HAL open science

Méthodes numériques en fluides complexes : théorie et algorithmes

Pierre Saramito

To cite this version:

Pierre Saramito. Méthodes numériques en fluides complexes : théorie et algorithmes. DEA. Méthodes numériques en fluides complexes, Grenoble, 2013, pp.126. cel-00673816v4

HAL Id: cel-00673816

https://cel.hal.science/cel-00673816v4

Submitted on 16 Dec 2013

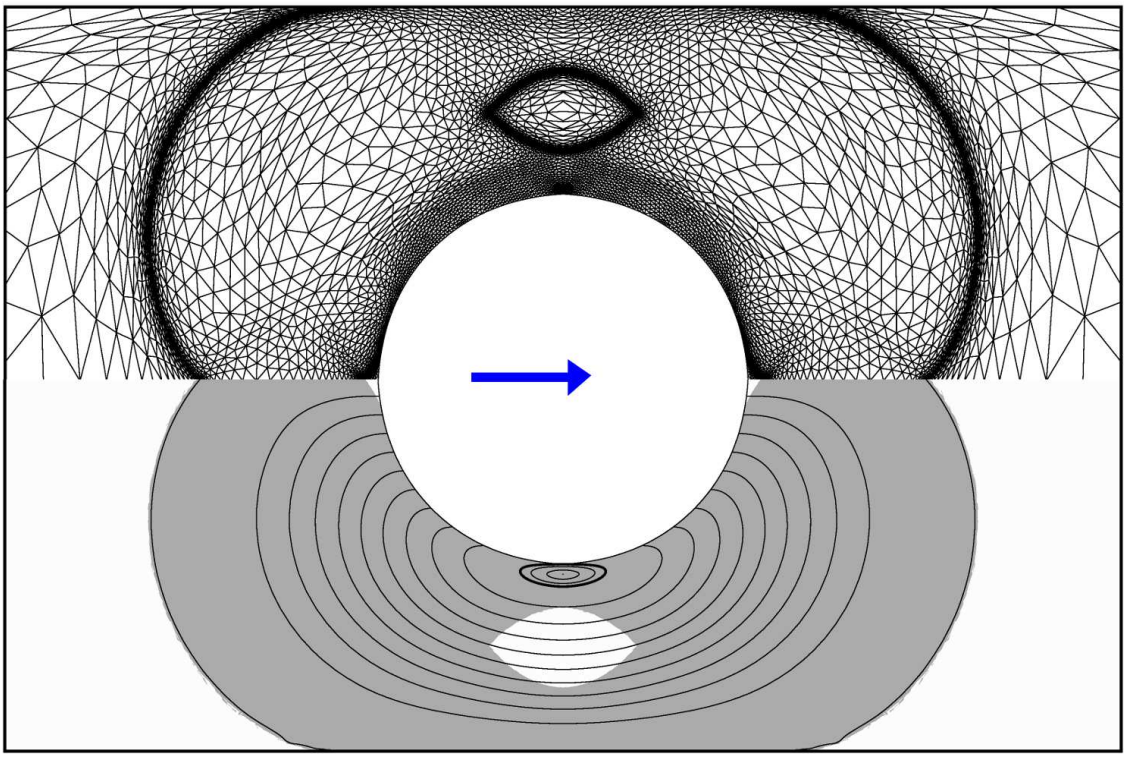
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes numériques en fluides complexes : théorie et algorithmes

Pierre.Saramito@imag.fr

16 décembre 2013



Copyright (c) 2012-2013 Pierre Saramito

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

Introduction

Les fluides complexes regroupent tous les fluides dont le comportement diffère de celui de l'eau ou l'air : ils ne peuvent pas tre décrits par les équations de Navier-Stokes, et sont alors dit non-newtoniens. La plupart des fluides quotidien, tels que les matières plastiques lors de la mise en forme, les fluides géophysiques comme la lave, les sols et roches grande échelle, ou encore le sang et les tissus biologiques sont des fluides complexes, non-newtoniens. Les applications sont aussi variés que la mise en forme des matières plastiques (extrusion, emboutissage, moulage), la prvision des risques naturels (coules de lave, avalanches, glissement de terrain, tectonique des plaques) ou la mise au point de pontages (coulement du sang en biologie).

Ce texte traite l'analyse mathématique et numérique des équations décrivant de tels fluides. Les méthodes numériques étudiées ont pour but de calculer les vitesses, pressions et les contraintes pour de tels fluides et pour des géométries suffisamment générales pour qu'un calcul explicite ne soit plus possible. De nombreux exemples illustrent le livre. Ce document est issu des notes du cours de deuxième année de matrise de mathématiques appliquées de Grenoble en 2012.

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes est donc abordée au chapitre 1 et constitue le fondement sur lequel sont construit les modèles plus élaborés. Un schéma de discrétisation par la méthode des caractéristiques est présenté, puis deux méthodes de résolution des systèmes linéaire : une méthode directe et une méthode itérative. Le chapitre 2 présente les modèles quasi-newtoniens, décrits par une viscosité non-constante et qui dépend du gradient des vitesses. Les algorithmes du point fixe et de la méthode de Newton sont détaillés pour résoudre les non-linéarités. Le chapitre 3 présente les fluides viscoplastiques et aborde les deux grandes classes de méthodes numériques associés : la régularisation et la minimisation par lagrangien augmenté. Cette dernière approche passe par l'utilisations d'outils d'analyse convexe. Le chapitre 4 introduit les fluides viscoélastiques avec la dérivation d'Oldroyd des tenseurs. La décomposition d'opérateurs permet d'écrire un algorithme en temps d'ordre 2, le θ-schéma. Le chapitre 5 combine les non-linéarités des chapitres précédents dans le cadre des fluides élastoviscoplastiques : de tels modèles sont obtenus dans le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés.

Table des matières

1 Équations de Navier-Stokes **9**

1.1 Conservation de la masse 9

1.2 Conservation de la quantité de mouvement 10

1.3 Loi de comportement 12

1.4 Hypothèse d'incompressibilité 13

1.5 Problème aux limites 13

1.6 Approximation en temps 14

1.7 Problème de Stokes 16

1.8 Approximation en espace du problème de Stokes 19

1.9 Résolution du problème de Stokes discret 22

1.10 Problème de Stokes : méthode itérative 25

1.11 Exemple : écoulement dans une cavité 29

2 Fluides quasi-newtoniens **33**

2.1 Loi de comportement 33

2.2 Problème aux limites 34

2.3 Exemple 1 : écoulement de Poiseuille 35

2.4 Formulation variationnelle 36

2.5 Exemple 2 : écoulement dans un tuyau 39

2.6 Algorithme du point fixe 40

2.7 Algorithme de Newton 41

3 Fluides viscoplastiques 47

3.1 Loi de comportement 47

3.2 Exemple 1 : écoulement de Poiseuille 51

3.3 Formulation variationnelle 53

3.4 Régularisation : un problème modifié 54

3.5 Algorithme du lagrangien augmenté 57

3.6 Approximation en espace 61

3.7 Exemple 2 : écoulement dans un tuyau 64

3.8 Exemple 3 : écoulement autour d'un obstacle 71

4 Fluides viscoélastiques 75

4.1 Principe de la loi de comportement 75

4.2 Invariance par changement de repère 76

4.3 Dérivation objective d'un tenseur 78

4.4 Le modèle d'Oldroyd 79

4.5 Exemple 1 : écoulement de Poiseuille 80

4.6 Algorithme du θ-schéma 87

4.7 Approximation en espace 90

4.8 Transport des contraintes 90

4.9 Formulation variationnelle du transport 93

4.10 Discrétisation : la difficulté 94

4.11 Discrétisation : décentrage par discontinuité 98

4.12 Exemple 2 : écoulement dans une contraction 99

5 Fluides élastoviscoplastiques 103

5.1 Principes de la thermodynamique 103

5.2 Loi de comportement 104

5.3 Application des outils thermodynamiques 106

5.4 Algorithme du θ-schéma 111

GNU Free Documentation License 117

Chapitre 1

Équations de Navier-Stokes

1.1 Conservation de la masse

Introduisons les notations suivantes :

$\rho(t, \mathbf{x})$	la **densité** au point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et à l'instant t.
$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_i(t, \mathbf{x}))_{1 \leq i \leq 3}$	la **vitesse** au point $\mathbf{x}$ et à l'instant t.

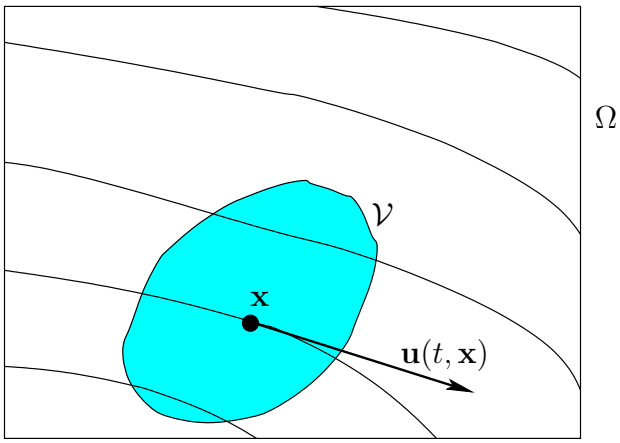


FIGURE 1.1 – Écoulement dans un domaine Ω.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le domaine ouvert borné occupé par le fluide et $\mathcal{V} \subset \Omega$ un sous-domaine ouvert régulier quelconque, comme représenté sur la figure 1.1. La conservation de la masse dans le volume $\mathcal{V}$ exprime que la variation de la masse totale de fluide contenu dans $\mathcal{V}$ à l'instant t est égale au flux de masse entrant à travers $\partial\mathcal{V}$:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{x})\, \mathrm{d}x\right) = -\int_{\partial\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{x})\, \mathbf{u}(t, \mathbf{x}).\mathbf{n}(\mathbf{x})\, \mathrm{d}s$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire sortante à $\mathcal{V}$ sur $\partial\mathcal{V}$. Rappelons la formule de Stokes :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{v}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}x,\ \forall\mathbf{v}\in(H^1(\mathcal{V}))^3 \tag{1.1}$$

et appliquons cette formule au membre de droite de l'équation de conservation de la masse, avec $\mathbf{v}=\rho(t,.)\mathbf{u}(t,.)$. Après permutation de la dérivation en temps et de la somme sur $\mathcal{V}$ dans le membre de gauche, il vient :

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u})\right)\mathrm{d}x = 0$$

Cette relation étant vraie pour tout voisinage $\mathcal{V}$ d'un point quelconque $\mathbf{x}$ de l'ouvert Ω, et à tout instant t d'un intervalle de temps $]0,T[$, nous obtenons une expression locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega \tag{1.2}$$

1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Cette relation s'énonce de façon générale :

$$\text{masse} \times \text{accélération} = \text{forces exercées}$$

ceci dans tout volume $\mathcal{V}\subset\Omega$ de fluide. Considérons une particule en $\mathbf{x}$ à l'instant t : cette particule sera en $\mathbf{x}+\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\delta t+\mathcal{O}(\delta t^2)$ à l'instant $t+\delta t$. Ainsi, son accélération est donnée par :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(t,\mathbf{x}) &= \lim_{\delta t\to 0}\frac{\mathbf{u}\left(t+\delta t,\ \mathbf{x}+\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\delta t+\mathcal{O}(\delta t^2)\right)-\mathbf{u}(t,\mathbf{x})}{\delta t}\\ &= \left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right)(t,\mathbf{x})\end{aligned}$$

où $\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}$ est la notation d'un vecteur de composantes

$$(\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^{3} u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j},\quad 1\le i\le 3$$

Les forces exercées sur le volume $\mathcal{V}$ sont de deux sorte :
i) Les forces externes, dues à la gravité :

$$\int_{\mathcal{V}} \rho(t,\mathbf{x})\,\mathbf{g}\,\mathrm{d}x$$

où $\mathbf{g}$ est le vecteur **gravité**, supposé constant. Nous négligerons ici les autres forces, telles que la force de Coriolis ou les forces dues aux effets magnétiques.

ii) Les forces internes, dues aux déformations du fluide :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \sigma_{\text{tot}}(t,\mathbf{x})\,\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x$$

où $\sigma_{\text{tot}}(t,\mathbf{x})$ est le tenseur symétrique des **contraintes totales**.
La notation $\sigma_{\text{tot}}\,\mathbf{n}$ représente un champs de vecteur issu du produit tenseur-vecteur, de composantes :

$$(\sigma_{\text{tot}}\,\mathbf{n})_i = \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}\,n_j, \quad 1 \leq i \leq 3$$

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\int_{\mathcal{V}} \rho(t,\mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right)(t,\mathbf{x}), \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{V}} \rho(t,\mathbf{x})\,\mathbf{g}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\mathcal{V}} \sigma_{\text{tot}}(t,\mathbf{x})\,\mathbf{n}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}s$$

Introduisons la divergence d'un tenseur τ :

$$\mathbf{div}\,\tau = \left(\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}\right)_{1\leq i\leq 3}$$

Ainsi, $\mathbf{div}\,\tau$ est un champs de vecteur, à trois composantes. Afin d'éviter toute ambiguïté avec la divergence d'un champs de vecteur $\operatorname{div}\mathbf{v}$, l'opérateur divergence de tenseur est noté en caractères gras.

En appliquant la formule de Stokes suivante :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \tau\,\mathbf{n}\,\mathrm{d}s = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{div}\,\tau\,\mathrm{d}x, \ \forall \tau \in (H^1(\mathcal{V}))^{3\times 3}$$

au tenseur $\sigma_{\text{tot}}(t,.)$, la conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) - \mathbf{div}\,\sigma_{\text{tot}} - \rho\mathbf{g}\right)\mathrm{d}x = 0$$

Cette relation étant vrai pour tout voisinage $\mathcal{V}$ d'un point quelconque $\mathbf{x}$ de l'ouvert Ω, et à tout instant t, nous obtenons une expression locale de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) - \mathbf{div}\,\sigma_{\text{tot}} = \rho\mathbf{g} \quad \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega \tag{1.3}$$

Les deux équations de conservation (1.2) et (1.3) contiennent trois inconnues : $\mathbf{u}$, σ_{tot} et ρ. Avant de chercher à résoudre ce problème, il s'agit de compléter ce système en ajoutant une équation liant $\mathbf{u}$ et σ_{tot}.

1.3 Loi de comportement

Commençons par introduire quelques définitions. Tout d'abord, définissons la **trace** d'un tenseur τ :

$$\mathrm{tr}(\tau) = \sum_{i=1}^{3} \tau_{ii}$$

Un tenseur τ peut être décomposé en la somme de $\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\tau)\, I$, appelé **partie sphérique**, et de $\tau - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\tau)\, I$, sa **partie déviatrice**, où $I = (\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$ est le tenseur identité et δ_{ij} représentant le symbole de Kronecker.

La partie sphérique du tenseur des contraintes totales permet d'introduire le champs de **pression** :

$$p = -\frac{1}{3}\mathrm{tr}(\sigma_{\mathrm{tot}})$$

La partie déviatrice du tenseur des contraintes totales est notée σ, si bien que :

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = -p\, I + \sigma \tag{1.4}$$

La loi de comportement exprime une relation entre la partie déviatrice du tenseur des contraintes totales et le tenseur des gradients de vitesse $\nabla \mathbf{u}$:

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Dans le cas le plus simple d'un **fluide newtonien**, la loi de comportement est linéaire :

$$\sigma = 2\eta D(\mathbf{u}) - \frac{2\eta}{3}\mathrm{div}(\mathbf{u})\, I \tag{1.5}$$

où η est une constante positive appelée **viscosité** et $D(\mathbf{u})$ est la partie symétrique du tenseur de gradient des vitesses :

$$D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$$

Le tenseur $D(\mathbf{u})$ est aussi appelé tenseur des **taux de déformation**. Remarquons que $\mathrm{tr}(D(\mathbf{u})) = \mathrm{div}\, \mathbf{u}$, si bien que l'expression du membre de droite de (1.5) est bien à trace nulle. L'eau et l'air sont des fluides newtoniens et vérifient la relation (1.5). Un certain nombre de fluides ne vérifient pas cette loi de comportement, et sont appelés fluides non-newtoniens ; citons notamment :

- les pâtes alimentaires (pâte à pain, ...), les argiles et terres
- les fluides présentant des fibres, tels que les plastiques fondus (moulage, injection, emboutissage) ou en solution (encres)
- les mélanges de fluide et de particules, tels que le sang, les suspensions de sable dans l'eau ;

- les mélanges deux fluides : mousses (air+eau) et émulsions (eau+huile, mayonnaises, etc)

La loi entre σ et $\nabla\mathbf{u}$ est alors non-linéaire. L'étude de diverses types de lois non-linéaires sera l'objet du reste du cours.

1.4 Hypothèse d'incompressibilité

Refaisons le point sur les équations et les inconnues : quatre équations (1.2)-(1.5) pour cinq inconnues : σ_{tot}, σ, $\mathbf{u}$, p et ρ. Nous avons ajouté deux relations et deux inconnues !

Une façon classique de résoudre cette difficulté est de se donner une seconde loi de comportement, liant cette fois la pression p et la densité ρ [Pir88, p. 163]. Ceci est classique par exemple pour les gaz, comme l'air, qui sont compressibles, et cet aspect a de nombreuses applications : portance des ailes d'avions, optimisation de la forme des voitures pour diminuer leur consommation, etc.

Pour les liquides tels que l'eau ou les fluides complexes que nous étudierons dans ce cours, la variation de la densité ρ est extrêmement faible, et dans la suite, nous allons supposer la densité ρ constante. Cette hypothèse se justifie également pour des gaz tels que l'air, à faible vitesse. La conservation de la masse (1.2) conduit alors à la **relation d'incompressibilité** :

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \quad \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega \tag{1.6}$$

et la loi de comportement (1.5) devient :

$$\sigma = 2\eta D(\mathbf{u})$$

En utilisant la décomposition (1.4) du tenseur des contraintes totales, la conservation de la quantité de mouvement (1.3) devient alors :

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) - \mathbf{div}(2\eta D(\mathbf{u})) + \nabla p = \rho\mathbf{g} \quad \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega \tag{1.7}$$

Les équations (1.6)-(1.7) sont appelées équations de Navier-Stokes. Remarquons encore l'identité $\mathbf{div}(2D(\mathbf{u})) = \Delta\mathbf{u} + \nabla(\operatorname{div}\mathbf{u})$. La première équation (1.7) relation s'écrit encore :

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) - \eta\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \rho\mathbf{g} \quad \text{dans} \quad]0,T[\times\Omega$$

1.5 Problème aux limites

Le problème est complété par une condition initiale :

$$\mathbf{u}(t=0,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{pour presque tout } \mathbf{x}\in\Omega$$

et par une condition aux limites :

$$\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x}) \ \text{ pour presque tout } \mathbf{x} \in \partial\Omega,\ t \in]0,T[$$

où $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_\Gamma$ sont donnés.

Pour que $\operatorname{div}\mathbf{u}(t)$ soit continu en $t = 0$, ce qui est souhaitable, il est nécessaire que la donnée initiale $\mathbf{u}_0$ soit à divergence nulle. D'autre part, la formule de Stokes s'écrit :

$$\int_\Omega \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

Pour que le problème admette une solution, il est nécessaire que la donnée au bord $\mathbf{u}_\Gamma$ vérifie :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_\Gamma.\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

Le problème de Navier-Stokes s'énonce alors :

(NS) : *trouver* $\mathbf{u}$ *et* p *tels que*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \rho\left(\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) & - & \mathbf{div}\,(2\eta D(\mathbf{u})) & + & \nabla p & = & \rho\mathbf{g} \ \text{ dans } \ ]0,T[\times\Omega \\ & - & \operatorname{div}\mathbf{u} & & & = & 0 \ \text{ dans } \ ]0,T[\times\Omega \\ & & & & \mathbf{u}(0) & = & \mathbf{u}_0 \ \text{ dans } \ \Omega \\ & & & & \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma \ \text{ sur } \ ]0,T[\times\partial\Omega \end{array}\right.$$

Pour des résultats d'existence et d'unicité, on pourra consulter [Lio69] ou [Pir88], page 132 ou encore [Tem95], page 22.

1.6 Approximation en temps

L'intervalle $[0,T]$ est partitionné en N sous-intervalles $[t_n, t_{n+1}]$, où $t_n = n\Delta t$, $0 \le n \le N$ et $\Delta t = T/N$ est le pas de temps.

Introduisons la **dérivée totale** d'une quantité φ :

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\varphi$$

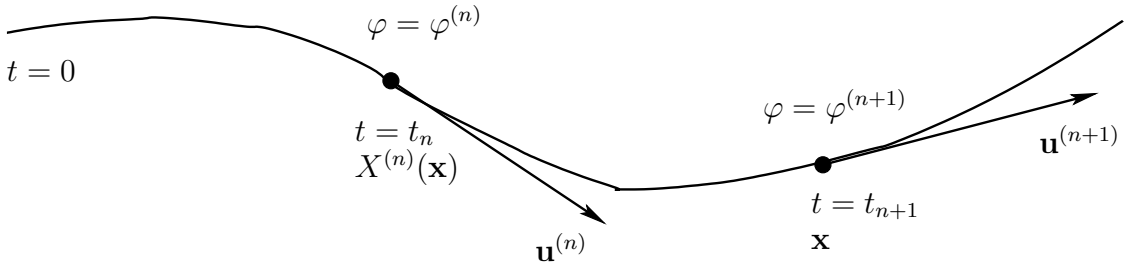


FIGURE 1.2 – Approximation de la dérivée totale.

Notons $X^{(n)}(\mathbf{x})$ la position de la particule au temps t_n qui est à la position $\mathbf{x}$ au temps t_{n+1}. Cette situation est représentée sur la figure 1.2. La dérivée totale de φ à l'instant t_{n+1} est approchée suivant l'expression de type différences finies :

$$\frac{D\varphi}{Dt}(t_{n+1}, \mathbf{x}) = \frac{\varphi(t_{n+1}, \mathbf{x}) - \varphi(t_n, X^{(n)}(\mathbf{x}))}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Remarquons que la dérivée totale du champs des vitesses

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}.\nabla)\mathbf{u}$$

apparaît dans les équations de Navier-Stokes. Il est donc possible d'approcher ce terme par

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt}(t_{n+1}, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \mathbf{u}(X^{(n)}(\mathbf{x}), t_n)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Utilisons un schéma d'Euler implicite d'ordre un pour approcher en temps le problème :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\frac{\mathcal{Y}^{(n+1)} - \mathcal{Y}^{(n)} \circ X^{(n)}}{\Delta t} + \mathcal{F}(\mathcal{Y}^{(n+1)}) &= 0 \\ \mathcal{Y}^{(0)} &= \mathcal{Y}_0 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \\ \mathcal{M} &= \mathrm{diag}(\rho,\, 0) \\ \mathcal{F}(\mathcal{Y}) &= \begin{pmatrix} -\mathbf{div}(2\eta D(\mathbf{u})) + \nabla p \\ -\mathrm{div}\,\mathbf{u} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons construite par récurrence une suite $(\mathbf{u}^{(n)})_{0 \le n \le N}$, où $\mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$ est une approximation de la vitesse :

ALGORITHME **1.6.1** *(*schéma d'Euler implicite*)*

- $n = 0$ *:* $\mathbf{u}^{(0)} := \mathbf{u}_0$ *est donné.*
- $n \geq 0$ *:* $\mathbf{u}^{(n)}$ *étant connu, trouver* $\mathbf{u}^{(n+1)}$ *et* $p^{(n+1)}$ *tels que*

$$\begin{array}{rcrcrcll} \dfrac{\rho}{\Delta t}\mathbf{u}^{(n+1)} & - & \mathbf{div}(2\eta D(\mathbf{u}^{(n+1)})) & + & \nabla p^{(n+1)} & = & \rho\mathbf{g} + \dfrac{\rho}{\Delta t}\mathbf{u}^{(n)} \circ X^{(n)} & \text{dans } \Omega \\ & - & \operatorname{div} \mathbf{u}^{(n+1)} & & & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ & & & & \mathbf{u}^{(n+1)} & = & \mathbf{u}_\Gamma(t_{n+1}) & \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

Dans [S88̈] on trouve l'analyse numérique de ce schéma lorsque la trajectoire $X^{(n)}$ est calculée exactement. cependant, dans la pratique, le calcul exact de $X^{(n)}$ n'est pas possible. Remarquons que $X^{(n)}(x) = \mathbf{x} - \Delta t\ \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}) + \mathcal{O}(\Delta t^2)$, Puisque $\mathbf{u}^{(n)}$ est connu à l'étape n, l'approximation au premier ordre $X^{(n)}(x) \approx \mathbf{x} - \Delta t\ \mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x})$ peut tre utilisée pour évaluer le terme $\mathbf{u}^{(n)} \circ X^{(n)}$ intervenant dans le second membre. Dans RHEOLEF [Sar11], chapitre 5, on trouvera une extension de cette méthode avec un schéma d'ordre deux en temps, tant pour approcher la dérivée totale que pour approcher $X^{(n)}(x)$.

1.7 Problème de Stokes

À chaque étape de l'algorithme précédent, nous avons à résoudre un système linéaire de type Stokes, de la forme :

(S) : *trouver* $\mathbf{u}$ *et* p *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{rcrcll} \alpha\mathbf{u} - \mathbf{div}(2\eta D(\mathbf{u})) & + & \nabla p & = & \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ - \operatorname{div} \mathbf{u} & & & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ & & \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.8}$$

où α et η sont des constantes positives, et $\mathbf{f}$ et $\mathbf{u}_\Gamma$ sont donnés. Remarquons tout de suite que si $(\mathbf{u}, p)$ est solution, alors $(\mathbf{u}, p + c)$ est aussi solution, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$. Ceci est du au fait que p n'apparaît que dans un seul terme, sous un gradient. Il n'y a donc pas unicité de la solution pour la pression p.

Un préalable obligé à l'approximation du problème par élémens finis est d'écrire la formulation variationnelle du problème. En multipliant la première équation de (1.8) par une fonction test $\mathbf{v}$ quelconque, puis en intégrant sur Ω, il vient :

$$\int_\Omega \alpha\mathbf{u}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{div}(2\eta D(\mathbf{u})).\mathbf{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla p.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x \tag{1.9}$$

Nous allons retravailler les deuxième et troisième termes du membre de gauche de cette égalité. Commençons par le troisième : de la formule de Stokes (1.1), en remplacant $\mathbf{v}$ par $q\mathbf{v}$, pour toutes fonctions-test $\mathbf{v}$ et q, puis en développant, nous obtenons la formule d'intégration par partie pour la divergence suivante :

$$\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{v}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla q.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} q\,\mathbf{v}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}s,\ \forall q,\ \forall \mathbf{v} \tag{1.10}$$

En particulier, avec $q = p$, il vient :

$$\int_\Omega \nabla p.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} p\,\mathbf{v}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}s \tag{1.11}$$

En remplacant dans (1.10) q par la i-éme composante v_i de $\mathbf{v}$, et $\mathbf{v}$ par le i-éme vecteur ligne $\tau_{i.}$ d'un tenseur symmétrique τ, nous obtenons, après sommation :

$$\int_\Omega \mathbf{v}.\mathbf{div}\,\tau\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla\mathbf{v}:\tau\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}.(\tau\mathbf{n})\,\mathrm{d}s,\ \forall\tau,\ \forall\mathbf{v}$$

où, pour deux matrices 3×3 quelconques σ et τ, on a noté $\sigma:\tau$ le produit doublement contractée :

$$\sigma:\tau = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}\tau_{ij}$$

Remarquant que, puisque τ est un tenseur symmétrique, nous avons $\nabla\mathbf{v}:\tau = D(\mathbf{v}):\tau$ et la formule d'intégration par partie précédente devient :

$$\int_\Omega \mathbf{v}.\mathbf{div}\,\tau\,\mathrm{d}x + \int_\Omega D(\mathbf{v}):\tau\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v}.(\tau\mathbf{n})\,\mathrm{d}s,\ \forall\tau,\ \forall\mathbf{v} \tag{1.12}$$

En particulier, avec $\tau = 2\eta D(\mathbf{u})$, il vient :

$$-\int_\Omega \mathbf{div}(2\eta D(\mathbf{u})).\mathbf{v}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega 2\eta D(\mathbf{u}):D(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}(2\eta D(\mathbf{u})\mathbf{n}).\mathbf{v}\,\mathrm{d}s \tag{1.13}$$

En remplacant dans (1.9) les expressions obtenues dans (1.11) et (1.13), puis en regroupant les termes de bord en second membre, nous obtenons :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left(\alpha\mathbf{u}.\mathbf{v} + 2\eta D(\mathbf{u}):D(\mathbf{v})\right)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}((-p.I + 2\eta D(\mathbf{u}))\mathbf{n}).\mathbf{v}\,\mathrm{d}s,\ \forall\mathbf{v}\end{aligned} \tag{1.14}$$

Remarquons dans le second membre l'apparition de l'expression $(-p.I + 2\eta D(\mathbf{u}))\mathbf{n} = \sigma_{tot}\mathbf{n}$ qui représente les forces exercées sur le bord. Le traitement de la deuxième équation de (1.8) est beaucoup plus simple : en multipliant par une fonction test q quelconque, puis en intégrant sur Ω, il vient :

$$\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}x = 0,\ \forall q \tag{1.15}$$

la deuxième étape de la formulation variationnelle est de fixer la régularité requise aux inconnues $(\mathbf{u}, p)$ et aux fonctions test $(\mathbf{v}, q)$ pour que les intégrales apparaissant dans (1.14)-(1.15) ait un sens.

Ni la pression p ni la fonction test associée ne sont dérivées sous les intégrales. Introduisons l'espace des fonctions de carré sommable (voir par exemple [Bre83]) :

$$L^2(\Omega) = \{q \ : \Omega \to \mathbb{R};\ \int_\Omega q^2(x)\,\mathrm{d}x < +\infty\}$$

Pour régler le problème de la non-unicité sur la pression, qui est définie à une constante près, nous choisissons pour $p$et q l'espace des fonctions de L^2 et à moyenne nulle :

$$L^2_0(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega);\ \int_\Omega q(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$$

Les inconnues $\mathbf{u}$ et fonctins test $\mathbf{v}$ interviennent via les dérivées premières $D(\mathbf{u})$ et $D(\mathbf{v})$.

Introduisons l'espace des fonctions dont le gradient est de carré sommable (voir par exemple [Bre83]) :

$$H^1(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega);\ \nabla\varphi \in L^2(\Omega)^3\}$$

La vitesse $\mathbf{u}$ appartiendra à un sous espace de $H^1(\Omega)^3$ pour lequel la condition au bord sera vérifiée :

$$V(\mathbf{u}_\gamma) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3;\ \mathbf{v} = \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega\}$$

La fonction test associée $\mathbf{v}$ appartiendra à un sous espace de $H^1(\Omega)^3$ pour lequel la condition au bord homogène associée sera vérifiée :

$$V(0) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3;\ \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$

Le sous espace de $H^1(\Omega)$ avec condition au bord homogène est noté $H^1_0(\Omega)$, si bien que $V(0) = H^1_0(\Omega)^3$. Remarquons qu'en choisissant $\mathbf{v}$ nulle au bord $\partial\Omega$, le terme de bord dans le membre de droite de (1.14) est nuls. En reprennant (1.14)-(1.15) avec ce choix des espaces fonctionnels, la formulation variationnelle du problème s'énonce :

(FVS) : *trouver* $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ *et* $p \in L^2_0(\Omega)$ *tels que*

$$\int_\Omega (\alpha\mathbf{u}.\mathbf{v} + 2\eta D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}))\ \mathrm{d}x - \int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{v}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x,\ \forall\mathbf{v} \in V(0) \tag{1.16}$$

$$-\int_\Omega q \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}x = 0,\ \forall q \in L^2_0(\Omega) \tag{1.17}$$

Remarque pour les mathématiciens : pour que l'intégrale apparaissant dans cette formulation ait un sens, il est nécessaire que la donnée vérifie un minimum de régularité : $\mathbf{f} \in (H^{-1}(\Omega))^3$. L'intégrale de $\mathbf{f}.\mathbf{v}$ s'interprète alors comme un produit de dualité entre les espaces $H^1_0(\Omega)$ et $H^{-1}(\Omega)$ (voir [Bre83]). Par ailleurs, la donnée sur le bord $\mathbf{u}_\Gamma$ doit satisfaire $\mathbf{u}_\Gamma \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$ pour que la condition au bord $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma$ sur $\partial\Omega$ puisse être satisfaite pour toute fonction $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$ (voir [GR86], page 11).

Afin de mettre en évidences des propriété de ce système de façon plus commode, introduisons également les formes bilinéaires a et b ainsi que la forme linéaire l suivante :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) &= \int_\Omega (\alpha \mathbf{u}.\mathbf{v} + 2\eta D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}))\, \mathrm{d}x \\ b(\mathbf{v}, q) &= -\int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{v}\, \mathrm{d}x \\ l(\mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

La formulation variationnelle du problème s'énonce de façon plus concise :

(FVS) : *trouver* $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ *et* $p \in L^2_0(\Omega)$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) \;+\; b(\mathbf{v},\, p) & = & l(\mathbf{v}),\ \forall \mathbf{v} \in V(0) \\ b(\mathbf{u},\, q) & = & 0,\ \forall q \in L^2_0(\Omega) \end{array} \right.$$

Pour des résultats d'existence et d'unicité de ce problème linéaire, on pourra consulter [GR86], page 80 ou bien [Pir88], page 101.

Introduisons le noyau de la forme b :

$$K(\mathbf{g}) = \{\mathbf{v} \in V(\mathbf{g});\ b(\mathbf{v},\, q) = 0,\ \forall q \in L^2_0(\Omega)\}$$

Cet espace représente l'ensemble des vitesses à divergence nulle dans L^2. La formulation variationnelle du problème s'énonce :

$(FVS)_2$: *trouver* $\mathbf{u} \in K(\mathbf{u}_\Gamma)$ *tel que*

$$a(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) = (\mathbf{f},\, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in K(0)$$

Sous cette forme, il s'agit d'un problème extrêmement standard : il ne reste plus qu'à construire une discrétisation de l'espace K par éléments finis pour obtenir un système linéaire de dimension finie.

1.8 Approximation en espace du problème de Stokes

La difficulté vient du fait que la construction de bases polynomiales à divergence nulle pour K est assez délicate. Peu de travaux ont suivi cette voie [Hec81], et les résultats obtenus par cette méthode sont assez décevants.

Aussi nous revenons au problème (FVS) : il s'agit de discrétiser les espaces $(H^1)^3$ et L^2_0. Pour ce qui est de la construction de bases discrètes de H^1, la méthode est très classique en éléments finis. La question est plus délicate pour L^2_0, pour lequel nous ne connaissons pas explicitement de base discrète à moyenne nulle. Par contre nous savons travailler avec

L^2, aussi nous allons introduire la contrainte de moyenne nulle séparément, à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange, noté $\lambda \in \mathbb{R}$.

Introduisons le Lagrangien suivant :

$$L(\mathbf{u},\, p, \lambda) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u},\, p) + c(p, \lambda) - (\mathbf{f},\, \mathbf{u}) \tag{1.18}$$

avec

$$c(p, \lambda) = \lambda \int_\Omega p(x)\, \mathrm{d}x$$

La solution du problème est caractérisée comme le point-de-selle de L, ce qui s'écrit

$$(\mathbf{u}, p, \lambda) = \underset{\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)}{\arg\inf} \; \sup_{\substack{q \in L^2_0(\Omega) \\ \mu \in \mathbb{R}}} L(\mathbf{v},\, q, \mu)$$

Remarquons que nous avons deux contraintes à satisfaire : la divergence nulle pour la vitesse $\mathbf{u}$ et la moyenne nulle pour la pression p, et que nous avons deux multiplicateurs associés qui sont respectivement p et λ.

Comme L est dérivable, le point de selle $(\mathbf{u}, p, \lambda)$ vérifie

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, p, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial p}(\mathbf{u}, p, \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\mathbf{u}, p, \lambda) = 0$$

Ici les notations $\partial L/\partial \mathbf{u}$ et $\partial L/\partial p$ désignent les *dérivées de Gâteaux* de L par rapport à $\mathbf{u}$ et p. Par définition, pour toute fonction test $\mathbf{v}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, p, \lambda).(\mathbf{v}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{L(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}, p, \lambda) - L(\mathbf{u}, p, \lambda)}{\varepsilon}$$

Ainsi, la *dérivée de Gâteaux* est simplement une dérivée directionnelle. De la définition de L, de la bilinéarité des formes a et b et de la symmétrie de la forme a, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, p, \lambda).(\mathbf{v}) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \left\{ a(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}, \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) + b(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}, p) - (\mathbf{f}, \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \right\} \\ &= a(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v},\, p) - (\mathbf{f},\, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

De même, pour toute fonction test $q \in L^2(\Omega)$ et tout $\mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial p}(\mathbf{u}, p, \lambda).(q) &= b(\mathbf{u}, q) + c(q, \lambda) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\mathbf{u}, p, \lambda).(\mu) &= c(p, \mu) \end{aligned}$$

La caractérisation du point de selle conduit ainsi à une nouvelle formulation variationnelle du problème, incluant cette fois la condition de moyenne nulle pour la pression :

$(FVS)_3$: *trouver* $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$, $p \in L^2(\Omega)$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) & + & b(\mathbf{v},\, p) & & = & (\mathbf{f},\, \mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u},\, q) & & & + \quad c(q, \lambda) & = & 0 \\ & & c(p, \mu) & & = & 0 \end{array} \right.$$

pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$, $q \in L^2(\Omega)$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Cette fois, nous savons construire concrètement des bases polynomiales par morceaux des espaces $X(0)$ et L^2 intervenant dans ce problème.

Soient $X_h \subset H^1(\Omega)^3$ et $Q_h \subset L^2(\Omega)$ deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $\mathbf{u}_{h,\Gamma}$ une approximation de $\mathbf{u}_\Gamma$, par exemple l'interpolée de Lagrange des données aux bords. Introduisons V_h, le sous espace de X_h incluant les conditions aux limites :

$$V_h(\mathbf{u}_{h,\Gamma}) = \{\mathbf{v}_h \in X_h;\ \mathbf{v}_{h|\partial\Omega} = \mathbf{u}_{h,\Gamma}\}$$

L'approximation variationnelle du problème précédent s'écrit :

$(FVS)_h$: *trouver* $\mathbf{u}_h \in V_h(\mathbf{u}_{h,\Gamma})$, $p_h \in Q_h$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\left\{ \begin{array}{lllll} a(\mathbf{u}_h,\, \mathbf{v}_h) & + & b(\mathbf{v}_h,\, p_h) & & = & (\mathbf{f},\, \mathbf{v}_h) \\ b(\mathbf{u}_h,\, q_h) & & & + \quad c(q_h, \lambda) & = & 0 \\ & & c(p_h, \mu) & & = & 0 \end{array} \right.$$

pour tout $\mathbf{v}_h \in V_h(0)$, $q_h \in Q_h$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un système linéaire de dimension finie. Nous sommes presque au bout de nos peines : la construction par éléments finis de X_h et Q_h doit encore être faite avec soin pour que les approximations $\mathbf{u}_h$ et p_h convergent vers $\mathbf{u}$ et p. En effet, une condition nécessaire et suffisante pour que cette convergence ait lieu est que [BF91, P. 205] :

$$\exists \beta > 0 \ \text{ tel que } \forall h > 0, \quad \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{b(\mathbf{v}_h,\, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{H^1}\ \|q_h\|_{L^2}} \ \geq \ \beta$$

En particulier, l'expression en inf-sup doit pouvoir être majorée par une constante indépendante de h. Si cette expression croît indéfiniment lorsque $h \to 0$, alors la convergence de $(\mathbf{u}_h, p_h)$ n'est plus assurée $(\mathbf{u}, p)$. Cette condition, dite **condition inf-sup** ou encore **condition de Brezzi-Babuska** exprime la nécessaire compatibilité entre les espaces de dimension finie X_h et Q_h.

