

# POLYNOMES ORTHOGONAUX

Ludovic VALET

14 mai 2007

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Généralités</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Présentation des polynômes orthogonaux</b>	<b>4</b>
3.1	Généralités . . . . .	4
3.2	Une formule de Christoffel . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Propriétés générales des polynômes orthogonaux</b>	<b>7</b>
4.1	Propriétés d'extrema et de fermeture . . . . .	7
4.2	Formule de récurrence, formule de Christoffel-Darboux . . . . .	10
4.2.1	Formule de récurrence . . . . .	10
4.2.2	Formule de Darboux-Christoffel . . . . .	11
4.3	Propriétés élémentaires des zéros des polynômes orthogonaux . . . . .	12
4.4	Quadrature mécanique de Gauss-Jacobi . . . . .	13
4.5	Fractions continues . . . . .	15
4.5.1	Généralités . . . . .	15
4.5.2	Etude du cas d'un intervalle fini . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Propriétés des polynômes orthogonaux classiques</b>	<b>20</b>
5.1	Formule de Rodriguez . . . . .	20
5.2	Les polynômes classiques . . . . .	20
5.2.1	Polynômes de Hermite . . . . .	20
5.2.2	Polynômes de Laguerre . . . . .	20
5.2.3	Polynômes de Jacobi ou hypergéométriques . . . . .	21
5.3	Equation et forme différentielles . . . . .	21
5.4	Fonctions génératrices . . . . .	25
5.4.1	Généralité . . . . .	25
5.4.2	Cas des polynômes de Hermite . . . . .	27

5.4.3 Recherche d'une formule de récurrence . . . . .	28
<b>6 Table de polynômes</b>	<b>30</b>

# 1 Introduction

Etant donnés :

- $H$  un espace de Hilbert (réel) de produit scalaire  $(\cdot, \cdot)$ ,
- $\{g_1, \dots, g_n\}$  un système d'éléments linéairement indépendants de  $H$
- $f \in H$

on cherche  $\min \|f - f'\|$ , où  $f'(x) = a_1g_1 + \dots + a_n g_n$ . Il existe une unique  $\tilde{f}$  tel que le minimum soit réalisé (existence de la projection orthogonale) qui est caractérisé par :  $(f - \tilde{f}, g_k) = 0$ , pour  $k = 1, \dots, n$ . Ce qui s'écrit :

$$\sum_{i=1}^n a_i (g_i, g_k) = (f, g_k), k = 1, \dots, n$$

Ce qui nous donne un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues de la forme :

$$AX = B$$

où  $\begin{cases} A &= ((g_i, g_j))_{i,j=1,\dots,n} \\ B &= (f, g_k)_{k=1,\dots,n} \\ X &= (a_k)_{k=1,\dots,n} \end{cases}$  Ce système devient trivial lorsque la matrice  $A$  est la ma-

trice identité (de dimension  $n$ ), c'est à dire quand  $(g_i, g_j) = \delta_{ij}$ , soit quand le système  $\{g_1, \dots, g_n\}$  est orthonormal, on est donc amené à poser la définition suivante :

**Définition 1.1.** Un système  $\{g_1, \dots, g_n\}$ , fini ou non, dans un préhilbertien, est dit orthonormal ssi :

$$(g_i, g_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

## Remarque

Un tel système est nécessairement linéairement indépendant. En effet : soit  $a_1g_1 + \dots + a_n g_n = 0$  en prenant  $(\cdot, g_k)$ , pour  $k = 1, \dots, n$ , on a le résultat à savoir :  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

## Exemples

1) Dans l'espace  $l^2$  la suite  $(e_n)$ , de terme général  $e_n = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots)$  constituée de 0 sauf le  $n^{\text{ième}}$  terme qui est égal à 1, est un système orthonormal, pour le produit scalaire :

$$(f, g) = \sum_{i \geq 0} f_i g_i \text{ avec } f = (f_i)_{i \geq 0} \text{ et } g = (g_i)_{i \geq 0}.$$

2) Dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur  $[-1, +1]$  et à valeurs dans  $\mathbf{C}$ , muni du produit scalaire :

$$(x, y) = \int_{-1}^{+1} \bar{x}(t)y(t)dt,$$

on vérifie facilement que la suite  $(\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(i\pi nt))_{n \in \mathbb{N}}$  est un système orthonormal. (pour  $m \neq n$   $e^{i\pi(m-n)} = e^{-i\pi(m-n)} = (-1)^{m-n}$ )

## 2 Généralités

**Théorème 2.1.** *Étant donné un système orthonormal  $\{g_1, \dots, g_n\}$  et un élément  $f$  dans un préhilbertien :*

$$\text{l'expression } \left\| \sum_{i=1}^n c_i g_i - f \right\|$$

*est minimum pour  $c_i = (f, g_i)$  où  $i = 1, \dots, n$ .*

### Démonstration

Posons  $g = \sum_{j=1}^n c_j g_j$  où  $c_j = (f, g_j)$ .  $g - f$  est orthogonale à chaque  $g_i$  car :

$$(g - f, g_i) = (g, g_i) - (f, g_i) = \sum_{j=1}^n c_j (g_j, g_i) - c_i = \sum_{j=1}^n c_j \delta_{ji} - c_i = 0.$$

Soit  $h$  une autre, quelconque, combinaison linéaire des  $g_j$ , alors  $g - f$  est orthogonal à  $h - g$  ( $h - g$  est une c.l. des  $g_i$ ). Donc :

$\|h - f\|^2 = \|(h - g) + (g - f)\|^2 = \|h - g\|^2 + \|g - f\|^2 \geq \|g - f\|^2$ . Cette dernière inégalité étant stricte à moins que  $h = g$  ce qui prouve l'unicité des coefficients  $c_i$  et établit la valeur du minimum.  $\square$

**Définition 2.1.** *Soit  $\{g_n\}$  un système orthonormal donné, fini ou non. Pour une fonction à valeurs réelles, arbitraire il correspond le développement formel de Fourier :*

$$f \sim a_1 g_1 + \dots + a_n g_n$$

*Où les coefficients  $a_n$ , appelés coefficients de Fourier pour  $f$  respectivement au système donné, sont définis par :  $a_n = (f, g_n)$ .*

### Remarque

On a l'inégalité de BESSEL :  $|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 \leq \|f\|^2$ .

**Théorème 2.2.** (GRAM-SCHMIDT) *Soit  $\{f_1, \dots, f_n\}$  un système, fini ou non, d'éléments linéairement indépendants dans un préhilbertien. On peut, alors, définir un système orthonormal,  $\{g_1, \dots, g_n\}$ , tel que pour chaque  $k$ ,  $g_k$  soit une combinaison linéaire de  $\{f_1, \dots, f_k\}$ .*

## Démonstration

Par récurrence, posons  $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$ , alors le système  $\{g_1\}$  est orthonormal. On remarque que  $f_1$  est non nul puisque c'est un élément d'un système linéairement indépendant. On suppose qu'on a construit un système orthonormal  $\{g_1, \dots, g_{n-1}\}$  (hyp. de récurrence), on pose :

$$u = f_n - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, g_i) g_i.$$

Alors  $(g_k, u) = (g_k, f_n) - \sum_{i=1}^{n-1} (f_n, g_i) \delta_{ki} = 0$  pour  $k = 1, \dots, n-1$ .

$u \neq 0$  sinon  $f_n$  serait une combinaison linéaire de  $g_1, \dots, g_{n-1}$  ce qui contredit que  $f_1, \dots, f_n$  sont linéairement indépendants. Pour finir on pose  $g_n = \frac{u}{\|u\|}$  ce qui fait du système  $\{g_1, \dots, g_n\}$  un système orthonormal.  $\square$

## Remarques

1) Si  $f \in Vect\{g_1, \dots, g_n\}$  alors  $f = \sum_{i=1}^n (f, g_i) g_i$  où  $Vect\{g_1, \dots, g_n\}$  est l'espace vectoriel, sur  $\mathbb{R}$ , engendré par le système considéré.

2) Une caractérisation des systèmes orthogonaux est la minimisation des sommes partielles. En effet, pour des réels,  $a_1, \dots, a_{n-1}$  l'expression :

$$\| a_1 f_1 + \dots + a_{n-1} f_{n-1} + f_n \|^2$$

devient minimum SSI :

$$a_1 f_1 + \dots + a_{n-1} f_{n-1} + f_n = b_n^{-1} g_n$$

où on a repris les notations du théorème 2.2 et on a écrit  $g_n = \sum_{i=1}^n b_i f_i$ .

En effet :

$$\min_{a_1, \dots, a_{n-1}} \|a_1 f_1 + \dots + a_{n-1} f_{n-1} + f_n\|^2 = \min_{h \in V_{n-1}} \|f_n - h\|^2$$

Où on note  $V_{n-1}$  pour l'espace engendré par les éléments  $f_1, \dots, f_{n-1}$ .

On applique le th. 2.1 pour conclure.

## Quelques notations pour la suite :

- Etant donné un intervalle  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$ , fini ou non, une fonction poids  $w(x)$  positive sur  $[a, b]$ , on définit le produit scalaire :

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

On note  $L_w^2(a, b)$  l'ensemble des fonctions pour lesquelles  $(f, g) < \infty$  (on suppose  $\int_a^b w(x)dx > 0$ ).

- Plus généralement on peut définir un produit scalaire par une intégrale de Stieltjes :

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)d\alpha(x)$$

où  $\alpha(x)$  est une fonction croissante possédant une infinité de points de croissance (pour éviter que  $L_\alpha^2(a, b)$  soit de dimension finie) .

Quand  $\alpha(x)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue on a,  $w(x) = \frac{d\alpha(x)}{dx}$ .

D'autre part si  $\alpha(x)$  est une fonction constante sauf aux points  $x_i$  où elle fait des sauts de magnitude  $w_i$ , alors le produit scalaire devient :

$$(f, g) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i)g(x_i).$$

Ce qui est particulièrement adapté à l'étude des fonctions à valeurs discrètes.

- Ces définitions font référence à des fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles, ce à quoi on va se restreindre ici. Si les fonctions considérées sont à valeurs complexes ou si le domaine d'intégration est un arc du plan complexe alors le produit scalaire devient :

$$(f, g) = \int_\Gamma f(z)\overline{g(z)}w(z)dz$$

où  $\Gamma$  est un certain contour du plan complexe.

### 3 Présentation des polynômes orthogonaux

#### 3.1 Généralités

- Etant donné un système d'éléments linéairement indépendants  $\{f_1, \dots, f_n, \dots\}$  on sait, à l'aide du procédé de Gram-Schmidt, construire un système  $\{g_1, \dots, g_n, \dots\}$  orthonormal. Dans cette partie on va s'intéresser au système  $\{1, x, x^2, \dots\}$ . On va commencer par donner un critère simple pour déterminer l'indépendance linéaire d'un système de polynômes.

-Dans toute la suite on va supposer que :

$$\forall n \int_a^b x^n w(x)dx \equiv c_n < \infty.$$

**Théorème 3.1.** *Tout système  $\{Q_0, \dots, Q_n, \dots\}$  de polynômes dans lequel  $Q_n$  est de degré exact  $n$  est linéairement indépendant.*

*De plus, tout polynôme de degré  $\leq n$  peut s'écrire, de façon unique, comme combinaison linéaire des  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .*

## Démonstration

La deuxième assertion entraîne la première, puisque le polynôme 0 ne peut s'écrire que :  $0Q_0 + 0Q_2 + \dots$ . Supposons la deuxième assertion fausse. Soit  $n$  le premier indice pour lequel elle est fausse.

On a  $n > 0$  puisque toute constante ( $\neq 0$ ) s'écrit  $c.Q_0(x)$ ,  $c \neq 0$ . Soit  $P(x)$  un polynôme arbitraire de degré  $\leq n$ . Posons  $P(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ . Supposons que le coefficient de  $x^n$  dans  $Q_n(x)$  soit  $b_n$ . Comme  $\deg(P(x) - \frac{c_n}{b_n} Q_n(x)) \leq n-1$  on peut l'exprimer comme une combinaison linéaire des  $Q_0(x), \dots, Q_{n-1}(x)$ , ce qui est contradictoire.  $\square$

**Théorème 3.2.** *Le système de polynômes défini par :*

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_n = (x - a_n)Q_{n-1} - b_n Q_{n-2} \quad , \quad n \geq 2 \\ Q_0 = 1, Q_1 = x - a_1 \\ a_n = \frac{(xQ_{n-1}, Q_{n-1})}{(Q_{n-1}, Q_{n-1})} \quad , \quad n \geq 1 \\ b_n = \frac{(xQ_{n-1}, Q_{n-2})}{(Q_{n-2}, Q_{n-2})} \quad , \quad n \geq 1 \end{array} \right. \quad \text{est orthogonal.}$$

## Démonstration

On voit, par les formules, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $Q_n$  est unitaire donc de degré exact  $n$ , donc  $(Q_{n-1}, Q_{n-1})$  et  $(Q_{n-2}, Q_{n-2})$  sont non nuls ( $n > 1$ , le produit scalaire étant non dégénéré) ainsi  $a_n$  et  $b_n$  sont définis. On va montrer, par récurrence sur  $n$ , que  $(Q_n, Q_i) = 0$  pour  $i < n$ .

Pour  $n = 0$  le système se réduit à  $\{1\}$ .

Pour  $n = 1$ ,  $(Q_1, Q_0) = (xQ_0 - a_1Q_0, Q_0) = (xQ_0, Q_0) - a_1(Q_0, Q_0)$ , mais  $a_1 = \frac{(xQ_0, Q_0)}{(Q_0, Q_0)}$  donc  $(Q_1, Q_0) = 0$ . Supposons que cela soit vrai pour  $Q_k$ ,  $k \leq n-1$ .

$(Q_n, Q_{n-1}) = (xQ_{n-1}, Q_{n-1}) - a_n(Q_{n-1}, Q_{n-1}) = 0$ , en explicitant  $a_n$ . De même  $(Q_n, Q_{n-2}) = (xQ_{n-1}, Q_{n-2}) - b_n(Q_{n-2}, Q_{n-2}) = 0$ , en explicitant  $b_n$ . Supposons que  $i < n-2$ , on a :

$$(Q_n, Q_i) = (xQ_{n-1}, Q_i) - a_n(Q_{n-1}, Q_i) - b_n(Q_{n-2}, Q_i),$$

mais  $(Q_{n-1}, xQ_i) = (Q_{n-1}, Q_{i+1} + a_{i+1}Q_i + b_{i+1}Q_{i-1}) = 0$  d'où le résultat.  $\square$

## Exemple

$$[a, b] = [-1, +1], \quad w(x) = 1.$$

$$X_0 = 1$$

$$a_1 = \frac{(xX_0, X_0)}{(X_0, X_0)} = \int_{-1}^{+1} x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{+1} = 0 \Rightarrow X_1 = x - a_1 = x$$

$$a_2 = \frac{(xX_1, X_1)}{(X_1, X_1)} = \frac{\int_{-1}^{+1} x^3 dx}{\int_{-1}^{+1} x^2 dx} = 0 \text{ et } b_2 = \frac{(xX_1, X_0)}{(X_0, X_0)} = \frac{\int_{-1}^{+1} x^2 dx}{\int_{-1}^{+1} 1 dx} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$$

$$X_2 = (x - a_2)X_1 - b_2X_0 = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Ce sont les deux premiers polynômes de Legendre unitaires.

