac{2J_i + 1}{(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)} \left| \sum_{ij} (B^{-1})_{ij} \sqrt{\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_{\gamma,j}} \right|^2, \quad (4.39)$$

dont découle la formule de Breit-Wigner pour la section efficace de capture

$$\sigma_c \approx \frac{\pi}{k^2} \frac{2J_i + 1}{(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)} \frac{\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_\gamma}{(E - E_1)^2 + L^2 \tilde{\gamma}^2}, \quad (4.40)$$

obtenue en supposant $N = 1$. Si, par contre, k_f est petit, la contribution extérieure de (4.38) est dominante, et la section efficace se réduit à l'approximation extranucléaire discutée en 3.4.4.

4.4.2 Lien entre grandeurs "observées" et "calculées"

Comme nous l'avons vu pour les sections efficaces élastiques, les paramètres de la matrice R ne sont pas rigoureusement égaux aux grandeurs observées. Si le nombre de pôles est supérieur à 1, le lien entre les grandeurs "observées" et "calculées" est relativement complexe [63]. Dans le cas où $N = 1$, les grandeurs observées sont définies par la paramétrisation

$$\sigma_c \approx \frac{\pi}{k^2} \frac{2J_i + 1}{(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)} \frac{\Gamma_1 \Gamma_{\gamma,1}}{(E - E_1^r)^2 + \Gamma_1^2/4}, \quad (4.41)$$

Les commentaires présentés à la fin du §4.2.2 restent valables ici; la différence entre les grandeurs observées et calculées provient de différentes définitions des paramètres utilisés dans l'approximation de Breit-Wigner. L'énergie E_1^r et la largeur en particules Γ sont données en (4.24); la largeur γ observée Γ_γ s'obtient par

$$\Gamma_{\gamma,1} = \tilde{\Gamma}_{\gamma,1} / (1 + \tilde{\gamma}_1^2 S'(E_1^r)). \quad (4.42)$$

Remarquons que la double somme se trouvant dans (4.38) et (4.39) peut s'écrire d'une autre manière. A l'appendice B, nous montrons que, si l'on néglige la composante extérieure, la section efficace de capture (4.39) peut s'écrire

$$\sigma_c = \frac{\pi}{k^2} \frac{2J_i + 1}{(2I_1 + 1)(2I_2 + 1)} \left| \frac{\sum_i \sqrt{\tilde{\Gamma}_i} \tilde{\Gamma}_{\gamma,i} / (E_i - E)}{1 - LR(E)} \right|^2. \quad (4.43)$$

Cette expression fait donc apparaître une somme simple, et introduit explicitement la matrice R de l'onde initiale. Remarquons que le signe des éléments de matrice (4.33) peut être aussi bien négatif que positif. En conséquence, les termes $\sqrt{\tilde{\Gamma}_{\gamma,i}}$ apparaissant dans (4.39) et (4.43) doivent être compris avec leur signe. Ce signe détermine le caractère constructif ou destructif de l'interférence entre les pôles.

4.4.3 Exemples

Comme nous l'avons fait au §4.3, nous appliquons la méthode de la matrice R aux réactions ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$, ${}^3\text{He}(\alpha,\gamma){}^7\text{Be}$ et ${}^{12}\text{C}(p,\gamma){}^{13}\text{N}$ qui constituent des exemples typiques de réactions de capture à basse énergie. A nouveau, le but de ce paragraphe est d'illustrer la méthode, sans essayer d'obtenir le meilleur ajustement possible.

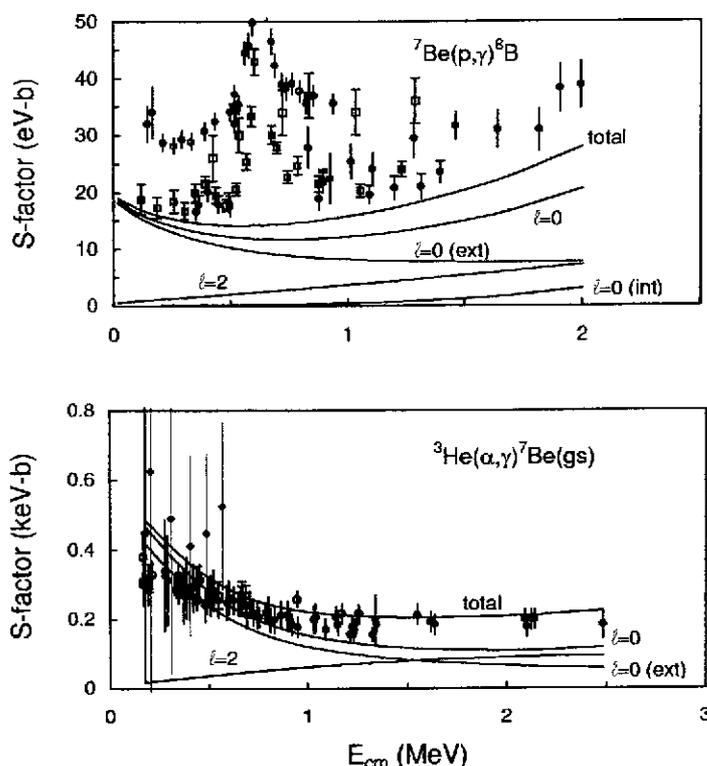


Figure 4.2: Ajustement en matrice R des facteurs astrophysiques ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ et ${}^3\text{He}(\alpha,\gamma){}^7\text{Be}$ (état fondamental $3/2^-$ uniquement).

Discutons d'abord les réactions non résonnantes ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ et ${}^3\text{He}(\alpha,\gamma){}^7\text{Be}$ présentées à la figure 4.2. Les paramètres sont donnés à la table 4.2. Pour la réaction ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$, nous séparons les composantes intérieures et extérieures. La composante extérieure, équivalente à l'approximation extranucléaire (voir §3.4.4), reproduit bien les données expérimentales en-dessous de 0.4 MeV, mais sous-estime nettement au-delà de 1 MeV. Dans cette zone d'énergie, l'interaction à courte portée ne peut plus être négligée. Celle-ci est simulée par l'introduction d'un pôle, dont l'énergie est choisie égale à 5 MeV. Avec

Table 4.2 Paramètres de la matrice R pour les réactions ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ et ${}^3\text{He}(\alpha,\gamma){}^7\text{Be}$. Le rayon vaut $a = 5$ fm.

