



Méthodes numériques en fluides complexes : théorie et algorithmes

Pierre Saramito

► To cite this version:

Pierre Saramito. Méthodes numériques en fluides complexes : théorie et algorithmes. DEA. Méthodes numériques en fluides complexes, Grenoble, 2012, pp.92. cel-00673816v2

HAL Id: cel-00673816

<https://cel.hal.science/cel-00673816v2>

Submitted on 15 Mar 2012 (v2), last revised 16 Dec 2013 (v4)

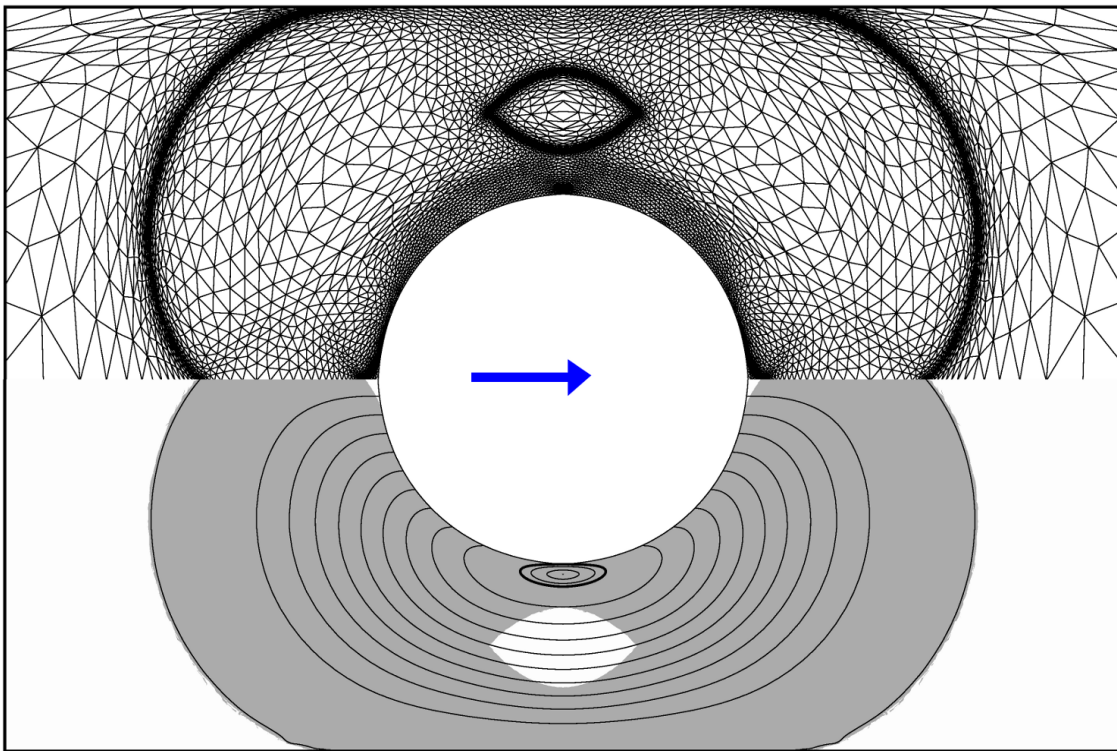
HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes numériques en fluides complexes : théorie et algorithmes

Pierre.Saramito@imag.fr

9 février 2012



Copyright (c) 2012 Pierre Saramito

Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

Introduction

Les fluides complexes regroupent tous les fluides dont le comportement diffère de celui de l'eau ou l'air : ils ne peuvent pas être décrits par les équations de Navier-Stokes, et sont alors dit non-newtoniens. La plupart des fluides quotidiens, tels que les matières plastiques lors de la mise en forme, les fluides géophysiques comme la lave, les sols et roches à grande échelle, ou encore le sang et les tissus biologiques sont des fluides complexes, non-newtoniens. Les applications sont aussi variées que la mise en forme des matières plastiques (extrusion, emboutissage, moulage), la prévision des risques naturels (coules de lave, avalanches, glissement de terrain, tectonique des plaques) ou la mise au point de pontages (coulement du sang en biologie).

Ce texte traite l'analyse mathématique et numérique des équations décrivant de tels fluides. Les méthodes numériques étudiées ont pour but de calculer les vitesses, pressions et les contraintes pour de tels fluides et pour des géométries suffisamment générales pour qu'un calcul explicite ne soit plus possible. De nombreux exemples illustrent le livre. Ce document est issu des notes du cours de deuxième année de maîtrise de mathématiques appliquées de Grenoble en 2012.

La résolution numérique des équations de Navier-Stokes est donc abordée au chapitre 1 et constitue le fondement sur lequel sont construits les modèles plus élaborés. Un schéma de discrétisation par la méthode des caractéristiques est présenté, puis deux méthodes de résolution des systèmes linéaires : une méthode directe et une méthode itérative. Le chapitre 2 présente les modèles quasi-newtoniens, décrits par une viscosité non-constante et qui dépend du gradient des vitesses. Les algorithmes du point fixe et de la méthode de Newton sont détaillés pour résoudre les non-linéarités. Le chapitre 3 présente les fluides viscoplastiques et aborde les deux grandes classes de méthodes numériques associées : la régularisation et la minimisation par lagrangien augmenté. Cette dernière approche passe par l'utilisation d'outils d'analyse convexe. Le chapitre 4 introduit les fluides viscoélastiques avec la dérivation d'Oldroyd des tenseurs. La décomposition d'opérateurs permet d'écrire un algorithme en temps d'ordre 2, le θ -schéma. Le chapitre 5 combine les non-linéarités des chapitres précédents dans le cadre des fluides élastoviscoplastiques : de tels modèles sont obtenus dans le cadre thermodynamique des matériaux standards généralisés.

Table des matières

1	Équations de Navier-Stokes	9
1.1	Conservation de la masse	9
1.2	Conservation de la quantité de mouvement	10
1.3	Loi de comportement	12
1.4	Hypothèse d'incompressibilité	13
1.5	Problème aux limites	13
1.6	Approximation en temps	14
1.7	Problème de Stokes	16
1.8	Approximation en espace du problème de Stokes	17
1.9	Résolution du problème de Stokes discret	19
1.10	Problème de Stokes : méthode itérative	20
2	Fluides quasi-newtoniens	25
2.1	Loi de comportement	25
2.2	Problème aux limites	26
2.3	Exemple : écoulement de Poiseuille	27
2.4	Formulation variationnelle	28
2.5	Exemple 2 : écoulement dans un tuyau	30

2.6	Algorithme du point fixe	31
2.7	Algorithme de Newton	33
3	Fluides viscoplastiques	37
3.1	Loi de comportement	37
3.2	Exemple : écoulement de Poiseuille	40
3.3	Formulation variationnelle	41
3.4	Régularisation : un problème modifié	43
3.5	Algorithme du lagrangien augmenté	45
3.6	Approximation en espace	48
4	Fluides viscoélastiques	51
4.1	Principe de la loi de comportement	51
4.2	Invariance par changement de repère	52
4.3	Dérivation objective d'un tenseur	54
4.4	Le modèle d'Oldroyd	55
4.5	Exemple : écoulement de Poiseuille	56
4.6	Algorithme du θ -schéma	62
4.7	Approximation en espace	65
4.8	Système hyperbolique de transport des contraintes	66
4.9	Discrétisation : décentrage par discontinuité	68
5	Fluides élastoviscoplastiques	71
5.1	Principes de la thermodynamique	71
5.2	Loi de comportement	72

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	7
5.3 Application des outils thermodynamiques	74
5.4 Algorithme du θ -schéma	79
GNU Free Documentation License	83

Chapitre 1

Équations de Navier-Stokes

1.1 Conservation de la masse

Introduisons les notations suivantes :

$\rho(t, \mathbf{x})$ la **densité** au point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et à l'instant t .

$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) = (u_i(t, \mathbf{x}))_{1 \leq i \leq 3}$ la **vitesse** au point $\mathbf{x}$ et à l'instant t .

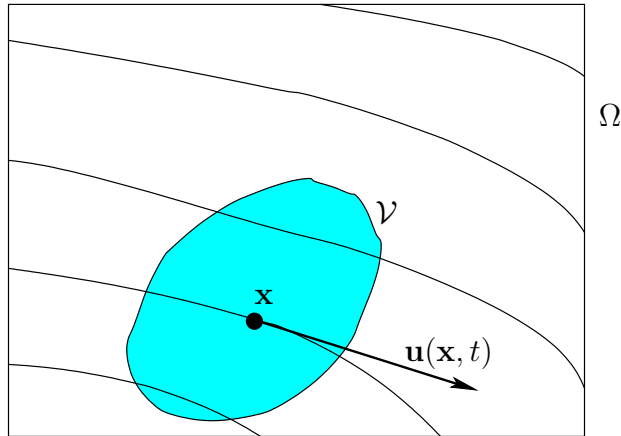


FIGURE 1.1 – Écoulement dans un domaine Ω .

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ le domaine ouvert borné occupé par le fluide et $\mathcal{V} \subset \Omega$ un sous-domaine ouvert régulier quelconque, comme représenté sur la figure 1.1. La conservation de la masse dans le volume $\mathcal{V}$ exprime que la variation de la masse totale de fluide contenu dans $\mathcal{V}$ à l'instant t est égale au flux de masse entrant à travers $\partial\mathcal{V}$:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{x}) \, dx \right) = - \int_{\partial\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{x}) \, \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, ds$$

où $\mathbf{n}$ est la normale unitaire sortante à $\mathcal{V}$ sur $\partial\mathcal{V}$. Rappelons la formule de Stokes :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx, \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(\mathcal{V}))^3$$

et appliquons cette formule au membre de droite de l'équation de conservation de la masse, avec $\mathbf{v} = \rho(t, \cdot) \mathbf{u}(t, \cdot)$. Après permutation de la dérivation en temps et de la somme sur $\mathcal{V}$ dans le membre de gauche, il vient :

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) \right) dx = 0$$

Cette relation étant vraie pour tout voisinage $\mathcal{V}$ d'un point quelconque $\mathbf{x}$ de l'ouvert Ω , et à tout instant t d'un intervalle de temps $]0, T[$, nous obtenons une expression locale de la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega \quad (1.1)$$

1.2 Conservation de la quantité de mouvement

Cette relation s'énonce de façon générale :

$$\text{masse} \times \text{accélération} = \text{forces exercées}$$

ceci dans tout volume $\mathcal{V} \subset \Omega$ de fluide. Considérons une particule en $\mathbf{x}$ à l'instant t : cette particule sera en $\mathbf{x} + \mathbf{u}(t, \mathbf{x})\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)$ à l'instant $t + \delta t$. Ainsi, son accélération est donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(t, \mathbf{x}) &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(t + \delta t, \mathbf{x} + \mathbf{u}(t, \mathbf{x})\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2)) - \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\delta t} \\ &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) (t, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

où $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ est la notation d'un vecteur de composantes

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u})_i = \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i \leq 3$$

Les forces exercées sur le volume $\mathcal{V}$ sont de deux sorte :

i) Les forces externes, dûes à la gravité :

$$\int_{\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{g} \, dx$$

où $\mathbf{g}$ est le vecteur **gravité**, supposé constant. Nous négligerons ici les autres forces, telles que la force de Coriolis ou les forces dûes aux effets magnétiques.

ii) Les forces internes, dûes aux déformations du fluide :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \sigma_{\text{tot}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, dx$$

où $\sigma_{\text{tot}}(t, \mathbf{x})$ est le tenseur symétrique des **contraintes totales**.