**Définition 3.1.** Si on orthogonalise le système  $\{1, x, x^2, \dots\}$ , qui est indépendant par le théorème 3.1, on obtient un système orthogonal de polynômes  $\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots\}$  uniquement déterminé par les conditions :

- a)  $P_n(x)$  est un polynôme de degré exact  $n$  dans lequel le coefficient de  $x^n$  est  $k_n > 0$ .
- b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  le système  $\{P_0(x), \dots, P_n(x)\}$  est orthonormal.

### Notation

Nous dirons que  $\rho(x)$  est un  $\pi_n$  si c'est un polynôme de degré  $\leq n$ . Et nous noterons  $h_n = (P_n, P_n)$ .

### Remarques

- 1) Le procédé de Gram-Schmidt nous fournit ( $P_0 = 1/\sqrt{D_0}$ ) :

$$n \geq 1, P_n(x) = (D_n D_{n-1})^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_n \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n-1} & c_n & \cdots & c_{2n-1} \\ 1 & x & \cdots & x^n \end{vmatrix}, \text{ où } D_n = \det((c_{i+j})_{0 \leq i, j \leq n}).$$

- 2) L'unicité est aussi obtenue en fixant  $P_n(a)$  ou  $P_n(b)$  ou en prenant des polynômes unitaires (le procédé du th. 3.2 fournit des polynômes unitaires).

- 3) Le développement de Fourier d'une fonction arbitraire  $f(x)$  en termes des polynômes  $\{P_0(x), \dots, P_n(x)\}$  a la forme :

$$f(x) \sim f_1 P_1(x) + \cdots + f_n P_n(x) + \cdots$$

où  $f_k = (f, P_k)$  (les sommes partielles ont la même propriété que dans le théorème 2.1).

- 4) On a la caractérisation, importante, suivante des polynômes orthogonaux unitaires (on prend un  $\pi_n, \rho(x)$ ) :

$$\int_a^b |\rho(x)|^2 w(x) dx \text{ est minimum} \iff \rho(x) = \text{const} P_n(x).$$

La constante est déterminée par la normalisation que l'on choisit pour  $\rho(x)$ .

Par exemple prenons le unitaire.

Si  $k_n$  est le coefficient de  $x^n$  dans  $P_n(x)$  (donc  $k_n = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}$ ) comme  $\rho(x)$  est unitaire on a  $\text{const} = \sqrt{\frac{D_n}{D_{n-1}}}$  et donc  $\min \int_a^b \|\rho(x)\|^2 dx = (\text{const})^2 = \frac{D_n}{D_{n-1}}$ .



5) Comme tout polynôme de degré  $n$  est une C.L. de  $P_0(x), \dots, P_n(x)$ ,  $P_n(x)$  est orthogonal à tout  $\pi_{n-1}$  et donc en particulier :

$$\int_a^b P_n(x)x^k d\alpha(x) = 0, \forall k = 0, \dots, n-1.$$

Cette condition détermine  $P_n(x)$  à une constante près. C'est souvent cette propriété des polynômes orthogonaux qui est donnée.

Notons que si  $\rho(x)$  est un  $\pi_n$  et  $\int_a^b P_n(x)\rho(x)d\alpha(x) = c$  alors le coefficient de  $x^n$  dans  $\rho(x)$  est  $ck_n$ .

6) Si  $[a, b]$  est symétrique par rapport à 0 ( $b = -a$ ) et si  $w(x)$  est paire alors  $P_n(x)$  a la même parité que  $n$ . De plus  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$  donc  $P_n(x)$  ne peut contenir que des puissances de  $x$  congrues à  $n \pmod{2}$ . Pour voir ce résultat un changement de variables et la troisième remarque suffisent :

comme  $\int_{-a}^{+a} P_n(-x)x^k w(x)dx = (-1)^k \int_{-a}^{+a} P_n(x)x^k w(x)dx = 0$ ,  $P_n(-x)$  possède les mêmes propriétés d'orthogonalité que  $P_n(x)$  donc en comparant les coefficients de  $x^n$  on obtient :  $P_n(-x) = \text{const} P_n(x) = (-1)^n P_n(x)$  ( $P_n(-x)$  est un polynôme de degré  $n$ ).

7) La transformation linéaire  $x = kx' + l, k \neq 0$  transforme  $[a, b]$  en  $[a', b']$  ( ou  $[b', a']$  ) et la fonction poids  $w(x)$  en  $w(kx' + l)$ . Les polynômes :

$$(sg(x))^n |k|^{\frac{1}{2}} P_n(kx' + l), n \in \mathbb{N}$$

sont orthogonaux relativement à la fonction poids  $w(kx' + l)$  sur  $[a', b']$  (ou  $[b', a']$ ).

### 3.2 Une formule de Christoffel

**Théorème 3.3.** Soit  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une famille orthonormée de polynômes associée à la distribution  $w(x)dx$  sur  $[a, b]$ . Soit :

$$\rho(x) = c(x - x_1) \cdots (x - x_l) \text{ un } \pi_l \geq 0 \text{ sur } [a, b] \text{ avec } c \neq 0 \text{ et les } x_j \text{ distincts.}$$

Alors les polynômes orthogonaux  $\{q_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  associés à la distribution  $\rho(x)w(x)dx$  peuvent se représenter comme suit :

$$\rho(x)q_n(x) = \begin{vmatrix} P_n(x) & P_{n+1}(x) & \cdots & P_{n+l}(x) \\ P_n(x_1) & P_{n+1}(x_1) & \cdots & P_{n+l}(x_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ P_n(x_l) & P_{n+1}(x_l) & \cdots & P_{n+l}(x_l) \end{vmatrix}.$$

## Remarques

- 1) Dans le cas où  $\rho(x)$  a un zéro,  $x_k$ , d'ordre  $m > 1$ , on remplace les lignes correspondantes par les dérivées d'ordre  $0, \dots, m-1$  des polynômes  $P_n(x), \dots, P_{n+l}(x)$  en  $x_k$ .
- 2)  $q_n(x)$  n'est, en général, pas normalisé.

## Démonstration du th. 3.3

Le membre de droite est un  $\pi_{n+l}$  divisible par  $\rho(x)$  (puisque pour  $x = x_k$  le déterminant est nul,  $k = 1, \dots, l$ ). Donc il est de la forme  $\rho(x)q_n(x)$  où  $q_n(x)$  est un  $\pi_n$ . De plus  $\rho(x)q_n(x)$  est une combinaison linéaire des  $P_n(x), \dots, P_{n+l}(x)$ , donc si  $q(x)$  est un  $\pi_{n-1}$  arbitraire alors :

$$\int_a^b \rho(x)q_n(x)q(x)d\alpha(x) = \int_a^b q_n(x)q(x)(\rho(x)d\alpha(x)) = 0.$$

Pour finir nous devons montrer que ce membre de droite n'est pas identiquement nul. Pour cela il suffit de voir que le coefficient de  $P_{n+l}(x)$ , c'est-à-dire le déterminant

$$|(P_{n+i}(x_{j+1}))_{i,j=0,\dots,l-1}|,$$

n'est pas nul.

Supposons qu'il soit nul. Alors il existe des réels,  $a_0, \dots, a_{l-1}$ , non tous nuls, tels que  $a_0P_n(x) + \dots + a_{l-1}P_{n+l-1}(x)$  s'annule en les points  $x_1, \dots, x_l$  donc

$$a_0P_n(x) + \dots + a_{l-1}P_{n+l-1}(x) = \rho(x)G(x)$$

où  $G(x)$  est un  $\pi_{n-1}$ . Puisque cette expression est orthogonale à tous les  $\pi_{n-1}$  on a,

$$\int_a^b (\rho(x)G(x))G(x)d\alpha(x) = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \rho(x)G^2(x)d\alpha(x) = 0 \Rightarrow G(x) = 0.$$

Puisque l'on a, par hypothèse,  $\rho(x) \geq 0$ .  $\square$

## 4 Propriétés générales des polynômes orthogonaux

Dans ce paragraphe on va étudier les propriétés des polynômes orthogonaux, lesquelles sont vérifiées pour des distributions du type Stieltjes,  $d\alpha(x)$ , cependant, on se contentera quelquefois du cas particulier d'une distribution du type  $w(x)dx$ .

## 4.1 Propriétés d'extrema et de fermeture

Soit  $f \in L^2_\alpha(a, b)$  donnée et supposons  $x^n \in L^2_\alpha(a, b) \forall n \in \mathbb{N}$ .  
Alors il est évident que les intégrales :

$$\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) \text{ et } \int_a^b f(x)x^n d\alpha(x) \forall n \in \mathbb{N}$$

existent, dans le sens Stieltjes-Lebesgue.

Ensuite, en notant  $\{ P_n(x) \}$  le système orthonormal de polynômes associé à la distribution  $d\alpha(x)$  sur  $[a, b]$ , on a le théorème suivant, qui n'est qu'un cas particulier du théorème 2.1 :

**Théorème 4.1.**

$$\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x) \text{ où } \rho(x) \text{ est un } \pi_n$$

est minimum SSI  $\rho(x)$  est la *n*<sup>ième</sup> somme partielle du développement, formel, de Fourier :

$$f(x) \sim f_0 P_0(x) + \dots + f_n P_n(x) + \dots \text{ où } f_n = \int_a^b f(x) P_n(x) d\alpha(x).$$

Le minimum vaut :  $\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) - \sum_{k=1}^n |f_k|^2$ .

**Remarque**

La valeur du minimum étant positive, on a l'inégalité de Bessel,

$$|f_0|^2 + |f_1|^2 + \dots + |f_n|^2 + \dots \leq \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x).$$

**Théorème 4.2.** L'intégrale :  $\int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x)$ , où  $\rho(x)$  est un  $\pi_n$  unitaire, est minimum SSI  $\rho(x) = \text{const} \cdot P_n(x)$ .

**Démonstration**

On a :

$$\min_{\rho(x), \pi_n \text{ unitaire}} \int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x) = \min_{q(x), \pi_{n-1}} \int_a^b |k_n^{-1} P_n(x) - q(x)|^2 d\alpha(x)$$

On obtient cela en écrivant :  $\rho(x) = k_n^{-1} P_n(x) - a_0 P_{n-1}(x) - \dots - a_{n-1} P_0(x)$  et en faisant varier les  $a_k$ .

Ensuite on utilise le théorème précédant pour conclure que  $q(x) = 0$ .  $\square$

**Théorème 4.3.** Soit  $x_0$  un nombre complexe arbitraire, posons :

$$S = \{\rho(x) \in \pi_n : \int_a^b |\rho(x)|^2 d\alpha(x) = 1\}$$

(les  $\pi_n$  peuvent être à coefficients complexes).

Alors le maximum de  $|\rho(x_0)|^2$  est donné par le polynôme :

$$\rho(x) = \varepsilon \{K_n(x_0, x_0)\}^{-\frac{1}{2}} K_n(x_0, x) \text{ où } |\varepsilon| = 1$$

où  $K_n(x_0, x) = \overline{P_0(x_0)}P_0(x) + \dots + \overline{P_n(x_0)}P_n(x) = P_0(\overline{x_0})P_0(x) + \dots + P_n(\overline{x_0})P_n(x)$ .

Le maximum étant :  $K_n(x_0, x_0)$ .

### Démonstration

Si on écrit  $\rho(x) = a_0P_0(x) + \dots + a_nP_n(x)$ , la condition de normalisation s'écrit :  $|a_0|^2 + \dots + |a_n|^2 = 1$ .

$$|\rho(x_0)|^2 = \left| \sum_{i=0}^n a_i P_i(x_0) \right|^2 \underset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \sum_{i=0}^n |a_i|^2 \sum_{i=0}^n |P_i(x_0)|^2 = \sum_{i=0}^n |P_i(x_0)|^2$$

ce qui s'écrit :  $|\rho(x_0)|^2 \leq \sum_{i=0}^n P_i(x_0)\overline{P_i(x_0)} = K_n(x_0, x_0)$ . Cette inégalité est atteinte pour

$a_k = \overline{P_k(x_0)}$   $k = 0, \dots, n$ , où  $a$  est déterminé par :  $|a|^2 \sum_{i=0}^n |P_i(x_0)|^2 = 1 \Rightarrow |a|^2 = [K_n(x_0, x_0)]^{-1} \Rightarrow \exists \varepsilon \in \mathbb{C}$  de module 1, tel que  $a = \varepsilon \cdot [K_n(x_0, x_0)]^{-\frac{1}{2}}$ .