	${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$	${}^3\text{He}(\alpha,\gamma){}^7\text{Be}$
$J_f^{\pi_f}$	2^+	$3/2^-$
E_f (MeV)	-0.137	-1.54
C_f (fm $^{-1/2}$)	0.75	6.0
<u>Paramètres observés</u>		
E_1^* (MeV)	5.0	4.0
γ_1^2 (MeV)	0.49	0.02
$\Gamma_{\gamma,1}$ (MeV)	6.0×10^{-5}	8.0×10^{-5}
<u>Paramètres calculés</u>		
E_1 (MeV)	4.97	4.0
$\tilde{\gamma}_1^2$ (MeV)	0.49	0.02
$\tilde{\Gamma}_{\gamma,1}$ (MeV)	6.03×10^{-5}	8.0×10^{-5}

les paramètres de la table 4.2, l'effet de ce pôle est important et clairement visible. En ajoutant la composante $\ell = 2$ (purement externe car la contribution interne est négligeable), on obtient un accord raisonnable avec l'expérience. Rappelons encore que les paramètres choisis ici sont illustratifs, et que l'ajustement pourrait encore être amélioré en optimisant ces paramètres.

Pour la réactions ${}^3\text{He}(\alpha,\gamma){}^7\text{Be}$, nous ne considérons que les transitions vers l'état fondamental de ${}^7\text{Be}$. Les mêmes conclusions que précédemment peuvent être obtenues, mais il est possible ici d'ajuster le facteur S avec un terme extérieur uniquement. L'onde partielle $\ell = 2$ constitue la majeure partie de la section efficace au-delà de 1.5 MeV. L'introduction d'un pôle de haute énergie (voir table 4.2) permet de modifier la dépendance en énergie. Cet exemple, ainsi que la réaction ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$, montrent que la méthode de la matrice R peut parfaitement être appliquée à des réactions non résonnantes. Dans ce cas, un pôle situé à haute énergie simule l'effet de la région intérieure.

Table 4.3 Paramètres (en MeV) de la matrice R pour la réaction ${}^{12}\text{C}(p,\gamma){}^{13}\text{N}$. Le rayon vaut $a = 6$ fm.

	$N = 1$	$N = 1$ (opt)	$N = 2$
<u>Paramètres observés</u>			
E^*	0.420	0.416	0.420, 3.0
Γ_p	0.033	0.032	0.033, 1.8
Γ_γ	5.0×10^{-7}	9.0×10^{-7}	5.0×10^{-7} , 8.0×10^{-5}
<u>Paramètres calculés</u>			
E_1	-0.14	-0.15	-0.31, 2.9
$\tilde{\gamma}^2$	0.60	0.61	0.92, 0.51
$\tilde{\Gamma}_\gamma$	8.2×10^{-7}	1.5×10^{-6}	2.4×10^{-6} , 8.0×10^{-5}

La réaction résonnante ${}^{12}\text{C}(p,\gamma){}^{13}\text{N}$ est illustrée à la figure 4.3; les paramètres sont donnés à la table 4.3. Dans un premier temps, nous avons négligé la composante extérieure ($C_f = 0$). De cette manière,

le facteur astrophysique expérimental ne peut pas être reproduit avec précision par l'approximation de Breit-Wigner ($N = 1$) en utilisant les paramètres expérimentaux de la résonance $1/2^+$ à 0.42 MeV. Si l'accord est raisonnable au voisinage de la résonance, le calcul sous-estime d'un facteur 2 les données expérimentales à basse énergie. L'ajustement peut être amélioré en optimisant les paramètres (ligne interrompue à la figure 4.2), mais la largeur du pic est alors trop grande. Une amélioration possible consiste à introduire un second pôle dans le développement de la matrice R (courbe $N = 2$ à la figure 4.3). Les paramètres de ce second pôle sont donnés à la table 4.3. On constate une amélioration sensible de l'ajustement.

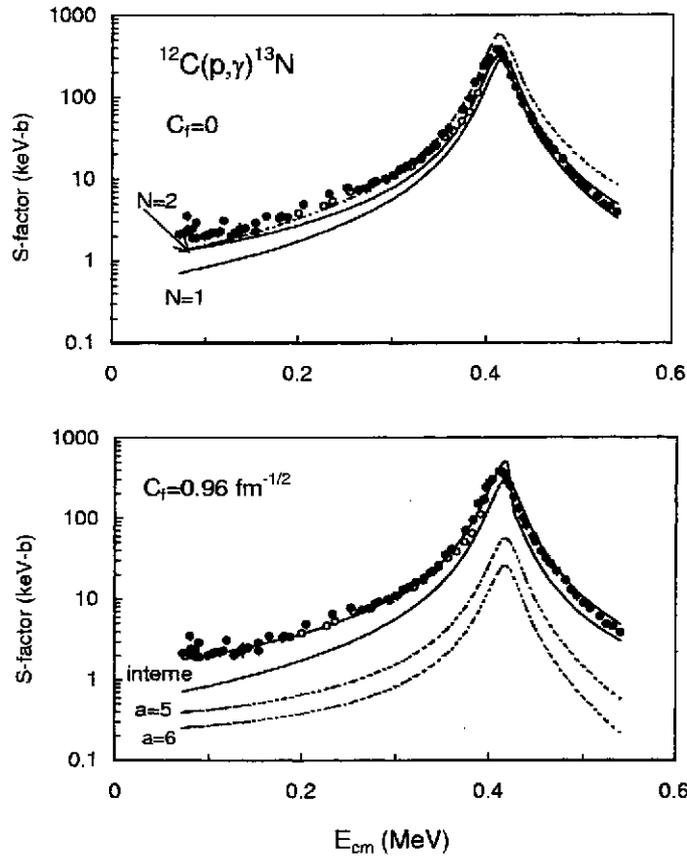


Figure 4.3: Ajustement en matrice R du facteur astrophysique $^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$ (voir texte).