La notation $\sigma_{\text{tot}} \mathbf{n}$ représente un champs de vecteur issu du produit tenseur-vecteur, de composantes :

$$(\sigma_{\text{tot}} \mathbf{n})_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} n_j, \quad 1 \leq i \leq 3$$

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit donc :

$$\int_{\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{x}) \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) (t, \mathbf{x}), \, dx = \int_{\mathcal{V}} \rho(t, \mathbf{x}) \mathbf{g} \, dx + \int_{\partial\mathcal{V}} \sigma_{\text{tot}}(t, \mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \, ds$$

Introduisons la divergence d'un tenseur τ :

$$\mathbf{div} \tau = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq 3}$$

Ainsi, $\mathbf{div} \tau$ est un champs de vecteur, à trois composantes. Afin d'éviter toute ambiguïté avec la divergence d'un champs de vecteur $\mathbf{div} \mathbf{v}$, l'opérateur divergence de tenseur est noté en caractères gras.

En appliquant la formule de Stokes suivante :

$$\int_{\partial\mathcal{V}} \tau \mathbf{n} \, ds = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{div} \tau \, dx, \quad \forall \tau \in (H^1(\mathcal{V}))^{3 \times 3}$$

au tenseur $\sigma_{\text{tot}}(t, \cdot)$, la conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\int_{\mathcal{V}} \left(\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \mathbf{div} \sigma_{\text{tot}} - \rho \mathbf{g} \right) \, dx = 0$$

Cette relation étant vrai pour tout voisinage $\mathcal{V}$ d'un point quelconque $\mathbf{x}$ de l'ouvert Ω , et à tout instant t , nous obtenons une expression locale de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \mathbf{div} \sigma_{\text{tot}} = \rho \mathbf{g} \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega \quad (1.2)$$

Les deux equations de conservation (1.1) et (1.2) contiennent trois inconnues : $\mathbf{u}$, σ_{tot} et ρ . Avant de chercher à résoudre ce problème, il s'agit de compléter ce système en ajoutant une équation liant $\mathbf{u}$ et σ_{tot} .

1.3 Loi de comportement

Commençons par introduire quelques définitions. Tout d'abord, définissons la **trace** d'un tenseur τ :

$$\text{tr}(\tau) = \sum_{i=1}^3 \tau_{ii}$$

Un tenseur τ peut être décomposé en la somme de $\frac{1}{3}\text{tr}(\tau) I$, appelé **partie sphérique**, et de $\tau - \frac{1}{3}\text{tr}(\tau) I$, sa **partie déviatrice**, où $I = (\delta_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ est le tenseur identité et δ_{ij} représentant le symbole de Kronecker.

La partie sphérique du tenseur des contraintes totales permet d'introduire le champs de **pression** :

$$p = -\frac{1}{3}\text{tr}(\sigma_{\text{tot}})$$

La partie déviatrice du tenseur des contraintes totales est notée σ , si bien que :

$$\sigma_{\text{tot}} = -p I + \sigma \quad (1.3)$$

La loi de comportement exprime une relation entre la partie déviatrice du tenseur des contraintes totales et le tenseur des gradients de vitesse $\nabla \mathbf{u}$:

$$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Dans le cas le plus simple d'un **fluide newtonien**, la loi de comportement est linéaire :

$$\sigma = 2\eta D(\mathbf{u}) - \frac{2\eta}{3}\text{div}(\mathbf{u}) I \quad (1.4)$$

où η est une constante positive appelée **viscosité** et $D(\mathbf{u})$ est la partie symétrique du tenseur de gradient des vitesses :

$$D(\mathbf{u}) = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$$

Le tenseur $D(\mathbf{u})$ est aussi appelé tenseur des **taux de déformation**. Remarquons que $\text{tr}(D(\mathbf{u})) = \text{div} \mathbf{u}$, si bien que l'expression du membre de droite de (1.4) est bien à trace nulle. L'eau et l'air sont des fluides newtoniens et vérifient la relation (1.4). Un certain nombre de fluides ne vérifient pas cette loi de comportement, et sont appelés fluides non-newtoniens ; citons notamment :

- les pâtes alimentaires (pâte à pain, ...), les argiles et terres
- les fluides présentant des fibres, tels que les plastiques fondus (moulage, injection, emboutissage) ou en solution (encres)
- les mélanges de fluide et de particules, tels que le sang, les suspensions de sable dans l'eau ;

- les mélanges deux fluides : mousses (air+eau) et émulsions (eau+huile, mayonnaises, etc)

La loi entre σ et $\nabla \mathbf{u}$ est alors non-linéaire. L'étude de diverses types de lois non-linéaires sera l'objet du reste du cours.

1.4 Hypothèse d'incompressibilité

Refaisons le point sur les équations et les inconnues : quatre équations (1.1)-(1.4) pour cinq inconnues : σ_{tot} , σ , $\mathbf{u}$, p et ρ . Nous avons ajouté deux relations et deux inconnues !

Une façon classique de résoudre cette difficulté est de se donner une seconde loi de comportement, liant cette fois la pression p et la densité ρ [Pir88, p. 163]. Ceci est classique par exemple pour les gaz, comme l'air, qui sont compressibles, et cet aspect a de nombreuses applications : portance des ailes d'avions, optimisation de la forme des voitures pour diminuer leur consommation, etc.

Pour les liquides tels que l'eau ou les fluides complexes que nous étudierons dans ce cours, la variation de la densité ρ est extrêmement faible, et dans la suite, nous allons supposer la densité ρ constante. Cette hypothèse se justifie également pour des gaz tels que l'air, à faible vitesse. La conservation de la masse (1.1) conduit alors à la **relation d'incompressibilité** :

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega \quad (1.5)$$

et la loi de comportement (1.4) devient :

$$\sigma = 2\eta D(\mathbf{u})$$

En utilisant la décomposition (1.3) du tenseur des contraintes totales, la conservation de la quantité de mouvement (1.2) devient alors :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \operatorname{div}(2\eta D(\mathbf{u})) + \nabla p = \rho \mathbf{g} \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega \quad (1.6)$$

Les équations (1.5)-(1.6) sont appelées équations de Navier-Stokes. Remarquons encore l'identité $\operatorname{div}(2D(\mathbf{u})) = \Delta \mathbf{u} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u})$. La première équation (1.6) relation s'écrit encore :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \eta \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \mathbf{g} \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega$$

1.5 Problème aux limites

Le problème est complété par une condition initiale :

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x}=0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) \quad \text{pour presque tout } \mathbf{x} \in \Omega$$

et par une condition aux limites :

$$\mathbf{u}(t=0, \mathbf{x}) = \mathbf{u}_\Gamma(\mathbf{x}) \quad \text{pour presque tout } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in]0, T[$$

où $\mathbf{u}_0$ et $\mathbf{u}_\Gamma$ sont donnés.

Pour que $\operatorname{div} \mathbf{u}(t)$ soit continu en $t = 0$, ce qui est souhaitable, il est nécessaire que la donnée initiale $\mathbf{u}_0$ soit à divergence nulle. D'autre part, la formule de Stokes s'écrit :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

Pour que le problème admette une solution, il est nécessaire que la donnée au bord $\mathbf{u}_\Gamma$ vérifie :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_\Gamma \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$$

Le problème de Navier-Stokes s'énonce alors :

(NS) : trouver $\mathbf{u}$ et p tels que

$$\left\{ \begin{array}{llll} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \operatorname{div} (2\eta D(\mathbf{u})) + \nabla p & = & \rho \mathbf{g} & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ - \operatorname{div} \mathbf{u} & = & 0 & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ \mathbf{u}(0) & = & \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega \end{array} \right.$$

Pour des résultats d'existence et d'unicité, on pourra consulter [Lio69] ou [Pir88], page 132.

Enonce
theoreme

1.6 Approximation en temps

L'intervalle $[0, T]$ est partitionné en N sous-intervalles $[t_n, t_{n+1}]$, où $t_n = n\Delta t$, $0 \leq n \leq N$ et $\Delta t = T/N$ est le pas de temps.

Introduisons la **dérivée totale** d'une quantité φ :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi$$

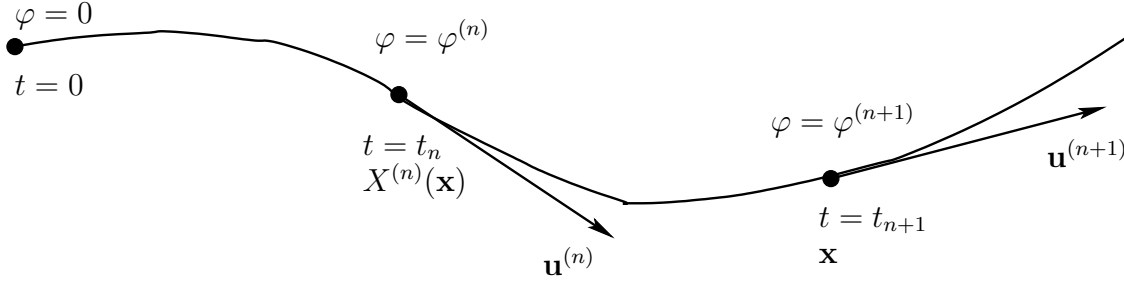


FIGURE 1.2 – Approximation de la dérivée totale.