Finalement on a :  $\rho(x) = \sum_{k=0}^n (a \cdot \overline{P_k(x_0)}) P_k(x) = \varepsilon \cdot [K_n(x_0, x_0)]^{-\frac{1}{2}} \cdot K_n(x_0, x)$ .  $\square$

### Remarque

Le noyau polynômial :  $K_n(x_0, x) = \overline{K_n(x_0, x)} = K_n(\overline{x}, \overline{x_0})$  peut être utilisé pour la représentation des  $n^{\text{ièmes}}$  sommes partielles,  $s_n(x)$ , du développement de Fourier sous forme intégrale. En fait on a :

$$s_n(x) = f_0P_0(x) + \dots + f_nP_n(x) = \sum_{k=0}^n P_k(x) \int_a^b f(t)P_k(t)d\alpha(t) = \int_a^b f(t)K_n(x, t)d\alpha(t)$$

en conséquence on obtient :

$$\int_a^b K_n(x, t)\rho(t)d\alpha(t) = \rho(x)$$

et cela pour tout  $\pi_n, \rho(x)$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b K_n(x, t) \rho(t) d\alpha(t) &= \sum_{k=0}^n P_k(x) \int_a^b P_k(t) \rho(t) d\alpha(t) = \sum_{k=0}^n P_k(x) \sum_{l=0}^n a_k \int_a^b P_k(t) P_l(t) d\alpha(t) \\ &= \sum_{k=0}^n a_k P_k(x) = \rho(x). \end{aligned}$$

**Théorème 4.4.** Soit  $a$  et  $x_0$  finis tel que  $x_0 \leq a$ .

Alors les noyaux  $\{K_n(x_0, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  sont orthogonaux respectivement à la distribution :

$$(x - x_0) \cdot d\alpha(x)$$

### Démonstration

Ceci découle immédiatement du fait que pour tout  $\pi_n, \rho(x)$  :

$$\int_a^b \rho(t) K_n(t, x) d\alpha(t) = \rho(x) \cdot \square$$

**Définition 4.1.** Soit  $p \geq 1$ . Une famille de fonctions,  $\{f_0(x), \dots, f_n(x), \dots\}$ , sera dite dense dans  $L_\alpha^p(a, b)$  si :

$\forall f(x) \in L_\alpha^p(a, b), \forall \varepsilon > 0, \exists k(x) = C_0 f_0(x) + \dots + C_n f_n(x)$  tel que :

$$\int_a^b |f(x) - k(x)|^p d\alpha(x) < \varepsilon.$$

### Remarque

$\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) - \sum_{k=1}^n |f_k|^2$  est décroissante pour  $n$  croissant (car  $\int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x) - \sum_{k=1}^n |f_k|^2 \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  et  $\sum_{k=1}^n |f_k|^2$  est une suite croissante) en conséquence cela tend vers une limite positive quand  $n \rightarrow \infty$ .

On a la formule de Parseval :  $|f_0|^2 + \dots + |f_n|^2 + \dots = \int_a^b |f(x)|^2 d\alpha(x)$  ssi cette limite est 0.

La validité de ce résultat est équivalente au fait que l'intégrale  $\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x)$  peut être prise aussi petite qu'on veut par un choix judicieux de  $\rho(x)$ . C'est à dire que cela dépend si la famille  $\{P_n(x)\}$  (où  $\{x^n\}$ ) est dense ou non dans  $L_\alpha^2(a, b)$ . En fait du théorème classique de Weierstrass sur la densité des polynômes dans l'ensemble des fonctions continues il vient le théorème suivant :

**Théorème 4.5.** - L'ensemble des polynômes orthogonaux  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  associé à la distribution  $d\alpha(x)$  sur un intervalle fini  $[a, b]$ , est dense dans  $L_\alpha^2(a, b)$ .

Plus généralement, il est dense dans  $L_\alpha^p(a, b)$   $p \geq 1$ .

-De plus, pour  $f(x) \in L_\alpha^2(a, b)$ , la formule de Parseval est vérifiée :  $\sum_{k \geq 0} |f_k|^2 = \|f\|^2$ .

- Une fonction  $f(x) \in L^2_\alpha(a, b)$  pour laquelle  $f_n = 0$  pour  $n = 0, 1, 2, \dots$  est nécessairement identiquement nulle.

### Remarques

- Le fait que l'intervalle est fermé est une condition nécessaire (on verra, polynômes de Laguerre, de Hermite, des cas d'intervalles de longueur infinie).

- Dire  $f_n = 0$   $n = 1, 2, 3, \dots$  est équivalent à dire :

$$\int_a^b f(x)x^n d\alpha(x) = 0 \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

La discussion de cette condition est reliée à l'unicité des moments.

- On a le contre exemple suivant, dans le cas d'un intervalle infini,  $[0, +\infty[$  :

$$d\alpha(x) = \exp(-x^\mu \cos(\mu\pi)) dx \quad 0 < \mu < \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \sin(x^\mu \sin(\mu\pi)) \quad 0 < \mu < \frac{1}{2}$$

On vérifie (intégration complexe sur un quartier de cercle qu'on peut définir avec les points d'affixe :  $0, R, Re^{i\frac{\pi}{4}}, Re^{i\frac{3\pi}{4}}$ )  $\int_a^b f(x)x^n d\alpha(x) = 0 \forall n$  et  $f \neq 0$ . Ainsi si  $\rho(x)$  est un polynôme arbitraire :

$$\begin{aligned} A &\equiv \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 d\alpha(x) = \int_0^{+\infty} f(x)(f(x) - \rho(x)) d\alpha(x) \\ &\leq \int_0^{+\infty} (f(x) - \rho(x)) d\alpha(x) \text{ puisque } f(x) \leq 1 \\ &\leq \left[ \int_0^{+\infty} |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x) \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \left[ \int_0^{+\infty} d\alpha(x) \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\int_0^{+\infty} |f(x) - \rho(x)| d\alpha(x)$  et  $\int_0^{+\infty} |f(x) - \rho(x)|^2 d\alpha(x)$  ne peuvent être rendus arbitrairement petits. On a le résultat de densité suivant, pour le cas d'un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$  :

**Théorème 4.6.** Soient  $]a, b[$  un intervalle fini ou infini de  $\mathbb{R}$ ,  $\omega$  une fonction mesurable positive définie sur  $]a, b[$  et telle que :

$$\int_a^b e^{r|t|} \omega(t) dt < \infty$$

où  $r$  est un réel strictement positif. Si  $(P_n)_n$  est une suite de polynômes orthogonaux sur  $]a, b[$  associée au poids  $\omega$ , cette suite est complète dans l'espace de Hilbert  $L^2_\omega$ .

## Remarques

- De nombreux problèmes analogues surgissent si nous remplaçons la variation quadratique par une variation d'un ordre supérieur :  $\int_a^b |f(x) - \rho(x)|^p d\alpha(x)$   $p > 1$  et le cas limite appelé variation de Tchebichef :

$$\max_{a \leq x \leq b} \{|f(x) - \rho(x)|w(x)\}$$

où  $f(x)$  et  $\rho(x)$  sont supposées continues.

- Si on remplace  $d\alpha(x)$  par  $\{w(x)\}^p dx$  on a (  $a, b$  finis,  $f(x)$  et  $\rho(x)$  continues ) :

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left[ \int_a^b |f(x) - \rho(x)|^p \{w(x)\}^p dx \right]^{\frac{1}{p}} = \max_{a \leq x \leq b} \{|f(x) - \rho(x)|w(x)\}.$$

## 4.2 Formule de récurrence, formule de Christoffel-Darboux

### 4.2.1 Formule de récurrence

**Théorème 4.7.** Soit  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  un système de polynômes orthogonaux (donné par la définition 3.1), alors on a la formule de récurrence :

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \text{ pour } n \geq 1$$

où  $A_n, B_n, C_n$  sont les constantes suivantes :

$$A_n = \frac{k_{n+1}}{k_n} > 0, \quad B_n = -A_n \frac{(xP_n, P_n)}{(P_n, P_n)}, \quad C_n = A_n \frac{(xP_n, P_{n-1})}{(P_{n-1}, P_{n-1})} > 0.$$

### Démonstration

Il suffit de remarquer que  $P_{n+1}(x) - A_n \cdot x \cdot P_n(x)$  est un  $\pi_n$ , donc de la forme :  $a_0 P_n(x) + \dots + a_n P_0(x)$ , et de la propriété d'orthogonalité des  $P_n(x)$  on déduit les valeurs des constantes  $a_0, \dots, a_n$ . On a l'égalité :

$$P_{n+1}(x) - A_n \cdot x \cdot P_n(x) = a_0 P_n(x) + \dots + a_n P_0(x).$$

On prend  $(\cdot, P_k)$  pour  $k = 0, 1, \dots, n-2$ , on trouve  $a_k = 0$  pour  $k = 2, \dots, n$ .

On prend  $(\cdot, P_{n-1})$  :

$$-A_n(P_n, xP_{n-1}) = a_1 h_{n-1}.$$

On prend  $(\cdot, P_n)$  :

$$-A_n(P_n, xP_n) = a_0 h_n$$

on a donc bien  $B_n = \frac{-A_n(P_n, xP_n)}{h_n}$  et  $C_n = \frac{A_n(P_n, xP_{n-1})}{h_{n-1}}$ , puisque  $a_0 = B_n$  et  $a_1 = -C_n$ .  $\square$

## Remarque

- Réciproquement, un système de polynômes satisfaisant une telle formule de récurrence est un système orthogonal, comme on l'avait déjà vu pour des polynômes unitaires dans le théorème 3.2.

### 4.2.2 Formule de Darboux-Christoffel

**Théorème 4.8.** *Pour un système orthogonal,  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ , de polynômes on a les formules pour  $x \neq y$  dans  $[a, b]$  :*

$$1) \quad \sum_{\nu=0}^n \frac{P_\nu(x)P_\nu(y)}{h_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y}$$

$$2) \quad \sum_{\nu=0}^n \frac{P_\nu(x)^2}{h_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} (P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x)).$$

### Démonstration

L'identité 1) découle facilement de la formule de récurrence.

$$\begin{aligned} & P_{\nu+1}(x)P_\nu(y) - P_\nu(x)P_{\nu+1}(y) = \\ & \{(A_\nu \cdot x + B_\nu)P_\nu(x) - C_\nu P_{\nu-1}(x)\}P_\nu(y) - \{(A_\nu \cdot y + B_\nu)P_\nu(y) - C_\nu P_{\nu-1}(y)\}P_\nu(x) \\ & = A_\nu(x-y)P_\nu(x)P_\nu(y) + C_\nu\{P_\nu(x)P_{\nu-1}(y) - P_{\nu-1}(x)P_\nu(y)\} \end{aligned}$$

ainsi on a :

$$\frac{1}{A_\nu} \left\{ \frac{P_{\nu+1}(x)P_\nu(y) - P_\nu(x)P_{\nu+1}(y)}{x-y} \right\} = P_\nu(x)P_\nu(y) - \frac{C_\nu}{A_\nu} \left\{ \frac{P_\nu(x)P_{\nu-1}(y) - P_{\nu-1}(x)P_\nu(y)}{x-y} \right\}$$

comme :  $\frac{C_\nu}{A_\nu} = \frac{k_{\nu-1}h_\nu}{k_\nu h_{\nu-1}}$  et en divisant par  $h_\nu$  on a :

$$U_{\nu+1} - U_\nu = \frac{1}{h_\nu} P_\nu(x)P_\nu(y) \quad \text{où} \quad U_\nu = \frac{k_{\nu-1}}{k_\nu h_{\nu-1}} \frac{P_\nu(x)P_{\nu-1}(y) - P_{\nu-1}(x)P_\nu(y)}{x-y}. \quad \text{On fait la somme pour } \nu = 1 \text{ jusqu' à } n : \sum_{\nu=1}^n \frac{P_\nu(x)P_\nu(y)}{h_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} - \frac{P_0(x)P_0(y)}{h_0}.$$

Pour l'identité 2) il suffit de passer à la limite quand  $y$  tend vers  $x$ .  $\square$

## Remarque

On a précédemment posé :

$$K_n(t, x) = \overline{P_0(t)}P_0(t) + \cdots + \overline{P_n(t)}P_n(t) = P_0(\bar{t})P_0(t) + \cdots + P_n(\bar{t})P_n(t).$$

Si on prend une famille  $\{P_n(x)\}$  orthonormale ( $h_\nu = 1, \forall \nu \in \mathbb{N}$ ) alors le membre de gauche de la formule de Darboux-Christoffel n'est rien d'autre que :  $K_n(\bar{x}, y) = K_n(\bar{y}, x)$ . On peut donc écrire :

$$\mathbf{D - C} : K_n(x, t) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t}.$$



On a une autre démonstration du th. 4.7 en intégrant le second membre de D-C. En appelant  $I(x)$  le résultat on a :

$$I(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \int_a^b \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t} \rho(t) d\alpha(t),$$

ce qu'on peut écrire :

$$I(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \left\{ \int_a^b (P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)) \frac{\rho(t) - \rho(x)}{x-t} d\alpha(t) + \rho(x) \int_a^b P_n(t) \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} d\alpha(t) + \rho(x) \int_a^b P_{n+1} \frac{P_n(t) - P_n(x)}{x-t} d\alpha(t) \right\}.$$

La première et la dernière intégrale sont nulles, puisque  $\rho(x)$  est un  $\pi_n$ , ainsi :

$$I(x) = \frac{k_n}{k_{n+1}} \rho(x) \int_a^b P_n(t) \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} d\alpha(t).$$

Mais  $\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} = k_n t^n + \dots$ , le système  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  étant orthonormal ( $(P_n, P_n) = (P_n, k_n t^n)$ ) on en déduit que  $I(x) = \rho(x)$  et par suite  $\frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t} = K_n(x, t)$ .

### 4.3 Propriétés élémentaires des zéros des polynômes orthogonaux

**Théorème 4.9.** *Les zéros des polynômes orthogonaux  $\{P_n(x)\}$  associés à la distribution  $d\alpha(x)$  sur  $[a, b]$  sont réels, distincts et dans  $(a, b)$ .*

#### Démonstration

La démonstration classique de ce théorème est basée sur la propriété d'orthogonalité. Comme  $\int_a^b P_n(x) d\alpha(x) = 0$   $n \geq 1$  on est assuré de l'existence d'au moins un point sur  $(a, b)$  en lequel  $P_n(x)$  change de signe (on a supposé que  $\alpha(x)$  avait une infinité de points de croissance).

Si  $x_1, \dots, x_l$  sont les abscisses de ces points alors le produit  $P_n(x) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_l)$  a un signe constant, on a évidemment  $l \leq n$ . Si  $l < n$  alors  $\int_a^b P_n(x) \cdot (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_l) d\alpha(x) = 0$ . Le signe étant constant cette intégrale ne peut pas être nulle d'où  $l = n$ .  $\square$

#### Remarques

1) Si  $a < x_0 < b$  est un zéro multiple de  $P_n(x)$  alors :

$$\int_a^b P_n(x) \frac{P_n(x)}{(x-x_0)^2} d\alpha(x) = \int_a^b \left( \frac{P_n(x)}{x-x_0} \right)^2 d\alpha(x) = 0$$

ce qui est impossible.

2) Soit  $x_0$  un zéro de  $P_n(x)$ . Comme  $P_n(x)$  est à coefficients réels  $P_n(\overline{x_0}) = 0$ , donc  $\frac{P_n(x)}{x-x_0}$  est un  $\pi_{n-1}$  et  $\int_a^b P_n(x) \cdot \frac{P_n(x)}{x-x_0} d\alpha(x) = \int_a^b (x-x_0) \cdot \left\{ \frac{P_n(x)}{x-x_0} \right\}^2 d\alpha(x) = 0$  ce qui entraîne :  $x_0 \int_a^b \left\{ \frac{P_n(x)}{x-x_0} \right\}^2 d\alpha(x) = \int_a^b x \cdot \left\{ \frac{P_n(x)}{x-x_0} \right\}^2 d\alpha(x) \Rightarrow x_0 \in \mathbb{R}$ .