Ainsi l'approximation la plus simple possible, affines par morceaux (notée P_1) pour les vitesses et les pressions, ne satisfait pas cette condition. On pourra consulter [BF91], page 207 et suivantes, pour des combinaisons satisfaisantes d'approximations des vitesses et pressions, ainsi que d'autres paires ne satisfaisant pas cette condition. Nous présentons ici la combinaison proposée initialement dans [HT74] et largement utilisée : les vitesses sont approchées par des fonctions continues quadratiques par morceaux et les pressions par des fonctions continues affines par morceaux. Cette combinaison est notée $P_2 - P_1$, et est appelée élément de Hood-Taylor (voir Fig. 1.3). Pour la preuve que cette combinaison vérifie la condition inf-sup, on pourra consulter [BF91], page 211.

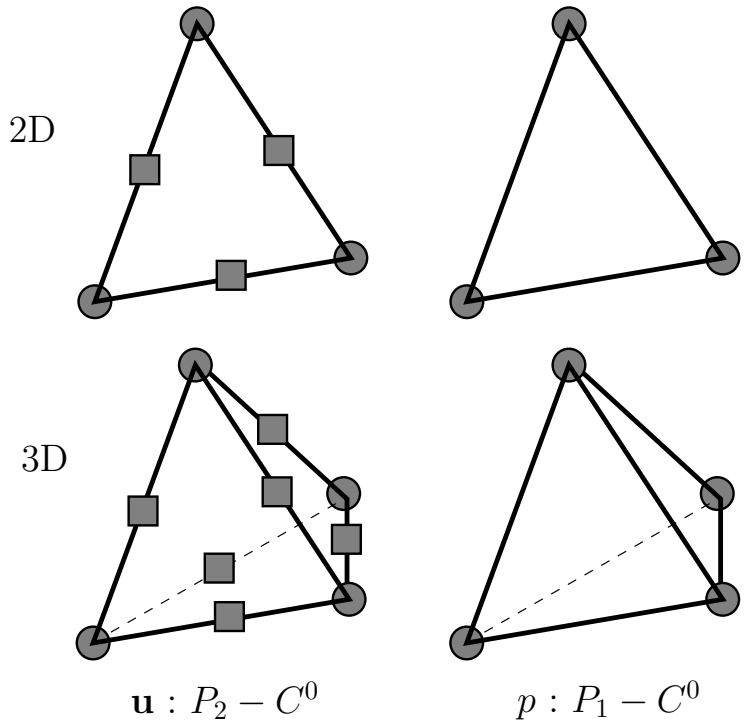


FIGURE 1.3 – Éléments finis de Taylor-Hood pour le problème de Stokes.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de Ω. Les espaces X_h et Q_h sont alors définis par

$$X_h = \{\mathbf{v}_h \in C^0(\Omega)^3;\ \mathbf{v}_{h|K} \in (P_2)^3,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \tag{1.19}$$

$$Q_h = \{q_h \in C^0(\Omega);\ q_{h|K} \in P_1,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\} \tag{1.20}$$

$$\tag{1.21}$$

En différences finies, le schéma aux grilles décallées est aussi très populaire (voir Fig. 1.4). Il est intéressant de remarquer que cette méthode aux grilles décallées s'interprête comme une méthode d'éléments finis et se généralise aux maillages non-structurés (triangles ou tétraèdre) à l'aide de l'élément de Raviart-Thomas [GR86, chap.3] et en introduisant le tourbillon $\mathbf{w} = \mathbf{rot}\,\mathbf{u}$ comme variable auxilliaire.

1.9 Résolution du problème de Stokes discret

Soit $(\boldsymbol{\varphi}_i)_{1\leq i\leq n_{\text{tot}}}$ la base nodale de X_h et $(\xi_i)_{1\leq i\leq m}$ la base nodale de Q_h. Quitte à numéroter les fonctions de base de X_h, nous supposons que les nœuds de 1 à n sont situés à l'intérieur du domaine et ceux de $n+1$ à n_{tot} sont situés sur le bord. Ainsi $(\boldsymbol{\varphi}_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base

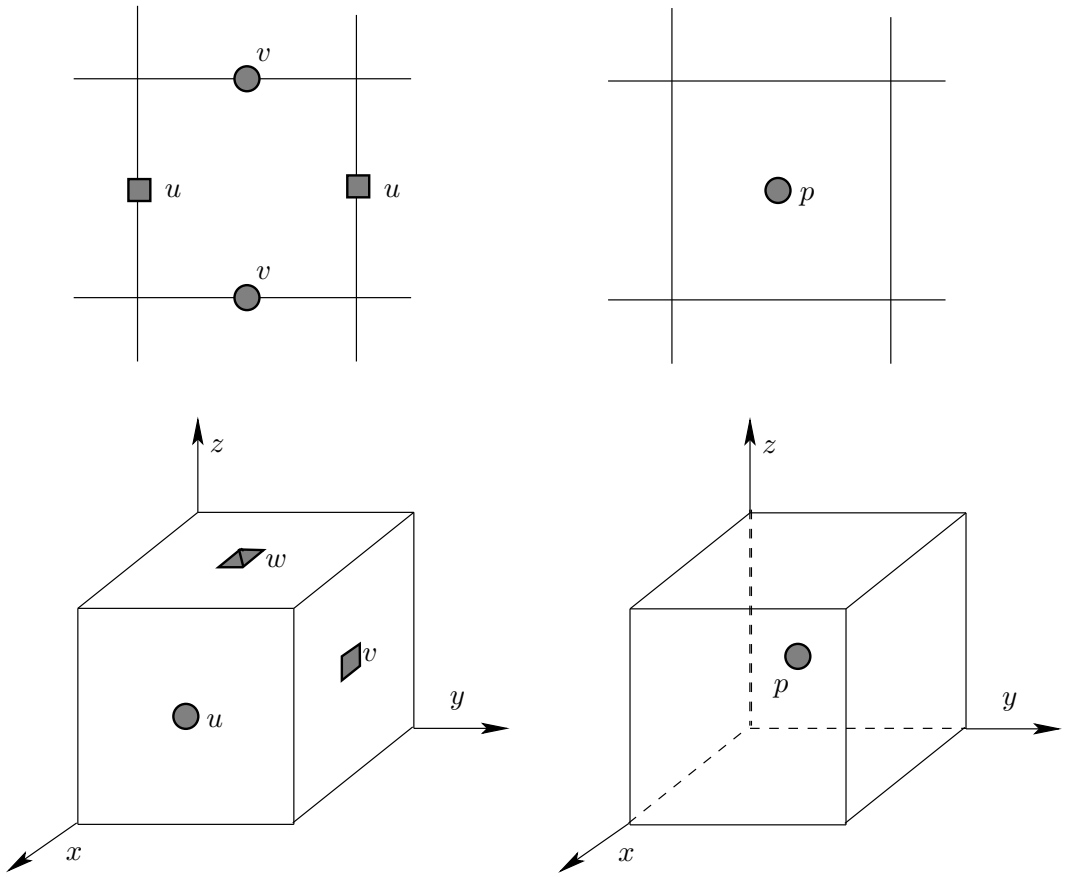


FIGURE 1.4 – Différences finies aux grilles décallées pour le problème de Stokes.

nodale de $V_h(0)$. Décomposons $\mathbf{u}_h$ et p_h sur ces bases respectives :

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{n} u_j \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=n+1}^{n_{\text{tot}}} \overline{u}_j \boldsymbol{\varphi}_j(\mathbf{x}) \\
p_h(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{m} q_j \xi_j(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Les valeurs $(\overline{u}_j)_{n \leq j \leq n_{\text{tot}}}$ sont donnés par $\mathbf{u}_{h,\Gamma}$ au bord tandis que $(u_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont inconnues. Posons :

$$\begin{aligned}
A_{i,j} &= a(\boldsymbol{\varphi}_j,\, \boldsymbol{\varphi}_i),\ 1 \leq i, j \leq n \\
\overline{A}_{i,j} &= a(\boldsymbol{\varphi}_j,\, \boldsymbol{\varphi}_i),\ 1 \leq i \leq n,\ n+1 \leq j \leq n_{\text{tot}} \\
B_{i,j} &= b(\boldsymbol{\varphi}_j,\, \xi_i),\ \ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n \\
\overline{B}_{i,j} &= b(\boldsymbol{\varphi}_j,\, \xi_i),\ \ 1 \leq i \leq m,\ n+1 \leq j \leq n_{\text{tot}} \\
C_{1,j} &= c(\xi_j, 1),\ \ 1 \leq j \leq m \\
\overline{f}_i &= (\mathbf{f},\, \boldsymbol{\varphi}_i),\ \ 1 \leq i \leq n
\end{aligned}$$

Remarquons que la matrice C a une ligne et m colonnes et que $\overline{A}$ est rectangulaire. La matrice A est symétrique définie positive $n \times n$. Le problème de Stokes discret se ramène à résoudre le système linéaire suivant :

$(S)_h$: *trouver* $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$, $p = (p_i)_{1 \leq i \leq m}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$\begin{pmatrix} A & B^T & 0 \\ B & 0 & C^T \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $f = \overline{f} - \overline{A}\,\overline{u}$ et $g = -\overline{B}\,\overline{u}$. Il s'agit d'un système linéaire symétrique de taille $n+m+1$, de matrice notée $\mathcal{A}$, inversible. Les matrices A et B sont très creuses et une implémentation performante ne stockera que les éléments non-nuls : le lecteur intéressé consultera [Sar13] pour ce type d'implémentation avec des *matrices creuses*. Signalons que la présence des multiplicateurs fait apparaître des valeurs propres négatives : matrice est alors inversible mais *indéfinie*), les valeurs propres étant soit strictement positives, soit strictement négatives. Par conséquent, la résolution par factorisation de Choleski sous la forme LL^T, avec L triangulaire inférieure, ne peut pas être effectuée ici. Il est cependant possible de factoriser $\mathcal{A}$ sous la forme $\mathcal{A} = LDL^T$, avec D diagonale contenant des valeurs positives et négatives des pivots. On pourra consulter [LT86], chapitre 5 pour le principe de la factorisation LDL^T, et [Dav12, DD94] pour un logiciel libre exploitant de façon performante la structure creuse de la matrice $\mathcal{A}$.

La résolution par méthode directe est très performante pour des problèmes en dimension deux d'espace. Pour des problèmes en dimension trois, la matrice creuse $\mathcal{A}$ conduit à des matrices L bien moins creuses et les temps de calculs croissent très vite avec la taille totale

```
int main (int argc, char** argv) {
  geo omega (argv[1]);
  space Qh (omega, "P1");
  space Xh (omega, "P2", "vector");
  Xh.block ("boundary");
  trial u(Xh), p(Qh); test v(Xh), q(Qh);
  form a = integrate (2*ddot(D(u),D(v)));
  form b = integrate (-q*div(u));
  form m = integrate (p*q);
  field uh (Xh, 0), ph (Qh, 0);
  uh[1]["top"] = 0;
  solver abtb stokes (a.uu(), b.uu(), m.uu());
  stokes.solve(-a.ub()*uh.b(), -b.ub()*uh.b(),
      uh.set_u(), ph.set_u());
  cout << catchmark("u") << uh
       << catchmark("p") << ph;
}
```

soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$, $d = 1,2,3$

$Q_h = \{q \in L^2(\Omega);\ q_{|K} \in P_1,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$

$X_h = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d;\ \mathbf{v}_{|K} \in (P_2)^d,\ \forall K \in \mathcal{T}_h\}$

$\forall\ \mathbf{u}, \mathbf{v}$, et p, q, définissons :

$$a(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \int_\Omega 2D(\mathbf{u}):D(\mathbf{v})$$

$$b(\mathbf{u},q) = -\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u}$$

$$m(p,q) = \int_\Omega pq$$

trouver $\mathbf{u} \in X_h$, $\mathbf{u}_h = 0$ sur $\partial\Omega$, et $p_h \in Q_h$ tels que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h,\mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h,p) &= 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h, \mathbf{v}_h = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ b(\mathbf{u}_h,q) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

FIGURE 1.5 – Problème de Stokes : implémentation dans la librairie RHEOLEF [Sar11].

du système linéaire. Dans ce cas, on préférera une méthode itérative : pour cela, le problème est réduit sur les pressions. Le logiciel libre RHEOLEF [Sar11] propose une programmation concise et performante de ces algorithmes dans le contexte des éléments finis. La Fig. 1.5 montre l'implémentation du problème de Stokes. Les conditions aux bords correspondent au problème de la cavité entrainée et la solutin est représentée sur la Fig. 1.6.

1.10 Problème de Stokes : méthode itérative

L'algorithme de résolution par **méthode directe** doit être considérée comme le choix par défaut : pas de paramètre numérique ni de contrôle et de test d'arrêt comme pour les **méthodes itératives**. Cependant, la méthode directe a l'inconvénient de nécessiter plus de place en mémoire informatique que les méthodes itératives, et ceci peut être crucial pour des problème tridimensionnels, faisant intervenir des maillages et des matrices de l'ordre de 100 000 ou plus.

Aussi, nous présentons brièvement le principe des méthodes itératives, telles qu'elles sont implémentées dans la librairie [Sar11]. Nous renvoyons à cette référence pour les détails et la mise en œuvre concrète.

Pour les méthodes itératives, la non-unicité de la pression n'est plus un problème, car les

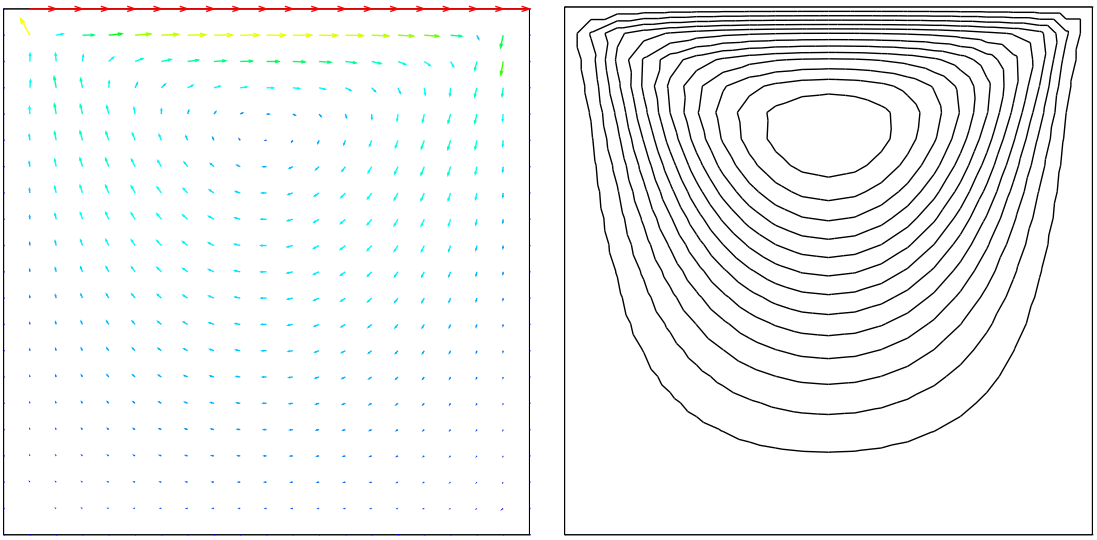


FIGURE 1.6 – Problème de Stokes dans une cavité : vitesses et fonction de courant associée [Sar11].

algorithmes partent d'une valeur initiale et itèrent en la corrigeant pour se rapprocher d'une solution. Par conséquent, nous pouvons ignorer la contraint de moyenne nulle sur la pression et considérer le lagrangien simplifié :

$$\tilde{L}(\mathbf{u},\, p) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u},\, p) - (\mathbf{f},\, \mathbf{p}) \tag{1.22}$$

Cette définition, nous pouvons définir la *fonctionnelle d'énergie* J par :

$$J(\mathbf{u}) = \sup_{q \in L^2(\Omega)} \tilde{L}(\mathbf{u},\, q)$$

et le problème se réduit à la minimisation de l'énergie :

$$\mathbf{u} = \arg\inf_{\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)} J(\mathbf{v})$$

Remarquons que dans les problèmes de point de selle, le rle de $\mathbf{u}$ et p peut tre échangé en changeant le signe du lagrangien. Nous pouvons définir la *fonctionnelle duale* J_* par :

$$J_*(q) = -\inf_{\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)} L(\mathbf{v},\, q)$$

Remarquons que J_* est convexe, car L est concave en q. Ainsi le problème s'écrit de façon équivalente :

$$p = \arg\inf_{q \in L^2_0(\Omega)} J_*(q)$$

Nous disposons d'une collection algorithmes itératifs (méthode de descente a pas fixe, gradient conjugué, MINRES, etc) qui résolvent ce problème de façon standard. Une fois $p \in L^2(\Omega)$ calculée, il est facile d'obtenir la solution $\bar{p}$ à moyenne nulle :

$$\bar{p}(x) = p(x) - \frac{\int_\Omega p(x)\,\mathrm{d}x}{\int_\Omega \mathrm{d}x}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

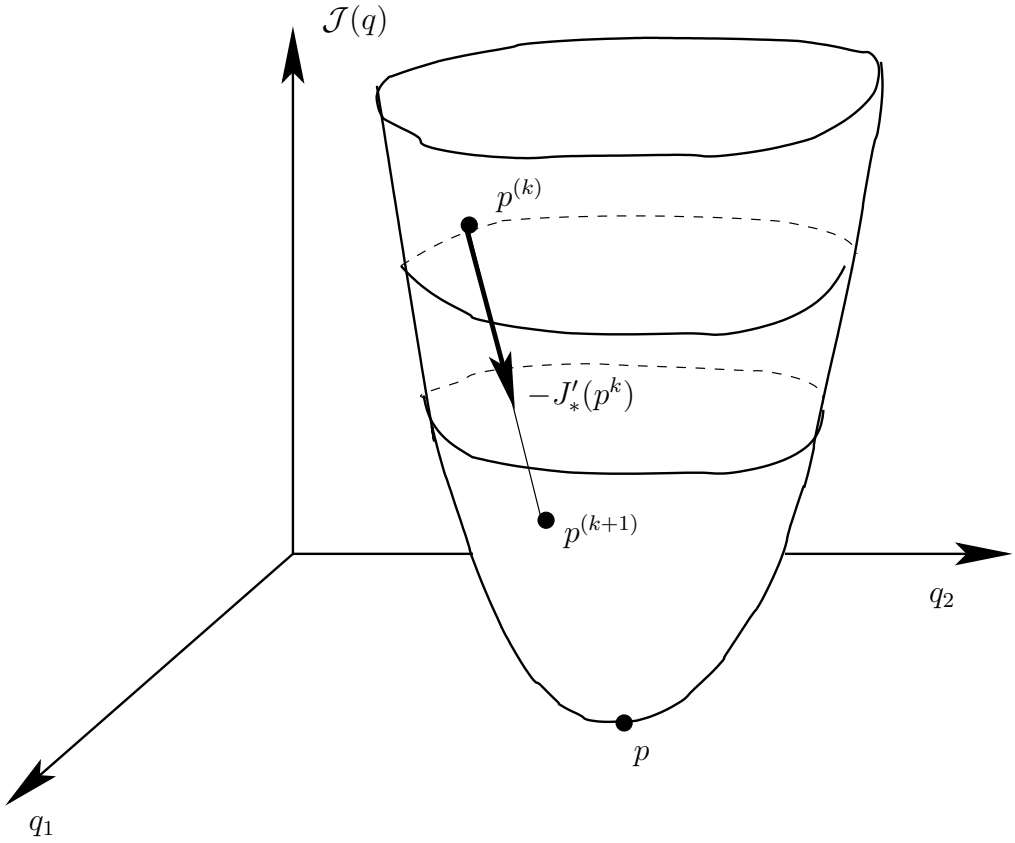


FIGURE 1.7 – Algorithme de descente.

Par exemple, l'algorithme de plus profonde descente à pas fixe, appelé aussi algorithme d'Uzawa, s'écrit :

- $k = 0$: p^0 est donné
- $k \geq 0$: p^k est connu, on calcule :

$$p^{k+1} = p^k - \rho\ J'_*(p^k)$$

À chaque étape (voir Fig. 1.7), on descend d'un pas $\rho > 0$ dans la direction opposée au gradient J'_*. Cet algorithme se décline en de nombreuses variantes : l'algorithme du résidu minimal consiste à calculer le pas de descente optimal à chaque itération, et l'algorithme

du gradient conjugué utilise des directions de descentes successives orthogonales (aka *conjuguées*) entre elles.

Regardons plus en détails comment calculer concrètement $J'_*(p^k)$. Une fois le système est discrétisé, nous avons, avec les notations précédentes :

$(S)_h$: *trouver* $u = (u_i)_{1\leq i\leq n}$ *et* $p = (p_i)_{1\leq i\leq m}$ *tels que*

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

où la matrice A est symétrique définie positive $n \times n$ et B est rectangulaire $n \times m$. En développant :

$$\begin{array}{lcll} Au & + & B^T p & = & f \\ Bu & & & = & g \end{array}$$

De la première équation, il vient

$$u = A^{-1}(f - B^T p)$$

et alors de la seconde :

$$(BA^{-1}B^T)p = BA^{-1}f - g$$

En posant $\mathcal{A} = BA^{-1}B^T$ et $\beta = BA^{-1}f - g$, ceci s'écrit encore :

$$\mathcal{A}p = \beta$$

La solution $p \in \mathbb{R}^m$ est caractérisée comme étant l'unique minimum de la fonctionnelle convexe

$$J_*(q) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}q,\, q) - (\beta,\, q)$$

C'est la version discrète de la fonctionnelle introduite plus haut. L'algorithme de plus profonde descente à pas fixe, appelé aussi algorithme d'Uzawa, consiste à choisir pour le pas de descente une valeur constante $\rho_k = \lambda > 0$ et pour la direction de descente $w^{(k)}$, l'opposée du gradient,

$$\begin{aligned} J'_*(p^k) &= \mathcal{A}p^k - \beta \\ &= BA^{-1}B^T p^k - BA^{-1}f + g \\ &= BA^{-1}(B^T p^k - f) + g \\ &= -Bu^{(k)} + g \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$u^{(k)} = A^{-1}(f - B^T p^{(k)})$$

Ainsi, $r_k = J'_*(p^k)$ représente le résidu de la deuxième équation du système linéaire. Concrètement, nous avons l'algorithme :

ALGORITHME **1.10.1** *(*Uzawa*)*

- $k = 0$ *:* $p^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ *étant donné, trouver* $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$Au^{(0)} = f - B^T p^{(0)}$$

- $k \geq 0$ *:* $(u^{(k)}, p^{(k)})$ *étant connu, calculer successivement :*

$$\begin{aligned} r^{(k)} &:= g - B^T u^{(k)} \\ p^{(k+1)} &:= p^{(k)} - \lambda r^{(k)} \end{aligned}$$

puis trouver $u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ *tel que*

$$Au^{(k+1)} = f - B^T p^{(k+1)}$$

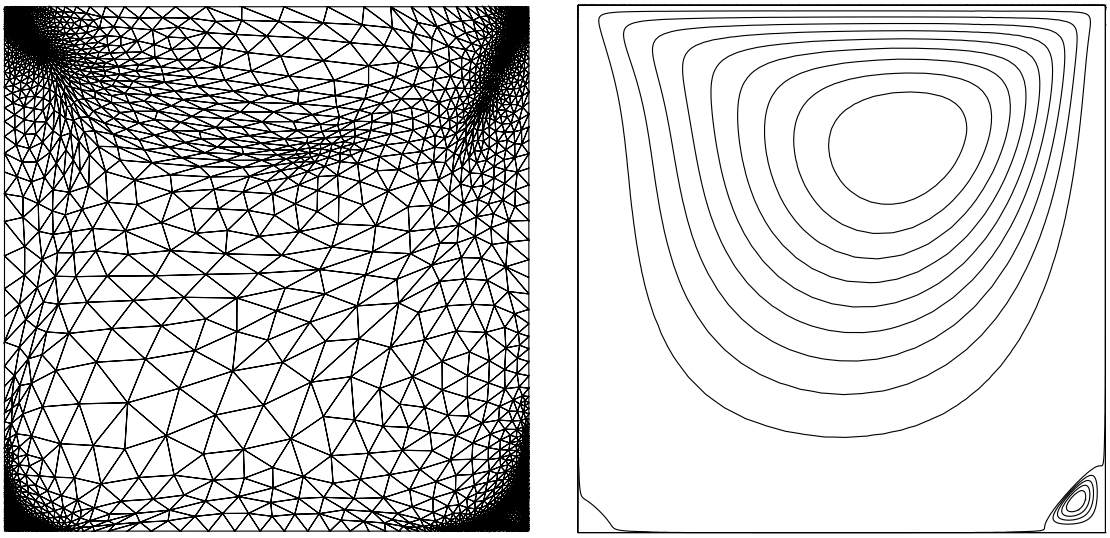
Le pas de descente $\lambda > 0$ est un paramètre de cet algorithme. Le test d'arrêt peut être effectué sur le résidu : $\|r^{(k)}\| < \varepsilon$, où ε est une tolérance.

Dans la pratique, cet algorithme converge pour toute donnée initiale p^0. Les propriétés de convergence peuvent être améliorées en utilisant une des variantes plus performantes, comme le gradient conjugué. Voir le logiciel libre RHEOLEF [Sar11], chapitre 5, pour la programmation performante de ces algorithmes dans un contexte d'éléments finis en dimension 2 et 3 : on y trouvera également des préconditionnements qui accélèrent encore la convergence.

1.11 Exemple : écoulement dans une cavité

Les Fig. 1.8 et 1.9 présentent un exemple de calcul tiré de [Sar11] pour une cavité entraînée, avec différentes valeurs du nombre de Reynolds $Re = \rho LU/\eta$, où L est la taille de la cavité et U la vitesse d'entraînement. Ce calcul utilise l'élément de Taylor-Hood et un procédé d'adaptation de maillage.

$Re = 100$: 4804 éléments, 2552 sommets $\psi_{max} = 9.5 \times 10^{-6}, \psi_{min} = -0.103$



$Re = 400$: 5233 éléments, 2768 sommets $\psi_{max} = 6.4 \times 10^{-4}, \psi_{min} = -0.111$

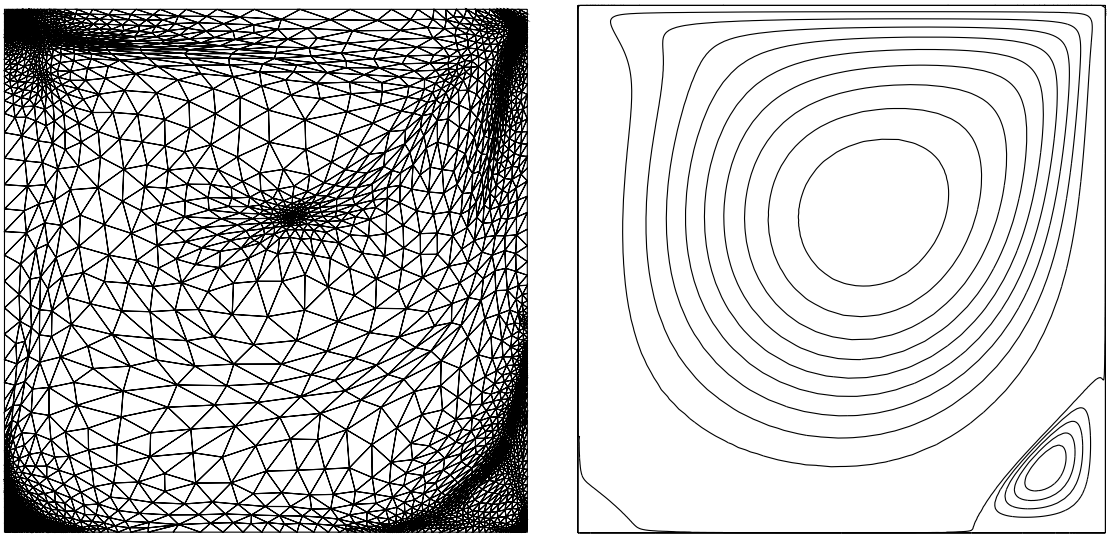


FIGURE 1.8 – Maillages et fonctions de courant associées à la solution des équations de Navier-Stokes pour $Re = 100$ (haut) et $Re = 400$ (bas).

$Re = 1000$: 5873 éléments, 3106 sommets $\psi_{max} = 1.64 \times 10^{-3}, \psi_{min} = -0.117$

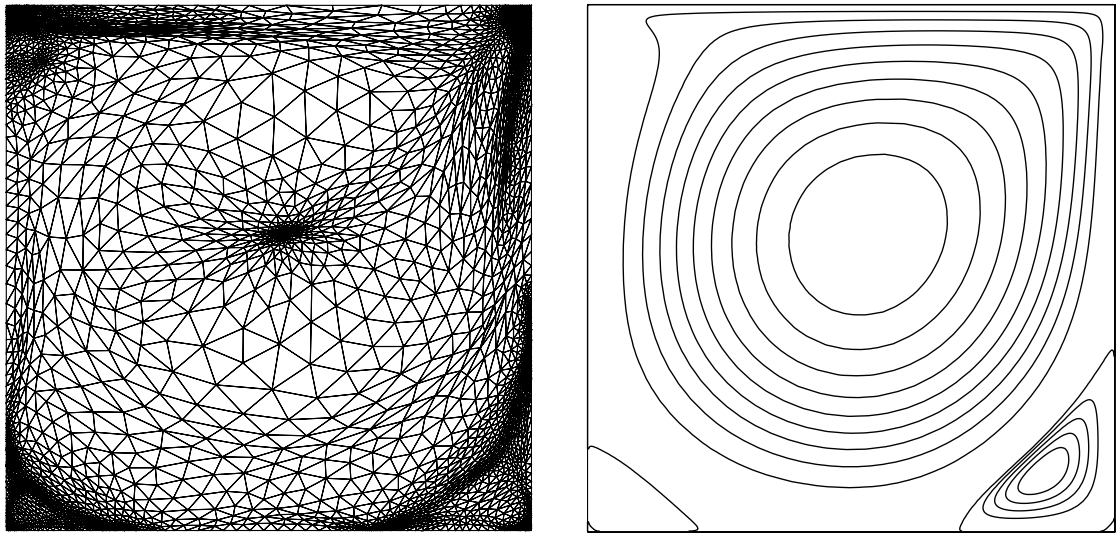


FIGURE 1.9 – Maillage et fonction de courant associées à la solution des équations de Navier-Stokes pour $Re = 1000$.

Chapitre 2

Fluides quasi-newtoniens

2.1 Loi de comportement

Comme précédemment, le fluide est supposé incompressible. Cette classe de modèle est obtenue en remplaçant la loi de comportement (1.5) par :

$$\sigma = 2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2)\, D(\mathbf{u}) \tag{2.1}$$

où $|\tau|$ désigne la norme matricielle d'un tenseur τ suivante :

$$|\tau|^2 = \frac{\tau : \tau}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\tau_{i,j}^2$$

Notez le facteur 1/2 devant la norme matricielle usuelle : les composantes non-diagonales d'un tenseur symétrique τ sont comptées deux fois, et ce facteur est introduit par simple commodité. La fonction $\eta\ : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+$ est donnée : c'est la loi de viscosité. Il existe deux lois classiques très répandues : la loi de Carreau et la loi puissance. Posons $\xi = \dot{\gamma}^2 = |2D(\mathbf{u})|^2$. Pour la loi de Carreau [BAH87a, p. 171], on a :

$$\eta(\xi) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+$$

avec $\eta_0, \eta_\infty, \lambda$ et $n \in \mathbb{R}^{+*}$. et $\eta_0 > \eta_\infty$. Pour la loi de puissance :

$$\eta(\xi) = K\xi^{\frac{-1+n}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+$$

avec $K, n \in \mathbb{R}^{+*}$. Remarquons que dans les deux cas, pour $n = 1$ nous retrouvons un modèle newtonien, de viscosité constante η_0 (ou K). Lorsque $n \in]0, 1[$ le fluide est rhéo-fluidifiant : la viscosité η décroît avec le taux de déformation $\dot{\gamma}$, c'est le cas usuel. Lorsque $\dot{\gamma}$ devient grand la loi de puissance est assez similaire au cas de la loi de Carreau avec $\eta_\infty = 0$: dans ce cas la viscosité η tend vers zéro pour $n < 1$ (voir Fig. 2.1). Lorsque $n > 1$ le fluide est rhéo-épaississant : la viscosité η croit avec $\dot{\gamma}$s.

$n < 1$: donner des exemples !

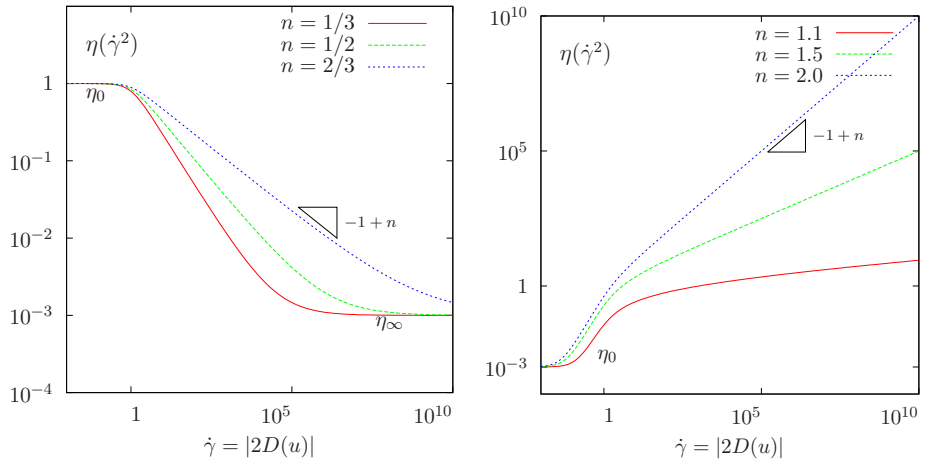


FIGURE 2.1 – Fluide quasi-newtonien : loi de viscosité de Carreau pour $n < 1$ (gauche) et $n > 1$ (droite).

2.2 Problème aux limites

Le problème s'énonce alors :

(QN) : *trouver* $\mathbf{u}$ *et* p *tels que*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \rho\left(\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) - \mathbf{div}\left\{2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2)\,D(\mathbf{u})\right\} + \nabla p & = & \rho\mathbf{g} \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ -\operatorname{div}\mathbf{u} & = & 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ \mathbf{u}(0) & = & \mathbf{u}_0 \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega \end{array}\right.$$

avec les notations du chapitre précédent. Nous pouvons discrétiser en temps ce problème, comme au chapitre précédent, par la méthode des caractéristiques. À chaque pas de temps, nous obtenons un sous-problème qui ne dépend plus que de la variable d'espace : ce sous-problème n'est plus linéaire, il contient encore la non-linéarité issue de la loi de viscosité. Le problème a la forme suivante :

(QNS) : *trouver* $\mathbf{u}$ *et* p *tels que*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\mathbf{div}\left\{2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2)\,D(\mathbf{u})\right\} + \nabla p & = & \mathbf{f} \text{ dans } \Omega \\ -\operatorname{div}\mathbf{u} & = & 0 \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega \end{array}\right.$$

où $\mathbf{f}$ est donnée. Dans le problème précédent, nous avons omis le terme $(\rho/\Delta t)\mathbf{u}$ issu de la discrétisation en temps : cette simplification est effectuée afin d'alléger les notations et ne constitue pas une perte de généralité, car tous les résultats que nous allons montrer s'étendent sans problème en ajoutant ce terme. Le problème précédent exprime également la situation d'un écoulement stationnaire soumis à une force extérieure $\mathbf{f}$ et dans lequel

le terme d'inertie $\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}$ a été négligé. Cette hypothèse se justifie lorsque l'écoulement est *lent*.

2.3 Exemple 1 : écoulement de Poiseuille

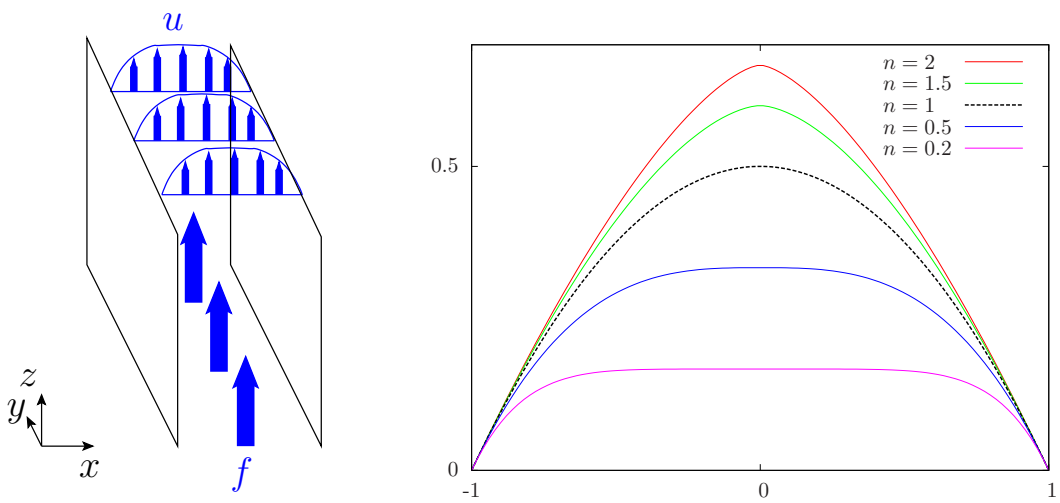


FIGURE 2.2 – Fluide quasi-newtonien : écoulement de Poiseuille entre deux plaques.

