



HAL
open science

Explorer le noyau par l'interaction électromagnétique

C. Leclercq-Willain

► **To cite this version:**

C. Leclercq-Willain. Explorer le noyau par l'interaction électromagnétique. École thématique. Ecole Joliot Curie "Noyau, champ et cortège", Maubuisson, (France), du 13-18 septembre 1999: 18ème session, 1999. cel-00653888

HAL Id: cel-00653888

<https://cel.hal.science/cel-00653888>

Submitted on 20 Dec 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Explorer le noyau par l'interaction électromagnétique

Ch. Leclercq-Willain

Physique Nucléaire théorique et Physique Mathématique

Université Libre de Bruxelles

Campus Plaine CP 229 B1050 Bruxelles

Résumé

L'objectif de ce cours est de donner les éléments de base de l'étude des processus électromagnétiques usuels de désexcitation des noyaux en présence du cortège atomique.

Les solutions des équations de Maxwell sont données en ondes planes polarisées et en ondes sphériques avec la condition de "jauge" de Coulomb.

Les expressions générales des moments multipolaires électriques (E_L) et magnétiques (M_L) sont explicitement définis. Les probabilités des transitions radiatives sont calculées au premier ordre des perturbations et les unités Weisskopf sont définies.

Les expressions générales du processus E_0 et des coefficients de conversion interne $E_L, M_L (L \geq 1)$ (en théorie de perturbation du deuxième ordre) sont explicitées. Les caractéristiques qualitatives des coefficients de conversion interne sont analysées.

Quelques exemples sélectionnés de spectres γ et de spectres en électrons de conversion sont étudiés pour déterminer les durées de vie, les spins et parités d'états nucléaires, en particulier des états isomériques.

Abstract

The aim of these lectures is to get the basic theory describing the electromagnetic decay processes of a nucleus inside the associated atom.

Both the polarized plane waves and the spherical waves solutions of the Maxwell equations are given, using the Coulomb "gauge" condition.

The general expressions for the electric (E_L) and magnetic (M_L) multipole moments are explicitly given. The radiative transition probabilities are deduced in the first order perturbation approach and the Weisskopf units are defined.

The general expressions to calculate the E_0 process and the $E_L, M_L (L \geq 1)$ internal conversion coefficients (second order perturbation theory) are developed. The properties of the internal conversion coefficients are qualitatively analysed.

Some selected examples of γ spectra and of internal conversion electrons spectra are studied to deduce the life times, the spins and parities of nuclear states in particular for some isomeric states.

1 Introduction

L'interaction électromagnétique joue un rôle particulièrement important dans l'exploration de la structure du noyau. Elle est la mieux connue des interactions fondamentales et son intensité est à la fois suffisamment importante que pour produire des effets observables dans le noyau et suffisamment faible, en regard de l'interaction nucléaire, que pour être traitée par la théorie des perturbations. Le champ électromagnétique est défini classiquement par les équations de Maxwell (1865). Ces équations sont quantifiables et les quanta du champ électromagnétique peuvent être observés et étudiés. (Q.E.D.).

Les noyaux peuvent être étudiés par l'interaction électromagnétique dans les processus suivants:

- émission et absorption de radiation γ
- diffusion de particules chargées et excitation coulombienne
- interaction cortège-noyau : structure hyperfine, déplacement isotopique, déplacement isomérique; conversion interne, NEET (excitation nucléaire par transition électronique),...

Depuis quelques années, de nouvelles techniques performantes d'étude des spectres atomiques dans le but d'étudier le noyau, se sont développées: la spectroscopie laser, la double spectroscopie laser-radio fréquence, les pièges à ions, les méthodes NMR et LEMS. Ces techniques et leur intérêt à l'étude des propriétés nucléaires sont présentées dans les cours de F. Le Blanc, D. Lunney et G. Neyens.

D'autre part, les effets spectaculaires de modification des durées de vie nucléaires par modification de la charge des ions, prévus théoriquement depuis plusieurs dizaines d'années, ont été mis en évidence et mesurés. Les nouvelles possibilités pour éplucher des atomes ainsi que l'utilisation de l'excitation par laser permettent l'étude et la mise en évidence des processus électromagnétiques de "bound internal conversion" et de NEET (Nuclear Excitation via Electronic Transitions). Ces nouvelles expériences sont discutées dans les cours de J.F. Chemin et V. Meot.

Dans ce cours le but est de donner les éléments théoriques de base à l'étude des processus électromagnétiques de désexcitation des noyaux en présence du cortège électronique. Après un bref rappel des équations de Maxwell et de leurs solutions en ondes planes polarisées et en ondes sphériques, nous aborderons l'étude des transitions radiatives (γ) et de la conversion interne. Quelques exemples sélectionnés de spectres γ et de spectres d'électrons de conversion seront analysés.

2 Description du champ électromagnétique

Les équations de Maxwell et les composantes du champ électromagnétique

[1],[2, Chapitre 1]

Pour une distribution de charge et de courant ($\vec{j}(\vec{r}, t)$, $\rho(\vec{r}, t)$), les équations de

Maxwell en les vecteurs champs $\vec{E}(\vec{r}, t)$ et $\vec{B}(\vec{r}, t)$ sont :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 & \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 4\pi\vec{j} & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

en unités $\hbar = m_e = c = 1$.

L'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2)$$

découle directement des équations (1) ci-dessus.

Le quadri-vecteur potentiel ($\vec{A}(\vec{r}, t)$, $\phi(\vec{r}, t)$)

En introduisant le quadri-vecteur potentiel ($\vec{A}(\vec{r}, t)$, $\phi(\vec{r}, t)$) par les relations

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad E = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi \quad (3)$$

les 4 équations (1) se réduisent à 2 équations entre les potentiels scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ et vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$. Ces derniers ne sont pas univoquement définis par les relations (3). Tous les potentiels tels que

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f(r, t), \quad \phi \rightarrow \phi - \partial_t f(r, t) \quad (4)$$

laissent les champs \vec{E} et \vec{B} inchangés; ils sont équivalents de "jauge".

Le choix de "jauge" reste relativement arbitraire et est généralement dicté par les caractéristiques du problème. La "jauge" la mieux appropriée à la quantification du champ électromagnétique est la "jauge" de Coulomb définie par la condition

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \quad (5)$$

Cette condition est une condition de transversalité i.e. qu'elle sélectionne les solutions des équations de Maxwell correspondant à un champ vectoriel purement "transversal". En utilisant la jauge de Coulomb, les équations des potentiels sont

$$\Delta \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi \vec{j}_T \quad (6)$$

$$\Delta \phi = -4\pi\rho \quad (7)$$

$\vec{j}_T(\vec{r}, t)$ étant la composante transverse du courant $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ($\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_T(\vec{r}, t) = 0$).

L'équation du potentiel scalaire est l'équation de Poisson. On a dès lors:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \frac{\rho(\vec{r}', t) d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Dans l'espace libre, i.e. en l'absence de courant et de charge ($\rho=0, \vec{j} = 0$) les équations sont:

$$\square \vec{A} \equiv \Delta \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0 \quad \phi = 0$$

avec la condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

et les champs sont donnés par

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\delta_t \vec{A}$$

Le potentiel $\vec{A}(\vec{r}, t)$ peut être défini par son développement sur une base de fonctions propres orthonormées $\vec{A}_\lambda(\vec{r}, t)$, l'indice λ représentant l'ensemble des nombres quantiques caractéristiques des solutions

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda (q_\lambda(t) \vec{A}_\lambda(\vec{r}) + q_\lambda^*(t) \vec{A}_\lambda^*(\vec{r})) \quad (8)$$

développement qui assure l'hermiticité de $\vec{A}(\vec{r}, t)$.

L'équation des fonctions de base $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ est

$$q_\lambda(t) \vec{\nabla}^2 \vec{A}_\lambda(\vec{r}) - \vec{A}_\lambda(\vec{r}) \delta_t^2 q_\lambda(t) = 0$$

On introduit la constante de découplage k_λ^2 et on a le système d'équations

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_\lambda(\vec{r}) + k_\lambda^2 \vec{A}_\lambda(\vec{r}) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} q_\lambda(t) + k_\lambda^2 q_\lambda(t) = 0 \quad (10)$$

L'équation (9) définit les composantes $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ qui de plus doivent satisfaire la condition de "jauge" ou dans le cas de la "jauge" de "Coulomb", la condition de transversalité

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\lambda(\vec{r}) = 0 \quad (11)$$

L'équation (10) est caractéristique d'un oscillateur harmonique de quantum d'énergie $\hbar\omega_\lambda = |k_\lambda| \hbar c$

$$q_\lambda(t) = N_\lambda q_\lambda \exp -i\omega_\lambda t$$

En théorie quantique du champ, les coefficients q_λ et q_λ^* définissent les opérateurs de destruction et de création d'un photon λ associés au champ électromagnétique.

Le champ de radiation est supposé limité à un certain volume V et la normalisation des composantes est définie sur ce volume

$$\int_V \vec{A}_\lambda(\vec{r}) \vec{A}_{\lambda'}^*(\vec{r}) d\vec{r} = \delta_{\lambda,\lambda'}$$

Solutions $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ en ondes planes polarisées

Les solutions en ondes planes de (9) sont

$$\vec{A}_\lambda(\vec{r}) = \vec{e}_\lambda \cdot e^{i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}} \quad (12)$$

où le vecteur \vec{k}_λ fixe la direction de propagation de l'onde et le vecteur \vec{e}_λ définit la direction de polarisation.

La condition de transversalité du champ électromagnétique (11) impose $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\lambda(\vec{r}) = 0$ ou encore $\vec{e}_\lambda \cdot \vec{k}_\lambda = 0$ i.e. que les vecteurs \vec{e}_λ et \vec{k}_λ sont perpendiculaires.

En choisissant $\vec{k}_\lambda = k_\lambda \vec{1}_z$, le vecteur de polarisation \vec{e}_λ est défini par les vecteurs \vec{e}_x, \vec{e}_y de polarisation rectiligne ou par les vecteurs

$$e_\pm = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \pm i e_y)$$

de polarisation circulaire.

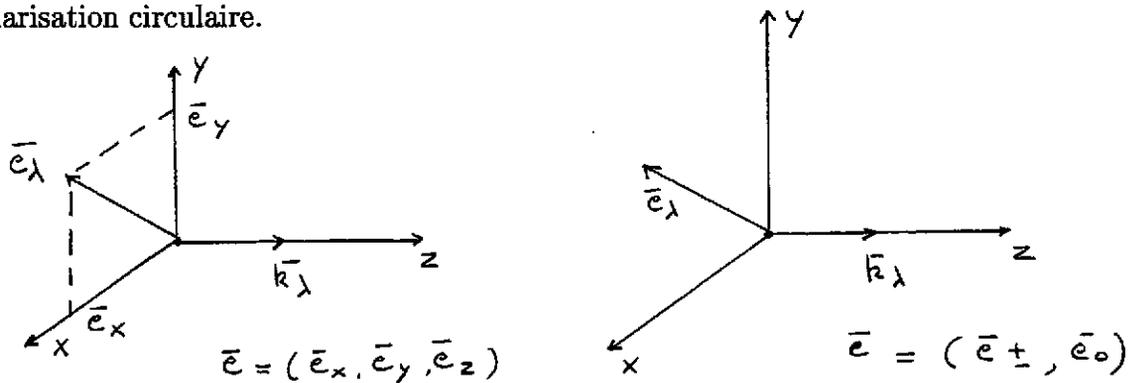


Figure 2.1

L'onde plane $e^{i\vec{k}_\lambda \cdot \vec{r}}$ est normalisée sur une boîte de longueur L arbitraire par les conditions périodiques aux bords, soit pour les valeurs \vec{k}_λ :

$$\vec{k}_\lambda = \frac{2\pi}{L} \vec{n} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z)$$

où n_x, n_y, n_z sont des entiers.

Les valeurs propres de $\omega_\lambda = |k_\lambda|$ sont

$$\omega_\lambda = \frac{2\pi}{L} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)^{1/2}$$

Le nombre de ces valeurs entre ω_λ et $\omega_\lambda + d\omega_\lambda$ dans l'angle solide $d\Omega$ est :

$$dn = \frac{L^3}{(2\pi)^3} \omega_\lambda^2 d\omega_\lambda d\Omega$$

L'onde est normalisée de manière à ce que

$$q_\lambda \vec{A}_\lambda(\vec{r}) + q_\lambda^* \vec{A}_\lambda^*(\vec{r})$$

représente un photon $\hbar\omega_\lambda$ dans une boîte L^3 .

La norme N_λ est définie par le calcul de l'énergie associée à une composante λ . L'énergie totale est définie par l'expression:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{8\pi} \int_V (|E|^2 + |B|^2) d\vec{r} \\ &= \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda^2}{2\pi} N_\lambda^2 q_\lambda q_\lambda^* \cdot L^3 \end{aligned} \quad (13)$$

ou encore par l'expression:

$$W = \sum_\lambda (\hbar) \omega_\lambda q_\lambda q_\lambda^* = \sum_\lambda (\hbar) \omega_\lambda n_\lambda \quad (14)$$

dès lors, on en déduit la relation:

$$\frac{1}{2\pi} \omega_\lambda^2 N_\lambda^2 L^3 = \omega_\lambda$$

et la norme est définie par:

$$N_\lambda = \left(\frac{2\pi}{L^3 \omega_\lambda} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

La forme explicite de $\vec{A}(\vec{r}, t)$ s'écrit donc :

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_\lambda \left(\frac{2\pi}{L^3} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega_\lambda^{1/2}} [q_\lambda \vec{e}_\lambda e^{i(\vec{k}_\lambda \vec{r} - \omega_\lambda t)} + q_\lambda^* \vec{e}_\lambda^* e^{-i(\vec{k}_\lambda \vec{r} - \omega_\lambda t)}] \quad (16)$$

Solutions $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ en ondes sphériques

Dans l'étude des transitions radiatives entre deux états nucléaires (ou atomiques) caractérisés par un moment angulaire total J et une parité π , les lois de conservation du moment total et de la parité imposent que la radiation électromagnétique associée à la transition considérée emporte la différence de moment et de parité entre les états.

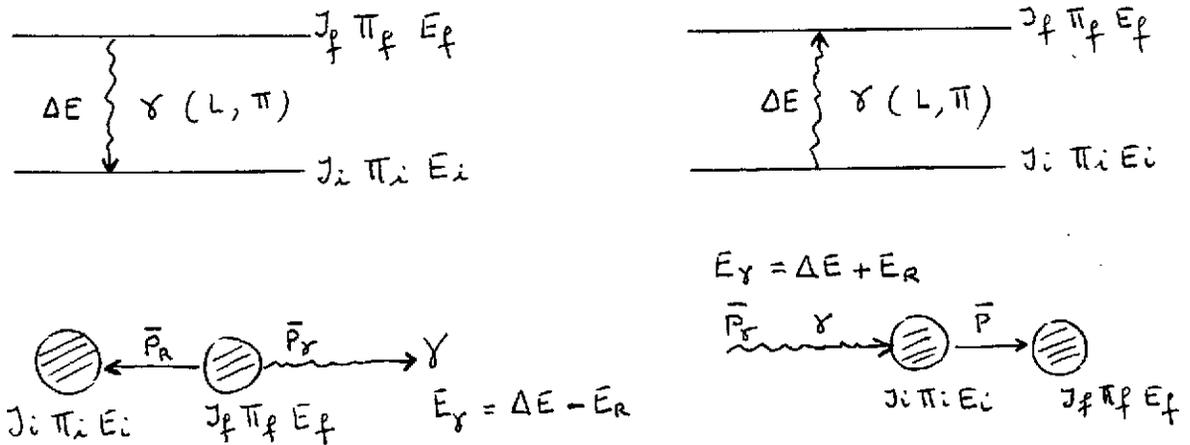


Figure 2.2

Dès lors, dans la transition électromagnétique $J_i^{\pi_i} \rightarrow J_f^{\pi_f}$, le photon aura un moment L et une parité π tels que

$$\pi = \pi_i \pi_f \text{ et } \vec{L} + \vec{J}_i + \vec{J}_f = 0. \quad (17)$$

L'hamiltonien d'interaction caractérisant la transition radiative est défini par l'interaction du champ de radiation, caractérisé par les potentiels \vec{A} et ϕ , avec la distribution de charge et de courant (\vec{j}, ρ) du noyau (ou de l'atome)

$$\begin{aligned} H_{int} &= - \int j^\mu(\vec{r}, t) \cdot A_\mu(\vec{r}, t) d\vec{r} \\ &= \int \rho(\vec{r}, t) \phi(\vec{r}, t) d\vec{r} - \int \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) d\vec{r} \end{aligned} \quad (18)$$

Le premier terme a la forme d'un couplage scalaire; le second, d'un couplage vectoriel.

C'est cet hamiltonien d'interaction qu'il convient d'analyser sur la base des fonctions propres en moment angulaire total et en parité.

Fonctions propres associées au champ scalaire

Les fonctions propres associées au champ scalaire sont également fonctions propres de l'opérateur unitaire $(e^{i\alpha \vec{u} \cdot \vec{L}})$ de transformation du champ scalaire par les rotations $R(\vec{u}, \alpha)$ [1, Chapitre 3]. Elles seront donc fonctions propres des opérateurs L^2 , L_z ; ce sont les harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta, \varphi)$

$$L^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$$

$$L_z Y_{lm} = m Y_{lm}$$

Le champ scalaire $\phi(\vec{r}, t)$ peut donc être développé sur la base des harmoniques sphériques

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{lm} \phi_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

On aura de même pour l'hamiltonien de couplage scalaire

$$H_{int} = \sum_{lm} \int \rho(\vec{r}) \phi_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) d\vec{r} \quad (19)$$

Un exemple est celui de l'interaction coulombienne e^- - noyau, la densité $\rho(\vec{r})$ est la densité de charge nucléaire et $\phi(\vec{r})$ est le potentiel électrostatique produit par l'électron:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{e}{|\vec{r} - \vec{r}_e|}$$

$$\phi(\vec{r}) = e \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} Y_{lm}^*(\vec{r}_e) Y_{lm}(\vec{r}) \frac{r^l}{r^{l+1}}$$

où $r_<$ et $r_>$ sont respectivement la plus petite et la plus grande des coordonnées r_e et r .

Dans l'hypothèse où l'électron reste à l'extérieur du noyau, seul le terme $r_e > r$ est retenu et l'hamiltonien d'interaction limité au terme extérieur s'écrit (hypothèse du noyau ponctuel) :

$$\begin{aligned} H_{int} &= e \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}^*(\hat{r}_e)}{r_e^{l+1}} \int \rho(\vec{r}) r^l Y_{lm}(\hat{r}) d\vec{r} \\ &= e \sum_{lm} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}^*(\hat{r}_e)}{r_e^{l+1}} \mathcal{M}_{(l,m)}^e \end{aligned} \quad (20)$$

où $\mathcal{M}_{(l,m)}^e = \int \rho(\vec{r}) r^l Y_{lm}(\hat{r}) d\vec{r}$

définit le moment multipolaire électrique d'ordre l , composante m .

Fonctions propres associées au champ vectoriel

Les fonctions propres associées au champ vectoriel sont également fonctions propres de l'opérateur unitaire $(e^{i\alpha \vec{u} \cdot \vec{J}})$ de transformation du champ vectoriel par les rotations $R(\vec{u}, \alpha)$ [1, Chapitre 3]. Elles seront donc fonctions propres des opérateurs J^2, J_z où $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

Les vecteurs propres associés à S^2 et S_z sont donnés par

$$\chi_0^1 = e_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_{\pm 1}^1 = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(e_x \pm i e_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ils sont vecteurs propres de S^2 et de S_z

$$S^2 \chi_m^1 = S(S+1)\chi_m^1 \quad (S=1)$$

$$S_z \chi_m^1 = m \chi_m^1 \quad (m=0, \pm 1)$$

.

De plus, on a les relations

$$\chi_m^1 \chi_{m'}^{*1} = \delta_{mm'}$$

$$\chi_m^{1*} = (-)^m \chi_{-m}^1$$

Tout champ vectoriel peut donc être développé sur la base des fonctions propres de J^2 et J_z soient les harmoniques sphériques vectoriels

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{jm}^{l1} &= [Y_l \otimes \chi^1]_m^j \\ &= \sum_{m_l=-l}^{+l} \sum_{m'=-1}^{+1} (l m_l 1 m' | l 1 j m) Y_{l m_l} \chi_{m'}^1 \end{aligned} \quad (21)$$

Les coefficients de ce développement sont les coefficients de couplage ou de Clebsch-Gordan. Ils sont non nuls pour $m = m_l + m'$ et $|l-1| \leq j \leq l+1$.

De leur construction même, il résulte que les harmoniques sphériques vectoriels sont fonctions propres de L^2 , S^2 , J^2 , et J_z .

$$\begin{aligned} J^2 \vec{Y}_{jm}^{l1} &= j(j+1) \vec{Y}_{jm}^{l1} \\ J_z \vec{Y}_{jm}^{l1} &= m \vec{Y}_{jm}^{l1} \\ L^2 \vec{Y}_{jm}^{l1} &= l(l+1) \vec{Y}_{jm}^{l1} \\ S^2 \vec{Y}_{jm}^{l1} &= S(S+1) \vec{Y}_{jm}^{l1} \quad \text{avec } S=1 \end{aligned} \quad (22)$$

Les champs électrique $\vec{E}(\vec{r})$ et magnétique $\vec{B}(\vec{r})$ ainsi que le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ et l'hamiltonien H_{int} d'interaction vectorielle pourront être définis par un développement sur la base des fonctions harmoniques sphériques vectoriels \vec{Y}_{jm}^{l1} .

Les particules associées au champ électromagnétique sont les photons, particules de

spin $\vec{S} = \vec{1}$ (bosons vecteurs de l'interaction électromagnétique).

Les composantes $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ du potentiel vecteur peuvent être définies par les fonctions vectorielles:

$$\vec{A}_{jm}(\vec{r}) = u_l(kr) \vec{Y}_{jm}^{l1} \quad (23)$$

avec $j = l - 1, l, l + 1$ où les vecteurs $\vec{A}_{jm}(\vec{r})$ sont solutions de (9) :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}_{jm}(\vec{r}) + k^2 \vec{A}_{jm}(\vec{r}) = 0$$

avec la condition de transversalité (11) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{jm}(\vec{r}) = 0. \quad (24)$$

L'équation radiale définissant les fonctions $u_l(kr)$ est

$$\left(d_r^2 + \frac{2}{r} dr - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right) u_l(kr) = 0$$

et une solution est donc donnée par les fonctions de Bessel

$$u_l(kr) \equiv j_l(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{l+1/2}(kr)$$

Une propriété utile par la suite de ces fonctions est leur comportement à l'origine

$$j_l(kr) \rightarrow_{kr \rightarrow 0} \rightarrow \frac{(kr)^l}{(2l+1)!!} \quad (25)$$

Considérons les trois solutions $\vec{A}_\lambda(\vec{r})$ du type

$$\vec{A}_{jm}(\vec{r}) = u_l(kr) \vec{Y}_{jm}^{l1}$$

où $j = l - 1, l, l + 1$.

Posons selon la notation usuelle $(jm) \equiv (LM)$, L définissant le moment total de la composante du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$:

$$\vec{A}_{LM}(\vec{r}) = u_l(kr) \vec{Y}_{LM}^{l1} \quad (26)$$

Pour une valeur L fixée, les valeurs de l seront $L \pm 1, L$.

La parité (associée à la transformation $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) de l'harmonique sphérique vectoriel \vec{Y}_{LM}^{l1} est définie par la valeur de l ; elle est associée à la parité de la fonction $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ dans la définition de \vec{Y}_{LM}^{l1}

$$\vec{Y}_{LM}^{l1} = \sum_m \sum_{m'} (l \ m \ 1 \ m' \ | \ l \ 1 \ L \ M) Y_{lm}(\theta, \varphi) \chi_{m'}^1$$

Pour un L fixé on a 3 possibilités en l groupées selon la parité en une composante de parité $(-)^L$ si $l=L$ et deux composantes de parité opposée $(-)^{L \pm 1}$ si $l = L \pm 1$. Les

deux composantes possibles en parité définissent l'une, la composante magnétique de parité $(-)^L$

$$\vec{A}_{LM}^{\mathcal{M}}(\vec{r}) = j_{l=L}(kr) \vec{Y}_{LM}^{L1} \quad (27)$$

l'autre, la composante électrique de parité $(-)^{L+1}$

$$\vec{A}_{LM}^e(\vec{r}) = C_{L-1} j_{L-1}(kr) \vec{Y}_{LM}^{L-1,1} + C_{L+1} j_{L+1}(kr) \vec{Y}_{LM}^{L+1,1} \quad (28)$$

La condition de transversalité impose $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_\lambda(\vec{r}) = 0$ pour chacune de ces composantes.

Elle est directement satisfaite pour la composante magnétique $\vec{A}_{LM}^{\mathcal{M}}(\vec{r})$; elle impose le choix des coefficients de la combinaison linéaire dans la composante électrique $\vec{A}_{LM}^e(\vec{r})$ [Appendice A.3],[1, Chapitre 3]:

$$C_{L-1} = \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \text{ et } C_{L+1} = -\sqrt{\frac{L}{2L+1}}$$

En utilisant la relation :

$$\vec{L} Y_{LM}(\theta, \varphi) = \sqrt{L(L+1)} \vec{Y}_{LM}^{L1} \quad (\vec{L} = -i \vec{r} \times \vec{\nabla})$$

on peut écrire les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \vec{A}_{LM}^{\mathcal{M}}(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{1}{L(L+1)}} \vec{L} (j_L(kr) Y_{LM}(\theta, \varphi)) \\ &\equiv \vec{X}_{LM}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \vec{A}_{LM}^e(\vec{r}) &= \frac{-i}{k\sqrt{L(L+1)}} \vec{\nabla} \times \vec{L} (j_L(kr) Y_{LM}(\theta, \varphi)) \\ &\equiv \frac{-i}{k} \vec{\nabla} \times \vec{X}_{LM}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (30)$$

On en déduit les expressions suivantes des champs \vec{E} et \vec{B} :

$$\vec{E}_{LM}^{\mathcal{M}}(\vec{r}) = i |k| \vec{A}_{LM}^{\mathcal{M}}(\vec{r}) \quad (31)$$

$$\vec{E}_{LM}^e(\vec{r}) = i |k| \vec{A}_{LM}^e(\vec{r}) \quad (32)$$

$$\vec{B}_{LM}^{\mathcal{M}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{LM}^{\mathcal{M}}(\vec{r}) \equiv i k \vec{A}_{LM}^e(\vec{r}) \quad (33)$$

$$\vec{B}_{LM}^e(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{LM}^e(\vec{r}) \equiv -i k \vec{A}_{LM}^{\mathcal{M}}(\vec{r}) \quad (34)$$

Pour $kr \rightarrow 0^1$, on a $j_L(kr) \rightarrow \frac{(kr)^L}{(2L+1)!!}$; dès lors

$$\vec{B}_{LM}^e(\vec{r}) = -i k \vec{X}_{LM}(\vec{r}) \rightarrow k(kr)^L$$

$$\vec{B}_{LM}^M(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{X}_{LM}(\vec{r}) \rightarrow k(kr)^{L-1}$$

On a donc $\vec{B}_{LM}^e(\vec{r}) \sim (kr) \vec{B}_{LM}^M(\vec{r}) \ll \vec{B}_{LM}^M(\vec{r})$

et de même $\vec{E}_{LM}^M(\vec{r}) \sim (kr) \vec{E}_{LM}^e(\vec{r}) \ll \vec{E}_{LM}^e(\vec{r})$

$$\{\vec{A}_{LM}^M, \vec{E}_{LM}^M, \vec{B}_{LM}^M\}$$

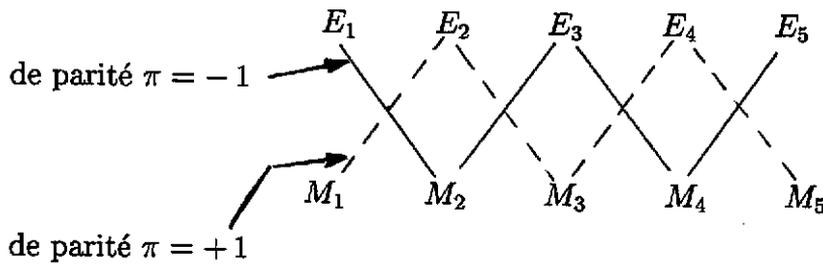
définissent le multipole magnétique d'ordre L , composante M .

$$\{\vec{A}_{LM}^e, \vec{E}_{LM}^e, \vec{B}_{LM}^e\}$$

définissent le multipole électrique d'ordre L , composante M .