Notons $X^{(n)}(\mathbf{x})$ la position de la particule au temps t_n qui est à la position $\mathbf{x}$ au temps t_{n+1} . Cette situation est représentée sur la figure 1.2. La dérivée totale de φ à l'instant t_{n+1} est approchée suivant l'expression de type différences finies :

$$\frac{d\varphi}{dt}(t_{n+1}, \mathbf{x}) = \frac{\varphi(t_{n+1}, \mathbf{x}) - \varphi(t_n, X^{(n)}(\mathbf{x}))}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Remarquons que la dérivée totale du champs des vitesses

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

apparaît dans les équations de Navier-Stokes. Il est donc possible d'approcher ce terme par

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \frac{\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \mathbf{u}(X^{(n)}(\mathbf{x}), t_n)}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t)$$

Utilisons un schéma d'Euler implicite d'ordre un pour approcher en temps le problème :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \frac{\mathcal{Y}^{(n+1)} - \mathcal{Y}^{(n)} \circ X^{(n)}}{\Delta t} + \mathcal{F}(\mathcal{Y}^{(n+1)}) &= 0 \\ \mathcal{Y}^{(0)} &= \mathcal{Y}_0 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} &= \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} \\ \mathcal{M} &= \text{diag}(\rho, 0) \\ \mathcal{F}(\mathcal{Y}) &= \begin{pmatrix} -\text{div}(2\eta D(\mathbf{u})) + \nabla p \\ -\text{div} \mathbf{u} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons construire par récurrence une suite $(\mathbf{u}^{(n)})_{0 \leq n \leq N}$, où $\mathbf{u}^{(n)}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$ est une approximation de la vitesse :

ALGORITHME 1.6.1 (schéma d'Euler implicite)

- $n = 0$: $\mathbf{u}^{(0)} := \mathbf{u}_0$ est donné.
- $n \geq 0$: $\mathbf{u}^{(n)}$ étant connu, trouver $\mathbf{u}^{(n+1)}$ et $p^{(n+1)}$ tels que

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{u}^{(n+1)} - \mathbf{div}(2\eta D(\mathbf{u}^{(n+1)})) + \nabla p^{(n+1)} &= \rho \mathbf{g} + \frac{\rho}{\Delta t} \mathbf{u}^{(n)} \circ X^{(n)} && \text{dans } \Omega \\ - \mathbf{div} \mathbf{u}^{(n+1)} &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}^{(n+1)} &= \mathbf{u}_\Gamma(t_{n+1}) && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

1.7 Problème de Stokes

À chaque étape de l'algorithme précédent, nous avons à résoudre un système linéaire de type Stokes, de la forme :

(S) : trouver $\mathbf{u}$ et p tels que

$$\begin{cases} \alpha \mathbf{u} - \mathbf{div}(2\eta D(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ - \mathbf{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où α et η sont des constantes positives, et $\mathbf{f}$ et $\mathbf{u}_\Gamma$ sont donnés. Remarquons tout de suite que si $(\mathbf{u}, p)$ est solution, alors $(\mathbf{u}, p + c)$ est aussi solution, pour toute constante $c \in \mathbb{R}$. Ceci est dû au fait que p n'apparaît que dans un seul terme, sous un gradient. Pour régler ce problème, introduisons l'espace des fonctions de L^2 à moyenne nulle :

$$L_0^2(\Omega) = \{q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q(x) dx = 0\}$$

Introduisons ensuite un espace pour les vitesses :

$$V(\mathbf{g}) = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3; \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}\}$$

pour tout $\mathbf{g} \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$. Remarquons que $V(0) = H_0^1(\Omega)^3$. Rappelons les formules de Green et de la divergence :

$$\int_{\Omega} \mathbf{div}(2D(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} 2D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx = \int_{\partial\Omega} (D(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} ds \quad (1.7)$$

$$\int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} dx = \int_{\partial\Omega} q \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.8)$$

Multiplions la première équation par $\mathbf{v}$ et sommions sur Ω puis utilisons la formule de Green et la formule de la divergence :

$$\alpha \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx + 2\eta \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx$$

Les termes de bord sont nuls du fait que $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$ s'annule au bord. Introduisons également les formes bilinéaires :

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + 2\eta(D(\mathbf{u}), D(\mathbf{v})) \\ b(\mathbf{v}, q) &= -(\operatorname{div} \mathbf{v}, q) \end{aligned}$$

et où la notation $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire de L^2 . La formulation variationnelle du problème s'énonce :

(FVS) : trouver $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ et $p \in L_0^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \end{cases}$$

pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$ et $q \in L_0^2(\Omega)$. Remarquons que pour que les intégrales apparaissant dans cette formulation aient un sens, il est nécessaire que les données vérifient un minimum de régularité : $\mathbf{f} \in (H^{-1}(\Omega))^3$ et $\mathbf{u}_\Gamma \in (H^{1/2}(\partial\Omega))^3$. Pour des résultats d'existence et d'unicité de ce problème linéaire, on pourra consulter [GR86], page 80 ou bien [Pir88], page 101.

Introduisons le noyau de la forme b :

$$K(\mathbf{g}) = \{\mathbf{v} \in V(\mathbf{g}); b(\mathbf{v}, q) = 0, \forall q \in L_0^2(\Omega)\}$$

Cet espace représente l'ensemble des vitesses à divergence nulle dans L^2 . La formulation variationnelle du problème s'énonce :

(FVS)₂ : trouver $\mathbf{u} \in K(\mathbf{u}_\Gamma)$ tel que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}), \forall \mathbf{v} \in K(0)$$

Sous cette forme, il s'agit d'un problème extrêmement standard : il ne reste plus qu'à construire une discrétisation de V par éléments finis en espace pour obtenir un système linéaire en dimension finie.

1.8 Approximation en espace du problème de Stokes

La difficulté vient du fait que la construction de bases polynomiales à divergence nulle est assez délicate. Peu de travaux ont suivi cette voie [Hec81], et les résultats obtenus par cette méthode sont assez décevants.

Aussi nous revenons au problème *(FVS)* : il s'agit de discrétiser les espaces $(H^1)^3$ et L_0^2 . Pour ce qui est de la construction de bases discrètes de H^1 , la méthode est très classique en éléments finis. La question est plus délicate pour L_0^2 , pour lequel nous ne connaissons pas explicitement de base discrète à moyenne nulle. Par contre nous savons travailler avec

L^2 , aussi nous allons introduire la contrainte de moyenne nulle séparément, à l'aide d'un multiplicateur de Lagrange, noté $\lambda \in \mathbb{R}$.

Introduisons le Lagrangien suivant :

$$L(\mathbf{u}, p, \lambda) = \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, p) + c(p, \lambda) - (\mathbf{f}, \mathbf{p}) \quad (1.9)$$

avec

$$c(p, \lambda) = \lambda \int_{\Omega} p(x) \, dx$$

La solution du problème est caractérisée comme le point-de-selle de L , ce qui s'écrit

$$(\mathbf{u}, p, \lambda) = \arg \inf_{\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_{\Gamma})} \sup_{\substack{q \in L_0^2(\Omega) \\ \mu \in \mathbb{R}}} L(\mathbf{v}, q, \mu)$$

Remarquons que nous avons deux contraintes à satisfaire : la divergence nulle pour la vitesse $\mathbf{u}$ et la moyenne nulle pour la pression p ,* et que nous avons deux multiplicateurs associés qui sont respectivement p et λ .

La formulation variationnelle du problème s'énonce :

$(FVS)_3$: trouver $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_{\Gamma})$, $p \in L_0^2(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) + c(q, \lambda) & = 0 \\ c(p, \mu) & = 0 \end{cases}$$

pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$, $q \in L_0^2(\Omega)$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Cette fois, nous savons construire concrètement des bases polynomiales par morceaux des espaces $X(0)$ et L^2 intervenant dans ce problème.

Soient $X_h \subset H^1(\Omega)^3$ et $Q_h \subset L^2(\Omega)$ deux espaces vectoriels de dimension finie et soit $\mathbf{u}_{h,\Gamma}$ une approximation de $\mathbf{u}_{\Gamma}$, par exemple l'interpolée de Lagrange des données aux bords. Introduisons V_h , le sous espace de X_h incluant les conditions aux limites :

$$V_h(\mathbf{u}_{h,\Gamma}) = \{\mathbf{v}_h \in X_h; \mathbf{v}_h|_{\partial\Omega} = \mathbf{u}_{h,\Gamma}\}$$

L'approximation variationnelle du problème précédent s'écrit :

$(FVS)_h$: trouver $\mathbf{u}_h \in V_h(\mathbf{u}_{h,\Gamma})$, $p_h \in Q_h$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) & = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h) \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) + c(q_h, \lambda) & = 0 \\ c(p_h, \mu) & = 0 \end{cases}$$

pour tout $\mathbf{v}_h \in V_h(0)$, $q_h \in Q_h$ et $\mu \in \mathbb{R}$. Il s'agit d'un système linéaire de dimension finie. Nous sommes presque au bout de nos peines : la construction par éléments finis de X_h et Q_h doit encore être faite avec soin pour que les approximations $\mathbf{u}_h$ et p_h convergent vers

$\mathbf{u}$ et p . En effet, une condition nécessaire et suffisante pour que cette convergence ait lieu est que [BF91, P. 205] :

$$\exists \beta > 0 \text{ tel que } \forall h > 0, \inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_{H^1} \|q_h\|_{L^2}} \geq \beta$$

En particulier, l'expression en inf-sup doit pouvoir être majorée par une constante indépendante de h . Si cette expression croît indéfiniment lorsque $h \rightarrow 0$, alors la convergence de $(\mathbf{u}_h, p_h)$ n'est plus assurée $(\mathbf{u}, p)$. Cette condition, dite **condition inf-sup** ou encore **condition de Brezzi-Babuska** exprime la nécessaire compatibilité entre les espaces de dimension finie X_h et Q_h .