On considère l'écoulement d'un fluide à loi de puissance entre deux plaques parallèles au plan Oyz. Nous cherchons dans cette géométrie une solution correspondant à un écoulement établi : le vecteur vitesse est porté par l'axe $0z$ et ne dépend que de x : $\mathbf{u}(x) = (0, 0, u(x))$. On vérifie que cette solution ne peut exister que si la pression est de la forme $p(x, y, z) = -fz + p_0$ où p_0 est la pression de référence et où $f > 0$ est une force de poussée constante donnée. On vérifie sans difficulté que $|2D(\mathbf{u})| = |u'|$, si bien que la composante u vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\left(K|u'|^{n-1}u'\right)' & = & f \\ u(-L) = u(L) & = & 0 \end{array} \right.$$

où $2L$ est la distance séparant les deux plaques. Pour renormaliser le problème, on pose $\tilde{x} = x/L$. De même, on va remplacer l'inconnue $u(x)$ par $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(L\tilde{x})/U$, avec $U > 0$ qu'on va préciser. Le système vérifié par $\tilde{u}$ est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\dfrac{KU^n}{fL^{n+1}}\left(|\tilde{u}'|^{n-1}\tilde{u}'\right)' & = & 1 \\ \tilde{u}(-1) = \tilde{u}(1) & = & 0 \end{array} \right.$$

En choisissant $U = (fL^{n+1}/K)^{1/n}$, et sans perte de généralité, le système se simplifie en un problème avec pour seul paramètre $n > 0$. Comme nous allons travailler avec ce problème

re-normalisé, et qu'il n'y a plus d ?ambiguté, nous pouvons omettre les tildes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\left(|u'|^{n-1}u'\right)' & = & 1 \ \text{ dans }]0,1[\\ u(0) = 0 \ \text{ et } \ u(1) & = & 0 \end{array} \right.$$

Par symétrie, on a réduit l'intervalle à $]0,1[$ avec une condition de symétrie en $x = 0$. Une première intégration conduit à

$$-|u'|^{n-1}u' = x + c$$

et, la condition de symétrie en $x = 0$ donne $c = 0$. Remarquons que u' a le signe opposé de x : u' est impaire, et donc est paire. Ainsi $|u'|^n = |x|$ et encore $u' = x^{1/n}$ pour $0 < x < 1$. Finalement, avec la condition en $x = 1$, il vient :

$$u(x) = \frac{1 - |x|^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n} + 1}, \quad x \in]-1,1[.$$

Cette fonction est représentée sur la Fig. 2.2 pour quelques valeurs de n. Lorsque $n > 1$, le profil de vitesse est plutôt pointu. Pour $n = 1$, on a une parabole renversée $u(x) = (1 - x^2)/2$. Enfin, pour $0 < n < 1$, le profile s ?aplati : c'est le cas le plus courant pour des fluides non-Newtoniens tels que le sang, la pâte dentifrice, les coulées de neige, de lave ou les glissements de terrain.

2.4 Formulation variationnelle

Multiplions la première équation par une fonction test $\mathbf{v}$ qui s'annule sur le bord et sommons sur Ω, puis utilisons les formules de la divergence (1.10) et (1.12) :

$$\int_\Omega 2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2)\ (D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}))\,\mathrm{d}x - \int_\Omega p \operatorname{div} \mathbf{u}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x \tag{2.2}$$

Les termes de bord son nuls du fait que la fonction test $\mathbf{v}$ s'annule au bord. Nous souhaitons écrire ce problème sous la forme d'une minimisation d'une fonctionnelle d'énergie. Cherchons la fonctionnelle sous la forme :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega H\left(|2D(\mathbf{u})|^2\right)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{u}\,\mathrm{d}x$$

où H est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ que nous allons identifier. Supposons H dérivable et calculons la dérivée de Gâteaux de F en $\mathbf{u}$s : pour toute fonction test $\mathbf{v}$, c'est par définition la dérivée de F en $\mathbf{u}$ dans la direction $\mathbf{v}$:

$$J'(\mathbf{u}).(\mathbf{v}) \quad = \quad \frac{J(\mathbf{u} + \varepsilon\mathbf{v}) - J(\mathbf{u})}{\varepsilon}$$

Rappelons que $|\tau|^2 = (\tau : \tau)/2$. Par un développement de Taylor de H, il vient :

$$\begin{aligned} J(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v}) &= \frac{1}{2}\int_\Omega H\left(2D(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v}):D(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v})\right)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.(\mathbf{u}+\varepsilon\mathbf{v})\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega H\left(|2D(\mathbf{u})|^2\right)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{u}\,\mathrm{d}x \\ &\quad + \varepsilon\left(\int_\Omega 2H'\left(|2D(\mathbf{u})|^2\right)\,\left(D(\mathbf{u}):D(\mathbf{v})\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x\right) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de Gâteaux de J s'écrit pour tous $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$:

$$J'(\mathbf{u}).(\mathbf{v}) = \int_\Omega 2H'\left(|2D(\mathbf{u})|^2\right)\,\left(D(\mathbf{u}):D(\mathbf{v})\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x$$

Le problème va pouvoir s'écrire comme un problème de minimisation de cette énergie sous la contrainte d'incompressibilité, ou encore comme un problème de point-de-selle d'un Lagrangien. En identifiant cette expression avec (2.2)

$$J'(\mathbf{u}).(\mathbf{v}) = \int_\Omega 2\eta\left(|2D(\mathbf{u})|^2\right)\,\left(D(\mathbf{u}):D(\mathbf{v})\right)\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x$$

En posant $\xi = \dot{\gamma}^2 = |2D(\mathbf{u})|^2$, nous obtenons une condition nécessaire et suffisante sur H :

$$H'(\xi) = \eta(\xi),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^+ \iff H(\xi) = \int_0^\xi \eta\left(\xi\right)\,\mathrm{d}\xi,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^+$$

Exemples – Pour la loi de puissance, on a :

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= K\xi^{\frac{-1+n}{2}} \\ H(\xi) &= \int_0^\xi K\xi^{\frac{-1+n}{2}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{2K}{1+n}\xi^{\frac{1+n}{2}} \end{aligned}$$

Pour la loi de Carreau, on a :

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \eta_\infty + (\eta_0-\eta_\infty)(1+\lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}} \\ H(\xi) &= \int_0^\xi \left(\eta_\infty + (\eta_0-\eta_\infty)(1+\lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}}\right)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \eta_\infty\xi + \frac{2(\eta_0-\eta_\infty)}{\lambda(n+1)}\left((1+\lambda\xi)^{\frac{1+n}{2}} - 1\right) \end{aligned}$$

Dans ces deux exemples, $J(\mathbf{u})$ fait intervenir des intégrales avec des puissances $(1+n)/2$ de $\xi = \dot{\gamma}^2 = |2D(\mathbf{u})|^2$. Ces termes sont bornés lorsque $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^{1,r}(\Omega)^3$ avec $r = 1+n$. Rappelons que, pour tout $r \geq 1$:

$$W^{1,r}(\Omega) = \{\varphi \in L^r(\Omega);\ \nabla\varphi \in L^r(\Omega)\}$$

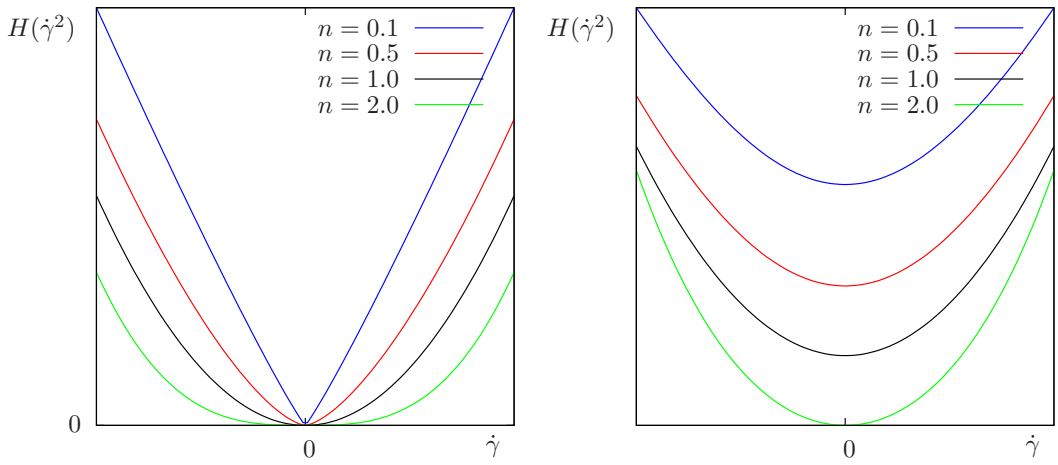


FIGURE 2.3 – Fluide quasi-newtonien : énergie pour les lois de viscosité de puissance (gauche) et Carreau (droite).

Dans le cas de la loi de Carreau, il y a en plus un terme $\eta_\infty|2D(\mathbf{u})|^2$ sous l'intégrale dans l'expression de $J(\mathbf{u})$: pour $\eta_\infty \neq 0$ il faudra donc $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^{1,r}(\Omega)^3$ avec $r = \max(2, 1+n)$. Dans la suite, par soucis de simplicité, on supposera que on utilise la loi puissance ou bien la loi Carreau avec $\eta_\infty = 0$, si bien que $r = 1+n$. Regardons quelle est la régularité minimale requise pour les données $\mathbf{f}$ et $\mathbf{u}_\Gamma$. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale de $\mathbf{f}.\mathbf{v}$ ait un sens pour tout $\mathbf{v} \in W_0^{1,1+\frac{1}{n}}(\Omega)^3$ est que $\mathbf{f}$ appartienne à l'*espace dual* [Bre83, p. 174] de $W_0^{1,1+\frac{1}{n}}(\Omega)^3$, c'est-à-dire $\mathbf{f} \in W^{-1,1+\frac{1}{n}}(\Omega)^3$. De même, une condition nécessaire et suffisante pour que la condition au bord $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma$ sur $\Gamma = \partial\Omega$ ait un sens pour $\mathbf{u} \in W^{1,1+\frac{1}{n}}(\Omega)^3$ est que $\mathbf{u}_\Gamma$ appartienne à l'espace des *traces sur le bord* [GR86, p. 8] des fonctions de $W^{1,1+\frac{1}{n}}(\Omega)^3$, soit encore $\mathbf{u}_\Gamma \in W^{1-\frac{n}{1+n},1+n}(\partial\Omega)^3$. Enfin, pour que le terme $b(\mathbf{v}, p)$ ait un sens, il faut que $p \operatorname{div} \mathbf{u}$ soit sommable. Or $\operatorname{div} \mathbf{u} \in L^{1+n}(\Omega)$: il est nécessaire que $p \in L^{r'}(\Omega)$ avec $1/r' + 1/(1+n) = 1$, soit encore $p \in L^{1+\frac{1}{n}}(\Omega)$.

Par analogie avec le problème de Stokes, introduisons l'espace pour les vitesses :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{g}) &= \{\mathbf{v} \in W^{1,1+n}(\Omega)^3;\ \mathbf{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{g}\} \\ K(\mathbf{g}) &= \{\mathbf{v} \in V(\mathbf{g});\ \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0\} \end{aligned}$$

On a $V(0) = W_0^{1,1+n}(\Omega)^3$. Le problème s'exprime sous forme de minimisation :

$$\mathbf{u} = \underset{\mathbf{v} \in K(\mathbf{u}_\Gamma)}{\arg\min}\, J(\mathbf{v})$$

On montre dans [BN90] que J est convexe et que ce problème admet une solution unique.

Introduisons également les formes :

$$\begin{aligned} a(\overline{\mathbf{u}};\, \mathbf{u},\, \mathbf{v}) &= \int_\Omega 2\eta(|2D(\overline{\mathbf{u}})|^2)\ D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})\, \mathrm{d}x \\ b(\mathbf{v}, q) &= -\int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{v}\, \mathrm{d}x \\ l(\mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

La forme a est linéaire par rapport aux deux dernières variables. La formulation variationnelle du problème s'énonce :

(FV) : *trouver* $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ *et* $p \in L^{1+\frac{1}{n}}(\Omega)$ *tels que*

$$\begin{cases} a(\mathbf{u};\, \mathbf{u},\, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v},\, p) = l(\mathbf{v}) \\ , \quad b(\mathbf{u},\, q) = 0 \end{cases}$$

pour tout $\mathbf{v} \in W_0^{1,1+n}(\Omega)^3$ et $q \in L^{1+\frac{1}{n}}(\Omega)$. Toujours avec les notations du chapitre précédent, introduisons le Lagrangien suivant :

$$L(\mathbf{u},\, p) = J(\mathbf{u}) + b(\mathbf{u},\, p) - (\mathbf{f},\, \mathbf{u})$$

La solution du problème est caractérisée comme le point-de-selle de L, ce qui s'écrit

$$(\mathbf{u}, p) = \arg \inf_{\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)} \sup_{q \in L^{1+\frac{1}{n}}(\Omega)} L(\mathbf{v},\, q)$$

Ainsi, en écrivant que la solution vérifie : $\partial_u L = \partial_p L = 0$ on retrouve la formulation variationnelle. Le lagrangien est convexe en $\mathbf{u}$, du fait de la convexité de J Ainsi ce problème admet une solution unique.

2.5 Exemple 2 : écoulement dans un tuyau

On considère l'écoulement d'un fluide à loi de puissance dans un tuyau rectiligne d'axe Xz et initié par une force de poussée $\mathbf{f} = f\,\mathbf{e}_z$ verticale et constante : c'est l'écoulement de Poiseuille dans un tuyau. Ce peut être une artère ou bien des micro-canaux en biologie, par exemple. L'écoulement, une fois établi, est aussi vertical et le vecteur vitesse et ne dépend que de x et y : $\mathbf{u}(x, y) = (0, 0, u(x, y))$. La contrainte $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ est vérifiée par construction.

Lorsque le tuyau est circulaire, on peut utilise le système de coordonnées cylindrique (r, θ, z) : la solution ne dépendent que de r et le problème est alors similaire à l'exemple précédent (voir section 2.3). Pour un tuyau dont la section est non-circulaire (carrée, rectangulaire, etc), la solution dépend de x et y : c'est un problème bidimensionnel.

Notons Ω la section du tuyau. Notons $\nabla u = (\partial_x u, \partial_y u)$ le gradient de la composante en z de la vitesse dans le plan Oxy. On vérifie sans difficulté que $|2D(\mathbf{u})| = |\nabla u| = ((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2)^{\frac{1}{2}}$, La contrainte d'incompressibilité étant vérifiée, problème se ramène à la minimisation de :

$$J(u) = \frac{K}{1+n} \int_\Omega |\nabla u|^{1+n} \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f \, u \, \mathrm{d}x$$

C'est le problème classique dit du $p-laplacien$, avec $p = 1+n$. Pour $n = 1$ on retrouve une fonctionnelle J quadratique et le système correspondant est linéaire. La Fig. 2.4 représente

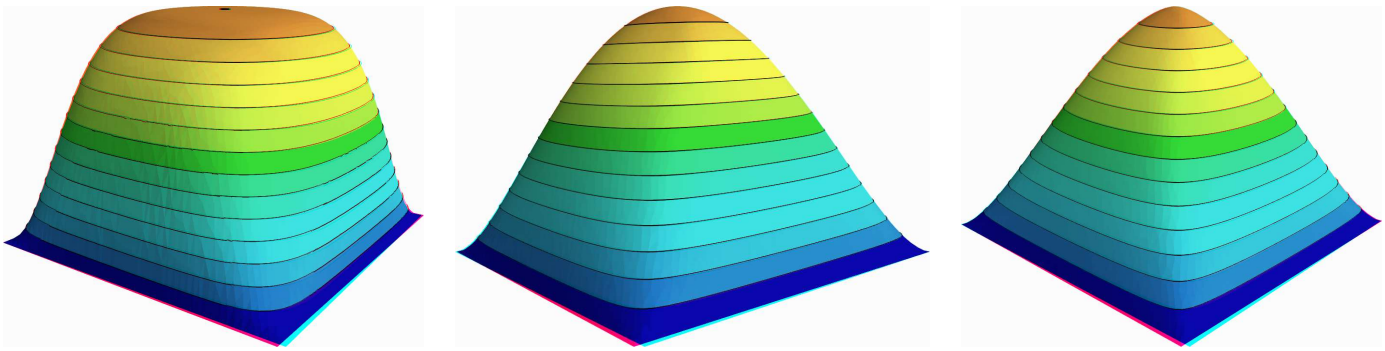


FIGURE 2.4 – Fluide quasi-newtonien à loi de puissance ($n = 0.5, 1, 1.5$) : écoulement de Poiseuille dans un tuyau de section carré représenté en élévation (d'après [Sar11, part 3]).

la solution pour $n = 1/2$ (cas rhéo-fluidifiant), $n = 1$ (cas newtonien), et $n = 3/2$ (cas rhéo-épaississant) pour un écoulement dans un tuyau de section carrée : on pourra penser par exemple à l'écoulement du sang dans des micro-canaux. Nous allons étudier à présent deux algorithmes pour résoudre cette classe de problèmes : l'algorithme du point fixe et la méthode de Newton.

2.6 Algorithme du point fixe

L'idée la plus simple est de résoudre ce problème non-linéaire par un algorithme de point fixe. On construit par récurrence une suite $(\mathbf{u}^{(k)})_{k\geq 0}$ avec $\mathbf{u}^{(0)}$ donné et, à l'étape k, connaissant $\mathbf{u}^{(k-1)}$, nous calculons $\mathbf{u}^{(k)}$ solution de :

$$(FV) : \textit{trouver } \mathbf{u}^{(k)} \in V(\mathbf{u}_\Gamma) \textit{ et } p^{(k)} \in L^{1+\frac{1}{n}}(\Omega) \textit{ tels que}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(\mathbf{u}^{(k-1)}; \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}) \;+\; b(\mathbf{v}, p^{(k)}) & = & (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}^{(k)}, q) & = & 0 \end{array} \right.$$

pour tout $\mathbf{v} \in w_0^{1,1+n}(\Omega)^3$ et $q \in L1 + \frac{1}{n}(\Omega)$. L'opérateur qui, aux seconds membres $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ associe $\mathbf{u}^{(k)}$, est linéaire. Ainsi, à chaque itération, $\mathbf{u}^{(k-1)}$, étant connu, le système est linéaire. Reste à savoir si la suite converge.

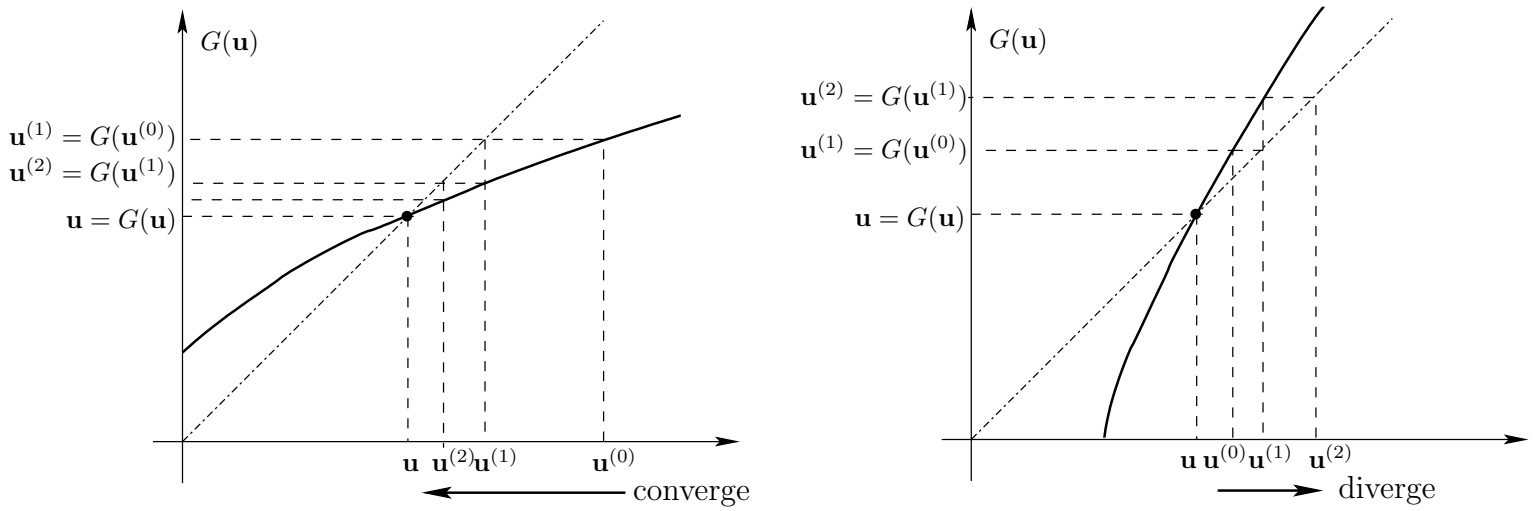


FIGURE 2.5 – Méthode du point fixe : (gauche) cas convergent ; (droite) cas divergent.

Notons G l'opérateur qui, à la donnée $\mathbf{u}^{(k-1)}$, associe la solution $\mathbf{u}^{(k)} = G(\mathbf{u}^{(k-1)})$ du problème précédent. Cette fois-ci, G n'est pas linéaire. Nous cherchons a obtenir $\mathbf{u} = G(\mathbf{u})$, soit le point fixe de G. Par récurrence on a $\mathbf{u}^{(k)} = G^k(\mathbf{u}^{(0)})$. On observe sur la Fig. 2.5 que la solution $\mathbf{u}^{(k)}$ ne converge vers $\mathbf{u}$ solution du problème non-linéaire que dans certains cas : une condition suffisante est que $|G'| < 1$ dans un voisinage de $\mathbf{u}$ et contenant $\mathbf{u}^{(0)}$. Dans ce cas, G est dit contractant dans ce voisinage de $\mathbf{u}$. Pour s'en convaincre, considérons le cas $G(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}$, avec $\alpha > 0$ constante. Alors $\mathbf{u}^{(k)} = \alpha^k\,\mathbf{u}^{(0)}$ ne converge vers $\mathbf{u} = 0$ que si $|G'| = \alpha < 1$.

Dans la pratique il est difficile de savoir si G est contractant ou non. On observe, pour le problème qui nous intéresse, que l'algorithme ne converge que pour $n \in]0, 2[$ (voir [Sar11, part 3]). Ceci recouvre cependant les valeurs utilisés en pratique pour n : généralement $0 < n < 1$. Dans le cas où $n > 2$, il est possible de faire converger cet algorithme en utilisant un algorithme de point fixe avec relaxation (voir également [Sar11, part 3]). Cet algorithme est facile à mettre en œuvre en pratique, en partant d'un code de Stokes ou Navier-Stokes. Cependant, la convergence est lente et on lui préfère la méthode de Newton (voir Fig. 2.6).

2.7 Algorithme de Newton

Posons :

$$F(\mathbf{u}, p) = \begin{pmatrix} F_u(\mathbf{u}, p) \\ F_p(\mathbf{u}, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{div}\,\{2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2)\,D(\mathbf{u})\} + \nabla p - \rho\mathbf{g} \\ -\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \end{pmatrix}$$

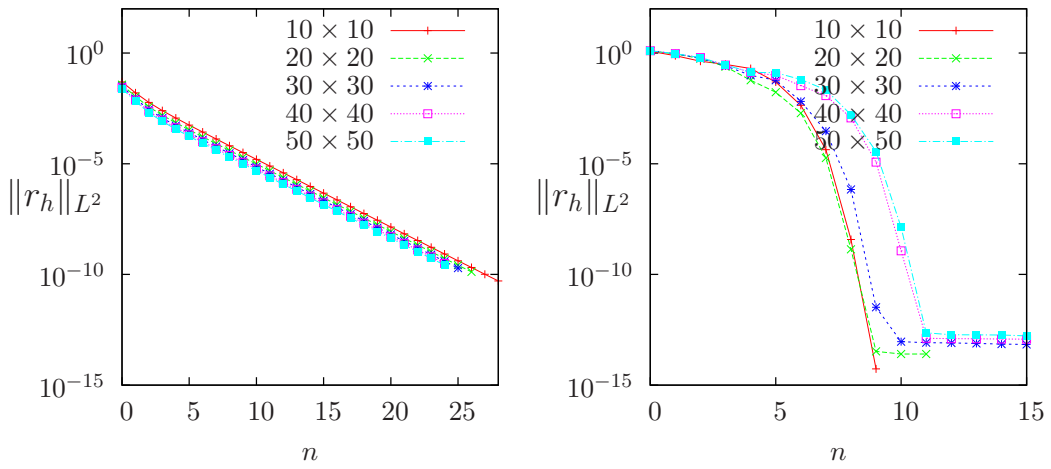


FIGURE 2.6 – Convergence du résidu pour le point fixe (gauche) et la méthode de Newton (droite) pour $n = 0.5$ (source : logiciel libre Rheolef [Sar11]).

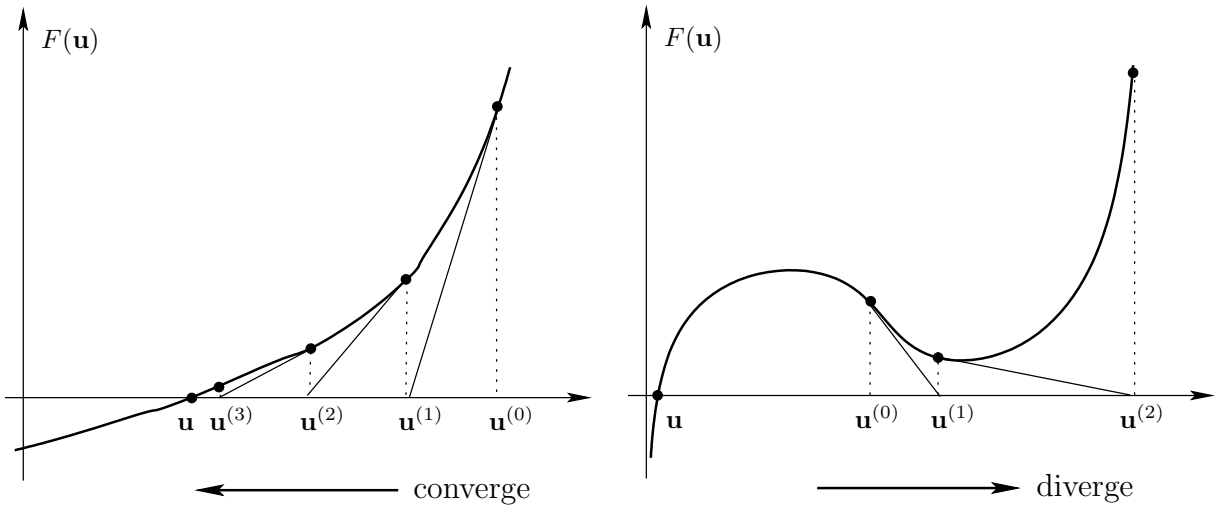


FIGURE 2.7 – Méthode de Newton : (gauche) cas convergent ; (droite) cas divergent.

Le problème peut se formuler : trouver $(\mathbf{u}, p)$ tels que $F(\mathbf{u}, p) = 0$. Le problème, sous cette forme, est susceptible d'être résolu par la méthode de Newton. Posons $\chi = (\mathbf{u}, p)$. On construit par récurrence une suite $(\chi^{(k)})_{k\geq 0}$ avec $\chi^{(0)}$ donné et, à l'étape $k+1$, connaissant $\chi^{(k)}$, nous calculons $\chi^{(k+1)}$ comme intersection de la tangente en $\chi^{(k)}$ à la courbe $Y = F(\chi)$ avec l'axe $Y = 0$. La tangente au point $(\chi^{(k)}, F(\chi^{(k)}))$ est l'ensemble des points (X, Y) tels que :

$$Y - F(\chi^{(k)}) = F'(\chi^{(k)}).(X - \chi^{(k)})$$

Cette droite intersecte l'axe horizontal $Y = 0$ en $X = \chi^{(k+1)}$, et le calcul de cette intersection s'écrit :

$$\begin{aligned} F'(\chi^{(k)}).(\delta\chi^{(k)}) &= -F(\chi^{(k)}) \\ \chi^{(k+1)} &= \chi^{(k)} + \delta\chi^{(k)} \end{aligned}$$

Ici F' désigne la dérivée de Gâteaux de F :

$$F'(\chi).(\delta\chi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{F(\chi + \varepsilon\,\delta\chi) - F(\chi)}{\varepsilon}$$

On observe sur la Fig. 2.7 que la solution $\mathbf{u}^{(k)}$ ne converge vers $\mathbf{u}$ solution du problème non-linéaire que dans certains cas : une condition suffisante est que $|F'|$ ne s'annule pas dans un voisinage de $\mathbf{u}$ et contenant $\mathbf{u}^{(0)}$. Lorsque cette méthode converge, elle converge bien plus vite que la méthode du point fixe. De plus, dans la pratique, on sait construire des variantes de la méthode de Newton et qui convergent globalement. Pour cela, lorsque nous ne sommes pas dans un voisinage favorable, le pas $\delta\chi^{(k)}$ est réduit d'un facteur $\varepsilon_k \in]0, 1]$:

$$\chi^{(k+1)} = \chi^{(k)} + \varepsilon_k \delta\chi^{(k)}$$

Le facteur ε_k devient égal à un lorsque le voisinage est favorable. Pour plus de détails sur l'implémentation de cette méthode, voir [Sar11, part 3]. Regardons à présent plus en détails comment s'écrit le calcul du pas $\delta\chi^{(k)}$.

Pour pouvoir utiliser cette méthode en pratique, il nous reste à calculer F', la dérivée de Gâteaux de F. Pour toutes directions $(\delta\mathbf{u}, \delta p)$, on a :

$$F'(\mathbf{u}, p).(\delta\mathbf{u}, \delta p) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_u}{\partial u}(\mathbf{u}, p).(\delta\mathbf{u}) + \dfrac{\partial F_u}{\partial p}(\mathbf{u}, p).(\delta p) \\ \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial u}(\mathbf{u}, p).(\delta\mathbf{u}) + \dfrac{\partial F_p}{\partial p}(\mathbf{u}, p).(\delta p) \end{pmatrix}$$

Rappelons que $|\tau|^2 = \tau : \tau/2$. La dérivée de Gâteaux de la fonction

$$f(\mathbf{u}) = |2D(\mathbf{u})|^2 = \frac{2D(\mathbf{u}) : 2D(\mathbf{u})}{2} = 2D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{u})$$

est définie pour toute direction $\delta\mathbf{u}$ par :

$$f'(\mathbf{u}).(\delta\mathbf{u}) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\mathbf{u}+\varepsilon\delta\mathbf{u}) - f(\mathbf{u})}{\varepsilon}$$

Par un simple développement au premier ordre :

$$f(\mathbf{u}+\varepsilon\delta\mathbf{u}) = f(\mathbf{u}) + \varepsilon\ 4D(\mathbf{u}):D(\delta\mathbf{u}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Ainsi :

$$f'(\mathbf{u}).(\delta\mathbf{u}) = 4D(\mathbf{u}):D(\delta\mathbf{u})$$

De même, la dérivée de Gâteaux de la fonction composée :

$$g(\mathbf{u}) = \eta(|2D(\mathbf{u})|^2) = \eta\circ f(\mathbf{u})$$

est définie par :

$$\begin{aligned} g'(\mathbf{u}).(\delta\mathbf{u}) &= \eta'\circ f(\mathbf{u})\ f'(\mathbf{u}).(\delta\mathbf{u}) \\ &= 4\eta'(|2D(\mathbf{u})|^2)\ (D(\mathbf{u}):D(\delta\mathbf{u})) \end{aligned}$$

Enfin, la dérivée de Gâteaux de la fonction produit :

$$h(\mathbf{u}) = \mathbf{div}\,\{2g(\mathbf{u})D(\mathbf{u})\}$$

est définie par :

$$\begin{aligned} h'(\mathbf{u}).(\delta\mathbf{u}) &= \mathbf{div}\,\{(2g'(\mathbf{u}).(\delta\mathbf{u}))\ D(\mathbf{u}) + 2g(\mathbf{u})\ D(\delta\mathbf{u})\} \\ &= \mathbf{div}\,\left\{8\eta'(|2D(\mathbf{u})|^2)\ (D(\mathbf{u}):D(\mathbf{v}))\ D(\mathbf{u}) + 2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2)\ D(\mathbf{v})\right\} \end{aligned}$$

Afin d'alléger les notations, on omet l'indice k : on note simplement $(\bar{\mathbf{u}},\bar{p})$ la solution à l'étape k ainsi que le pas $\delta\chi^{(k)} = (\delta\mathbf{u},\delta p)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} &F'(\bar{\mathbf{u}},\bar{p})(\delta\mathbf{u},\delta p) \\ &= \begin{pmatrix} -\mathbf{div}\,\{2\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ D(\delta\mathbf{u}) + 8\eta'(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ (D(\bar{\mathbf{u}}):D(\delta\mathbf{u}))\ D(\bar{\mathbf{u}})\} + \nabla(\delta p) \\ \\ -\ \mathrm{div}(\delta\mathbf{u}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On pose $(\mathbf{r}_u, r_p) = -F(\bar{\mathbf{u}},\bar{p})$. Le problème à l'étape k se ramène à trouver $(\delta\mathbf{u},\delta p)$ solution de :

$$\begin{aligned} -\mathbf{div}\left\{2\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ D(\delta\mathbf{u}) + 8\eta'(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ (D(\bar{\mathbf{u}}):D(\delta\mathbf{u}))\ D(\bar{\mathbf{u}})\right\} + \nabla(\delta p) &= \mathbf{r}_u \\ -\ \mathrm{div}(\delta\mathbf{u}) &= r_p \end{aligned}$$

Afin de discrétiser ce problème et de le résoudre, nous allons en écrire la formulation variationnelle. Posons

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\bar{\mathbf{u}};\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{v}) &= \int_\Omega 2\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ (D(\delta\mathbf{u}):D(\delta\mathbf{v}))\ \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega 2\eta'(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ (2D(\bar{\mathbf{u}}):D(\delta\mathbf{u}))\ (2D(\bar{\mathbf{u}}):D(\delta\mathbf{v}))\ \mathrm{d}x \\
l_u(\delta\mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathbf{r}_u.\delta\mathbf{v}\ \mathrm{d}x \\
l_p(\delta q) &= \int_\Omega r_p\,\delta q\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Le système linéaire à résoudre à chaque étape de la méthode de Newton s'écrit :

(FV) : *trouver* $\delta\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$ *et* $\delta p \in L^2(\Omega)$ *tels que*

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\tilde{a}(\bar{\mathbf{u}};\,\delta\mathbf{u},\,\delta\mathbf{v}) \ + \ b(\delta\mathbf{v},\,\delta p) &=& l_u(\delta\mathbf{v}) \\
b(\delta\mathbf{u},\,\delta q) &=& l_p(\delta q)
\end{array}\right.$$

ceci pour tout $\delta\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$ et $\delta q \in L^2(\Omega)$. Pour que les intégrales dans la définition de $\tilde{a}$ aient un sens pour tout $\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$, nous devons supposer que $\bar{\mathbf{u}} \in W^{1,\infty}(\Omega)^3$. Une condition suffisante pour que le système linéaire soit bien posé est que la forme bilinéaire $\tilde{a}$ soit *coercive* dans $H_0^1(\Omega)^3$:

$$\forall\bar{\mathbf{u}} \in W^{1,\infty}(\Omega)^3,\ \exists\alpha > 0\ /\ \tilde{a}(\bar{\mathbf{u}};\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u})\ \geq\ \alpha\|\delta\mathbf{u}\|_{1,2,\Omega}^2,\ \forall\delta\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)^3$$

Remarquons que

$$\begin{aligned}
\tilde{a}(\bar{\mathbf{u}};\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u}) &= \int_\Omega 4\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ \left(\frac{D(\delta\mathbf{u}):D(\delta\mathbf{u})}{2}\right)\ \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega 8\eta'(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ \left(\frac{2D(\bar{\mathbf{u}}):D(\delta\mathbf{u})}{2}\right)^2\ \mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega 4\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ |D(\delta\mathbf{u})|^2\ \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega 8\eta'(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ \left(\frac{2D(\bar{\mathbf{u}}):D(\delta\mathbf{u})}{2}\right)^2\ \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

car $\tau : \tau = 2|\tau|^2$ pour la norme matricielle choisie. Dans le cas où $\eta' > 0$, on obtient directement :

$$\tilde{a}(\bar{\mathbf{u}};\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u})\ \geq\ \inf_{x\in\Omega}\mathrm{ess}\, 2\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})(x)|^2)\ \|D(\delta\mathbf{u})\|_{0,\Omega}^2$$

L'inégalité de Korn permet de conclure à la coercivité de $\tilde{a}$. Ainsi, lorsque η est strictement positive et croissante (loi de Carreau avec $n > 1$ et $\eta_0 > 0$) nous pouvons conclure à la stricte coercivité. Pour la loi de puissance avec $n > 1$, η peut s'annuler lorsque $D(\delta\mathbf{u})$

s'annule, et la forme bilinéaire n'est alors plus nécessairement coercive strictement : dans la pratique, ceci peut arriver ponctuellement en un point, par exemple en un sommet du maillage situé sur un axe de symétrie. Dans ce cas la matrice jacobienne du système discret devient singulière.

Le cas $\eta' < 0$ demande un peu plus de travail. C'est le cas le plus courant dans les applications : loi de puissance avec $0 < n < 1$. De Cauchy-Schwartz :

$$\begin{aligned}\left(\frac{2D(\bar{\mathbf{u}}):D(\delta\mathbf{u})}{2}\right)^2 &\leq \left(\frac{2D(\bar{\mathbf{u}}):2D(\bar{\mathbf{u}})}{2}\right)^2 \left(\frac{D(\delta\mathbf{u}):D(\delta\mathbf{u})}{2}\right)^2 \\ &= |2D(\bar{\mathbf{u}})|^2 \ \ |D(\delta\mathbf{u}))|^2\end{aligned}$$

car $\tau : \tau = 2|\tau|^2$ pour la norme matricielle choisie. D'où, en multipliant par $\eta' < 0$, il vient :

$$\begin{aligned}\tilde{a}(\bar{\mathbf{u}};\delta\mathbf{u},\delta\mathbf{u}) &\geq \int_\Omega \left\{4\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2) + 8\eta'(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ |2D(\bar{\mathbf{u}})|^2\right\}\ |D(\delta\mathbf{u})|^2\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega 4\nu(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)\ |D(\delta\mathbf{u})|^2\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

avec $\nu(\xi) = \eta(\xi) + 2\eta'(\xi)\,\xi$. Étudions le signe de ν.

Pour la loi de puissance, on a :

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= K\xi^{\frac{-1+n}{2}} \\ \eta'(\xi) &= \frac{(-1+n)K}{2}\xi^{\frac{-3+n}{2}} \\ \nu(\xi) &= nK\xi^{\frac{-1+n}{2}} \ \geq\ 0, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Pour la loi de Carreau, on a :

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= \eta_\infty + (\eta_0-\eta_\infty)(1+\lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}}, \\ \eta'(\xi) &= \frac{(-1+n)\lambda}{2}(\eta_0-\eta_\infty)(1+\lambda\xi)^{\frac{-3+n}{2}}, \\ \nu(\xi) &= \eta_\infty + n\lambda(\eta_0-\eta_\infty)(1+\lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}} \ \geq\ 0, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^+\end{aligned}$$

Finalement, nous pouvons conclure à la stricte coercivité de $\tilde{a}$ pour la loi de Carreau pour les valeurs de $0 < n < 1$ et $\eta_\infty > 0$, ou $n > 1$ et $\eta_0 > 0$. Dans le cas de la loi puissance ou bien de la loi de Carreau avec $0 < n < 1$ et $\eta_\infty = 0$, ou $n > 1$ et $\eta_0 = 0$, la forme bilinéaire n'est plus nécessairement coercive strictement lorsque $D(\bar{\mathbf{u}})$ s'annule. Ceci peut arriver par exemple en un sommet du maillage situé sur un axe de symétrie. Dans ce cas la matrice jacobienne du système discret devient singulière. D'une façon générale, le fait que la matrice jacobienne soit singulière peut exprimer simplement qu'il existe une multiplicité de directions admissibles pour la méthode de Newton : il suffit alors d'en sélectionner une qui convienne. Dans la pratique, on observe que la méthode de Newton est très performante (voir Fig. 2.6) quoique plus complexe à mettre en oeuvre que la méthode du point fixe. Nous renvoyons à [Sar11, part 3] pour l'implémentation pratique de ces deux méthodes.