Les opérateurs (voir plus loin) définissant les transitions entre états nucléaires ou atomiques sont de parités opposées à celles des composantes $\vec{A}_{LM}^e(\vec{r})$; dès lors la parité associée à une transition électrique E_L sera $(-)^L$ et celle associée à une transition magnétique M_L sera $(-)^{L+1}$.

Les différents multipoles observables dans une transition γ nucléaire sont donc :

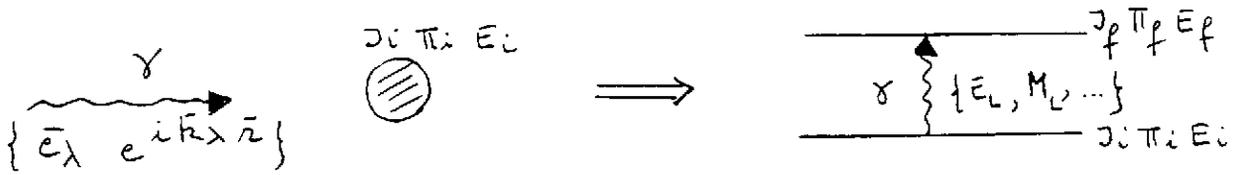


La décroissance d'un ordre multipolaire au suivant sera proportionnelle à $(kR)^2$.

Remarquons qu'il n'existe pas de transition radiative à $L = 0$. Le champ électromagnétique ayant un spin intrinsèque $\vec{S} = \vec{1}$, la radiation emporte au minimum un moment total $\vec{L} = \vec{1}$. Mathématiquement l'expression $\vec{X}_{00} \propto \vec{L} Y_{00} \equiv 0$; les multipoles E_0, M_0 n'existent pas en tant que radiation.

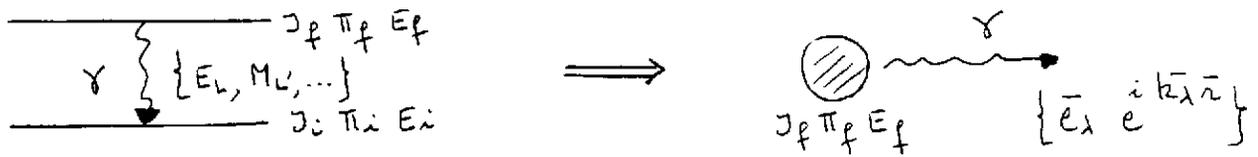
${}^1kr \sim \frac{\hbar c}{\hbar c} R \sim \frac{E_\gamma(\text{MeV}) R(\text{fm})}{197 \text{ MeV fm}}$
 $E_\gamma = 1 \text{ MeV}, R \simeq 9 \text{ fm} \rightarrow k r \sim .005 \ll 1$

Passage des solutions en ondes planes aux solutions en ondes sphériques



Absorption d'un γ

Ondes planes \rightarrow ondes sphériques



Emission d'un γ

Ondes sphériques \rightarrow ondes planes

Figure 2.3

La solution en onde plane du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r}, t)$ est donnée par

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\lambda} [q_{\lambda} N_{\lambda} \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) e^{-i\omega_{\lambda} t} + c.c.]$$

avec pour $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r})$ la représentation en onde plane polarisée $\vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) = \vec{e}_{\lambda} e^{i \vec{k}_{\lambda} \vec{r}}$, le vecteur \vec{k}_{λ} fixant la direction de propagation et le vecteur \vec{e}_{λ} la direction de polarisation.

La condition de transversalité $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) = 0$ se traduit par la relation $\vec{e}_{\lambda} \cdot \vec{k}_{\lambda} = 0$.

Les expressions des champs sont donnés par

$$\vec{B}_{\lambda} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_{\lambda} = i(\vec{k}_{\lambda} \times \vec{e}_{\lambda}) e^{i \vec{k}_{\lambda} \vec{r}}$$

$$\vec{E}_{\lambda} = -\delta_t \vec{A}_{\lambda} = i|k_{\lambda}| \vec{e}_{\lambda} e^{i \vec{k}_{\lambda} \vec{r}}$$

Les vecteurs, \vec{k}_{λ} , \vec{e}_{λ} et $\vec{k}_{\lambda} \times \vec{e}_{\lambda}$ et donc également les vecteurs \vec{k}_{λ} , \vec{E}_{λ} et \vec{B}_{λ} forment un trièdre trirectangle dextrogyre.

Cette forme du potentiel et des champs électromagnétiques convient à la description d'un photon libre.

Par contre, il convient d'adopter les expressions sous forme de tenseurs sphériques pour décrire une transition électromagnétique nucléaire ou atomique entre deux états définis par des nombres quantiques de parité et de moment.

En fixant la direction de propagation selon l'axe \vec{z} , $\vec{k}_\lambda = k\vec{e}_z \equiv k \chi_0^1$, le vecteur polarisation \vec{e}_λ peut être défini par deux polarisations rectilignes (\vec{e}_x, \vec{e}_y) ou par deux polarisations circulaires ($e_\mu, \mu = \pm 1$) :

$$\vec{e}_\mu = \frac{-\mu}{\sqrt{2}} (\vec{e}_x + \mu i \vec{e}_y)$$

Pour une onde se déplaçant dans la direction de l'axe z et polarisée circulairement, on peut donc définir les expressions suivantes :

$$\vec{A}_\mu = \vec{e}_\mu e^{ikz}, \quad \vec{E}_\mu = i k \vec{A}_\mu, \quad \vec{B}_\mu = -\mu k \vec{A}_\mu$$

Le développement de la fonction exponentielle en harmoniques sphériques

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_{l0}(\theta, \varphi)$$

la relation de couplage

$$Y_{lm} \chi_\mu^1 = \sum_{L=l, l\pm 1} (l \ m \ 1 \ \mu, \ l \ 1 \ L \ M) \bar{Y}_{LM}^{l,1}$$

et la formule du gradient [Appendice A.1], [1, Chapitre 3] conduisent, pour le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$, à l'expression [Appendice B]:

$$\begin{aligned} \vec{A}_\mu = \sum_{L=0}^{\infty} i^L \sqrt{2\pi(2L+1)} [& j_L(kr) \bar{Y}_{L\mu}^{L,1} \\ & -i \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_{L-1}(kr) \bar{Y}_{L\mu}^{L-1,1} \\ & +i \sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_{L+1}(kr) \bar{Y}_{L\mu}^{L+1,1}] \end{aligned} \quad (35)$$

Le premier terme est l'expression de la composante magnétique $\vec{A}_{L\mu}^M(\vec{r})$.

Les deux derniers termes de (35) définissent l'expression (28) de la composante électrique $\vec{A}_{L\mu}^e(\vec{r})$.

On a donc :

$$\vec{A}_\mu(\vec{r}) = \sum_L i^L \sqrt{2\pi(2L+1)} [\vec{A}_{L\mu}^M(\vec{r}) + i\mu \vec{A}_{L\mu}^e(\vec{r})] \quad (36)$$

où $\mu = \pm 1$.

Les expressions analogues peuvent être définies pour les champs \vec{E} et \vec{B} .

3 Transitions radiatives nucléaires

3.1 Hamiltonien d'interaction et éléments de matrice de transition

L'hamiltonien total décrivant le système constitué d'un noyau et du champ de radiation est composé de l'hamiltonien du noyau H_N , de l'hamiltonien du champ de radiation H_{rad} et de l'hamiltonien d'interaction entre la répartition de charge et de courant nucléaires et le champ de radiation :

$$H = H_N + H_{rad} + H_{int}^{N-\gamma} \quad (37)$$

L'hamiltonien $H_{int}^{N-\gamma}$ sera responsable des excitations électromagnétiques par absorption de photons γ entre deux états nucléaires et inversement des désexcitations nucléaires avec émission de photons γ .

Lors de l'absorption d'un photon par un noyau dans son état fondamental, l'état excité du noyau peut être un état lié et le processus est, dans ce cas, l'inverse du processus de désexcitation entre les deux états nucléaires considérés. Par contre, si l'état nucléaire final est au delà du seuil en énergie d'émission d'une particule, le calcul de la section efficace d'un tel processus de dissociation radiative est autre (ex : $^{16}O(\gamma, \alpha)^{12}C$). Dans la suite, nous considérons uniquement les processus électromagnétiques d'absorption ou d'émission d'un photon γ entre deux états nucléaires liés.

L'interaction électromagnétique $H_{int}^{N-\gamma}$ étant faible comparée aux forces nucléaires, l'effet de celle-ci pourra être traité par le calcul des perturbations, l'hamiltonien H_0 non perturbé étant défini par $H_0 = H_N + H_{rad}$.

Si $|i\rangle$ et $|f\rangle$ caractérisent deux états du système (noyau + champ de radiation), états propres de H_0 , la transition entre ces deux états est définie au premier ordre du calcul des perturbations (théorie de perturbation dépendant du temps) par la probabilité :

$$P_{if} = \frac{2\pi}{\hbar} | \langle f | H_{int}^{N-\gamma} | i \rangle |^2 \frac{dn}{dE} \quad (38)$$

où $\frac{dn}{dE}$ représente la densité en énergie des états du système. Pour un noyau de densité de courant $\vec{j} = \rho\vec{v}$ et de densité de moment magnétique $\vec{m} = g_l \vec{l} + g_s \vec{s}$, l'hamiltonien d'interaction est défini par

$$H_{int}^{N-\gamma} = - \int \vec{j} \cdot \vec{A} d\vec{r} - \int \vec{m} \cdot \vec{B} d\vec{r} \quad (39)$$

$g_l = 1$ pour un proton et $= 0$ pour un neutron ; $g_s = 5.58$ pour un proton et $= -3.82$ pour un neutron en unité de magnéton de Bohr nucléaire

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_N c} = 5.8 \cdot 10^{-9} \text{ ev/Gauss.}$$

Les états $|i\rangle$ et $|f\rangle$ dans (38) sont associés aux états du noyau et du champ de radiation, soient :

i) dans le cas de l'absorption d'un photon γ

$|i\rangle = |I_i M_i\rangle |1_\lambda\rangle$ et $|f\rangle = |I_f M_f\rangle |0_\lambda\rangle$
 pour un noyau dans un état initial $|I_i M_i\rangle$ d'énergie E_i qui par absorption d'un photon incident de nombre d'onde k et polarisation λ , est excité dans l'état final $|I_f M_f\rangle$ d'énergie E_f telle que $k_\lambda \hbar c = |E_i - E_f| + E_R$, (E_R étant l'énergie de recul du noyau).

ii) dans le cas de l'émission d'un photon γ

$|i\rangle = |I_i M_i\rangle |0_\lambda\rangle$ et $|f\rangle = |I_f M_f\rangle |1_\lambda\rangle$ pour un noyau dans un état initial excité $|I_i M_i\rangle$ se désexcitant vers un état final $|I_f M_f\rangle$ en émettant un photon γ de type (λ) et d'énergie $k_\lambda \hbar c = |E_i - E_f| - E_R$.

Pour chaque composante multipolaire (λ) du potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ (8) et du champ $\vec{B}(\vec{r})$, on peut définir un élément de matrice de transition

$$\langle f | H_{int}^{N-\gamma} | i \rangle_\lambda = N_\lambda \langle 1_\lambda | q_\lambda^+ | 0_\lambda \rangle \langle N_f | H_{int}(\vec{A}_\lambda^*) | N_i \rangle \quad (40)$$

L'élément de matrice $\langle 1_\lambda | q_\lambda^+ | 0_\lambda \rangle = 1$ est associé à l'opérateur q_λ^+ de création d'un photon de type (λ). Les opérateurs q_λ, q_λ^+ de quantification du champ de radiation sont définis par les relations suivantes pour tout état $|n_\lambda\rangle$ de l'opérateur nombre d'occupation $n_\lambda^{op} = q_\lambda^+ q_\lambda$ [2], [1, Chapitre 4]:

$$q_\lambda^+ |n_\lambda\rangle = \sqrt{n_\lambda + 1} |n_\lambda + 1\rangle \quad q_\lambda |n_\lambda\rangle = \sqrt{n_\lambda} |n_\lambda - 1\rangle$$

$$[q_\lambda, q_\lambda^+] = \delta_{\lambda,\lambda'}$$

Rappelons que la normalisation est

$$N_\lambda = \left(\frac{2\pi}{\omega_\lambda}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{V}}$$

pour une onde plane définie sur un volume V et que la densité des états est donnée par

$$dn = \frac{V}{(2\pi)^3} \omega_\lambda^2 d\omega_\lambda d\Omega$$

soit encore

$$\frac{dn}{dE} = \frac{\omega^2 V}{2\pi^2 \hbar}$$

Dans le cas de la représentation en ondes sphériques la normalisation sur une sphère de rayon R_0 est donnée par [Appendice A.4]:

$$N_\lambda = \left(\frac{2 k_\lambda^2}{R_0}\right)^{1/2} \left(\frac{2\pi}{\omega_\lambda}\right)^{1/2}$$

et la densité des états est fixée par

$$\frac{dn}{dE} = \frac{R_0}{\pi \hbar c}$$

Elle est obtenue en annulant le champ de radiation à la surface du volume (rayon R_0) de normalisation des fonctions radiales $j_L(kr)$, soit

$$j_L(kR_0) = 0 \text{ pour } kR_0 \rightarrow \infty \text{ i.e. } \frac{\sin(kR_0 - \frac{L\pi}{2})}{kR_0} = 0$$

soit $kR_0 = L\frac{\pi}{2} + n\pi$.

On a donc

$$dn = \frac{R_0}{\pi} dk$$

et dès lors, la probabilité de transition associée à l'émission d'un photon (λ) d'énergie comprise dans l'intervalle $(E, E + dE)$ est donnée par

$$P_{if}^\lambda = \left(\frac{2\pi}{\hbar}\right) \left(\frac{4\pi\omega_\lambda}{\pi\hbar c}\right) | \langle N_f | H_{int}^{N-\gamma}(\vec{A}_\lambda^{\sigma*}) | N_i \rangle |^2 \quad (41)$$

avec

$$H_{int}^{N-\gamma}(\vec{A}_\lambda^{\sigma*}) = - \int \vec{j} \cdot \vec{A}_\lambda^{\sigma*}(\vec{r}) d\vec{r} - \int \vec{m} \cdot \vec{B}_\lambda^{\sigma*}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (42)$$

ou encore explicitement pour les composantes électrique et magnétique (σ) :

$$H_{int}^{N-\gamma}(\vec{A}_{LM}^{\sigma e}) = - \int [\vec{j} \cdot \frac{i}{k\sqrt{L(L+1)}} (\vec{\nabla} \times \vec{L} u_{LM})^* + \vec{m} \frac{ik}{\sqrt{L(L+1)}} (\vec{L} u_{LM})^*] d\vec{r} \quad (43)$$

$$H_{int}^{N-\gamma}(\vec{A}_{LM}^{\sigma m}) = - \int [\vec{j} \cdot \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} (\vec{L} u_{LM})^* + \vec{m} \frac{1}{\sqrt{L(L+1)}} (\vec{\nabla} \times \vec{L} u_{LM})^*] d\vec{r} \quad (44)$$

où

$$u_{LM}(\vec{r}) = j_L(kr) Y_{LM}(\theta, \varphi) \quad (45)$$

On peut encore utiliser la relation :

$$\vec{\nabla} \times \vec{L} u_{LM} = i k^2 \vec{r} u_{LM}(\vec{r}) + i \vec{\nabla}(\delta_r r u_{LM}(\vec{r})) \quad (46)$$

3.2 Approximation des grandes longueurs d'onde

Une approximation généralement utilisée est l'approximation des "grandes longueurs d'onde" soit l'approximation $kr \ll 1$ ou encore $r \ll \lambda$ exprimant que la coordonnée r limitée aux dimensions du noyau ($r \leq R$) est petite comparée à la longueur d'onde λ de la radiation émise. Pour un photon de 1 MeV, on a :

$$kR = \frac{ER}{\hbar c} \simeq \frac{1 \text{ MeV } 1,2 \text{ A}^{1/3} \text{ fm}}{197 \text{ MeV fm}} = 0.006 \text{ A}^{1/3}$$

A cette approximation, la fonction radiale $j_L(kr)$ peut être remplacée par son comportement à l'origine (25). A cette approximation, on peut remplacer l'expression (45) de $u_{LM}(\vec{r})$ par

$$u_{LM}^0(\vec{r}) \equiv \frac{(kr)^L}{(2L+1)!!} Y_{LM}(\theta, \varphi) \quad (47)$$

On peut dès lors écrire :

$$\delta_r r u_{LM}(\vec{r}) = u_{LM}^0(\vec{r}) + r \delta_r u_{LM}^0(\vec{r}) = (L+1)u_{LM}^0(\vec{r})$$

et remplacer (46) par :

$$\vec{\nabla} \times \vec{L} u_{LM}(\vec{r}) \cong i(L+1) \vec{\nabla} u_{LM}^0(\vec{r})$$

le premier terme d'ordre $(kR)^2$ inférieur étant négligé dans (46). Cette dernière expression est alors utilisée pour approcher les définitions (43) et (44).

Dans le calcul du terme associé au courant \vec{j} de la composante électrique (43) de l'hamiltonien d'interaction, on opère une intégration par partie et on remplace ensuite $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ en utilisant la relation de conservation du courant densité.

Dans la composante magnétique (44), on utilise la définition $\vec{j} = \rho \vec{v} = -i\hbar \rho \vec{\nabla} / m_N$.

L'équation de continuité est obtenue en supposant pour les opérateurs densité de charge et de courant, une dépendance en temps telle que les éléments de matrice associés satisfont les relations:

$$\langle f | \vec{j}(\vec{r}, t) | i \rangle = \langle f | \vec{j}(\vec{r}) | i \rangle e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} \quad (48)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) e^{-ikt} \quad (49)$$

On a :

$$\vec{\nabla} \langle f | \vec{j}(\vec{r}, t) | i \rangle = -\delta_t \langle f | \rho(\vec{r}, t) | i \rangle \quad (50)$$

$$= i \frac{(E_f - E_i)}{\hbar} \langle f | \rho(\vec{r}) | i \rangle e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} \quad (51)$$

La possibilité de remplacer les termes de courant (\vec{j}) en termes dépendant de la densité

(ρ) en utilisant la relation de continuité est appelée "Théorème de Siegert"[1, Chapitre 5]. Celui-ci est utile car il permet d'éviter les calculs complexes associés aux termes de courant \vec{j} .

Il peut cependant exister des situations pour lesquelles ce théorème n'est pas applicable. Il en sera ainsi dans des calculs où les états nucléaires sont représentés par un mélange de configurations du modèle en couches, pour lesquelles les fonctions non-perturbées sont associées à différentes énergies d'excitation. De même, lorsque des effets d'échange de mésons doivent être pris en considération, les termes de courant de mésons associés doivent être inclus dans l'équation de continuité pour satisfaire la loi de conservation et le théorème de Siegert n'est plus applicable.

Dans le cadre de ce cours, nous supposons le théorème de Siegert applicable ce qui conduit pour les expressions (43) et (44) aux formes suivantes, définies à l'approximation des grandes longueurs d'onde:

$$H_{int}^{N-\gamma}(\vec{A}_{LM}^{\sigma*}) = \frac{i(L+1)}{\sqrt{L(L+1)}} \frac{k^L}{(2L+1)!!} \mathcal{M}_{L,M}^{\sigma} \quad (52)$$

où

$$\mathcal{M}_{LM}^e = \int \rho(\vec{r}) r^L Y_{LM}^* d\vec{r} - \frac{ik}{L+1} \int \vec{m}(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{\nabla} r^L Y_{LM}^*) d\vec{r} \quad (53)$$

$$\mathcal{M}_{LM}^M = \frac{\hbar}{m_N c} \frac{1}{L+1} \int \rho(\vec{r}) (\vec{L} \cdot \vec{\nabla} r^L Y_{LM}^*) d\vec{r} + \int \vec{m} \cdot \vec{\nabla} (r^L Y_{LM}^*) d\vec{r} \quad (54)$$

Les moments multipolaires définis en (53) et (54) sont de parité $(-)^L$ dans le cas électrique et $(-)^{L+1}$ dans le cas magnétique.

La probabilité de transition (41) entre deux états nucléaires, associée à la composante multipolaire d'ordre (LM) et de parité (σ) est alors définie sous la forme :

$$P_{LM}^{\sigma} = 8\pi \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} \frac{k^{2L+1}}{\hbar} | \langle I_f M_f | \mathcal{M}_{LM}^{\sigma} | I_i M_i \rangle |^2 \quad (55)$$

Le théorème de Wigner-Eckart appliqué à l'élément de matrice des composantes de l'opérateur tensoriel $\mathcal{M}_{L,M}^{\sigma}$ permet de le factoriser sous la forme

$$\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{L,M}^{\sigma} | I_i M_i \rangle = \frac{1}{\sqrt{2I_i+1}} (I_f M_f L M | I_f L I_i M_i) \langle I_f || \mathcal{M}_L^{\sigma} || I_i \rangle \quad (56)$$

où le coefficient de Clebsch-Gordan est un facteur purement géométrique et où le facteur $\langle I_f || \mathcal{M}_L^{\sigma} || I_i \rangle$, indépendant des composantes directionnelles des moments définit l'élément de matrice réduit de l'opérateur "moment multipolaire".

3.3 Probabilités de transition réduites, ordre de grandeur et règles de sélection

On peut utiliser la relation (56) pour sommer sur toutes les projections du moment de l'état nucléaire final et pour moyenner sur celles de l'état nucléaire initial :

$$\frac{1}{2I_i + 1} \sum_{M_i} \sum_{M_f} P_{LM}^\sigma = P_{\sigma L}(I_i \rightarrow I_f)$$

Ces sommations s'imposent si le noyau initial n'est pas polarisé et si aucune mesure de polarisation n'est effectuée dans l'état final.

En définissant la probabilité de transition réduite

$$B(\sigma, L, I_i \rightarrow I_f) = \frac{\delta(\vec{L}, \vec{I}_i, \vec{I}_f)}{2I_i + 1} | \langle I_f || \mathcal{M}_L^\sigma || I_i \rangle |^2 \quad (57)$$

On a encore :

$$P_{\sigma L}(I_i \rightarrow I_f) = 8\pi \frac{L + 1}{L[(2L + 1)!!]^2} \frac{k^{2L+1}}{\hbar} B(\sigma, L; I_i \rightarrow I_f) \quad (58)$$

Les probabilités de transition réduites (57) de type E_L ou M_L ont les mêmes dimensions $e^2 L^{2L}$ et les probabilités (58) ont donc bien comme dimension l'inverse d'un temps. Les règles de sélection associées à la non-nullité des coefficients de Clebsch-Gordan sont définies dans (57) par la relation triangulaire de couplage des moments $\vec{L} + \vec{I}_i + \vec{I}_f = 0$ ou encore

$$|I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f \quad (59)$$

De plus, la parité étant conservée par les interactions fortes et électromagnétiques on aura :

$$\pi_i \pi_f = (-)^L \text{ pour une transition de type } E_L$$

$$\pi_i \pi_f = (-)^{L+1} \text{ pour une transition de type } M_L$$

π_i et π_f étant les parités respectives des états nucléaires de la transition.

Dès lors, dans une transition entre deux états nucléaires (liés) de spin et parité respectifs I_i, π_i et I_f, π_f , la probabilité totale de transition électromagnétique est $P = \sum_{\sigma, L} P_{\sigma, L}$.

Nous donnons ci-après quelques estimations des ordres de grandeurs des différentes composantes $P_{\sigma L}$ en regard de la parité et de l'ordre L .

La durée de vie associée est donc donnée par $T(I_i \rightarrow I_f) = 1 / P$ et le niveau initial aura une largeur $\Gamma_\gamma = \hbar/T$.

Considérons l'importance relative des deux termes du moment électrique (53): l'ordre de grandeur du second terme relativement au premier est donné par $(\frac{\hbar\omega}{2(L+1)m_N c^2})$, le magnéton de Bohr nucléaire ($e\hbar/2m_N c$) fixant la valeur de \bar{m} . L'énergie de transition nucléaire étant de l'ordre de quelques MeV et la masse du nucléon d'environ 939

MeV, le second terme est en général négligeable dans l'expression (53). Il n'en est pas de même dans le moment magnétique (54) où les deux termes ont le même ordre de grandeur.

Pour un même ordre L , le rapport d'une transition magnétique M_L à une transition électrique E_L est fixé approximativement par :

$$\left(\frac{\mathcal{M}_{LM}^M}{\mathcal{M}_{LM}^E}\right)^2 \sim 10\left(\frac{\hbar c}{m_N c^2 R}\right)^2 \sim 0.3 A^{-2/3} \quad (60)$$

D'autre part, les transitions d'ordre $(L+1)$ sont réduites d'un facteur $(kR)^2$ par rapport aux transitions d'ordre L , cette relation étant valable indifféremment pour les transitions électriques et magnétiques.

On peut encore en déduire qu'en l'absence de tout effet particulier due à la structure nucléaire, la composante M_L d'une transition sera plus favorable que la composante E_{L+1} permise par les règles de sélection :

$$\frac{P_{E,L+1}}{P_{M,L}} \sim \frac{1}{10}(kR)^2 \left(\frac{\hbar c}{m_N c^2 R}\right)^{-2} = 1.2 \cdot 10^{-4} A^{4/3} \left(\frac{\hbar\omega}{1 \text{ MeV}}\right)^2 \quad (61)$$

Ces estimations sont valables dans le cadre de l'approximation des grandes longueurs d'onde ($kR \ll 1$). Elles sont réalistes pour des transitions nucléaires de quelques MeV. Ces estimations peuvent servir de guide dans tous les processus électromagnétiques tels que émission ou absorption de radiation, excitation coulombienne,....

3.4 Estimation sur base d'un modèle à 1 nucléon

Pour décrire la structure d'un noyau, l'hypothèse qui consiste à définir un champ moyen et à considérer les états des nucléons individuels dans ce champ moyen s'est révélée fructueuse.

Différents modèles nucléaires ont été développés sur cette hypothèse et de nombreux états nucléaires peuvent être décrits en considérant les propriétés associées à un nombre limité voir à un seul nucléon dans un champ moyen - ce sont les modèles à particules indépendantes dont le modèle à un nucléon est, pourrait-on dire, le cas limite.

Dans l'étude des transitions électromagnétiques nucléaires, le modèle à un nucléon peut fournir des estimations, généralement grossières, des probabilités de transition.

L'estimation des probabilités des transitions électromagnétiques dans le cadre d'un modèle à un nucléon [2, Chapitre2] fournit des unités de référence (unités Weisskopf) et une idée qualitative des propriétés nucléaires. Si les probabilités obtenues par ce modèle sont trop faibles, il faut penser à des effets collectifs et des degrés de liberté collectifs doivent être introduits. Si au contraire, les probabilités sont trop grandes comparées aux données expérimentales, il faut penser à de nouveaux nombres quantiques et de nouvelles règles de sélection qui empêchent la transition de se produire.

Considérons un noyau A impair et supposons que l'on puisse attribuer au nucléon impair une partie importante des propriétés du noyau, le coeur nucléaire pair-pair étant supposé ne pas contribuer aux transitions. Les états du nucléon impair sont par exemple définis par le modèle en couches sphériques.

Reprenons l'hamiltonien d'interaction sous la forme (52), les moments \mathcal{M}_{LM}^σ étant définis par (53) et (54), et considérons pour le noyau une distribution de nucléons libres dans un champ moyen. Soient les expressions des densités:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^A e_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (62)$$

$$m(\vec{r}) = \sum_{i=1}^A \mu_i \vec{\sigma}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (63)$$

avec $e_i = +e$ et $\mu_i = 2.79 \mu_B$ pour les protons,
 $e_i = 0$ et $\mu_i = -1.91 \mu_B$ pour les neutrons,

μ_B étant le magnéton de Bohr nucléaire.