## Quelques propriétés

Les polynômes  $P_0(x), \dots, P_n(x)$  vérifient :

a) si  $P_\nu(x_0) = 0$ ,  $\nu \geq 1$ ,  $P_{\nu-1}(x_0)P_{\nu+1}(x_0) < 0$

En effet,  $P_{n+1}(x) = (A_n \cdot x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)$ , pour  $n = \nu$  et  $x = x_0$  on a :

$$P_{\nu+1}(x_0) = -C_n P_{\nu-1}(x_0) \Rightarrow P_{\nu+1}(x_0)P_{\nu-1}(x_0) = -C_n [P_{\nu-1}(x_0)]^2$$

b) En un point  $x_0$  où  $P_n(x_0) = 0$  on a :  $P'_n(x_0)P_{n-1}(x_0) > 0$ .

On regarde l'identité de Darboux-Christoffel :

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^n \frac{P_\nu(x)^2}{h_\nu} &= \frac{k_n}{k_{n+1}h_n} (P_{n+1}(x)P'_n(x) - P_n(x)P'_{n+1}(x)) \\ \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{P_\nu(x_0)^2}{h_\nu} &= \frac{k_{n-1}}{k_n} (P'_n(x_0)P_{n-1}(x_0) - P'_{n-1}(x_0)P_n(x_0)) \end{aligned}$$

Comme  $P_n(x_0) = 0$  on a le résultat (puisque les coefficients  $k_n$  ont été pris  $> 0$ ).

c) En utilisant b) on obtient l'importante inégalité suivante :

$$P_{n+1}(x)P'_n(x) - P_n(x)P'_{n+1}(x) > 0$$

d'où il ressort que  $P_n(x)$  et  $P_{n+1}(x)$  ne peuvent avoir des zéros communs. On a en plus les deux théorèmes de séparation suivants :

**Théorème 4.10.** Soient  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  les zéros de  $P_n(x)$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_{n+1} = b$ . Alors chaque intervalle  $[x_\nu, x_{\nu+1}]$ ,  $\nu = 0, 1, \dots, n$  contient exactement un zéro de  $P_{n+1}(x)$ .

**Théorème 4.11.** Entre deux zéros de  $P_n(x)$  il y a au moins un zéro de  $P_m(x)$  pour  $m > n$ .

**Théorème 4.12.** On a la décomposition suivante en fraction continue :

$$\frac{P_n(x)}{P_{n+1}(x)} = \sum_{\nu=0}^n \frac{l_\nu}{x - \xi_\nu} \text{ pour } l_\nu > 0$$

où  $\{\xi_\nu\}_{\nu=0, \dots, n}$  sont les zéros de  $P_{n+1}(x)$  et :

$$l_\nu = \frac{P_n(\xi_\nu)}{P'_{n+1}(\xi_\nu)} > 0.$$

## Démonstration

Simple décomposition en fractions continues,  $l_\nu = \lim_{x \rightarrow \xi_\nu} (x - \xi_\nu) \frac{P_n(x)}{P_{n+1}(x)}$   
avec  $P_{n+1}(x) = k_{n+1} \cdot (x - \xi_0) \cdot \dots \cdot (x - \xi_n)$ .

On a  $P'_{n+1}(x) = k_{n+1} \sum_{\nu=0}^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \nu}}^n (x - \xi_k)$  donc  $P'_{n+1}(\xi_\nu) = k_{n+1} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq \nu}}^n (x - \xi_k)$ .

Pour voir que  $l_\nu > 0$  il suffit de remarquer qu'on peut écrire :

$$\frac{P_n(\xi_\nu)}{P'_{n+1}(\xi_\nu)} = \frac{P'_{n+1}(\xi_\nu)P_n(\xi_\nu) - P'_n(\xi_\nu)P_{n+1}(\xi_\nu)}{[P'_{n+1}(\xi_\nu)]^2}$$

et on a déjà vu que cette expression est positive dans la remarque précédente en c).  $\square$

## 4.4 Quadrature mécanique de Gauss-Jacobi

**Théorème 4.13.** *Si  $x_1 < \dots < x_n$  sont les racines de  $P_n(x)$ , alors il existe des réels  $a_1, \dots, a_n$  tels que :*

$$\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = a_1 \rho(x_1) + \dots + a_n \rho(x_n)$$

où  $\rho(x)$  est un  $\pi_{2n-1}$  quelconque. Ainsi la distribution  $d\alpha(x)$  et l'entier  $n$  déterminent uniquement les nombres  $a_\nu$  (c'est ce qu'on appelle quadrature mécanique de Gauss-Jacobi).

### Remarques

- Les ensembles  $\{x_\nu\}$  et  $\{a_\nu\}$  dépendent de  $n$ .
- Les nombres  $a_1, \dots, a_n$  sont souvent appelés nombres de Christoffel.

### Démonstration

Il suffit de le montrer pour  $x^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 2n - 1$ , cela représente  $2n$  conditions qui déterminent uniquement les  $a_n$  et les points  $x_\nu$  (si les points, distincts,  $x_\nu$  sont donnés arbitrairement, les nombres  $a_\nu$  peuvent être déterminés tels que l'égalité du théorème soit vraie pour tout  $\pi_{n-1}$ ).

On va construire le polynôme d'interpolation de Lagrange,  $L(x)$ , de degré  $n - 1$  qui coïncide avec  $\rho(x)$  en les points  $x_\nu$  :

$$L(x) = \sum_{\nu=1}^n \rho(x_\nu) \frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x - x_\nu)} = \sum_{\nu=1}^n \rho(x_\nu) l_\nu(x)$$

où les  $l_\nu(x)$  sont les polynômes fondamentaux associés aux points  $x_1, \dots, x_n$  de l'interpolation de Lagrange.

$\rho(x) - L(x) = \rho(x) - \sum_{\nu=1}^n \rho(x_\nu) \frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x-x_\nu)} = 0$  en les points  $x_1, \dots, x_n$  donc  $P_n(x) =$

$k_n \prod_{\nu=1}^n (x-x_\nu)$  divise  $\rho(x) - L(x)$ . Ainsi il existe un  $\pi_{n-1}$ ,  $r(x)$  tel que l'on ait :

$\rho(x) - L(x) = P_n(x)r(x)$ . Par suite :

$$\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = \int_a^b L(x) d\alpha(x) + \int_a^b P_n(x)r(x) d\alpha(x) = \int_a^b L(x) d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^n \rho(x_\nu) \int_a^b l_\nu(x) d\alpha(x),$$

ce qui établit le théorème avec  $a_\nu = \int_a^b l_\nu(x) d\alpha(x) = \int_a^b \frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x-x_\nu)} d\alpha(x)$ .  $\square$

### Remarques

1) Inversement, supposons que pour tout  $\pi_{2n-1}$  l'expressions  $\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = a_1 \rho(x_1) + \dots + a_n \rho(x_n)$  soit vérifiée, alors on applique cette formule à un polynôme de la forme  $\rho(x) \cdot r(x)$  où  $\rho(x) = (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_n)$  et  $r(x)$  est un  $\pi_{n-1}$  quelconque. On trouve :  $\int_a^b \rho(x)r(x) d\alpha(x) = 0 \Rightarrow \rho(x) = \text{const} \cdot P_n(x)$ .

2) Pour une fonction arbitraire  $f$  sur  $[a, b]$ , on peut écrire :  $Q_n(f) = a_1 f(x_1) + \dots + a_n f(x_n)$ . Dans ces conditions le théorème 4.12 peut être reformuler comme suit :

$$Q_n(f) = \int_a^b f(x) d\alpha(x) \text{ pourvu que } f(x) \text{ soit un } \pi_{2n-1}.$$

De plus, comme  $a_\nu = \int_a^b l_\nu(x) d\alpha(x)$ , les nombres de Christoffel sont les valeurs de  $Q_n(f)$  pour  $f(x) = l_\nu(x)$ . On peut également discuter, pour une fonction fixée,  $f(x)$ , la convergence de la suite  $\{Q_n(x)\}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Théorème 4.14.** *Les nombres de Christoffel  $a_\nu$  sont positifs et :*

$$a_1 + \dots + a_n = \int_a^b d\alpha(x) = \alpha(b) - \alpha(a).$$

De plus :

$$a_\nu = \int_a^b \left\{ \frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x-x_\nu)} \right\}^2 d\alpha(x) = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{-1}{P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu)} = \frac{k_n}{k_{n-1}} \frac{1}{P_{n-1}(x_\nu) P'_n(x_\nu)}$$

$$a_\nu^{-1} = (P_0(x_\nu))^2 + \dots + (P_n(x_\nu))^2 = K_n(x_\nu, x_\nu).$$

## Remarques

- Le cas particulier  $a = -1, b = +1, d\alpha(x) = dx$  est très important. Les abscisses  $x_\nu$  sont les zéros du  $n^{\text{ième}}$  polynôme de Legendre et la somme des nombres de Christoffel est 2, ce qui est la longueur de l'intervalle d'intégration.
- Un autre cas particulier important :  $a = -1, b = +1, d\alpha(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx$  (du à Mehler).
- La positivité des  $a_\nu$  est claire et donnée dans le théorème.
- Ce théorème nous dit que la somme des nombres de Christoffel est égale à la masse totale de la distribution  $d\alpha(x)$  sur  $[a, b]$ .

## Démonstration

Notons  $\rho(x) = \{l_\nu(x)\}^2$ , alors  $\int_a^b \rho(x) d\alpha(x) = \sum_{k=0}^n a_k \{l_\nu(x_k)\}^2$ ,

mais  $l_\nu(x_k) = \frac{P_n(x_k)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x_k - x_\nu)} = \begin{cases} 0 & x \neq x_\nu \\ 1 & x = x_\nu \end{cases} \Rightarrow a_\nu = \int_a^b \rho(x) d\alpha(x)$ .

De plus en écrivant  $y = x_\nu$  dans la formule de Christoffel-Darboux on obtient :

$$\sum_{k=0}^n P_k(x) P_k(x_\nu) \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{P_{n+1}(x) P_n(x_\nu) - P_n(x) P_{n+1}(x_\nu)}{x - x_\nu} = \frac{k_n}{k_{n+1}} \frac{-P_n(x) P_{n+1}(x_\nu)}{x - x_\nu}.$$

En intégrant de  $a$  à  $b$  relativement à  $d\alpha(x)$  :

$$\sum_{k=0}^n P_k(x_\nu) \int_a^b P_k(x) d\alpha(x) = \frac{-k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x_\nu) \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_\nu} d\alpha(x).$$

Mais  $\int_a^b P_k(x) d\alpha(x) = \delta_{0k}$  puisque  $\{P_k(x)\}$  est une famille orthonormale, ainsi :

$$1 = \frac{-k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x_\nu) \int_a^b \frac{P_n(x)}{x - x_\nu} d\alpha(x) = \frac{-k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu) \int_a^b \frac{P_n(x)}{P'_n(x_\nu) \cdot (x - x_\nu)} d\alpha(x)$$

$$\text{et donc } a_\nu = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{-1}{P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu)}.$$

Pour trouver la deuxième représentation de  $a_\nu$  on utilise la formule de récurrence :  $P_{n+1}(x_\nu) = -C_n P_{n-1}(x_\nu)$  avec  $C_n = \frac{k_{n+1}}{k_n^2} k_{n-1}$ , en remplaçant  $P_{n+1}(x_\nu)$  par cette valeur on a le résultat.

Pour avoir  $(a_\nu)^{-1}$  on utilise la formule de Christoffel-Darboux limite pour  $x = x_\nu$  :

$$\sum_{k=0}^n (P_k(x_\nu))^2 = \frac{-k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu)$$

comme  $a_\nu = \frac{k_{n+1}}{k_n} \frac{-1}{P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu)}$  on a  $(a_\nu)^{-1} = \frac{-k_n}{k_{n+1}} P_{n+1}(x_\nu) P'_n(x_\nu) = \sum_{k=0}^n (P_k(x_\nu))^2$ .  $\square$

## Application

Pour des réels quelconque  $u_0, \dots, u_{n-1}$  posons :

$$F(u) \equiv \int_a^b (u_0 + u_1x + \dots + u_{n-1}x^{n-1})^2 d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu (u_0 + u_1x_\nu + \dots + u_{n-1}x_\nu^{n-1})^2$$

et :

$$G(u) \equiv \int_a^b x(u_0 + u_1x + \dots + u_{n-1}x^{n-1})^2 d\alpha(x) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu x_\nu (u_0 + u_1 \cdot x_\nu + \dots + u_{n-1}x_\nu^{n-1})^2.$$

$$G(u) - \xi F(u) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu (x_\nu - \xi)(u_0 + u_1x + \dots + u_{n-1}x^{n-1})^2 = 0 \text{ pour } \xi = x_1, \dots, x_n.$$

En introduisant  $c_n$  on obtient la forme quadratique suivante :

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{n-1} (c_{\nu+\mu+1} - \xi \cdot c_{\nu+\mu}) u_\nu u_\mu.$$

Son déterminant est un  $\pi_n$  en  $\xi$  qui s'annule pour  $\xi = x_1, \dots, x_n$ . et est donc égal à  $KP_n(x)$ , où  $K$  est une constante, cela nous permet de dire que :

$$P_n(x) = (D_n D_{n-1})^{\frac{1}{2}} \begin{vmatrix} c_0x - c_1 & c_1x - c_2 & \cdots & c_{n-1}x - c_n \\ c_1x - c_2 & c_2x - c_3 & \cdots & c_nx - c_{n+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n-1}x - c_n & c_nx - c_{n+1} & \cdots & c_{2n-2}x - c_{2n-1} \end{vmatrix}.$$

## 4.5 Fractions continues

### 4.5.1 Généralités

Historiquement les polynômes orthogonaux tirent leur origine de l'étude des fractions continues.

Pour une fraction continue infinie on utilisera la notation :

$$b_0 + \frac{a_1}{|b_1|} + \frac{a_2}{|b_2|} + \cdots + \frac{a_n}{|b_n|} + \cdots$$

pour :

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{\cdots + \frac{a_n}{b_n}}}$$

On définit  $\frac{R_n}{S_n}$  pour  $n = 0, 1, 2 \dots$  comme la fraction (finie) obtenue à l'aide de la fraction infinie en s'arrêtant au terme  $b_n$ , on a la :

**Proposition 4.1.** *On a les formules de récurrence :*

$$R_0 = b_0, R_1 = b_0b_1 + a_1, R_n = b_nR_{n-1} + a_nR_{n-2} \text{ pour } n \geq 2$$

$$S_0 = 1, S_1 = b_1, S_n = b_nS_{n-1} + a_nS_{n-2} \text{ pour } n \geq 2.$$

En prenant  $R_{-1} = S_{-1} = 0$  ces formules sont valables pour  $n \geq 1$ .