Chapitre 3

Fluides viscoplastiques

3.1 Loi de comportement

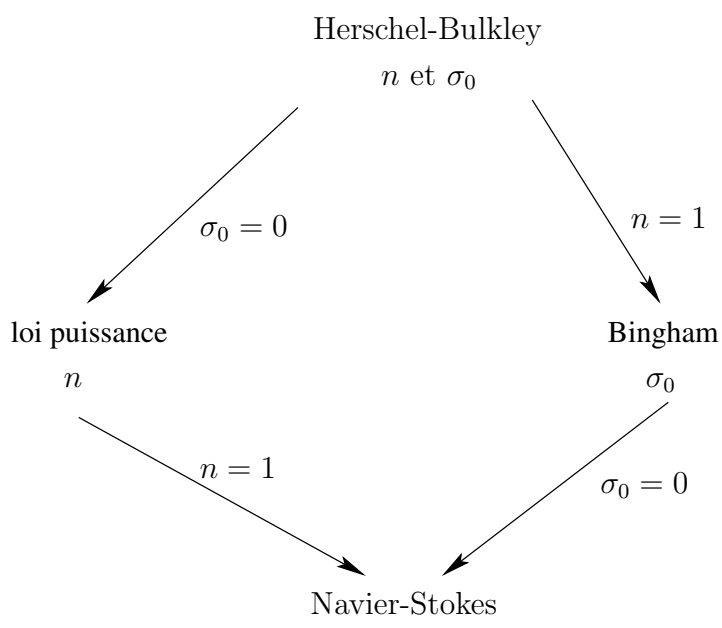


FIGURE 3.1 – Fluides viscoplastiques : une hiérarchie de modèles.

Il est commode, dans la perspective de méthodes numériques, de manipuler des problèmes de minimisation. Pour cela, posons $G = 2D(\mathbf{u})$ et introduisons l'énergie de dissipation suivante :

$$\mathscr{D}(G) = \frac{K}{1+n}|G|^{1+n} + \sigma_0|G|, \quad \forall G \in \mathbb{R}_s^{d\times d} \tag{3.1}$$

avec toujours $|G|^2 = (G:G)/2$ et $(G,H)^2 = (G:H)/2$ le produit scalaire associé. On a $K > 0$ et $n > 0$ correspondent aux paramètres de la loi de puissance précédemment étudié et $\sigma_0 \geq 0$ est appelé la contrainte seuil. Pour $\sigma_0 = 0$, on retrouve le modèle dit loi de puissance précédent, qui se réduit au cas d'un fluide newtonien pour $n = 1$. Pour $n = 1$ et $\sigma_0 > 0$ ce modèle s'appelle fluide de Bingham [Bin22]. Dans le cas général $n > 0$ et $\sigma_0 > 0$ le modèle (3.1) a été introduit par Herschel et Bulkley [HB26]. Ce modèle recouvre ainsi les modèles que nous avons abordé précédemment (voir Fig. 3.1). Le problème de

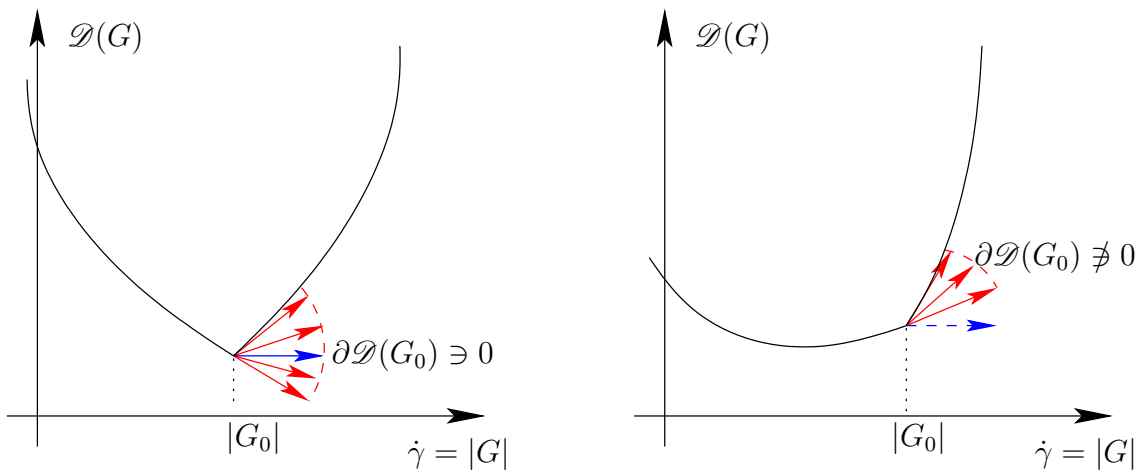


FIGURE 3.2 – Minimisation d'une énergie non-différentiable : (gauche) $0 \in \mathscr{D}(G_0)$; (droite) $0 \notin \mathscr{D}(G_0)$.

minimisation s'écrit :

$$\mathbf{u} = \underset{\mathbf{v}\in K(\mathbf{u}_\Gamma)}{\arg\min}\, J(\mathbf{v})$$

avec

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}) &= \int_\Omega \mathscr{D}(2D(\mathbf{v}))\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{K}{1+n}\int_\Omega |2D(\mathbf{v})|^{1+n}\,\mathrm{d}x + \sigma_0 \int_\Omega |2D(\mathbf{v})|\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Ici, l'énergie de dissipation $\mathscr{D}$ n'est plus différentiable dès que $\sigma_0 \neq 0$. Par contre elle est convexe, comme somme de fonctions convexes, et on peut définir son sous-différentiel :

$$\partial\mathscr{D}(G) = \{\sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}_s;\ \mathscr{D}(\chi) - \mathscr{D}(G) \ \geq\ \frac{\sigma:(\chi - G)}{2},\ \forall \chi \in \mathbb{R}^{d\times d}_s\} \tag{3.2}$$

Ceci exprime que toutes les tangentes possibles en $(G, \mathscr{D}(G))$ sont situées sous la courbe convexe. Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (voir Fig. 3.2), cette notion se réduit, si $\mathscr{D}$ est différentiable à gauche et à droite, à $\partial\mathscr{D}(G_0) = [\mathscr{D}'_-(G_0), \mathscr{D}'_+(G_0)]$.

Rappelons que le tenseur des contraintes totales de Cauchy se décompose $\sigma_{\text{tot}} = -p.I + \sigma$ où $-p.I$ est la partie *sphérique* et p la pression, et σ la partie *déviatrice*. Par définition, pour un fluide viscoplastique, σ est donné par :

$$\sigma \in \partial\mathscr{D}(2D(\mathbf{u})) \tag{3.3}$$

Clairement, il n'y a pas unicité des contraintes déviatrices σ, car l'ensemble $\mathscr{D}(2D(\mathbf{u}))$ ne contient pas qu'un seul élément en général. Il reste à calculer concrètement le sous-différentiel $\partial\mathscr{D}$ selon (3.2) lorsque l'énergie de dissipation $\mathscr{D}$ est donnée par (3.1). Lorsque $G = 2D(\mathbf{u}) \neq 0$, alors $\mathscr{D}(G)$ est dérivable et la définition du sous-différentiel coïncide du ici avec la dérivée usuelle. Calculons $\mathscr{D}'(G)$ lorsque $G \neq 0$. Posons $\psi(G) = |G|^2 = G\!:\!G/2$. De la définition de la dérivée directionnelle, pour tout $H \in \mathbb{R}_s^{d\times d}$:

$$\begin{aligned}
\psi'(G).(H) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\psi(G+\varepsilon H) - \psi(G)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{(G+\varepsilon H)\!:\!(G+\varepsilon H) - G\!:\!G}{2\varepsilon} \\
&= G\!:\!H \\
&= \frac{(2G\!:\!H)}{2} \\
&= \frac{(\psi'(G)\!:\!H)}{2}
\end{aligned}$$

Il vient finalement $\psi'(G) = 2G$. Nous avons

$$\mathscr{D}(G) = (K/(1+n))\psi(G)^{\frac{1+n}{2}} + \sigma_0\psi(G)^{\frac{1}{2}}$$

Ainsi, pour $G \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{D}'(G) &= \frac{K}{2}\psi(G)^{\frac{-1+n}{2}}\psi'(G) + \frac{\sigma_0}{2}\psi(G)^{-\frac{1}{2}}\psi'(G) \\
&= K|G|^{-1+n}G + \sigma_0\frac{G}{|G|}
\end{aligned}$$

Pour $G = 0$, par contre, la dérivé est multi-valuée, c'est un ensemble de valeurs. On a $\mathscr{D}(0) = 0$ et $\sigma \in \partial\mathscr{D}(0)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}(\chi) \geq \frac{\sigma\!:\!\chi}{2},\ \forall\chi \in \mathbb{R}_s^{d\times d} \\
\iff\ &\frac{K}{1+n}|\chi|^{1+n} + \sigma_0|\chi| \geq \frac{\sigma\!:\!\chi}{2},\ \forall\chi \in \mathbb{R}_s^{d\times d}
\end{aligned}$$

Une condition suffisante pour que $\sigma \in \partial\mathscr{D}(0)$ est :

$$\sigma_0|\chi| \geq \frac{\sigma\!:\!\chi}{2},\ \forall\chi \in \mathbb{R}_s^{d\times d}$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwartz pour le produit scalaire sur les tenseurs $|\chi|^2 = \chi : \chi/2$:

$$|\sigma|\ |\chi| \geq \frac{\sigma : \chi}{2},\ \forall \sigma, \chi \in \mathbb{R}_s^{d\times d}$$

nous obtenons une condition suffisante pour que $\sigma \in \partial\mathscr{D}(0)$: $|\sigma| \leq \sigma_0$. Montrons que cette condition est nécessaire. Supposons $|\sigma| > \sigma_0$ et montrons que $\sigma \notin \partial\mathscr{D}(0)$. Si $|\sigma| > \sigma_0 \geq 0$ alors $\sigma \neq 0$ et choisissons χ de la forme $\chi = \alpha\sigma/|\sigma|$, où $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sera choisis plus loin. Alors $|\chi| = \alpha$ et

$$\mathscr{D}(\chi) - \frac{\sigma : \chi}{2} \quad = \quad \frac{K\alpha^{1+n}}{1+n} - (\sigma - \sigma_0)\alpha$$

Puisque $\sigma - \sigma_0 > 0$, cette quantité devient négative en choisissant α assez petit, precisément $\alpha < \alpha_c$, avec $\alpha_c = ((1+n)(|\sigma| - \sigma_0)/K)^{1/n}$. Ainsi, une condition nécessare et suffisqante pour que $\sigma \in \partial\mathscr{D}(0)$ est $|\sigma| \leq \sigma_0$. Finalement :

$$\partial\mathscr{D}(G) = \begin{cases} \left\{\sigma = K|G|^{-1+n}\, G + \sigma_0 \dfrac{G}{|G|}\right\}, & \text{si } G \neq 0 \\ \\ \{\sigma,\ \ |\sigma|\ \leq\ \sigma_0\}, & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que la norme du déviateur des contraintes $|\sigma|$ s'exprime assez simplement en

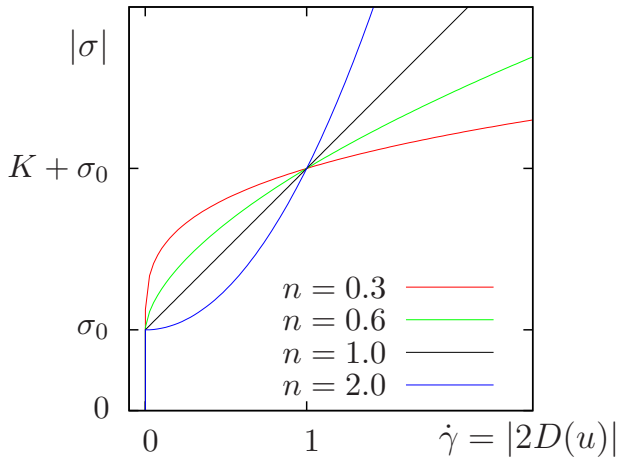


FIGURE 3.3 – Fluide viscoplastiques : norme des contraintes $|\sigma|$ en fonction de celle des taux de déformation $|2D(\mathbf{u})|$.

fonction de celle des taux de déformation $|2D(\mathbf{u})|$ (voir Fig. 3.3) :

$$\begin{cases} |\sigma| = K|2D(\mathbf{u})|^n + \sigma_0 & \text{si } |2D(\mathbf{u})| \neq 0 \\ |\sigma| \leq \sigma_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On complète cette équation constitutive (3.3) avec la conservation de la quantité de mouvement (1.3) et la relation d'incompressibilité (1.6), ainsi que des conditions aux bords et initiales pour obtenir un problème à trois inconnues :

trouver σ, $\mathbf{u}$ et p, dfinis dans $]0,T[\times\Omega$ tels que

$$\begin{cases} \sigma = K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n}\,2D(\mathbf{u}) + \sigma_0 \dfrac{2D(\mathbf{u})}{|2D(\mathbf{u})|}, & \text{si } 2D(\mathbf{u}) \neq 0 \\ |\sigma| \leq \sigma_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rho\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) - \mathbf{div}\,\sigma + \nabla p &= \rho\mathbf{g} && \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{dans }]0,T[\times\Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\Gamma && \text{sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 && \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

où les conditions aux bords et initiales $\mathbf{u}_\Gamma$ et $\mathbf{u}_0$ sont données.

Lorsqu'on discrétise ce problème en temps par la méthode des caractéristiques, on se ramène à chaque pas de temps à un problème de structure très similaire qui ne dépend que des variables d'espace :

(P) : trouver σ, $\mathbf{u}$ et p, dfinis dans Ω tels que

$$\begin{cases} \sigma = K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n}\,2D(\mathbf{u}) + \sigma_0 \dfrac{2D(\mathbf{u})}{|2D(\mathbf{u})|}, & \text{si } 2D(\mathbf{u}) \neq 0 \\ |\sigma| \leq \sigma_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{u} - \mathbf{div}\,\sigma + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\Gamma && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\alpha = \rho/\Delta t$ et $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g} + \alpha\bar{\mathbf{u}} \circ X$ est donné, avec $\bar{\mathbf{u}}$ la vitesse à l'itération précédente. On obtient également ce problème lorsqu'on cherche la solution stationnaire du problème en temps et qu'on néglige le terme d'inertie $\rho\,\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}$: dans ce cas $\alpha = 0$ et $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$. Le cas $\alpha \neq 0$ n'ajoute pas de difficulté supplémentaire, et pour simplifier, on traitera dans la suite le problème avec $\alpha = 0$.

3.2 Exemple 1 : écoulement de Poiseuille

On étend l'exemple d'un écoulement entre deux plans introduit à la section 2.3, page 35, à un fluide viscoplastique. La pression est donné par $p(z) = -fz$. Le tenseur symétrique σ n'a plus qu'une composante non-nulle $\sigma_{xz}(x)$. Le problème se réduit à :

(P) : trouver σ_{xz} et u, définis dans $]-L, L[$ et tels que

$$\begin{cases} \sigma_{xz}(x) = K|u'(x)|^{-1+n}\, u'(x) + \sigma_0 \dfrac{u'(x)}{|u'(x)|}, & \text{si } u'(x) \neq 0 \\ |\sigma_{xz}(x)| \leq \sigma_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\sigma'_{xz} - f &= 0 \quad \text{dans }]-L, L[\\ u(-L) = u(L) &= 0 \end{aligned}$$

On se donne une contrainte représentative $\Sigma = fL$ et une vitesse représentative U telle que $K(U/L)^n = \Sigma$ et on effectue le changement d'inconnues :

$$x = L\tilde{x}, \quad u = U\tilde{u}, \quad \sigma_{xz} = \Sigma\tilde{\sigma}_{xz}$$

Le système se réduit à un problème avec seulement deux paramètres n et le nombre $Bi = \sigma_0/(fL)$ de Bingham, qui mesure le rapport du seuil de contrainte sur la charge. Comme il n'y a plus d'ambiguïté, on omet les tildes :

(P) : trouver σ_{xz} et u, définis dans $]-1, 1[$ et tels que

$$\begin{cases} \sigma_{xz}(x) = |u'(x)|^{-1+n}\, u'(x) + Bi \dfrac{u'(x)}{|u'(x)|}, & \text{si } u'(x) \neq 0 \\ |\sigma_{xz}(x)| \leq Bi & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\sigma'_{xz} - 1 &= 0 \quad \text{dans }]-1, 1[\\ u(-1) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Remarquons que la solution est paire : $u(-x) = u(x)$. On obtient $\sigma_{xz}(x) = -x$ et le critère

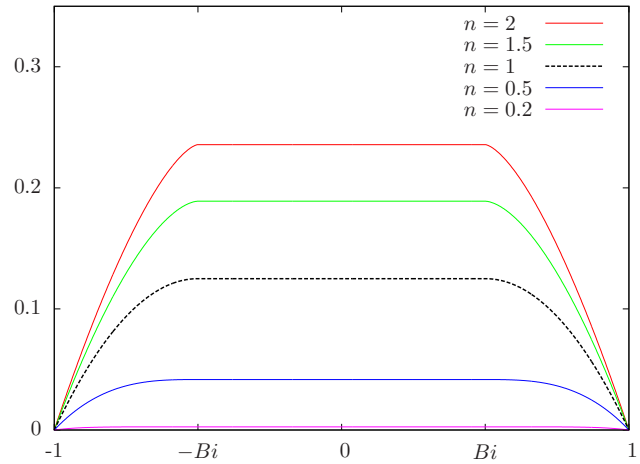


FIGURE 3.4 – Fluide viscoplastique :écoulement de Poiseuille pour $Bi = 1/2$.

de seuil donne $u(x) = 0$ quand $|x| \leq Bi$. Autrement dit, la charge est plus faible que le seuil, et l'écoulement est nul. Si $Bi > 1$ la solution est $u = 0$. Sinon, pour $|x| > Bi$, on

obtient $|u'(x)|^n + Bi = |x|$ et finalement, avec les conditions aux limites et la continuité en $x = \pm Bi$:

$$u(x) = \frac{(1 - Bi)^{1+\frac{1}{n}} - \max(0,\, |x| - Bi)^{1+\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Cette solution est représentée sur la Fig. 3.4.

3.3 Formulation variationnelle

Décomposons l'énergie de dissipation $\mathscr{D} = \mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2$ suivant :

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_1(G) &= \frac{K}{1+n}|G|^{1+n} \\ \mathscr{D}_2(G) &= \sigma_0|G|, \quad \forall G \in \mathbb{R}_s^{d\times d} \end{aligned}$$

où $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont convexes. Ainsi, $\sigma \in \mathscr{D}_1$ est caractérisé comme étant la somme $\sigma = \tau_1 + \tau_2$, avec $\tau_1 \in \mathscr{D}_1(G)$ et $\tau_2 \in \mathscr{D}_2(G)$. Remarquons que $\mathscr{D}_1$ est différentiable : son sous-différentiel ne contient qu'un élément et $\partial\mathscr{D}_1(G) = \{\tau_1 = K|G|^{-1+n}G\}$. Ainsi, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} \sigma \in \partial\mathscr{D}(G) &\iff \exists \tau_2 \in \partial\mathscr{D}_2(G) \ / \ \sigma = K|G|^{-1+n}\, G + \tau_2 \\ &\iff \sigma - K|G|^{-1+n}\, G \in \partial\mathscr{D}_2(G) \\ &\iff \mathscr{D}_2(\chi) - \mathscr{D}_2(G) \ \geq \frac{(\sigma - \ K|G|^{-1+n}\ G) : (\chi - G)}{2}, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}_s^{d\times d} \end{aligned}$$

La dernière relation provient de la convexité de $\mathscr{D}_2$ et de la définition (3.2) du sous-différentiel $\partial\mathscr{D}_2(G)$. Choisissons $G = 2D(\mathbf{u})$: la contrainte $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$ s'écrit aussi $\mathrm{tr}(G) = 0$. De même, choisissons $\chi = 2D(\mathbf{v})$ avec $\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$ et $\mathbf{v}$ représente une fonction test. En intégrant sur Ω la relation précédente, et en réarrangeant les termes, il vient l'inéquation variationnelle suivante :

$$\int_\Omega K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v} - \mathbf{u})\, \mathrm{d}x + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \ \geq \ \int_\Omega \sigma : D(\mathbf{v} - \mathbf{u})\, \mathrm{d}x$$

où on a posé :

$$j(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathscr{D}_2(2D(\mathbf{v}))\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \sigma_0 |2D(\mathbf{v})|\, \mathrm{d}x$$

Comme pour les fluides quasi-newtoniens du chapitre précédent, on introduit les espaces :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{g}) &= \{\mathbf{v} \in W^{1,1+n}(\Omega)^3;\ \mathbf{u}_{|\partial\Omega} = \mathbf{g}\} \\ Q &= L^{1+\frac{1}{n}}(\Omega) \end{aligned}$$

En multipliant la conservation de la quantité de mouvement $-\mathbf{div}\,\sigma + \nabla p = \mathbf{f}$ par $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ s'annulant sur le bord et en intégrant par parties :

$$\int_\Omega \sigma : D(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,\mathrm{d}x - \int_\Omega p\ \mathrm{div}(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \mathbf{f}.(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,\mathrm{d}x$$

En ajoutant cette équation à l'inéquation variationnelle précédente, et en incorporant la relation d'incompressibilité, il vient la formulation variationnelle du problème :

(FV) : trouver $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ et $p \in Q$ tels que

$$\begin{aligned} \int_\Omega 2K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,\mathrm{d}x & \\ +j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) - \int_\Omega p\ \mathrm{div}(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,\mathrm{d}x &\geq \int_\Omega \mathbf{f}.(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,\mathrm{d}x \\ - \int_\Omega q\ \mathrm{div}(\mathbf{u})\,\mathrm{d}x &= 0 \end{aligned}$$

ceci pour tout $\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ et $q \in Q$. Remarquons que la fonction test $\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ n'est pas nulle sur le bord : c'est $\mathbf{v} - \mathbf{u} \in V(0)$ qui s'annule au bord.

Introduisons le noyau de l'opérateur divergence :

$$K(\mathbf{g}) = \left\{ \mathbf{v} \in V(\mathbf{g});\ \int_\Omega q\,\mathrm{div}(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x = 0, \right\}$$

De même que pour le problème de Stokes et les fluides quasi-newtoniens, il est possible de réduire le problème sur cet espace :

(FV) : trouver $\mathbf{u} \in K(\mathbf{u}_\Gamma)$ tel que

$$\int_\Omega 2K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,\mathrm{d}x + j(\mathbf{v}) - j(\mathbf{u}) \geq \int_\Omega \mathbf{f}.(\mathbf{v} - \mathbf{u})\,\mathrm{d}x$$

ceci pout tout $\mathbf{v} \in K(\mathbf{u}_\Gamma)$. Cette formulation est élégante mais a l'inconvénient de conduire, une fois écrite sur des espaces de dimension finie, à un système d'inéquations non-linéaire de grande taille et très difficile à résoudre : nous ne connaissons actuellement pas d'algorithmes performants issus de cette écriture.

3.4 Régularisation : un problème modifié

On remplace l'équation constitutive des fluides viscoplastiques par celle d'un fluide quasi-newtonien [GLT81, p. 364] :

$$\begin{aligned} \sigma &= \left(K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n} + \frac{\sigma_0}{(|2D(\mathbf{u})|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \right) 2D(\mathbf{u}) \\ &= 2\eta_\varepsilon \left(|2D(\mathbf{u})|^2 \right) D(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

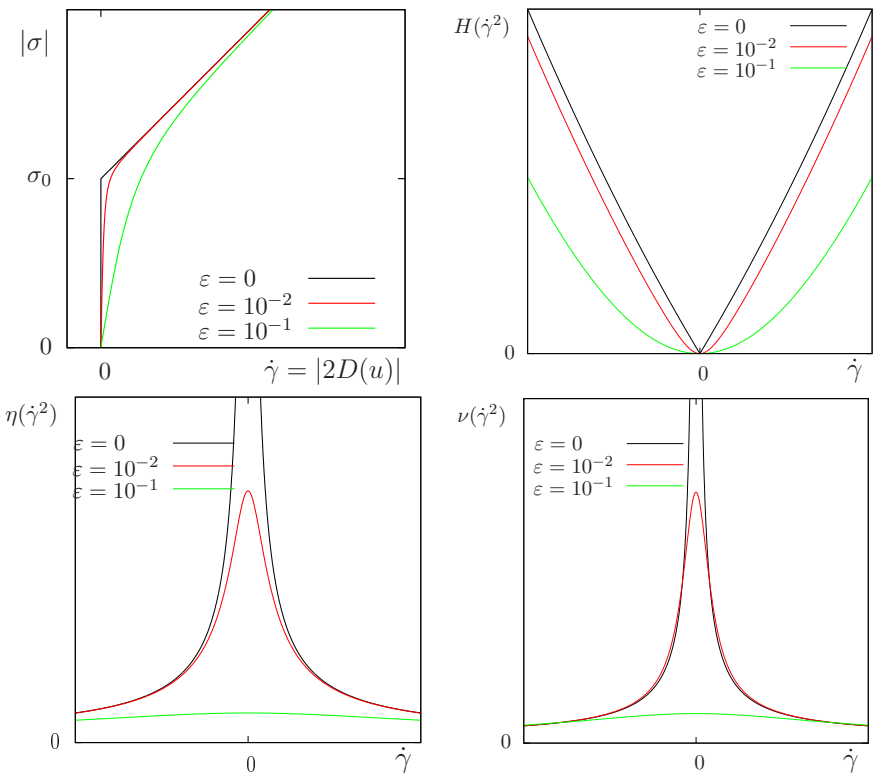


FIGURE 3.5 – Régularisation des fluide viscoplastiques pour $n = 1$ et $\sigma_0 = 1/2$: (haut-gauche) : norme des contraintes $|\sigma|$ en fonction de celle des taux de déformation $\dot\gamma = |2D(\mathbf{u})|$; (haut-droit) : énergie $H(\dot\gamma^2)$; (bas-gauche) : viscosité $\eta(\dot\gamma^2)$; (bas-droite) : coercivité $\nu(\dot\gamma^2)$.

avec $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ et où on a posé :

$$\eta_\varepsilon(\xi) = K\xi^{\frac{-1+n}{2}} + \frac{\sigma_0}{(\xi+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}},\ \forall \chi \in \mathbb{R}^+$$

On ne divise plus par $|2D(\mathbf{u})|$, ce qui évite les problèmes dans les *zones rigides* associées à $2D(\mathbf{u}) = 0$ (voir Fig. 3.5). Les méthodes vues au chapitre 2 s'appliquent donc *a priori*. Ainsi, cette approche permet de réutiliser un code de calcul permettant de résoudre des écoulements quasi-newtoniens. Avec les notations du chapitre 2, le problème de minimisation est associé à la fonction H_ε suivante :

$$H_\varepsilon(\xi) = \int_0^\xi \eta_\varepsilon(s)\,\mathrm{d}s = \frac{2K}{1+n}\xi^{\frac{1+n}{2}} + \sigma_0\left(\sqrt{\xi+\varepsilon^2} - \varepsilon\right),\ \forall \xi \in \mathbb{R}^+$$

On peut vérifier que H_ε est convexe. En ce qui concerne la méthode de Newton, le coefficient de la jacobienne est donné par :

$$\begin{aligned} \nu_\varepsilon(\xi) &= \eta_\varepsilon(\xi) + 2\xi\eta'_\varepsilon(\xi) \\ &= nK\xi^{\frac{-1+n}{2}} + sigma_0\varepsilon^2\left(\xi+\varepsilon^2\right)^{-3/2} \end{aligned}$$

La coercivité de la jacobienne est assurée car $\nu_\varepsilon \geq \nu_\varepsilon(0) = \sigma_0\varepsilon^{-1} > 0$. On montre [GLT81, p. 370] dans le cas $n = 1$ et pour Ω la section circulaire, que le problème régularisé est bien posé et que sa solution, notée $\mathbf{u}_\varepsilon$, converge, quand $\varepsilon \to 0$, vers la solution $\mathbf{u}$ du problème initial suivant :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,2,\Omega} &\leq c\,\varepsilon\sqrt{-\log\varepsilon} \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\infty,\Omega} &\leq c\,\varepsilon \end{aligned}$$

où $c > 0$ est indépendante de ε. La première difficulté vient de ce que ε doit être choisis petit pour que la solution de ce problème quasi-newtonien ressemble à celle du problème viscoplastique. Pour ε petit, le problème quasi-newtonien en dimension finie devient difficile à résoudre : les matrices dépendent de ε et leur conditionnement est en $1/\varepsilon$, ce qui détériore les propriétés de convergence des méthodes itératives : point fixe ou méthode de Newton. Ceci s'observe sur la Fig. 3.5.c : le coefficient $\nu_\varepsilon(|2D(\mathbf{u})|^2)$ assurant la coercivité est non-borné uniformément en ε : dans les régions rigides où $\xi = |D(\mathbf{u})|^2 = 0$, on a $\nu_\varepsilon(0) = \sigma_0\varepsilon^{-1}$ qui tend vers $+\infty$ quand $\varepsilon \to 0$.

La seconde difficulté vient de ce que pour tout $\varepsilon > 0$ il n'existe plus de zones rigides associées à $D(\mathbf{u}) = 0$. Ceci est d'autant plus gênant que l'un des intérêt de ce modèle est de permettre de prédire ces zones : stabilité d'une fondation, résistance aux contraintes pour une barre d'acier, départ ou arrêt d'un glissement de terrain ou d'une avalanche... Avec ces modèles régularisés, on est plus capable de déterminer ces situations dites d'*analyse de charge limite*.

Ces deux inconvénients ont motivé la recherche d'algorithmes de résolution du problème initial, non-régularisé.

3.5 Algorithme du lagrangien augmenté

Cet algorithme a été proposée par Fortin et Glowinski [FG83]. L'idée consiste à introduire $\gamma = 2D(\mathbf{u})$ comme variable supplémentaire indépendante dans le problème ainsi qu'un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\gamma - (2D(\mathbf{u}) = 0$. Le multiplicateur va coïncider avec le déviateur des contraintes et est donc noté σ. Le problème se formule comme le point-de-selle du Lagrangien

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u},\gamma;p,\sigma) &= \frac{K}{1+n}\int_\Omega |\gamma|^{1+n}\,\mathrm{d}x + \sigma_0\int_\Omega |\gamma|\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{u}\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\sigma:(2D(\mathbf{u})-\gamma)}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |2D(\mathbf{u})-\gamma|^2\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ correspond au paramètre d'augmentation du lagrangien : on ajoute un terme quadratique en $\mathbf{u}$. Le problème s'écrit :

$$(\mathbf{u},\gamma;p,\sigma) = \underset{(\mathbf{v},\delta)\in V(\mathbf{u}_\Gamma)\times L^2(\Omega)^{d\times d}_s}{\arg\inf} \quad \underset{(q,\tau)\in L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)^{d\times d}_s}{\sup} L(\mathbf{v},\delta;q,\tau)$$

La contrainte $\gamma - 2D(\mathbf{u}$ ne peut être que satisfaite par la solution : autrement, la maximisation en σ correspond à une valeur infinie. Pour $\gamma = 2D(\mathbf{u})$ on obtient alors $L(\mathbf{u},\gamma;p,\sigma) = J(\mathbf{u})$ qui est l'énergie du système.

La façon la plus simple de résoudre ce problème est d'écrire un algorithme de descente à pas fixe (Uzawa) sur la fonctionnelle duale :

$$J_*(\sigma) = - \underset{(\mathbf{v},\delta)\in V(\mathbf{u}_\Gamma)\times L^2(\Omega)^{d\times d}_s}{\arg\inf} \quad \underset{q\in L^2(\Omega)}{\sup} L(\mathbf{v},\delta;q,\sigma)$$

On obtient

Algorithme 1 (Uzawa)
- $k = 0$: σ_0 donné
- $k \geq 0$: σ_k connu, calculer

$$(\mathbf{u}_k,\gamma_k;p_k) = \underset{(\mathbf{v},\delta)\in V(\mathbf{u}_\Gamma)\times L^2(\Omega)^{d\times d}_s}{\arg\inf} \quad \underset{q\in L^2(\Omega)}{\sup} L(\mathbf{v},\delta;q,\sigma_k)$$

  puis descendre dans la direction opposée au gradient de J_*,

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k - \beta J_*'(\sigma_k)$$

où β est le pas de descente. Dans la pratique on choisis ce paramètre comme étant le paramètre d'augmentation : $\beta = \alpha > 0$. Le gradient de J_* est au signe près $\dfrac{\partial L}{\partial \sigma}$ et L est linéraire, donc dérivable en σ : pour tout $\tau \in L(\Omega)^{d\times d}_s$:

$$-J_*'(\sigma_k).(\tau) = \frac{\partial L}{\partial \sigma}(\mathbf{u}_k,\gamma_k;p_k,\sigma_k).(\tau) = \int_\Omega \frac{(2D(\mathbf{u}_k)-\gamma_k):\tau}{2}\,\mathrm{d}x$$

L'espace $L(\Omega)_s^{d\times d}$ est muni du produit scalaire :

$$(\sigma,\tau)=\int_\Omega \frac{\sigma:\tau}{2}\,\mathrm{d}x$$

et ainsi

$$-J_*'(\sigma_k).(\tau)=(2D(\mathbf{u}_k)-\gamma_k,\tau),\ \forall\tau\in L(\Omega)_s^{d\times d}$$

ce qui conduit à

$$-J_*'(\sigma_k)=2D(\mathbf{u}_k)-\gamma_k$$

L'étape de descente devient explicite :

$$\sigma_{k+1}=\sigma_k+\beta(2D(\mathbf{u}_k)-\gamma_k)$$

Tout le travail est donc dans le calcul de $(\mathbf{u}_k,\gamma_k,p_k)$. qui est découplée en deux parties : tout d'abord le calcul de $(\mathbf{u}_k,p_k)$ puis celui de γ_k. La nouvelle variante de l'algorithme s'écrit :

Algorithme 2 (Fortin-Glowinski, forme abstraite)
- $k=0$: σ_0 et γ_0 donnés
- $k\geq 0$: σ_k et γ_k connus, calculer successivement :

$$(\mathbf{u}_k;p_k) = \operatorname*{arg\,inf}_{\mathbf{v}\in V(\mathbf{u}_\Gamma)}\ \sup_{q\in L^2(\Omega)} L(\mathbf{v},\gamma_k;q,\sigma_k) \tag{3.5}$$

$$\gamma_{k+1} = \operatorname*{arg\,inf}_{\delta\in L^2(\Omega)_s^{d\times d}} L(\mathbf{u}_k,\delta;p_k,\sigma_k) \tag{3.6}$$

puis descendre dans la direction opposée au gradient de J_* :

$$\sigma_{k+1}=\sigma_k+\beta\left(\gamma_{k+1}-2D(\mathbf{u}_k)\right)$$

Regardons en détail les étapes (3.5) et (3.5) de l'algorithme. Le lagrangien L est dérivable par rapport à $\mathbf{u}$ et p si bien que la première étape (3.5) s'écrit encore :

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_k,\gamma_{k-1};p_k,\sigma_{k-1}).(\mathbf{v}) &= 0,\quad \forall\mathbf{v}\in H_0^1(\Omega)^d\\ \frac{\partial L}{\partial p}(\mathbf{u}_k,\gamma_{k-1};p_k,\sigma_{k-1}).(q) &= 0,\quad \forall q\in L^2(\Omega)\end{aligned}$$

Le lagrangien L est quadratique en $\mathbf{u}$ et linéraire en p. Le développement du dernier terme de L donne :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2}|2D(\mathbf{u})-\gamma|^2 &= \frac{\alpha}{2}\frac{(2D(\mathbf{u})-\gamma):(2D(\mathbf{u})-\gamma)}{2}\\ &= \frac{\alpha}{4}\left(4D(\mathbf{u}):D(\mathbf{u})-4D(\mathbf{u}):\gamma+\gamma:\ \gamma\right)\\ &= \alpha D(\mathbf{u}):D(\mathbf{u})-\alpha D(\mathbf{u}):\gamma+\frac{\alpha}{2}|\gamma|^2\end{aligned}$$

si bien que :

$$\begin{aligned}
L(\mathbf{u},\gamma;p,\sigma) &= \frac{K}{1+n}\int_\Omega |\gamma|^{1+n}\,\mathrm{d}x + \frac{\alpha}{2}\int_\Omega |\gamma|^2\,\mathrm{d}x + \sigma_0\int_\Omega |\gamma|\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{u}\,\mathrm{d}x \\
&\quad - \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \sigma:D(\mathbf{u})\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega \sigma:\gamma\,\mathrm{d}x \\
&\quad +\alpha\int_\Omega D(\mathbf{u}):D(\mathbf{u})\,\mathrm{d}x - \alpha\int_\Omega \gamma:D(\mathbf{u})\,\mathrm{d}x \\
\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u},\gamma;p,\sigma).(\mathbf{v}) &= \int_\Omega 2\alpha D(\mathbf{u}):D(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x - \int_\Omega p\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_\Omega (\sigma-\alpha\gamma):D(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x \\
\frac{\partial L}{\partial p}(\mathbf{u},\gamma;p,\sigma).(q) &= -\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

La première étape (3.5) se ramène à la résolution d'un problème de Stokes :

(P1) : trouver $(\mathbf{u}_k, p_k)$ tels que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega 2\alpha D(\mathbf{u}_k):D(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x - \int_\Omega p_k\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\,\mathrm{d}x &= l_{k-1}(\mathbf{v}) \\
-\int_\Omega q\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}_k\,\mathrm{d}x &= 0
\end{aligned}$$

ceci pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$ et $q \in L^2(\Omega)$ et où on a posé :

$$l_k(\mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega (\sigma_k - \alpha\gamma_k):D(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x$$

La résolution de ce sous-problème est complètement standard : il a été traité en détails au chapitre 1.