Afin de ne pas différencier les états proton et neutron, on utilisera le formalisme de l'isospin avec une composante $\tau_{3i} |p\rangle = +|p\rangle$ et $\tau_{3i} |n\rangle = -|n\rangle$

On a donc $e_i = \frac{e}{2}(1 + \tau_{3i})$ et $\mu_i = \frac{1}{2}(\mu_+ + \mu_- \tau_{3i})$ avec $\mu_{\pm} = \mu_p \pm \mu_n$

Ainsi, pour les transitions électriques, le terme dominant est donné par :

$$\mathcal{M}_{LM}^e = \sum_{i=1}^A e_i r_i^L Y_{LM}^*(\vec{r}_i)$$

En supposant les nucléons liés dans un champ central d'oscillateur isotrope avec correction en \vec{l}^2 et $\vec{l} \cdot \vec{s}$, les états nucléaires individuels sont définis par les nombres quantiques $|n l j m\rangle$ (modèle en couches sphériques). On aura alors à calculer des éléments de matrice du type

$$\langle n_f l_f j_f m_f | \mathcal{M}_{LM}^\sigma | n_i l_i j_i m_i \rangle$$

et des probabilités de transition réduites

$$B(\sigma, L, j_i \rightarrow j_f) = \frac{1}{2j_i + 1} | \langle n_f(l_f \frac{1}{2}) j_f | \mathcal{M}_L^\sigma | n_i(l_i \frac{1}{2}) j_i \rangle |^2 \quad (64)$$

Ainsi, explicitement, on aura pour une transition électrique E_L :

$$B(E_L, j_i \rightarrow j_f) = \frac{e^2}{2j_i + 1} | \langle n_f | r^L | n_i \rangle |^2 | \langle l_f \frac{1}{2} j_f || Y_L || l_i \frac{1}{2} j_i \rangle |^2 \quad (65)$$

Seul le premier terme du moment électrique a été retenu, le second terme étant d'ordre inférieur par le facteur $\frac{\hbar}{m_N c} \simeq 10^{-3} E_\gamma (MeV)$

Les relations définissant les éléments de matrice du tenseur Y_L permettent d'écrire (65) sous la forme [3, Chapitre 6.3 et 9.6]:

$$B(E_L, j_i \rightarrow j_f) = \frac{e^2}{2j_i + 1} | \langle n_f | r^L | n_i \rangle |^2 (2j_i + 1)(2j_f + 1) \left\{ \begin{matrix} l_f & l_i & L \\ j_i & j_f & 1/2 \end{matrix} \right\}^2 (l_f || Y_L || l_i)^2 \quad (66)$$

On en déduit la probabilité d'émission E_L (55) entre deux états à un seul nucléon sous la forme (single particle : s.p) :

$$P_{E_L}^{s.p} = \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \omega (kR)^{2L} \left(\frac{r}{R} \right)^L S_{E_L} \quad (67)$$

où le facteur S_{E_L} est défini à partir de l'expression (66).

Pour une transition magnétique M_L , les deux termes du moment magnétique (54) étant du même ordre de grandeur doivent être considérés et on obtient :

$$B(M_L, j_i \rightarrow j_f) = \left(\frac{\hbar}{m_N c} \right)^2 | \langle n_f | r^{L-1} | n_i \rangle |^2 (2j_f + 1) \frac{(2L+1)^2}{L} (l_f || Y_{L-1} || l_i)^2 \left[\sqrt{\frac{3}{2}} \left(L\mu_p - \frac{L}{L+1} \right) \left\{ \begin{matrix} l_f & 1/2 & j_f \\ l_i & 1/2 & j_i \\ L-1 & 1 & L \end{matrix} \right\} + \frac{(-)^{j_f+l_f+\frac{1}{2}}}{(L+1)} (j_i(j_i+1)(2j_i+1))^{1/2} \left\{ \begin{matrix} l_f & j_f & 1/2 \\ j_i & l_i & L-1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_f & L & j_i \\ 1 & j_i & L-1 \end{matrix} \right\} \right]^2 \quad (68)$$

Cette expression se simplifie pour les transitions à $L = |j_i - j_f|$ car dans ce cas le second terme de l'expression s'annule, la règle triangulaire $(j_i, j_f, L-1)$ n'étant pas satisfaite dans les coefficients $6j$. Dans ce cas on aura pour l'expression de la probabilité d'émission M_L entre deux états à un seul nucléon (s.p.) :

$$P_{M_L}^{s.p} = \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right) \omega (kR)^{2L} \left(\frac{\hbar}{m_N c R} \right)^2 \left(\mu_p L - \frac{L}{L+1} \right)^2 \left\langle \left(\frac{r}{R} \right)^{L-1} \right\rangle^2 S_{M_L} \quad (69)$$

où le facteur S_{M_L} est défini, dans le cas particulier d'une transition à $L = |j_i - j_f|$, par

$$S_{M_L} = 4\pi \frac{(2L+1)(2j_f+1)}{L} (l_f || Y_{L-1} || l_i)^2 \frac{3}{2} \left\{ \begin{matrix} l_f & 1/2 & j_f \\ l_i & 1/2 & j_i \\ L-1 & 1 & L \end{matrix} \right\}^2 \quad (70)$$

Dans l'hypothèse où les états d'un seul nucléon impair caractérisent les états d'un noyau A impair, on retrouve donc par les conditions de non-nullité des facteurs S_{E_L} et S_{M_L} les règles de sélection générales soient:

pour une transition E_L :

$$|j_i - j_f| \leq L \leq j_i + j_f$$

et $(-)^{(l_i+l_f+L)} = +1$ équivalente à $\pi_i \pi_f = (-)^L$

pour une transition M_L :

$$|j_i - j_f| \leq L \leq j_i + j_f$$

et $(-)^{l_i+l_f+L-1} = +1$ équivalente à $\pi_i \pi_f = (-)^{L+1}$.

Des règles de sélection supplémentaires apparaissent, imposées par le modèle nucléaire choisi, soient dans ce cas :

$$|l_i - l_f| \leq L \leq l_i + l_f$$

pour une transition E_L ,

$$|l_i - l_f| \leq L - 1 \leq l_i + l_f$$

pour une transition M_L .

Unités 'Weisskopf'

Les expressions (67) et (69) des probabilités de transitions permettent de fixer des ordres de grandeur en utilisant, pour les fonctions radiales $|n_i \rangle$, $|n_f \rangle$ du modèle, une valeur constante $|n \rangle = u(r) = \sqrt{\frac{3}{R^3}}$ sur le domaine nucléaire $r \leq R$ et $|n \rangle = 0$ à l'extérieur de ce domaine. On a alors $\langle (\frac{r}{R})^L \rangle = \frac{3}{L+3}$.

Avec $R = r_0 A^{1/3}$ (fm) et $E_\gamma = k \hbar c \simeq k 197$ MeV fm, on a comme estimation des probabilités de transition E_L :

$$P_{EL}^{s.p} \simeq \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \omega(kR)^{2L} S_{EL}$$

soit:

$$\frac{1}{\tau_{EL}^{s.p}} = 4.4 \cdot 10^{21} \frac{(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{r_0^{2L}}{(\hbar c)^{2L+1}} S_{EL} E_\gamma^{2L+1} A^{2L/3} (s^{-1}) \quad (71)$$

si E_γ est exprimée en MeV, $\hbar c = 197$ MeV.fm et $e^2/\hbar c = 1/137$.

De même pour les transitions M_L , une estimation est donnée par :

$$P_{ML}^{s.p} \simeq \frac{2(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+2}\right)^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right) \left(\frac{\hbar c}{m_N c^2 R}\right)^2 \omega(kR)^{2L} S_{ML} \left(\mu_p L - \frac{L}{L+1}\right)^2 \quad (72)$$

soit

$$\frac{1}{\tau_{ML}^{s.p}} = 1.9 \cdot 10^{20} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+2}\right)^2 \frac{r_0^{2L-2}}{(\hbar c)^{2L+1}} S_{ML} \left(\mu_p L - \frac{L}{L+1}\right)^2 E_\gamma^{2L+1} A^{\frac{2L-2}{3}} (s^{-1}) \quad (73)$$

si E_γ est exprimé en MeV, $\hbar c = 197$ MeV.fm et $e^2/\hbar c = 1/137$.

Dans le cas particulier d'une transition $|j_i l_i 1/2 \rangle = |L+1/2, L, 1/2 \rangle \rightarrow |j_f l_f 1/2 \rangle = |1/2 0 1/2 \rangle$ le facteur $S_{EL} = 1$ et l'expression (71) définit l'unité "Weisskopf" des transitions $E_L(s^{-1})$:

$$\frac{1}{\tau_{EL}^W} = 4.4 \cdot 10^{21} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{r_0^{2L}}{(\hbar c)^{2L+1}} E_\gamma^{2L+1} A^{\frac{2L}{3}} \quad (74)$$

De même l'unité "Weisskopf" des transitions $M_L(s^{-1})$ est défini par référence à (73) et estimée à la valeur

$$\frac{1}{\tau_{ML}^W} = 1.32 \cdot 10^{21} \frac{L+1}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{r_0^{2L}}{(\hbar c)^{2L+1}} E_\gamma^{2L+1} A^{\frac{2L-2}{3}} \quad (75)$$

$$= 10 \left(\frac{\hbar c}{m_N c^2 R}\right)^2 \cdot \frac{1}{\tau_{EL}^W} \quad (76)$$

L'estimation $10 \left(\frac{\hbar c}{m_N c^2 R}\right)^2 \simeq 0.3 A^{-\frac{2}{3}}$ où $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$, a été introduite dans l'expression (76). Le coefficient numérique $(3/(L+2))^2$ a été également remplacé par $(3/(L+3))^2$ afin de relier plus directement les unités des transitions M_L à celles des transitions E_L . Ces unités ont été introduites par V.F. Weisskopf en 1951 [9].

Largeurs totale et partielles d'un état nucléaire

En utilisant la relation $\Delta E \Delta t \sim \hbar$, on définit la largeur d'un niveau nucléaire par $\Gamma = \hbar/\tau$.

Pour caractériser les ordres de grandeur des largeurs " γ " des niveaux nucléaires, les largeurs "Weisskopf" Γ_W seront utilisées comme valeurs de référence. Un état initial $|i \rangle$ pouvant se désexciter vers différents états finals $|f \rangle_k$, la comparaison entre théorie et expérience exige la mesure des différentes probabilités de transition P_k .

La largeur totale Γ de l'état initial s'exprime en fonction des largeurs partielles Γ_k



$$\Gamma = \sum_k \Gamma_k \quad (77)$$

Si les seules désexcitations de l'état initial sont les transitions radiatives $|i \rangle \rightarrow |f \rangle_k$, on a

$$\sum_k P_k = 1 \text{ et } \Gamma_k = P_k \cdot \Gamma \quad (78)$$

La largeur radiative Γ_k résulte généralement de plusieurs composantes multipolaires (E_L, M_{L+1}, \dots). En supposant, ce qui est réaliste, que seules les multipolarités σ_L et σ'_{L+1} contribuent, on a :

$$\Gamma_k = \Gamma_k(\sigma_L) + \Gamma_k(\sigma'_{L+1}) \quad (79)$$

Le rapport des largeurs partielles $\Gamma_k(\sigma_L)$ et $\Gamma_k(\sigma'_{L+1})$ peut être obtenu expérimentalement; on définit un rapport de mélange

$$\delta_k^2 = \frac{\Gamma_k(\sigma'_{L+1})}{\Gamma_k(\sigma_L)}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \Gamma_k(\sigma_L) &= \frac{\Gamma_k}{1 + \delta_k^2} = \frac{P_k \Gamma}{1 + \delta_k^2} \\ \Gamma_k(\sigma'_{L+1}) &= \frac{\delta_k^2}{1 + \delta_k^2} P_k \Gamma \end{aligned} \quad (80)$$

En reprenant la relation $\Gamma = \frac{658}{\tau} \text{ fs meV}$ avec $\hbar = 658 \cdot 10^{-15} \text{ meV.s}$ et $\text{fs} = 10^{-15} \text{ s}$, on a, dans l'hypothèse de transitions uniquement radiatives, les expressions des largeurs partielles :

$$\begin{aligned} \Gamma_k(\sigma_L) &= 658 \frac{P_k}{1 + \delta_k^2} \frac{\text{fs meV}}{\tau} \\ \Gamma_k(\sigma'_{L+1}) &= 658 \frac{P_k \cdot \delta_k^2}{1 + \delta_k^2} \frac{\text{fs meV}}{\tau} \end{aligned} \quad (81)$$

On peut encore utiliser l'expression de la 1/2 vie du niveau nucléaire soit $\tau_{1/2} = \tau \cdot \ln 2$.

Les largeurs "Weisskopf sont données par

$$\begin{aligned} \Gamma_W(E_L) &= \frac{658 \cdot 10^{-15} \text{ meV}}{\tau_W(E_L)} \\ &= 2.9 \cdot 10^9 \frac{(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{\tau_0^{2L}}{(\hbar c)^{2L+1}} E_\gamma^{2L+1} A^{\frac{2L}{3}} \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_W(M_L) &= \frac{658 \cdot 10^{-15} \text{ meV}}{\tau_W(M_L)} \\ &= 1.25 \cdot 10^9 \frac{(L+1)}{L[(2L+1)!!]^2} \left(\frac{3}{L+3}\right)^2 \frac{\tau_0^{2L-2}}{(\hbar c)^{2L+1}} E_\gamma^{2L+1} A^{\frac{2L-2}{3}} \end{aligned} \quad (83)$$

soient pour les différentes multipolarités, les valeurs données dans la *Table I* (calculées pour $\tau_0 = 1.2 \text{ fm}$).

3.5 Règles de sélection en isospin des transitions radiatives

Bien que l'idée de l'invariance de charge de l'hamiltonien nucléaire (isospin = bon nombre quantique) soit ancienne (Wigner 1937), ce n'est que plus récemment que des tests expérimentaux du rôle de l'isospin dans les interactions des noyaux avec le champ électromagnétique ont été réalisés.

Considérons les éléments de matrice des moments multipolaires entre des états nucléaires définis par les nombres quantiques de spin (I, M) et d'isospin (T, T_z)

$$\langle I_f M_f, T_f T_{zf} | \mathcal{M}_{LM}^\sigma | I_i M_i, T_i T_{zi} \rangle \quad (84)$$

En explicitant les expressions e_i et μ_i de (62) et (63) dans les moments multipolaires électriques et magnétiques (53) et (54), ces derniers se séparent en un terme scalaire d'isospin et un terme vecteur d'isospin, soit :

$$\mathcal{M}_{LM}^\sigma = \mathcal{M}_{LM}^{\sigma(0,0)} + \mathcal{M}_{LM}^{\sigma(1,0)}(\tau_3) \quad (85)$$

Cette séparation fait directement apparaître les règles de sélection en isospin.

En effet, pour la composante q d'un opérateur tensoriel d'ordre k en isospin, le théorème de Wigner-Eckart permet d'écrire l'élément de matrice

$$\langle T_f T_{zf} | O^{kq} | T_i T_{zi} \rangle = (-)^{T_f - T_{zf}} \begin{pmatrix} T_f & k & T_i \\ -T_{zf} & q & T_{zi} \end{pmatrix} \langle T_f || O^k || T_i \rangle \quad (86)$$

La règle de sélection est entièrement définie par le coefficient de Clebsch-Gordan

$$q = T_{zf} - T_{zi}$$

$$|T_f - T_i| \leq k \leq T_f + T_i$$

En appliquant le théorème de Wigner-Eckart au calcul des éléments de matrice des moments multipolaires on a donc :

$$\begin{aligned} & \langle I_f M_f, T_f T_{zf} | \mathcal{M}_{LM}^{\sigma(0,0)} + \mathcal{M}_{LM}^{\sigma(1,0)} | I_i M_i, T_i T_{zi} \rangle \\ &= (-)^{T_f - T_{zf}} \begin{pmatrix} T_f & 0 & T_i \\ -T_{zf} & 0 & T_{zi} \end{pmatrix} \langle I_f M_f; T_f || \mathcal{M}_{LM}^{\sigma(0)} || I_i M_i; T_i \rangle \\ &+ (-)^{T_f - T_{zf}} \begin{pmatrix} T_f & 1 & T_i \\ -T_{zf} & 0 & T_{zi} \end{pmatrix} \langle I_f M_f; T_f || \mathcal{M}_{LM}^{\sigma(1)} || I_i M_i; T_i \rangle \end{aligned} \quad (87)$$

On note immédiatement la condition $T_{zf} = T_{zi} \equiv T_3$ évidente pour une transition γ , i.e. dans un noyau donné, à T_3 défini ($T_3 = \frac{Z-N}{2}$).

Le terme scalaire d'isospin dans (87) est défini explicitement par

$$\begin{aligned} &= (2 T_i + 1)^{-1/2} \delta_{T_f, T_i} \langle I_f M_f, T_f || \mathcal{M}_{LM}^{\sigma(0)} || I_i M_i, T_i \rangle \\ &= \delta_{T_f, T_i} \langle I_f M_f | \mathcal{M}_{LM}^\sigma | I_i M_i \rangle \end{aligned} \quad (88)$$

Ce terme est donc différent de zéro pour les transitions $\Delta T = 0$ du type $T \rightarrow T$; il est indépendant de T_z et de T .

Pour le terme vecteur d'isospin, on a :

- dans le cas $T_i = T_f \pm 1$

$$(-)^{T_f - T_3} \begin{pmatrix} T_f & 1 & T_i \\ -T_3 & 0 & T_3 \end{pmatrix} = (-)^{T_f - T_3} \left(\frac{T_{>}^2 - T_3^2}{T_{>}(2T_{>} + 1)(2T_{>} - 1)} \right)^{1/2} \delta(\vec{T}_f \vec{1} \vec{T}_i)$$

où $T_{>}$ désigne la plus grande des valeurs (T_i, T_f) .

- dans le cas $T_i = T_f$

$$(-)^{T_f - T_3} \begin{pmatrix} T_f & 1 & T_i \\ -T_3 & 0 & T_3 \end{pmatrix} = \frac{T_3}{(T_i(T_i + 1)(2T_i + 1))^{1/2}}$$

Ce terme contribue aux transitions de type $\Delta T = 0, \pm 1$ ($T = 0 \rightarrow T = 0$ interdite). La règle de sélection d'isospin des transitions électromagnétiques se résume donc en :

$$\Delta T_3 = 0, \Delta T = 0, \pm 1 \quad (89)$$

En pratique, différentes corrections vont à l'encontre de l'interdiction des transitions dues aux règles de sélection en isospin telles que les termes d'ordre supérieur en (kR) dans les moments \mathcal{M}_{LM}^e , les contributions des courants mésoniques, les forces de Coulomb et la différence de masse $p - n$ qui brisent la symétrie d'isospin,..... Dès lors, on parlera plutôt de transitions "retardées" d'isospin.

3.6 Corrections de centre de masse

Dans un modèle à particules indépendantes, la fonction d'onde totale du noyau composé de A nucléons est écrite en les coordonnées $\vec{r}_1 \vec{r}_2 \dots \vec{r}_A$ de ces nucléons, référés à une origine quelconque. En pratique il est nécessaire de séparer l'interaction du photon avec le noyau considéré comme un tout, ce qui produit une excitation ou désexcitation de son centre de masse, des interactions associées aux degrés de liberté internes. Pour ce faire, il faut notamment considérer les opérateurs en coordonnées relatives $\vec{\rho} = \vec{r}_i - \vec{R}$ où $\vec{R} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A \vec{r}_i$ est la coordonnée du centre de masse du noyau, avec la condition $\sum_{i=1}^A \vec{\rho}_i = 0$. Généralement dans un calcul en modèle en couches, les états du noyau sont définis par les fonctions d'onde $\Psi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_A)$ et l'hamiltonien n'est pas invariant de translation. Des corrections d'élimination des effets "spurioux" liés au centre de masse doivent être opérées.

Pour les transitions électromagnétiques, une correction peut être définie par l'introduction de charges effectives. Cette correction de centre de masse est particulièrement importante pour les transitions dipolaires E_1 ; elle peut dans ce cas être facilement évaluée.

En effet, considérons l'expression de l'opérateur de transition E_1

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1M}^e &= \sum_{i=1}^A e_i r_i Y_{1M}^* \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \sum_{i=1}^A e_i (r_i)_M = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} D_M \end{aligned} \quad (90)$$

où D_M est une des composantes $M = +1, 0, -1$ du vecteur

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^A e_i \vec{r}_i \quad (91)$$

En terme des coordonnées relatives $\vec{\rho}_i$ appropriées pour exprimer l'excitation des seuls degrés de liberté internes, on aurait l'opérateur

$$\vec{D}' = \sum_{i=1}^A e_i \vec{\rho}_i = \sum_{i=1}^A e_i (\vec{r}_i - \vec{R}) \quad (92)$$

soit encore

$$\begin{aligned} \vec{D}' &= e \sum_{i=1}^Z \vec{r}_i - e Z \vec{R} = e \sum_{i=1}^Z \vec{r}_i - \frac{eZ}{A} \sum_{i=1}^A \vec{r}_i \\ &= e \sum_{i=1}^Z \left(1 - \frac{Z}{A}\right) \vec{r}_i - \frac{eZ}{A} \sum_{i=Z+1}^A \vec{r}_i \end{aligned} \quad (93)$$

La première sommation de 1 à Z concerne les protons, la seconde de $(Z + 1)$ à A concerne les $N = A - Z$ neutrons. On a encore :

$$\vec{D}' = e \frac{N}{A} \sum_{i=1}^Z \vec{r}_i - e \frac{Z}{A} \sum_{i=Z+1}^A \vec{r}_i \quad (94)$$

On peut donc considérer que l'expression en coordonnées \vec{r}_i , soit:

$$\vec{D} = \sum_{i=1}^A e_i \vec{r}_i$$

est correcte en affectant aux protons une charge effective $e_i = \frac{eN}{A}$ et aux neutrons une charge effective $e_i = \frac{-eZ}{A}$. Ces charges effectives définissent l'image du dipole.

La différence entre les opérateurs \vec{D} et \vec{D}' est

$$\vec{D} = \vec{D}' + e Z \vec{R}$$

Ce terme complémentaire correspond à considérer le noyau dans son ensemble (centre de masse \vec{R}) avec une charge définie par les Z protons (charge totale = $+Ze$).

La notion de charge effective a pour effet de tenir compte des contributions dues au recul du noyau résiduel lors de la transition E_1 définie ici dans un modèle à particules indépendantes.

L'opérateur \vec{D}' peut encore être écrit en utilisant les opérateurs d'isospin différenciant neutrons et protons. On a alors :

$$\vec{D}' = e \frac{N - Z}{2A} \sum_{i=1}^A \vec{r}_i - \frac{e}{2} \sum_{i=1}^A \tau_{3i} \vec{r}_i \quad (95)$$

Pour les transitions électriques et magnétiques d'ordre supérieur, la notion de charge effective est moins bien justifiée. La correction de recul du centre de masse est d'ordre $\leq \frac{1}{A}$, d'autant plus faible que le noyau est lourd.

On peut montrer que la correction introduit non seulement des termes en les coordonnées de particules individuelles comme dans le cas de l'opérateur E_1 mais également des termes dépendant des coordonnées de plus d'une particule.

En ne retenant que les termes correctifs de particules individuelles on a pour $L \geq 2$, des charges effectives $e_i = e \frac{1}{A^L} [(A-1)^L + (-)^L (Z-1)]$ pour les protons et $e_i = e Z \left(\frac{-1}{A}\right)^L$ pour les neutrons. Les termes correctifs en les coordonnées de plusieurs particules ne peuvent être évalués que par référence à un modèle du noyau; ils ne sont pas nécessairement négligeables.

Dans le cas des opérateurs magnétiques; on remplacera les coordonnées \vec{r}_i par $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{R}$ et les moments \vec{p}_i par $\vec{\pi}_i = \vec{p}_i - \frac{1}{A} \vec{P}$ où le moment du centre de masse est défini par $\vec{P} = \sum_{i=1}^A \vec{p}_i$ [1, Chapitre 5].

La correction pour l'opérateur M_1 est d'ordre $\frac{1}{A}$.

3.7 Transitions défavorisées E_1 , M_1

De l'expression (95) et des règles de sélection d'isospin il résulte par exemple qu'une transition E_1 à $\Delta T = 0$ dans les noyaux self-conjugués ($Z = N, T_3 = 0$) est impossible.

Une règle similaire est définie pour les transitions M_1 . En effet, dans le moment multipolaire magnétique, la contribution du terme en le moment angulaire orbital est faible et la contribution scalaire d'isospin est donc essentiellement définie par le terme en $\mu_+ = \mu_p + \mu_n = 0.88$; elle est d'un ordre de grandeur inférieur à la contribution vectorielle proportionnelle à $\mu_- = \mu_p - \mu_n = 4.70$.

La contribution scalaire étant faible, les transitions M_1 à $\Delta T = 0$ des noyaux self-conjugués ($N = Z, T_3 = 0$) seront peu favorisées.

Ce sont là deux exemples particuliers mettant en évidence d'une part l'effet de correction de recul nucléaire dans les transitions dipolaires E_1 et d'autre part les règles de sélection en isospin des transitions dipolaires E_1 et M_1 .

En pratique, différentes corrections vont à l'encontre de l'interdiction des transitions dues aux règles de sélection en isospin comme nous l'avons déjà mentionné.

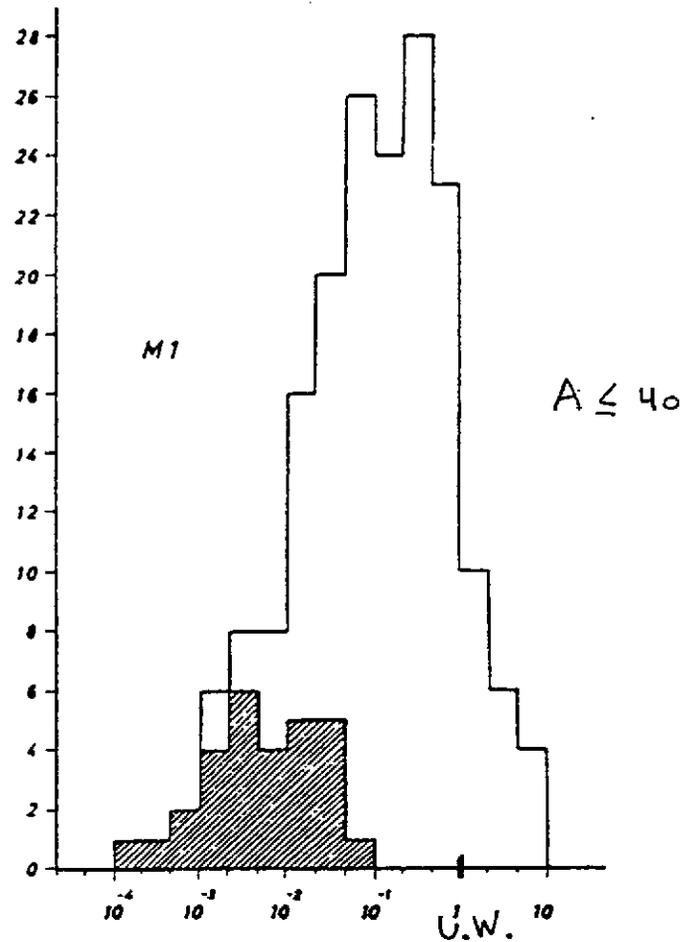
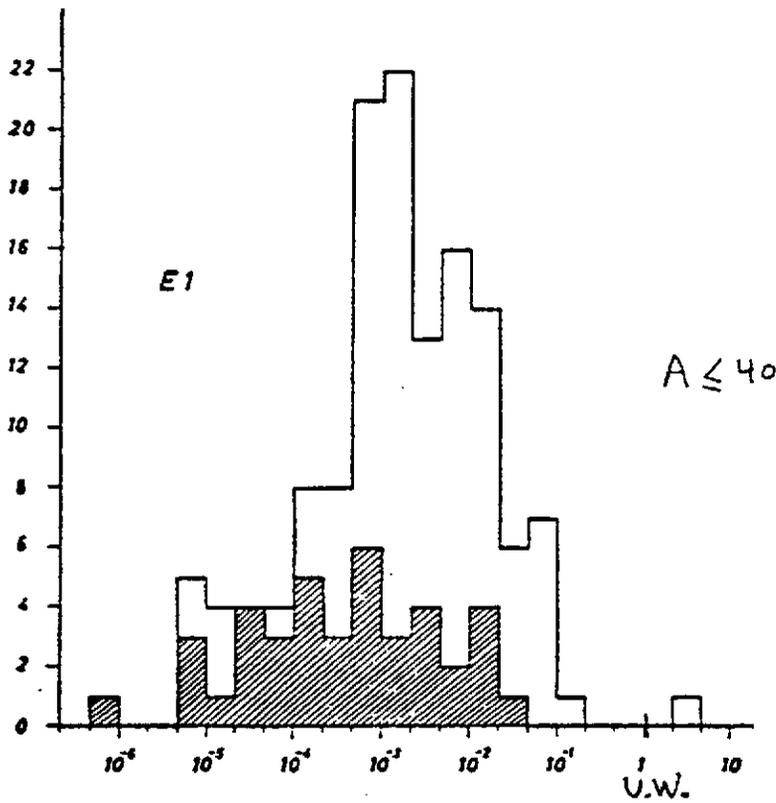
Les données expérimentales des transitions E_1 (Figure 3.1) montrent que les transitions E_1 "interdites" sont en fait défavorisées d'un ordre de grandeur.

La distribution des transitions M_1 (Figure 3.2) montre pour les transitions M_1 "interdites", un facteur d'empêchement similaire à celui identifié pour les transitions E_1 .

Figures 3.1 et 3.2

Figure 3.1 : Distribution des transitions $E1$ en unités Weisskopf pour les noyaux $A \leq 40$. La zone hachurée est celle des transitions retardées par les règles de sélection en isospin.