### Démonstration

Posons  $f_n(z) = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \frac{a_2|}{|b_2|} + \dots + \frac{a_n|}{|b_n+z|}$ , il suffit de montrer que  $f_n(z) = \frac{R_{n-1}z + R_n}{S_{n-1}z + S_n}$  (on retrouve la fomule de la proposition en regardant  $f_n(0)$ ).

Pour  $n = 1$  :  $b_0 + \frac{a_1}{b_1+z} = \frac{b_0z + (b_0b_1 + a_1)}{1 \cdot z + b_1}$ .

On suppose la formule vraie jusqu'au rang  $n - 1$  :  $f_{n-1}(z) = \frac{R_{n-2}z + R_{n-1}}{S_{n-2}z + S_{n-1}}$ .

Dans cette équation remplaçons  $z$  par  $\frac{a_n}{b_n+z}$  :  $f_{n-1}(z) = \frac{R_{n-2} \cdot \frac{a_n}{b_n+z} + R_{n-1}}{S_{n-2} \cdot \frac{a_n}{b_n+z} + S_{n-1}}$ .

Mais  $f_n(z) = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1|} + \frac{a_2|}{|b_2|} + \dots + \frac{a_{n-1}|}{|\frac{a_n}{b_n+z}|} = \frac{a_nR_{n-2} + (b_n+z) \cdot R_{n-1}}{a_nS_{n-2} + (b_n+z) \cdot S_{n-1}} = \frac{A_n + A_{n-1}z}{B_n + B_{n-1}z}$ .

On prend  $z = 0$  et on a :  $f_n(0) = \frac{R_n}{S_n} = \frac{R_{n-2}a_n + R_{n-1}b_n}{S_{n-2}a_n + S_{n-1}b_n}$ .  $\square$

**Corollaire 4.1.** *On a les formules :*

$$\frac{R_n}{S_n} - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{(-1)^n a_1 \cdot \dots \cdot a_n}{S_{n-1}S_n} \text{ pour } n = 1, 2, \dots$$

(donc  $R_nS_{n-1} - R_{n-1}S_n = (-1)^n a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ ).

### Démonstration

$\frac{R_n}{S_n} - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} = \frac{R_nS_{n-1} - R_{n-1}S_n}{S_{n-1}S_n}$  donc il suffit que nous montrions que  $R_nS_{n-1} - R_{n-1}S_n = (-1)^n a_1 \cdot \dots \cdot a_n$ , ce qu'on montre par récurrence sur  $n$ .

$n = 1$   $R_1S_0 - S_1R_0 = (b_0b_1 + a_1)1 - b_1(b_0) = a - 1$ . On suppose la formule vraie jusqu'au rang  $n$ . Alors :

$$R_{n+1}S_n - S_{n+1}R_n = S_n(b_{n+1}R_n + a_{n+1}R_{n-1}) - R_n(b_{n+1}S_n + a_{n+1}S_{n-1})$$

$$= -a_{n+1}(-R_{n-1}S_n + R_nS_{n-1}), \text{ on applique l'hypothèse de récurrence :}$$

$$R_{n+1}S_n - S_{n+1}R_n = -a_{n+1}((-1)^n a_1 \cdot \dots \cdot a_n). \square$$

### Remarque

Soit  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  un ensemble de polynômes orthogonaux associés à la distribution  $d\alpha(x)$  sur  $[a, b]$ . La formule de récurrence :  $P_{n+1}(x) = (A_nx + B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x)$ , nous

suggère de considérer la fraction continue :

$$\frac{1|}{|A_1x + B_1|} - \frac{C_2|}{|A_2x + B_2|} - \dots - \frac{C_n|}{|A_nx + B_n|} - \dots$$

c'est à dire de prendre  $b_0 = 0$ ,  $b_n = A_nx + B_n$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_n = -C_n$   $n \geq 2$ .

**Théorème 4.15.** Les  $\frac{R_n}{S_n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sont déterminés par les formules :

$$R_n = ( = R_n(x) ) = c_0^{\frac{-3}{2}} (c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$$

$$S_n ( = S_n(x) ) = c_0^{\frac{1}{2}} P_n(x)$$

où  $c_n = \int_a^b x^n d\alpha(x)$ .

### Démonstration

Pour la première égalité on vérifie que ça marche aux rangs  $n = 0$ ,  $n = 1$  :

$$R_0 = b_0 = 0 \text{ et : } \int_a^b \frac{P_0(x) - P_0(t)}{x-t} d\alpha(t) = 0 \text{ puisque } P_0 = \text{const}, R_1 = b_0b_1 + a_1 = 0 \cdot b_1 + a_1 = 1,$$

$$\int_a^b \frac{P_1(x) - P_1(t)}{x-t} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{(k_1x - b) - (k_1t - b)}{x-t} d\alpha(t) = k_1 \int_a^b d\alpha(t) = k_1c_0 \text{ mais } k_n = \left(\frac{D_{n-1}}{D_n}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ avec}$$

$$D_n = |[c_{\mu+\nu}]_{\mu,\nu=0,1,\dots,n}| \Rightarrow k_1 = \sqrt{\frac{c_0}{c_0c_2 - c_1^2}} \Rightarrow R_1 = c_0^{\frac{-3}{2}} (c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{c_0}{c_0c_2 - c_1^2}} c_0 = 1.$$

On va supposer maintenant que  $n \geq 2$ .

Pour exprimer  $R_n$  on introduit le polynôme :  $q_n(x) = \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$ . C'est un polynôme de degré  $n-1$  :

$$\frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} = \frac{1}{x-t} [k_n(x^n - t^n) + \dots + k_1(x-t)] = k_n(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots + (-1)^n t^{n-1}) + \dots + k_1.$$

On intègre en  $t$  de  $a$  à  $b$ , on obtient un  $\pi_{n-1}$ . On va utiliser les formules de récurrence des polynômes orthogonaux :

$$q_{n+1}(x) = \int_a^b \frac{P_{n+1}(x) - P_{n+1}(t)}{x-t} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{[(A_nx + B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x)] - [(A_nt + B_n)P_n(t) - C_nP_{n-1}(t)]}{x-t} d\alpha(t)$$

$$= A_n \int_a^b \frac{xP_n(x) - tP_n(t)}{x-t} d\alpha(t) + B_n \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - C_n \int_a^b \frac{P_{n-1}(x) - P_{n-1}(t)}{x-t} d\alpha(t)$$

mais :

$$\int_a^b \frac{xP_n(x) - tP_n(t)}{x-t} d\alpha(t) = x \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) + \int_a^b \frac{xP_n(t) - tP_n(t)}{x-t} d\alpha(t) = x \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) + \int_a^b P_n(t) d\alpha(t) = x \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t).$$

Ainsi :

$$q_{n+1}(x) = (A_nx + B_n)q_n(x) - C_nq_{n-1}(x) \text{ avec } q_0(x) = \int_a^b \frac{P_0(x) - P_0(t)}{x-t} d\alpha(t) = 0,$$

$$q_1(x) = k_1c_0.$$

Comme  $R_1 = b_0b_1 + a_1 = 1$  on a  $R_n(x) = (k_1c_0)^{-1}q_n(x)$  ( $R_n$  et  $q_n$  vérifient la même formule de récurrence).



On a vu que :  $k_1 = c_0^{\frac{1}{2}}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow R_n(x) = c_0^{\frac{-3}{2}}(c_0c_2 - c_1^2)^{\frac{1}{2}} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$ .

Montrons maintenant la deuxième égalité : D'une part on a  $S_n = (A_nx + B_n)S_{n-1} - C_nS_{n-2}$  avec  $S_0 = 1$ ,  $S_1 = A_1x + b_1 = P_1$  et d'autre part  $P_n = (A_nx + B_n)P_{n-1} - C_nP_{n-2}$ . Ainsi  $P_n$  et  $S_n$  vérifient la même formule de récurrence donc  $S_n = \text{const} \cdot P_n$ . On a  $P_0 = k_0$ ,  $S_0 = 1 \Rightarrow S_n = k_0^{-1}P_n$

(on a vu que  $P_0(x) = D_0^{\frac{-1}{2}} = c_0^{\frac{-1}{2}}$ ).

□

### Remarque

On peut aussi voir que  $\frac{R_n}{S_n}$  est une fonction rationnelle avec des pôles simples en les points,  $x_{1,n}, \dots, x_{n,n}$  (qui ne sont autres que les zéros de  $P_n(x)$ ). Les résidus en ces pôles s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_{\nu,n}} (x - x_{\nu,n}) \frac{(k_1c_0)^{-1}P_n(x)}{k_0^{-1}P_n(x)} \\ &= \frac{k_0}{k_1c_0} \lim_{x \rightarrow x_{\nu,n}} \left\{ \frac{x - x_{\nu,n}}{P_n(x)} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) \right\} \\ &= \frac{k_0}{k_1c_0} \lim_{x \rightarrow x_{\nu,n}} \int_a^b \left\{ \frac{x - x_{\nu,n}}{x-t} - \frac{x - x_{\nu,n}}{P_n(x)} \frac{P_n(t)}{(x-t)} \right\} d\alpha(t) = \frac{k_0}{k_1c_0} \int_a^b \frac{P_n(t)}{P_n'(x_{\nu,n})(t - x_{\nu,n})} d\alpha(t) \end{aligned}$$

(On peut remarquer que  $\frac{k_0}{k_1c_0} = \frac{1}{k_1c_0^{\frac{3}{2}}}$ )

On reconnaît les symboles de Christoffel :

$$\text{Res}\left(\frac{R_n}{S_n}, x_{\nu,n}\right) = \frac{1}{k_1c_0^{\frac{3}{2}}} \lambda_{\nu,n} \text{ donc } \frac{R_n}{S_n} = \frac{1}{k_1c_0^{\frac{3}{2}}} \sum_{\nu=0}^n \frac{\lambda_{\nu,n}}{x - x_{\nu,n}}.$$

On peut montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n}{S_n} = \frac{k_0}{k_1c_0} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{c_h}{x^{h+1}} = \frac{k_0}{k_1c_0} \int_a^b \frac{1}{x-t} d\alpha(t)$$

(on a  $c_h = \sum_{\nu=0}^n x_{\nu,n}^h \lambda_{\nu,n}$ )

Pour  $n \geq 1$  on a  $\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \mu_0x^{-1} + \mu_1x^{-2} + \dots$

Avec l'expression  $\frac{R_n(x)}{S_n(x)} - \frac{R_{n-1}(x)}{S_{n-1}(x)} = \frac{(-1)^{n-1}a_1a_2 \dots a_n}{S_{n-1}S_n}$  on déduit :

$$\begin{aligned} \frac{R_n(x)}{S_n(x)} &= \frac{a_1}{S_1S_0} - \frac{a_1a_2}{S_1S_2} + \frac{a_1a_2a_3}{S_2S_3} + \frac{(-1)^{n-1}a_1a_2 \dots a_n}{S_{n-1}S_n} = \left(\frac{R_n(x)}{S_n(x)} - \frac{R_{n-1}(x)}{S_{n-1}(x)}\right) + \left(\frac{R_{n-1}(x)}{S_{n-1}(x)} - \frac{R_{n-2}(x)}{S_{n-2}(x)}\right) + \\ &\dots + \left(\frac{R_1(x)}{S_1(x)} - \frac{R_0(x)}{S_0(x)}\right). \end{aligned}$$

On obtient une série commençant en  $x^{-1}$  ( $R_0 = 0$ ) et pour  $n \geq 1$  on a :

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \mu_0 x^{-1} + \dots + \mu_{2n-1} x^{-2n} + \sum_{\nu=2n}^{\infty} \mu_{\nu} x^{-\nu-1}. \square$$

**Théorème 4.16.** On a  $\lambda_{\nu} = c_0^{-2} c_{\nu} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)}$  pour  $\nu = 0, 1, 2, \dots$

### Démonstration

On suppose que  $\lambda_{\nu}$  est donné par le théorème

$$\begin{aligned} R_n(x) - S_n(x)(\mu_0 x^{-1} + \dots + \mu_{2n-1} x^{-2n}) &= \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - c_0^{\frac{1}{2}} P_n(x) (\mu_0 x^{-1} + \dots + \mu_{2n-1} x^{-2n}) \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - c_0^{\frac{1}{2}} c_0^{-2} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} P_n(x) (c_0 x^{-1} + \dots + c_{2n-1} x^{-2n}) \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \left\{ \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - P_n(x) (c_0 x^{-1} + \dots + c_{2n-1} x^{-2n}) \right\} \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \left\{ \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - \int_a^b P_n(x) \left( \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{t^k}{x^{k-1}} \right) d\alpha(t) \right\} \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \left\{ \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - P_n(x) \int_a^b \frac{1 - (t/x)^{2n}}{1 - (t/x)} d\alpha(t) \right\} \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \left\{ \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t) - P_n(x) \int_a^b \frac{1 - x^{-2n} t^{2n}}{x-t} d\alpha(t) \right\} \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \left\{ \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} x^{-2n} t^{2n} d\alpha(t) - \int_a^b P_n(t) \frac{1 - x^{-2n} t^{2n}}{x-t} d\alpha(t) \right\} \\ & \quad (\text{Puisque } -P_n(x) \int_a^b \frac{1 - x^{-2n} t^{2n}}{x-t} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} (1 - x^{-2n} t^{2n}) d\alpha(t) - \\ & \quad \int_a^b \frac{P_n(t)}{x-t} (1 - x^{-2n} t^{2n}) d\alpha(t)) \\ &= c_0^{\frac{-3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \{S_1(x) + S_2(x)\} \\ & \text{avec } S_1(x) = x^{-2n} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} t^{2n} d\alpha(t) \\ & \text{et } S_2(x) = -x^{-2n} \int_a^b P_n(t) [x^{2n-1} + x^{2n-2} t + \dots + x t^{2n-2} + t^{2n-1}] d\alpha(t) \end{aligned}$$

$$S_2(x) = -x^{-2n} \sum_{k=n}^{2n-1} x^{2n-1-k} \int_a^b P_n(t) t^k d\alpha(t) = - \sum_{k=n}^{2n-1} x^{-1-k} \int_a^b P_n(t) t^k d\alpha(t)$$

Ainsi en divisant l'expression suivante par  $S_n(x)$  :

$$R_n(x) - S_n(x)(\mu_0 x^{-1} + \dots + \mu_{2n-1} x^{-2n}) = S_1(x) + S_2(x)$$

on obtient une série de la forme :

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = \mu_0 x^{-1} + \dots + \mu_{2n-1} x^{-2n} + \sum_{\nu=2n}^{\infty} \mu_{\nu} x^{-\nu-1}. \square$$

**Théorème 4.17.** On a la décomposition en fraction rationnelle suivante :

$$\frac{R_n(x)}{S_n(x)} = c_0^{-2} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \sum_{\nu=1}^n \frac{\lambda_{\nu,n}}{x - x_\nu}.$$

### Démonstration

On sait que  $R_n(x) = c_0^{-\frac{3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \int_a^b \frac{P_n(x) - P_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$   
 $S_n(x) = c_0^{\frac{1}{2}} P_n(x).$

Cela entraîne que  $\frac{R_n(x_\nu)}{S'_n(x_\nu)} = \frac{c_0^{-\frac{3}{2}} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \int_a^b \frac{P_n(x_\nu) - P_n(t)}{x_\nu - t} d\alpha(t)}{\sqrt{c_0} P'_n(x_\nu)}.$

Mais  $\lambda_{\nu,n} = \int_a^b \frac{P_n(t)}{P'_n(x_\nu)(t-x_\nu)} d\alpha(t).$

Donc  $\frac{R_n(x_\nu)}{S'_n(x_\nu)} = c_0^{-2} \sqrt{(c_0 c_2 - c_1^2)} \lambda_{\nu,n}$  d'où le résultat.  $\square$

### 4.5.2 Etude du cas d'un intervalle fini

Considérons le cas  $[a, b]$  intervalle fini.