La seconde étape (3.6) de l'algorithme correspond à la minimisation du lagrangien L par rapport à γ : cette fois-ci, L n'est pas dérivable en γ mais peut s'écrire point par point presque pour tout $x \in \Omega$ fixé :

$$\gamma_k(x) = \arg\min_{\delta\in\mathbb{R}_s^{d\times d}} \quad j(\delta)$$

où on a posé, pour tout $\delta \in \mathbb{R}_s^{d\times d}$:

$$\begin{aligned}
j(\delta) &= \frac{K}{1+n}|\delta|^{1+n} + \frac{\alpha}{2}|\delta|^2 + \sigma_0|\delta| - \frac{\chi:\delta}{2} \\
\chi &= \sigma_{k-1}(x) + 2\alpha D(\mathbf{u}_k)(x)
\end{aligned}$$

Remarquons que j est convexe et donc ce problème de minimisation dans $\mathbb{R}_s^{d\times d}$ admet une solution unique. Pour tout $\delta \in \mathbb{R}_s^{d\times d}$, le sous-différentiel $\partial j(\delta)$ est :

$$\partial j(\delta) = \begin{cases} \left\{\tau = K|\delta|^{-1+n}\delta + \alpha\delta + \sigma_0 \dfrac{\delta}{|\delta|} - \chi(x)\right\} & \text{si } \delta \neq 0 \\ \left\{\tau \in \mathbb{R}_s^{d\times d}, \quad |\tau| \leq \sigma_0\right\} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le minimim γ de j est caractérisé par $0 \in \partial j(\gamma)$. En recherchant $\gamma \neq 0$ on obtient successivement :

$$\begin{aligned} K|\delta|^{-1+n}\delta + \alpha\delta + \sigma_0 \frac{\delta}{|\delta|} &= \chi \\ K|\delta|^n + \alpha|\delta| &= |\chi| - \sigma_0 \end{aligned}$$

Une condition nécessaire pour avoir le minimum $\gamma \neq 0$ est $|\chi| \geq \sigma_0$. Posons

$$\psi(\xi) = K\xi^n + \alpha\xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+$$

Puisque ψ est strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, elle est inversible et notons ψ^{-1} sont inverse. Pour $n = 1$ on a explicitement $\psi^{-1}(\zeta) = \zeta/(K + \alpha)$. Dans le cas général $n \in \mathbb{R}+$, on peut calculer efficacement ψ^{-1} par une méthode de Newton. Remarquons que $\psi(0) = 0$ et donc $\psi^{-1}(0) = 0$. Ainsi, si $|\chi| \geq \sigma_0$ on a :

$$|\delta| = \psi^{-1}(|\chi| - \sigma_0)$$

D'autre part, les matrices δ et χ sont proportionnelles :

$$\left(K|\delta|^{-1+n} + \alpha + \frac{\sigma_0}{|\delta|}\right)\ \delta = \chi$$

si bien qu'elles ont même direction, noté $\chi/|\chi|$. Finalement, le minimum de j, noté $P(\chi)$ est :

$$\gamma = P(\chi) = \psi^{-1}(\max(0, |\chi| - \sigma_0))\frac{\chi}{|\chi|}$$

La seconde étape s'écrit :

$$\gamma_{k+1}(x) = P\left(\sigma_k(x) + 2\alpha D(\mathbf{u}_k)(x)\right), \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

Algorithme 2 (Fortin-Glowinski, forme concrète)

- $k = 0$: σ_0 et γ_0 donnés
- $k \geq 0$: σ_k et γ_k étant connus, effectuer en trois étapes :
  1) trouver $(\mathbf{u}_k; p_k) \in V(\mathbf{u}_\Gamma) \times L^2(\Omega)$, solution du problème de Stokes :

$$\begin{aligned} 2\alpha \int_\Omega D(\mathbf{u}_k) : D(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x - \int_\Omega p_k \operatorname{div} \mathbf{v}\,\mathrm{d}x &= l_k(\mathbf{v}) \\ - \int_\Omega q \operatorname{div} \mathbf{u}_k\,\mathrm{d}x &= 0 \end{aligned}$$

ceci pour tout $\mathbf{v} \in V(0)$ et $q \in L^2(\Omega)$, avec :

$$l_k(\mathbf{v}) \quad = \quad \int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega (\sigma_k - \alpha\gamma^{(k)}) : 2D(\mathbf{v})\,\mathrm{d}x$$

2) calculer point par point :

$$\gamma_{k+1}(x) = P\left(\sigma_k(x) + 2\alpha D(\mathbf{u}_k)(x)\right), \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

3) effectuer la descente :

$$\sigma_{k+1} = \sigma_k + \alpha\left(2D(\mathbf{u}_k) - \gamma_{k+1}\right)$$

La première étape consiste en la résolution du sous-problème de Stokes. Les deux dernières étapes du calcul sont des calculs points par points, très rapides. Le test d'arrêt s'effectue sur $\|\gamma^{(k+1)} - 2D(\mathbf{u}^{(k)})\|_{0,1+n,\Omega} < \varepsilon$.

3.6 Approximation en espace

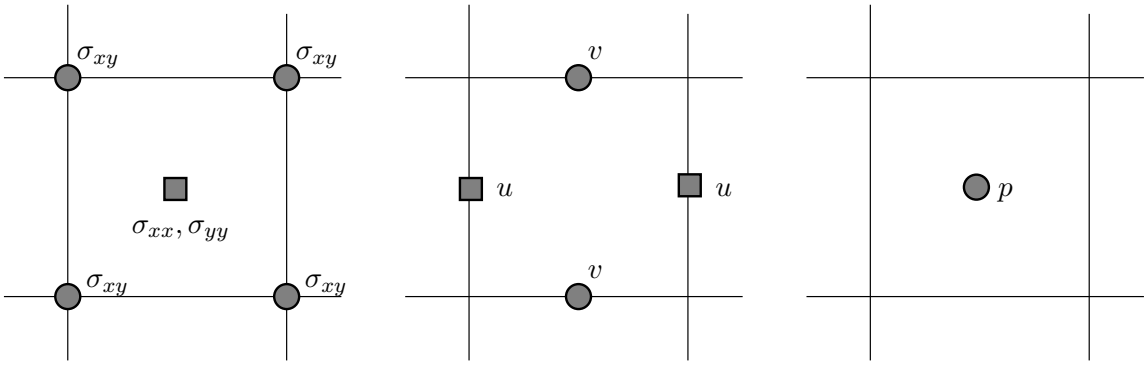


FIGURE 3.6 – Différences finies pour Stokes trois champs.

Les contraintes ne peuvent pas être discrétisées n'importe comment : elle doivent l'être d'une façon qui est compatible avec la discrétisation des vitesses. De même que pour Stokes et Navier-Stokes, les vitesses devaient être discrétisées d'une façon qui était compatible avec la discrétisation des pressions. On se retrouve ici avec deux conditions de compatibilités imbriquées.

Pour comprendre cela, on regarde ce qui se passe pour $n = 1$ et $Bi = 0$: le modèle décrit un fluide newtonien de viscosité K (voir Fig. 3.1). Le problème stationnaire se réduit à Stokes trois champs :

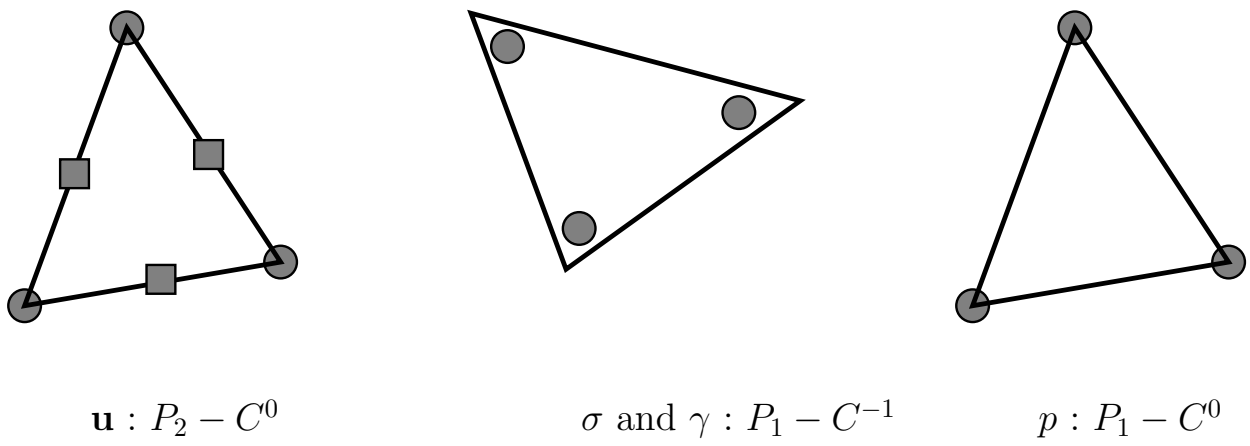


FIGURE 3.7 – Éléments finis pour Stokes trois champs.

(FV) : trouver $\sigma \in L^2(\Omega)_s^{d\times d}$, $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{1}{2K}\sigma & - & D(\mathbf{u}) & & & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{div}(\sigma) & & & - & \nabla p & = & -\mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ & & \operatorname{div}\mathbf{u} & & & = & 0 & \text{dans } \Omega \\ & & & & \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

On pose :

$$\begin{aligned} m(\sigma,\tau) &= \frac{1}{2K}\int_\Omega \sigma:\tau \,\mathrm{d}x \\ d(\sigma,\mathbf{u}) &= -\int_\Omega \sigma:D(\mathbf{u})\,\mathrm{d}x \\ b(\mathbf{u},p) &= \int_\Omega p \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}x \\ l(\mathbf{v}) &= -\int_\Omega \mathbf{f}.\mathbf{v}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

La formulation variationnelle est :

(FV) : trouver $\sigma \in L^2(\Omega)_s^{d\times d}$, $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{array}{ccccccc} m(\sigma,\tau) & + & d(\tau,\mathbf{u}) & & & = & 0 \\ d(\sigma,\mathbf{v}) & & & + & b(\mathbf{v},p) & = & l(\mathbf{v}) \\ & & b(\mathbf{u},q) & & & = & 0 \end{array}$$

ceci pour tout $\tau \in L^2(\Omega)_s^{d\times d}$, $\mathbf{v} \in V(0)$ et $q \in L^2(\Omega)$.

Cette formulation peut s'écrire aussi en utilisant l'espace $K(\mathbf{u}_\Gamma)$ des fonctions à divergence nulle :

(FV) : trouver $\sigma \in L^2(\Omega)_s^{d\times d}$ et $\mathbf{u} \in K(\mathbf{u}_\Gamma)$ tels que

$$\begin{array}{rcrcl} m(\sigma,\tau) & + & d(\tau,\mathbf{u}) & = & 0 \\ d(\sigma,\mathbf{v}) & & & = & l(\mathbf{v}) \end{array}$$

ceci pour tout $\tau \in L^2(\Omega)_s^{d\times d}$ et $\mathbf{v} \in V(0)$.

Ce problème a une structure similaire au problème de Stokes, mais en couplant contrainte-vitesse $(\tau, \mathbf{u})$ au lieu de vitesse-pression $(\mathbf{u}, p)$.

Lorsqu'on discrétise le problème avec des espaces de dimension finie $T_h \subset L^2(\Omega)_s^{d\times d}$, $V_h(0) \subset V(0)$ et $Q_h \subset L^2(\Omega)$, nous avons deux conditions de compatibilité :

$$\exists \delta > 0 \ \text{ tel que } \forall h > 0, \quad \inf_{\mathbf{v}_h \in K_h(0)} \sup_{\tau_h \in T_h} \frac{d(\tau_h, \mathbf{v}_h)}{\|\tau_h\|_{L^2} \|\mathbf{v}_h\|_{H^1}} \ \geq \ \delta \tag{3.7}$$

$$\exists \beta > 0 \ \text{ tel que } \forall h > 0, \quad \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{b(\mathbf{v}_h,\, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{H^1} \ \|q_h\|_{L^2}} \ \geq \ \beta \tag{3.8}$$

où K_h est le noyau de la forme b discrète, soit :

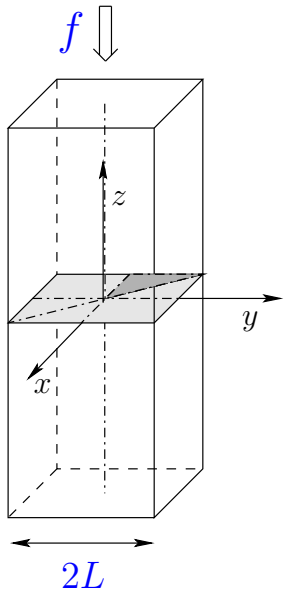
$$K_h = \{\mathbf{v}_h \in V_h(0) \ / \ b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0, \ \forall q_h \in Q_h\}$$

La première condition exprime une condition de compatibilité entre T_h et V_h, la seconde entre V_h et Q_h : cs trois espaces sont liés et ne peuvent pas être choisis de façon indépendante.

L'idée la plus simple pour construire une combinaison d'élément satisfaisant simultanément ces deux conditions est de partir d'un couple (V_h, Q_h) satisfaisant (3.8), et donc utilisable pour le problème de Stokes, et de prendre ensuite $T_h = D(V_h)$, c'est-à-dire l'ensemble des parties symétriques des gradients des champs de vecteurs de V_h. Avec ce choix, il est possible de montrer sans trop de difficultés que la condition (3.7) est satisfaite [Sar90, BS92].

Deux types de discrétisation pour ce problème sont très utilisées : l'une en différences finis, les grilles décalées [Sar94] l'autre en éléments finis P_{1d}–P_2–P_1 [RS03] (cf Fig. 3.7). En effet, les gradients des fonctions continues et polynômiales de degré deux par éléments, noté $P2$ sont des fonctions discontinues et polynômiales de degré un par élément.

3.7 Exemple 2 : écoulement dans un tuyau



nombre sans dimension

$$Bi = \frac{\sigma_0}{L\,f}$$

FIGURE 3.8 – Fluides viscoplastiques : écoulement dans un tuyau.

De même qu'à la section 2.5, page 39, considérons l'écoulement dans un tuyau rectiligne d'axe Xz et initié par une force de poussée $\mathbf{f} = f\,\mathbf{e}_z$ verticale et constante : c'est l'écoulement de Poiseuille dans un tuyau. Le fluide est viscoplastique. L'écoulement, une fois établi, est vertical et le vecteur vitesse et ne dépend que de x et y : $\mathbf{u}(x,y) = (0,0,u(x,y))$. La contrainte $\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0$ est vérifiée par construction.

Lorsque le tuyau est circulaire, on peut utilise le système de coordonnées cylindrique (r,θ,z) : la solution ne dépendent que de r et le problème est alors similaire à l'exemple précédent (voir section 3.2). Pour un tuyau dont la section est non-circulaire (carrée, rectangulaire, etc), la solution dépend de x et y : c'est un problème bidimensionnel.

Notons Ω la section du tuyau. Notons $\nabla u = (\partial_x u, \partial_y u)$ le gradient de la composante en z de la vitesse dans le plan Oxy. On vérifie sans difficulté que $|2D(\mathbf{u})| = |\nabla u| = ((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2)^{\frac{1}{2}}$, La contrainte d'incompressibilité étant vérifiée, problème se ramène à la minimisation de :

$$J(u) = \frac{K}{1+n}\int_\Omega |\nabla u|^{1+n}\,\mathrm{d}x + \sigma_0 \int_\Omega |\nabla u|\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f\,u\,\mathrm{d}x$$

Pour $\sigma_0 = 0$, nous retrouvons le problème classique du $p-laplacien$, avec $p = 1+n$. Pour $\sigma_0 = 0$ et $n = 1$ nous retrouve une fonctionnelle J quadratique et le système correspondant est linéaire. Le cas du modèle de Bingham $\sigma_0 > 0$ et $n = 1$ a été traité en details dans [SR01]

et nous en donnons ici les principaux résultats. Le problème peut se mettre sous une forme sans dimension, avec le nombre sans dimension $Bi = \sigma_0/(Lf)$, où L est une dimension caractéristique de la section Ω. Par exemple, pour une section carrée, L sera la demi-longueur d'un côté. (voir Fig. 3.8).

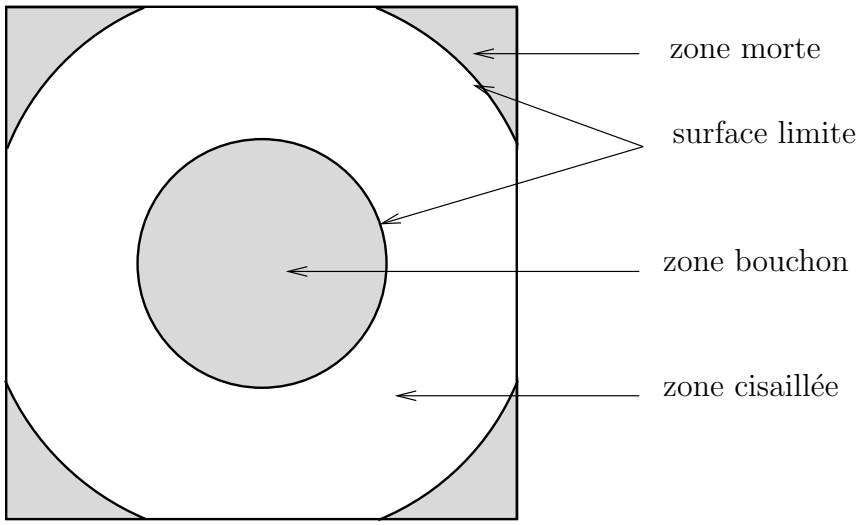


FIGURE 3.9 – Fluides viscoplastiques : zones caractéristiques de l'écoulement dans un tuyau.

La Fig. 3.9 présente les principales caractéristiques de l'écoulement lorsque $\sigma_0 > 0$. La vitesse est constante au centre de la section, avec une zone bouchon, et nulle vers les coins, dans les zones mortes. Dans la région intermédiaire, entre le bouchon et les zones mortes, la vitesse varie graduellement.

La méthode de régularisation a été mise en œuvre en 1997 sur la section carrée par Taylor et Wilson [TW97] : elle donne les résultats présentés sur la Fig. 3.10. Pour $Bi = 0.8$ le bouchon apparaît, ainsi que les zones mortes, mais ces dernières ont une concavité tournée vers l'exterieur, alors qu'il est possible de montrer [MM65, MM66, MM67] que celles-ci ont une concavité inverse, tournée vers l'intérieur de la section. Pour $Bi = 1$, nous sommes proche de l'arrêt total de l'écoulement : la méthode de régularisation [TW97] prédit une connectio du bouchon avec les zones mortes (Fig. 3.10) alors que persiste un écoulement le long des parois : ceci est impossible. L'année même de la parution de ces travaux, Wang dans une lettre au journal [Wan97, Wil97], effectue une étude de sensibilité sur le paramètre de régularisation ε et montre que $\varepsilon = 10^{-3}$ utilisé par Taylor et Wilson n'était pas suffisant pour localiser la limite des zones rigides (bouchons et zones mortes). Ses travaux, complétés, seront publiés deux années plus tard [Wan99]. La méthode de lagrangien augmenté, sans régularisation, a été mise en œuvre en 2001 sur la section carrée par Saramito et Roquet [SR01] : la Fig. 3.12 compare les solutions obtenues avec celles

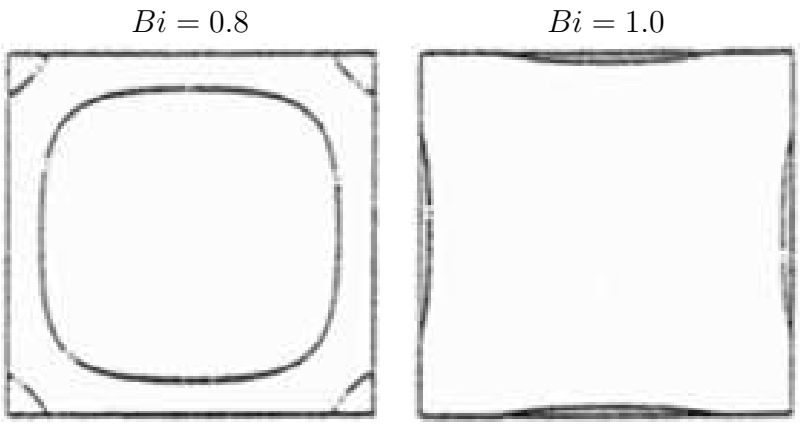


FIGURE 3.10 – Fluides viscoplastiques : étude suivant Bi, pour $\varepsilon = 10^{-3}$ de la solution u_ε obtenue par régularisation d'après Taylor et Wilson [TW97].

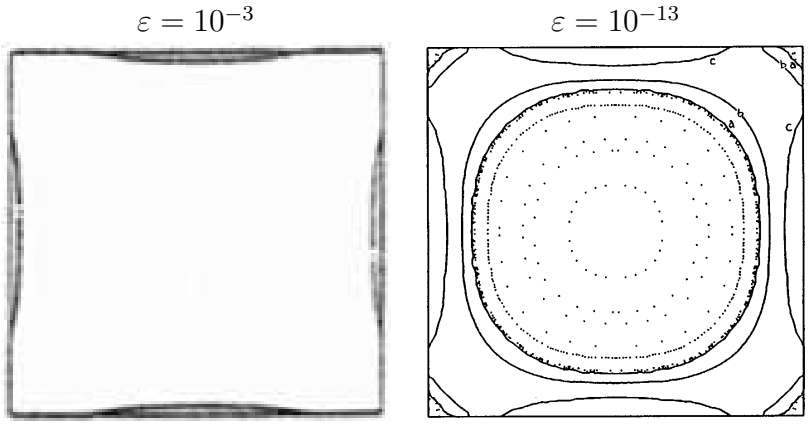


FIGURE 3.11 – Fluides viscoplastiques : étude suivant ε, pour $Bi = 1$, de la solution u_ε obtenue par régularisation : à gauche, d'après Taylor et Wilson [TW97] avec $\varepsilon = 10^{-3}$; à droite, d'après Wang [Wan99] avec $\varepsilon = 10^{-6}$ et les isocontours de $|2D(u_\varepsilon)|$ pour les valeurs (a) 8×10^{-7} pour la surface limite ; (b) 10^{-3} ; (c) 10^{-2}.

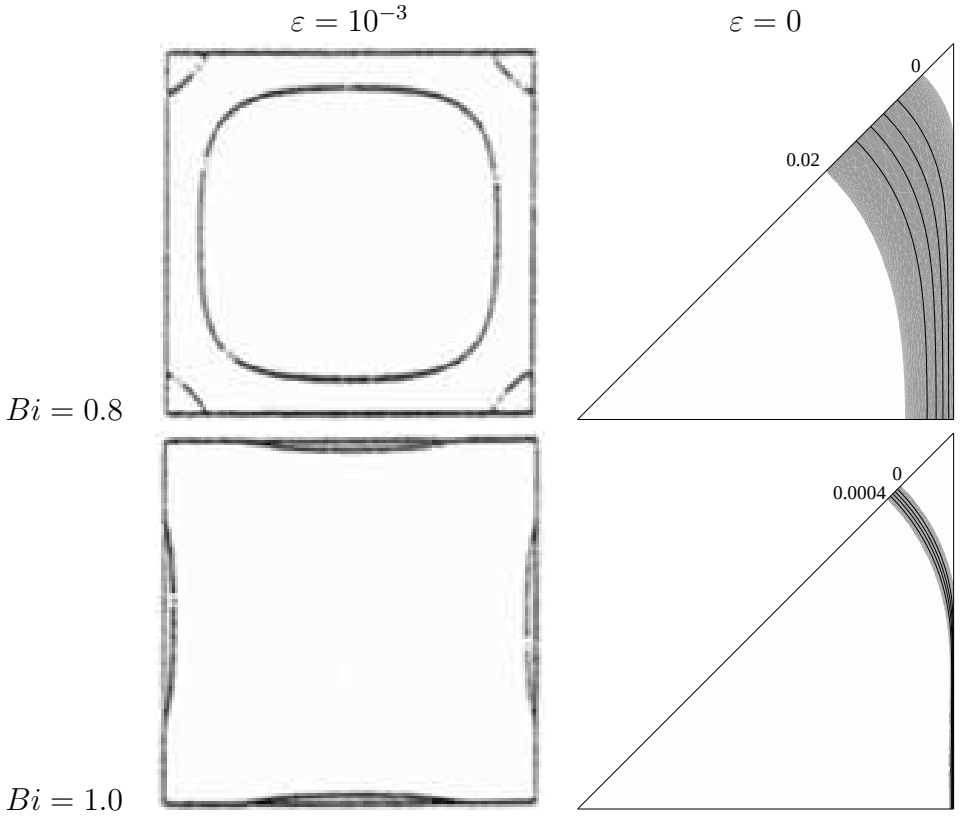


FIGURE 3.12 – Fluides viscoplastiques : comparaison de solution du problème régularisé u_ε ($\varepsilon = 10^{-3}$, d'après Taylor et Wilson [TW97]) avec la solution du problème sans régularisation u (d'après Roquet et Saramito [SR01]).

de Taylor et Wilson. Cette fois, la concavité des zones mortes est correcte et pour $Bi = 1$, le bouchon central ne vient pas en contact avec les zones mortes. L'arrêt effectif de l'écoulement a lieu pour $Bi = Bi_c = 4/(2+\sqrt{\pi}) \approx 1.06$, soit une valeur légèrement supérieure [SR01].

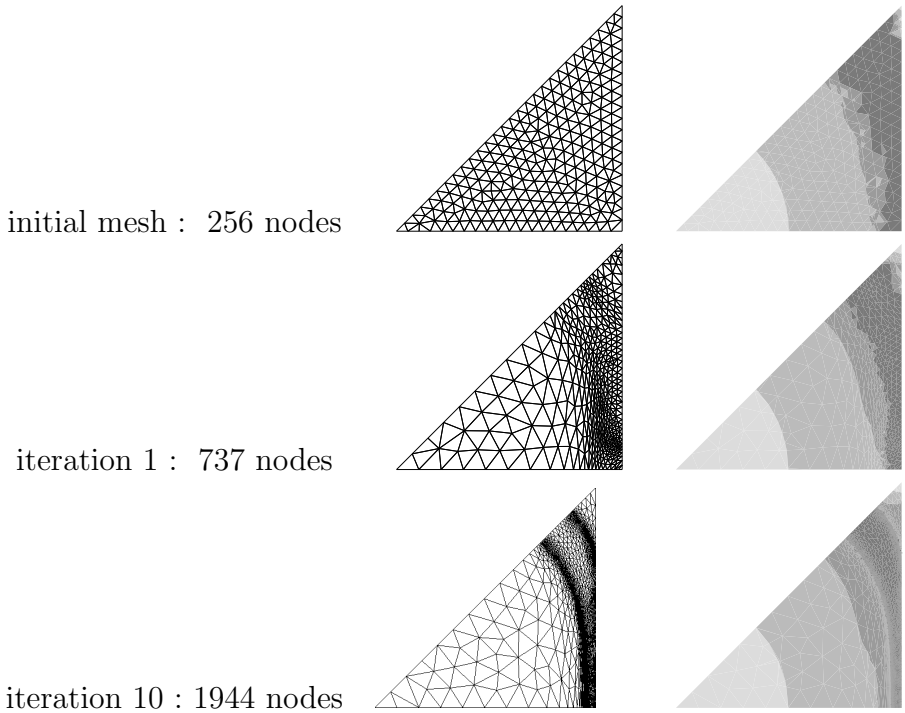


FIGURE 3.13 – Fluides viscoplastiques : boucle d'adaptation de maillage, avec à droite, les isocontours de $|\sigma|$.

Les calculs effectués par Saramito et Roquet [SR01] utilisent une technique d'adaptation de maillage qui permet de capturer avec précision les surfaces de séparation entre les différentes zones (voir Fig. 3.13). Partant d'un maillage quasi-uniforme, cette technique permet, par itérations entre génération de maillage et résolution du problème discret correspondant, de capturer automatiquement ces surfaces.

La Fig. 3.14 montre l'évolution de la solution lorsque Bi augmente : le bouchon se développe ainsi que ls zones mortes. Pour $Bi = 1.05$ nous sommes très proche de l'arrêt, la vitesse du bouchon est très faible (4×10^{-4} sans dimensions), et le bouchon vient coller à la paroi.

Trouver l'aspect de la solution lorsque Bi tends vers Bi_c correspond à un problème d'analyse de charge limite : nous pouvons obtenir cette solution par extrapolation (voir Fig. 3.15), tandis que l'analyse théorique permet de montrer que les surfaces limite séparant le bouchon des zones mortes sont des arcs de cercle.

Dans le cas d'un tuyau de section circulaire, la solution est connue explicitement et

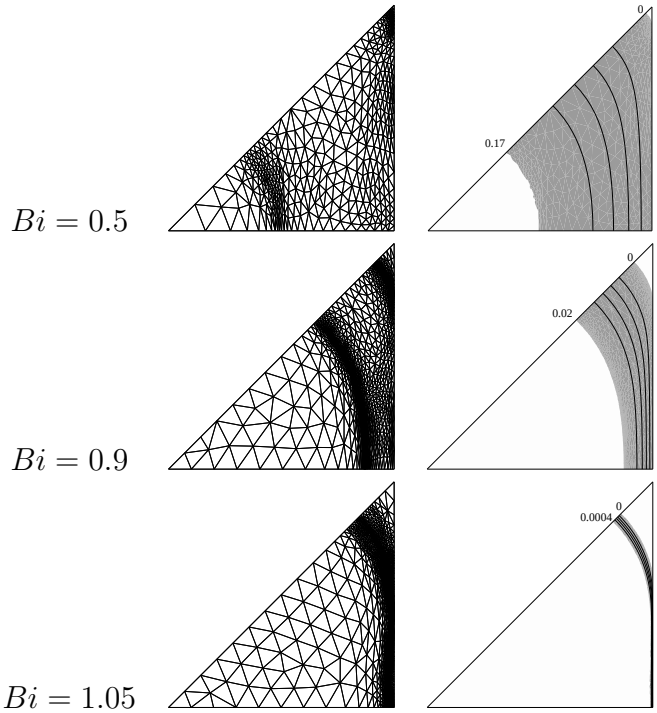


FIGURE 3.14 – Fluides viscoplastiques : étude suivant Bi de la solution sans régularisation. À gauche, maillage adapté.

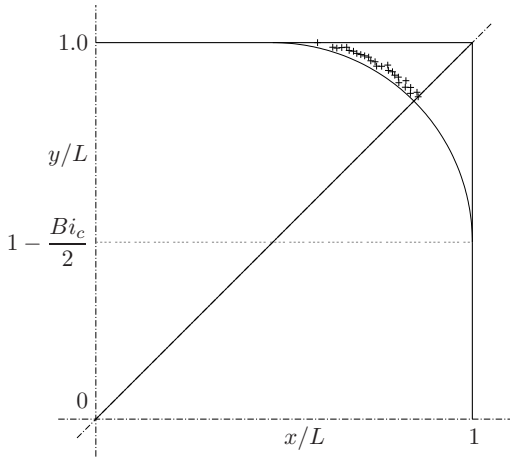


FIGURE 3.15 – Fluides viscoplastiques : l'extrapolation à $Bi = Bi_c = 4/(2+\sqrt{\pi})$ des solutions calculées à $Bi < Bi_c$. est représentée par des croix. En trait fort, la solution exacte du problème d'analyse de charge limite, qui est un arc de cercle.

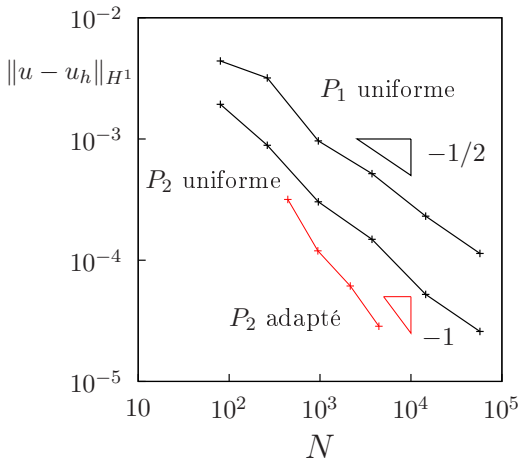


FIGURE 3.16 – Fluides viscoplastiques : pour un tuyau de section circulaire, erreur d'approximation $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1}$ en fonction de $N = \dim(V_h)$, la taille du problème discret.

peut être obteue par un calcul similaire à l'exemple précédent (voir section 3.2). En le résolvant numériquement, il est possible de calculer l'erreur effectuée et de mesurer la vitesse de convergence de la méthode (voir Fig. 3.16). L'utilisation d'éléments linéaires par morceaux (P_1) sur des maillages uniformes conduit à un comportement asymptotique optimal $\mathcal{O}(N^{-1/2}) = \mathcal{O}(h)$ ou $N = \dim(V_h) = \mathcal{O}(h^{-2})$ est la taille du système à résoudre. L'adaptation de maillage n'apporterai rien dans ce cas. Avec utilisation d'éléments quadratiques par morceaux (P_2), l'adaptation de maillage permet par contre d'obtenir un gain asymptotique et de retrouver le comportement optimal de l'erreur $\mathcal{O}(N^{-1})$.

3.8 Exemple 3 : écoulement autour d'un obstacle

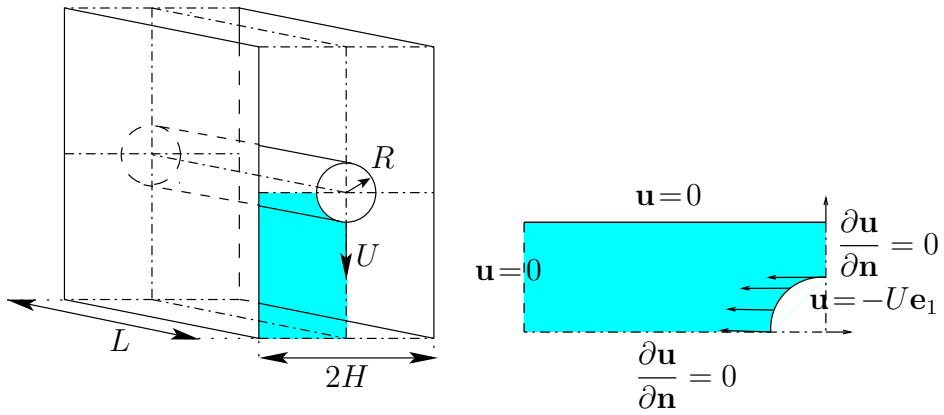


FIGURE 3.17 – Fluides viscoplastiques : écoulement autour d'un obstacle cylindrique.

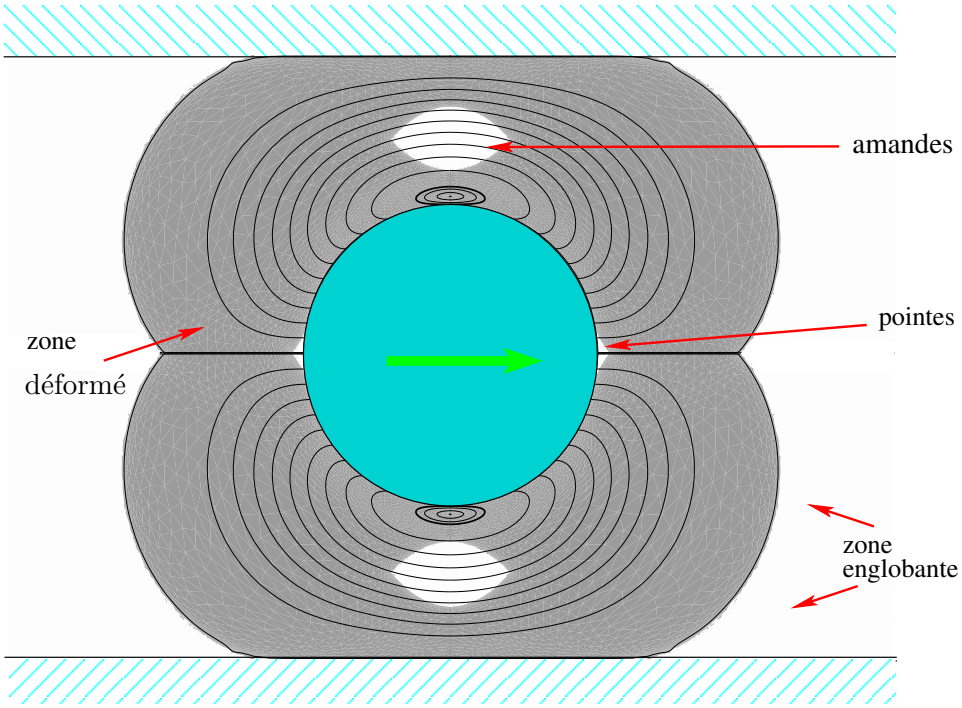


FIGURE 3.18 – Fluides viscoplastiques : zones caractéristiques de l'écoulement autour d'un obstacle cylindrique.

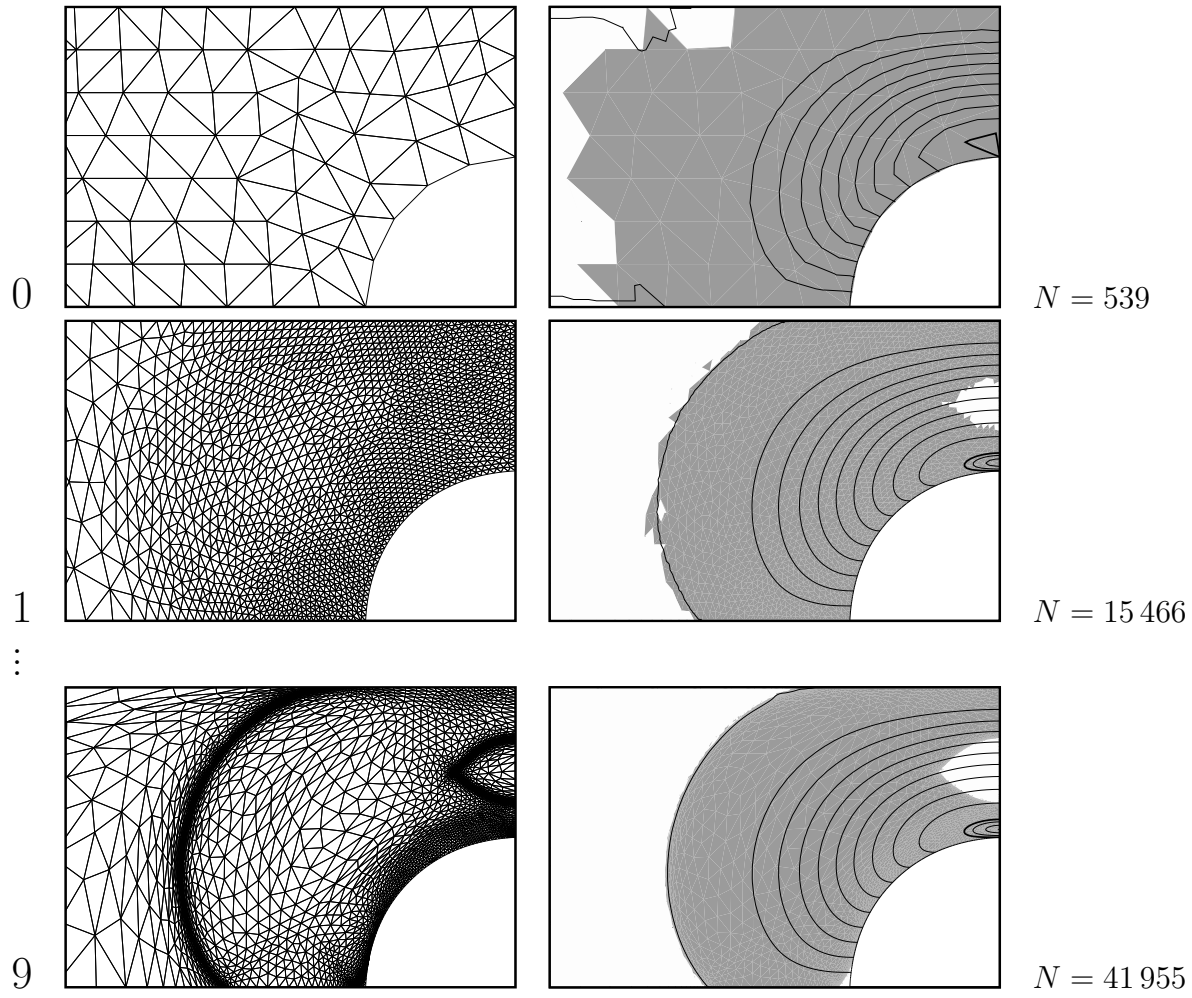


FIGURE 3.19 – Fluides viscoplastiques : adaptation de maillage autour d'un obstacle cylindrique.