Figure 3.2 : idem Figure 3.1 pour les transitions $M1$



3.8 Etude qualitative des transitions E_L, M_L

Les expressions simplifiées obtenues dans le cadre du modèle à un nucléon permettent de mettre en évidence les règles essentielles de variation des probabilités de transition électromagnétique.

Ces probabilités présentent une dépendance importante en

- l'ordre de multipolarité L
- l'énergie de transition
- le caractère électrique ou magnétique

Pour une multipolarité L donnée, la probabilité de transition radiative augmente avec l'énergie proportionnellement à E^{2L+1} . Cette variation en énergie est directement apparente dans l'expression des unités Weisskopf des différents ordres multipolaires (71)-(73).

Les largeurs Weisskopf $\Gamma_W(E_L)$ et $\Gamma_W(M_L)$ en meV sont données dans la Table I [3].

TABLE I

The Weisskopf single-particle widths Γ_W (W.u.) in meV

Electric ^{a)}	Magnetic ^{a)}
$\Gamma_W(\epsilon 1) = 68 A^{2/3} E_\gamma^3$	$\Gamma_W(\pi 1) = 21 E_\gamma^3$
$\Gamma_W(\epsilon 2) = 4.9 \times 10^{-5} A^{4/3} E_\gamma^5$	$\Gamma_W(\pi 2) = 1.5 \times 10^{-5} A^{2/3} E_\gamma^5$
$\Gamma_W(\epsilon 3) = 2.3 \times 10^{-11} A^2 E_\gamma^7$	$\Gamma_W(\pi 3) = 6.8 \times 10^{-12} A^{4/3} E_\gamma^7$
$\Gamma_W(\epsilon 4) = 6.8 \times 10^{-18} A^{8/3} E_\gamma^9$	$\Gamma_W(\pi 4) = 2.1 \times 10^{-18} A^2 E_\gamma^9$
$\Gamma_W(\epsilon 5) = 1.6 \times 10^{-24} A^{10/3} E_\gamma^{11}$	$\Gamma_W(\pi 5) = 4.9 \times 10^{-25} A^{8/3} E_\gamma^{11}$

^{a)} The symbol A denotes the mass number and E_γ the transition energy in MeV.

Pour une énergie donnée, la probabilité de transition décroît en fonction de la multipolarité L proportionnellement à $(kR)^{2L}$ ($kR \ll 1$) où R définit le rayon du noyau. Les transitions d'ordre L élevé sont moins favorisées; de toutes les multipolarités L permises par les règles de sélection, celle de L minimum sera la plus favorable.

A même valeur de L , la radiation électrique E_L est toujours plus favorable que la radiation magnétique M_L .

Des unités Weisskopf (82)-(83) on déduit le rapport

$$\Gamma_W(M_L)/\Gamma_W(E_L) \cong 0.4 A^{-2/3}$$

On a également la relation

$$\frac{\Gamma_W(E_{L+1})}{\Gamma_W(M_L)} = \frac{\Gamma_W(E_{L+1})}{\Gamma_W(E_L)} \cdot \frac{\Gamma_W(E_L)}{\Gamma_W(M_L)} \simeq 1.2 \cdot 10^{-4} A^{4/3} E^2$$

montrant que la transition magnétique M_L est plus favorable que la transition électrique E_{L+1} d'ordre multipolaire supérieur. Si les règles de sélection le permettent, des mélanges (M_L, E_{L+1}) peuvent être observés, le plus favorable étant le mélange (M_L, E_L).

Ces différentes variations qualitatives des transitions radiatives sont représentées sur la Figure 3.3, définissant les probabilités $T_{s.p.}(\text{sec}^{-1})$ calculées dans le modèle à un nucléon, en fonction de l'énergie et pour les différentes transitions E_L et M_L ($L = 1$ à 5). Les paramètres utilisés sont $R = 1.2 A^{1/3} \text{ fm}$, $A = 100$, $\mu_p = 2.79 \frac{e\hbar}{2 m_p c}$ et $S = 1$. Les probabilités de transition radiatives en fonction de l'énergie pour les différents ordres multipolaires $E_L(1-5)$ et $M_L(1-5)$ et différentes valeurs de A sont représentées respectivement sur les figures 3.4 et 3.5.

L'échelle est logarithmique et les valeurs théoriques du modèle à un nucléon (un proton) sont donc représentées par des droites sur ces figures.

Les durées de vie observées des transitions électromagnétiques E_1 à E_5 et M_1 à M_4 sont reportées en fonction du nombre N de neutrons sur les Figures (3.6 à 3.9). L'influence des valeurs d'énergie et de multipolarité est éliminée en considérant, pour une étude comparée de ces transitions, les durées de vie réduites $\tau A^{2L/3} E^{2L+1}$ pour E_L et $\tau A^{(2L-2)/3} E^{2L+1}$ pour M_L .

Les valeurs théoriques du modèle à un nucléon (un proton) sont représentées par des droites horizontales sur ces figures.

Les transitions E_1 (Figures 3.6 et 3.10) sont de 10^3 à 10^7 fois plus lentes que ne le prévoit l'unité Weisskopf. Ceci indique un effet d'interdiction de la transition liée à des règles de sélection supplémentaires; il s'agit des effets de retard dus à l'isospin et à la correction de recul nucléaire (centre de masse) (voir précédemment).

Les transitions E_4, E_5 et quelques transitions E_3 mettent en évidence des effets de structure en couches, notamment au voisinage de $N = 50$ et $N = 126$ ($Z = 82$).

L'effet de fermeture de couches à $N = 50, 82$ et 126 est évident pour les transitions M_4 (Figure 3.9 et 3.11). Celles-ci se trouvent localisées dans les noyaux impairs des régions précédant les nombres exceptionnels en neutron $N = 50, 82$ et 126 ou en proton $Z = 50, 82$. Ces noyaux sont caractérisés par une suite de niveaux de parité différente ($\Delta\pi = -1$) et présentant une grande différence de spins ($\Delta L = 4$) et généralement une faible différence en énergie. Ces transitions M_4 (peu favorisées) sont donc caractéristiques d'états de longues durées de vie : ce sont des transitions "isomériques". Les regroupements apparents sur la Figure 3.9 sont appelés "îles d'isométrie M_4 ". Quelques exemples de ces transitions M_4 sont données sur la Figure 3.12. Cette isométrie est caractéristique du modèle en couches (sphériques) dont le schéma de niveaux est rappelé sur la Figure 3.13.

Les transitions E_2 (Figures 3.7 et 3.14) des noyaux pairs-pairs présentent des durées de vie nettement plus faibles que les valeurs théoriques du modèle à un nucléon. Ceci indique un effet collectif, un grand nombre de nucléons du coeur contribuant à la transition radiative.

Dans plusieurs exemples de transitions E_2 dans des noyaux impairs (Table II) la mesure de l'effet collectif est donnée par l'effet de déformation du coeur "inerte" sur l'orbite du nucléon externe, laquelle est estimée par la charge effective e_{eff} nécessaire à reproduire la donnée expérimentale. Dans le calcul à un nucléon, les effets dus au coeur nucléaire sont donc simulés par une modification de la charge du nucléon de valence.

On définit cette charge effective par

$$e_{eff} = e\left(\frac{1}{2} + \tau_3\right) + e \text{ (polarisation } E_2) = \langle j_f || \mathcal{M} E_2 || j_i \rangle / \langle j_f || r^2 Y_2 || j_i \rangle.$$

Les valeurs e_{eff} obtenues sont liées à l'orbite du nucléon externe; l'effet de polarisation décroît quand l'énergie de liaison du nucléon est moindre (un nucléon en moyenne plus éloigné du coeur nucléaire aura sur ce dernier un effet déformant plus faible).

Figure 3.3

Probabilités de transitions E_L et M_L ($L = 1-5$) pour $A = 100$ en fonction de l'énergie E_γ en keV.

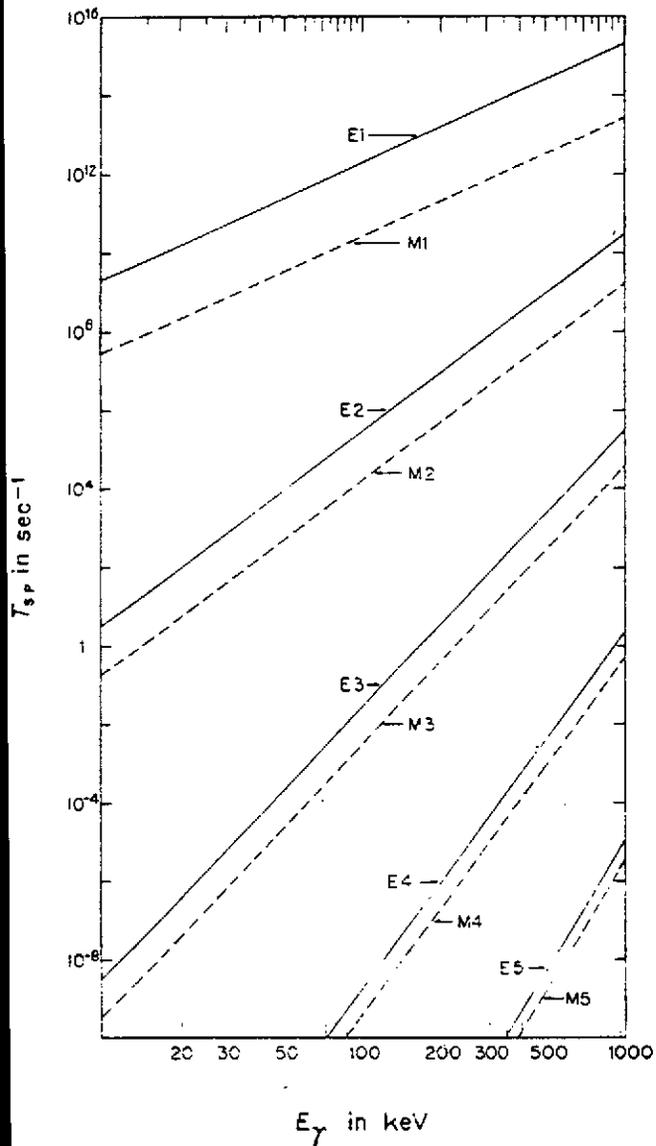
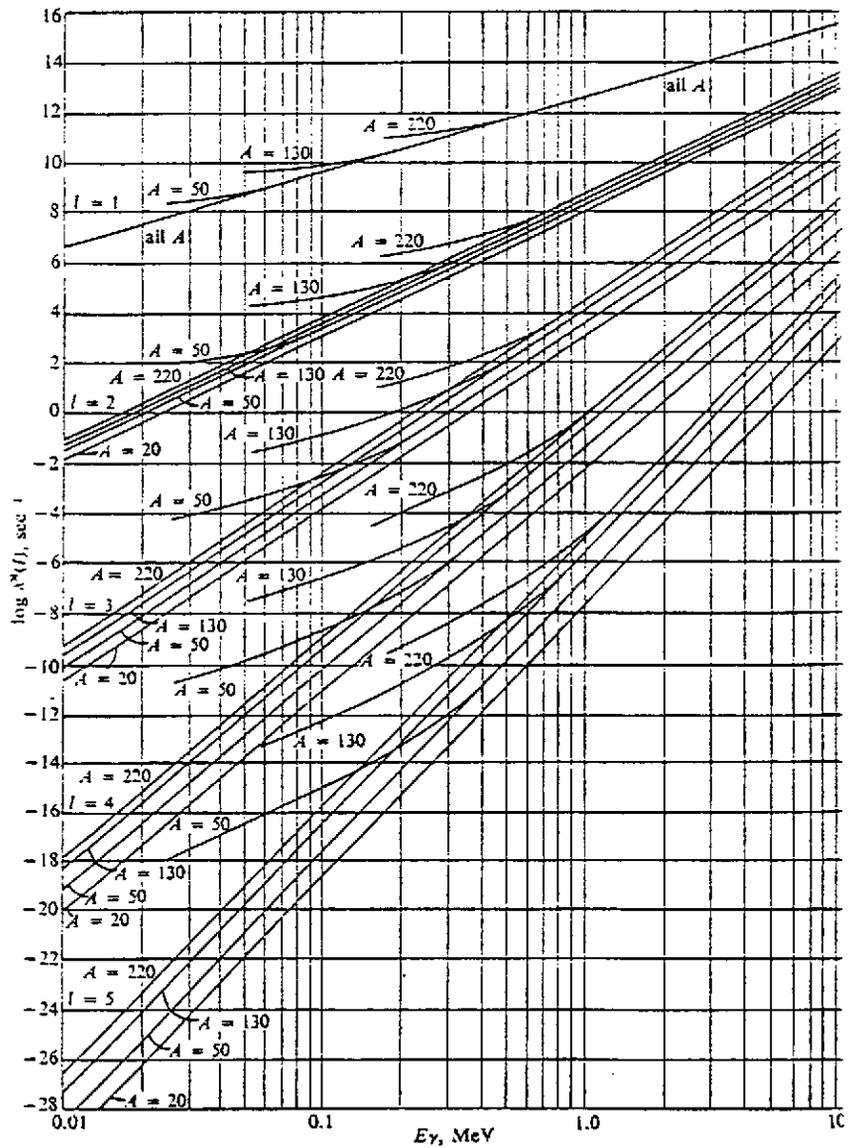


Fig 3.5



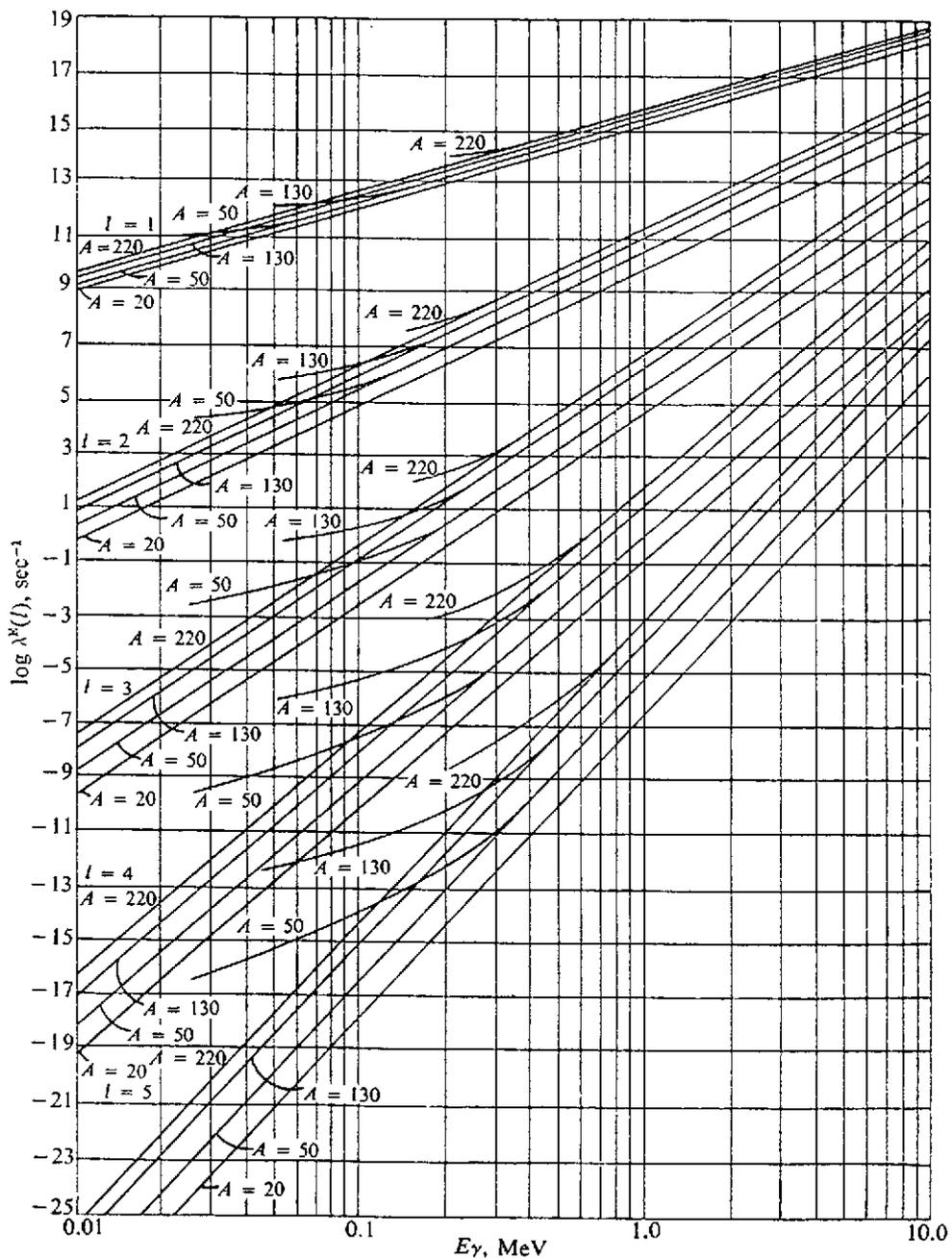
Figures 3.4 et 3.5

Figure 3.4 Probabilités des transitions E_L ($L = 1 - 5$) dans le modèle à un nucléon pour différents A en fonction de l'énergie E_γ en MeV.

Figures 3.5 idem pour les transitions M_L

Les droites sont représentatives des transitions purement radiatives, les courbes sont obtenues en ajoutant la contribution de la conversion interne

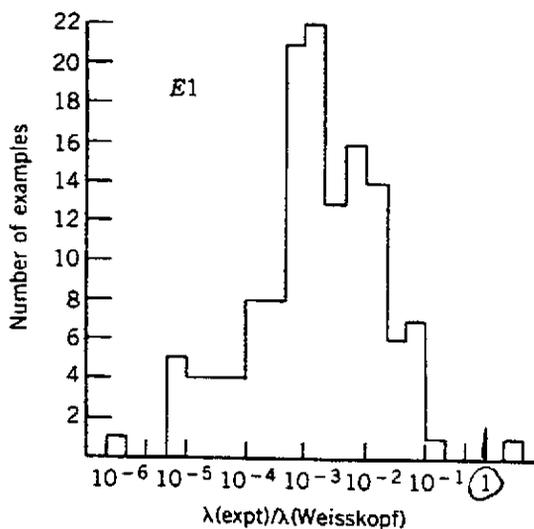
Fig 3.4



Figures 3.6 et 3.10

Transitions E_1

Fig 3.6



Figures 3.7 et 3.14

Transitions E_2

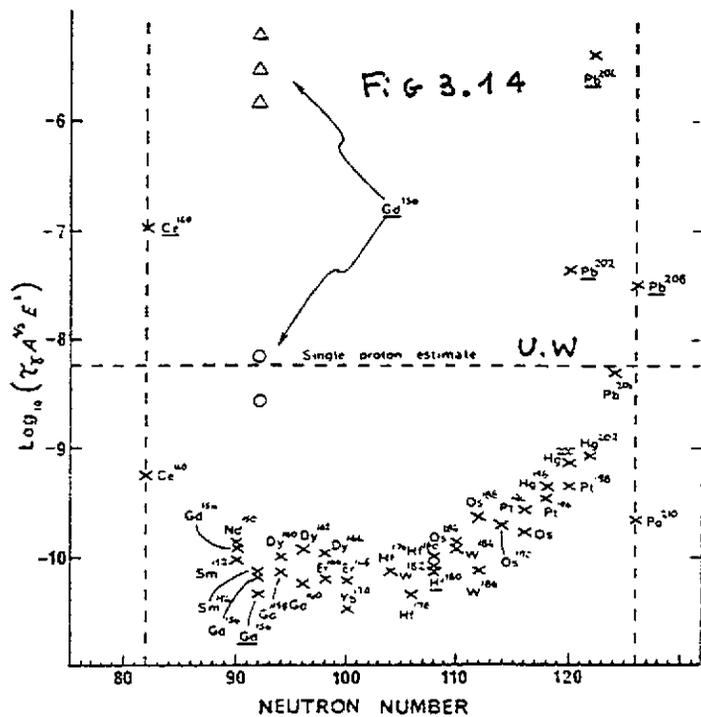


Fig 3.10

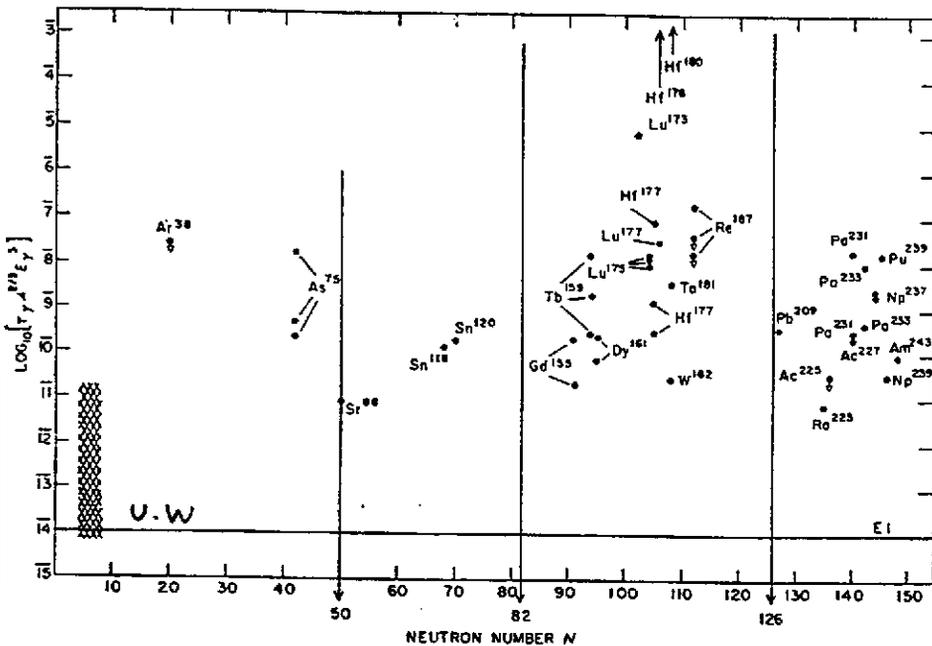


Fig 3.7

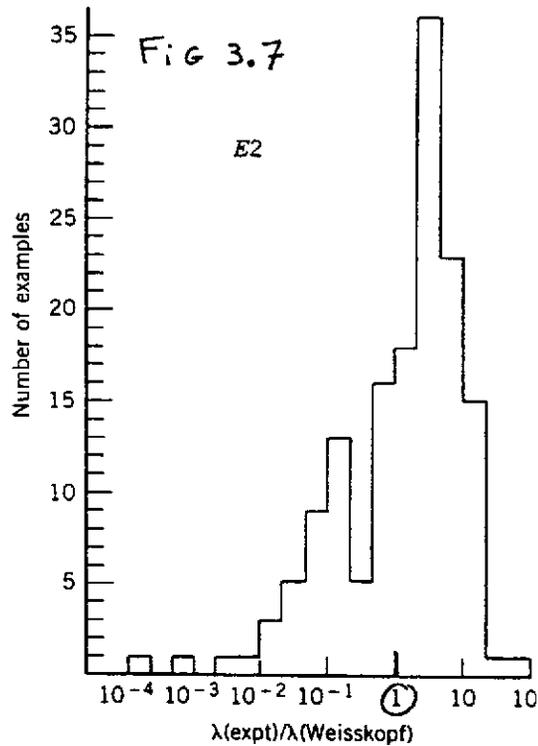
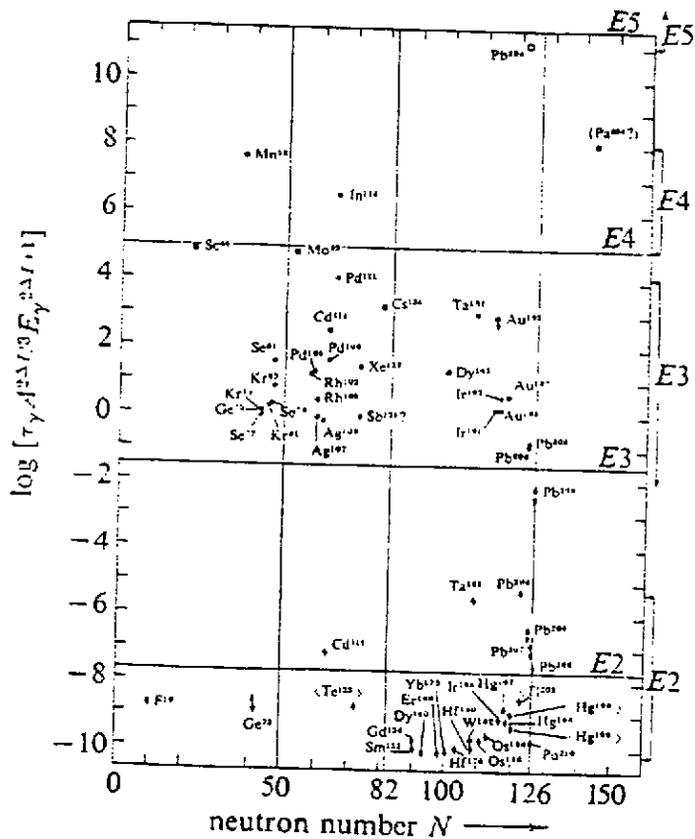


Figure 3.8 Transitions E_2 à E_5 (voir texte)

Figure 3.9 Transitions M_1 à M_4 (voir texte)



$$\log \left[\tau_\gamma A^{2L/3} E_\gamma^{2L+1} \right]$$

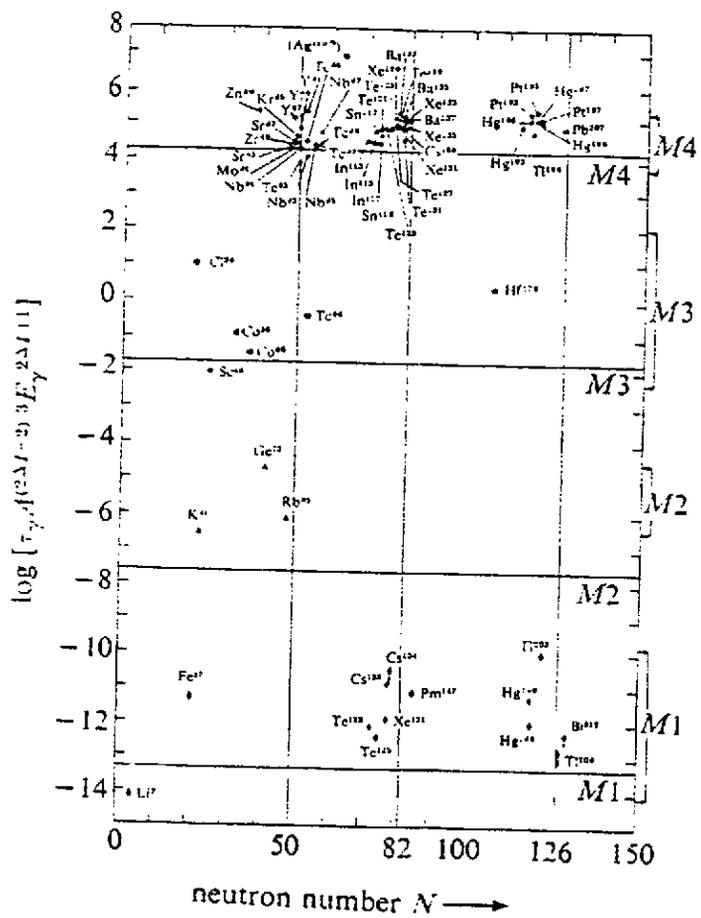


Figure 3.11 et Table II [8]

$$\lambda^{U.W} (M4) = 4.5 \cdot 10^{-6} A^2 E_\gamma^9$$

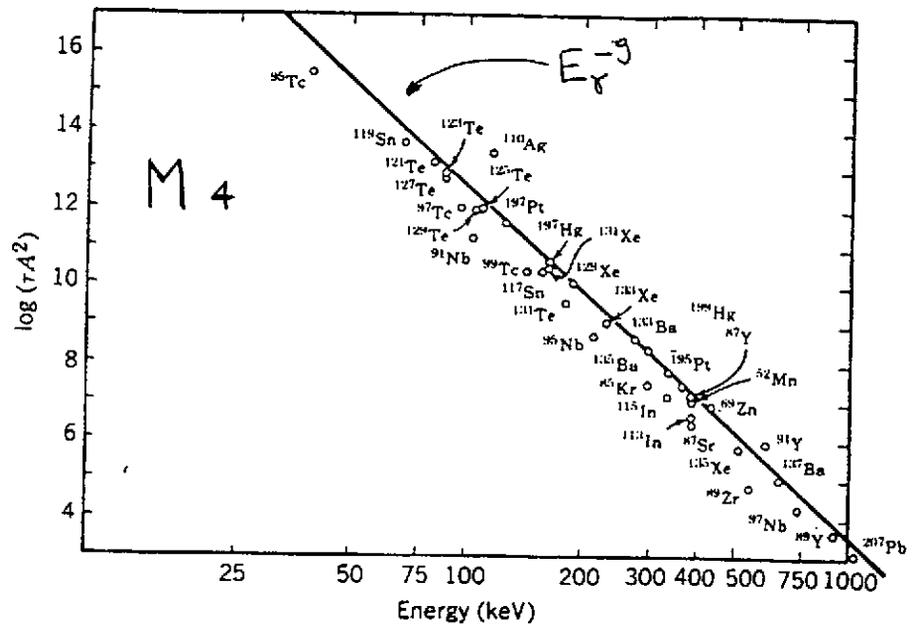


Table II

E2-transition probabilities

Nucleus	$(lj)_i$	$(lj)_f$	$B(E2)_{\text{obs}}(e^2\text{fm}^4)$	$B(E2)_{\text{sp}}(e^2\text{fm}^4)$	e_{eff}/e
$^{15}_7\text{N}$	$p_{3/2}^{-1}$	$p_{1/2}^{-1}$	7.4	4.6	1.3
$^{17}_8\text{O}$	$s_{1/2}$	$d_{5/2}$	6.3	35	0.42
$^{17}_9\text{F}$	$s_{1/2}$	$d_{5/2}$	64	43	1.2
$^{41}_{20}\text{Ca}$	$p_{3/2}$	$f_{7/2}$	66	40	1.3
$^{41}_{21}\text{Sc}$	$p_{3/2}$	$f_{7/2}$	110	40	1.7
$^{207}_{82}\text{Pb}$	$f_{5/2}^{-1}$	$p_{1/2}^{-1}$	70	81	0.9
$^{207}_{82}\text{Pb}$	$p_{3/2}^{-1}$	$p_{1/2}^{-1}$	80	110	0.85
$^{209}_{82}\text{Pb}$	$s_{1/2}$	$d_{5/2}$	150	866	0.42
$^{209}_{83}\text{Bi}$	$f_{7/2}$	$h_{9/2}$	40 ± 20	2.3	4 ± 1.5