Etant donnée une distribution  $\alpha(t) = w(t)dt$ , sur  $[a, b]$ , il existe une unique suite de polynômes orthogonaux unitaires  $Q_0(x), Q_1(x), \dots$  vérifiant :

$$Q_0(x) = 1, Q_1(x) = x - a_1, Q_n(x) = (x - a_n)Q_{n-1}(x) - b_n Q_{n-2}(x) \text{ (confer th. 3.2 p.4)}$$

Il existe une deuxième suite de polynômes  $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots$  vérifiant la même formule de récurrence et ayant comme conditions initiales :

$$\phi_0 = 0, \phi_1 = b_1 (= \int_a^b d\alpha(t))$$

On pose, comme précédemment,  $c_n = \int_a^b x^n d\alpha(x)$ , tout ceci étant établi, on a le remarquable théorème suivant :

**Théorème 4.18.** ( de Stieltjes )

$$\forall x \notin [a, b], \frac{b_1}{|x - a_1|} + \frac{b_2}{|x - a_2|} + \dots = \int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x - t} = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{x^{n+1}}$$

Le  $n^{\text{ième}}$  terme partiel étant  $\frac{\phi_n(x)}{Q_n(x)}$

Pour démontrer ce théorème on a besoin du :

**Lemme 4.1.**  $\phi_n(x) = \int_a^b \frac{Q_n(t) - Q_n(x)}{t-x} d\alpha(t)$ , pour  $n \geq 0$

### Démonstration

Par récurrence :  $\phi_0(x) = 0, \phi_1(x) = b_1$

$$\int_a^b \frac{Q_1(t) - Q_1(x)}{t-x} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{(t-a_1) - (x-a_1)}{t-x} d\alpha(t) = \int_a^b d\alpha(t)$$

On suppose l'égalité vraie pour  $k = 0, \dots, n-1$ .

Pour  $n \geq 2$  on a :

$$\int_a^b \frac{Q_n(t) - Q_n(x)}{t-x} d\alpha(t) = \int_a^b \frac{(t-a_n)Q_{n-1}(t) - b_n Q_{n-2}(t) - ((x-a_n)Q_{n-1}(x) - b_n Q_{n-2}(x))}{t-x} d\alpha(t)$$

$$\begin{aligned}
&= (x - a_n) \int_a^b \frac{Q_{n-1}(t) - Q_{n-1}(x)}{t-x} d\alpha(t) + \int_a^b (t-x) \frac{Q_{n-1}(t)}{t-x} d\alpha(t) - b_n \int_a^b \frac{Q_{n-2}(t) - Q_{n-2}(x)}{t-x} d\alpha(t) \\
&= (x - a_n) \phi_{n-1}(x) - b_n \phi_{n-2} = \phi_n(x). \quad \square
\end{aligned}$$

### Démonstration du théorème

Montrons tout d'abord la deuxième égalité.

$$\int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x-t} = \frac{1}{x} \int_a^b \frac{d\alpha(t)}{1-t/x} = \frac{1}{x} \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} (t/x)^n d\alpha(t) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} x^{-n} \int_a^b t^n d\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{x^{n+1}}$$

Pour montrer la première égalité prenons  $x \notin [a, b]$  par exemple  $x > b$ .

Soit  $H_n(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (x-t)^k$  où les  $\mu_k$  sont choisis de telle sorte que  $\varepsilon_n \equiv \int_a^b \frac{H_n^2(t)}{x-t} d\alpha(t)$

soit minimum.

Comme  $\frac{d\varepsilon}{d\mu_k} = 0 \Leftrightarrow \int_a^b H_n(t) (x-t)^k \frac{d\alpha(t)}{x-t} = 0$   $k = 1, 2, \dots$  on voit que  $H_n(t)$  est orthogonal à  $1, x-t, (x-t)^2, \dots, (x-t)^{n-1}$  et donc à  $Q_0(t), Q_1(t), \dots, Q_{n-1}(t)$ . Ainsi  $H_n(t)$  est un multiple de  $Q_n(t)$  disons  $H_n(t) = cQ_n(t)$ .

En prenant  $t = x$  on a  $c = \frac{1}{Q_n(x)}$ . La valeur de  $\varepsilon_n$  peut maintenant être déterminée avec l'aide des propriétés d'orthogonalité :

$$\varepsilon_n = \frac{1}{Q_n(x)} \int_a^b Q_n(t) \frac{H_n(t)}{x-t} d\alpha(t) = \frac{1}{Q_n(x)} \int_a^b Q_n(t) \left[ \frac{1}{x-t} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (x-t)^{k-1} \right] d\alpha(t)$$

C'est à dire  $\varepsilon_n = \frac{1}{Q_n(x)} \int_a^b \frac{Q_n(t)}{x-t} d\alpha(t)$ , on utilise maintenant le lemme pour écrire :

$$\varepsilon_n = \int_a^b \frac{d\alpha(t)}{x-t} - \frac{\phi(x)}{Q_n(x)}. \text{ Il ne nous reste plus qu'à voir que } \varepsilon_n \rightarrow 0.$$

Appelons  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  les paramètres dans  $H_{n-1}(t)$  qui rendent  $\varepsilon_{n-1}$  minimum.

Alors  $\forall \lambda$  :

$$\varepsilon_n \leq \int_a^b \{ [1 - \lambda(x-t)] [1 + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x-t)^k] \}^2 \frac{d\alpha(t)}{x-t}$$

Prenons  $\lambda = \frac{1}{x+a}$  et utilisons les inégalités :  $0 \leq 1 - \frac{x-t}{a+x} \leq 1 - \frac{x-a}{a+x} \equiv \theta < 1$

$$\varepsilon_n \leq \int_a^b \{ [1 - \frac{x-t}{x+a}] [1 + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k (x-t)^k] \}^2 \frac{d\alpha(t)}{x-t} \leq \theta^2 \varepsilon_{n-1}.$$

Ce qui montre que  $\varepsilon_n$  tend vers zéro quand  $n \rightarrow +\infty$  et finit la démonstration.  $\square$

## 5 Propriétés des polynômes orthogonaux classiques

Dans cette partie on se donne un intervalle  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , on prend comme distribution  $w(x)dx$  et on se place sur  $L_w^2(a, b)$  ( $\subset L^2(a, b)$ ). On suppose :  $w(x) > 0$  sur  $[a, b]$ ,  $\int_a^b x^n w(x) dx < \infty$ .

### 5.1 Formule de Rodriguez

**Théorème 5.1.** Soit  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une famille d'applications de  $]a, b[$  dans  $\mathbb{R}$  qui vérifie :

- 1)  $(\phi_n)_n$  est de classe  $C^n$  sur  $]a, b[$
- 2)  $\phi_n^{(k)}(a^+) = \phi_n^{(k)}(b^-) = 0$  pour  $0 \leq k \leq n-1$
- 3)  $T_n \equiv \frac{1}{K_n w} \phi_n^{(n)}$  est un polynôme de degré  $n$ .

Alors  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite orthogonale graduée.

La réciproque est vraie quand  $\omega(x)$  est  $c^\infty$ .

### Démonstration

On prend une suite  $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant 1), 2) et 3). Elle est graduée par construction, il suffit de s'assurer que c'est une famille orthogonale. Soit  $P$  un polynôme de degré  $\leq n-1$ . Alors :  $\int_a^b w(x) T_n(x) P(x) dx = \int_a^b \phi_n^{(n)}(x) P(x) dx = (-1)^n \int_a^b \phi_n(x) P^{(n)}(x) dx = 0$ .

Réciproquement, on pose  $w(x) P_n(x) = \phi_n^{(n)}(x)$  alors  $\int_a^b q_{n-1}(x) \phi_n^{(n)}(x) dx = 0 \forall q_{n-1}$  un  $\pi_{n-1}$   
 $\Rightarrow [\phi_n^{(n-1)}(x) q_{n-1}(x) - \phi_n^{(n-2)}(x) q_{n-1}'(x) + \dots + (-1)^{n-1} \phi_n(x) q_{n-1}^{(n-1)}(x)]_a^b = 0$ .

Ceci étant vrai pour tout polynôme de degré  $\leq n$  on en déduit que  $\phi_n^{(k)}(a^+) = \phi_n^{(k)}(b^-) = 0 \forall k = 0, \dots, n-1$ .  $\square$

### 5.2 Les polynômes classiques

On suppose dans cette section qu'on dispose d'une famille de polyômes orthogonaux donnée par une formule de Rodriguez de la forme :

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} \left[ w(x) X^n \right].$$

Où  $X$  est un polynôme en  $x$  de degré  $k$ .

Pour  $n = 1$  :

$$K_1 P_1(x) = X' + \frac{X w'(x)}{w(x)}$$

### 5.2.1 Polynômes de Hermite

Prenons  $k = 0$ , alors  $X$  est une constante, par exemple 1, et  $\frac{w'}{w}$  est une fonction linéaire en  $x$ . Par un changement de variable on peut se ramener à :  $\frac{w'}{w} = -2x$ . Les polynômes issus de la formule de Rodriguez déterminée par :

$$X = 1, w(x) = \exp(-x^2), K_n$$

sont appelés polynômes de Hermite.

### 5.2.2 Polynômes de Laguerre

Prenons  $k = 1$ , par un changement de variable on peut se ramener à  $\frac{w'}{w} = -1 + \frac{a}{x}$ . Les polynômes issus de la formule de Rodriguez déterminée par :

$$X = x, w(x) = x^a e^{-x}, K_n$$

sont appelés polynômes de Laguerre.

### 5.2.3 Polynômes de Jacobi ou hypergéométriques

Supposons  $k \geq 2$ , on peut prendre  $X = \prod_{r=1}^k (x - a_r)$ .

Commençons par supposer que les  $a_r$  sont distincts. On peut écrire  $\frac{w'(x)}{w(x)} = \sum_{r=0}^k \frac{a_r}{x - a_r}$

$\Rightarrow w(x) = \prod_{r=1}^k (x - a_r)^{a_r}$ . Cela nous donne :

$$P_n(x) = \frac{1}{K_n \prod_{r=1}^k (x - a_r)^{a_r}} \frac{d^n}{dx^n} \left\{ \prod_{r=1}^k (x - a_r)^{n+a_r} \right\}$$

Sauf pour  $k = 2$ , cette expression n'est pas un polynôme de degré 2 quand  $n=2$ .

Supposons donc  $k = 2$ .

Regardons le cas  $a_1 = a_2 = a$ .

$P_n(x) = \frac{1}{K_n (x-a)^{2a}} \frac{d^n}{dx^n} \{(x-a)^{2(n+a)}\} = A_n (x-a)^n$ . On voit donc que  $P_n(x)$  n'appartient pas à une famille de polynômes orthogonaux, puisqu'il a un zéro multiple.

Le seul cas possible est donc :

$$k = 2 \text{ et } a_1 \neq a_2.$$

Par un changement de variable linéaire on peut se ramener au cas,  $a_1 = -1$ ,  $a_2 = 1$ . Les polynômes issus de la formule de Rodriguez déterminée par :

$$X = 1 - x^2, w(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta, \alpha, \beta > -1, K_n$$

sont appelés polynômes de Jacobi.

### Remarque

Il y a des polynômes de Jacobi particuliers :

- $\alpha = \beta$ , polynômes hypersphériques
- $\alpha = \beta = (-1/2)$ , polynômes de Tchebitchev de première espèce,  $T_n(x) = \cos(n\theta)$ ,  $x = \cos \theta$
- $\alpha = \beta = 1/2$ , polynômes de Tchebitchev de deuxième espèce,  $U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$ ,  $x = \cos \theta$
- $\alpha = \beta = 0$ , polynômes de Legendre.

### 5.3 Equation et forme différentielles

**Théorème 5.2.** Soit  $\{P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes orthogonaux définie à l'aide d'une formule de Rodriguez, alors  $P_n(x)$  satisfait, pour  $n \geq 0$ , une équation différentielle de la forme :

$$A(x)y'' + B(x)y' + \lambda_n y = 0$$

Où  $A(x)$  et  $B(x)$  ne dépendent pas de  $n$  et  $\lambda_n$  ne dépend pas de  $x$ .