Il est également possible d'obtenir un excellent ajustement des données en introduisant une composante extérieure ($C_f = 0.96 \text{ fm}^{-1/2}$). Au bas de la figure 4.3, nous avons repris l'approximation de Breit-Wigner ($N = 1$) à laquelle nous avons ajouté le terme extérieur. La contribution extérieure est illustrée en traits interrompus pour $a = 5 \text{ fm}$ et $a = 6 \text{ fm}$. Les composantes intérieures et le facteur astrophysique total sont similaires pour ces deux choix de frontière. Cette réaction illustre bien la discussion du §2.7, où nous avons attiré l'attention sur une certaine confusion qui existe dans la littérature quant au traitement des réactions résonnantes. La section efficace peut s'écrire

$$\sigma = |\sqrt{\sigma_{int}} \pm \sqrt{\sigma_{ext}}|^2 \quad (4.44)$$

où σ_{int} et σ_{ext} représentent les termes intérieur et extérieur respectivement. La phase entre ces deux amplitudes est toujours réelle; elle est positive dans le cas présent. La confusion mentionnée plus haut provient du fait que beaucoup d'auteurs traitent σ_{ext} comme étant une composante non-résonnante, calculée dans le modèle de potentiel par exemple. Cette procédure n'est pas justifiée du fait que σ_{ext} dépend implicitement de la région intérieure par l'intermédiaire du déphasage. Le terme σ_{ext} , bien

que ne représentant qu'une petite partie de la section efficace totale, présente également une structure résonnante. La dénomination "capture directe" pour σ_{ext} est donc mal adaptée; il faudrait plutôt parler de "correction par rapport à l'approximation de Breit-Wigner" puisque σ_{ext} n'est pas un terme non-résonnant. Il est donc capital d'utiliser des contributions interne et externe cohérentes, car la décomposition dépend du modèle utilisé (ceci est bien illustré par le fait que les contributions extérieures pour $a = 5$ fm et $a = 6$ fm diffèrent d'un facteur 2, malgré que le résultat final soit peu dépendant de a).

5 Méthodes indirectes

5.1 Dissociation coulombienne

La réaction de photodésintégration



représente la réaction inverse de la réaction de capture



et leurs sections efficaces (σ_D et σ_C respectivement) sont reliées par le théorème de réciprocité

$$\sigma_D = \frac{(2I_a + 1)(2I_b + 1)}{2(2I_c + 1)} \frac{k^2}{k_\gamma^2} \sigma_C, \quad (5.3)$$

où I_i représente le spin du noyau i , k est le nombre d'onde associé au système $a + b$, et k_γ le nombre d'onde du photon émis. Dans pratiquement toutes les applications, la longueur d'onde du photon est beaucoup plus grande que celle du système $a + b$, ce qui implique

$$\frac{k^2}{k_\gamma^2} \gg 1, \quad (5.4)$$

et la section efficace de photodésintégration est nettement plus grande que la section efficace de capture. Cette méthode permet donc de compenser l'extrême petitesse des sections efficaces d'intérêt astrophysique.

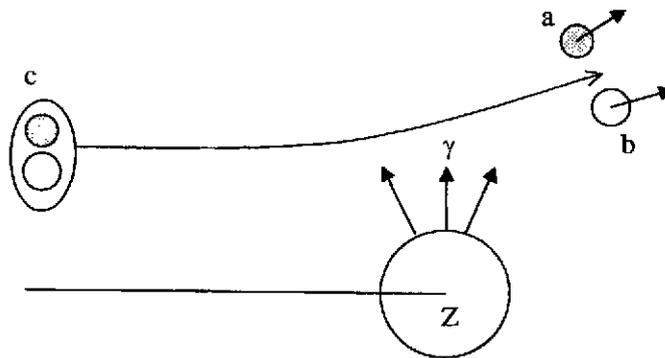


Figure 5.1: Schéma de la réaction de photodissociation.

Dans les expériences de dissociation coulombienne [66, 67], le noyau c est envoyé sur une cible lourde produisant un champ intense de photons virtuels (voir figure 5.1). En supposant que l'excitation du projectile est purement coulombienne, la section efficace d'excitation s'écrit

$$\frac{d\sigma}{d\Omega dE_\gamma} = \frac{1}{E_\gamma} \frac{dn}{d\Omega} \sigma_D \quad (5.5)$$

où Ω est l'angle de déflexion et $dn/d\Omega$ est le nombre de photons virtuels. Cette grandeur ne dépend pas de la structure interne du projectile, mais de la cinématique du mouvement relatif.

La validité de la formule (5.5) dépend essentiellement de deux conditions: (i) L'excitation du projectile c est purement coulombienne et les effets nucléaires sont négligeables. (ii) Les effets de "post-accélération", c'est-à-dire une variation de l'énergie relative des fragments a et b après la collision, sont négligeables.

Ces conditions sont en général remplies lorsque l'énergie du faisceau incident est élevée, et l'angle de diffusion petit. Les premières expériences ont été effectuées sur la dissociation ${}^6\text{Li} \rightarrow \alpha + d$ à 156 MeV [68]. Elles visaient essentiellement à tester la précision de la méthode. Plus récemment, la dissociation coulombienne a été utilisée avec des faisceaux radioactifs, notamment ${}^{14}\text{O} \rightarrow {}^{13}\text{N} + p$ [69, 70] et ${}^8\text{B} \rightarrow {}^7\text{Be} + p$ [71, 72]. Pour cette dernière réaction, on peut montrer que l'influence de la contribution $E2$, négligeable dans la section efficace de capture [73], est fortement amplifiée dans le processus de dissociation. Dans ce cas, la section efficace d'excitation coulombienne (5.5) doit prendre en compte l'interférence entre les multipolarités $E1$ et $E2$.

5.2 Méthode de constante de normalisation asymptotique

Nous avons vu au §3.4.3 que, dans une réaction de capture vers un état faiblement lié, la contribution aux éléments de matrice de transition provient essentiellement du comportement asymptotique des fonctions d'onde. Un cas typique est la réaction ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$ où l'état fondamental de ${}^8\text{B}$ est lié par 0.137 MeV. La figure 3.2 montre clairement que la contribution des petites interdistances est négligeable dans les éléments de matrice.

Dans les conditions de capture extérieure, la section efficace vers un état final f peut s'écrire sous la forme

$$\sigma_f(E) \approx |C_f|^2 \tilde{\sigma}_f(E), \quad (5.6)$$

où C_f est la constante de normalisation asymptotique (ANC), qui représente l'amplitude de la fonction d'onde finale dans la région extérieure, et $\tilde{\sigma}_f(E)$ est une fonction indépendante du modèle. L'idée de la méthode ANC est de réaliser une réaction de transfert dans laquelle un nucléon du projectile est transféré vers la cible. Un exemple est la réaction ${}^7\text{Be}({}^3\text{He},d){}^8\text{B}$ utilisée pour déterminer la constante ANC du ${}^8\text{B}$ [74]. Dans le formalisme DWBA [74, 54], la section efficace de transfert est directement proportionnelle à $|C_f|^2$. Cette méthode indirecte semble donc à première vue idéale puisque les sections efficaces de transfert sont en général assez élevées et peuvent être obtenues expérimentalement avec une excellente précision. Le problème de la méthode ANC est que le formalisme DWBA est basé sur différentes approximations, et que les sections efficaces dépendent de potentiels dans les voies d'entrée et de sortie (dans notre exemple, les voies ${}^7\text{Be}+{}^3\text{He}$ et ${}^8\text{B}+d$) qui sont en général mal connus. La méthode semble donner des résultats qui dépendent peu de la réaction de transfert utilisée [75], mais des calculs récents indiquent que, pour la réaction ${}^7\text{Be}(p,\gamma){}^8\text{B}$, l'incertitude sur les potentiels optiques induit une erreur de l'ordre de 15% sur la constante $|C_f|^2$ [54].