Figure 3.12 Quelques exemples de transitions M_4

Figure 3.13 Shéma de niveaux du modèle en couches sphériques

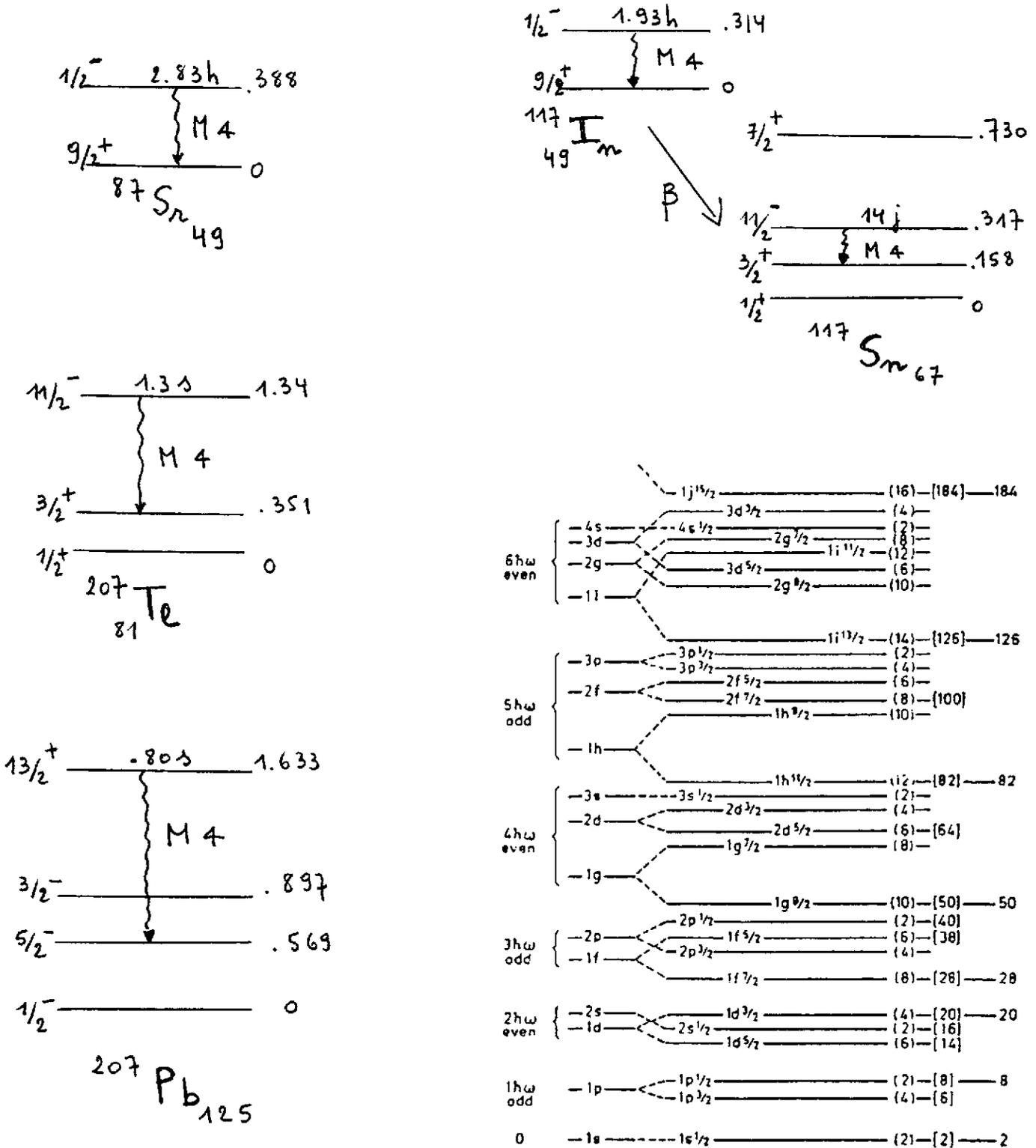


Fig 3.13

4 La Conversion interne

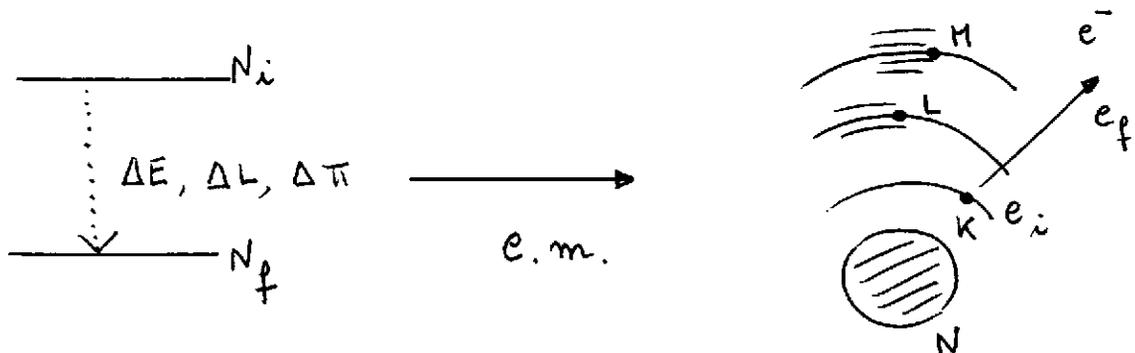
4.1 Généralités

La conversion interne est un processus électromagnétique qui entre en compétition avec l'émission radiative dans la désexcitation du noyau [2, Chapitre 10].

Ce processus fut découvert en 1924 [10] par l'observation d'un spectre de raies en électrons dans la désexcitation du noyau. Ce spectre fut immédiatement interprété comme défini par les électrons émis par "conversion" d'une transition nucléaire sur les différentes couches électroniques du cortège atomique. L'interaction électromagnétique entre le noyau et les électrons du cortège atomique est responsable de l'émission d'électrons liés de l'atome sous forme d'électrons libres. Le spectre des électrons est un spectre de raies, l'énergie des raies en électrons étant définie par:

$$E_{K,L,M,\dots}^e = \Delta E_N - \epsilon_{K,L,M,\dots} \quad (96)$$

où ΔE_N est l'énergie disponible dans la transition nucléaire et $\epsilon_{K,L,M,\dots}$ définit l'énergie de liaison des électrons des différentes couches K, L, M,...



Deux remarques s'imposent:

(1) les électrons de conversion sont les électrons du cortège atomique ce qui les différencie totalement des électrons β , créés dans un processus d'interaction faible et présentant un spectre continu en énergie,

(2) le processus de conversion interne n'est pas un processus en deux étapes dans lequel un photon serait émis par le noyau et produirait, par un processus analogue à l'effet photoélectrique, l'émission d'un électron atomique (la probabilité d'un tel processus direct du second ordre est négligeable).

L'expression (96) indique que pour toute transition nucléaire définie, le processus de conversion interne présente un seuil en énergie associé à l'énergie de liaison de la couche atomique K, L, M,.... Une résolution fine en énergie permettra d'observer les électrons des sous-couches $L_I(2s_{\frac{1}{2}})$, $L_{II}(2p_{\frac{1}{2}})$, $L_{III}(2p_{\frac{3}{2}})$ dans la couche L, etc...

Après une conversion interne, l'atome résiduel est dans un état excité défini par une lacune dans la couche occupée par l'électron émis. Cette lacune atomique sera rapidement comblée par des électrons des couches externes et on observe des raies X caractéristiques associées. On peut également observer des raies associées aux électrons Auger de réorganisation du cortège atomique.

La figure (Fig 4.1) illustre la transition β du ^{203}Hg vers le ^{203}Tl suivie dans le ^{203}Tl d'une transition de $279,180\text{ keV}$ convertie sur les électrons des couches K,L,M. Le "end-point" du spectre β est $W_\beta = 491.9\text{ keV}$ et les différentes raies en électrons de conversion sont:

$$E_K^e = 279.190 - 85.529 = 193.661\text{keV}$$

$$E_{L_I}^e = 279.190 - 15.347 = 263.843\text{keV}$$

$$E_{L_{II}}^e = 279.190 - 14.698 = 264.492\text{keV}$$

$$E_{L_{III}}^e = 279.190 - 12.657 = 266.533\text{keV}$$

$$E_{M_I}^e = 279.190 - 3.704 = 275.486\text{keV}$$

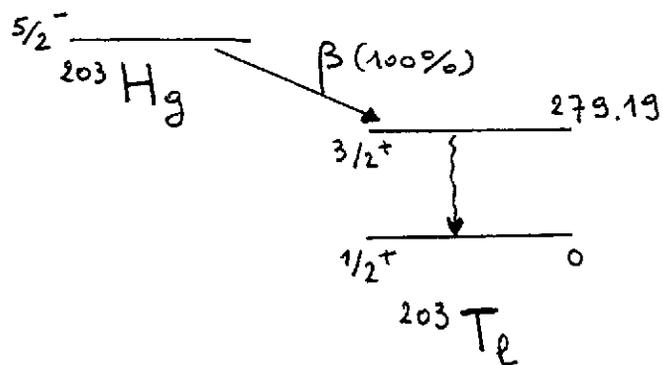
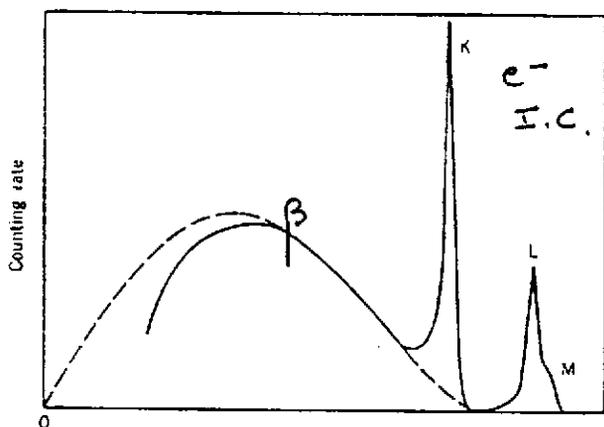
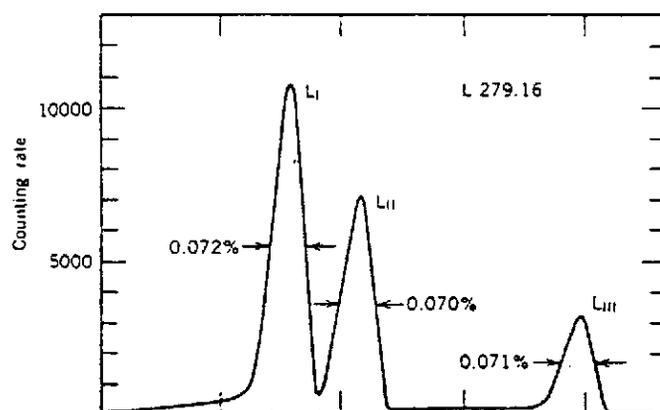
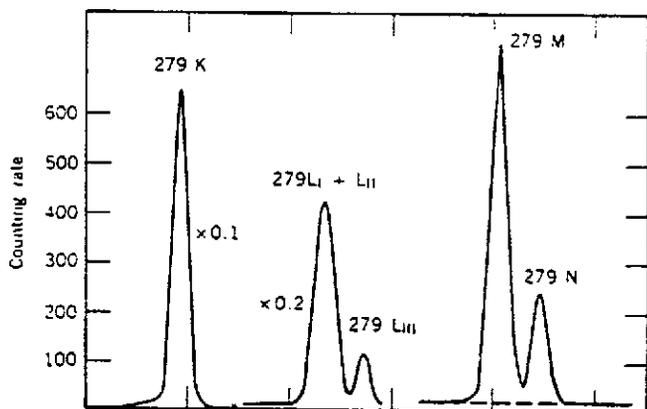


Fig 4.1



Un autre exemple est fourni par les raies en électrons de conversion de la transition $\frac{3}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$ de 7,85 keV du ^{239}Pu pour laquelle l'énergie disponible ne permet la conversion que sur les électrons des couches N et O (Fig 4.2 et 4.3).

On a dans ce cas:

$$E_{N_I}^e = 7.85 - 1.558 = 6.292$$

$$E_{N_{II}}^e = 7.85 - 1.377 = 6.473$$

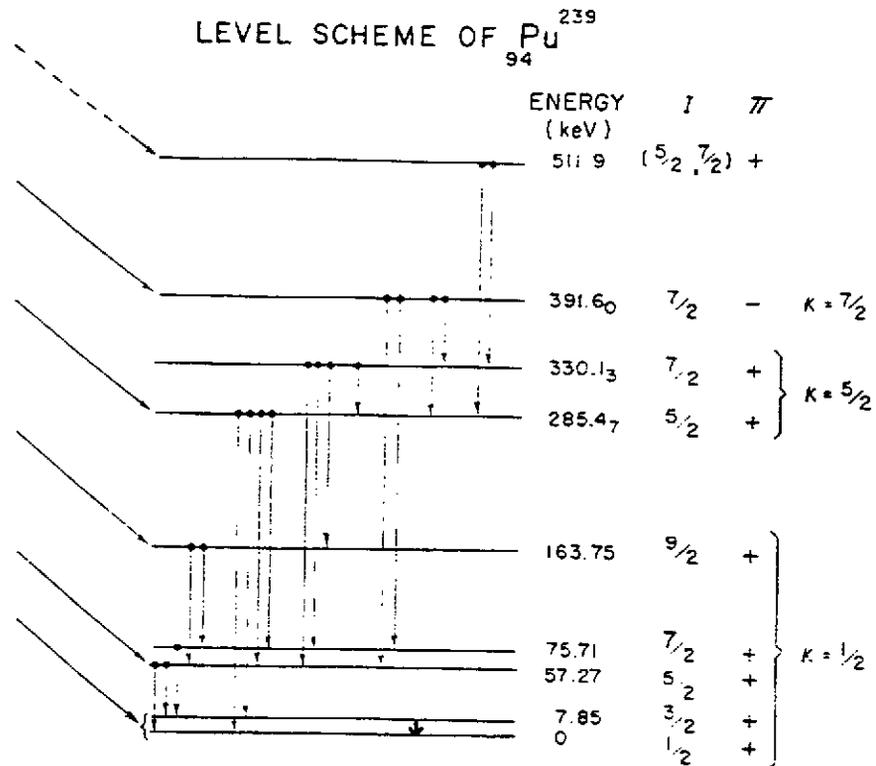
$$E_{N_{III}}^e = 7.85 - 1.12 = 6.73$$

$$E_{O_I}^e = 7.85 - .352 = 7.498$$

$$E_{O_{II}}^e = 7.85 - .279 = 7.571$$

$$E_{O_{III}}^e = 7.85 - .212 = 7.638$$

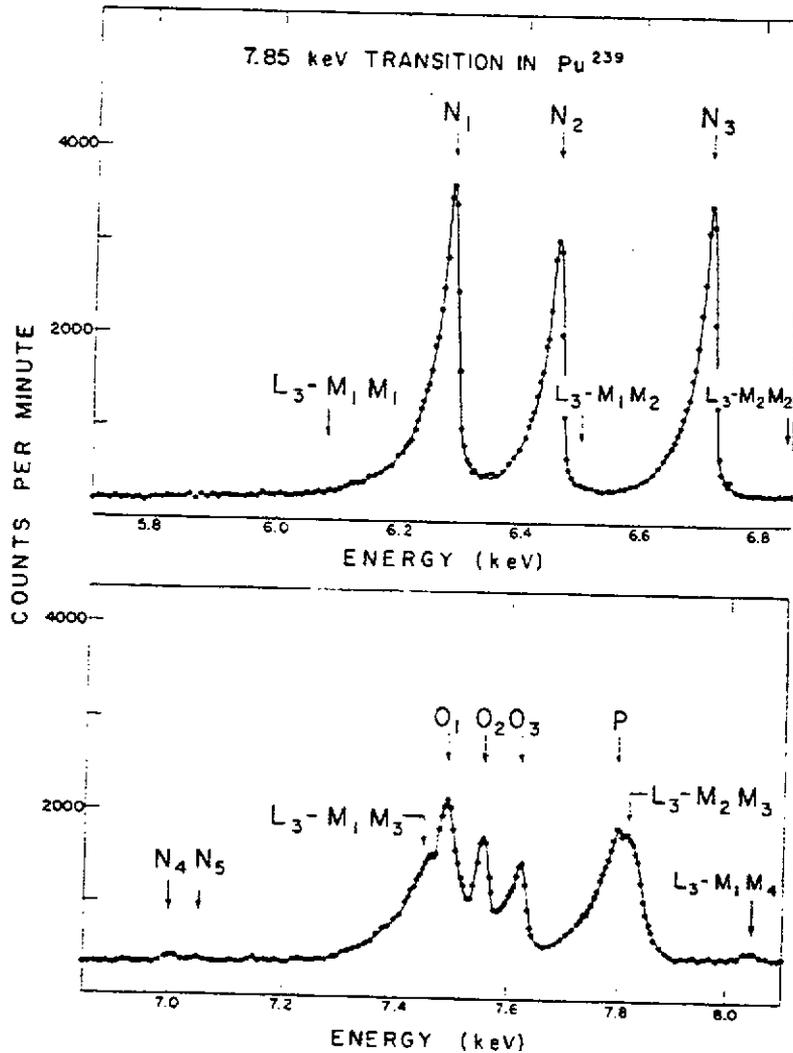
Figure 4.2



Les raies X associées de réorganisation du cortège électronique sont également observées. Les raies X ($L_{III} - M_{II}M_{III}$) ont en effet une énergie de:

$$\epsilon(L_{III} - M_{II}M_{III}) = \epsilon_{L_{III}} - \epsilon_{M_{II}} - \epsilon_{M_{III}} = 18.057 - 5.546 - 4.562 \simeq 7.9 \text{ keV}.$$

Figure 4.3 Spectre d'électrons de conversion de la raie 7.85 keV du ^{239}Pu .



Les probabilités de conversion interne dépendent non seulement de l'énergie disponible ΔE_N , de la charge Z et de la couche électronique K, L, M, \dots mais également des multipolarités E_L, M_L de la transition nucléaire.

On définit les coefficients de conversion interne par le rapport de la probabilité de conversion interne à la probabilité associée de transition radiative, soient:

$$\alpha_{K,L,\dots}(E_L) = \frac{P_{K,L,\dots}^e(E_L)}{P_\gamma(E_L)}$$

pour une transition E_L

$$\alpha_{K,L,\dots}(M_L) = \frac{P_{K,L,\dots}^e(M_L)}{P_\gamma(M_L)}$$

pour une transition M_L .

Les premiers calculs de tels coefficients concernaient les conversions K , calculées en utilisant des fonctions d'onde électroniques relativistes dans le champ d'un noyau ponctuel [2, Rose1951]. Pour les conversions de type L, M, \dots des corrections liées aux effets d'écrantage des couches plus externes par les couches internes sont nécessaires [2, Rose1958]. Dès 1951, on réalisa [2, Sliv1951] que les coefficients de conversion interne dépendaient des dimensions du noyau et que des corrections d'extension finie du noyau devaient être introduites. La distribution de charge du noyau affecte les coefficients de conversion par des effets statiques dus à la modification des fonctions d'onde des électrons et par des effets dynamiques dus à la pénétration des électrons à l'intérieur du noyau, modifiant les interactions des électrons avec la densité de charge et le courant nucléaire. La dépendance en la structure du noyau est donc importante.

Comme nous le verrons dans le calcul détaillé des probabilités de conversion interne, l'effet de pénétration nucléaire se manifeste principalement par l'existence du processus E_0 , totalement dû à la probabilité de présence des électrons à l'intérieur du volume nucléaire. Ce processus n'a pas de correspondant en transition radiative (le photon emportant un moment minimum $L = 1$). Le processus E_0 est présent non seulement dans les transitions $0^+ \rightarrow 0^+$ mais également dans les transitions $\Delta I = 0$ à $I \neq 0$, par exemple une transition $2^+ \rightarrow 2^+$, où il entre en compétition avec les transitions de type M_1, E_2, \dots

Les effets de pénétration du volume nucléaire seront également importants dans le cas où la transition radiative est retardée, ce sera le cas des transitions M_1 ou E_1 retardées.

Le processus de conversion interne est un processus indépendant de l'émission radiative γ , il est lié à la présence du cortège électronique et à l'interaction électromagnétique entre le noyau et son cortège d'électrons. La durée de vie d'un état nucléaire est donc modifiée en présence des électrons atomiques:

$$T = \frac{1}{1 + \alpha} T_\gamma \quad (97)$$

La probabilité totale de désexcitation en présence des électrons est:

$$P = P_\gamma + \sum_{i=K,L,M,..} P_i^e = P_\gamma(1 + \sum_i \alpha_i) \quad (98)$$

$$= P_\gamma(1 + \alpha) \quad (99)$$

4.2 Etude qualitative des coefficients de conversion interne

Comme le processus est électromagnétique, l'élément de matrice qui caractérise la conversion interne est similaire à celui rencontré en théorie des transitions radiatives $\langle I_f M_f | \mathcal{M}_{L,M}^\sigma | I_i M_i \rangle$ où les états initial et final sont ici les produits des fonctions d'onde nucléaire et électronique.

En considérant la fonction d'onde atomique ϕ_i^e constante à l'intérieur du noyau et remplacée par sa valeur en $r_e = 0$, la probabilité de conversion interne est approchée par

$$P_i^e = P_\gamma | \phi_i^e(0) |^2$$

et les coefficients de conversion interne $\alpha_i = P_i^e / P_\gamma$ sont donc, dans cette hypothèse réductrice, totalement indépendants de la structure nucléaire.

Ainsi, dans le cadre du modèle hydrogénoïde, on a les valeurs:

$$| \phi_{1s}^e(0) |^2 = 4, \quad | \phi_{2s}^e(0) |^2 = \frac{1}{2}, \quad | \phi_{3s}^e(0) |^2 = \frac{4}{27}, \dots \text{ ce qui donne comme rapports;}$$

$$\frac{K}{L} = 8, \quad \frac{L}{M} = 3.4, \dots$$

Les coefficients α de conversion interne dépendent du Z de l'atome, et des propriétés nucléaires essentiellement à travers l'énergie ΔE disponible dans la transition nucléaire et le caractère de celle-ci (multipolarité E_L ou M_L). Un calcul non relativiste et l'hypothèse d'un noyau ponctuel donnent pour ces coefficients le résultat suivant:

$$\alpha(E_L) = \frac{Z^3}{n^3} \frac{L}{L+1} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \left(\frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+\frac{5}{2}} \quad (100)$$

$$\alpha(M_L) = \frac{Z^3}{n^3} \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^4 \left(\frac{2m_e c^2}{E} \right)^{L+\frac{3}{2}} \quad (101)$$

Ces expressions quoique approchées illustrent les caractéristiques essentielles de la conversion interne.

Des tables basées sur des calculs plus rigoureux sont données en référence. Les tables les plus récentes de coefficients de conversion sont données dans [7] et les références incluses, ainsi qu'à l'adresse <http://ie.lbl.gov/atomic/atom.htm>.

Variation en Z

Comme indiqué par les relations (100 -101), les coefficients de conversion interne **varient en Z^3** (Fig 4.4). Le processus de conversion interne est plus important dans les noyaux lourds, les probabilités de pénétration des électrons du cortège dans le noyau étant effectivement plus élevées.

On a par exemple :

entre la transition E_2 de 1.27 MeV dans ^{22}Ne ($\alpha_K = 6.810^{-6}$) et la transition E_2 de 1.22 MeV dans ^{182}W ($\alpha_K = 2.510^{-3}$), le rapport est de $\frac{6.810^{-6}}{2.510^{-3}} = 2.72 \cdot 10^{-3}$; le rapport $(\frac{Z_1}{Z_2})^3 = (\frac{10}{74})^3 = 2.47 \cdot 10^{-3}$ donne l'ordre de grandeur.

Variation en l'énergie et en la multipolarité de la transition

Comme indiqué sur la figure (Fig 4.5), les coefficients de conversion interne α décroissent rapidement avec **l'énergie de la transition nucléaire**.

On a par exemple:

dans le ^{56}Co , les transitions M_1 de 158 keV ($\alpha_K = 0.011$), de 270 keV ($\alpha_K = 0.0034$), de 812 keV ($\alpha_K = 0.00025$).

La même figure montre que les coefficients α sont d'autant plus grands que l'ordre de **multipolarité** est élevé. Pour L grand, la conversion interne est beaucoup plus probable que l'émission radiative.

Par exemple :

dans le ^{99}Tc , on a une transition M_1 de 141 keV avec $\alpha_K = 0.10$ et une transition M_4 de 143 keV avec $\alpha_K = 30.0$ soit $\frac{\alpha_K(143)}{\alpha_K(141)} \simeq 300$, la formule approchée donne $(\frac{2m_e c^2}{E})^3 \simeq 370$.

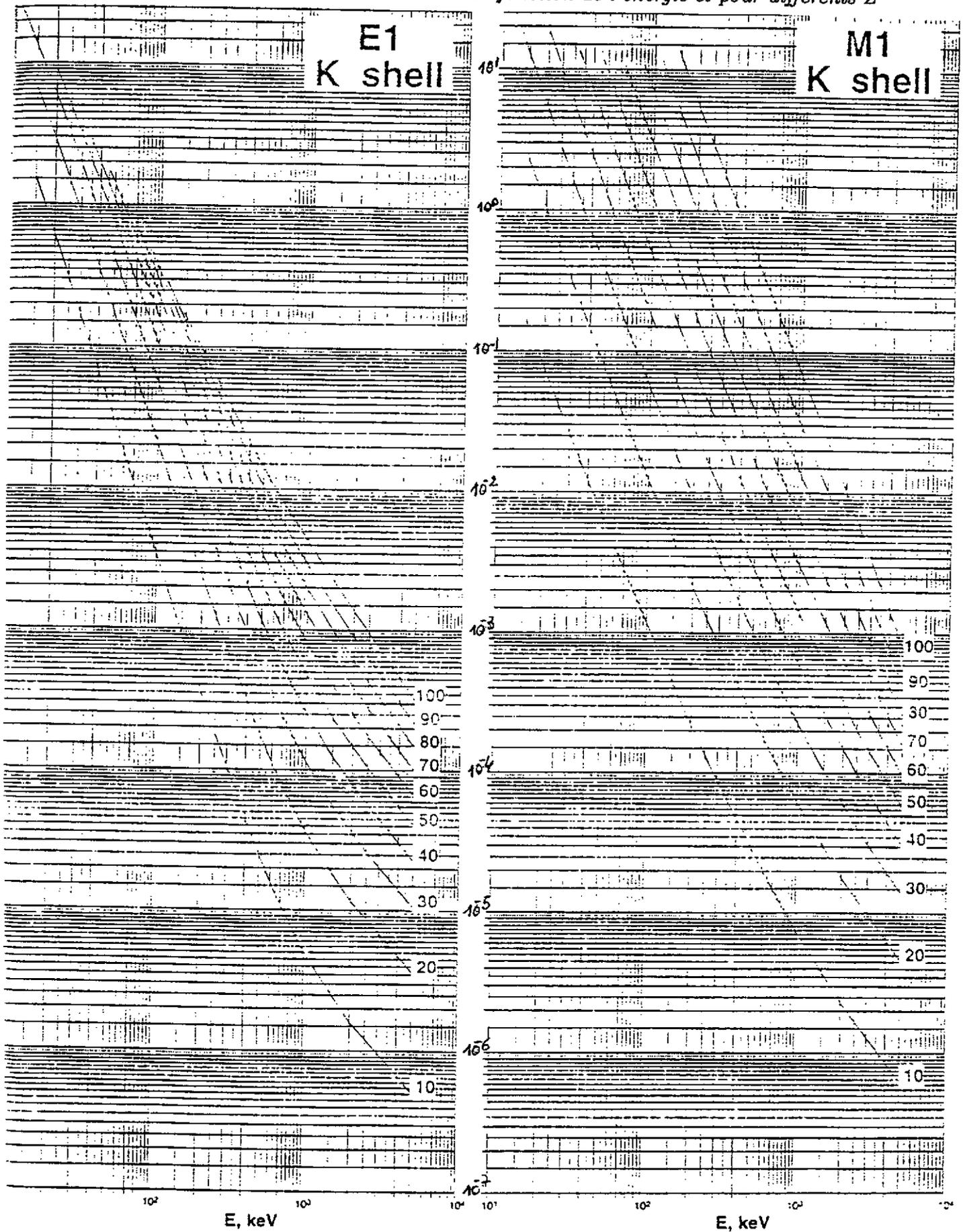
Variation en l'orbite électronique

Les coefficients de conversion α dépendent en $\frac{1}{n^3}$ ($n \geq 1$) du nombre quantique principal n de l'orbite atomique. Comme vu précédemment avec l'approximation des fonctions électroniques purement hydrogénoïdes, on a approximativement $\alpha_K / \alpha_L = 8$.