### Démonstration

D'une part la formule de Liebniz nous dit (on pose  $D = \frac{d}{dx}$ ) :

$$\begin{aligned} D^{n+1}[XD(wX^n)] &= \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k X^{(k)} D^{n+1}[D(wX^n)], \text{ où } X^{(0)} = X \\ &= XD^{n+2}(wX^n) + (n+1)X'D^{n+1}(wX^n) + \frac{(n+1)n}{2}X''D^n(wX^n) \end{aligned}$$

car  $X^{(k)} = 0$  pour  $k \geq 3$

On utilise maintenant le fait que  $D^n(wX^n) = K_n w P_n$  pour déduire que :

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = K_n \{XD^2(wP_n) + (n+1)X'D(wP_n) + \frac{(n+1)n}{2}X''(wP_n)\}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} D^{n+1}[XD(wX^n)] &= D^{n+1}[X^{n+1}Dw + nX'X^n w] = D^{n+1}[X^n(XDw + nX'w)] \\ &= D^{n+1}[X^n(D(Xw) + (n-1)wX')] \end{aligned}$$

Mais  $D(Xw) = K_1 w P_1$  (formule de Rodriguez pour  $n=1$ ) donc

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = D^{n+1}[X^n(K_1 P_1 + (n-1)X')]$$

On développe en utilisant la formule de Liebniz :

$$D^{n+1}[XD(wX^n)] = D^{n+1}(X^n w)(K_1 P_1 + (n-1)X') + (n+1)D^n(X^n w)(K_1 P_1' + (n-1)X'')$$

$$= K_n \{ D(wP_n)(K_1P_1 + (n-1)X') + (n+1)(wP_n)(K_1P_1' + (n-1)X'') \}.$$

On identifie ces deux valeurs de  $D^{n+1}[XD(wX^n)]$  :

$$XD^2(wP_n) + (n+1)X'D(wP_n) + \frac{(n+1)n}{2}X''(wP_n) = D(wP_n)(K_1P_1 + (n-1)X') + (n+1)(wP_n)(K_1P_1' + (n-1)X'')$$

$\Leftrightarrow$

$$XD^2(wP_n) + D(wP_n)[(n+1)X' - K_1P_1 - (n-1)X''] + (wP_n)[\frac{n(n+1)}{2}X'' - (n+1)K_1P_1' - (n+1)(n-1)X''] = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XD^2(wP_n) + D(wP_n)[2X' - K_1P_1] + (wP_n)[-\frac{n^2+n+2}{2}X'' - (n+1)K_1P_1'] = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$X(w''P_n + 2w'P_n' + wP_n'') + (w'P_n + wP_n')(2X' - K_1P_1) + (wP_n)[-\frac{n^2+n+2}{2}X'' - (n+1)K_1P_1'] = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XwP_n'' + P_n'[2w'X + w(2X' - K_1P_1)] + P_n[Xw'' + w'(2X' - K_1P_1) + w - \frac{n^2+n+2}{2}X'' - w(n+1)K_1P_1'] = 0, \text{ on divise par } w \text{ (non nul sur } [a, b] \text{)} :$$

$\Leftrightarrow$

$$XP_n'' + \frac{P_n'}{w} \{ 2(wX)' - wK_1P_1 \} + \frac{P_n}{w} \{ (wX)'' - wX'' - w'K_1P_1 - w(\frac{n^2+n+2}{2})X'' + w(n+1)K_1P_1' \} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XP_n'' + \frac{P_n'}{w} \{ 2(wX)' - wK_1P_1 \} + \frac{P_n}{w} \{ K_1(P_1'w + w'P_1) - w'K_1P_1 + w(\frac{-n^2+n}{2})X'' - (n+1)K_1P_1' \} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XP_n'' + K_1P_1P_n' + P_n \{ K_1P_1' + \frac{w'}{w}K_1P_1 - \frac{w'}{w}K_1P_1 + \frac{-n^2+n}{2}X'' - (n+1)K_1P_1' \} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XP_n'' + K_1P_1P_n' + P_n \{ -\frac{n}{2}(n-1)X'' - nK_1P_1' \} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$XP_n'' + K_1P_1P_n' + P_n \{ -n[\frac{n-1}{2}X'' + K_1P_1'] \} = 0$$

$$\begin{cases} A(x) &= X(x) \\ B(x) &= K_1P_1(x) \\ \lambda_n &= -n(\frac{n-1}{2}X'' + k_1K_1). \square \end{cases}$$

### Remarque

L'opérateur autoadjoint associé à cette équation différentielle est :

$$\frac{d}{dx} [Xw \frac{dy}{dx}] + \lambda_n wy = 0.$$

**Théorème 5.3.** (*Mêmes notations*)



$$X \frac{dP_n(x)}{dx} = (\alpha_n + \frac{1}{2}nX'')P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x)$$

Où  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont des constantes indépendantes de  $x$ .

### Démonstration

La démonstration (due à Tricomi, 1948) est basée sur le fait que  $XP'_n(x) - (1/2)nX''xP_n(x)$  est un polynôme de degré  $\leq n$  et donc peut s'écrire :  $\alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) + \gamma_2 P_{n-2}(x) + \dots + \gamma_n P_0(x)$ , les coefficients étant déterminés par les propriétés d'orthogonalités. Dans la détermination de  $\beta_n$  on va en plus utiliser l'équation différentielle  $\frac{d}{dx}[Xw \frac{dy}{dx}] + \lambda_n w y = 0$ .

On part donc de l'égalité :

$$XP'_n(x) - (1/2)nX''xP_n(x) = \alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) + \gamma_2 P_{n-2}(x) + \dots + \gamma_n P_0(x)$$

On prend  $(\cdot, P_{n-k})$  pour  $k \geq 2$ , à droite et à gauche :

$$(XP'_n, P_{n-k}) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-k}) = \gamma_k h_{n-k}$$

Comme  $(xP_n, P_{n-k}) = (P_n, xP_{n-k})$  et que  $k \geq 2$  on a :

$$(XP'_n, P_{n-k}) = \gamma_k h_{n-k}.$$

Mais :

$$\begin{aligned}(XP'_n, P_{n-k}) &= \int_a^b XP'_n(x)P_{n-k}(x)w(x)dx = -\int_a^b P_n(x)(XP_{n-k}(x)w(x))'dx \\ &= -\{(P_n, X'P_{n-k}) + (P_n, XP'_{n-k}) + \int_a^b P_nXP_{n-k}w'(x)dx\}.\end{aligned}$$

On utilise maintenant la formule de Rodriguez pour  $n = 1$  ( $Xw' = K_1wP_1 - X'w$ ) :  
 $(XP'_n, P_{n-k}) = -K_1(P_n, P_{n-k}P_1) + (P_n, X'P_{n-k}) = 0$ , pour  $k \geq 2$ .

Finalement on a :

$$(XP'_n, P_{n-k}) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-k}) = \alpha_n P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x).$$

Pour déterminer  $\alpha_n$  on  $(\cdot, P_n)$  :

$$\alpha_n h_n = (XP'_n, P_n) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_n).$$

Posons  $X = ax^2 + bx + c$  alors :

$$\begin{aligned}(XP'_n, P_n) &= a(x^2P'_n, P_n) + b(xP'_n, P_n) + c(P'_n, P_n) \\ &= a(nk_n x^{n+1} + (n-1)q_{n,n-1}x^n, P_n) + bk_n n(x^n, P_n) \\ &= ank_n(x^{n+1}, P_n) + (a(n-1)q_{n,n-1} + bk_n n)(x^n, P_n).\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2}nX''(xP_n, P_n) = -\frac{1}{2}n2a(k_n x^{n+1} + q_{n,n-1}x^n, P_n).$$

Ainsi :

$$(XP'_n, P_n) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_n) = (-aq_{n,n-1} + bk_n n)(x^n, P_n)$$

comme  $(x^n, P_n) = \frac{1}{k_n}h_n$  on déduit que :

$$\alpha_n = -\frac{1}{2}X''\frac{q_{n,n-1}}{k_n} + X(0)n.$$

Pour trouver  $\beta_n$  on  $(\cdot, P_{n-1})$  :

$$\begin{aligned}\beta_n h_{n-1} &= (XP'_n, P_{n-1}) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-1}) \\ P_{n+1} &= (A_n x + B_n)P_n - C_n P_{n-1} \Rightarrow (P_{n+1}, P_{n-1}) = A_n(xP_n, P_{n-1}) + B_n(P_n, P_{n-1}) - \\ &C_n(P_{n-1}, P_{n-1})\end{aligned}$$

$$(xP_n, P_{n-1}) = \frac{C_n}{A_n}h_{n-1}$$

$$\begin{aligned}(XP'_n, P_{n-1}) &= \int_a^b Xw(x)P'_n(x)P_{n-1}(x)dx \\ &= -\int_a^b \frac{d}{dx}(Xw(w)P'_n(x))\wp_{n-1}(x)dx = \lambda_n \int_a^b P_n(x)w(x)\wp_{n-1}(x)dx \\ &= \lambda_n(P_n, \frac{k_{n-1}}{n}x^n) = \lambda_n \frac{k_{n-1}}{n}(P_n, x^n)\end{aligned}$$

Comme  $(xP_{n-1}, P_n) = k_{n-1}(x^n, P_n)$  on a  $(XP'_n, P_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{n}(xP_{n-1}, P_n)$ .

$$\beta_n h_{n-1} = \frac{\lambda_n}{n}(xP_{n-1}, P_n) - \frac{1}{2}nX''(xP_n, P_{n-1}) = \left(\frac{\lambda_n}{n} - \frac{1}{2}nX''\right)(xP_{n-1}, P_n) = \left(\frac{\lambda_n}{n} - \frac{1}{2}nX''\right)\frac{C_n}{A_n}h_{n-1}.$$

Donc :

$$\beta_n = \frac{C_n}{A_n}\left(\frac{\lambda_n}{n} - \frac{1}{2}nX''\right) = \frac{C_n}{A_n}\left(\frac{-n(k_1K_1 + \frac{1}{2}(n-1)X'')}{n} - \frac{1}{2}nX''\right).$$

Finalement :

$$\beta_n = -\frac{C_n}{A_n}\left(k_1K_1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)X''\right).$$

Ce qui termine la preuve avec

$$\begin{cases} \alpha_n &= -\frac{1}{2}X''\frac{q_{n,n-1}}{k_n} + X(0)n \\ \beta_n &= -\frac{C_n}{A_n}\left(k_1K_1 + \left(n - \frac{1}{2}\right)X''\right). \square \end{cases}$$

**Proposition 5.1.** *On a les égalités :*

$$1) h_n = (-1)^n k_n n! K_n^{-1} \int_a^b X^n w(x) dx$$

$$\begin{aligned} 2) \lambda_{\nu,n} &= A_{n-1} h_{n-1} \frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n [P_{n-1}(x_{\nu,n})]^2} \\ &= A_{n-1} h_{n-1} \frac{\beta_n}{X(x_{\nu,n}) [P'_n(x_{\nu,n})]^2} \end{aligned}$$

**Démonstration**

$$\begin{aligned} 1) (P_n, P_n) &= \int_a^b P_n(x) \frac{1}{K_n w(x)} \frac{d^n}{dx^n} w(x) dx \\ &= \frac{(-1)^n n! k_n}{K_n} \int_a^b X^n w(x) dx \text{ apr\`es } n \text{ int\`egrations par parties.} \end{aligned}$$

2) On a vu que :

$$\begin{aligned} a) \lambda_{\nu,n} &= -\frac{k_{n+1} h_n}{k_n} \frac{1}{P'_n(x_{\nu,n}) P_{n+1}(x_{\nu,n})} \\ b) XP'_n(x) &= \left(a_n + \frac{1}{2}nX''x\right)P_n(x) + \beta_n P_{n-1}(x) \\ c) P_{n+1}(x) &= (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Les deuxième et troisième expressions donnent pour  $x = x_{\nu,n}$  :

$$X(x_{\nu,n})P'_n(x_{\nu,n}) = \beta_n P_{n-1}(x_{\nu,n}) \text{ et } P_{n+1}(x_{\nu,n}) = -C_n P_{n-1}(x_{\nu,n})$$

On remplace ces valeurs dans l'expression de  $\lambda_{\nu,n}$  :

$$\begin{aligned} \lambda_{\nu,n} &= -\frac{k_{n+1} h_n}{k_n} \frac{X(x_{\nu,n})}{-\beta_n C_n [P_{n-1}(x_{\nu,n})]^2} \\ \text{mais } C_n &= \frac{k_{n+1} h_n}{k_n A_{n-1} h_{n-1}} \Rightarrow \lambda_{\nu,n} = A_{n-1} h_{n-1} \frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n C_n [P_{n-1}(x_{\nu,n})]^2} \\ \text{et } P_{n-1}(x_{\nu,n}) &= \frac{X(x_{\nu,n}) P'_n(x_{\nu,n})}{\beta_n} \\ \text{donc } \lambda_{\nu,n} &= A_{n-1} h_{n-1} \frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n \left[\frac{X(x_{\nu,n})}{\beta_n} P'_n(x_{\nu,n})\right]^2} = A_{n-1} h_{n-1} \frac{\beta_n}{X(x_{\nu,n}) [P'_n(x_{\nu,n})]^2}. \square \end{aligned}$$

## 5.4 Fonctions génératrices

### 5.4.1 Généralité

**Définition 5.1.** Etant donnée une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ , on appellera :

- fonction génératrice ordinaire de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  (fgo), la fonction :  $f(t) = \sum_{n \geq 0} u_n t^n$

- fonction génératrice exponentielle de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  (fge), la fonction :  $f(t) = \sum_{n \geq 0} u_n \frac{t^n}{n!}$ .

### Remarques

- Les séries qu'on rencontre dans cette définition sont des séries formelles (dans le sens qu'on ne cherche pas à savoir les valeurs de  $t$  pour lesquelles la série converge et encore moins en quel sens).

- On va noter par la suite :

$$f \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^{+\infty} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$$

$$f \stackrel{fge}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^{+\infty} \Leftrightarrow f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{t^n}{n!}.$$

**Proposition 5.2.** Propriétés des fgo :

Si  $f \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \{a_n\}_0^{+\infty}$  alors :

$$1) \{a_{n+h}\} \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \frac{f - a_0 - \dots - a_{h-1}x^{h-1}}{x^h}$$

$$2) \{P(n)a_n\} \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} P(xD)f \text{ o\`u } p(x) \text{ est un polyn\`ome}$$

$$3) fg \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \left\{ \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right\}_0^{+\infty} \text{ o\`u } g \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \{b_n\}_0^{+\infty}$$

$$4) fk \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \left\{ \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} a_{n_1} \cdot \dots \cdot a_{n_k} \right\}_0^{+\infty}$$

$$5) \frac{f}{1-x} \stackrel{fgo}{\leftrightarrow} \left\{ \sum_{j=1}^n a_j \right\}_0^{+\infty}.$$

### Démonstration

Ce n'est qu'une vérification.  $\square$

### Exemple

Calculons  $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 4n + 5}{n!}$ .