Ainsi l'approximation la plus simple possible, affines par morceaux (notée P_1) pour les vitesses et les pressions, ne satisfait pas cette condition. On pourra consulter [BF91], page 207 et suivantes, pour des combinaisons satisfaisantes d'approximations des vitesses et pressions, ainsi que d'autres paires ne satisfaisant pas cette condition. Nous présentons ici la combinaison proposée initialement dans [HT74] et largement utilisée : les vitesses sont approchées par des fonctions continues quadratiques par morceaux et les pressions par des fonctions continues affines par morceaux. Cette combinaison est notée $P_2 - P_1$, et est appelée élément de Hood-Taylor. Pour la preuve que cette combinaison vérifie la condition inf-sup, on pourra consulter [BF91], page 211.

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation de Ω . Les espaces X_h et Q_h sont alors définis par

$$X_h = \{\mathbf{v}_h \in C^0(\Omega)^3; \mathbf{v}_{h|K} \in (P_2)^3, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (1.10)$$

$$Q_h = \{q_h \in C^0(\Omega); q_{h|K} \in P_1, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (1.11)$$

$$(1.12)$$

1.9 Résolution du problème de Stokes discret

Soit $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n_{\text{tot}}}$ la base nodale de X_h et $(\xi_i)_{1 \leq i \leq m}$ la base nodale de Q_h . Quitte à renuméroter les fonctions de base de X_h , nous supposons que les noeuds de 1 à n sont situés à l'intérieur du domaine et ceux de $n+1$ à n_{tot} sont situés sur le bord. Ainsi $(\varphi_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base nodale de $V_h(0)$. Décomposons $\mathbf{u}_h$ et p_h sur ces bases respectives :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j(\mathbf{x}) + \sum_{j=n+1}^{n_{\text{tot}}} \bar{u}_j \varphi_j(\mathbf{x}) \\ p_h(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^m q_j \xi_j(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Les valeurs $(\bar{u}_j)_{n \leq j \leq n_{\text{tot}}}$ sont donnés par $\mathbf{u}_{h,\Gamma}$ au bord tandis que $(u_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont inconnues. Posons :

$$\begin{aligned} A_{i,j} &= a(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i), \quad 1 \leq i, j \leq n \\ \bar{A}_{i,j} &= a(\boldsymbol{\varphi}_j, \boldsymbol{\varphi}_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad n+1 \leq j \leq n_{\text{tot}} \\ B_{i,j} &= b(\boldsymbol{\varphi}_j, \xi_i), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n \\ \bar{B}_{i,j} &= b(\boldsymbol{\varphi}_j, \xi_i), \quad 1 \leq i \leq m, \quad n+1 \leq j \leq n_{\text{tot}} \\ C_{1,j} &= c(\xi_j, 1), \quad 1 \leq j \leq m \\ \bar{f}_i &= (\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}_i), \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Remarquons que la matrice C a une ligne et m colonnes et que $\bar{A}$ est rectangulaire. La matrice A est symétrique définie positive $n \times n$. Le problème de Stokes discret se ramène à résoudre le système linéaire suivant :

$(S)_h$: trouver $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$, $p = (p_i)_{1 \leq i \leq m}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{pmatrix} A & B^T & 0 \\ B & 0 & C^T \\ 0 & C & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $f = \bar{f} - \bar{A}\bar{u}$ et $g = -\bar{B}\bar{u}$. Il s'agit d'un système linéaire symétrique de taille $n+m+1$, de matrice notée $\mathcal{A}$, inversible. Signalons que la présence des multiplicateurs fait apparaître dans cette matrice des valeurs propres soit strictement négatives soit strictement positives (matrice *indéfinie*), aussi la résolution par méthode directe classique, utilisant la factorisation de Choleski sous la forme LL^T , avec L triangulaire inférieure, ne peut pas être effectuée ici. Il est cependant possible de factoriser $\mathcal{A}$ sous la forme $\mathcal{A} = LDL^T$, avec D diagonale contenant les valeurs positives et négatives des pivots. On pourra consulter [LT86], chapitre 5 pour le principe de la factorisation LDL^T , et [Dav07, DD94] pour un logiciel libre exploitant de façon performante la structure creuse de la matrice $\mathcal{A}$.

La résolution par méthode directe est très performante pour des problèmes en dimension deux d'espace. Pour des problèmes en dimension trois, la matrice creuse $\mathcal{A}$ conduit à des matrices L bien moins creuses et les temps de calculs croissent très vite avec la taille totale du système linéaire. Dans ce cas, on préférera une méthode itérative : pour cela, le problème est réduit sur les pressions. Voir le logiciel libre RHEOLEF [Sar11], chapitre 5, pour la programmation performante de ces algorithmes dans un contexte d'éléments finis en dimension 2 et 3.

1.10 Problème de Stokes : méthode itérative

L'algorithme de résolution par **méthode directe** doit être considérée comme le choix par défaut : pas de paramètre numérique ni de contrôle et de test d'arrêt comme pour les

méthodes itératives. Cependant, la méthode directe a l'inconvénient de nécessiter plus de place en mémoire informatique que les méthodes itératives, et ceci peut être crucial pour des problèmes tridimensionnels, faisant intervenir des maillages et des matrices de l'ordre de 100 000 ou plus.

Aussi, nous présentons brièvement le principe des méthodes itératives, telles qu'elles sont implémentées dans la librairie [Sar11]. Nous renvoyons à cette référence pour les détails et la mise en oeuvre concrète.

De la définition du lagrangien L en (1.9), nous pouvons définir la *fonctionnelle duale* J_* par :

$$J_*(q) = - \inf_{\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_r)} L(\mathbf{v}, q)$$

Remarquons que J_* est convexe, car L est concave en q . Ainsi le problème s'écrit de façon équivalente :

$$p = \arg \inf_{q \in L_0^2(\Omega)} J_*(q)$$

Nous disposons d'une collection d'algorithmes itératifs (méthode de descente à pas fixe, gradient conjugué, MINRES, etc) qui résolvent ce problème de façon standard. Une fois $p \in L^2(\Omega)$ calculée, il est facile d'obtenir la solution $\bar{p}$ à moyenne nulle :

$$\bar{p}(x) = p(x) - \frac{\int_{\Omega} p(x) \, dx}{\int_{\Omega} dx}, \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

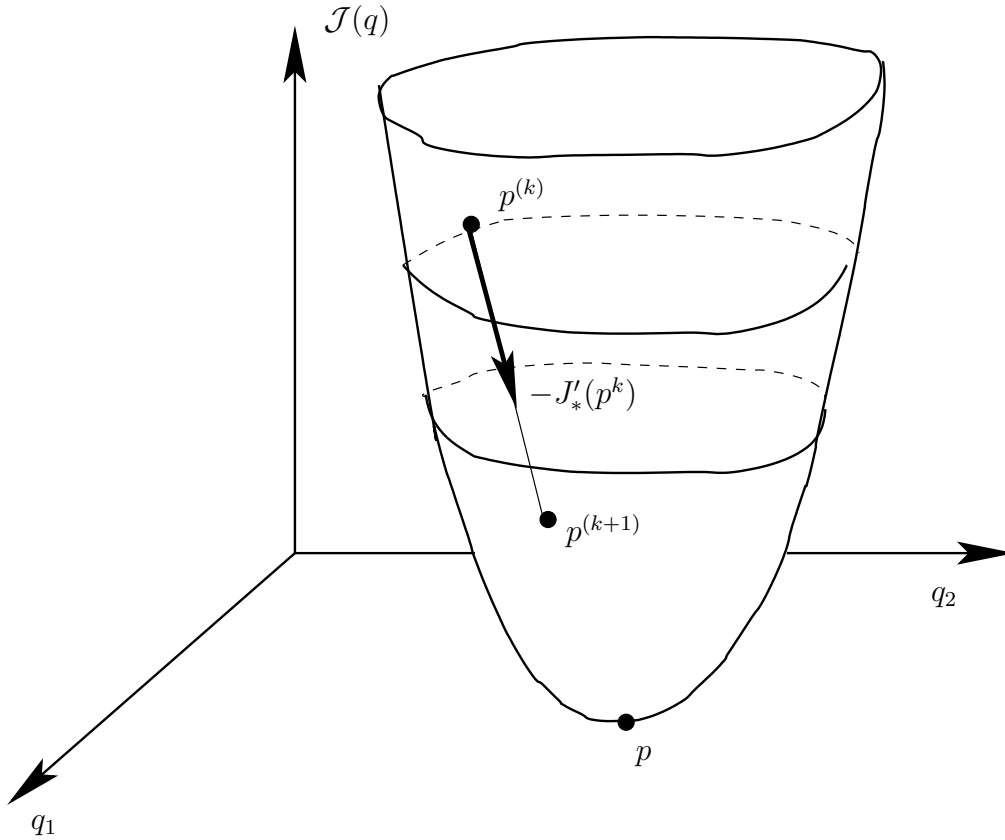


FIGURE 1.3 – Algorithme de descente.

Par exemple, l'algorithme de plus profonde descente à pas fixe, appelé aussi algorithme d'Uzawa, s'écrit :

- $k = 0$: p^0 est donné
- $k \geq 0$: p^k est connu, on calcule :

$$p^{k+1} = p^k - \rho J'_*(p^k)$$

À chaque étape (voir Fig. 1.3), on descend d'un pas $\rho > 0$ dans la direction opposée au gradient J'_* . Cet algorithme se décline en de nombreuses variantes : l'algorithme du résidu minimal consiste à calculer le pas de descente optimal à chaque itération, et l'algorithme du gradient conjugué utilise des directions de descentes successives orthogonales (aka *conjugées*) entre elles.