L'utilisation de fonctions électroniques plus réalistes modifie sensiblement cette estimation.

La figure (Fig 4.5) résulte d'un calcul réaliste et montre qu'il est aisé par la mesure de coefficients de conversion de différencier les transitions E_L et M_L et donc de déterminer les parités relatives des états nucléaires.

Figure 4.4 Coefficients de conversion en fonction de l'énergie et pour différents Z



Transition E_0

Une autre application de la conversion interne est bien évidemment celle des transitions E_0 interdites en transition radiative. Cette transition est particulièrement importante entre deux états 0^+ .

FIGURE 4.6 Niveaux d'énergie dans le ^{72}Ge
 $T(E_0) = 0.42\mu\text{s}$, pour la transition $0^+ \rightarrow 0^+$,
 la transition E_2 $2^+ \rightarrow 0^+$ par émission γ est plus
 rapide $T(E_2) = 3.1\text{ps}$ et peu
 convertie ($\alpha(E_2) = 4.9 \cdot 10^{-4}$).

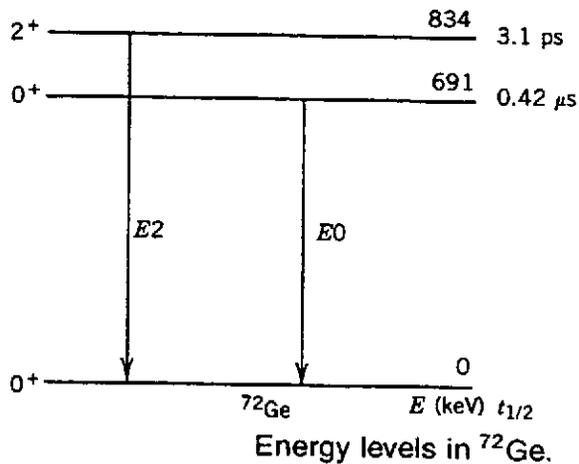
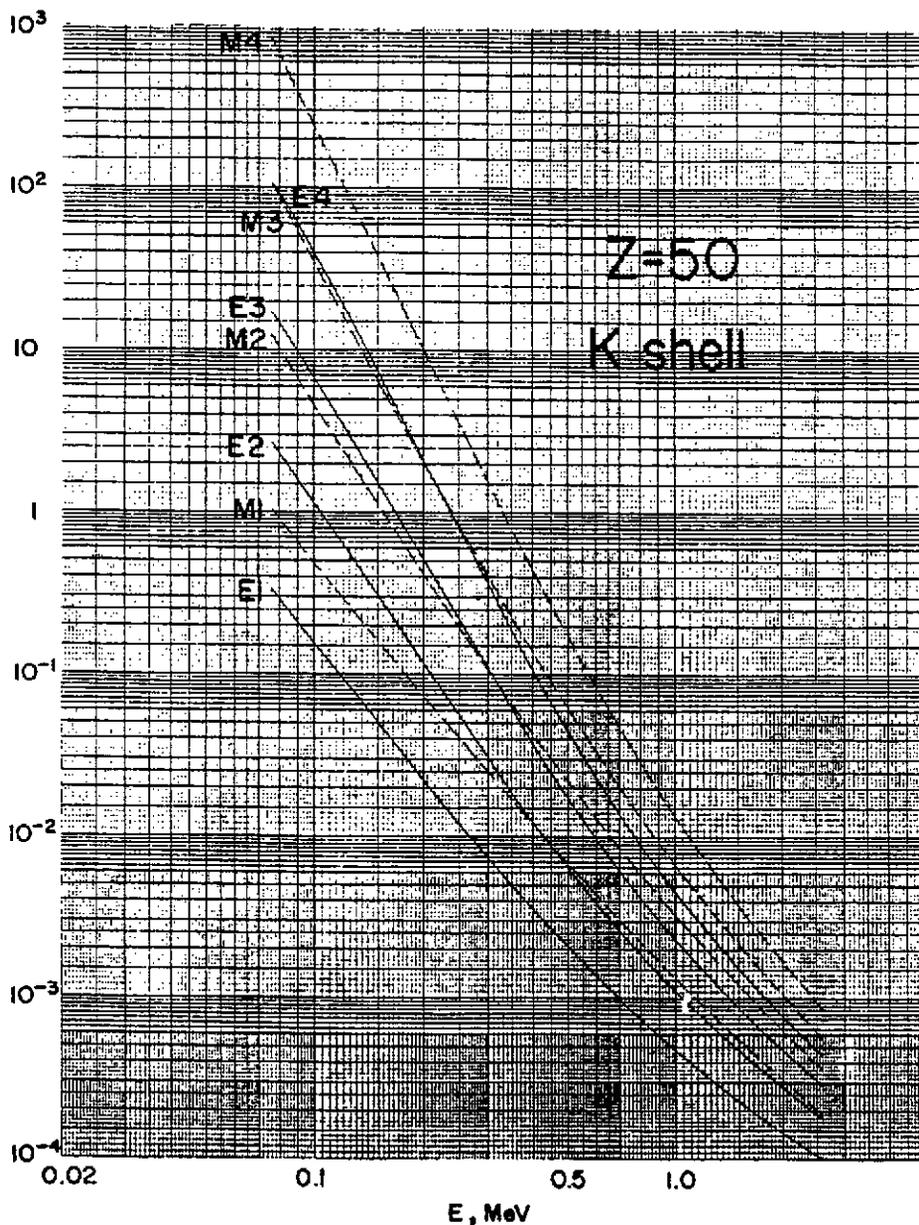


Figure 4.5
 Coefficients de conversion interne [12]



4.3 Calcul détaillé de la conversion interne

L'émission d'un électron atomique lors d'une transition nucléaire est un processus du second ordre avec échange d'un photon virtuel entre le noyau et l'électron.

Le système impliqué dans ce processus est composé du noyau et des électrons atomiques, l'hamiltonien total le caractérisant s'écrit:

$$H = H_N + H_e + H_{int} \quad (102)$$

où H_N est l'hamiltonien nucléaire ($H_N | N_k \rangle = E_k | N_k \rangle$); H_e , l'hamiltonien atomique ($H_e | e_l \rangle = \varepsilon_l | e_l \rangle$) et H_{int} , l'hamiltonien d'interaction électromagnétique Noyau - électron. Cet hamiltonien définit l'interaction entre le quadri-vecteur courant nucléaire $j_\mu^N(\vec{X}_N)$ et le quadri-vecteur courant des électrons $j_\mu^e(\vec{X}_e)$ soit

$$H_{int}^{N-e} = -\frac{1}{c^2} \int d\vec{X}_e \int d\vec{X}_N [j_\mu^N(\vec{X}_N) I j_\mu^e(\vec{X}_e) - c^2 \rho^N(\vec{X}_N) \rho^e(\vec{X}_e)] \frac{\exp ik_N |\vec{X}_N - \vec{X}_e|}{|\vec{X}_N - \vec{X}_e|} \quad (103)$$

Le courant $j_\mu^e(\vec{X}')$ des électrons produit un quadri-potential $A_\mu(\vec{X})$ solution de

$$(\nabla^2 + k^2)A_\mu(\vec{X}) = -\frac{4\pi}{c} j_\mu^e(\vec{X})$$

et défini par

$$A_\mu(\vec{X}) = \frac{1}{c} \int \frac{\exp ik |\vec{X} - \vec{X}'|}{|\vec{X} - \vec{X}'|} j_\mu^e(\vec{X}') d\vec{X}'$$

et l'hamiltonien d'interaction est donné par

$$H_{int}^{N-e} = -\frac{1}{c} \int j_\mu^N(\vec{X}) A_\mu(\vec{X}) d\vec{X} \quad (104)$$

ou encore par l'expression définie en (103) avec $I = \sum_\mu e_\mu^* \cdot e_\mu$ où e_μ est le vecteur polarisation; $\exp ik |\vec{X} - \vec{X}'| / |\vec{X} - \vec{X}'|$ est le propagateur à l'énergie $k\hbar c = \Delta E_N$ de la transition nucléaire.

En théorie quantique des champs, l'interaction du noyau et des électrons atomiques est exprimée à l'ordre le plus bas par un terme du second ordre en l'interaction des particules chargées avec le champ de radiation:

$$\begin{aligned} \langle f | H_{int} | i \rangle &= \sum_n \frac{\langle f | H_{int}^{N-\gamma} | n \rangle \langle n | H_{int}^{e-\gamma} | i \rangle}{k\hbar c - \hbar\omega_n} \\ &+ \sum_m \frac{\langle f | H_{int}^{e-\gamma} | m \rangle \langle m | H_{int}^{N-\gamma} | i \rangle}{-(k\hbar c + \hbar\omega_m)} \end{aligned} \quad (105)$$

Les diagrammes qui contribuent au processus sont (fig 4.7):

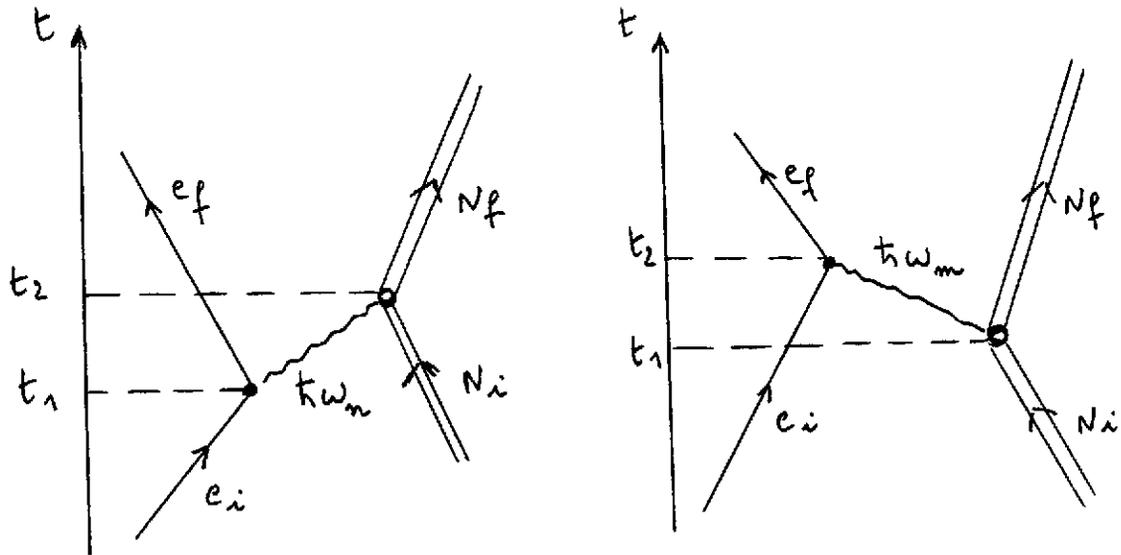


Figure 4.7

L'interaction entre les quadri-courants de charge nucléaire et électronique comprendra les composantes transverses du champ électromagnétique mais également la composante longitudinale (le photon échangé étant virtuel, la condition de transversalité du champ n'est pas requise) ainsi que la composante associée au champ scalaire (non nul) c'est-à-dire la force de Coulomb entre les charges statiques.

Reprenons l'hamiltonien d'interaction entre les quadri-vecteurs de courant nucléaire et électronique sous la forme définie en (103). Deux types de termes apparaissent dans cet hamiltonien: le terme statique d'interaction coulombienne en les densités de charge et le terme d'interaction des courants nucléaire et électronique.

Considérons les développements en multipôles des fonctions de Green scalaire et dyadic [2][1, Chapitre 6]:

$$\frac{\exp ik_N |\vec{X}_N - \vec{X}_e|}{|\vec{X}_N - \vec{X}_e|} = 4\pi ik_N \sum_{L,M} j_L(k_N X_{<}) Y_{L,M}^*(\hat{X}_N) h_L^1(k_N X_{>}) Y_{L,M}(\hat{X}_e) \quad (106)$$

et

$$\frac{\exp ik_N |\vec{X}_N - \vec{X}_e|}{|\vec{X}_N - \vec{X}_e|} I = 4\pi ik_N \sum_{L,M,\tau} A_{L,M}^*(\tau, \vec{X}_{<}) B_{L,M}(\tau, \vec{X}_{>}) \quad (107)$$

L'indice $\tau = (\mathcal{M}, e, l)$ réfère aux trois champs multipolaires indépendants : magnétique, électrique et longitudinal. Les quantités $A_{L,M}^*(\tau, \vec{X})$ ont été définies en termes de tenseurs irréductibles (2. eqs (27)-(28)).

La composante longitudinale est donnée par:

$$\begin{aligned} \vec{A}_{LM}^i(\vec{r}) &= \sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_{L-1}(kr) \vec{Y}_{LM}^{L-1,1} + \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_{L+1}(kr) \vec{Y}_{LM}^{L+1,1} \\ &= \frac{1}{k} \vec{\nabla} (j_L(kr) Y_{LM}(\vec{r})) \end{aligned} \quad (108)$$

Les tenseurs $B_{L,M}(\tau, \vec{X})$ sont définis en remplaçant les fonctions sphériques de Bessel j_L par les fonctions sphériques de Hankel de premier type h_L^1 dans la définition des tenseurs $A_{L,M}(\tau, \vec{X})$.

On obtient ainsi pour l'hamiltonien d'interaction:

$$\begin{aligned} H_{int} &= -\frac{4\pi i k_N}{c^2} \sum_{L,M} \left[\sum_{\tau} \int_0^{\infty} j^N(\vec{X}_N) A_{L,M}^*(\tau, \vec{X}_N) d\vec{X}_N \int_0^{\infty} j^e(\vec{X}_e) B_{L,M}(\tau, \vec{X}_e) d\vec{X}_e \right. \\ &\quad \left. - c^2 \int_0^{\infty} \rho^N(\vec{X}_N) j_L(k_N, X_N) Y_{L,M}^*(\hat{X}_N) d\vec{X}_N \int_0^{\infty} \rho^e(\vec{X}_e) h_L^1(k_N, X_e) Y_{L,M}(\hat{X}_e) d\vec{X}_e \right] \\ &\quad - \frac{4\pi i k_N}{c^2} \sum_{L,M} \left\{ \left[\sum_{\tau} \int_0^{\infty} j^N(\vec{X}_N) B_{L,M}(\tau, \vec{X}_N) d\vec{X}_N \int_0^{X_N} j^e(\vec{X}_e) A_{L,M}^*(\tau, \vec{X}_e) d\vec{X}_e \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\tau} \int_0^{\infty} j^N(\vec{X}_N) A_{L,M}^*(\tau, \vec{X}_N) d\vec{X}_N \int_0^{X_N} j^e(\vec{X}_e) B_{L,M}(\tau, \vec{X}_e) d\vec{X}_e \right] \right. \\ &\quad \left. - c^2 \int_0^{\infty} \rho^N(\vec{X}_N) h_L^1(k_N, X_N) Y_{L,M}(\hat{X}_N) d\vec{X}_N \int_0^{X_N} \rho^e(\vec{X}_e) j_L(k_N, X_e) Y_{L,M}^*(\hat{X}_e) d\vec{X}_e \right. \\ &\quad \left. + c^2 \int_0^{\infty} \rho^N(\vec{X}_N) j_L(k_N, X_N) Y_{L,M}^*(\hat{X}_N) d\vec{X}_N \int_0^{X_N} \rho^e(\vec{X}_e) h_L^1(k_N, X_e) Y_{L,M}(\hat{X}_e) d\vec{X}_e \right\} \end{aligned} \quad (109)$$

Le premier terme (109) correspond à l'approximation du "noyau ponctuel" et le second (110) donne les termes correctifs représentant les contributions dues à la pénétration des électrons dans le noyau.

On peut montrer que les différents termes se réduisent aux composantes suivantes (Appendice C):

Pour $L = 0$,

le seul terme qui subsiste est le terme associé à l'interaction statique coulombienne et à l'effet de pénétration des fonctions d'onde électroniques dans le domaine nucléaire (termes intérieurs). Différentes évaluations approchées des termes correctifs de pénétration des électrons dans le volume nucléaire sont données et expliquées dans [11].

Le processus E_0 est défini par l'élément de matrice (approximation $kr \ll 1$):

$$2\pi i \delta(E_f - E_i) \int d\vec{X}_N \Phi_f^{*N} \rho^N \Phi_i^N \int_0^{X_N} X_e^2 dX_e \int d\Omega_e \Phi_f^{*e} \rho^e \Phi_i^e \left(\frac{1}{X_e} - \frac{1}{X_N} \right) \quad (111)$$

Pour $L \geq 1$,

la conversion interne de type E_L ou M_L est décrite par les termes du deuxième ordre ou supérieurs de l'interaction entre courants nucléaire et électronique, associés aux composantes électriques et magnétiques.

En effet, on peut montrer que les termes associés à la composante longitudinale définie pour $L \geq 1$ sont identiques mais de signe opposé aux composantes $L \geq 1$ de l'interaction coulombienne statique.

Les expressions des composantes de conversion interne E_L et M_L sont respectivement données par (Appendice C):

pour une transition E_L :

$$\frac{-4\pi i}{\omega' L(L+1)} \int d\vec{X}_N \int d\vec{X}_e \Phi_f^{*e} (\vec{j}_e \cdot \vec{\nabla} \times \vec{L} Y_{L,M}) \Phi_i^e \Phi_f^{*N} (\vec{j}_N \cdot \vec{\nabla} \times \vec{L} Y_{L,M})^* \Phi_i^N j_L(\omega' X_<) h_L^1(\omega' X_>) \quad (112)$$

pour une transition M_L :

$$\frac{-4\pi i \omega'}{L(L+1)} \int d\vec{X}_N \int d\vec{X}_e \Phi_f^{*e} (\vec{j}_e \cdot \vec{L} Y_{L,M}) \Phi_i^e \Phi_f^{*N} \vec{j}_N \cdot (\vec{L} Y_{L,M})^* \Phi_i^N j_L(\omega' X_<) h_L^1(\omega' X_>) \quad (113)$$

4.4 Données numériques

4.4.1 Effets relativistes

Les énergies de transition nucléaire peuvent être de l'ordre de 0.5 à 1 MeV et dès lors les électrons sont relativistes. Des fonctions d'onde électroniques relativistes doivent être utilisées dans le calcul des coefficients de conversion interne.

Les fonctions de Dirac pour un noyau ponctuel ($V(\vec{r}) = Z e^2 / r$) ont des singularités (non physiques) pour les états $s_{\frac{1}{2}}$, $p_{\frac{1}{2}}$ et conduisent à des erreurs importantes dans les calculs des coefficients de conversion interne. On prendra par exemple, le potentiel associé à une distribution de Fermi de la charge du noyau.

4.4.2 Effet d'écran

Pour les électrons les plus périphériques, la charge $+Ze$ du noyau est écrantée par la présence des électrons intérieurs du cortège. Ces électrons périphériques voient donc une charge réduite $Z_{eff} < Z$ et sont dès lors moins liés.

L'effet d'écran peut être défini en remplaçant le potentiel $V(r)$ par $V(r) \Phi(r)$, la structure de la fonction d'écran $\Phi(r)$ étant complexe.

Dans certains cas, l'effet d'écran est seulement pris en considération en remplaçant Z par un $Z_{eff} < Z$ et en ajustant cette valeur de charge effective. Cette méthode qui, dans certains cas, permet d'obtenir de bonnes valeurs des énergies de liaison des

électrons ne permet pas d'obtenir de bonnes valeurs des coefficients de conversion interne pour tous les multipôles et toutes les énergies de transition.

Il existe dans la littérature, différents modèles définissant la fonction d'écran $\Phi(r)$.

Différentes corrections phénoménologiques d'écrantage peuvent être utilisées, elles dépendent de l'ordre n de la couche électronique et de l'énergie des électrons.

La probabilité de présence des électrons à la surface du noyau est diminuée par l'effet d'écran et dès lors, la correction d'effet d'écran entraîne une diminution de la probabilité de conversion interne.

4.4.3 Dimension finie du noyau

L'influence de la dimension finie du noyau se manifeste d'une part par un effet statique i.e. une correction des fonctions d'onde électroniques. L'effet sera en général indépendant de l'énergie de la transition et il augmente évidemment avec Z .

Les effets d'écran et de dimension finie du noyau diminuent la valeur des probabilités de conversion interne. Des corrections dues aux déformations des noyaux (effet des moments dipolaire magnétique et quadrupolaire électrique) sont également à considérer.

4.5 Tables

Les modèles utilisés pour le calcul des coefficients de conversion interne se différencient par la description de l'écrantage (choix du potentiel $\phi(\vec{r})$), des dimensions finies du noyau (choix de la distribution de charge $\rho(\vec{r})$), par l'inclusion ou pas des corrections dues aux termes intérieurs, par l'inclusion ou pas des effets dus aux ordres perturbatifs supérieurs de l'interaction électromagnétique, par l'utilisation pour l'énergie des électrons de valeurs calculées ou déduites de l'expérience, par l'inclusion des corrections liées à la formation d'une lacune en électron dans le cortège lors du processus, ...

Les tables actuelles données en référence [7] et références incluses [5],[4] sont basées sur des calculs Hartree-Fock-Dirac et utilisent différentes approches pour l'estimation des effets d'écran et de dimension finie des noyaux.

5 Analyse de quelques spectres

5.1 Exemple de la décroissance de l'état ^{108m}Ag

Décroissance de l'état $^{108m}\text{Ag}(\tau_{\frac{1}{2}} = 127 \text{ ans})$ par β^+ et capture électronique (ϵ) vers les états du ^{108}Pd et par β^- vers le ^{108}Cd (Figs 5.1 à 5.3 et Table) [6].

Le premier état excité du Pd est connu comme étant un état 2^+ à 434 keV .

La transition à 433.6 keV $2^+ \rightarrow 0^+$ est de type $E2$ et les tables donnent $\alpha_K(434) = 7.89 \cdot 10^{-3}$. On a donc:

$$\alpha_K(434) = \frac{I_K(434)}{I_\gamma(434)} = 7.89 \cdot 10^{-3} \quad (114)$$

La mesure des intensités des raies γ à 613.9 keV et d'électrons de conversion K, L, ... donnent en rapports relatifs:

$$\frac{\alpha_K(614)}{\alpha_K(434)} = \frac{I_K(614) I_\gamma(434)}{I_\gamma(614) I_K(434)} \quad (115)$$

et dès lors

$$\alpha_K(614) = 7.89 \cdot 10^{-3} \frac{37 \pm 3}{100} \frac{100}{103 \pm 3} \quad (116)$$

$$= (2.83 \pm 0.24) \cdot 10^{-3} \quad (117)$$

La transition à 614 keV est donc de type *M1* ou *E2* (Table).

La transition à 723 keV est de manière similaire de type *M1* ou *E2* avec un coefficient α_K calculé de $1.93 \cdot 10^{-3}$.

Des raies en électrons de 30 keV et de 79 keV (K,L,M,...) apparaissent dans la partie basse énergie du spectre; elles ne sont pas observées en coïncidence avec les raies de 434, 614, 723 keV observées dans le noyau fille Pd. Ces raies sont les raies converties *M4* du ^{108m}Ag ($6^+ \rightarrow 2^-$) et *E1* ($2^- \rightarrow 1^+$) dans ^{108}Ag .

Les états à 1048 et 1771 keV dans ^{108}Pd sont identifiés par les corrélations angulaires et les transitions sont de type pure *E2*.

L'état isomérique ^{108m}Ag (6^+) décroît vers le 6^+ du Pd (Fermi permise) à 91% et une cascade $6^+ \rightarrow 4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ est observée dans le Pd (les trois transitions ont la même intensité ($\gamma + e^-$) totale).

5.2 Exemple de la décroissance de l'état ^{180m}Hf

Les transitions 93, , 215, 332 keV sont de type *E2* (mesure des coefficients de conversion) alors que les transitions à 57.5 et 500.7 keV sont de type *E1* et *E3* respectivement (Table)[6].

Les transitions 93, , 215, 332 keV ont les mêmes intensités totales et font donc partie d'une même cascade $6^+ \rightarrow 4^+ \rightarrow 2^+ \rightarrow 0^+$ du spectre rotationnel en $I(I+1)$ du noyau ^{180}Hf (Fig 5.4).

Un état 8^+ est observé à 1085 keV, la transition $8^+ \rightarrow 6^+$ de 443.2 keV permettant de l'identifier.

La transition à 57.5 keV a la même intensité totale $I_T = I_\gamma(1 + \alpha)$ que la transition de 443.2 keV ($I_T(57) = I_T(444)$) et peut donc être considérée comme suivie en cascade par cette transition.

L'intensité totale de peuplement du 6^+ devrait être la même que celle des autres états de la cascade $6^+ \rightarrow 4^+ \rightarrow \dots$. Le 6^+ est peuplé avec une intensité 89.7 par le 8^+ , il est également peuplé avec une intensité 16.2 par la transition à 500.7 keV:

$$I_T(444) + I_T(500) = I_T(332)$$

ce qui suggère que les transitions sont en cascade.

La transition à 57 keV est de type *E1* et celle à 500 keV de type *M2*, *E3*.

Dans la transition $E1$ vers le 8^+ , les spins 7^- , 8^- , 9^- seraient possibles pour l'état à 1142 keV ; dans la transition vers le 6^+ de type $M2$, $E3$ seul le spin 8^- peut être retenu.

5.3 Exemple du spectre du ^{177}Hf

Spectre, graphique et table (Figs 5.5 et 5.6)[6] sont présentés pour le spectre du ^{177}Hf déduits par désexcitation β^- du ^{177}Lu (6.7 jours). La bande rotationnelle $\frac{7^-}{2}$, $\frac{9^-}{2}$, $\frac{11^-}{2}$ est mise en évidence. Un état isomérique $\frac{9^+}{2}$ est peuplé à 321.3 keV et identifié par les raies γ d'énergies $321.3, 208.3, 71.6 \text{ keV}$ de type $E1 + M2$.

5.4 Isomères proches de la "drip-line" proton

Etude des transitions isomériques $10^+ \rightarrow 8^+$ de 86, 63 et 55 keV respectivement dans les noyaux $^{148}_{66}\text{Dy}$, $^{150}_{68}\text{Er}$, $^{152}_{70}\text{Yb}$ à la "drip-line" proton (Figs 5.7 et 5.8) [13].

Etude du remplissage de la sous-couche $h\frac{11^-}{2}$ en protons au dessus de 64. Dans le schéma de séniorité ($\nu = 2$), la transition $10^+ \rightarrow 8^+$ est identique dans les trois noyaux.

Les corrections sont des effets de configurations impliquant les états $d\frac{3^+}{2}$, $s\frac{1^+}{2}$ proches en énergie. Les coefficients $\alpha_{K,L,M,\dots}$ sont extraits des spectres γ et des spectres en électrons de conversion et on identifie la transition isomérique $E2(10^+ \rightarrow 8^+)$ puis les transitions $E1(8^+ \rightarrow 7^-)$ vers la bande rotationnelle $3^-, 5^-, 7^-$ et retour vers la bande du fondamental par une transition $E1(3^- \rightarrow 2^+)$.