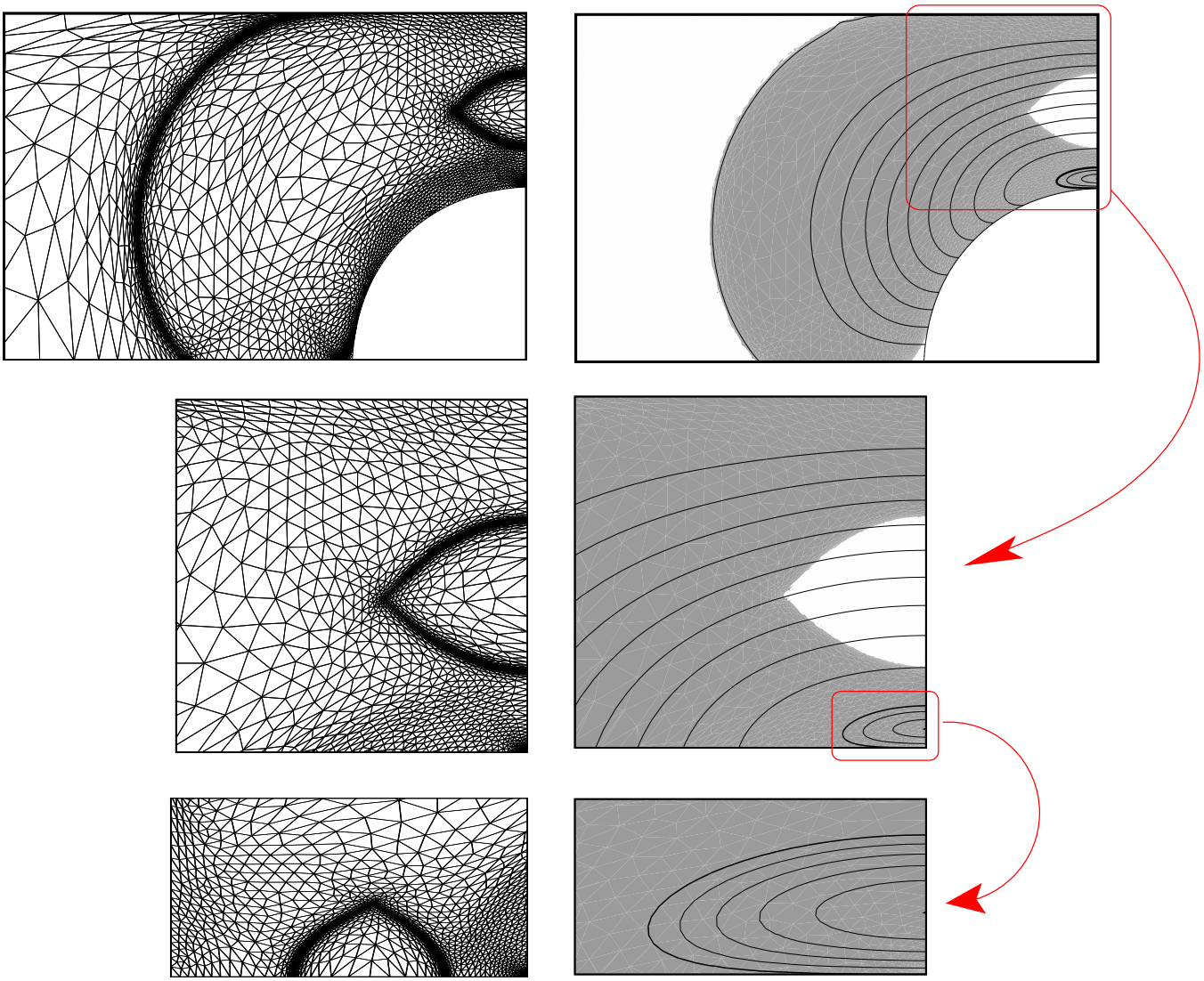
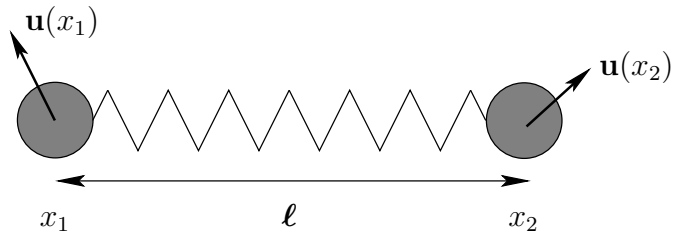


FIGURE 3.20 – Fluides viscoplastiques : plusieurs zoom au voisinage de l'obstacle.

Chapitre 4

Fluides viscoélastiques

4.1 Principe de la loi de comportement



$\tau = \mu_0\, \boldsymbol{\ell} \otimes \boldsymbol{\ell}$

FIGURE 4.1 – Fluides viscoélastiques : une suspension de ressorts élastiques.

Lorsqu'on cherche à décrire un comportement d'un milieu élastique linéaire, on écrit que la contrainte τ est proportionnelle aux déformations :

$$\tau = \mu(\nabla \mathbf{d} + \nabla \mathbf{d}^T)$$

Cette loi correspond au modèle de Hooke pour un milieu incompresible. C'est la généralisation à un milieu continu du comportement d'un ressort lorsqu'il est étiré. Ici, μ est le module d'élasticité et $\mathbf{d}(t,x) = X(t,x) - x$ représente les déformations du milieu décrit par $X(t,x)$: la particule qui était en x à $t = 0$ est en $X(t,x)$ à l'instant t. Ce milieu décrit par exemple une suspension de longues molécules, en solution dans un fluide environnant, appelé *solvant*. Ces molécules peuvent s'étirer, telles des élastiques. La vitesse dans ce milieu continu est $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{d}}$, c'est-à-dire la dérivée par rapport à t des déformations $\mathbf{d}$. En dérivant la relation précédente par rapport à t, on obtient :

$$\dot{\tau} = \mu(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = 2\mu D(\mathbf{u})$$

Ici $\dot{\tau}$ correspond à la dérivée lagrangienne de τ, soit dans un repère eulérien, non lié au matériau :

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\tau \tag{4.1}$$

La force de rappel des longues molécules, qui se comportent comme de longs élastiques, est contrée par les frottement visqueux des molécules avec le fluide environnant. Il est possible de montrer, avec des outils de physique statistique [BAH87b, p. 72], que, qu'un milieu composé d'un grand nombre de telles molécules se comporte asymptotiquement comme un milieu continu où on y ajoute un terme d'amortissement visqueux :

$$\frac{\dot{\tau}}{\mu} + \frac{\tau}{\eta_m} = 2D(\mathbf{u})$$

où $\eta_m > 0$ est la viscosité. Posons $\lambda = \eta_m/\mu$: en physique, cette quantité a la dimension d'un temps, c'est le *temps de relaxation* du milieu. En multipliant l'équation précédente par λ, il vient :

$$\lambda\dot{\tau} + \tau = 2\eta_m D(\mathbf{u})$$

En prenant $\sigma_{\text{tot}} = -p.I + \tau$ comme tenseur des contraintes totales de Cauchy, on obtient l'équation constitutive viscoélastique de Maxwell. C'est le modèle viscoélastique le plus simple possible. En prenant $\sigma_{\text{tot}} = -p.I + 2\eta_s D(\mathbf{u}) + \tau$ comme tenseur des contraintes, on obtient on obtient l'équation constitutive viscoélastique d'Oldroyd [Old50]. Ici η_s représente la viscosité du solvant : ceci exprime les frottements entre elles des petites molécules du fluide environnant, qui s'ajoute aux frottement avec les longues molécules élastiques.

4.2 Invariance par changement de repère

Oldroyd [Old50] a regardé en détails comment exprimer la dérivée $\dot{\tau}$. Il a fait remarquer que le matériau était le même, indépendamment de la personne qui l'observe. Il devait en être de même de l'équation constitutive : les calculs et les quantités devront être les mêmes indépendamment du mouvement du repère utilisé. En particulier il a montré que prendre pour $\dot{\tau}$ la dérivée lagrangienne $\partial_t\tau + \mathbf{u}.\nabla\tau$ ne permettait pas d'écrire des équations indépendantes du repère, et il a proposé une méthode pour remédier à cela.

Considérons deux observateurs, l'un à la position $x(t)$ et l'autre animé d'un mouvement de rotation-translation par rapport à l'autre :

$$\hat{x}(t) = R(t)\,x(t) + T(t), \quad \forall t > 0$$

La vitesse pour le premier observateur est donnée par $\mathbf{u} = \dot{x}$ et pour le second par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \dot{\hat{x}} \\ &= \dot{R}x + R\mathbf{u} + \dot{T} \end{aligned}$$

Le gradient des vitesses pour le premier observateur est $\nabla \mathbf{u}$ et pour le second :

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}} &= \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial \hat{x}_j}\right)_{1\leq i,j\leq d} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \hat{x}_j}\right)_{1\leq i,j\leq d}\end{aligned}$$

Remarquons que la rotation s'écrit :

$$R = \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j}\right)_{1\leq i,j\leq d}$$

et son inverse :

$$R^{-1} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j}\right)_{1\leq i,j\leq d}$$

De plus, par propriété du mouvement de rotation, $R^{-1} = R^T$. En effet, par exemple pour $d = 3$, avec un vecteur rotation $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ on a :

$$\begin{aligned}Rx &= \mathbf{w} \wedge x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Comme R^{-1} est associé au vecteur rotation $-\mathbf{w}$ et que R est antisymétrique, on a bien $R^{-1} = R^T$. La démonstration est similaire pour $d = 2$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}} &= \nabla\hat{\mathbf{u}}\ R^T \\ &= \nabla(\dot{R}x + R\dot{x} + T)\ R^T \\ &= (\dot{R} + R\nabla\dot{x})\ R^T \\ &= R\ \nabla\mathbf{u}\ R^T + \dot{R}\ R^T\end{aligned}$$

La tenseur des taux de déformation pour le premier observateur est $2D(\mathbf{u})$ et pour le second :

$$\begin{aligned}2\hat{D}(\hat{\mathbf{u}}) &= \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}} + \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^T \\ &= R\ \nabla\mathbf{u}\ R^T + \dot{R}\ R^T + R\ \nabla\mathbf{u}^T\ R^T + R\ \dot{R}^T\end{aligned}$$

De $R^{-1} = R^T$ il vient $RR^T = I$ et en dérivant par rapport au temps $\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0$ si bien que :

$$2\hat{D}(\hat{\mathbf{u}}) = R\ 2D(\mathbf{u})\ R^T$$

De même, le tenseur symétrique des contraintes τ pour le premier observateur correspondra, pour le second à

$$\hat{\tau} = R\ \tau\ R^T$$

En dérivant par rapport à t :

$$\dot{\hat{\tau}} \ = \ \dot{R}\ \tau\ R^T + R\ \dot{\tau}\ R^T + R\ \tau\ \dot{R}^T$$

Finalement, à l'équation constitutive $\lambda\dot{\tau} + \tau - 2\eta_m D(\mathbf{u}) = 0$ du premier observateur correspondra l'équation :

$$\begin{aligned} \lambda\dot{\hat{\tau}} + \hat{\tau} - 2\eta_m \hat{D}(\hat{\mathbf{u}}) &= R\,(\lambda\dot{\tau} + \tau - 2\eta_m D(\mathbf{u}))\,R^T + \lambda\left(\dot{R}\ \tau\ R^T + R\ \tau\ \dot{R}^T\right) \\ &= \lambda\left(\dot{R}\ \tau\ R^T + R\ \tau\ \dot{R}^T\right) \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Le terme résiduel, issu des rotations du repère, n'est pas nul en général : le modèle n'est pas invariant par changement de repère. L'idée d'Oldroyd est d'incorporer ces termes dans une nouvelle définition de la dérivée en temps des tenseurs afin de pouvoir écrire des modèles invariants par changement de repère.

4.3 Dérivation objective d'un tenseur

Pour cela, observons comment se transforme le tenseur de taux de rotation du matériau $2W(\mathbf{u}) = \nabla\mathbf{u} - \nabla\mathbf{u}^T$. On a :

$$\begin{aligned} 2\hat{W}(\hat{\mathbf{u}}) &= \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}} - \hat{\nabla}\hat{\mathbf{u}}^T \\ &= R\ \nabla\mathbf{u}\ R^T + \dot{R}\ R^T - R\ \nabla\mathbf{u}^T\ R^T - R\ \dot{R}^T \\ &= R\ 2W(\mathbf{u})\ R^T + 2\dot{R}\ R^T \end{aligned}$$

L'effet de la rotation du matériau $W(\mathbf{u})$ sur le tenseur symétrique des contraintes τ s'évalue par :

$$\tau\ W(\mathbf{u}) + (\tau\ W(\mathbf{u}))^T = \tau\ W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\ \tau$$

Ce terme est vu par le second observateur comme :

$$\begin{aligned} \hat{\tau}\ \hat{W}(\hat{\mathbf{u}}) - \hat{W}(\hat{\mathbf{u}})\ \hat{\tau} &= \quad (R\ \tau\ R^T)(R\ W(\mathbf{u})\ R^T + \dot{R}\ R^T) \\ &\quad -(R\ W(\mathbf{u})\ R^T + \dot{R}\ R^T)(R\ \tau\ R^T) \\ &= R\ (\tau\ W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\ \tau)\ R^T + R\ \tau\ R^T\ \dot{R}\ R^T - \dot{R}\ \tau\ R^T \end{aligned}$$

On a vu précédemment que $\dot{R}\ R^T = -R\dot{R}^T$, et donc :

$$\hat{\tau}\ \hat{W}(\hat{\mathbf{u}}) - \hat{W}(\hat{\mathbf{u}})\ \hat{\tau} \ = \ R\ (\tau\ W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\ \tau)\ R^T - R\ \tau\ \dot{R}^T - \dot{R}\ \tau\ R^T$$

Remarquons que les deux termes supplémentaires sont exactement, au signe près, ceux qui apparaissent en transformant l'équation constitutive (4.2). On introduit une nouvelle définition de la dérivée d'un tenseur :

$$\begin{aligned}\frac{\mathscr{D}\tau}{\mathscr{D}t} &= \dot{\tau} + \tau\, W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\, \tau \\ &= \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\tau + \tau\, W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\, \tau\end{aligned}$$

Cette dérivée est aussi appelée la dérivée de Lie en mathématiques ou encore dérivée de Jaumann en mécanique. En observant que le tenseur symétrique $\tau\, D(\mathbf{u}) + (\tau\, D(\mathbf{u}))^T = \tau\, D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u})\, \tau$ se transforme de façon invariante en $R\, (\tau\, D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u})\, \tau)\, R^T$ on peut définir, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la dérivée objective suivante :

$$\frac{\mathscr{D}_a\tau}{\mathscr{D}t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\tau + \tau\, W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\, \tau - a\, (\tau\, D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u})\, \tau) \tag{4.3}$$

Pour $a = 0$ on retrouve la dérivée de Jaumann, pour $a = 1$ c'est la dérivée convectée supérieure et pour $a = -1$ c'est la dérivée convectée inférieure. Pour $a \in [-1, 1]$ on parle de la dérivée de Gordon-Schowalters.

4.4 Le modèle d'Oldroyd

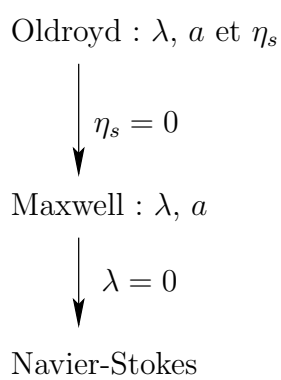


FIGURE 4.2 – Fluides viscoélastiques : une hiérarchie de modèles.

Le tenseur des containtes totales de Cauchy est $\sigma_{\text{tot}} = -p.I + 2\eta_s D(\mathbf{u}) + \tau$ et τ vérifie l'équation du premier ordre :

$$\lambda \frac{\mathscr{D}_a\tau}{\mathscr{D}t} + \tau = 2\eta_m D(\mathbf{u}) \quad \text{dans }]0, T[\times\Omega$$

où $\lambda \geq 0$ est le temps de relaxation et $\eta_s \geq 0$, $\eta_m > 0$ sont des viscosités. Pour $\lambda = 0$ on retrouve un fluide newtonien de viscosité $\eta = \eta_s + \eta_m$. Pour $\eta_s = 0$ ce modèle s'appelle le modèle de Maxwell. En complétant avec les conservations de la masse et de la quantité de mouvement, on obtient le problème suivant :

(P) : trouver τ, $\mathbf{u}$ et p, dfinis dans $]0,T[\times\Omega$ tels que

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\frac{\partial\tau}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\tau + \beta_a(\nabla\mathbf{u},\tau)\right) + \tau - 2\eta_m D(\mathbf{u}) &= 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\
\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) - \mathbf{div}\,(\tau) - \mathbf{div}\,(2\eta_s D(\mathbf{u})) + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\
\operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\
\tau &= \tau_\Gamma \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega_- \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega \\
\tau(t{=}0) &= \tau_0 \text{ dans } \Omega \\
\mathbf{u}(t{=}0) &= \mathbf{u}_0 \text{ dans } \Omega
\end{aligned}$$

où $\mathbf{f}$ sont les forces extérieures (gravité, etc) données, et les conditions aux bords et initiales τ_Γ, $\mathbf{u}_\Gamma$ et τ_0, $\mathbf{u}_0$ sont également connues. On a noté $\partial\Omega_-$ l'amont, c'est-à-dire la portion de frontière présentant un flux entrant :

$$\partial\Omega_-(t) = \{x \in \partial\Omega;\ \mathbf{u}_\Gamma(t,x).\mathbf{n}(x) < 0\}$$

Par commodité on regroupe les termes issus de la dérivée objective dans

$$\beta_a(\nabla\mathbf{u},\tau) = \tau\ W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\ \tau - a\,(\tau\ D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u})\ \tau) \tag{4.4}$$

4.5 Exemple 1 : écoulement de Poiseuille

On reprend l'exemple d'un écoulement entre deux plaques parallèles introduits à la section 2.3 page 35 et poursuivi à la section 3.4 page 52.

Lorsque l'écoulement est établi, la vitesse est de la forme $\mathbf{u}(x) = (0,0,u(x))$ et le gradient des vitesses est donné par

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur des contraintes élastiques a la forme :

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

En effet, en plus de la contrainte élastique de cisaillement τ_{xz}, le fluide peut développer des contraintes élastiques normales τ_{xx} et τ_{zz}. Un petit calcul conduit à :

$$\beta_a(\nabla\mathbf{u},\tau) = \begin{pmatrix} (1-a)u'\tau_{xz} & 0 & -\dfrac{1+a}{2}u'\tau_{xx} + \dfrac{1-a}{2}u'\tau_{zz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{1+a}{2}u'\tau_{xx} + \dfrac{1-a}{2}u'\tau_{zz} & 0 & -(1+a)u'\tau_{xz} \end{pmatrix}$$

Le problème se réduit à :

(P) : trouver $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}$ et u, définis dans $]-L, L[$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda(1-a)u'\tau_{xz} + \tau_{xx} &= 0 \\ -\lambda(1+a)u'\tau_{xz} + \tau_{zz} &= 0 \\ -\frac{\lambda(1+a)}{2}u'\tau_{xx} + \frac{\lambda(1-a)}{2}u'\tau_{zz} + \tau_{xz} - \eta_m u' &= 0 \\ -\tau'_{xz} - \eta_s u'' &= f \\ u(-L) = u(L) &= 0 \end{aligned}$$

Pour renormaliser le problème, on pose $\tilde{x} = x/L$. De même, on va remplacer l'inconnue $u(x)$ par $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(L\tilde{x})/U$, avec $U > 0$ qu'on va préciser. Les contraintes sont renormalisées par $\tilde{\tau}_{ij} = \Sigma\tau_{ij}$ avec $\Sigma = (\eta_s + \eta_m)U/L$. Le problème devient :

$(\tilde{P})$: trouver $\tilde{\tau}_{xx}, \tilde{\tau}_{zz}, \tilde{\tau}_{xz}$ et $\tilde{u}$, définis dans $]-1, 1[$ tels que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda U}{L}(1-a)\tilde{u}'\tilde{\tau}_{xz} + \tilde{\tau}_{xx} &= 0 \\ -\frac{\lambda U}{L}(1+a)\tilde{u}'\tilde{\tau}_{xz} + \tilde{\tau}_{zz} &= 0 \\ \frac{\lambda U}{L}\left(-\frac{1+a}{2}\tilde{u}'\tilde{\tau}_{xx} + \frac{1-a}{2}\tilde{u}'\tilde{\tau}_{zz}\right) + \tilde{\tau}_{xz} - \frac{\eta_m}{\eta_s+\eta_m}\tilde{u}' &= 0 \\ -\tilde{\tau}'_{xz} - \frac{\eta_s}{\eta_s+\eta_m}\tilde{u}'' &= \frac{fL^2}{(\eta_s+\eta_m)U} \\ \tilde{u}(-1) = \tilde{u}(1) &= 0 \end{aligned}$$

Choisissons, sans perte de généralité $U = fL^2/(\eta_s + \eta_m)$ et posons $We = \lambda U/L$ et $\alpha = \eta_m/(\eta_s + \eta_m)$. Comme nous allons travailler avec ce problème renormalisé, et qu'il n'y a plus d'ambiguïté, nous pouvons omettre les tildes :

(P) : trouver $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}$ et u, définis dans $]-1,1[$ tels que

$$\begin{aligned}
We(1-a)u'\tau_{xz} + \tau_{xx} &= 0 && (4.5)\\
-We(1+a)u'\tau_{xz} + \tau_{zz} &= 0 && (4.6)\\
\frac{We}{2}\left(-(1+a)u'\tau_{xx} + (1-a)u'\tau_{zz}\right) + \tau_{xz} - \alpha u' &= 0 && (4.7)\\
-\tau'_{xz} - (1-\alpha)u'' &= 1 && (4.8)\\
u(-1) = u(1) &= 0 && (4.9)
\end{aligned}$$

Le problème contient trois paramètres : $We \geq 0$ appelé nombre de Weissenberg, et correspondant à l'effet mémoire du fluide, $\alpha \in]0,1]$ correspondant à un effet de retard, et $a \in \mathbb{R}$ le paramètre de la dérivée des tenseurs. De (4.5) et (4.6) il vient :

$$\tau_{xx} = -We(1-a)u'\tau_{xz} \quad \text{et} \quad \tau_{zz} = We(1+a)u'\tau_{xz} \tag{4.10}$$

et (4.7) conduit à :

$$\left(1 + (1-a^2)We^2(u')^2\right)\tau_{xz} = \alpha u'$$

Le paramètre de dérivation de tenseur sera définitivement réduit à $a \in [-1,1]$. Posons par commodité $k^2 = (1-a^2)We^2$. Ainsi

$$\tau_{xz} = \frac{\alpha u'}{1 + k^2(u')^2} \tag{4.11}$$

et (4.8), une fois intégrée, conduit à une équation en u' :

$$\frac{\alpha u'}{(1 + k^2(u')^2)} + (1-\alpha)u' + x = 0$$

La constante d'intégration est nulle du fait de la symétrie en x de la solution. L'équation précédente s'écrit encore :

$$(1-\alpha)k^2(u')^3 + k^2x(u')^2 + u' + x = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré en u'.

Pour $a = \pm 1$ on a $k^2 = 0$ et cette équation se réduit à $u' = -x$ ce qui permet d'obtenir la solution :

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1-x^2}{2}\\
\tau_{xz}(x) &= -\alpha x\\
\tau_{xx}(x) &= -We(1-a)\alpha x^2\\
\tau_{zz}(x) &= \quad We(1+a)\alpha x^2
\end{aligned}$$

Pour $a \in]-1,1[$ on a $k > 0$: opérons le changement de variable $\delta = -ku'$ et $\zeta = kx$. L'équation du trosième degré prend la forme plus concise :

$$(1-\alpha)\delta^3 - \zeta\delta^2 + \delta - \zeta = 0$$

Pour $\alpha = 1$ (modèle de Maxwell) l'équation se réduit au second degré :

$$\zeta\delta^2 - \delta + \zeta = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 1 - 4\zeta^2$. Ce déterminant n'est positif que si $We\sqrt{1-a^2}x < 1/2$, $\forall x \in [-1,1]$ ce qui donne une condition d'existence de la solution : $We\sqrt{1-a^2} < 1/2$. Dans ce cas, remarquons que la plus grande des deux racines est non-bornée quand $x = 0$ tandis que la plus petite des deux s'annule en $x = 0$, ce qui est requis pour des raisons de symétrie de la solution.

En prenant la plus petite des deux racines :

$$u'(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4k^2x^2}}{2k^2x}, \quad \forall x \in [-1,1]$$

d'où finalement la solution pour $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{2k^2}\left(\sqrt{1-4k^2x^2} - \sqrt{1-4k^2} + \log\left(\frac{1+\sqrt{1-4k^2}}{1+\sqrt{1-4k^2x^2}}\right)\right) \\
\tau_{xz}(x) &= x \\
\tau_{xx}(x) &= -We(1-a)x^2 \\
\tau_{zz}(x) &= \quad We(1+a)x^2
\end{aligned}$$

ceci $\forall x \in [-1,1]$. La solution est représentée sur la Fig. 4.3 pour le cas limite $k = \sqrt{1-a^2}We = 1/2$. il n'existe plus de solution pour $k > \sqrt{1-a^2}We = 1/2$, c'est-à-dire pour $|a| < 1$ et We assez grand.

Pour $\alpha < 1$ l'équation caractéristique (4.12) est strictement du troisième degré. Remarquons que nous pouvons exprimer $\zeta = kx$ en fonction de $\delta = ku'$:

$$\zeta = \frac{(1 + (1-\alpha)\delta^2)\,\delta}{1+\delta^2}$$

ce qui permet d'en réaliser facilement le graphique (voir Fig. 4.5). Les points de rebroussement correspondent à $\mathrm{d}\zeta/\mathrm{d}\delta = 0$ soit encore à l'équation bicarrée :

$$(1-\alpha)\delta^4 + (2-3\alpha)\delta^2 + 1 = 0$$

dont le discriminant est $\alpha(9\alpha - 8)$. Pour $\alpha < 8/9$, il n'y a pas de points de rebroussement et ainsi δ est unique pour chaque valeur de ζ : il y a existence et unicité de la solution. Pour $1 > \alpha > 8/9$, il y a deux points de rebroussement : il y a alors multiplicité de la

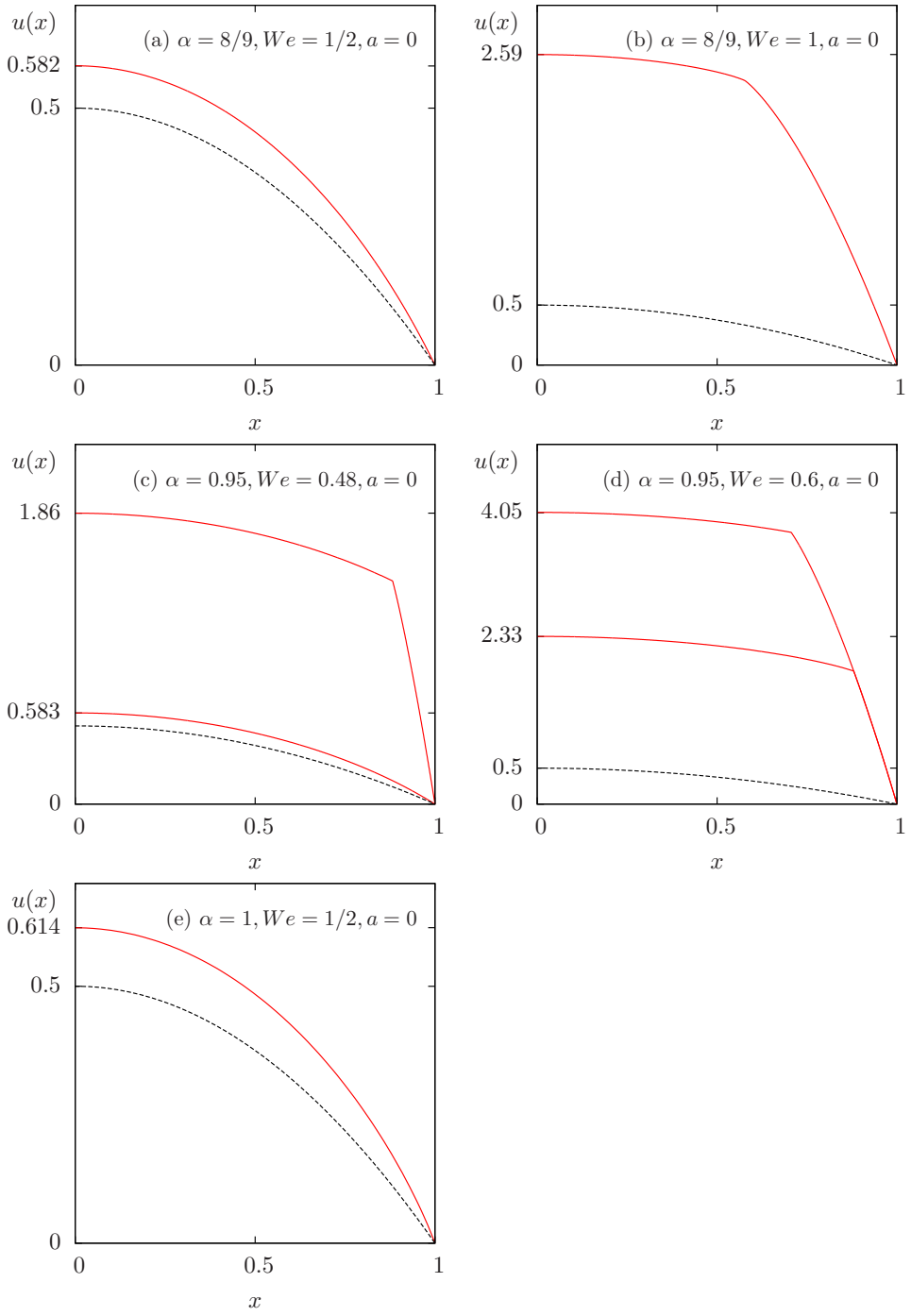


FIGURE 4.3 – Fluides viscoélastiques : écoulement de Poiseuille avec $a = 0$: (a,b) $\alpha = 8/9$ et (a) $We = 1/2$, (b) $We = 1$; (c,d) $\alpha = 0.95$ et (c) $We = 0.48$, (d) $We = 1$; (e) $\alpha = 1$ et $We = 1/2$. En pointillé, la solution newtonienne $u(x) = (1 - x^2)/2$.

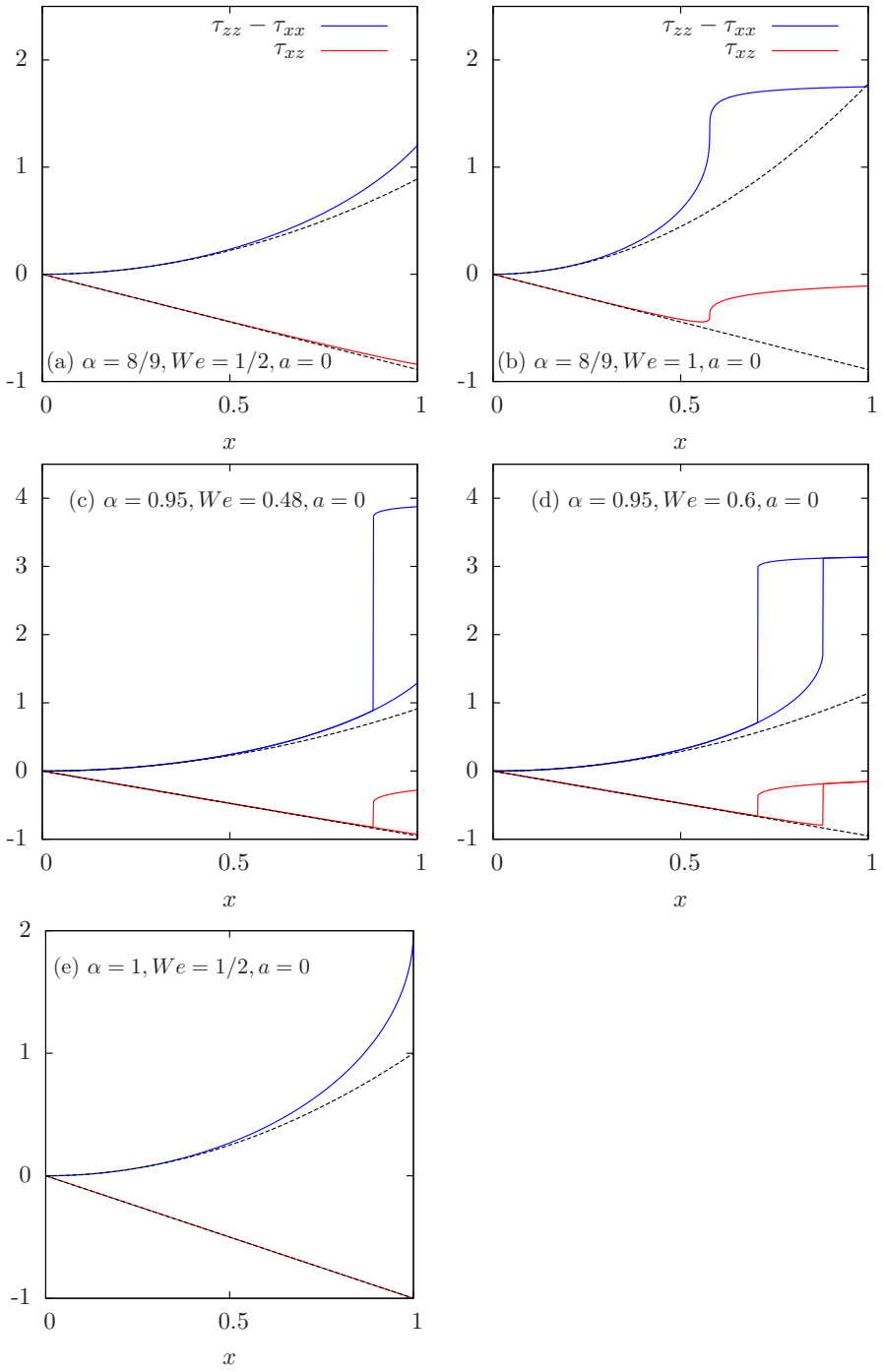


FIGURE 4.4 – Fluides viscoélastiques : écoulement de Poiseuille avec $a = 0$: contraintes (a,b) $\alpha = 8/9$ et (a) $We = 1/2$, (b) $We = 1$; (c,d) $\alpha = 0.95$ et (c) $We = 0.48$, (d) $We = 1$; (e) $\alpha = 1$ et $We = 1/2$. En pointillé, la solution pour $|a| = 1$.

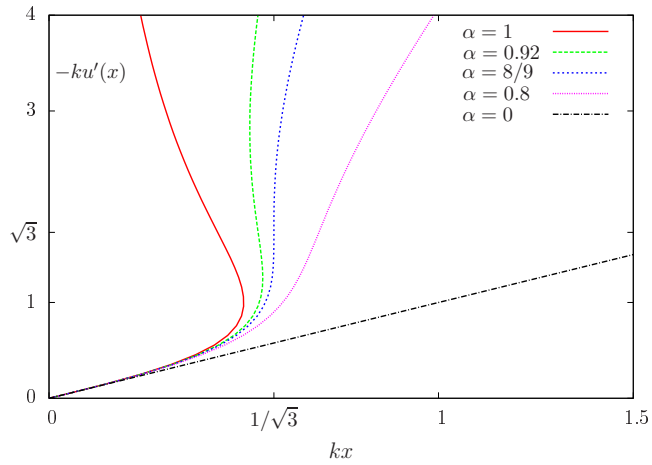


FIGURE 4.5 – Fluides viscoélastiques : courbe caractéristique $\delta = -ku'(x)$ en fonction de $\zeta = kx$ avec $k = \sqrt{1-a^2}We$.

solution. Pour $\alpha = 8/9$, les deux points de rebroussement sont confondus en un point $(\zeta_0, \delta_0) = (1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (voir Fig. 4.5).

Posons $\delta = \phi + \zeta/(3(1-\alpha))$: l'équation prend la forme canonique :

$$\phi^3 + p\phi + q = 0$$

avec

$$\begin{aligned} p &= \frac{3(1-\alpha) - \zeta^2}{3(1-\alpha)^2} \\ q &= \frac{\zeta\left(9(1-\alpha)(3\alpha-2) - 2\zeta^2\right)}{27(1-\alpha)^3} \end{aligned}$$

Par la méthode de cardan, on obtient le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= q^2 + \frac{4}{27}p^3 \\ &= \frac{4\zeta^4 + (27\alpha^2 - 36\alpha + 8)\zeta^2 + 4(1-\alpha)}{27(1-\alpha)^4} \end{aligned}$$

Le signe du discriminant est porté par le numérateur qui est un polynôme équation bicarrée, dont le discriminant est $\alpha(9\alpha - 8)^3$.

- Si $\alpha \in]0, 8/9[$, alors Δ est toujours positif et l'équation du troisième degré a exactement une solution réelle :

$$\phi_{0,1,2} = \left(\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

- Si $\alpha = 8/9$, alors $\Delta = 0$ et l'équation admet deux solutions

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \frac{3q}{p} \\ \phi_{1,2} &= -\frac{3q}{2p} \end{aligned}$$

- Si $\alpha \in]8/9, 1[$, alors $\Delta < 0$ et l'équation trois solutions

$$\phi_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\ \cos\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{q}{2}\sqrt{\frac{-27}{p^3}}\right)\right), k = 0, 1, 2$$

Pour chaque $x \in [0, 1]$ il peut exister trois solutions, si bien qu'on est conduit à un continuum de solutions $u'(x)$. On construit les solutions minimales et maximales associées à $\phi_{\min} = \min_{k=0,1,2} \phi_k$ et $\phi_{\max} = \max_{k=0,1,2} \phi_k$.