Regardons plus en détails comment calculer concrètement $J'_*(p^k)$. Une fois le système est discrétisé, nous avons, avec les notations précédentes :

$(S)_h$: trouver $u = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $p = (p_i)_{1 \leq i \leq m}$ tels que

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

où la matrice A est symétrique définie positive $n \times n$ et B est rectangulaire $n \times m$. En développant :

$$\begin{aligned} Au + B^T p &= f \\ Bu &= g \end{aligned}$$

De la première équation, il vient

$$u = A^{-1}(f - B^T p)$$

et alors de la seconde :

$$(BA^{-1}B^T)p = BA^{-1}f - g$$

En posant $\mathcal{A} = BA^{-1}B^T$ et $\beta = BA^{-1}f - g$, ceci s'écrit encore :

$$\mathcal{A}p = \beta$$

La solution $p \in \mathbb{R}^m$ est caractérisée comme étant l'unique minimum de la fonctionnelle convexe

$$J_*(q) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}q, q) - (\beta, q)$$

C'est la version discrète de la fonctionnelle introduite plus haut. L'algorithme de plus profonde descente à pas fixe, appelé aussi algorithme d'Uzawa, consiste à choisir pour le pas de descente une valeur constante $\rho_k = \lambda > 0$ et pour la direction de descente $w^{(k)}$, l'opposée du gradient,

$$\begin{aligned} J'_*(p^k) &= \mathcal{A}p^k - \beta \\ &= BA^{-1}B^T p^k - BA^{-1}f + g \\ &= BA^{-1}(B^T p^k - f) + g \\ &= -Bu^{(k)} + g \end{aligned}$$

où nous avons posé

$$u^{(k)} = A^{-1}(f - B^T p^{(k)})$$

Ainsi, $r_k = J'_*(p^k)$ représente le résidu de la deuxième équation du système linéaire. Concrètement, nous avons l'algorithme :

ALGORITHME 1.10.1 (Uzawa)

- $k = 0$: $p^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ étant donné, trouver $u^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Au^{(0)} = f - B^T p^{(0)}$$

- $k \geq 0$: $(u^{(k)}, p^{(k)})$ étant connu, calculer successivement :

$$\begin{aligned} r^{(k)} &:= g - B^T u^{(k)} \\ p^{(k+1)} &:= p^{(k)} - \lambda r^{(k)} \end{aligned}$$

puis trouver $u^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$Au^{(k+1)} = f - B^T p^{(k+1)}$$

Le pas de descente $\lambda > 0$ est un paramètre de cet algorithme. Le test d'arrêt peut être effectué sur le résidu : $\|r^{(k)}\| < \varepsilon$, où ε est une tolérance.

Dans la pratique, cet algorithme converge pour toute donnée initiale p^0 . Les propriétés de convergence peuvent être améliorées en utilisant une des variantes plus performantes, comme le gradient conjugué. Voir le logiciel libre RHEOLEF [Sar11], chapitre 5, pour la programmation performante de ces algorithmes dans un contexte d'éléments finis en dimension 2 et 3 : on y trouvera également des préconditionnements qui accélèrent encore la convergence.

Chapitre 2

Fluides quasi-newtoniens

2.1 Loi de comportement

Comme précédemment, le fluide est supposé incompressible. Cette classe de modèle est obtenue en remplaçant la loi de comportement (1.4) par :

$$\sigma = 2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2) D(\mathbf{u}) \quad (2.1)$$

où $|\tau|$ désigne la norme matricielle d'un tenseur τ suivante :

$$|\tau|^2 = \frac{\tau : \tau}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{i,j}^2$$

Notez le facteur $1/2$ devant la norme matricielle usuelle : les composantes non-diagonales d'un tenseur symétrique τ sont comptées deux fois, et ce facteur est introduit par simple commodité. La fonction $\eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est donnée : c'est la loi de viscosité. Il existe deux lois classiques très répandues : la loi de Carreau et la loi puissance. Posons $\xi = \dot{\gamma}^2 = |2D(\mathbf{u})|^2$. Pour la loi de Carreau [BAH87, p. 171], on a :

$$\eta(\xi) = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+$$

avec $\eta_0, \eta_\infty, \lambda$ et $n \in \mathbb{R}^{+*}$. et $\eta_0 > \eta_\infty$. Pour la loi de puissance :

$$\eta(\xi) = K\xi^{\frac{-1+n}{2}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+$$

avec $K, n \in \mathbb{R}^{+*}$. Remarquons que dans les deux cas, pour $n = 1$ nous retrouvons un modèle newtonien, de viscosité constante η_0 (ou K). Lorsque $n \in]0, 1[$ le fluide est rhéofluidifiant : la viscosité η décroît avec le taux de déformation $\dot{\gamma}$, c'est le cas usuel. Lorsque $n > 1$: $\dot{\gamma}$ devient grand la loi de puissance est assez similaire au cas de la loi de Carreau avec donner des exemples !

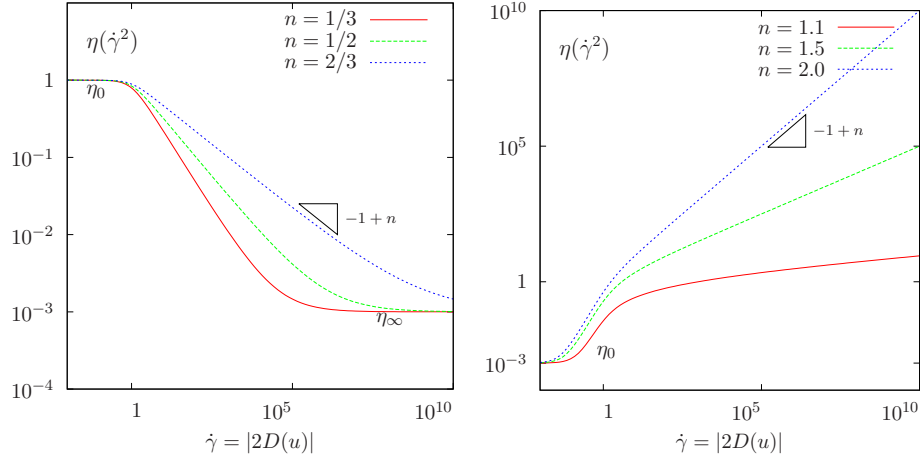


FIGURE 2.1 – Fluide quasi-newtonien : loi de viscosité de Carreau pour $n < 1$ (gauche) et $n > 1$ (droite).

$\eta_\infty = 0$: dans ce cas la viscosité η tend vers zéro pour $n < 1$ (voir Fig. 2.1). Lorsque $n > 1$ le fluide est rhéo-épaississant : la viscosité η croît avec $\dot{\gamma}$, ce qui est très utile pour modéliser la turbulence. Par exemple, la modélisation des grandes échelles (LES, pour *large eddy simulation*) de la turbulence avec le modèle de Smagorinsky [LÓ4] correspond à $n = 2$.

2.2 Problème aux limites

Le problème s'énonce alors :

(QN) : trouver $\mathbf{u}$ et p tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \operatorname{div} \{ 2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2) D(\mathbf{u}) \} + \nabla p = \rho \mathbf{g} & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ - \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega \end{array} \right.$$

avec les notations du chapitre précédent. Pour simplifier, nous allons étudier le problème stationnaire. Nous allons aussi négliger le terme d'inertie $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ ce qui permettra de se concentrer sur la non-linéarité issue de la loi de viscosité. L'extension au cas transitoire pourra ensuite se faire comme pour le cas d'un fluide newtonien. Le problème se réduit à :

(QNS) : trouver $\mathbf{u}$ et p tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} - \operatorname{div} \{ 2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2) D(\mathbf{u}) \} + \nabla p = \rho \mathbf{g} & \text{dans } \Omega \\ - \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

2.3 Exemple : écoulement de Poiseuille

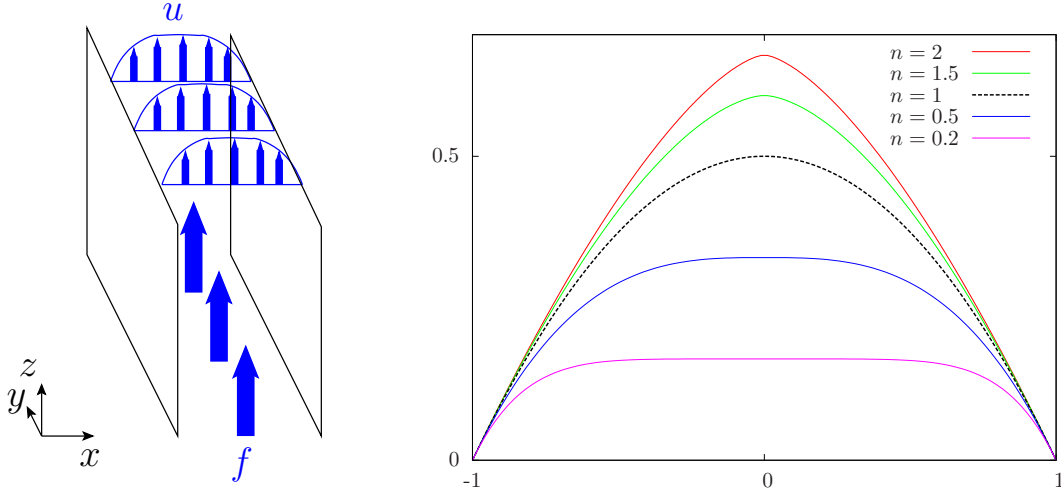


FIGURE 2.2 – Fluide quasi-newtonien : écoulement de Poiseuille entre deux plaques.

On considère l'écoulement d'un fluide à loi de puissance entre deux plaques parallèles au plan Oyz et initié par une force de poussée $\mathbf{f} = f \mathbf{e}_z$ verticale et constante. L'écoulement, une fois établi, est aussi vertical et le vecteur vitesse et ne dépend que de x : $\mathbf{u}(x) = (0, 0, u(x))$. On vérifie sans difficulté que $|2D(\mathbf{u})| = |u'|$, si bien que la composante u vérifie :

$$\begin{cases} -(K|u'|^{n-1}u')' = f \\ u(-L) = u(L) = 0 \end{cases}$$

où $2L$ est la distance séparant les deux plaques. Pour renormaliser le problème, on pose $\tilde{x} = x/L$. De même, on va remplacer l'inconnue $u(x)$ par $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(L\tilde{x})/U$, avec $U > 0$ qu'on va préciser. Le système vérifié par $\tilde{u}$ est :

$$\begin{cases} -\frac{KU^n}{fL^{n+1}} (|\tilde{u}'|^{n-1}\tilde{u}')' = 1 \\ \tilde{u}(-1) = \tilde{u}(1) = 0 \end{cases}$$

En choisissant $U = (fL^{n+1}/K)^{1/n}$, et sans perte de généralité, le système se simplifie en un problème avec pour seul paramètre $n > 0$. Comme nous allons travailler avec ce problème renormalisé, et qu'il n'y a plus d'ambiguïté, nous pouvons omettre les tildes :

$$\begin{cases} -(|u'|^{n-1}u')' = 1 \\ u(-1) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Une première intégration conduit à

$$-|u'|^{n-1}u' = x + c$$

et, par symétrie de la solution en x , c'est-à-dire $u(-x) = u(x)$, il vient $c = 0$. Remarquons que u' a le signe opposé de x : u' est impaire, et donc u est paire. En prenant la valeur absolue de l'expression précédente : $|u'|^n = |x|$ soit encore $|u'| = |x|^{1/n}$. La fonction u étant paire, il vient, avec les conditions aux limites :

$$u(x) = \frac{1 - |x|^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n} + 1}, \quad x \in]-1, 1[.$$

Cette fonction est représentée sur la Fig. 2.2 pour quelques valeurs de n . Lorsque $n > 1$, le profil de vitesse est plutôt pointu. Pour $n = 1$, on a une parabole renversée $u(x) = (1 - x^2)/2$. Enfin, pour $0 < n < 1$, le profil s'applatit : c'est le cas le plus courant pour des fluides non-Newtoniens tels que le sang, la pâte dentifrice, les coulées de neige, de lave ou les glissements de terrain.