Dans $^{152}_{70}\text{Yb}$ on a la configuration $(\pi h\frac{11^-}{2})^6$, la sous-couche $h\frac{11^-}{2}$ est à demi remplie ce qui donne une valeur très faible du BE_2 (0.02 W. units), les contributions des états de "particules" étant compensées par celles des états "trous".

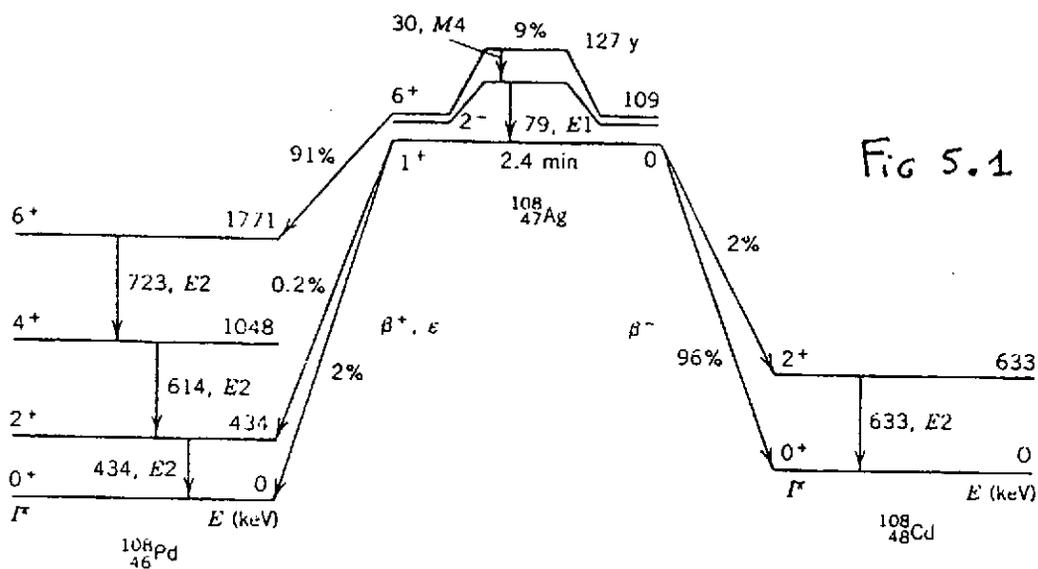


Fig 5.1

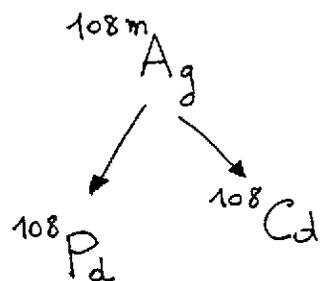
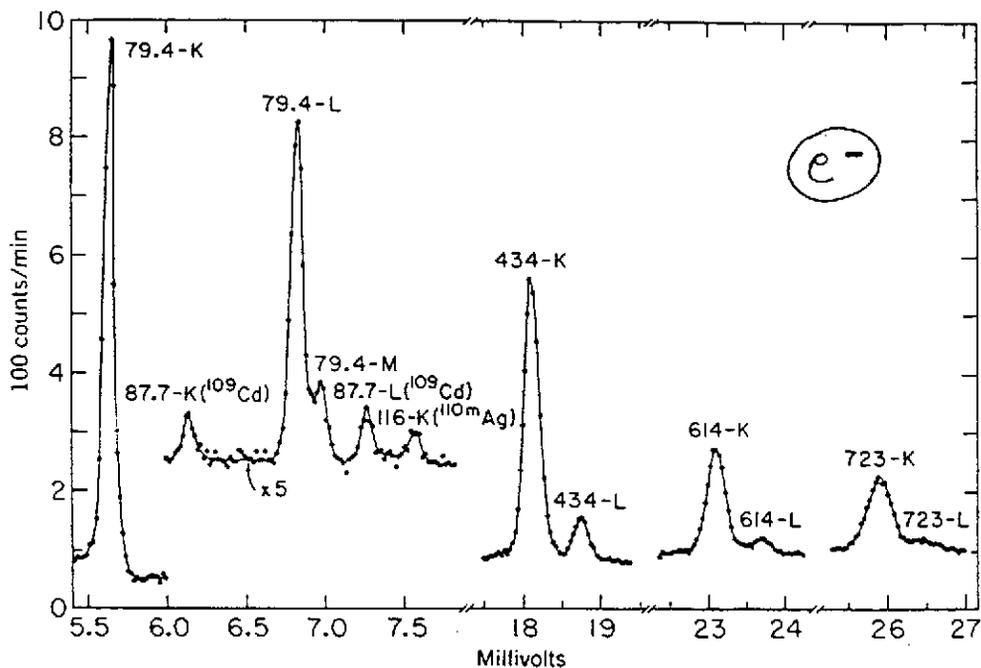
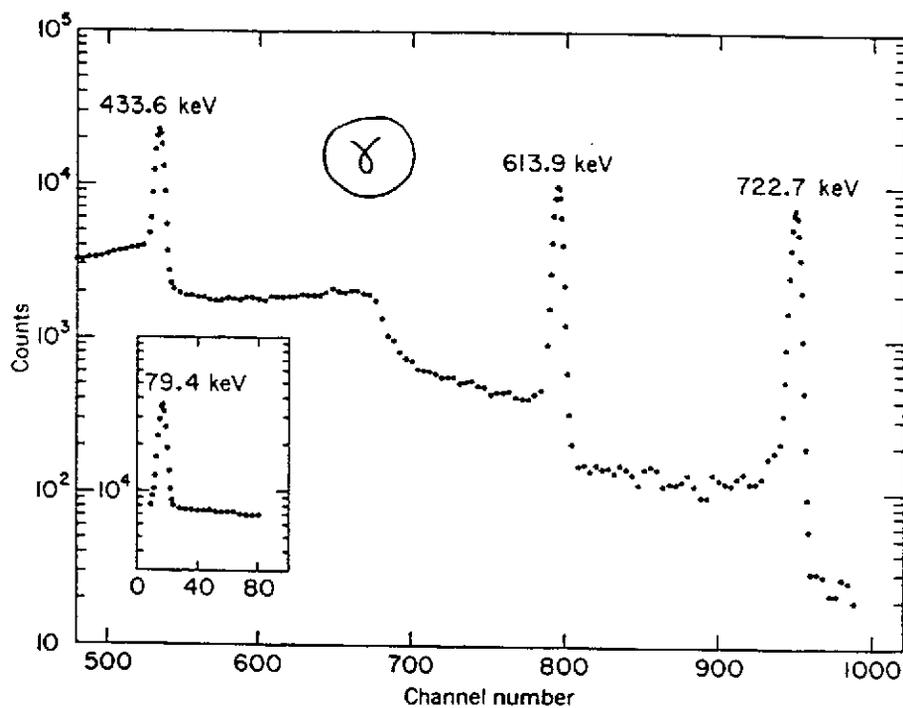


Fig 5.2



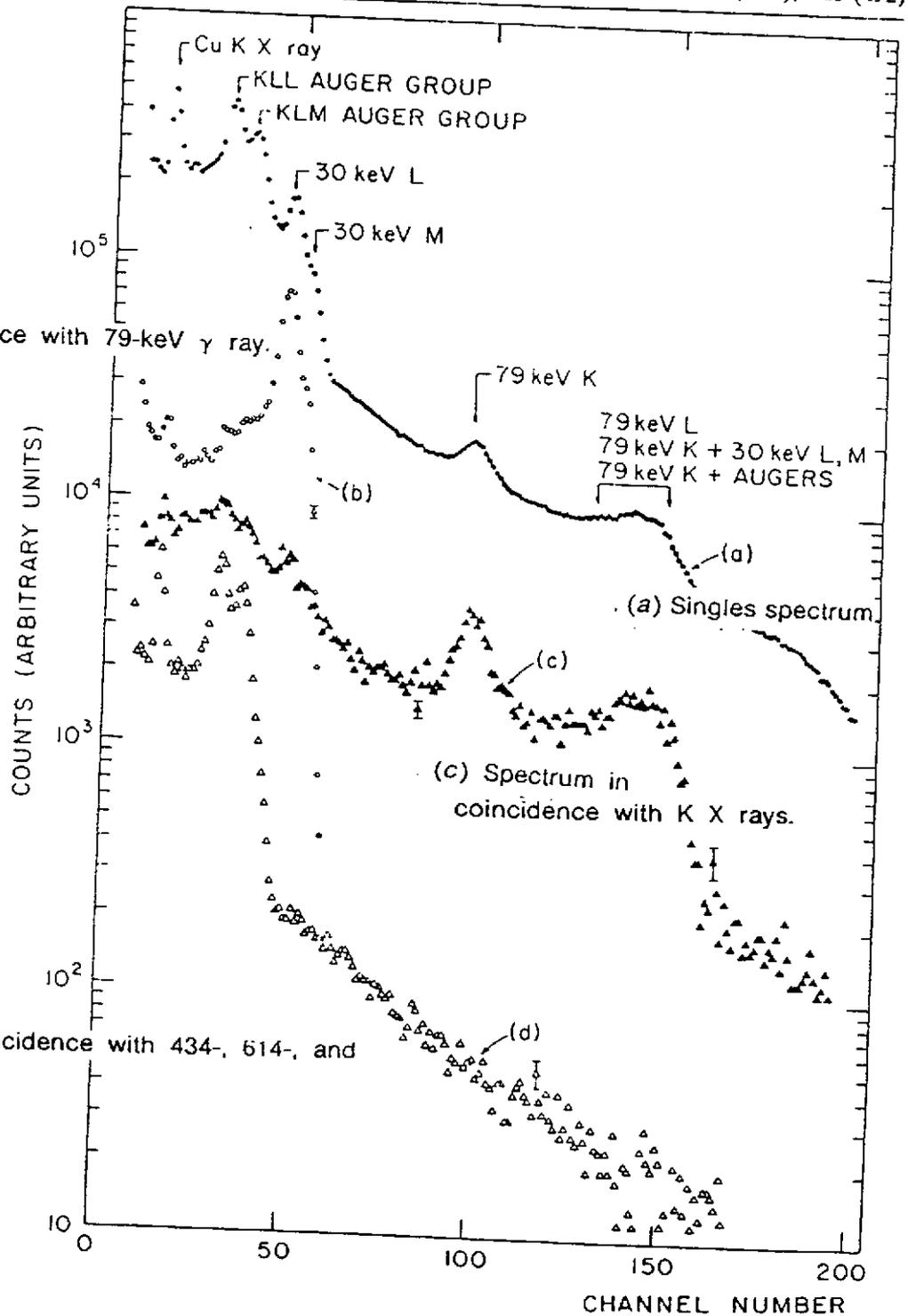
Table

Transition Energy (keV)	Relative γ Intensity	Relative Electron Intensity	Conversion Coefficient (units of 10^{-3})	
			Experimental	Theoretical
79.2	7.3 ± 0.8	204 ± 10 (K) 25 ± 2 (L)	220 ± 26 27 ± 4	270 (E1), 710 (M1), 2400 (E2)
434.0	≈ 100	≈ 100 (K)	≈ 7.89	33 (E1), 88 (M1), 777 (E2)
614.4	103 ± 3	14.8 ± 2.3 (L + ...) 37 ± 3 (K)	1.17 ± 0.18 2.83 ± 0.24	1.02 (E2) 1.03 (E1), 3.01 (M1), 2.92 (E2)
632.9	0.16 ± 0.02	5.1 ± 1.6 (L + ...)	0.39 ± 0.12	0.12 (E1), 0.35 (M1), 0.36 (E2)
723.0	102 ± 3	25.0 ± 1.2 (K) 4.6 ± 0.8 (L + ...)	1.93 ± 0.11 0.35 ± 0.06	0.72 (E1), 2.06 (M1), 1.91 (E2) 0.08 (E1), 0.24 (M1), 0.23 (E2)

Fig 5.3

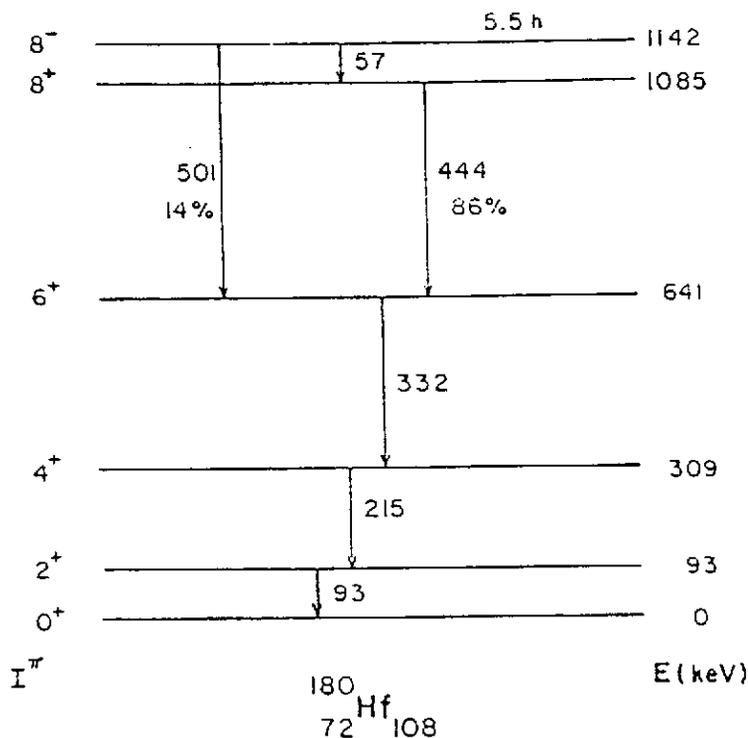
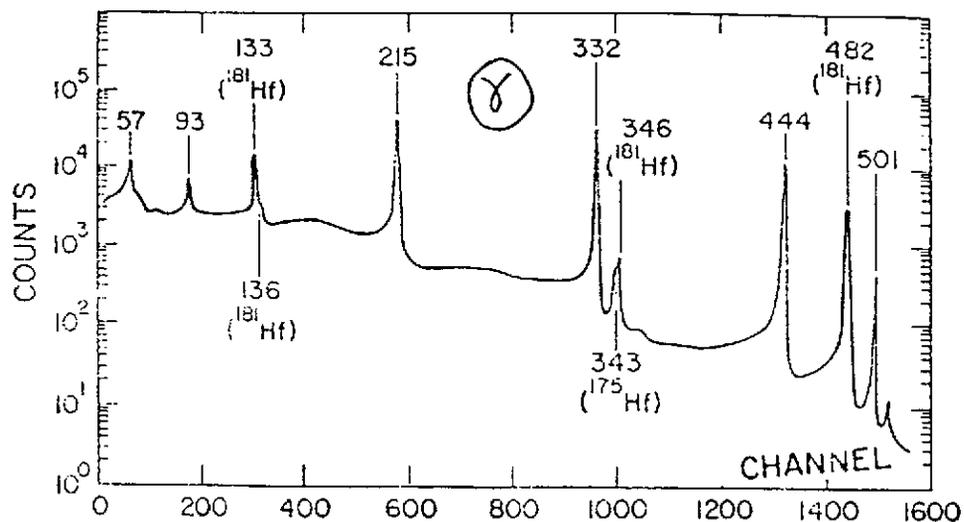
Coincidence spectra in the ^{108m}Ag decay

(b) Spectrum in coincidence with 79-keV γ ray.



(d) Spectrum in coincidence with 434-, 614-, and 723-keV γ 's.

Fig 5.4
180 Hf



$$I_t = I_\gamma (1 + \alpha)$$

$$I_T(57.5) = 87.1 \pm 2.9$$

$$I_T(93.3) = 108.1 \pm 4.8$$

$$I_T(215.3) = 103.4 \pm 1.0$$

$$I_T(332.3) = 105.3 \pm 1.1$$

$$I_T(443.2) = 89.7 \pm 1.6$$

$$I_T(500.7) = 16.2 \pm 0.4$$

Transition Energy (keV)	Relative γ Intensity	Conversion Coefficient	
		Experiment (atomic shell)	Theory (multipole)
57.5	51.3 ± 1.2	0.430 ± 0.029 (L)	0.452 (E1)
		0.083 ± 0.007 (M)	0.105 (E1)
		0.023 ± 0.004 (N + ...)	0.031 (E1)
		≈ 1.10 (K)	1.10 (E2)
93.3	17.6 ± 0.4	3.13 ± 0.19 (L)	2.72 (E2)
		0.91 ± 0.11 (M + ...)	0.85 (E2)
		0.123 ± 0.009 (K)	0.14 (E2)
215.3	86.2 ± 0.8	0.077 ± 0.011 (L)	0.071 (E2)
		0.038 ± 0.003 (K)	0.042 (E2)
		0.015 ± 0.002 (L)	0.013 (E2)
332.3	$\approx 100.0 \pm 1.0$	0.0189 ± 0.0017 (K)	0.020 (E2)
		0.0044 ± 0.0007 (L)	0.005 (E2)
		0.037 ± 0.012 (K)	0.124 (M2), 0.038 (E3)
443.2	87.7 ± 1.6	0.016 ± 0.005 (L)	0.062 (M2), 0.016 (E3)
500.7	15.4 ± 0.4		

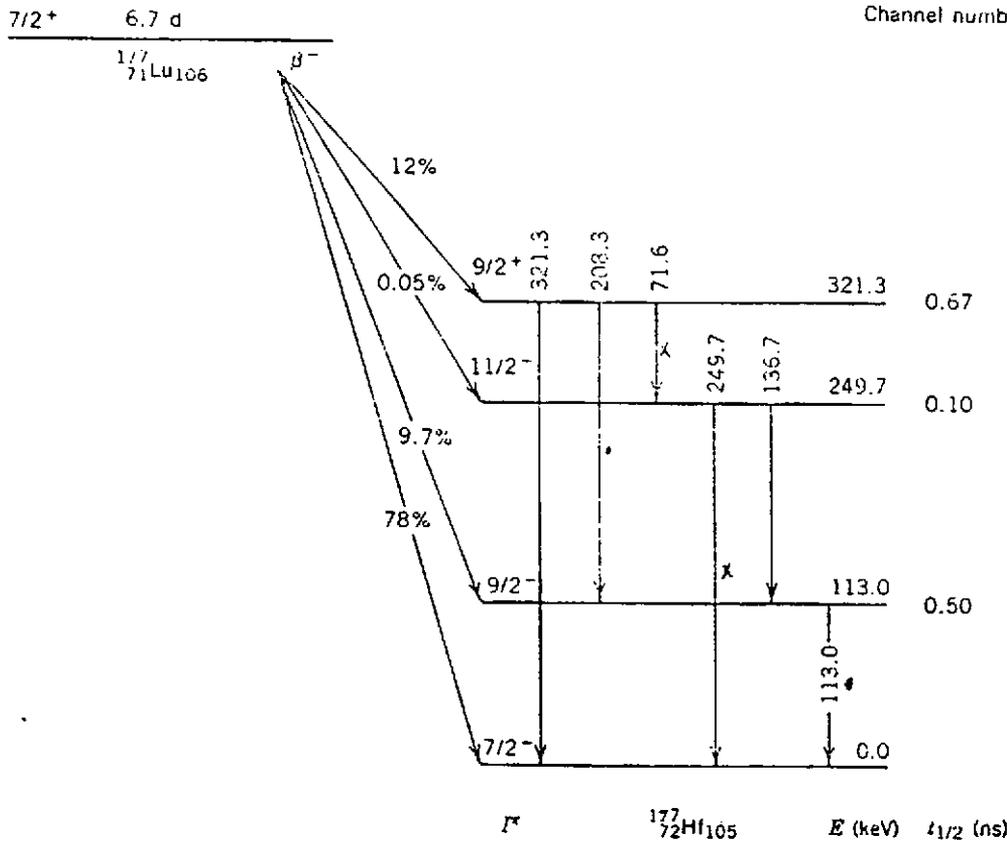
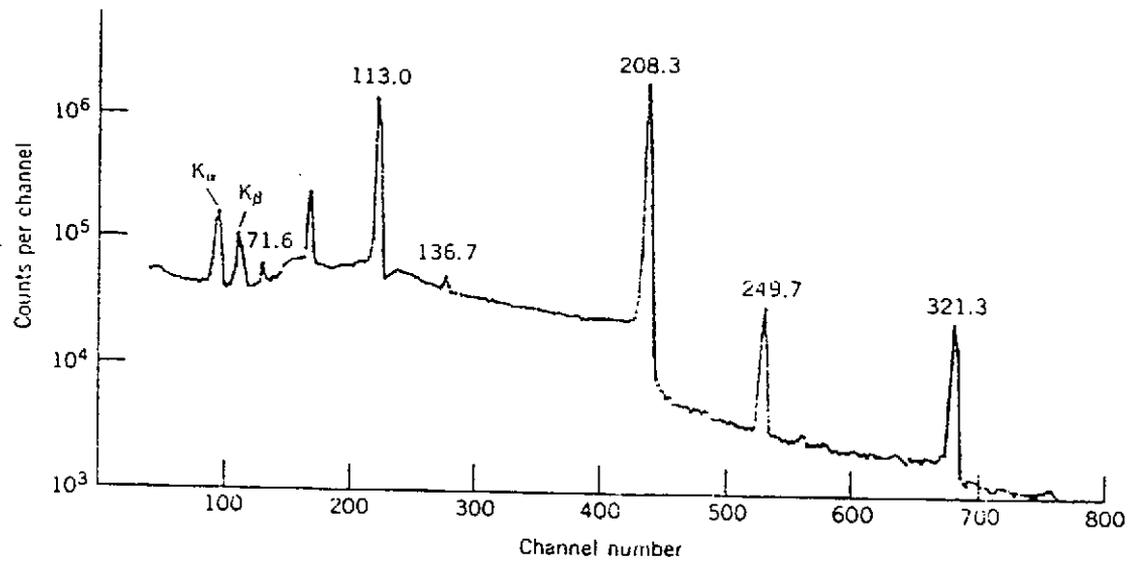
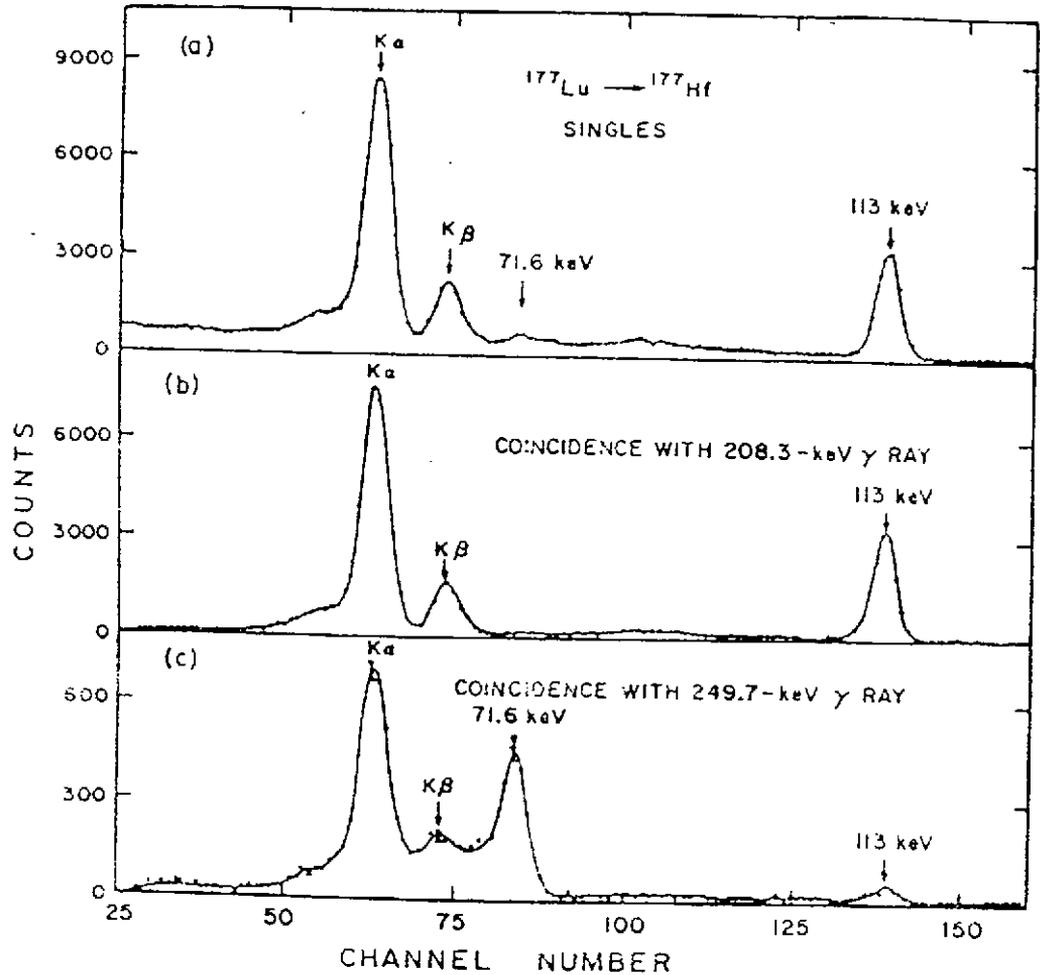


Fig 5.5

 ^{177}Hf

Transition Energy (keV)	Relative γ Intensity	Conversion Coefficient	
		Experiment (atomic shell)	Theory (multipole)
71.6	2.4 ± 0.1	0.90 ± 0.11 (K)	0.72 (E1), 92.0 (M2)
		0.087 ± 0.010 (L ₁)	0.071 (E1), 24.3 (M2)
113.0	≈ 100	0.78 ± 0.05 (K)	2.4 (M1), 0.74 (E2)
		0.091 ± 0.011 (L ₁)	0.345 (M1), 0.076 (E2)
136.7	0.92 ± 0.06	0.49 ± 0.08 (K)	1.45 (M1), 0.48 (E2)
		0.08 ± 0.02 (L ₁)	0.20 (M1), 0.05 (E2)
208.3	164 ± 10	0.046 ± 0.004 (K)	0.046 (E1), 2.05 (M2)
		0.0063 ± 0.0006 (L ₁)	0.0053 (E1), 0.38 (M2)
249.7	3.0 ± 0.2	0.101 ± 0.009 (K)	0.26 (M1), 0.094 (E2)
		0.102 ± 0.013 (K)	0.0155 (E1), 0.49 (M2)
321.3	3.6 ± 0.2	0.017 ± 0.002 (L ₁)	0.0018 (E1), 0.081 (M2)



Coincidence spectra from the ^{177}Lu decay. Note the strong coincidence between 208 and 113; also note how the 71.6-keV peak, which is barely observable in the singles spectrum at the top, appears prominently in coincidence with 249.7 keV. (The small apparent 113.0-keV peak in the 249.7 keV coincidence spectrum is an artifact.) Data from A. P. Agnihotry et al., *Phys. Rev. C* 9, 336 (1974).

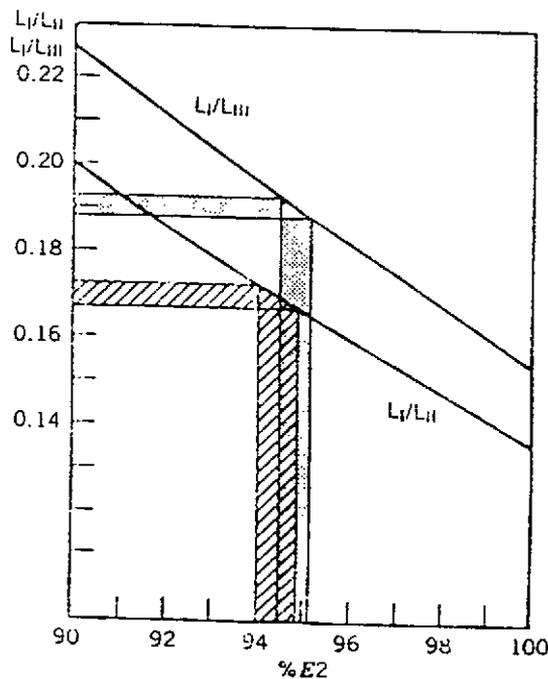


Fig 5.6

^{177}Hf

Determination of the E2 fraction of the 113.0-keV transition in ^{177}Hf from L-subshell data. The horizontal bars give the ranges of the experimental L-subshell ratios, and the vertical bars give the corresponding E2 fractions. The transition is deduced to be 94–95% E2 (and thus 5–6% M1). Data from S. Högborg et al., *Z. Phys.* 254, 89 (1972).