6 Les taux de réaction

6.1 Introduction

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le taux de réaction à la température T s'écrit

$$N_A \langle \sigma v \rangle = N_A \left(\frac{8}{\pi \mu m_N (k_B T)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \int S(E) \exp(-2\pi\eta - E/k_B T) dE, \quad (6.1)$$

où nous avons fait apparaître le facteur astrophysique $S(E)$. Le calcul du taux s'effectue différemment selon que le facteur astrophysique est résonnant ou non-résonnant. Chaque cas est traité dans les paragraphes suivants.

Remarquons que nous supposons ici que la réaction est non-thermalisée ou, en d'autres termes, que seul l'état fondamental des noyaux en collision contribue à la section efficace. Cette approximation est très bonne pour les noyaux légers et les températures peu élevées [14]. Si un des noyaux présente un état excité de basse énergie (comme le ^{19}F par exemple), la probabilité que cet état soit peuplé n'est pas négligeable, et le taux de réaction doit tenir compte de cet effet.

6.2 Taux de réaction non-résonnant

Dans une réaction non-résonnante, le facteur astrophysique varie lentement avec l'énergie. Dans ces conditions, des approximations assez précises peuvent être effectuées pour évaluer l'intégrale (6.1). On montre [2] facilement que, en bonne approximation

$$\exp(-2\pi\eta - E/k_B T) \approx \exp(-3E_0/k_B T) \exp - \left(\frac{E - E_0}{\Delta E_0/2} \right)^2, \quad (6.2)$$

où E_0 et ΔE_0 ont été définis en 2.1. Ces grandeurs définissent le pic de Gamow, dans lequel la section efficace doit être connue. Rappelons qu'elles dépendent fortement de la température. En supposant que $S(E) \approx S(E_0)$ au voisinage de E_0 , l'intégrale (6.1) peut être effectuée en utilisant (6.2). On obtient

$$N_A \langle \sigma v \rangle \approx N_A \left(\frac{32E_0}{3\mu m_N (k_B T)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(-3E_0/k_B T) S(E_0). \quad (6.3)$$

Le taux de réaction varie donc rapidement avec la température. Un exemple est donné à la figure 6.1 avec la réaction $^3\text{H}(\alpha, \gamma)^7\text{Li}$ [14].

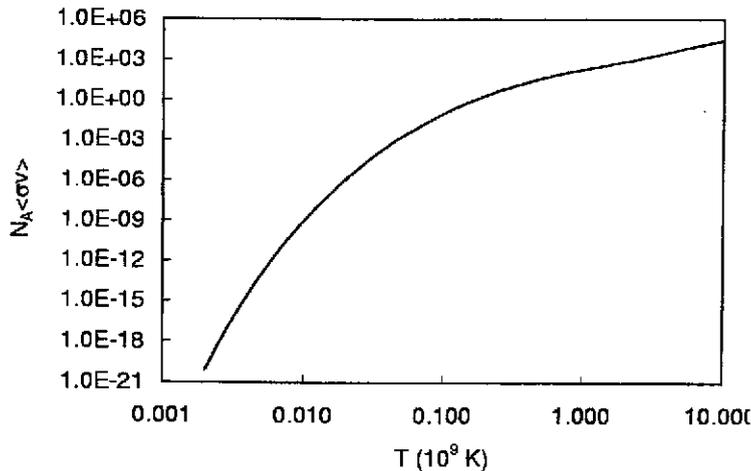


Figure 6.1: Taux de réaction $^3\text{H}(\alpha, \gamma)^7\text{Li}$ [14].

La formule (6.3) contient essentiellement deux approximations:

- Le facteur astrophysique est constant au voisinage de E_0 . Si on suppose une variation linéaire, on montre [2] qu'il suffit de remplacer $S(E_0)$ par $S(E_0 + 5k_B T/6)$ dans (6.3).
- L'approximation gaussienne (6.2) est utilisée. Une intégrale plus précise [2] de (6.2) conduit au facteur additionnel $(1 + 5k_B T/36E_0)$.

Le taux de réaction (6.1) s'écrit donc, en améliorant la précision de (6.3)

$$N_A \langle \sigma v \rangle \approx N_A \left(\frac{32E_0}{3\mu m_N (k_B T)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(-\frac{3E_0}{k_B T} \right) S \left(E_0 + \frac{5}{6} k_B T \right) \left(1 + \frac{5k_B T}{36E_0} \right). \quad (6.4)$$

Les différences entre (6.3) et (6.4) sont en général petites, mais peuvent devenir significatives à hautes températures. Certaines tables de taux de réaction [14] utilisent une approche plus analytique pour paramétrer le taux de réaction. Supposons un développement au second ordre du facteur astrophysique

$$S(E) \approx S_0 + S'_0 E + \frac{1}{2} S''_0 E^2. \quad (6.5)$$

En utilisant l'approximation (6.2), il est possible d'effectuer exactement l'intégrale (6.1). Le taux de réaction s'écrit [14]

$$N_A \langle \sigma v \rangle \approx N_A \left(\frac{32E_0}{3\mu m_N (k_B T)^2} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{3E_0}{k_B T}\right) S_{eff}. \quad (6.6)$$

où S_{eff} est donné par

$$S_{eff} = S_0 \left(1 + \frac{5k_B T}{36E_0}\right) + S'_0 \left(E_0 + \frac{35}{36} k_B T\right) + \frac{1}{2} S''_0 E_0 \left(E_0 + \frac{89}{36} k_B T\right). \quad (6.7)$$

C'est l'expression analytique utilisée par Fowler *et al.* [14]. Cette expression conduit à un développement en puissances de $T^{1/3}$, jusqu'au terme $T^{5/3}$; elle permet de déterminer le taux de réaction à partir des propriétés du facteur S à énergie nulle.