2.4 Formulation variationnelle

Multiplions la première équation par une fonction test $\mathbf{v}$ qui s'annule sur le bord et sommions sur Ω , puis utilisons la formule de Green et la formule de la divergence (1.7)-(1.8) :

$$\int_{\Omega} 2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2) (D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})) \, dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \quad (2.2)$$

Les termes de bord sont nuls du fait que $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$ s'annule au bord. Cherchons la fonctionnelle d'énergie sous la forme :

$$J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} H(|2D(\mathbf{u})|^2) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, dx$$

où H est une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ que nous allons identifier. La dérivée de Fréchet de J s'écrit pour tous $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$:

$$J'(\mathbf{u}).(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} H'(|2D(\mathbf{u})|^2) (2D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

Le problème va pouvoir s'écrire comme un problème de minimisation de cette énergie sous la contrainte d'incompressibilité, ou encore comme un problème de point-de-selle d'un Lagrangien. En identifiant cette expression avec (2.2)

$$J'(\mathbf{u}).(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \eta(|2D(\mathbf{u})|^2) (2D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx$$

En posant $\xi = \dot{\gamma}^2 = |2D(\mathbf{u})|^2$, il vient que la relation liant H et η s'écrit :

$$H'(\xi) = \eta(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+ \iff H(\xi) = \int_0^\xi \eta(\xi) \, d\xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+$$

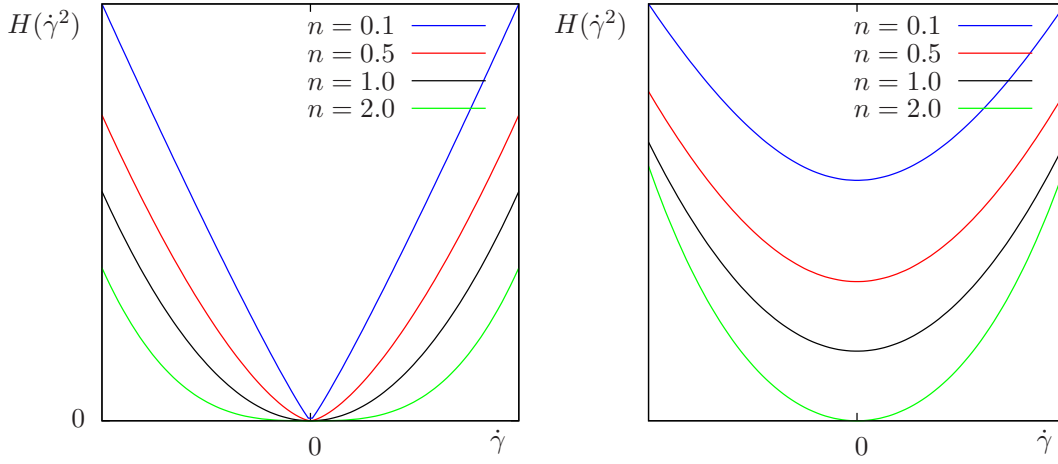


FIGURE 2.3 – Fluide quasi-newtonien : energie pour les lois de viscosité de puissance (gauche) et Carreau (droite).

Exemples – Pour la loi de puissance, on a :

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= K\xi^{\frac{-1+n}{2}} \\ H(\xi) &= \int_0^\xi K\xi^{\frac{-1+n}{2}} d\xi = \frac{2K}{1+n}\xi^{\frac{1+n}{2}}\end{aligned}$$

Pour la loi de Carreau, on a :

$$\begin{aligned}\eta(\xi) &= \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}} \\ H(\xi) &= \int_0^\xi \left(\eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}} \right) d\xi \\ &= \eta_\infty\xi + \frac{2(\eta_0 - \eta_\infty)}{\lambda(n+1)} \left((1 + \lambda\xi)^{\frac{1+n}{2}} - 1 \right)\end{aligned}$$

Dans ces deux exemples, $J(\mathbf{u})$ fait intervenir des intégrales avec des puissances $(1+n)/2$ de $\xi = \dot{\gamma}^2 = |2D(\mathbf{u})|^2$. Ces termes sont bornés lorsque $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^{1,r}(\Omega)^3$ avec $r = 1+n$. Rappelons que, pour tout $r \geq 1$:

$$W^{1,r}(\Omega) = \{\varphi \in L^r(\Omega); \nabla\varphi \in L^r(\Omega)\}$$

Dans le cas de la loi de Carreau, il y a en plus un terme $\eta_\infty|2D(\mathbf{u})|^2$ sous l'intégrale dans l'expression de $J(\mathbf{u})$: pour $\eta_\infty \neq 0$ il faudra donc $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W^{1,r}(\Omega)^3$ avec $r = \max(2, 1+n)$. Dans la suite, par soucis de simplicité, on supposera que on utilise la loi puissance ou bien la loi Carreau avec $\eta_\infty = 0$, si bien que $r = 1+n$. Les données seront supposer vérifier $\mathbf{f} \in W^{-1,1+\frac{1}{n}}(\Omega)$ et $\mathbf{u}_\gamma \in W^{1+\frac{1}{n},1+n}(\partial\Omega)$.

Par analogie avec le problème de Stokes, introduisons l'espace pour les vitesses :

$$\begin{aligned} V(\mathbf{g}) &= \{\mathbf{v} \in W^{1,1+n}(\Omega)^3; \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}\} \\ K(\mathbf{g}) &= \{\mathbf{v} \in V(\mathbf{g}); \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0\} \end{aligned}$$

On a $V(0) = W_0^{1,1+n}(\Omega)^3$. Le problème s'exprime sous forme de minimisation :

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{v} \in K(\mathbf{u}_\Gamma)} J(\mathbf{v})$$

On montre dans [BN90] que J est convexe et que ce problème admet une solution unique.

Introduisons également les formes :

$$\begin{aligned} a(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} 2\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2) D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) \, dx \\ b(\mathbf{v}, q) &= -(\operatorname{div} \mathbf{v}, q) \end{aligned}$$

La forme a est linéaire par rapport aux deux dernières variables. La formulation variationnelle du problème s'énonce :

$$\begin{aligned} (FV) : \text{trouver } \mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma) \text{ et } p \in L^{1+n}(\Omega) \text{ tels que} \\ \begin{cases} a(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

pour tout $\mathbf{v} \in W_0^{1,1+n}(\Omega)^3$ et $q \in L_0^2(\Omega)$. Toujours avec les notations du chapitre précédent, introduisons le Lagrangien suivant :

$$L(\mathbf{u}, p) = J(\mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, p) - (\mathbf{f}, \mathbf{u})$$

La solution du problème est caractérisée comme le point-de-selle de L , ce qui s'écrit

$$(\mathbf{u}, p) = \arg \inf_{\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)} \sup_{q \in L^{1+n}(\Omega)} L(\mathbf{v}, q)$$

Ainsi, en écrivant que la solution vérifie : $\partial_u L = \partial_p L = 0$ on retrouve la formulation variationnelle. Le lagrangien est convexe en $\mathbf{u}$, du fait de la convexité de J . Ainsi ce problème admet une solution unique.

2.5 Exemple 2 : écoulement dans un tuyau

On considère l'écoulement d'un fluide à loi de puissance dans un tuyau rectiligne d'axe Xz et initié par une force de poussée $\mathbf{f} = f \mathbf{e}_z$ verticale et constante : c'est l'écoulement de Poiseuille dans un tuyau. Ce peut être une artère ou bien des micro-canaux en biologie, par exemple. L'écoulement, une fois établi, est aussi vertical et le vecteur vitesse et ne

dépend que de x et y : $\mathbf{u}(x, y) = (0, 0, u(x, y))$. La contrainte $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ est vérifiée par construction.

Lorsque le tuyau est circulaire, on peut utiliser le système de coordonnées cylindrique (r, θ, z) : la solution ne dépend que de r et le problème est alors similaire à l'exemple précédent (voir section 2.5). Pour un tuyau dont la section est non-circulaire (carrée, rectangulaire, etc), la solution dépend de x et y : c'est un problème bidimensionnel.

Notons Ω la section du tuyau. Notons $\nabla u = (\partial_x u, \partial_y u)$ le gradient de la composante en z de la vitesse dans le plan Oxy . On vérifie sans difficulté que $|2D(\mathbf{u})| = |\nabla u| = ((\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2)^{\frac{1}{2}}$. La contrainte d'incompressibilité étant vérifiée, problème se ramène à la minimisation de :

$$J(u) = \frac{K}{1+n} \int_{\Omega} |\nabla u|^{1+n} dx - \int_{\Omega} f u dx$$

C'est le problème classique dit du p -laplacien, avec $p = 1 + n$. Pour $n = 1$ on retrouve une fonctionnelle J quadratique et le système correspondant est linéaire.

2.6 Algorithme du point fixe

L'idée la plus simple est de résoudre ce problème non-linéaire par un algorithme de point fixe. On construit par récurrence une suite $(\mathbf{u}^{(k)})_{k \geq 0}$ avec $\mathbf{u}^{(0)}$ donné et, à l'étape k , connaissant $\mathbf{u}^{(k-1)}$, nous calculons $\mathbf{u}^{(k)}$ solution de :

$$(FV) : \text{trouver } \mathbf{u}^{(k)} \in V(\mathbf{u}_{\Gamma}) \text{ et } p^{(k)} \in L_0^2(\Omega) \text{ tels que}$$

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}^{(k-1)}; \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p^{(k)}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}^{(k)}, q) = 0 \end{cases}$$

pour tout $\mathbf{v} \in w_0^{1,1+n}(\Omega)^3$ et $q \in L_0^2(\Omega)$. L'opérateur qui, aux seconds membres $\mathbf{f}$ et $\mathbf{g}$ associe $\mathbf{u}^{(k)}$, est linéaire. Ainsi, à chaque itération, $\mathbf{u}^{(k-1)}$, étant connu, le système est linéaire. Reste à savoir si la suite converge.