On reconnaît une fgo de terme général  $a_n = \frac{1}{n!}$  prise en  $x = 1$ , on applique 2) :

$$((xD)^2 + (xD) + 5)e^x = [(x^2 + x) + (xD) + 5]e^x = (x^2 + 5x + 5)e^x \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 4n + 5}{n!} = 11e.$$

**Proposition 5.3.** *Propriétés des fge :*

Si  $f \xleftrightarrow{fge} \{a_n\}_0^{+\infty}$  alors :

$$1) \{a_{n+h}\} \xleftrightarrow{fge} D^h f$$

$$2) \{P(n)a_n\} \xleftrightarrow{fge} P(xD)f \text{ o\i} p(x) \text{ est un polyn\o}me$$

$$3) fg \xleftrightarrow{fge} \left\{ \sum_{j=0}^n \binom{n}{k} a_j b_{n-j} \right\}_0^{+\infty} \text{ o\i } g \xleftrightarrow{fge} \{b_n\}_0^{+\infty}$$

$$4) f^k \xleftrightarrow{fge} \left\{ \sum_{n_1+\dots+n_k=n} a_{n_1} \dots a_{n_k} \right\}_0^{+\infty}.$$

**Remarque**

On peut \eatre surpris que ces deux propositions (5.2 et 5.3) donnent le m\eme r\esultat. La d\erivation met un n en facteur en diminuant de un le degr\e de  $x$  et en multipliant par  $x$  on augmente le degr\e de un donc en it\erant on obtient :

$$(xD)^p \left\{ \sum a_n x^n \right\} = \sum n^p a_n x^n$$

$$(xD)^p \left\{ \sum a_n \frac{x^n}{n!} \right\} = \sum n^p a_n \frac{x^n}{n!}.$$

**Exemple**

Nombres de Bell. Il v\erifient la formule de r\ecurrence :

$$b(n+1) = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} b(k) \text{ pour } n > 0 \text{ } b(0) = 1 \text{ on veut trouver la fge associ\ee, } B(x) =$$

$$\sum_{k \geq 0} \frac{b(k)x^k}{k!}.$$

$$\text{On a : } \bullet B'(x) = \sum_{n \geq 0} b(n+1) \frac{x^n}{n!}$$

$$\bullet B(x) \cdot \sum_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_k \right) \frac{x^n}{n!} = e^x B(x)$$

Ce qui nous donne :

$$B'(x) = e^x B(x) \Rightarrow B(x) = c \exp(e^x) \text{ mais } B(0) = 1 \Rightarrow c = e^{-1}, \text{ finalement :}$$

$$B(x) = \exp(e^x - 1).$$

Le nombre de Bell  $b(n)$  est le nombre de partitions d'un ensemble, S, \a n \e9l\ements (une partition \eetant un recouvrement disjoint de S par des sous-ensembles de S).

## Remarque

Il existe de nombreuses autres fonctions génératrices, elles sont toutes de la forme :  $\sum_{n \geq 0} \frac{f(n)x^n}{B(n)}$  où  $B(n)$  est un certain nombre complexe, notamment :

- F.G. Eulériennes :  $B(n) = (1 - q) \cdot (1 + q + q^2) \cdot \dots \cdot (1 + q + q \dots + q^{n-1})$  où  $q$  est un entier naturel donné.
- F.G. exponentielles multiples :  $B(n) = (n!)^r, r > 1.$

### 5.4.2 Cas des polynômes de Hermite

En partant de la formule de récurrence des polynômes de hermite ( $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x), H_{-1} \equiv 0, H_0 = 0$ ), on veut retrouver la formule de Rodriguez et une formulation explicite par la méthode des fonctions génératrices.

On multiplie chacun des membres de l'égalité par  $\frac{t^n}{n!}$ , on  $\sum_{n \geq 0}$  et en notant  $F(x; t)$  la fge des polynômes de Hermite on a :

$$\frac{d}{dt}F(x, t) = (x - t)F(x, t) \Rightarrow F(x, t) = K_x e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}, F(x, 0) = 1 \Rightarrow K_x = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Finalement :

$$F(x, t) = e^{-\frac{t^2}{2} + xt}$$

En développant la fonction  $e^{\frac{(x-t)^2}{2}}$  en série entière on a :

$$F(x, t) = e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \left[ \frac{d^n}{dx^n} (e^{\frac{(x-t)^2}{2}}) \right]_{t=0} = e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{\frac{x^2}{2}})$$

Ce qui nous donne la formule de Rodriguez qu'on attendait :

$$H_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{\frac{x^2}{2}})$$

Passons à la recherche d'une formulation explicite :

$$\begin{aligned} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{xt} &= \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \frac{(-t^2)^j (xt)^k}{2^j j! k!} = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^j x^k t^{2j+k}}{2^j j! k!} = \sum_{n \geq 0} \sum_{2j+k=n} \frac{(-1)^j x^k t^n}{2^j j! k!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j x^{n-2j}}{2^j j! (n-2j)!} \right) t^n \end{aligned}$$

Finalement :

$$H_n(x) = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j x^{n-2j}}{2^j j! (n-2j)!}.$$

### 5.4.3 Recherche d'une formule de récurrence

Dans ce qu'on a fait jusqu'à présent on connaissait la formule de récurrence de nos suites, on va voir comment, à partir de la fonction génératrice on peut déterminer la formule de récurrence. Pour ce faire nous allons introduire une opération standard (dans ce genre de recherche!) :



l'opération  $x\left(\frac{d}{dx}\right)\log$

- 1) prendre le logarithme des 2 côtés de l'équation,
- 2) différentier les deux membres et multiplier par  $x$ ,
- 3) arranger les fractions des 2 membres,
- 4) pour chaque  $n$ , trouver le coefficient de  $x^n$  des deux membres de l'équation et les équaler.

### Exemple

On a trouvé la fonction génératrice,  $\exp(e^x - 1)$ , des nombres de Bell, retrouvons leur formule de récurrence. Pour cela on va utiliser la méthode du  $x\left(\frac{d}{dx}\right)\log$  :

$$1) \log\left\{\sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n\right\} = e^x - 1$$

$$2) x \frac{\sum_{n \geq 0} \frac{nb(n)}{n!} x^{n-1}}{\sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n} = xe^x$$

$$3) \sum_{n \geq 0} \frac{nb(n)}{n!} x^{n-1} = xe^x \sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n$$

On regarde les coefficients de  $x^n$  des 2 membres :

$$\text{à droite : } \sum_{m \geq 0} \frac{x^{m+1}}{m!} \sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n = x \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b(k) \frac{x^n}{n!}$$

$$[x^n] \left\{ xe^x \sum_{n \geq 0} \frac{b(n)}{n!} x^n \right\} = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b(k).$$

$$\text{A gauche : } [x^n] \left\{ \sum_{n \geq 0} \frac{nb(n)}{n!} x^n \right\} = \frac{b(n)}{(n-1)!}.$$

Finalement on a :

$$b(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} b(k), \quad n \geq 1, \quad b(0) = 1.$$

## 6 Table de polynômes

POLYNOMES DE HERMITE, $H_n(x)$
--------------------------------

Intervalle d'étude :

$$(-\infty, +\infty).$$

Standardisation :

$$[x^n]H_n(x) = 2^n.$$

Fonction poids :

$$w(x) = e^{-x^2}.$$

Norme :

$$h_n = \sqrt{\pi} 2^n n!.$$

Formulation explicite :

$$H_n(x) = n! \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(2x)^{n-2m}}{m!(n-2m)!}.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \\ H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \quad y = H_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \{e^{-x^2}\}.$$

Fonction génératrice :

$$e^{2xz - z^2} = \sum_{n \geq 0} H_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Inégalités :

$$|H_{2m}(x)| \leq e^{x^2/2} 2^{2m} m! \left[ 2 - \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} \right],$$
$$|H_{2m+1}(x)| \leq |x| e^{x^2/2} \frac{(2m+2)!}{(m+1)!}.$$

POLYNOMES DE LAGUERRE GENERALISES,  $L_n^\alpha(x)$

Intervalle d'étude :

$$[0, +\infty).$$

Standardisation :

$$[x^n]L_n^\alpha(x) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Fonction poids :

$$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \alpha > -1.$$

Norme :

$$h_n = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}.$$

Formulation explicite :

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \binom{n + \alpha}{n - m} \frac{1}{m!} x^m.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} (n + 1)L_{n+1}^\alpha(x) &= [(2n + \alpha + 1) - x]L_n^\alpha(x) - (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x) \\ L_0^\alpha(x) &= 1 \\ L_1^\alpha(x) &= 1 + \alpha - x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0, y = L_n^\alpha(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$L_n^\alpha(x) = \frac{1}{n! x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n} \{x^{n+\alpha} e^{-x}\}.$$

Fonction génératrice :

$$(1 - z)^{-\alpha-1} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right) = \sum_{n \geq 0} L_n^\alpha(x) z^n, |z| < 1.$$

Inégalités :

$$|L_n^\alpha(x)| \leq \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)} e^{x/2}, x \geq 0, \alpha \geq 0,$$

$$|L_n^\alpha(x)| \leq \left(2 - \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}\right) e^{x/2}, x \geq 0, -1 < \alpha < 0.$$

POLYNOMES DE JACOBI,  $P_n^{\alpha, \beta}(x)$

Intervalle d'étude :

$$]-1, +1[.$$

Standardisation :

$$P_n^{\alpha, \beta}(1) = \frac{(n + \alpha) \cdot (n - 1 + \alpha) \cdot \dots \cdot (\alpha + 1)}{n!} \equiv \binom{n + \alpha}{n}.$$

Fonction poids :

$$w(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta, \quad \alpha, \beta > -1.$$

Norme :

$$h_n = \frac{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1) n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}.$$

Formulation explicite :

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^n \binom{n + \alpha}{m} \binom{n + \beta}{n - m} (x - 1)^{n - m} (x + 1)^m.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} 2(n + 1)(n + \alpha + \beta + 1)(2n + \alpha + \beta)P_{n+1}^{\alpha, \beta}(x) \\ = (2n + \alpha + \beta + 1)[(\alpha^2 - \beta^2) + (2n + \alpha + \beta + 2)(2n + \alpha + \beta)x]P_n^{\alpha, \beta}(x) \\ - 2(n + \alpha)(n + \beta)(2n + \alpha + \beta + 2)P_{n-1}^{\alpha, \beta}(x) \\ P_0^{\alpha, \beta}(x) = 1 \\ P_1^{\alpha, \beta}(x) = (1 + \frac{1}{2}(\alpha + \beta))x + \frac{1}{2}(\alpha - \beta). \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y' + n(n + \alpha + \beta + 1)y = 0, \quad y = P_n^{\alpha, \beta}(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$P_n^{\alpha, \beta}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} \{(1 - x)^{n + \alpha} (1 + x)^{n + \beta}\}.$$

Fonction génératrice :

$$R^{-1}(1 - z + R)^{-\alpha} (1 + z + R)^{-\beta} = \sum_{n \geq 0} 2^{-\alpha - \beta} P_n^{\alpha, \beta}(x) z^n,$$

$$R = (1 - 2xz + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad |z| < 1.$$

Inégalités :

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P_n^{\alpha, \beta}(x)| = \begin{cases} \binom{n+q}{n} \sim n^q & \text{si } q = \max(\alpha, \beta) \geq -\frac{1}{2} \\ |P_n^{\alpha, \beta}(x')| \sim n^{-\frac{1}{2}} & \text{si } q < -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

Où  $x'$  est l'un des deux plus grands points les plus proches de  $\frac{\beta - \alpha}{\alpha + \beta + 1}$ .

POLYNOMES DE TCHEBYCHEF DE PREMIERE ESPECE,  $T_n(x)$

Intervalle d'étude :

$$]-1, +1[.$$

Standardisation :

$$T_n(1) = 1.$$

Fonction poids :

$$w(x) = (1 - X^2)^{\frac{-1}{2}}.$$

Norme :

$$h_n = \begin{cases} \pi/2 & n \neq 0 \\ \pi & n = 0. \end{cases}$$

Formulation explicite :

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{[n/2]} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} = \cos(n \operatorname{Arccos} x)$$

$$x^{2m} = 2^{1-2m} \sum_{j=0}^m \binom{2m}{m-j} T_{2j}(x) - 2^{-2m} \binom{2m}{m}$$

$$x^{2m+1} = 2^{-2m} \sum_{j=0}^m \binom{2m+1}{m-j} T_{2j+1}(x)$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} T_{n+1} &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \\ T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0, \quad y = T_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n (1-x^2)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \Gamma(n + \frac{1}{2})} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\}.$$

Fonction génératrice :

$$\frac{1-xz}{1-2xz+z^2} = \sum_{n \geq 0} T_n(x) z^n, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad |z| < 1.$$

Inégalités :

$$|T_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

POLYNOMES DE TCHEBYCHEF DE SECOND ESPECE, $U_n(x)$
--

Intervalle d'étude :

$$[-1, +1].$$

Standardisation :

$$U_n(1) = n + 1.$$

Fonction poids :

$$w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Norme :

$$h_n = \frac{\pi}{2}.$$

Formulation explicite :

$$U_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(m-n)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1},$$

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x) \\ U_0(x) &= 1 \\ U_1(x) &= 2x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1 - x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0, \quad y = U_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1) \sqrt{\pi}}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} 2^{n+1} \Gamma(n + \frac{3}{2})} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}\}.$$

Fonction génératrice :

$$\frac{1}{1 - 2xz + z^2} = \sum_{n \geq 0} U_n(x) z^n, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad |z| < 1.$$

Inégalités :

$$|U_n(x)| \leq n + 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

POLYNOMES DE LEGENDRE,  $P_n(x)$

Intervalle d'étude :

$$[-1, +1].$$

Standardisation :

$$P_n(1) = 1.$$

Fonction poids :

$$w(x) = 1.$$

Norme :

$$h_n = \frac{2}{2n+1}.$$

Formulation explicite :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}.$$

Formule de récurrence :

$$\begin{cases} (n+1)P_{n+1}(x) &= (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x) \\ P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x. \end{cases}$$

Equation différentielle :

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \quad y = P_n(x).$$

Formule de Rodriguez :

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(1-x^2)^n\}.$$

Fonction génératrice :

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n \geq 0} P_n(x)z^n, \quad -1 \leq x \leq +1, \quad |z| < 1.$$

Inégalité :

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad -1 \leq x \leq 1.$$



## BIBLIOGRAPHIE

- **SZEGO** : orthogonal polynomials.
- **CHENEY** : introduction to approximation theory.
- **BATEMAN** : higher transcendental functions (vol. 2).
- **HILDEBRANT** : introduction to numerical analysis.
- **DAVIS&ROBINOWITZ** : methods of numerical integration.
- **RICHARD&STANLEY** : enumerative combinatoire (vol. 1).
- **WILF** : generating functionology .
- **BOCCARA** : analyse fonctionnelle .