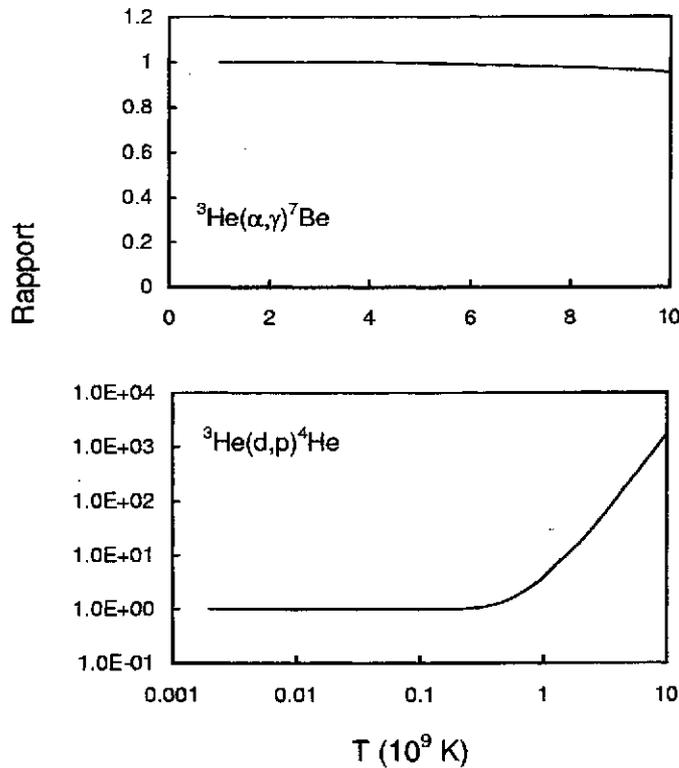


Figure 6.2: Rapport entre le taux de réaction exact et l'approximation (6.7).

L'équation (6.7) fait l'hypothèse que le facteur astrophysique peut être bien approché par un polynôme du second degré. A la figure 6.2, nous présentons le rapport entre le taux de réaction exact (calculé numériquement) et le taux approché (calculé avec (6.7)) pour les réactions ${}^3\text{He}(\alpha, \gamma){}^7\text{Be}$ et ${}^3\text{He}(\text{d}, \text{p}){}^4\text{He}$. La première réaction est purement non-résonnante et le facteur astrophysique est bien approché par un polynôme de degré 2 dans un grand domaine d'énergie. La formule (6.7) donne donc une excellente approximation. Par contre, le facteur astrophysique ${}^3\text{He}(\text{d}, \text{p}){}^4\text{He}$ présente une résonance

large à $E_{cm} = 0.25$ MeV (voir §4.3.2). A basse température (jusque $T_9 \approx 1$), les valeurs de E_0 sont dans un domaine d'énergie où l'approximation polynomiale est très bonne. Par contre, pour $T_9 \geq 1$, les valeurs de E_0 se situent au voisinage de la résonance, et l'approximation n'est plus valable. La figure 6.2 montre que des erreurs très importantes peuvent apparaître en utilisant (6.7) à hautes températures.

6.3 Taux de réaction résonnant

Lorsque le facteur astrophysique présente une forme de Breit-Wigner, la formule générale (6.1) reste bien entendu valable. Il faut cependant prendre en compte le fait que $S(E)$ ne varie pas lentement au voisinage de l'énergie de résonance. Lorsque l'on analyse l'intégrand de (6.1) pour une résonance, on trouve qu'il présente toujours deux maxima: l'un à l'énergie de la résonance et l'autre à l'énergie du pic de Gamow. Cette situation est illustrée à la figure 6.3 avec la réaction $^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$ entre $T_9 = 0.2$ et $T_9 = 0.3$. On voit clairement que, à $E = 0.42$ MeV (l'énergie de la résonance), l'emplacement du pic est indépendant de la température. Il existe un deuxième maximum correspondant au pic de Gamow, et qui varie sensiblement avec la température.

Le taux de réaction résonnant peut donc se diviser en deux termes

$$N_A \langle \sigma v \rangle \approx N_A \langle \sigma v \rangle_R + N_A \langle \sigma v \rangle_T, \quad (6.8)$$

où $N_A \langle \sigma v \rangle_R$ correspond au maximum à $E = E_R$. Pour une résonance étroite, on a

$$N_A \langle \sigma v \rangle_R = N_A \left(\frac{2\pi}{\mu m_N k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \hbar^2 \omega \gamma \exp\left(-\frac{E_R}{k_B T}\right), \quad (6.9)$$

où $\omega \gamma$ est appelé la force de résonance ("resonance strength") et vaut

$$\omega \gamma = \frac{2J+1}{(2I_1+1)(2I_2+1)} \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}, \quad (6.10)$$

J étant le spin de la résonance et (Γ_1, Γ_2) les largeurs dans les voies d'entrée et de sortie. Dans une réaction (p,γ) à basse énergie, on a généralement

$$\Gamma_\gamma \ll \Gamma_p, \quad (6.11)$$

et

$$\omega \gamma \approx \frac{2J+1}{(2I_1+1)(2I_2+1)} \Gamma_\gamma. \quad (6.12)$$

La force de résonance est donc proportionnelle à la plus petite des largeurs partielles.

Le second maximum de l'intégrand (6.1) conduit au terme appelé "queue de résonance" ("resonance tail") dont la forme analytique est identique à celle du taux non-résonnant (6.4) en utilisant une forme de Breit-Wigner pour $S(E)$. On a donc

$$N_A \langle \sigma v \rangle_T \approx N_A \left(\frac{32E_0}{3\mu m_N (k_B T)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{3E_0}{k_B T}\right) S_R(E_0 + 5k_B T/6) \left(1 + \frac{5k_B T}{36E_0}\right), \quad (6.13)$$

où $S_R(E)$ est le facteur astrophysique défini à l'approximation de Breit-Wigner.

Comme on le constate à la figure 6.3, les amplitudes relatives des deux contributions varient avec la température. Dans la pratique, excepté dans une zone de température assez limitée (correspondant à la température au $E_0 \approx E_R$), un seul terme contribue réellement.