Notons G l'opérateur qui, à la donnée $\mathbf{u}^{(k-1)}$, associe la solution $\mathbf{u}^{(k)} = G(\mathbf{u}^{(k-1)})$ du problème précédent. Cette fois-ci, G n'est pas linéaire. Nous cherchons à obtenir $\mathbf{u} = G(\mathbf{u})$, soit le point fixe de G . Par récurrence on a $\mathbf{u}^{(k)} = G^k(\mathbf{u}^{(0)})$. On observe sur la Fig. 2.4 que la solution $\mathbf{u}^{(k)}$ ne converge vers $\mathbf{u}$ solution du problème non-linéaire que dans certains cas : une condition suffisante est que $|G'| < 1$ dans un voisinage de $\mathbf{u}$ et contenant $\mathbf{u}^{(0)}$. Dans ce cas, G est dit contractant dans ce voisinage de $\mathbf{u}$. Pour s'en convaincre, considérons le cas $G(\mathbf{u}) = \alpha \mathbf{u}$, avec $\alpha > 0$ constante. Alors $\mathbf{u}^{(k)} = \alpha^k \mathbf{u}^{(0)}$ ne converge vers $\mathbf{u} = 0$ que si $|G'| = \alpha < 1$.

Dans la pratique il est difficile de savoir si G est contractant ou non. On observe, pour le problème qui nous intéresse, que l'algorithme ne converge que pour $n \in]0, 2[$ (voir [Sar11,

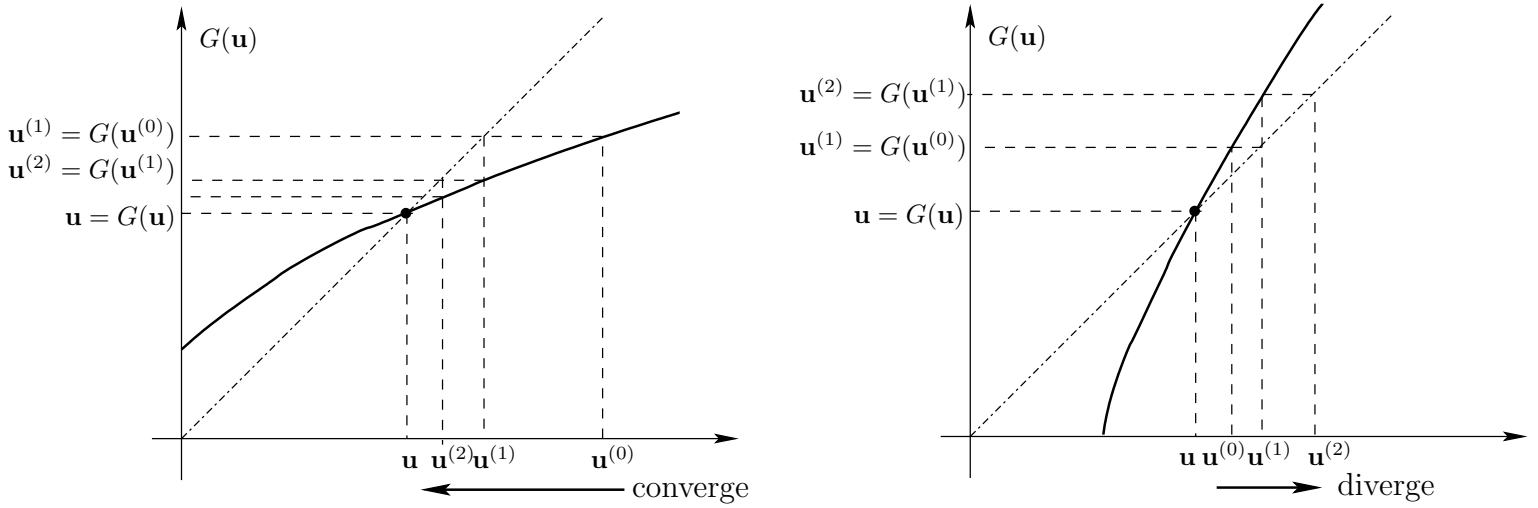


FIGURE 2.4 – Méthode du point fixe : (gauche) cas convergent ; (droite) cas divergent.

part 3]). Ceci recouvre cependant les valeurs utilisés en pratique pour n : généralement $0 < n < 1$. Cet algorithme est facile à mettre en œuvre en pratique, en partant d'un de sous- code de Stokes ou Navier-Stokes. Cependant, la convergence est lente et on lui préfère la relaxation ? méthode de Newton (voir Fig. 2.5).

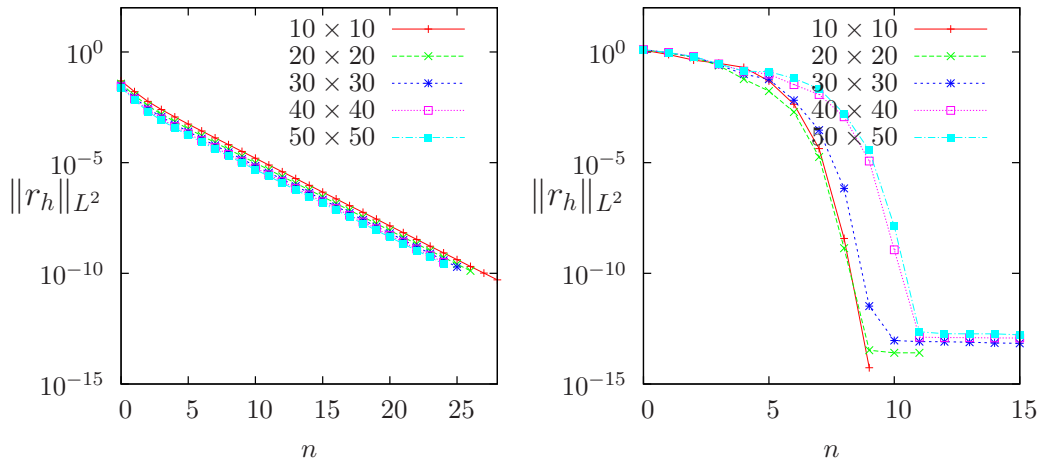


FIGURE 2.5 – Convergence du résidu pour le point fixe (gauche) et la méthode de Newton (droite) pour $n = 0.5$ (source : logiciel libre [Sar11]).

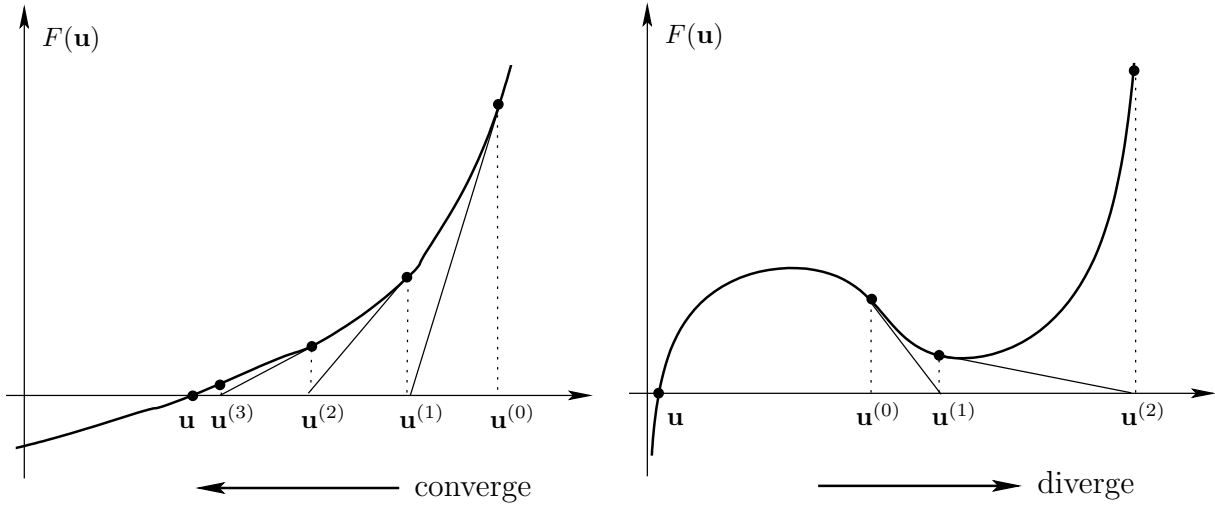


FIGURE 2.6 – Méthode de Newton : (gauche) cas convergent ; (droite) cas divergent.

2.7 Algorithme de Newton

Posons :

$$F(\mathbf{u}, p) = \begin{pmatrix} -\operatorname{div} \{2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2) D(\mathbf{u})\} + \nabla p - \rho \mathbf{g} \\ -\operatorname{div} \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

Le problème peut se formuler : trouver $(\mathbf{u}, p)$ tels que $F(\mathbf{u}, p) = 0$. Le problème, sous cette forme, est susceptible d'être résolu par la méthode de Newton. Posons $\chi = (\mathbf{u}, p)$. On construit par récurrence une suite $(\chi^{(k)})_{k \geq 0}$ avec $\chi^{(0)}$ donné et, à l'étape $k + 1$, connaissant $\chi^{(k)}$, nous calculons $\chi^{(k+1)}$ comme intersection de la tangente en $\chi^{(k)}$ à la courbe $Y = F(\chi)$ avec l'axe $Y = 0$. Ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} F'(\chi^{(k)}) \delta \chi^{(k)} &= -F(\chi^{(k)}) \\ \chi^{(k+1)} &= \chi^{(k)} + \delta \chi^{(k)} \end{aligned}$$

Ici F' désigne la dérivée de Fréchet de F :

$$F'(\chi) \delta \chi^{(k)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\chi + \varepsilon \delta \chi) - F(\chi)}{\varepsilon}$$

On observe sur la Fig. 2.6 que la solution $\mathbf{u}^{(k)}$ ne converge vers $\mathbf{u}$ solution du problème annexe non-linéaire que dans certains cas : une condition suffisante est que $|F'|$ ne s'annule pas calcul dans un voisinage de $\mathbf{u}$ et contenant $\mathbf{u}^{(0)}$. Lorsque cette méthode converge, elle converge bien plus vite que la méthode du point fixe. De plus, dans la pratique, on sait construire des variantes de la méthode de Newton et qui convergent globalement. Pour cela, lorsque nous ne sommes pas dans un voisinage favorable, le pas $\delta \chi^{(k)}$ est réduit d'un facteur $\varepsilon_k \in]0, 1]$:

$$\chi^{(k+1)} = \chi^{(k)} + \varepsilon_k \delta \chi^{(k)}$$

Le facteur devient égal à un lorsque le voisinage est favorable. Pour plus de détails, voir [Sar11, part 3]. Regardons à présent plus en détails comment s'écrit le calcul du pas $\delta\chi^{(k)}$. Afin d'alléger les notations, on note $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$ la solution à l'étape k et on pose $(\mathbf{r}_u, r_p) = -F(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})$. On omet l'indice k pour le pas $\delta\chi^{(k)}$ que on note $(\delta\mathbf{u}, \delta p)$.