On obtient par les formules de Cardan une expression explicite de $u'(x)$ et des contraintes $\tau(x)$ mais il n'existe pas de primitive usuelle de u' : le calcul de $u(x)$ se fait par intégration numérique :

$$u(x) = -\int_x^1 u'(y)\,\mathrm{d}y \approx -\sum_{i=0}^{N} u'(y_i)\,\Delta y$$

avec $y_i = x + (i + \frac{1}{2})\Delta y$, $\Delta y = (1 - x)/N$ et $N = 1000$.

4.6 Algorithme du θ-schéma

Cet algorithme a été introduit pour la première fois dans [Sar90, Sar94]. On néglige le terme d'inertie $\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}$ dans le problème : le fluide est supposé lent. On pose

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \tau \\ \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \mathbf{u}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \mathrm{diag}\left(\frac{\lambda}{2\eta_m}, -\rho, 0\right)$$

et

$$A(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2\eta_m}\left(\mathbf{u}.\nabla\tau + \beta_a(\nabla\mathbf{u}, \tau)\right) + \frac{\tau}{2\eta_m} & -D(\mathbf{u}) & \\ \mathbf{div}\,(\tau) & +\mathbf{div}\,(2\eta_s D(\mathbf{u})) & -\nabla p \\ & \mathrm{div}\,\mathbf{u} & \end{pmatrix}$$

Le problème peut se mettre sous la forme :

(P) : trouver $\mathcal{U}$ tel que

$$\begin{aligned} M\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial t} + A(\mathcal{U}) &= \mathcal{F} \\ M\mathcal{U}(t=0) &= M\mathcal{U}_0 \end{aligned}$$

Le schéma de discrétisation en temps s'appuie sur une décomposition de l'opérateur $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ avec

$$A_1(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau}{2\eta_m} & -D(\mathbf{u}) & \\ \mathbf{div}\,(\tau) & +\mathbf{div}\,(2\eta_s D(\mathbf{u})) & -\nabla p \\ & \operatorname{div}\mathbf{u} & \end{pmatrix}$$

$$A_2(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{2\eta_m}\left(\mathbf{u}.\nabla\tau + \beta_a(\nabla\mathbf{u},\tau)\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le θ-schéma suivant :

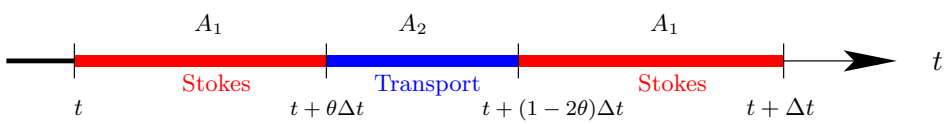


FIGURE 4.6 – Fluides viscoélastiques : le θ-schéma.

$(P)_k$: au pas de temps $k \geq 0$, $\mathcal{U}_k$ étant connu, calculer successivement $\mathcal{U}_{k+\theta}$ $\mathcal{U}_{k+1-\theta}$ et $\mathcal{U}_{k+1}$ suivant :

$$\begin{array}{rcccccl} M\dfrac{\mathcal{U}_{k+\theta}-\mathcal{U}_k}{\theta\Delta t} & + & A_1(\mathcal{U}_{k+\theta}) & + & A_2(\mathcal{U}_k) & = & \mathcal{F} \\ M\dfrac{\mathcal{U}_{k+1-\theta}-\mathcal{U}_{k+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} & + & A_1(\mathcal{U}_{k+\theta}) & + & A_2(\mathcal{U}_{k+1-\theta}) & = & \mathcal{F} \\ M\dfrac{\mathcal{U}_{k+1}-\mathcal{U}_{k+1-\theta}}{\theta\Delta t} & + & A_1(\mathcal{U}_{k+1}) & + & A_2(\mathcal{U}_{k+1-\theta}) & = & \mathcal{F} \end{array}$$

avec $\Delta t > 0$ et $\theta \in]0, 1/2[$.

Étape 1

Connaissant τ_k et $\mathbf{u}_k$, trouver $\tau_{k+\theta}$, $\mathbf{u}_{k+\theta}$ et $p_{k+\theta}$ tels que

$$\frac{\lambda}{2\eta_m}\left(\frac{\tau_{k+\theta}-\tau_k}{\theta\Delta t}\right) + \frac{\tau_{k+\theta}}{2\eta_m} - D(\mathbf{u}_{k+\theta}) = -\frac{\lambda}{2\eta_m}(\mathbf{u}_k.\nabla\tau_k \quad + \quad \beta_a(\nabla\mathbf{u}_k,\tau_k)) \tag{4.12}$$

$$-\rho\left(\frac{\mathbf{u}_{k+\theta}-\mathbf{u}_k}{\theta\Delta t}\right) + \mathbf{div}\,(\tau_{k+\theta}) + \mathbf{div}\,(2\eta_s D(\mathbf{u}_{k+\theta})) - \nabla p_{k+\theta} = -\mathbf{f} \text{ dans } \Omega \tag{4.13}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}_{k+\theta} = 0 \text{ dans } \Omega \tag{4.14}$$

$$\mathbf{u}_{k+\theta} = \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega \tag{4.15}$$

Posons $\gamma_k = \mathbf{u}_k.\nabla\tau_k + \beta_a(\nabla\mathbf{u}_k, \tau_k)$. De (4.12) il vient une expression explicite de $\tau_{k+\theta}$ en fonction de l'inconnue $\mathbf{u}_{k+\theta}$ et de grandeurs connues : :

$$\tau_{k+\theta} = \frac{1}{\lambda + \theta\Delta t}\left(\lambda\tau_k + 2\eta_m\theta\Delta t D(\mathbf{u}_{k+\theta}) - \lambda\theta\Delta t\gamma_k\right)$$

En reportant dans (4.13) et en rajoutant (4.14) et (4.15) on obtient :a

(P1) : trouver $\mathbf{u}_k$ et p_k tels que

$$\begin{aligned}
\frac{\rho}{\theta\Delta t}\mathbf{u}_{k+\theta} - \mathbf{div}(2\eta_* D(\mathbf{u}_{k+\theta})) + \nabla p_k &= \mathbf{f}_k \text{ dans } \Omega \\
-\mathrm{div}\,\mathbf{u}_{k+\theta} &= 0 \text{ dans } \Omega \\
\mathbf{u}_{k+\theta} &= \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_k &= \mathbf{f} + \frac{\rho}{\theta\Delta t}\mathbf{u}_k + \frac{1}{\lambda + \theta\Delta t}\mathbf{div}(\lambda\tau_k - \lambda\theta\Delta t\gamma_k) \\
\eta_* &= \eta_s + \left(\frac{\theta\Delta t}{\lambda + \theta\Delta t}\right)\eta_m
\end{aligned}$$

L'étape 1 se ramène donc a la résolution d'un sous-problème linéaire de type Stokes suivit du calcul explicite de $\tau_{k+\theta}$.

Étape 2

Posons $\theta' = 1 - 2\theta$. Connaissant $\tau_{k+\theta}$ et $\mathbf{u}_{k+\theta}$, trouver $\tau_{k+1-\theta}$ et $\mathbf{u}_{k+1-\theta}$ tels que

$$\frac{\lambda}{2\eta_m}\left(\frac{\tau_{k+1-\theta} - \tau_{k+\theta}}{\theta'\Delta t} + \mathbf{u}_{k+1-\theta}.\nabla\tau_{k+1-\theta} + \beta_a(\nabla\mathbf{u}_{k+1-\theta}, \tau_{k+1-\theta})\right) = -\frac{\tau_{k+\theta}}{2\eta_m} + D(\mathbf{u}_{k+\theta}) \quad (4.16)$$

$$-\rho\left(\frac{\mathbf{u}_{k+1-\theta} - \mathbf{u}_{k+\theta}}{\theta'\Delta t}\right) = -\mathbf{f} - \mathbf{div}\left(\tau_{k+\theta}\right) - \mathbf{div}\left(2\eta_s D(\mathbf{u}_{k+\theta})\right) + \nabla p_{k+\theta} \text{ dans } \Omega \quad (4.17)$$

$$\tau_{k+1-\theta} = \tau_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.18)$$

En soustrayant (4.13) à (4.17) et en divisant par ρ, il vient :

$$\frac{\mathbf{u}_{k+1-\theta} - \mathbf{u}_{k+\theta}}{\theta'\Delta t} = \frac{\mathbf{u}_{k+\theta} - \mathbf{u}_k}{\theta\Delta t}$$

soit encore, l'expression explicite de $\mathbf{u}_{k+1-\theta}$ en fonction de grandeurs connues :

$$\mathbf{u}_{k+1-\theta} = \frac{1-\theta}{\theta}\mathbf{u}_{k+\theta} - \frac{1-2\theta}{\theta}\mathbf{u}_k$$

Posons

$$\chi_{k+\theta} = \frac{1}{\theta'\Delta t}\tau_{k+\theta} + \frac{2\eta_m}{\lambda}\left(-\frac{\tau_{k+\theta}}{2\eta_m} + D(\mathbf{u}_{k+\theta})\right)$$

L'étape 2 se réduit à

(P2) : trouver $\tau_{k+1-\theta}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1-\theta}.\nabla\tau_{k+1-\theta} + \beta_a(\nabla\mathbf{u}_{k+1-\theta}, \tau_{k+1-\theta}) + \frac{1}{\theta'\Delta t}\tau_{k+1-\theta} &= \chi_{k+\theta} \text{ dans } \Omega \\ \tau_{k+1-\theta} &= \tau_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega_- \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système hyperbolique linéaire, faisant apparaitre le terme de transport $\mathbf{u}.\nabla$.

Étape 3

Cette étape de symétrisation est identique à l'étape 1, à un décalage d'indice près. Elle permet d'obtenir un schéma d'ordre 2 en temps à condition de prendre $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$ (voir [Sar97]). L'algorithme conduit à une succession de sous-problèmes linéaires de type Stokes, qui sont complètement standard, et de type transport, dont l'étude fait l'objet d'un prochain paragraphe.

4.7 Approximation en espace

L'approximation en espace des inconnues $(\tau, \mathbf{u}, p)$ est similaire à celle du problème viscoplastique, introduite à la section 3.6 page 61. Le problème peut être discrétisé par différences finies ou bien par éléments finis (voir Fig. 3.6 et 3.7). L'approximation par éléments finis a été introduite dans [FF89]. L'approximation par différences finies s'interprète comme une méthode d'éléments finis mixtes [Sar90, Sar94].

4.8 Transport des contraintes

On va se concentrer sur le sous-problème de transport, et comme il n'y aura plus d'ambiguïté, on omet l'indice $k + 1 - \theta$:

(P) : trouver τ tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}.\nabla\tau + \beta_a(\nabla\mathbf{u}, \tau) + \nu\tau &= \chi \text{ dans } \Omega \\ \tau &= \tau_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega_- \end{aligned}$$

où on a posé $\nu = 1/(\theta'\Delta t)$ et où $\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d$ est donné ainsi que $\chi \in L^2(\Omega)^{d\times d}_s$ et τ_Γ. Introduions les opérateurs :

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \mathbf{u}.\nabla\tau + \beta_a(\nabla\mathbf{u},\tau) + \nu\tau,\ \forall\tau \in C^1(\bar\Omega)^{d\times d}_s \\ B &= \mathbf{u}.\mathbf{n} \\ M &= |\mathbf{u}.\mathbf{n}| \end{aligned}$$

Le problème s'écrit encore :

(P) : trouver $\tau \in C^1(\bar\Omega)^{d\times d}_s$, tel que

$$A\tau = \chi \text{ dans } \Omega \tag{4.19}$$

$$(M-B)(\tau-\tau_\Gamma) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \tag{4.20}$$

Remarquons que la donnée au bord a été étendue de $\partial\Omega_-$ à tout $\partial\Omega$. Une solution τ vérifiant (4.19)-(4.20) sera dite *solution forte* du problème. Le but des notations qui viennent est de traiter, autant que possible les systèmes hyperboliques comme nous savons traiter les équations elliptiques : ce formalisme a été introduit en 1958 par Friedrichs [Fri58], puis largement utilisé par Lesaint et Raviart [Les74, LR79] pour traiter les équations de transport par méthodes de Galerkin discontinues. Tombé quelques temps dans l'oubli, il est actuellement en train de resurgir avec le renouveau des méthodes de Galerkin discontinues [EG06b, EG06a, EGC07, dPE12] qui permettent de traiter de façon uniformes les équations elliptiques et hyperboliques. Pour cela, introduisons l'*adjoint formel* A^* de A, défini par :

$$A^*(\tau) = -\mathbf{u}.\nabla\tau - \beta_{-a}(\nabla\mathbf{u},\tau) + (\nu - \operatorname{div}\mathbf{u})\tau,\ \forall\tau \in C^1(\bar\Omega)^{d\times d}_s$$

Lemme **4.8.1** (de l'adjoint formel)
L'opérateur A et son adjoint formel satisfont la formule d'intégration par partie :

$$\int_\Omega A(\tau):\gamma\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \tau:A^*(\gamma)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}(\tau:\gamma)\ \mathbf{u}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}s,\ \forall\tau,\gamma \in C^1(\bar\Omega)^{d\times d}_s \tag{4.21}$$

Démonstration : D'une part, par intégration par partie :

$$\int_\Omega (\mathbf{u}.\nabla\tau):\gamma\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega \tau:(\mathbf{u}.\nabla\gamma)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega(\tau:\gamma)\ \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}(\tau:\gamma)\ \mathbf{u}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$$

D'autre part, de la définition de β_a à l'équation (4.4), page 80 :

$$\beta_a(\nabla\mathbf{u},\tau):\gamma = -\tau:\beta_{-a}(\nabla\mathbf{u},\gamma),\ \forall\tau,\gamma \in \mathbb{R}^{d\times d}$$

En effet, $W(\mathbf{u})$ anti-symétrique :

$$\begin{aligned}(\tau W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\tau):\gamma &= \sum_{i,j,k=1}^{d} \tau_{ik} W_{kj}(\mathbf{u})\ \gamma_{ij} - \sum_{i,j,k=1}^{d} W_{ik}(\mathbf{u})\tau_{kj}\ \gamma_{ij} \\ &= -\sum_{i,j,k=1}^{d} \tau_{ik}\ \gamma_{ij} W_{jk}(\mathbf{u}) + \sum_{i,j,k=1}^{d} \tau_{kj}\ W_{ki}(\mathbf{u})\gamma_{ij} \\ &= -\tau:(\gamma W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\gamma)\end{aligned}$$

De façon similaire, $D(\mathbf{u})$ étant symétrique :

$$(\tau D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u})\tau):\gamma = \tau:(\gamma D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u})\gamma)$$

D'où le résultat. □

On introduit $A_s = (A + A^*)/2$ la partie symétrique de A. Il vient :

$$\begin{aligned}A_s(\tau) &= \left(\nu - \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right)\tau + \frac{1}{2}\left(\beta_a(\nabla\mathbf{u},\tau) - \beta_{-a}(\nabla\mathbf{u},\tau)\right) \\ &= \left(\nu - \frac{1}{2}\mathrm{div}\,\mathbf{u}\right)\tau - a\left(\tau\ D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u})\ \tau\right)\end{aligned}$$

L'opérateur A est dit *positif* au sens de Friedrichs si il existe une constante $a_0 > 0$ telle que

$$\int_\Omega \frac{A_s(\tau):\tau}{2}\,\mathrm{d}x \geq \frac{a_0}{2}\|\tau\|_T^2,\ \forall\tau \in T \tag{4.22}$$

avec la norme $|\tau|_T^2 = (1/2)\int_\Omega \tau:\tau\,\mathrm{d}x$. Friedrichs montre dans [Fri58] que si A est positif, alors la solution forte existe. Il nous reste par conséquent à vérifier la positivité. Dans notre cas du problème de transport des contraintes, l'opérateur A_s dépend du champs de vecteur $\mathbf{u}$ et de $\nu > 0$: la positivité impose une condition entre $\mathbf{u}$ et ν. De l'expression précédente de A_s, il vient :

$$A_s(\tau):\tau = (2\nu - \mathrm{div}\,\mathbf{u})\,|\tau|^2 - 2a(\tau\ D(\mathbf{u})):\tau$$

Une condition suffisante pour que A soit positif est

$$\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \text{ et } 2\nu - \|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_{0,\infty,\Omega} - 2|a|\ \|D(\mathbf{u})\|_{0,\infty,\Omega} > 0$$

Lorsque $\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0$ comme c'est le cas ici pour le problème qui nous intéresse, et avec le choix $a = 0$, cette condition est vérifiée. Lorsque $a \neq 0$, rappelant la définition $\nu = 1/(\theta'\Delta t)$ il vient une condition sur le pas de temps :

$$\Delta t < \Delta t_c = \frac{2}{(1-2\theta)\ \left(\|\mathrm{div}\,\mathbf{u}\|_{0,\infty,\Omega} + 2|a|\ \|2D(\mathbf{u})\|_{0,\infty,\Omega}\right)}$$

Ainsi, pour $\mathrm{div}\,\mathbf{u} \neq 0$ ou $a \neq 0$, le pas de temps ne doit pas être choisis trop petit pour garantir que le sous-problème de type transport admette une solution faible. Dans la pratique, $\mathbf{u}$ étant connu, il est même possible de calculer Δt_c et de satisfaire cette condition.

4.9 Formulation variationnelle du transport

La formulation précédente, introduite par Friedrichs, a cependant quelques inconvénients : l'expression de la condition aux bords ne permet pas de montrer l'unicité de la solution forte dans $C^1(\bar{\Omega})$ et cette formulation se prète mal à l'approximation par éléments finis. Nous allons y remédier en définisant une solution faible du problème de transport des contraintes. Pour cela, étendons les opérateurs A et A^* ainsi que B et M à tout $T = L^2(\Omega)_s^{d\times d}$ et introduisons l'espace :

$$H = \{\tau \in T;\ A(\tau) \in T\}$$

que munisons du produit scalaire :

$$(\tau, \gamma)_H = \int_\Omega \frac{\tau : \gamma}{2}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{A(\tau) : A(\gamma)}{2}\,\mathrm{d}x$$

L'espace H est ainsi un espace de Hilbert [EGC07]. Introduisons les formes :

$$\begin{aligned} a(\tau,\gamma) &= \int_\Omega A(\tau) : \gamma\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (M-B)\tau : \gamma\,\mathrm{d}x \\ l(\gamma) &= \int_\Omega \chi : \gamma\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (M-B)\tau_\Gamma : \gamma\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Nous dirons que $\tau \in H$ est *solution faible* du problème de transport des contraintes si et seulement si

$$a(\tau,\gamma) = l(\gamma),\ \forall \gamma \in H$$

Remarquons que la condition au bord sur $\partial\Omega_-$ est maintenant imposées faiblement via une intégrale sur $\partial\Omega$.

Lemme **4.9.1** (coercivité)
Supposons que A est positif au sens de Friedrichs. Alors la forme a est coercive dans H pour la semi-norme

$$|\tau|_M^2 = \int_\Omega \tau : \tau\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} M(\tau) : \tau\,\mathrm{d}x$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante $\alpha_0 > 0$ tel que :

$$a(\tau,\tau) \ \geq\ \alpha_0 |\tau|_M^2,\ \forall \tau \in H$$

où $a_0 > 0$ est la constante de positivité.

Démonstration : Pour tout $\tau \in H$, en utilisant (4.21) :

$$\begin{aligned} a(\tau,\tau) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (A+A^*)(\tau) : \tau\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega (A-A^*)(\tau) : \tau\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (M-B)\tau : \gamma\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega A_s(\tau) : \tau\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega B(\tau) : \tau\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} (M-B)\tau : \gamma\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\Omega A_s(\tau) : \tau\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega M(\tau) : \tau\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Le résultat découle ensuite de la positivité (4.22). □

THÉORÈME **4.9.1** (existence et unicité)
Supposons que A est positif au sens de Friedrichs. Alors la formulation variationnelle du problème admet une solution unique $\tau \in H$ et qui vérifie le problème au sens faible suivant :

$$\begin{aligned} A\tau &= \chi \quad \textit{dans } T \\ (M-B)(\tau-\tau_\Gamma) &= 0 \quad \textit{dans } H' \end{aligned}$$

Démonstration : Pour une démonstration compète, voir [EGC07, dPE12]. Nous en donnons ici quelques indications. On introduit $H_0 = Ker(B-M) \subset H$. L'opérateur A est défini de H dans T : on montre que sa restriction $A : H_0 \to T$ est un isomorphisme, ce qui prouve l'existence d'une solution dans H_0. L'unicité découle de la coercivité. □

4.10 Discrétisation : la difficulté

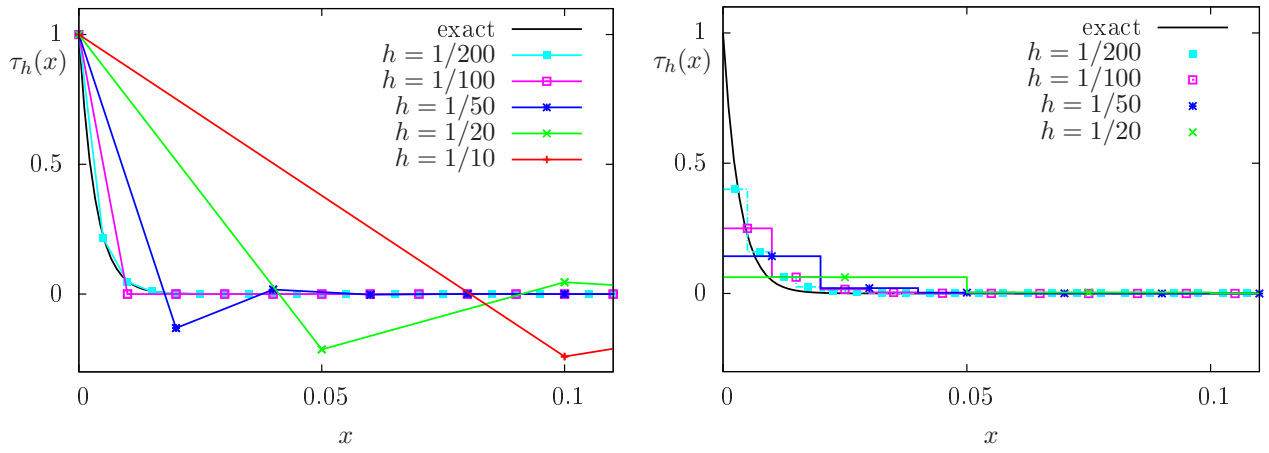


FIGURE 4.7 – Transport et éléments finis ($\varepsilon = 300$) : (gauche) approximation continue centrée et oscillations lorsque $\varepsilon h > 3$. (droite) approximation discontinue décentrée et monotonie.

Pour présenter la difficulté, étudions un cas simple. Supposons $\chi = 0$ et le champs de vecteur $\mathbf{u} = (u(x), 0, 0)$ avec $u > 0$ constant dans un système de coordonnées (x, y, z). et posons $\varepsilon = \nu/u > 0$. Supposons également $\tau_\Gamma = 1$. En projettant l'équation de transport tensoriel, nous obtenons trois problème de Cauchy de la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x} + \varepsilon\tau &= 0 \quad \text{dans }]0,1[\\ \tau(0) &= 1 \end{aligned}$$

et dont la solution est $\tau(x) = \exp(-\varepsilon x)$. Étudions à présent l'approximation par éléments finis de ce problème : nous découpons le domaine de calcul $\Omega =]0,1[$ en N éléments égaux $K_i = [ih, (i+1)h]$, $0 \leq i \leq N-1$ de longueur $h = 1/N$. Choisissons l'espace d'approximation :

$$T_h \quad = \quad \{\gamma_h \in C^0(\bar{\Omega});\ \gamma_{h|K_i} \in P_1,\ 0 \leq i \leq N-1\}$$

Nous avons $T_h \subset T = L^2(\Omega)$, $\dim(T_h) = N+1$ et la famille $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq N}$ des éléments de T_h définie par $\varphi_i(jh) = \delta_{i,j}$ constitue une base de T_h. Un élément $\tau_h \in T_h$ sera parfaitement déterminé par ses composantes dans cette base : $\tau_h(x) = \sum_{i=0}^{N} \tau_i \varphi_i(x)$, ceci $\forall x \in \Omega$. La méthode des éléments finis consiste à chercher $(\tau_i)_{0 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^{N+1}$ tels que

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 \\ \sum_{j=0}^{N} \left(\int_0^1 (\varphi_j'(x) + \varepsilon \varphi_j(x)) \varphi_i(x)\, \mathrm{d}x \right) \tau_j &= 0,\ 1 \leq i \leq N \end{aligned}$$

Les estimations d'erreur classiques s'appliquent et l'erreur est en $\mathcal{O}(h^2)$ en norme L^2, ce qui est optimal. La solution exacte τ étant monotone décroissante en x, il est souhaitable que la solution approchée τ_h ait des propriétés analogues. En évaluant les intégrales dans le système précédent, il vient :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 \\ \frac{\tau_{i+1} - \tau_{i-1}}{2} + \frac{\varepsilon h}{6}(\tau_{i+1} + 4\tau_i + \tau_{i-1}) &= 0,\ 1 \leq i \leq N-1 \\ \frac{\tau_N - \tau_{N-1}}{2} + \frac{\varepsilon h}{6}(2\tau_N + \tau_{N-1}) &= 0 \end{aligned}$$

La solution est représentée sur la Fig. 4.7 : observons que pour $\varepsilon h = 3$, la solution approchée τ_h est donnée par :

$$\tau_0 = 1 \quad \text{et} \quad \tau_i = 0,\ 1 \leq i \leq N$$

ce qui est loin d'être satisfaisant. Dans le cas plus général, la matrice est tridiagonale, et a *diagonale dominante* [Sar13] dès que $\varepsilon h > 3$. Posons $\lambda = \varepsilon h/3$. En recherchant la solutions sous la forme $\tau_i = \alpha r_1^i + \beta r_2^i$, $0 \leq i \leq N$, il vient que r_1 et r_2 sont racines de l'équation du second degré

$$(\lambda + 1)\, r^2 + 4\lambda r + (\lambda - 1) = 0$$

où α et β sont donnés par la première et la dernière équation du système. Ainsi

$$r_\pm = -2\lambda \pm \sqrt{1 + 3\lambda^2}$$

La plus grande des deux racines $r_1 = r_+$ est toujours dans l'intervalle $[0,1]$. L'autre racine, $r_2 = r_-$ est toujours negative et augmente en valeur absolue lorsque λ augmente. Ainsi, pour εh assez grand, la solution oscille, ce que nous pouvons observer sur la Fig. 4.7. Ce comportement n'est pas incompatible avec une convergence $\mathcal{O}(h^2)$ en norme L^2, mais

n'est pas souhaitable : sur un cas plus complexe, l'amplitude des oscillations peut devenir préjudiciable.

Nous pouvons aussi recourir à des formules de quadratures pour calculer les intégrales intervenant dans la formulation variationnelle précédente. Par exemple la formule des trapèzes est définie pour toute fonction ψ continue par :

$$\int_{ih}^{(i+1)h} \psi(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left(\psi(ih) + \psi((i+1)h)\right)$$

et cette formule est exacte lorsque ψ est afine. Avec cette formule, la méthode des éléments finis conduit à :

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 1 \\ \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{2} + \varepsilon h \tau_i &= 0,\ 1 \leq i \leq N-1 \\ \frac{\tau_N - \tau_{N-1}}{2} + \frac{\varepsilon h}{2}\tau_N &= 0 \end{aligned}$$

Ce système est sensiblement différent du précédent, et coincide avec l'approximation du problème par différences finies : cependant, une rapide investigation conduit à montrer que pour $\varepsilon h > 1$ la solution oscille encore. Ainsi, l'approximation par différences finies ou éléments finis de ce problème conduit à des solutions qui présentent de grandes oscillations. Un des remède connu est de décentrer les schémas. Nous avons vu, lors de l'approximation en temps des équations de Navier-Stokes (section 1.6), comment la méthode des caractéristiques permet d'approcher le terme de transport $\mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}$. Cette méthode s'applique lorsque l'approximation polynomiale est continue, ce qui est le cas pour le champs de vecteur $\mathbf{u}$. Ici le champs transporté τ est discontinu au niveau discret : afine par morceaux dans chaque éléments mais sans raccord continu à l'interface des éléments. Nous allons profiter de cette discontinuité pour utiliser un décentrage par discontinuité connu sous le nom de la méthode de Galerkin discontinue ou de méthode de Lesaint-Raviart.

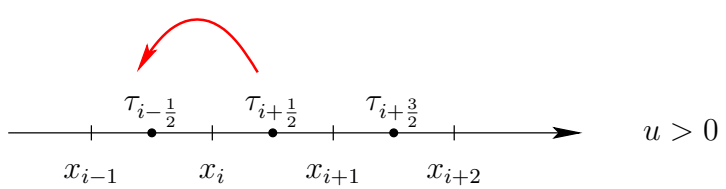


FIGURE 4.8 – Schéma décentré amont.

Cette méthode généralise en dimension quelconque, pour des polynômes de degré $k \geq 0$ et pour des maillages non-structurés arbitraires le schéma de différences finies décentré amont (voir Fig 4.8). Pour le problème de transport scalaire en une dimension étudié précédement, le schéma centré en $x_{i+\frac{1}{2}}$ s'écrit :

$$u\left(\frac{\tau_{i+\frac{3}{2}} - \tau_{i-\frac{1}{2}}}{2h}\right) + \nu\tau_{i+\frac{1}{2}} = 0$$

On le remplace par le schéma décentré suivant :

$$\begin{cases} u\left(\dfrac{\tau_{i+\frac{1}{2}} - \tau_{i-\frac{1}{2}}}{h}\right) + \nu\tau_{i+\frac{1}{2}} = 0 & \text{si } u \geq 0 \\ \\ u\left(\dfrac{\tau_{i+\frac{3}{2}} - \tau_{i+\frac{1}{2}}}{h}\right) + \nu\tau_{i+\frac{1}{2}} = 0 & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

avec la condition au bord sur la trace externe :

$$\begin{cases} \tau_{-\frac{1}{2}} = \tau_\Gamma & \text{si } u \geq 0 \\ \\ \tau_{N+\frac{1}{2}} = \tau_\Gamma & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

Ce schéma peut s'écrire encore :

$$\frac{|u| + u}{2}\left(\frac{\tau_{i+\frac{1}{2}} - \tau_{i-\frac{1}{2}}}{h}\right) + \frac{|u| - u}{2}\left(\frac{\tau_{i+\frac{1}{2}} - \tau_{i+\frac{3}{2}}}{h}\right) + \nu\tau_{i+\frac{1}{2}} \quad = \quad 0$$

ou bien, de façon équivalente :

$$\frac{|u|h}{2}\left(\frac{-\tau_{i+\frac{3}{2}} + 2\tau_{i+\frac{1}{2}} - \tau_{i-\frac{1}{2}}}{h^2}\right) + u\left(\frac{\tau_{i+\frac{3}{2}} - \tau_{i-\frac{1}{2}}}{2h}\right) + \nu\tau_{i+\frac{1}{2}} \quad = \quad 0$$

Cette dernière présentation met en évidence d'une part le terme de discrétisation centré du transport, et d'autre part, l'apparition de la discrétisation d'un terme nouveau de type diffusion et de coefficient $|u|h/2$ dépendant de h : ce terme d'interprète comme ayant un effet de stabilisation numérique sur la discrétisation centrée. Ainsi, le décentrage par discontinuité équivant, dans le cadre de la méthode des différences finies en dimension un, à l'ajout d'un terme de diffussion numérique proportionnel au pas de la maille.

Quiqu'il en soit, la résolution est ici explicite : ainsi, dans le cas où $u > 0$, nous obtenons

$$\tau_{i+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{1+\varepsilon h}\right)^{i+1} \tau_\Gamma, \ 0 \leq i \leq N-1$$

avec la notation $\varepsilon = \nu/u$. Cette fois-ci la solution approché τ_h est strictement décroissante. Une approche possible pour généraliser le décentrage dans le cadre de la méthode des éléments finis continus est d'ajouter un terme de diffusion artificiel de coefficient proportionnel à h : voir Brooks et Hughes [BH82], qui l'appliquent au terme d'inertie dans les équations de navier-Stokes. Dans notre cas, nous sommes contraint de satisfaire la condition de Brezzi-Babuska exprimant la compatibilité entre les approximations des vitesses et des contraintes : et nous avons vu que le choix de l'élément de taylor-Hood conduit à une approximation discontinue du tenseur des contraintes. Dans le cadre de la méthode de Galerkin discontinue [Les74, LR79, dPE12] nous allons voir que le schéma décentré précédent se généralise au cas des dimensions d'espace $d \geq 1$ et au cas d'approximations polynomiales de degré $k \geq 0$: dans ce schéma τ_h s'interprète comme étant constant sur chaque élément $[ih, (i+1)h]$ et valant $\tau_{i+\frac{1}{2}}$. Ainsi, du point de vue des éléments finis, l'approximation τ_h est constante par élément et globalement discontinue sur $\Omega =]0, 1[$.

4.11 Discrétisation : décentrage par discontinuité

Étudions à présent la méthode de Galerkin discontinue dans le cas général de la dimension d. On introduit l'espace des fonctions discontinues et polynomiales par morceaux sur le maillage $\mathscr{T}_h$ de Ω :

$$T_h = \{\gamma_h \in L^2(\Omega)_s^{d\times d};\ \gamma_{h|K} \in (P_k)_s^{d\times d},\ \forall K \in \mathscr{T}_h\}$$

L'approximation du problème (4.19)-(4.20) s'écrit :

$(T)_h$: trouver $\tau_h \in T_h$ tel que

$$\sum_{K\in\mathscr{T}_h}\left(\int_K A(\tau_h):\gamma_h\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{S\subset\partial K\setminus\partial\Omega}\int_S (M-B)[\tau_h]_S:\gamma_h\,\mathrm{d}x\right) + \frac{1}{2}\sum_{S\subset\partial\Omega}\int_S (M-B)(\tau_h):\gamma_h\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega \chi:\gamma_h\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\sum_{S\subset\partial\Omega}\int_S (M-B)(\tau_\Gamma):\gamma_h\,\mathrm{d}x$$

ceci pour tout $\gamma_h \in T_h$. Tout d'abord, on remarque que la condition aux limites $\tau = \tau_\Gamma$ est ici imposé faiblement sur les faces S de la frontière : τ_Γ n'est pas imposé via l'espace T_h mais par un second membre du problème. Ensuite on remarque le terme de somme sur les faces S d'un élément K et qui ne sont pas sur la frontière $\partial\Omega$: une telle face S sépare nécessairement deux éléments K_1 et K_2 voisins, c'est-à-dire $S = \partial K_1 \cap \partial K_2$. Supposons que la face S est orientée par sa normale $\mathbf{n}$ sortante de K_1 et entrante dans K_2. Alors

$$[\tau_h]_S = \tau_{h|K_1} - \tau_{h|K_2}$$

Ainsi, l'intégrale sur S sera effectuée deux fois lors de la somme sur les éléments $K \in \mathscr{T}_h$: une première fois lorsque $K = K_1$ et une seconde lorsque $K = K_2$.

Notons S_2 la face de K_2 coïncidant avec S et orienté avec la normale $\mathbf{n}_2$ sortante de K_2 et entrante dans K_1. De même, notons S_1 la face de K_1 coïncidant avec S et orienté avec la normale $\mathbf{n}_1$ sortante de K_1 et entrante dans K_2. On remarque que S_1 et S_2 ont une orientation opposée : $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$; Avec les définitions de $M = |\mathbf{u}.\mathbf{n}|$ et $B = \mathbf{u}.\mathbf{n}$, regroupons les deux contributions sur la face S :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_{S_1}(M-B)[\tau_h]_{S_1}:\gamma_{h|K_1}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{S_2}(M-B)[\tau_h]_{S_2}:\gamma_{h|K_2}\,\mathrm{d}s \\
= & \frac{1}{2}\int_{S_1}(|\mathbf{u}.\mathbf{n}_1| - \mathbf{u}.\mathbf{n}_1)(\tau_{h|K_1} - \tau_{h|K_2}):\gamma_{h|K_1}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{S_2}(|\mathbf{u}.\mathbf{n}_2| - \mathbf{u}.\mathbf{n}_2)(\tau_{h|K_2} - \tau_{h|K_1}):\gamma_{h|K_2}\,\mathrm{d}s \\
= & \frac{1}{2}\int_{S}(|\mathbf{u}.\mathbf{n}| - \mathbf{u}.\mathbf{n})(\tau_{h|K_1} - \tau_{h|K_2}):\gamma_{h|K_1}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_{S}(|\mathbf{u}.\mathbf{n}| + \mathbf{u}.\mathbf{n})(\tau_{h|K_2} - \tau_{h|K_1}):\gamma_{h|K_2}\,\mathrm{d}s \\
= & \frac{1}{2}\int_S |\mathbf{u}.\mathbf{n}|\,[\tau_h]_S:[\gamma_h]_S\,\mathrm{d}s - \int_S \mathbf{u}.\mathbf{n}\,[\tau_h]_S:\{\gamma_h\}_S\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

où on a introduit, pour la fonction test γ_h, son saut $[\gamma_h]_S$ à travers S et sa moyenne, notée $\{\gamma_h\}_S$ et définie par :

$$\{\gamma_h\}_S = \frac{\gamma_{h|K_1} + \gamma_{h|K_2}}{2}$$

Remarquons que $[\tau_h]_S$ et $[\gamma_h]_S$ ont des signes qui dépendent du choix de l'orientation de S, mais leur produit en est indépendant. De même, le premier terme est donc indépendant de l'orientation de S. Dans le second terme, ce sont $B = \mathbf{u}.\mathbf{n}$ et $[\tau_h]_S$ qui ont un signe dépendant de l'orientation de S, tandis que la moyenne $\{\gamma_h\}_S$ n'en dépend pas. Le second terme est donc également indépendant de l'orientation de S : nous avons vérifié que la formulation du problème ne dépend pas du choix pour orienter les arêtes internes du maillage. Notons $\mathscr{S}_h$ l'ensemble des faces internes du maillage $\mathscr{T}_h$. Le problème discret s'écrit de façon équivalente :

$(T)_h$: trouver $\tau_h \in T_h$ tel que

$$\int_\Omega A(\tau_h) : \gamma_h \,\mathrm{d}x + \sum_{S \in \mathscr{S}_h} \int_S [\tau_h]_S : \left(\frac{M}{2} [\gamma_h]_S - B\{\gamma_h\}_S \right) \mathrm{d}s + \frac{1}{2} \sum_{S \subset \partial\Omega} \int_S (M - B)(\tau_h) : \gamma_h \,\mathrm{d}x$$
$$= \int_\Omega \chi : \gamma_h \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2} \sum_{S \subset \partial\Omega} \int_S (M - B)(\tau_\Gamma) : \gamma_h \,\mathrm{d}x$$

ceci pour tout $\gamma_h \in T_h$.