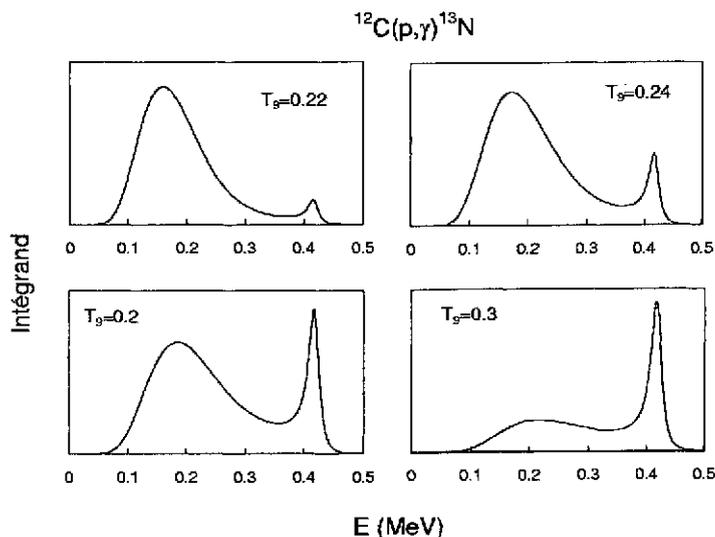


Figure 6.3: *Intégrand de (6.1) pour la réaction $^{12}\text{C}(p,\gamma)^{13}\text{N}$ à différentes températures.*

7 Conclusions

Dans ce travail, nous avons essayé de donner une vue d'ensemble des problèmes théoriques liés à l'astrophysique nucléaire. La caractéristique principale des réactions entre particules chargées est qu'elles se produisent à des énergies très basses à l'échelle nucléaire et que les sections efficaces sont extrêmement petites. Une autre caractéristique importante est qu'il est pratiquement impossible d'établir des systématiques. Dans les noyaux légers, chaque réaction a ses propres particularités et difficultés. Ceci est vrai aussi bien du point de vue théorique que du point de vue expérimental.

Il est néanmoins possible d'établir une sorte de hiérarchie parmi les réactions d'intérêt astrophysique. Les réactions de transfert, d'origine nucléaire, sont caractérisées par des sections efficaces plus grandes que les réactions de capture, d'origine électromagnétique. Par ailleurs, le fait qu'une réaction soit résonnante ou non-résonnante influence très fort la section efficace.

Nous avons passé en revue différents modèles fréquemment utilisés en astrophysique nucléaire. A l'heure actuelle, et vu l'importance croissante des expériences impliquant des faisceaux radioactifs, les méthodes indirectes connaissent de plus en plus de succès puisqu'elles permettent de contourner le problème majeur des petites sections efficaces. Un travail considérable a été effectué depuis une vingtaine d'années pour étudier les réactions d'intérêt astrophysique. Si les réactions impliquant des noyaux légers semblent actuellement suffisamment bien connues, il reste quelques cas, tels $^{12}\text{C}(\alpha,\gamma)^{16}\text{O}$ qui sont loin d'être résolus et qui nécessitent encore beaucoup d'effort pour arriver à la précision souhaitée. Dans les domaines de la nucléosynthèse des noyaux lourds, des problèmes supplémentaires liés à la densité de niveaux apparaissent. Une meilleure connaissance de ces sections efficaces constitue donc un challenge pour les années futures.

Je tiens à remercier Daniel Baye pour les innombrables discussions que nous avons eues sur le sujet, ainsi que Carmen Angulo, Marianne Dufour et Pierre Leleux pour leurs commentaires sur ce texte.

Appendice A

Nous donnons ici les formules nécessaires au modèle de potentiel pour des systèmes composés de noyaux dont le spin est quelconque. Dans le système de coordonnées défini en 3.1, les opérateurs électromagnétiques s'écrivent

$$\mathcal{M}_{\lambda\mu}^{\sigma} = \mathcal{M}_{\lambda\mu}^{\sigma}(\rho) + \mathcal{M}_{\lambda\mu}^{\sigma}(\xi_1^i) + \mathcal{M}_{\lambda\mu}^{\sigma}(\xi_2^j), \quad (\text{A.1})$$

où l'on fait apparaître un terme relatif, et les moments internes des noyaux. Cette formule est rigoureuse pour $\lambda \leq 2$. Pour les multipôles d'ordre supérieur, des termes mixtes peuvent contribuer.

Nous devons calculer les éléments de matrice de ces trois opérateurs entre les fonctions (3.5) du modèle de potentiel. En utilisant les propriétés des opérateurs tensoriels irréductibles, on obtient pour le terme radial des multipôles électriques

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\ell_f I_f}^{J_f \pi_f} || \mathcal{M}_{\lambda}^E(\rho) || \Psi_{\ell_i I_i}^{J_i \pi_i} \rangle &= e \left(Z_1 \left(\frac{A_2}{A} \right)^{\lambda} + Z_2 \left(-\frac{A_1}{A} \right)^{\lambda} \right) (-1)^{\ell_i + J_i + I_i} \delta_{I_i I_f} \\ &\times [(2J_i + 1)(2\ell_f + 1)]^{1/2} \langle Y_{\ell_f} || Y_{\lambda} || Y_{\ell_i} \rangle \\ &\times \left\{ \begin{matrix} J_i & J_f & \lambda \\ \ell_f & \ell_i & I_i \end{matrix} \right\} \int_0^{\infty} g_{\ell_f I_f}^{J_f \pi_f}(\rho) \rho^{\lambda} g_{\ell_i I_i}^{J_i \pi_i}(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où l'élément de matrice réduit entre harmoniques sphériques vaut

$$\langle Y_{\ell_f} || Y_{\lambda} || Y_{\ell_i} \rangle = \langle \ell_i 0 \lambda 0 | \ell_f 0 \rangle \left[\frac{(2\lambda + 1)(2\ell_i + 1)}{4\pi(2\ell_f + 1)} \right]^{1/2}. \quad (\text{A.3})$$

Les éléments de matrice impliquant les moments internes s'obtiennent par

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\ell_f I_f}^{J_f \pi_f} || \mathcal{M}_{\lambda}^E(\xi_1^i) || \Psi_{\ell_i I_i}^{J_i \pi_i} \rangle &= \delta_{\ell_i \ell_f} [(2J_i + 1)(2I_1 + 1)(2I_i + 1)(2I_f + 1)]^{1/2} \\ &\times (-1)^{I_1 + I_2 - J_f - \ell_f} \left\{ \begin{matrix} I_1 & I_2 & I_f \\ I_i & \lambda & I_i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J_i & J_f & \lambda \\ I_f & I_i & \ell_f \end{matrix} \right\} \\ &\times \langle \phi^{I_1} || \mathcal{M}_{\lambda}^E(\xi_1^i) || \phi^{I_1} \rangle \int_0^{\infty} g_{\ell_f I_f}^{J_f \pi_f}(\rho) g_{\ell_i I_i}^{J_i \pi_i}(\rho) d\rho. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

L'élément de matrice pour le noyau 2 s'obtient en permutant I_1 et I_2 . Pour $\lambda = 2$, l'élément de matrice fait donc apparaître le moment quadrupolaire $Q(1)$. Celui-ci est défini par

$$Q(1) = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle I_1 I_1 2 0 | I_1 I_1 \rangle \langle \phi^{I_1} || \mathcal{M}_2^E(\xi_1^i) || \phi^{I_1} \rangle, \quad (\text{A.5})$$

qui n'est différent de zéro que si $I_1 \geq 1$.