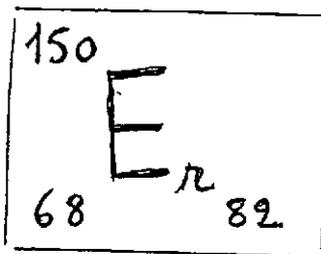
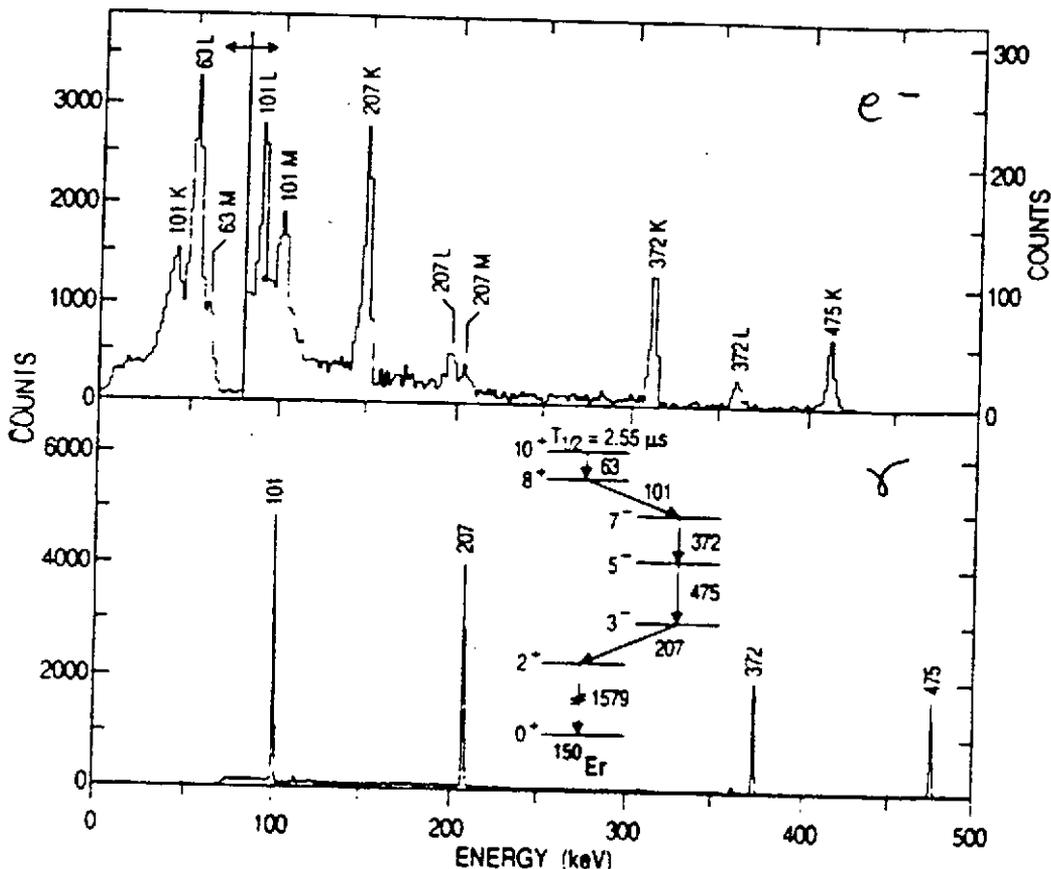
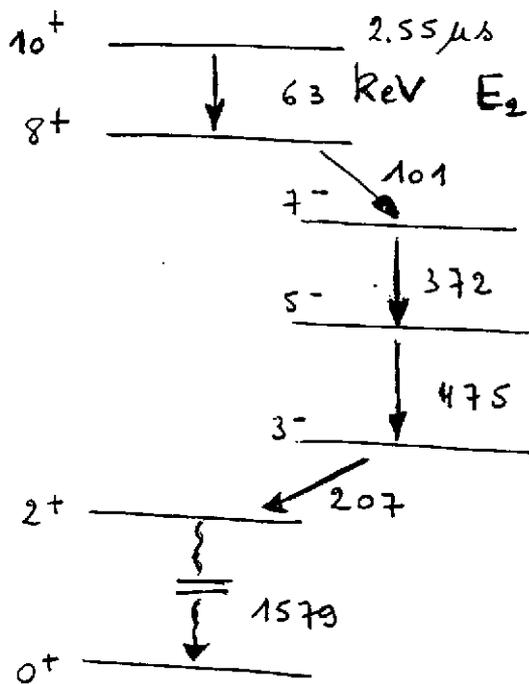
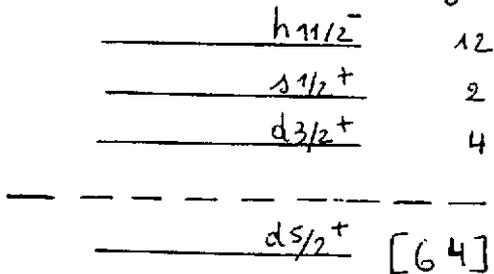


Fig 5.7

Transition	α_{expt}	E1	E2	M1	Assignment
63L	15.9(3.5)	0.12	14.0	1.0	E2
63M	3.5(9)	0.034	3.6	0.30	
101K	0.30(3)	0.30	1.1	2.5	E1
207K	0.031(6)	0.042	0.14	0.28	E1
372K	0.026(7)	0.01	0.030	0.07	E2
475K	0.014(5)	0.0052	0.014	0.035	E2



Shell Model analysis



$(\pi h_{11/2})^4$ 4 protons de valence

$\rightarrow \sigma = 2 \rightarrow 0^+ 2^+ 4^+ 6^+ 8^+ 10^+$

$\pi h_{11/2}^- s_{1/2}^+) 5^-$

$\pi h_{11/2}^- d_{3/2}^+) 7^-$

$\pi h_{11/2}^- d_{5/2}^{+1}) 3^-$ p-h excitation

$$\begin{array}{c}
 10^+ \rightarrow 8^+ \\
 \text{isomérique} \\
 \hline
 E_2 \quad 63 \text{ keV} \\
 T_{1/2} = 2.55 \mu\text{s}
 \end{array}$$

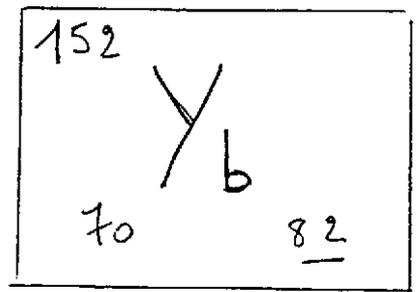
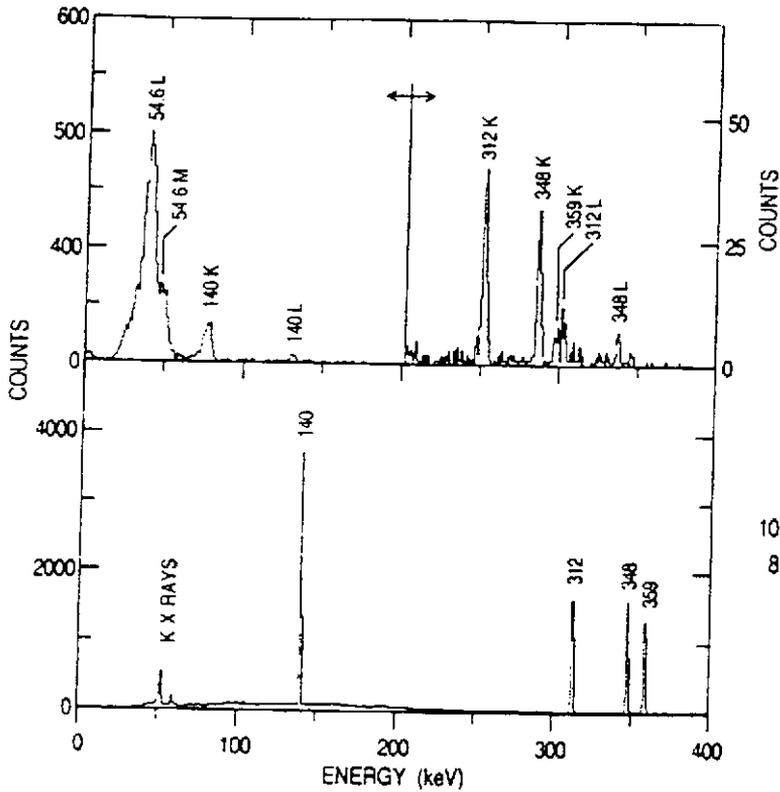
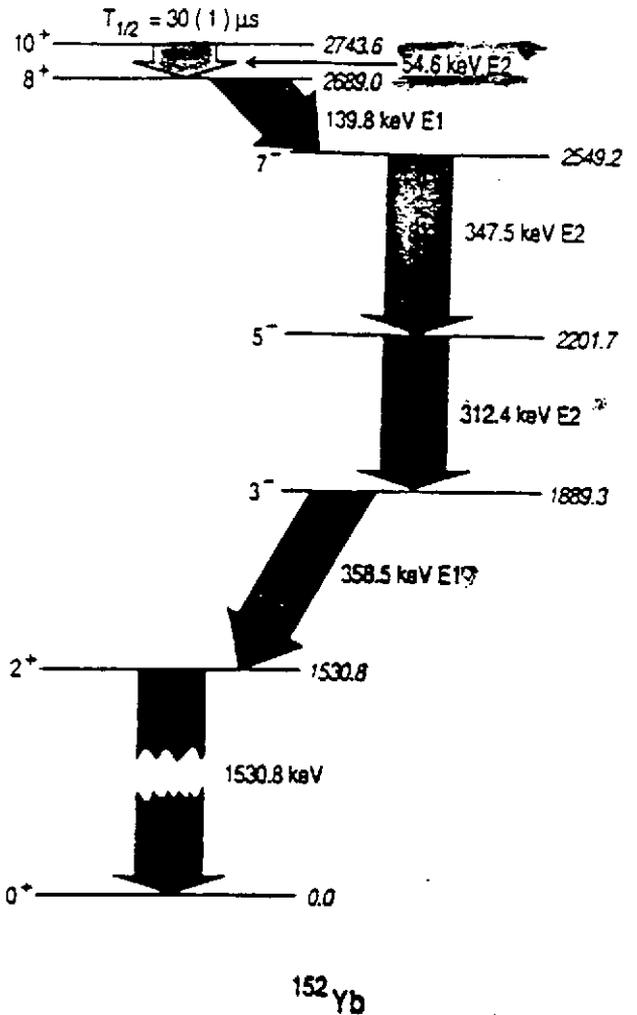
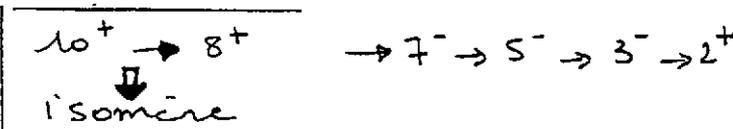


Fig 5.8



		α_{exp}	E_1	E_2	M_1	
^{152}Yb	140K	0.19(4)	0.14	0.41	1.2	E1
	140L	0.018(8)	0.019	0.18	0.44	
	312K	0.040(12)	0.017	0.052	0.13	E2
	313L	0.010(4)	0.0022	0.019	0.020	
	348K	0.029(9)	0.013	0.036	0.10	E2
^{151}Yb	359K	0.0074(23)	0.012	0.032	0.09	E1
	203K	0.068(18)	0.05	0.16	0.42	E1



$$\tau_{1/2} = 30 \mu\text{s} \pm 1 \mu\text{s}$$

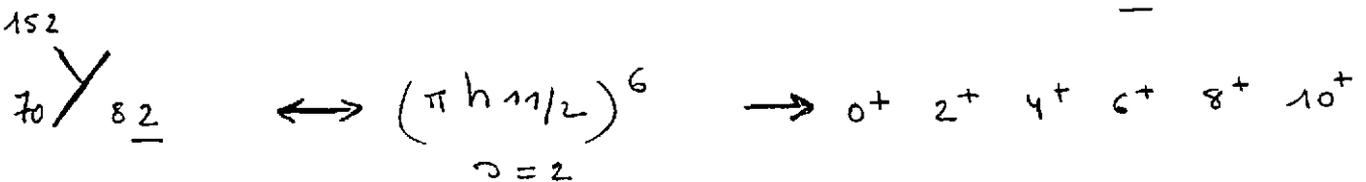
$$B_{E2} = 0.95(4) e^2 \text{fm}^4$$

(0.02 W.u.)

(1/2 remplissage de la sous-couche ($h^{11/2^-}$))

The low-lying yrast level scheme below the 10^+ isomere in ^{152}Yb . With the exception of the 1531 keV γ ray, all transition multiplicities have now been determined.

Interprétation similaire à celle de ^{150}Er



Atomic Data

- **Internal Conversion Coefficients (PDF)**. Graphs from Band et al, At. Nucl. Data Tables 18, 433(1976) for Z=3,6,14-29 and Rosel et al, At. Nucl. Data Tables 21, 110(1978) for Z>29.

1. K-Shell Z=3,6, Z=10-100 M1,E1 M2,E2 M3,E3 M4,E4

2. L₁-Shell, Z=10-100 M1,E1 M2,E2 M3,E3 M4,E4

3. L₂-Shell, Z=10-100 M1,E1 M2,E2 M3,E3 M4,E4

4. L₃-Shell, Z=10-100 M1,E1 M2,E2 M3,E3 M4,E4

5. Total, Z= 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100

- **Internal Conversion Coefficients (Text)**. Tables from Band et al, At. Nucl. Data Tables 18, 433(1976) for Z=3,6,14-29 and Rosel et al, At. Nucl. Data Tables 21, 110(1978) for Z>29.

Z = 3 6 10 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38
39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67
68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96
97 98 99 100 101 102 103 104

- **Electron Capture Subshell Ratios (PDF)**
- **Atomic Binding Energies (PDF)**
- **Fluorescence and Coster-Kronig Yields (PDF)**
- **X-ray Energies and Intensities (PDF)**
 1. Per 100 K-Shell Vacancies
 2. Per 100 L₁, L₂, and L₃ Vacancies
- **Auger Electron Intensities (PDF)**

- **[Return to Table of Isotopes home page](#)**

APPENDICES

A Quelques formules

A.1 Formule du gradient

$$\vec{\nabla} f(r) Y_{l,m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{l}{2l+1}} \left(\frac{df}{dr} + \frac{l+1}{r} f \right) \vec{Y}_{l,m}^{l-1,1}(\hat{r}) - \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} \left(\frac{df}{dr} - \frac{l}{r} f \right) \vec{Y}_{l,m}^{l+1,1}(\hat{r})$$

$$\vec{Y}_{L,M}^{l,1}(\hat{r}) = \sum_{m_l=-l}^{+l} \sum_{m'=-1}^{+1} (l \ m_l \ 1 \ m' \ | \ l \ 1 \ L \ M) Y_{l \ m_l} \chi_{m'}^1$$

A.2 Fonctions de Bessel: formule de récurrence

$$\frac{dj_l}{dr} + \frac{l+1}{r} j_l = k j_{l-1}$$

$$\frac{dj_l}{dr} - \frac{l}{r} j_l = -k j_{l+1}$$

A.3 Condition de "jauge" de coulomb

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{L,M} = \vec{\nabla} \cdot (j_l Y_{L,M}^{(l,1)}) = -k j_L(kr) Y_{L,M}(\theta, \varphi) \left[\sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} \delta_{L,l-1} + \sqrt{\frac{L}{2L+1}} \delta_{L,l+1} \right]$$

La condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{L,M} = 0$ est satisfaite pour $l = L$ (cas magnétique: $\vec{A}_{L,M}^M$).

Dans la combinaison définissant la composante électrique $\vec{A}_{L,M}^e$, on a $-k j_L Y_{L,M} [C_{L+1} \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}}]$ pour $l = L+1$ et $-k j_L Y_{L,M} [C_{L-1} \sqrt{\frac{L}{2L+1}}]$ pour $l = L-1$.
On choisira donc

$$C_{L-1} = \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}}$$

$$C_{L+1} = -\sqrt{\frac{L}{2L+1}}$$

A.4 Normalisation

Les composantes $\vec{A}_{L,M}^{\sigma}$ sont normalisées sur un domaine sphérique de rayon R_0 non défini.

On a pour les fonctions $j_l(kr)$:

$$1 = N^2 \int_0^{R_0} j_l^2 r^2 dr = \frac{N^2}{k^3} \int_0^{kR_0} j_l^2(x) x^2 dx$$

On utilise la propriété:

$$\int j_l^2(\rho) \rho^2 d\rho = \frac{\rho^3}{2} [j_l^2(\rho) - j_{l-1}(\rho) j_{l+1}(\rho)]$$

et le comportement asymptotique des fonctions de Bessel

$$\lim_{kR_0 \rightarrow \infty} j_l(kR_0) = \frac{\sin(kR_0 - l\frac{\pi}{2})}{kR_0}$$

Dès lors, on a la condition:

$$1 = \frac{N^2 (kR_0)^3}{k^3} \frac{1}{2} \left[\frac{\sin^2(kR_0 - l\frac{\pi}{2})}{(kR_0)^2} - \frac{\sin(kR_0 - \frac{(l+1)\pi}{2}) \sin(kR_0 - \frac{(l-1)\pi}{2})}{(kR_0)^2} \right] \quad (118)$$

$$1 = \frac{N^2 (kR_0)}{k^3} \frac{1}{2} \quad (119)$$

et donc on a $N = (\frac{2k^2}{R_0})^{\frac{1}{2}}$.

B Passage des solutions en ondes planes aux solutions en ondes sphériques

Les vecteurs \vec{k} , \vec{e} et $\vec{k} \times \vec{e}$ donc \vec{k} , \vec{E} et \vec{B} forment un trièdre trirectangle dextrogyre. Pour une onde se déplaçant dans la direction \vec{z} et polarisée circulairement, on peut définir \vec{E} et \vec{B} par:

$$\vec{B} = \mp k e^{ikz} \chi_{\pm 1}^1 \quad (120)$$

$$\vec{E} = i k e^{ikz} \chi_{\pm 1}^1 \quad (121)$$

Le développement de l'exponentielle en harmoniques sphériques donne:

$$\vec{B} = \mp k \sum_l i^l (4\pi (2l+1))^{\frac{1}{2}} j_l(kr) Y_{l,0}(\theta, \varphi) \chi_{\pm 1}^1 \quad (122)$$

$$\vec{E} = i k \sum_l i^l (4\pi (2l+1))^{\frac{1}{2}} j_l(kr) Y_{l,0}(\theta, \varphi) \chi_{\pm 1}^1 \quad (123)$$

avec

$$\vec{Y}_{L,M}^{l,1}(\hat{r}) = \sum_{m_l=-l}^{+l} \sum_{m'=-1}^{+1} (l m_l 1 m' | l 1 L M) Y_{l m_l} \chi_{m'}^1$$

En inversant cette relation, on a :

$$Y_{l,m} \chi_{m'}^1 = \sum_{L=l, l \pm 1} (l m 1 m', l 1 L (m+m')) \vec{Y}_{LM}^{l,1} \quad (124)$$

et en particulier:

$$Y_{l,0} \chi_{\pm 1}^1 = \sum_L (l 0 1 \pm 1, l 1 L \pm 1) \vec{Y}_{LM=\pm 1}^{l,1} \quad (125)$$

On aura donc par exemple pour le champ électrique :

$$\vec{E} = i k \sum_{L=0}^{\infty} i^L \sqrt{2\pi(2L+1)} [j_L(kr) \vec{Y}_{L\pm 1}^{(L,1)}] \quad (126)$$

$$- i \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_{L-1}(kr) \vec{Y}_{L\pm 1}^{(L-1,1)} + i \sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_{L+1}(kr) \vec{Y}_{L\pm 1}^{(L+1,1)}] \quad (127)$$

Le premier terme est l'expression de $\vec{E}_{L\pm 1}^M(\vec{r})$; de plus on a pour les fonctions de Bessel, les équations définies en A.2, et on peut démontrer que:

$$i \left[d_r - \frac{L}{r} \right] \sqrt{\frac{L}{2L+1}} j_L(kr) \vec{Y}_{L\pm 1}^{(L+1,1)} + i \left[d_r + \frac{L+1}{r} \right] \sqrt{\frac{L+1}{2L+1}} j_L(kr) \vec{Y}_{L\pm 1}^{(L-1,1)} \\ = i k \vec{E}_{L\pm 1}^e(\vec{r}) \quad (128)$$

On a donc:

$$\vec{E} = \sum_L i^L \sqrt{2\pi(2L+1)} [\vec{E}_{L\pm 1}^M(\vec{r}) \pm \frac{1}{k} \vec{E}_{L\pm 1}^e(\vec{r})] \quad (129)$$

On aura de même:

$$\vec{B} = \sum_L i^L \sqrt{2\pi(2L+1)} [\mp i \vec{B}_{L\pm 1}^e(\vec{r}) - \frac{i}{k} \vec{B}_{L\pm 1}^M(\vec{r})] \quad (130)$$

C Conversion interne

Dans l'expression (109) de H_{int} de la conversion interne (approximation du noyau ponctuel) l'indice $\tau = (\mathcal{M}, e, l)$ définit les composantes magnétique, électrique et longitudinale du champ.

On remplace $A_{L,M}^*(l, \vec{X})$ par l'expression (108) et $B_{L,M}(l, \vec{X})$ par l'expression équivalente où $j_L(kr)$ est remplacé par $h_L^1(kr)$. On a pour L différent de 0 ($A_{0,0} = B_{0,0} \equiv 0$) des intégrales du type:

$$\frac{1}{k_N^2} \int_0^\infty \vec{j}^N(\vec{X}_N) \vec{\nabla} (j_L(k_N X_N) Y_{L,M}^*) d\vec{X}_N \int_0^\infty \vec{j}_e(\vec{X}_e) \vec{\nabla} (h_L^1(k_N X_e) Y_{L,M}) d\vec{X}_e \quad (131)$$

En intégrant par partie et en utilisant l'équation de continuité pour les courants nucléaire et électronique, on a encore:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_N^2} [(j_N j_L Y_{L,M}^*)_0^\infty - \int_0^\infty (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_N) j_L(k_N X_N) Y_{L,M}^* d\vec{X}_N] \\ & [(j_e h_L^1 Y_{L,M})_0^\infty - \int_0^\infty (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e) h_L^1(k_N X_e) Y_{L,M} d\vec{X}_e] \end{aligned} \quad (132)$$

ou de manière équivalente:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k_N^2} [(j_N j_L Y_{L,M}^*)_0^\infty - \frac{i(E_i - E_f)}{\hbar} \int \varrho^N(\vec{X}_N) j_L(k_N X_N) Y_{L,M}^*(\hat{X}_N) d\vec{X}_N] \\ & [(j_e h_L^1 Y_{L,M})_0^\infty - \frac{i(\epsilon_i - \epsilon_f)}{\hbar} \int \varrho^e(\vec{X}_e) h_L^1(k_N X_e) Y_{L,M}(\hat{X}_e) d\vec{X}_e] \end{aligned} \quad (133)$$

Le courant nucléaire étant nul à l'infini et $j_L(kX)$ étant nul en $X = 0$ pour $L \neq 0$, on a:

$$[j_N j_L Y_{L,M}^*]_0^\infty = 0 \quad (134)$$

Le courant électronique étant nul à l'infini et supposé nul au centre du noyau ($X = 0$), on peut supposer:

$$[j_e h_L^1 Y_{L,M}]_0^\infty = 0 \quad (135)$$

Une démonstration plus rigoureuse est donnée par Kramer (1956-1957) et est reprise dans [11]. En ajoutant et retranchant des termes de "jauge" on peut éliminer la divergence en $X = 0$ des termes associés à $B_{L,M}(kX)$ et démontrer le résultat donné ci-après. La partie longitudinale de l'interaction se réduit à :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{k_N^2} i^2 \frac{(k_N \hbar c)^2}{\hbar^2} \int \dots \int \dots \\ & = c^2 \int_0^\infty \varrho_N j_L(k_N X_N) Y_{L,M}^*(\hat{X}_N) d\vec{X}_N \int_0^\infty \varrho_e h_L^1(k_N X_e) Y_{L,M}(\hat{X}_e) d\vec{X}_e \end{aligned} \quad (136)$$

avec $E_i - E_f = -k_N \hbar c$ et $\epsilon_i - \epsilon_f = k_N \hbar c$. Comme nous l'avons vu, la composante longitudinale est seulement définie pour $L \geq 1$. Dans ce cas, on obtient exactement la même expression que celle définie par la contribution d'interaction coulombienne statique dans l'expression (109), mais avec le signe opposé.

Il en résulte donc que les seuls termes restants sont ceux définis pour $L \geq 1$ par:

$$H_{int} = -\frac{4\pi i k_N}{c^2} \sum_{L,M} \sum_{\tau \equiv e, N} \int_0^\infty \vec{j}_N A_{L,M}^* d\vec{X}_N \int_0^\infty \vec{j}_e B_{L,M} d\vec{X}_e \quad (137)$$

La contribution $L = 0$, soit E_0 est essentiellement due aux termes intérieurs définis pour $L = 0$ par:

$$(4\pi i k_N) \left[\int_0^\infty \varrho_N h_L^1(k_N X_N) Y_{L,M}(\hat{X}_N) d\vec{X}_N \int_0^{X_N} \varrho_e j_L(k_N X_e) Y_{L,M}^*(\hat{X}_e) d\vec{X}_e \right. \quad (138)$$

$$\left. - \int_0^\infty \varrho_N j_L(k_N X_N) Y_{L,M}^*(\hat{X}_N) d\vec{X}_N \int_0^{X_N} \varrho_e h_L^1(k_N X_e) Y_{L,M}(\hat{X}_e) d\vec{X}_e \right] \quad (139)$$

Pour $kX \leq 1$, on a $j_L \rightarrow 1$ et $h_L^1 \rightarrow \frac{1}{k_N X}$ de sorte que ce terme se réduit à l'expression:

$$\begin{aligned} (4\pi i) \int_0^\infty \varrho_N Y_{0,0} d\vec{X}_N \int_0^{X_N} \varrho_e Y_{0,0}^* \left(\frac{1}{X_N} - \frac{1}{X_e} \right) d\vec{X}_e \\ = i \int_0^\infty \varrho_N d\vec{X}_N \int_0^{X_N} \varrho_e \left(\frac{1}{X_N} - \frac{1}{X_e} \right) d\vec{X}_e \end{aligned} \quad (140)$$

conduisant à l'expression (111).

Les termes $L = 0$ associés à l'hypothèse d'un noyau ponctuel sont factorisés en

$$\int_0^\infty \varrho_N d\vec{X}_N \int_0^\infty \varrho_e \frac{1}{X_e} d\vec{X}_e \quad (141)$$

Ces termes ne donnent aucune contribution car les éléments de matrice non diagonaux de la charge nucléaire totale sont nuls.

On peut démontrer de même que les termes correctifs de la contribution intérieure des composantes longitudinales donnent des expressions identiques et de signe opposé de celles associées aux contributions internes des termes de l'interaction statique coulombienne[11] et dès lors, les seules contributions qui subsistent sont les corrections internes associées aux composantes transverses, comme démontré dans le cas de l'approximation d'un noyau ponctuel.

References

- [1] J. M. Eisenberg and W. Greiner "Excitation Mechanisms of the nucleus"
Vol 2. "Electromagnetic and weak interaction", North Holland P.C. (1970)
- [2] W. D. Hamilton "The electromagnetic interaction in Nuclear Spectroscopy" North
Holland P.C. (1975)
Ch. 1: K. Alder and R. M. Steffen "Emission and absorption of electromagnetic
radiation"
Ch. 2: K. Alder and R. M. Steffen " Emission of gamma radiation and nuclear
structure"
Ch. 10: H. C. Pauli, K. Alder and R. M. Steffen "The theory of internal conversion"
- [3] P. J. Brussaard and P. W. M. Glaudemans "Shell model applications in nuclear
spectroscopy", North Holland P.C. (1977), Ch 9-10
- [4] F. Rösel, H. M. Fries, K. Alder and H. C. Pauli, Atomic Data and Nuclear data
tables 21 (1978) 91 and 291 (issues 2-3 and 4-5)
- [5] R. S. Hager and E. C. Seltzer, Nuclear Data A4 (1968) 1
- [6] K. S. Krane "Introductory Nuclear Physics" (1988) Ch 10 "Gamma decay"
- [7] Richard B. Firestone "Table of isotopes" 8th ed., Vol II, Appendix F; Virginia S.
Shirley Ed., John Wiley (1996)
- [8] A. Bohr and B.R. Mottelson, Nuclear Structure, Vol I, W.A. Benjamin, Inc. 1969
(New-York)
- [9] V.F. Weisskopf, Phys.Rev.83 (1951) 1073
- [10] O. Hahn and L. Meitner, Z. Physik 29 (1924) 161
- [11] E.L. Church and J. Weneser, Ann. Rev. Nucl. Science 10 (1960)
- [12] C.M. Lederer and V.S. Shirley, New-York: Wiley (1978)
- [13] D. Nisius et al. Phys. Rev. C 52 (1995) 1355