Pour $k = 0$, en dimension 1 et sur un maillage uniforme, on peut vérifier qu'on retrouve le schéma de différences finies décentré amont. La méthode est ici utilisée avec $k = 1$ pour approcher le problème de transport du tenseur des contraintes.

Notices that this optimal behavior is better than the $\mathcal{O}(h^{3/2})$

La majoration d'erreur théorique de la méthode pour un problème de transport scalaire a été effectuée en 1986 par Johson et Pitkaranta [JP86] qui obtiennent une estimation $\mathcal{O}(h^{k+1/2})$ en norme L^2. Cette estimation d'erreur s'étend au au problème viscoélastique [BS92]. En 1988, Richter [Ric88] a montré qu'il est possible d'obtenir $\mathcal{O}(h^2)$ pour des éléments P_1, ce qui est optimal, pour un problème de transport scalaire, et avec des familles de maillages satisfaisant certaines propriétés. Ce dernier résultat a éte récemment étendu par Cockburn *et al.* [CDGQ10], tandisque Peterson [Pet91] a montré que l'estimation $\mathcal{O}(h^{3/2})$ est la meilleure pour une famille générale de maillages quasi-uniforme.

4.12 Exemple 2 : écoulement dans une contraction

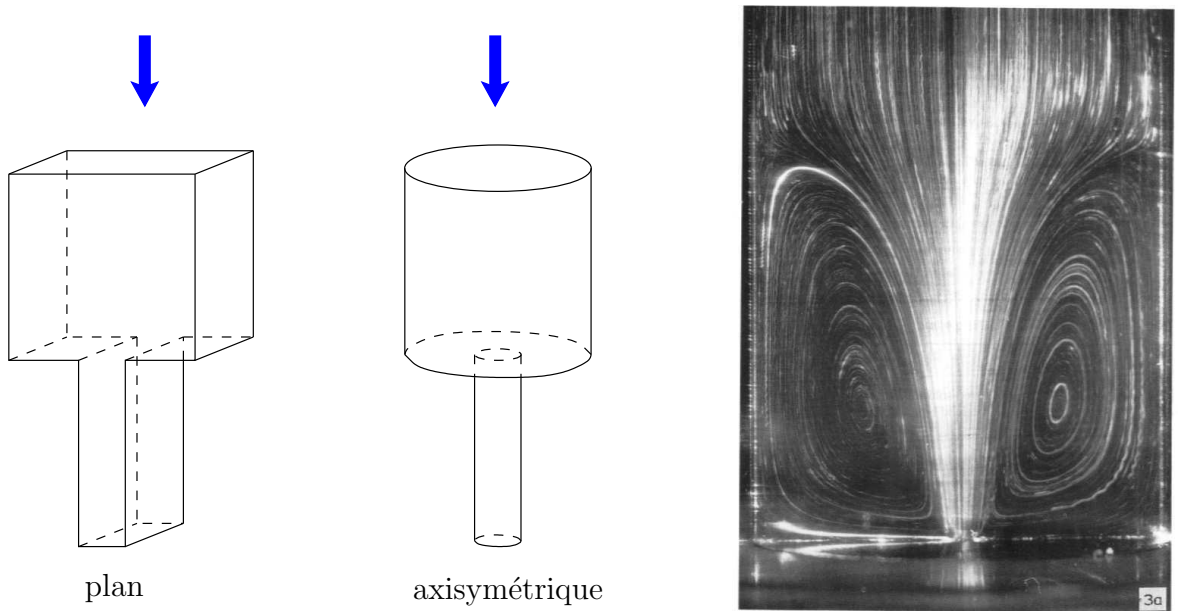


FIGURE 4.9 – Écoulement dans une contraction brusque : cas plan (gauche) et axisymétrique (centre) ; observation de recirculations pour une solution de polymères [CP92] (droite).

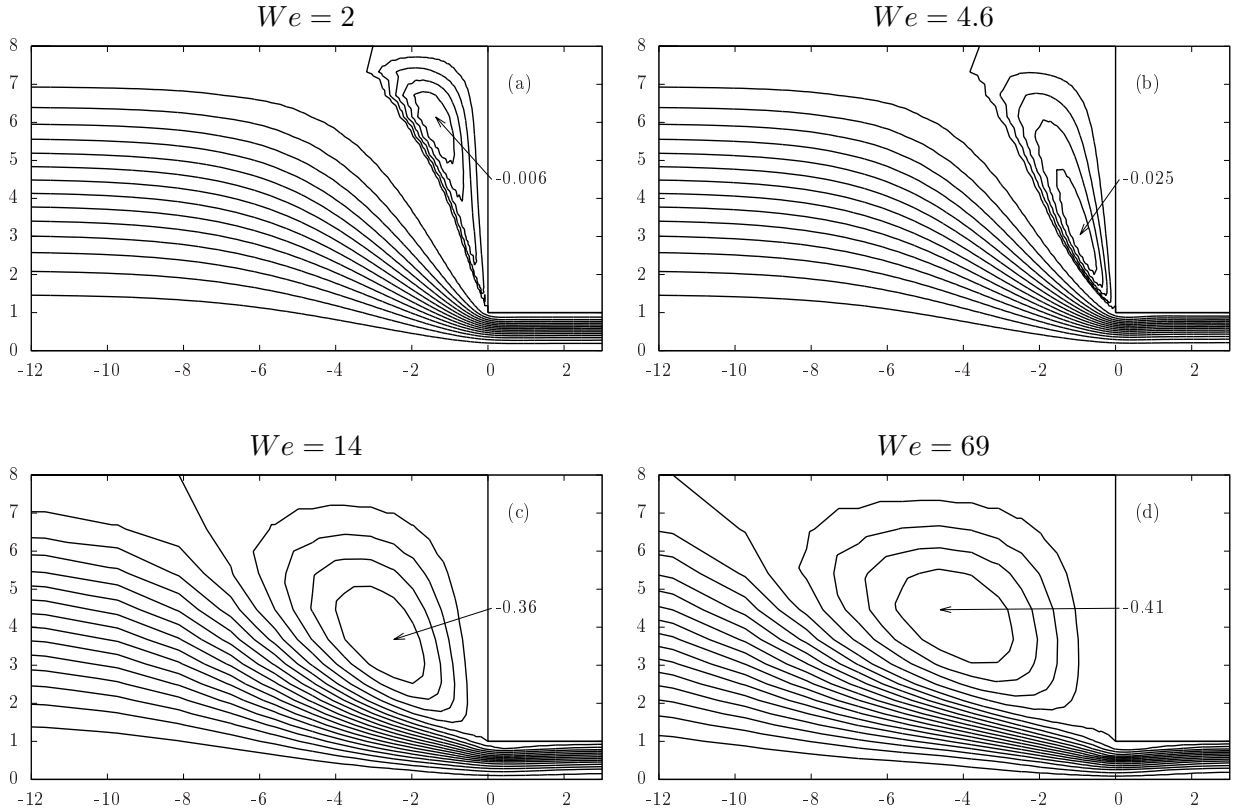


FIGURE 4.10 – Écoulement dans une contraction brusque axisymétrique : selon We, la solution stationnaire correspondante est représentée par sa fonction de courant (d'après [SP94]).

Chapitre 5

Fluides élastoviscoplastiques

5.1 Principes de la thermodynamique

5.1.1 Conservation de l'énergie

Le **premier principe** exprime la conservation de l'*énergie*, notée e : sa variation est égale au travail des forces plus les sources de chaleur, notées r :

$$\rho \dot{e} = \sigma_{\text{tot}} : D(\mathbf{u}) - \operatorname{div} \mathbf{q} + r \tag{5.1}$$

avec

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla e$$

Ici $\sigma_{\text{tot}} : D(\mathbf{u})$ correspond au travail des forces, $\operatorname{div} \mathbf{q}$ aux flux de chaleur par diffusion et r aux autres sources de chaleur.

5.1.2 Second principe

Ce principe postule l'existence d'une *température* $\theta > 0$ et d'une *entropie* s qui vérifient l'inégalité d'évolution :

$$\rho \dot{s} + \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) - \frac{r}{\theta} \ \geq \ 0 \tag{5.2}$$

En introduisant l'*énergie spécifique* de Helmholtz, notée $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} = 2(e - s\theta)$$

on obtient que :

$$\rho\theta\dot{s} = \rho\dot{e} - \rho\left(\frac{1}{2}\dot{\mathscr{E}} + s\dot{\theta}\right)$$

En combinant cette dernière relation avec (5.1) et (5.2) on obtient une inégalité équivalente au second principe de la thermodynamique, l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$-\rho\left(\frac{1}{2}\dot{\mathscr{E}} + s\dot{\theta}\right) + \sigma_{\text{tot}} : D(\mathbf{u}) - \frac{\mathbf{q}.\nabla\theta}{\theta} \ \geq \ 0 \tag{5.3}$$

5.2 Loi de comportement

Les lois de comportement doivent vérifier le second principe de la thermodynamique. Afin de construire facilement des lois de comportement plus complexes que celles présentées jusu'à présent (Bingham et Herschel-Bulkley, Maxwell et Oldroyd), et qui vérifient ce principe, nous allons nous doter d'un cadre général. Suivant Halphen et Nguyen [HN75] (voir aussi [LT90] ou [Mau92, p. 97]) on définit un *matériau standard généralisé* : il est complètement caractérisé par la donnée de deux fonctions : une énergie libre $\mathscr{E}$ et un potentiel de dissipation $\mathscr{D}$. La convexité de ces deux fonctions va garantir que le second principe de la thermodynamique est vérifié, ce qui fait le principal attrait de ce cadre abstrait.

Notons $\mathbf{d}$ le champs des déplacements dans le matériau : la vitesse est donnée par $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{d}}$. Notons $\varepsilon = \nabla\mathbf{d} + \nabla\mathbf{d}^T$ le tenseur des déformations : le tenseur des taux de déformation est donné par $2D(\mathbf{u}) = \dot{\varepsilon}$.

Pour un matériau standard généralisé, la fonction $\mathscr{E}$ dépend de θ, ε et éventuellement de $m-1$ variables d'état internes $(\chi_2, \ldots, \chi_m)$ tandisque la fonction $\mathscr{D}$ ne dépend que de $\dot{\varepsilon}$ et $(\dot{\chi}_2, \ldots, \dot{\chi}_m)$. Pour alléger les notation, on notera $\chi_1 = \varepsilon$ et $\chi = (\varepsilon, \chi_2, \ldots, \chi_m)$. Les équations constitutives du matériau standard généralisé sont définies par :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{tot}} &= \rho\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\varepsilon}(\theta,\chi) + \frac{\partial\mathscr{D}}{\partial\dot{\varepsilon}}(\dot{\chi}) \\
0 &= \rho\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\chi_i}(\theta,\chi) + \frac{\partial\mathscr{D}}{\partial\dot{\chi}_i}(\dot{\chi}),\ 2 \leq i \leq m \\
2s &= -\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\theta}(\theta,\chi)
\end{aligned}$$

Lorsque $\mathscr{D}$ n'est pas différentiable, on écrit de façon plus générale :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\text{tot}} - \rho\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\varepsilon}(\theta,\chi) &\in \frac{\partial\mathscr{D}}{\partial\dot{\varepsilon}}(\dot{\chi}) && (5.4)\\
-\rho\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\chi_i}(\theta,\chi) &\in \frac{\partial\mathscr{D}}{\partial\dot{\chi}_i}(\dot{\chi}),\ 2\leq i\leq m && (5.5)\\
2s + \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\theta}(\theta,\chi) &= 0 && (5.6)
\end{aligned}$$

Supposons que le flux de chaleur est donné par la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -k(\theta)\nabla\theta$$

où k est un tenseur positif. On obtient

$$-\frac{\mathbf{q}.\nabla\theta}{\theta} = (k(\theta)\nabla\theta).\nabla\theta \ \geq\ 0 \qquad (5.7)$$

Montrons alors que la convexité de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{D}$ conduit automatiquement à ce que le second principe de la thermodynamique soit vérifié. Puisque $\mathscr{D}$ est convexe, et comme $\mathscr{D}(0)$ est définie à une constante additive près, nous pouvons supposer que $\mathscr{D}\geq 0$ et $\mathscr{D}(0)=0$. De la convexité de $\mathscr{D}$ et de la définition du sous-différentiel (3.2) page 48, il vient que, pour tout élément $Z=(Z_1,\ldots,Z_m)\in\partial\mathscr{D}(\dot{\chi})$ que

$$\mathscr{D}(\dot{Y}) \ \geq\ \mathscr{D}(\dot{\chi}) + Z.(\dot{Y}-\dot{\chi})$$

ceci pour tout $\dot{Y}$. Rappelons que cette relation exprime que la tangente se trouve toujours sous la courbe. Ainsi, pour $\dot{Y}=0$:

$$Z.\dot{\chi} \ \geq\ \mathscr{D}(\dot{\chi}) \ \geq\ 0$$

d'après les hypothèses fautes sur $\mathscr{D}$. En particulier, pour

$$Z = \left(\sigma_{\text{tot}} - \rho\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\varepsilon}(\theta,\chi),\ \left(-\rho\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\chi_i}(\theta,\chi)\right)_{2\leq i\leq m}\right)\in\partial\mathscr{D}(\dot{\chi})$$

on a

$$\left(\sigma_{\text{tot}} - \rho\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\varepsilon}(\theta,\chi)\right).\dot{\varepsilon} - \sum_{i=2}^{m}\rho\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\chi_i}(\theta,\chi).\dot{\chi}_i \ \geq\ 0$$

Or

$$\begin{aligned}
\dot{\mathscr{E}}(\theta,\chi).(\dot{\theta},\dot{\chi}) &= \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\theta}(\theta,\chi).\dot{\theta} + \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\varepsilon}(\theta,\chi).\dot{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{m}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\chi_i}(\theta,\chi).\dot{\chi}_i\\
&= -2s\,\dot{\theta} + \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\varepsilon}(\theta,\chi).\dot{\varepsilon} + \sum_{i=2}^{m}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\chi_i}(\theta,\chi).\dot{\chi}_i \quad \text{d'après (5.6)}
\end{aligned}$$

L'inégalité précédente devient

$$-\rho\left(\dot{\mathscr{E}}(\theta,\chi).(\dot{\theta},\dot{\chi})+2s\,\dot{\theta}\right)+\sigma_{\text{tot}}:\dot{\varepsilon}\ \geq\ 0$$

Rappelons que $\dot{\varepsilon}=2D(\mathbf{u})$: en divisant l'inégalité précédente par deux, puis en ajoutant (5.7), on obtient finalement l'inégalité de Clausius-Duhem (5.3) qui est une expression équivalente au second principe de la thermodynamique. Ainsi, la convexité de $\mathscr{D}$ conduit à ce que le matériau vérifie le second principe de la thermodynamique.

5.3 Application des outils thermodynamiques

5.3.1 Application 1 : modèle de Herschel-Bulkley

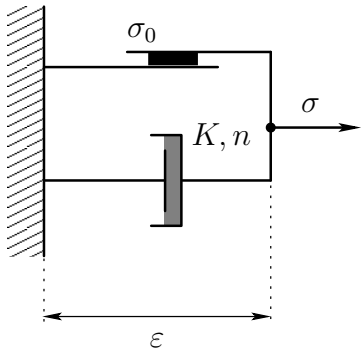


FIGURE 5.1 – Fluide viscoplatique : représentation schématique.

Le modèle étudié au chapitre 3 et introduit en (3.1) correspond ici au choix $m=1$ (pas de variables internes) avec :

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(\theta,\varepsilon) &= 0, && \forall\theta\in\mathbb{R}+,\forall\varepsilon\in\mathbb{R}_s^{d\times d}\\ \mathscr{D}(\dot{\varepsilon}) &= \frac{K}{1+n}|\dot{\varepsilon}|^{1+n}+\sigma_0|\dot{\varepsilon}|, && \forall\dot{\varepsilon}\in\mathbb{R}_s^{d\times d}\end{aligned}$$

La Fig. 5.1 donne la représentation schématique du modèle : ce type de représentation nous sera utile pour manipuler simplement des modèles plus complexes. Comme nous l'avons vu au chapitre 3 le sous-différentiel de $\mathscr{D}$ s'écrit pour tout $\dot{\varepsilon}\in\mathbb{R}_s^{d\times d}$:

$$\partial\mathscr{D}(\dot{\varepsilon}) \;=\; \begin{cases}\left\{\tau=K|\dot{\varepsilon}|^{-1+n}\dot{\varepsilon}+\sigma_0\dfrac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|}\right\} & \text{si } \dot{\varepsilon}\neq 0\\[2ex] \{\tau\in\mathbb{R}_s^{d\times d};\ |\tau|\ \leq\ \sigma_0\} & \text{sinon}\end{cases}$$

Le dual $\mathscr{D}^*$ de $\mathscr{D}$ est characterisé par l'identité de Fenchel :

$$\mathscr{D}^*(\tau) = \tau : \dot{\varepsilon} - \mathscr{D}(\dot{\varepsilon}),\ \forall \tau \in \partial\mathscr{D}(\dot{\varepsilon}),\ \forall \dot{\varepsilon} \in \mathbb{R}_s^{d\times d}$$

De plus, $\tau \in \partial\mathscr{D}(\dot{\varepsilon})$ est équivalent à $\dot{\varepsilon} \in \partial\mathscr{D}^*(\tau)$. Après calcul :

$$\partial\mathscr{D}^*(\tau) = \begin{cases} \left\{\dot{\varepsilon} = \left(\dfrac{|\tau| - \sigma_0}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \dfrac{\tau}{|\tau|}\right\} & \text{si } |\tau| > \sigma_0 \\ \\ \{\dot{\varepsilon} = 0\} & \text{sinon} \end{cases} \tag{5.8}$$

En érivant $\dot{\varepsilon} = 2D(\mathbf{u}) \in \partial\mathscr{D}^*(\sigma)$ et en complétant avec les relations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse, ainsi que des conditions aux bords, nous obtenons une nouvelle écriture équivalente du modèle de Herschel-Bulkley (3.4), page 51 :

(P) : trouver σ, $\mathbf{u}$ et p, définis dans $]0,T[\times\Omega$ tels que

$$\begin{aligned} \max\left(0, \frac{|\sigma| - \sigma_0}{K|\sigma|^n}\right)^{\frac{1}{n}} \sigma - 2D(\mathbf{u}) &= 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ \rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) - \mathbf{div}\,\sigma + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ \operatorname{div}\mathbf{u} &= 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur }]0,T[\times\partial\Omega \\ \mathbf{u}(t{=}0) &= \mathbf{u}_0 \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

5.3.2 Application 2 : modèle d'Oldroyd

Le modèle étudié au chapitre 4 correspond ici au choix $m = 2$, avec une variable interne notée ε_e :

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(\theta, \varepsilon, \varepsilon_e) &= \frac{\mu}{2\rho}|\varepsilon_e|^2 \\ \mathscr{D}(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_e) &= \frac{\eta_s}{2}|\dot{\varepsilon}|^2 + \frac{\eta_m}{2}|\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e|^2 \end{aligned}$$

On introduit ε_v tel que $\varepsilon = \dot{\varepsilon}_e + \varepsilon_v$: la variable ε_v s'interprète comme les déformations irréversibles dues aux effets visqueux. La variable ε_e s'interprète comme les déformations réversibles dues aux effets élastiques. La Fig. 5.2 donne la représentation schématique du modèle.

Les équations constitutives, données par (5.4)-(5.6), conduisent ici à :

$$\begin{aligned} \sigma &= \eta_s\dot{\varepsilon} + \eta_m(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e) \\ 0 &= \mu\varepsilon_e - \eta_m(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e) \end{aligned}$$

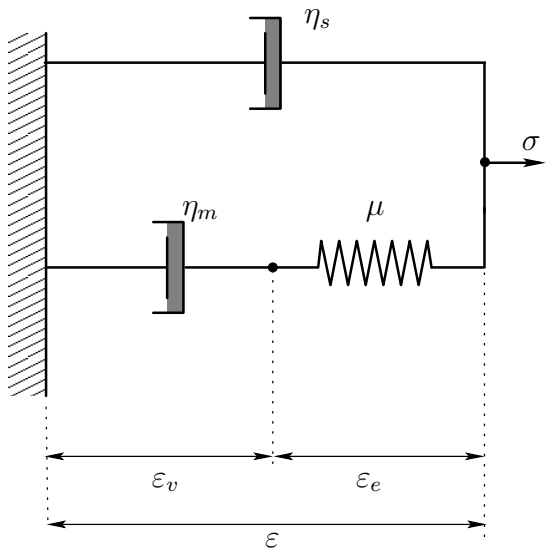


FIGURE 5.2 – Fluide viscoélastique : représentation schématique.

Posons $\tau = \mu\varepsilon_e$ et $\lambda = \eta_m/\mu$ on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma &= \eta_s\dot{\varepsilon} + \tau \\ \lambda\dot{\tau} + \tau &= \eta_m\dot{\varepsilon} \end{aligned}$$

On prend $\dot{\varepsilon} = 2D(\mathbf{u})$ et $\dot{\tau} = \dfrac{\mathscr{D}_a\tau}{\mathscr{D}t}$, la dérivé de Gordon-Schowalter donnée par (4.3), puis on compléte avec les relations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse, ainsi que des conditions aux bords. Nous retrouvons le problème introduit au chapitre 3.

5.3.3 Application 3 : modèle élastoviscoplastique

Le modèle représenté sur la Fig. 5.3 s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathscr{E}(\theta, \varepsilon, \varepsilon_e) &= \frac{\mu}{2\rho}|\varepsilon_e|^2 \\ \mathscr{D}(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_e) &= \frac{K_s}{2}|\dot{\varepsilon}|^2 + \varphi(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e) \end{aligned}$$

où $\varphi(\dot{\varepsilon}_p) = \dfrac{K}{1+n}|\dot{\varepsilon}_p|^{1+n} + \sigma_0|\dot{\varepsilon}_p|$, $\forall \varepsilon_p \in \mathbb{R}_s^{d\times d}$.

La notation ε_p tel que $\varepsilon = \dot{\varepsilon}_p + \varepsilon_e$: la variable ε_p s'interprète s'interprète comme les déformations irréversibles dues aux effets plastiques et visqueux. La variable ε_e s'interprète

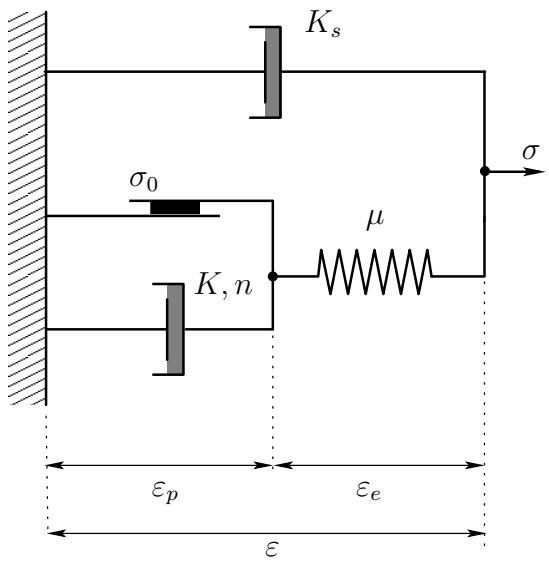


FIGURE 5.3 – Fluide élastoviscoplastique : représentation schématique.

comme les déformations réversibles dues aux effets élastiques. Ce modèle a été introduit pour la première fois dans [Sar07, Sar09]. Les équations constitutives, données par (5.4)-(5.6), conduisent ici à :

$$\begin{aligned} \sigma &\in K_s\dot{\varepsilon} + \partial\varphi(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e) \\ 0 &\in \mu\varepsilon_e - \partial\varphi(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e) \end{aligned}$$

Posons $\tau = \mu\varepsilon_e$. De façon équivalente, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \sigma &= K_s\dot{\varepsilon} + \tau \\ \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\tau}}{\mu} &\in \partial\varphi^*(\tau) \end{aligned}$$

Le sous-gradient du dual φ^*, noté $\partial\varphi^*$, est donné par (5.8). On obtient :

$$\begin{aligned} \sigma &= K_s\dot{\varepsilon} + \tau \\ \dot{\tau} &= \mu\dot{\varepsilon} \quad \text{si } |\tau| \leq \sigma_0 \\ \frac{\dot{\tau}}{\mu} + \left(\frac{|\tau| - \sigma_0}{K}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{\tau}{|\tau|} &= \dot{\varepsilon} \quad \text{si } |\tau| \geq \sigma_0 \end{aligned}$$

Dans le cas où $|\tau| \leq \sigma_0$ on obtient le comportement d'un solide élastique : $\tau = \mu\varepsilon$. Dans le cas où $|\tau| \geq \sigma_0$ il s'agit d'un fluide viscoélastique : il y a un amortissement non-linéaire.

On prend $\dot{\varepsilon} = 2D(\mathbf{u})$ et $\dot{\tau} = \left(\frac{\mathscr{D}_a\tau}{\mathscr{D}t}\right)_d$, la partie déviatrice de la dérivé de Gordon-Schowalter donnée par (4.3), puis on compléte avec les relations de conservation de la

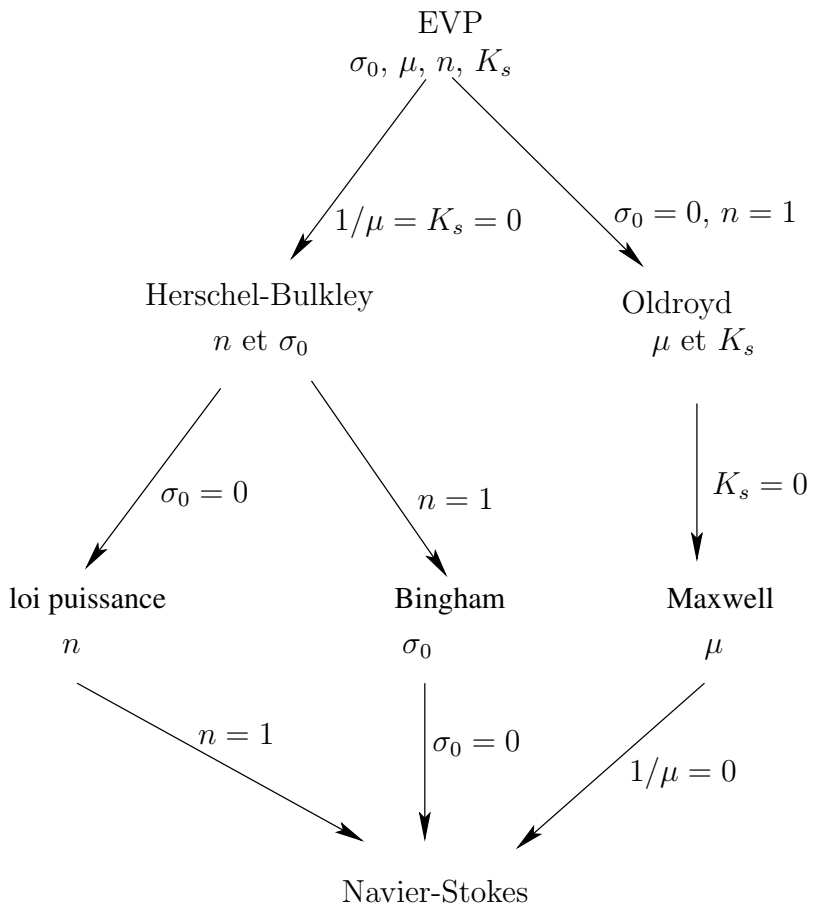


FIGURE 5.4 – Fluide élastoviscoplatique : une hiérarchie de modèles.

quantité de mouvement et de la masse, ainsi que des conditions aux bords. Les équations s'écrivent :

(P) : trouver σ, $\mathbf{u}$ et p, définis dans $]0,T[\times\Omega$ tels que

$$\frac{1}{\mu}\left(\frac{\mathscr{D}_a\tau}{\mathscr{D}t}\right)_d + \max\left(0, \frac{|\tau|-\sigma_0}{K|\tau|^n}\right)^{\frac{1}{n}}\tau - 2D(\mathbf{u}) = 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \tag{5.9}$$

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}\right) - \mathbf{div}\,\tau - \mathbf{div}(2K_sD(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans }]0,T[\times\Omega \tag{5.10}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ dans }]0,T[\times\Omega \tag{5.11}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur } \partial]0,T[\times\Omega \tag{5.12}$$

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \text{ dans } \Omega \tag{5.13}$$

Pour $1/\mu = 0$ et $K_s = 0$ nous retrouvons le modèle de Herschel-Bulkley. Pour $\sigma_0 = 0$ et $n = 1$ nous retrouvons le modèle d'Oldroyd.

5.4 Algorithme du θ-schéma

Il s'agit d'une adaptation du schéma de discrétisation en temps présenté au chapitre précédent dans le cadre des fluides viscoélastiques. Pour des détails sur cet algorithmes et des calculs en géométrie complexe, voir [CS13]. Pour des calculs en géométrie de Couette, voir [CSG12].

Bibliographie

[BAH87a] R. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids. Volume 1. Fluid mechanics.* Wiley, New-York, second edition, 1987. 33

[BAH87b] R. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids. Volume 2. Kinetic theory.* Wiley, New-York, 1987. 76

[BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods.* Springer, 1991. 21

[BH82] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 32(1–3) :199–259, 1982. 97

[Bin22] E. C. Bingham. *Fluidity and plasticity.* Mc Graw-Hill, New-York, USA, 1922. 48

[BN90] J. Baranger and K. Najib. Analyse numerique des ecoulements quasi-Newtoniens dont la viscosite obeit a la loi puissance ou la loi de Carreau. *Numer. Math.*, 58(1) :35–49, 1990. 38

[Bre83] H. Brezis. *Analyse fonctionnelle. Théorie et application.* Masson, Paris, 1983. 18, 38

[BS92] J. Baranger and D. Sandri. Finite element approximation of viscoelastic fluid flow : existence of approximate solutions and error bounds. part i. discontinuous constraints. *Numer. Math.*, 63 :13–27, 1992. 63, 99

[CDGQ10] B. Cockburn, B. Dong, J. Guzmán, and J. Qian. Optimal convergence of the original DG method on special meshes for variable transport velocity. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48(1) :133–146, 2010. 99

[CP92] U. Cartalos and J. M. Piau. Creeping flow regimes of low concentration polymer solutions in thick solvents through an orifice die. *J. non-Newt. Fluid Mech.*, 45(2) :231–285, 1992. 100

[CS13] I. Cheddadi and P. Saramito. A new operator splitting algorithm for elastoviscoplastic flow problems. *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 202 :13–21, 2013. `http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00809802`. 111

[CSG12] I. Cheddadi, P. Saramito, and F. Graner. Stationary Couette flows of elasto-viscoplastic fluids are non-unique. *J. Rheol.*, 56(1) :213–239, 2012. 111

[Dav12] T. A. Davis. *UMFPACK version 5.6 user guide*. University of Florida, USA, 2012. 24

[DD94] T. A. Davis and I. S. Duff. An unsymmetgric-pattern multifrontal method for sparse LU factorization. Technical Report TR-94-038, University of Florida, 1994. 24

[dPE12] D. A. di Pietro and A. Ern. *Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods*. Springer, 2012. 91, 94, 97

[EG06a] A. Ern and J. L. Guermond. Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs' systems. II. Second-order elliptic PDEs. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(6) :2363–2388, 2006. 91

[EG06b] J. L. Ern and Guermond. Discontinuous Galerkin methods for Friedrichs' symmetric systems. I. General theory. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(2) :753–778, 2006. 91

[EGC07] A. Ern, J. L. Guermond, and G. Caplain. An intrinsic criterion for the bijectivity of Hilbert operators related to Friedrich systems. *Comm. Partial Diff. Eq.*, 32(2) :317–341, 2007. 91, 93, 94

[FF89] M. Fortin and A. Fortin. A new approach for the FEM simulation of viscoelastic flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 32(3) :295–310, 1989. 90

[FG83] M. Fortin and R. Glowinski. *Augmented Lagrangian methods*. Elsevier, 1983. 57

[Fri58] K. O. Friedrichs. Symmetric positive linear differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 11 :333–418, 1958. 91, 92

[GLT81] R. Glowinski, J. L. Lions, and R. Trémolières. *Numerical analysis of variational inequalities*. Elsevier, 1981. 54, 56

[GR86] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite element methods for the Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*. Springer, 1986. 18, 19, 22, 38

[HB26] W. H. Herschel and T. Bulkley. Measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions. *Proceedings of the American Society for Testing and Material*, 26(2) :621–633, 1926. 48

[Hec81] F. Hecht. Construction d'une base de fonctions P_1 non conforme à divergence nulle dans $\mathbb{R}^3$. *RAIRO - Anal. Num.*, 15(2) :119–150, 1981. 19

[HN75] B. Halphen and Q. S. NGuyen. Sur les matériaux standard généralisés. *J. Méca.*, 14 :39–63, 1975. 104

[HT74] P. Hood and G. Taylor. Navier-Stokes equations using mixed interpolation. In Finite element in flow problems*, Oden ed., UAH Press*, 1974. 21

[JP86] C. Johnson and J. Pitkäranta. An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Math. Comp.*, 46(173) :1–26, 1986. 99

[Les74] P. Lesaint. Finite element methods for the transport equation. *M2AN*, 8(1) :67–94, 1974. 91, 97

[Lio69] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires.* Gauthier-Villars, Paris, 1969. 14

[LR79] P. Lesaint and P. A. Raviart. Finite element collocation methods for first order systems. *Math. Comput.*, 33(147) :891–918, 1979. 91, 97

[LT86] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1.* Masson, Paris, 1986. 24

[LT90] P. Le Tallec. *Numerical analysis of viscoelastic problems.* Masson, Paris, 1990. 104

[Mau92] G. A. Maugin. *The thermomechanics of plasticity and fracture.* Cambridge University Press, UK, 1992. 104

[MM65] P. P. Mosolov and V. P. Miasnikov. Variational methods in the theory of the fluidity of a viscous-plastic medium. *J. Appl. Math. Mech.*, 29(3) :545–577, 1965. 65

[MM66] P. P. Mosolov and V. P. Miasnikov. On stagnant flow regions of a viscous-plastic medium in pipes. *J. Appl. Math. Mech.*, 30(4) :841–853, 1966. 65

[MM67] P. P. Mosolov and V. P. Miasnikov. On qualitative singularities of the flow of a viscoplastic medium in pipes. *J. Appl. Math. Mech.*, 31(3) :609–613, 1967. 65

[Old50] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of states. *Proc. Roy. Soc. London A*, 200 :523–541, 1950. 76

[Pet91] T. E. Peterson. A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 28(1) :133–140, 1991. 99

[Pir88] O. Pironneau. *Méthode des éléments finis pour les fluides.* Masson, Paris, 1988. 13, 14, 19

[Ric88] G. R. Richter. An optimal-order error estimate for the discontinuous galerkin method. *Math. Comput.*, 50(181) :75–88, 1988. 99

[RS03] N. Roquet and P. Saramito. An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder. *Comput. Appl. Meth. Mech. Engrg.*, 192(31-32) :3317–3341, 2003. 63

[S88̈] E. Süli. Convergence and nonlinear stability of the Lagrange-Galerkin method for the Navier-Stokes equations. *Numer. Math.*, 53(4) :459–483, 1988. 16

[Sar90] P. Saramito. *Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoélastiques par éléments finis incompressibles et une méthode de directions alternées ; applications.* PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990. 63, 87, 90

[Sar94] P. Saramito. Numerical simulation of viscoelastic fluid flows using incompressible finite element method and a θ-method. *M2AN*, 28(1) :1–35, 1994. 63, 87, 90

[Sar97] P. Saramito. Operator splitting in viscoelasticity. *Élasticité, Viscoélasticité et Contrôle Optimal, Lyon, décembre 1995, ESAIM : Proceedings*, 2 :275–281, 1997. 90

[Sar07] P. Saramito. A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows. *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 145(1) :1–14, 2007. 109

[Sar09] P. Saramito. A new elastoviscoplastic model based on the Herschel-Bulkley viscoplasticity. *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 158(1–3) :154–161, 2009. 109

[Sar11] P. Saramito. *Efficient C++ finite element computing with Rheolef*. CNRS and LJK, 2011. `http://www-ljk.imag.fr/membres/Pierre.Saramito/rheolef`. 16, 25, 26, 29, 40, 41, 42, 43, 46

[Sar13] P. Saramito. *Language C++ et calcul scientifique*. College Publications, London, 2013. 24, 95

[SP94] P. Saramito and J.-M. Piau. Flow characteristics of viscoelastic fluids in an abrupt contraction by using numerical modeling. *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 52 :263–288, 1994. 101

[SR01] P. Saramito and N. Roquet. An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes. *Comput. Meth. Applied Mech. Engng*, 190(40-41) :5391–5412, 2001. 64, 65, 67, 68

[Tem95] R. Temam. *Navier-Stokes equations and nonlinear functional analysis*. SIAM, Philadelphia, USA, second edition, 1995. 14

[TW97] A. J. Taylor and S. D. R. Wilson. Conduit flow of an incompressible, yield-stress fluid. *J. Rheology*, 41(1) :93–101, 1997. 65, 66, 67

[Wan97] Y. Wang. Comment on "conduit flow of an incompressible, yield-stress fluid" [j. rheol. 41, 93-101 (1997)]. *J. Rheol.*, 41 :1387–1389, 1997. 65

[Wan99] Y. Wang. Tracking of the yield surfaces of laminar viscoplastic flows in non-circular ducts using an adaptive scheme. *Proc. Natl. Sci. Counc. ROC(A)*, 23(2) :311–318, 1999. 65, 66

[Wil97] S. D. R. Wilson. Response to "comment on 'conduit flow of an incompressible, yield-stress fluid'" [j. rheol. 41, 1387-1389 (1997)]. *J. Rheol.*, 41 :1391, 1997. 65

GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

<http://fsf.org/>

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom : to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondarily, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation : a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals ; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. Applicability and definitions

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "**Transparent**" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "**Opaque**".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "**Title Page**" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

The "**publisher**" means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section "**Entitled XYZ**" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "**Acknowledgements**", "**Dedications**", "**Endorsements**", or "**History**".) To "**Preserve the Title**" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties : any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. Verbatim copying

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or non-commercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. Copying in quantity

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts : Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. Modifications

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In

addition, you must do these things in the Modified Version :

A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
D. Preserve all the copyright notices of the Document.
E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
H. Include an unaltered copy of this License.
I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another ; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. Combining documents

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History" ; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete

all sections Entitled “Endorsements”.

6. Collections of documents

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. Aggregation with independent works

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. Translation

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original

English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. Termination

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. Future revision of this licence

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See `http://www.gnu.org/copyleft/`.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified

version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. Relicensing

"Massive Multiauthor Collaboration Site" (or "MMC Site") means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A "Massive Multiauthor Collaboration" (or "MMC") contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

"CC-BY-SA" means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

"Incorporate" means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is "eligible for relicensing" if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

Addendum : how to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page :

> Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with ... Texts." line with this :

> with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.