Pour les multipôles magnétiques $M1$, nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\ell_f I_f}^{J_f \pi_f} || \mathcal{M}_1^M(\rho) || \Psi_{\ell_i I_i}^{J_i \pi_i} \rangle &= \mu_N \frac{Z_1 A_2^2 + Z_2 A_1^2}{A_1 A_2 (A_1 + A_2)} [3\ell_i(\ell_i + 1)(2\ell_i + 1)(2J_i + 1)/4\pi]^{1/2} \delta_{\ell_i \ell_f} \delta_{I_i I_f} \\ &\times (-1)^{\ell_i + J_i + I_i + 1} \left\{ \begin{matrix} J_i & J_f & 1 \\ \ell_i & \ell_f & I_i \end{matrix} \right\} \int_0^{\infty} g_{\ell_f I_f}^{J_f \pi_f}(\rho) g_{\ell_i I_i}^{J_i \pi_i}(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

et

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{\ell_f I_f}^{J_f \pi_f} || \mathcal{M}_1^M(\xi_1^i) || \Psi_{\ell_i I_i}^{J_i \pi_i} \rangle &= \delta_{\ell_i \ell_f} [(2J_i + 1)(2I_1 + 1)(2I_i + 1)(2I_f + 1)]^{1/2} \\ &\times (-1)^{I_1 + I_2 - J_f - \ell_f} \left\{ \begin{matrix} I_1 & I_2 & I_f \\ I_i & 1 & I_i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J_i & J_f & 1 \\ I_f & I_i & \ell_f \end{matrix} \right\} \\ &\times \langle \phi^{I_1} || \mathcal{M}_1^M(\xi_1^i) || \phi^{I_1} \rangle \int_0^{\infty} g_{\ell_f I_f}^{J_f \pi_f}(\rho) g_{\ell_i I_i}^{J_i \pi_i}(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

où cette fois nous faisons apparaître le moment magnétique du noyau 1

$$\mu(1) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \langle I_1 I_1 10 | I_1 I_1 \rangle \langle \phi^{I_1} || \mathcal{M}_1^M(\xi_1^i) || \phi^{I_1} \rangle, \quad (\text{A.8})$$

qui n'est différent de zéro que si $I_1 \geq 1/2$. Il est possible d'établir des formules pour les multipôles magnétiques d'ordre quelconque, mais ces formules sont très lourdes, et ne sont que très rarement utilisées. Nous nous limitons donc ici à $\lambda = 1$.

Appendice B

Dans cet appendice, nous esquissons la démonstration de quelques formules développées au chapitre 4, consacré à la matrice R . Les formules (4.14) et (4.37) donnant la matrice de collision et la section efficace de capture font intervenir l'inverse de la matrice B définie en (4.9). Cette matrice présente une forme particulière qui permet de l'inverser exactement. La matrice B s'écrit:

$$B_{ij} = (E_i - E)\delta_{ij} - L\tilde{\gamma}_i\tilde{\gamma}_j. \quad (\text{B.1})$$

Ecrivons son inverse sous la forme

$$(B^{-1})_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{(E_i - E)} + \frac{L\tilde{\gamma}_i\tilde{\gamma}_j}{(E_i - E)(E_j - E)b}, \quad (\text{B.2})$$

où b est une constante à déterminer. En exprimant que le produit de (B.1) et (B.2) donne la matrice unité, on trouve pour b

$$b = 1 - L \sum_i \frac{\tilde{\gamma}_i^2}{E_i - E} = 1 - LR \quad (\text{B.3})$$

où l'on a utilisé la définition (4.15) de la matrice R . En utilisant (4.13), on montre facilement que

$$(1 - LR)U = \frac{I}{O}(1 - L^*R), \quad (\text{B.4})$$

ce qui démontre (4.14). De la même manière, on démontre que

$$(1 - LR) \sum_{ij} (B^{-1})_{ij} \sqrt{\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_{\gamma,j}} = \sum_{ij} \frac{\delta_{ij} \sqrt{\tilde{\Gamma}_i \tilde{\Gamma}_{\gamma,j}}}{E_i - E} \quad (\text{B.5})$$

ce qui conduit directement à (4.43).

References

- [1] F. Hoyle, Mon. Not. R. Astron. Soc. **106** (1946) 343
- [2] D.D. Clayton, in "Principles of stellar evolution et nucleosynthesis", The University of Chicago Press (1983)
- [3] E.M. Burbidge, G.R. Burbidge, W.A. Fowler et F. Hoyle, Rev. Mod. Phys. **29** (1957) 547
- [4] G. Wallerstein et al., Rep. Prog. Phys. **62**
- [5] M. Arnould et T. Takahashi, Rep. Prog. Phys. **62** (1999) 393
- [6] F. Käppeler, Prog. Part. Nucl. Phys. **43** (1999) 419

- [7] C. Angulo *et al.*, Nucl. Phys. **A656** (1999) 3
- [8] E.G. Adelberger *et al.*, Rev. Mod. Phys. **70** (1998) 1265
- [9] C. Rolfs et W.S. Rodney, *Cauldrons in the Cosmos*, University of Chicago Press (1988)
- [10] J. Vervier, Prog. Part. Nucl. Phys. **37** (1996) 435
- [11] A.M. Lane et R.G. Thomas, Rev. Mod. Phys. **30** (1958) 257
- [12] V.I. Kukulín, V.G. Neudatchin, I.T. Obukhovski et Yu.F. Smirnov, in "Clustering Phenomena in Nuclei", ed. K. Wildermuth et P. Kramer, Vieweg, Braunschweig (1983)
- [13] D. Baye et P. Descouvemont, Ann. Phys. **165** (1985) 115
- [14] W.A. Fowler, G.R. Caughlan et B.A. Zimmerman, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **5** (1967) 525; **13** (1975) 69
G.R. Caughlan et W.A. Fowler, At. Data Nucl. Data Tables **40** (1988) 283
- [15] R. Bonetti *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 5205
- [16] R.G. Newton, in "Scattering Theory of Particles and Waves", Springer, New York, Heidelberg, Berlin (1982)
- [17] M. Abramowitz et I.A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, London (1972) 1
- [18] J. Humblet, J. Math. Phys. **26** (1985) 656
- [19] D. Baye et E. Brainis, Phys. Rev. **C61** (2000) 025801
- [20] H.J. Rose et D.M. Brink, Rev. Mod. Phys. **39** (1967) 306
- [21] M. Kamionkowski et J.N. Bahcall, Astrophys. J. **420** (1994) 884
- [22] J.N. Bahcall, S. Basu et M.H. Pinsonneault, Phys. Lett. **433B** (1998) 1
- [23] P.E. Tegnér et C. Bargholtz, Astrophys. J. **272** (1983) 311
- [24] R. Schiavilla, R.B. Wiringa, V.R. Pandharipande et J. Carlson, Phys. Rev. **C45** (1992) 2628
- [25] J.N. Bahcall et P.I. Krastev, Phys. Lett. **436B** (1998) 243
- [26] L.E. Marcucci *et al.*, à paraître
- [27] W.L. Imhof, R.G. Johnson, F.J. Vaughn et M. Walt, Phys. Rev. **114** (1959) 1037
- [28] M. Wiescher, R. Steininger et F. Käppeler, Astrophys. J. **344** (1989) 464
- [29] J.C. Blackmon *et al.*, Phys. Rev. **C54** (1996) 383
- [30] Y. Nagai *et al.*, Astrophys. J. **381** (1991) 444
- [31] E.E. Salpeter, Phys. Rev. **88** (1952) 547; Astrophys. J. **115** (1952) 326
- [32] J. Görres, H. Herndl, I.J. Thompson et M. Wiescher, Phys. Rev. **C52** (1995)
- [33] V.D. Efros, H. Oberhummer, A. Pushkin et I.J. Thompson, Eur. J. Phys. **A1** (1998) 447
- [34] H.J. Assenbaum, K. Langanke et C. Rolfs, Z. Phys. **A327** (1987) 461
- [35] A. Krauss, H.W. Becker, H.-P. Trautvetter, C. Rolfs et K. Brand, Nucl. Phys. **465** (1987) 150

- [36] S. Engstler *et al.*, *Zeit. Phys.* **A342** (1992) 471
- [37] C. Angulo et P. Descouvemont, *Nucl. Phys.* **A639** (1998) 733
- [38] L. Bracci, G. Fiorentini, V.S. Melezhik, G. Mezzoran et P. Quarati, *Nucl. Phys.* **A513** (1990) 316
- [39] Y. Boudouma, A.C. Chami et H. Beaumevieuille, *Nucl. Phys.* **A617** (1997) 57
- [40] R.E. Azuma *et al.*, *Phys. Rev.* **C50** (1994) 1194
- [41] F.-K. Thielemann, M. Arnould et J.W. Truran, in "Advances in Nuclear Astrophysics", eds. Vangioni-Flam *et al.* (1986) 525
- [42] T.A. Tombrello, *Nucl. Phys.* **71** (1965) 459
- [43] C. Rolfs, *Nucl. Phys.* **A217** (1973) 29
- [44] B. Buck, R.A. Baldock et J.A. Rubio, *J. Phys.* **G11** (1985) L11
- [45] J. Raynal, in "Computing as a Language of Physics", Trieste 1971, IAEA, Vienna (1972), p. 281
- [46] M.J. Jamieson, *Comp. Phys. Comm.* **125** (2000) 193
- [47] K. Langanke, *Adv. In Nuclear Physics*, Vol. 21 (1994) p. 85
- [48] B. Buck, H. Friedrich et C. Wheatley, *Nucl. Phys.* **A275** (1977) 246
- [49] D. Baye, *Phys. Rev. Lett.* **58** (1987) 2738
- [50] S. Gartenhaus et C. Schwartz, *Phys. Rev.* **108** (1957) 482
- [51] S. Typel, H.H. Wolter et G. Baur, *Nucl. Phys.* **A613** (1997) 147
- [52] R.F. Christy et I. Duck, *Nucl. Phys.* **24** (1961) 89
- [53] N.K. Timofeyuk, D. Baye et P. Descouvemont, *Nucl. Phys.* **A620** (1997) 29
- [54] J.C. Fernandes, R. Crespo, F.M. Nunes et I.J. Thompson, *Phys. Rev.* **C59** (1999) 2865
- [55] R.G. Thomas, *Phys. Rev.* **88** (1952) 1109
- [56] F.C. Barker et T. Kajino, *Aust. J. Phys.* **44** (1991) 369
- [57] F.C. Barker et N. Ferdous, *Aust. J. Phys.* **33** (1980) 691
- [58] F.C. Barker, *Nucl. Phys.* **A588** (1995) 693
- [59] F.C. Barker, *Phys. Lett.* **322B** (1994) 17; *Nucl. Phys.* **A609** (1996) 38
- [60] D. Baye et P. Descouvemont, *Nucl. Phys.* **A407** (1983) 77
- [61] P.G. Burke, A. Hibbert et W.D. Robb, *J. Phys.* **B4** (1971) 153
- [62] R.F. Barrett, B.A. Robson et W. Tobocman, *Rev. Mod. Phys.* **55** (1983) 155
- [63] C. Angulo et P. Descouvemont, *Phys. Rev.* **C61** (2000) 064611
- [64] W. Möller et F. Besenbacher, *Nucl. Instr. Methods* **168** (1980) 111
- [65] R.J. Holt, H.E. Jackson, R.M. Laszewski, J.E. Monahan et J.R. Specht, *Phys. Rev.* **C18** (1978) 1962

- [66] G. Baur, C.A. Bertulani et H. Rebel, Nucl. Phys. **A458** (1986) 188
- [67] G. Baur et H. Rebel, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **46** (1996) 321
- [68] J. Kiener, H.J. Gils, H. Rebel, S. Zagromski, G. Gsottschneider, N. Heide, H. Jelitto, J. Wentz et G. Baur, Phys. Rev. **C44** (1991) 2195
- [69] T. Motobayashi *et al.*, Phys. Lett. **B264** (1991) 259
- [70] J. Kiener *et al.*, Nucl. Phys. **A552** (1993) 66
- [71] T. Motobayashi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 2680
- [72] T. Kikuchi *et al.*, Eur. Phys. J. **A3** (1998) 213
- [73] P. Descouvemont et D. Baye, Phys. Rev. **C60** (1999) 015803
- [74] A.M. Mukhamedzhanov, R.E. Tribble et N.K. Timofeyuk, Phys. Rev. **C51** (1995) 3472
- [75] J.C. Fernandes, R. Crespo et F.M. Nunes, Phys. Rev. **C61** (2000) 064616