La dérivée de Fréchet de la fonction

$$f(\mathbf{u}) = |2D(\mathbf{u})|^2 = \frac{2D(\mathbf{u}) : 2D(\mathbf{u})}{2}$$

est définie par :

$$f'(\mathbf{u}).(\mathbf{v}) = 2D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})$$

De même, la dérivée de Fréchet de la fonction

$$g(\mathbf{u}) = \eta(|2D(\mathbf{u})|^2) = \eta \circ f(\mathbf{u})$$

est définie par :

$$g'(\mathbf{u}).(\mathbf{v}) = \eta' \circ f(\mathbf{u}) f'(\mathbf{u}).(\mathbf{v}) = 2\eta'(|2D(\mathbf{u})|^2) (D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}))$$

Enfin, la dérivée de Fréchet de la fonction

$$h(\mathbf{u}) = \mathbf{div} \{2g(\mathbf{u})D(\mathbf{u})\}$$

est définie par :

$$\begin{aligned} h'(\mathbf{u}) \mathbf{v} &= \mathbf{div} \{(2g'(\mathbf{u}) \mathbf{v}) D(\mathbf{u}) + 2g(\mathbf{u})D(\mathbf{v})\} \\ &= \mathbf{div} \{4\eta'(|2D(\mathbf{u})|^2) (D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v})) D(\mathbf{u}) + 2\eta(|2D(\mathbf{u})|^2) D(\mathbf{v})\} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &F'(\bar{\mathbf{u}}, \bar{p})(\delta\mathbf{u}, \delta p) \\ &= \begin{pmatrix} -\mathbf{div} \{4\eta'(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2) (D(\bar{\mathbf{u}}) : D(\delta\mathbf{u})) D(\bar{\mathbf{u}}) + 2\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2)D(\delta\mathbf{u})\} + \nabla(\delta p) \\ -\mathbf{div}(\delta\mathbf{u}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\bar{\mathbf{u}}; \delta\mathbf{u}, \delta\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} 2\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2) (D(\delta\mathbf{u}) : D(\delta\mathbf{v})) \, dx \\ &\quad + \int_{\Omega} 2\eta'(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2) (2D(\bar{\mathbf{u}}) : D(\delta\mathbf{u})) (2D(\bar{\mathbf{u}}) : D(\delta\mathbf{v})) \, dx \end{aligned}$$

Le système linéaire à résoudre à chaque étape de la méthode de Newton s'écrit :

$$(FV) : \text{trouver } \delta\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega) \text{ et } \delta p \in L_0^2(\Omega) \text{ tels que}$$

$$\begin{cases} \tilde{a}(\bar{\mathbf{u}}; \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{v}) + b(\delta \mathbf{v}, \delta p) &= (\mathbf{r}_u, \delta \mathbf{v}) \\ b(\delta \mathbf{u}, \delta q) &= (r_p, \delta q) \end{cases}$$

ceci pour tout $\delta \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$ et $\delta q \in L_0^2(\Omega)$. Remarquons que

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\bar{\mathbf{u}}; \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &= \int_{\Omega} 2\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2) |D(\delta \mathbf{u})|^2 dx \\ &\quad + \int_{\Omega} 2\eta'(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2) (2D(\bar{\mathbf{u}}) : D(\delta \mathbf{u}))^2 dx \end{aligned}$$

Dans le cas où $\eta' > 0$ (cad $n > 1$) on obtient directement la coercivité de $\tilde{a}$:

$$\tilde{a}(\bar{\mathbf{u}}; \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) \geq \inf_{x \in \Omega} \text{ess} 2\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})(x)|^2) \|D(\delta \mathbf{u})\|_{0,\Omega}^2$$

Ainsi, lorsque η est strictement positive et croissante (loi de Carreau avec $n > 1$) nous pouvons conclure à la stricte coercivité. Pour la loi de puissance avec $n > 1$, η peut s'annuler lorsque $D(\delta \mathbf{u})$ s'annule, et la forme bilinéaire n'est alors plus nécessairement coercive strictement. Dans ce cas la matrice jacobienne du système discret devient singulière.

Le cas $\eta' < 0$ (aka $n < 1$) demande un peu plus de travail. De Cauchy-Schwartz :

$$(2D(\bar{\mathbf{u}}) : D(\delta \mathbf{u}))^2 \leq |2D(\bar{\mathbf{u}})|^2 |D(\delta \mathbf{u})|^2$$

D'où

$$\begin{aligned} \tilde{a}(\bar{\mathbf{u}}; \delta \mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) &\geq \int_{\Omega} \{2\eta(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2) + 2\eta'(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2) |2D(\bar{\mathbf{u}})|^2\} |D(\delta \mathbf{u})|^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \nu(|2D(\bar{\mathbf{u}})|^2) |D(\delta \mathbf{u})|^2 dx \end{aligned}$$

avec $\nu(\xi) = \eta(\xi) + \eta'(\xi) \xi$.

Pour la loi de puissance, on a :

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= K\xi^{\frac{-1+n}{2}} \\ \eta'(\xi) &= \frac{(-1+n)K}{2} \xi^{\frac{-3+n}{2}} \\ \nu(\xi) &= \frac{(1+n)K}{2} \xi^{\frac{-1+n}{2}} \geq 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

Pour la loi de Carreau, on a :

$$\begin{aligned} \eta(\xi) &= \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty})(1 + \lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}}, \\ \eta'(\xi) &= \frac{(-1+n)\lambda}{2} (\eta_0 - \eta_{\infty})(1 + \lambda\xi)^{\frac{-3+n}{2}}, \\ \nu(\xi) &= \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty})(1 + \lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}} + \frac{(-1+n)}{2} (\eta_0 - \eta_{\infty})(1 + \lambda\xi)^{\frac{-3+n}{2}} \lambda\xi \end{aligned}$$

Pour $n < 1$ on a $(-1 + n)\lambda\xi \geq (-1 + n)(1 + \lambda\xi)$ et

$$\begin{aligned}
 \nu(\xi) &\geq \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \lambda\xi)^{\frac{-1+n}{2}} + \frac{(-1 + n)}{2}(\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \lambda\xi)^{\frac{1+n}{2}} \\
 &= \eta_\infty + \frac{(1 + n)}{2}(\eta_0 - \eta_\infty)(1 + \lambda\xi)^{\frac{1+n}{2}} \\
 &\geq \eta_\infty + \frac{(1 + n)}{2}(\eta_0 - \eta_\infty) \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

Finalement, pour toutes les valeurs de $n > 0$, pour la loi de Carreau nous pouvons conclure à la stricte coercivité. Pour la loi de puissance, et la forme bilinéaire n'est plus nécessairement coercive strictement lorsque $D(\delta\mathbf{u})$ s'annule. Dans ce cas la matrice jacobienne du système discret devient singulière. Cependant on observe en pratique que cette méthode est très performante.

Chapitre 3

Fluides viscoplastiques

3.1 Loi de comportement

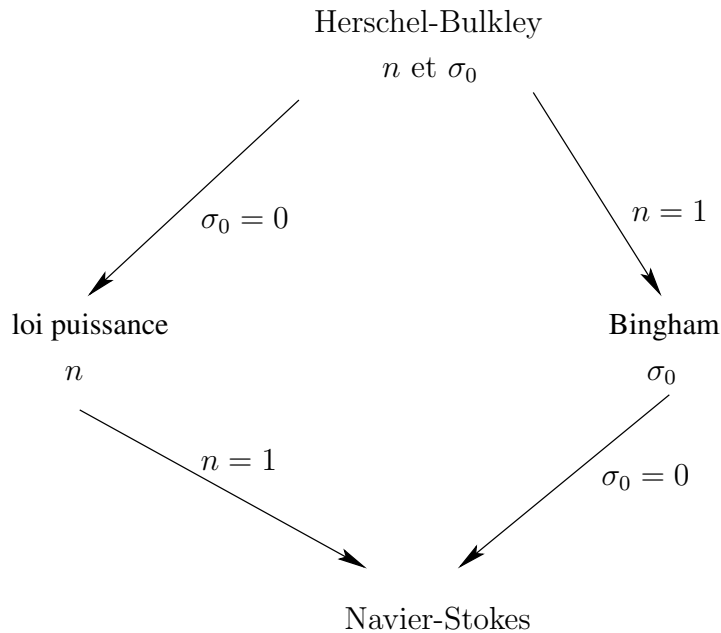


FIGURE 3.1 – Fluides viscoplastiques : une hiérarchie de modèles.

Il est commode, dans la perspective de méthodes numériques, de manipuler des problèmes de minimisation. Pour cela, posons $G = 2D(\mathbf{u})$ et introduisons l'énergie de dissipation suivante :

$$\mathcal{D}(G) = \frac{K}{1+n} |G|^{1+n} + \sigma_0 |G|, \quad \forall G \in \mathbb{R}_s^{d \times d} \quad (3.1)$$

avec toujours $|G|^2 = (G : G)/2$ et où $K > 0$ et $n > 0$ correspondent aux paramètres de la loi de puissance précédemment étudié et $\sigma_0 \geq 0$ est appelé la contrainte seuil. Pour $\sigma_0 = 0$, on retrouve le modèle dit loi de puissance précédent, qui se réduit au cas d'un fluide newtonien pour $n = 1$. Pour $n = 1$ et $\sigma_0 > 0$ ce modèle s'appelle fluide de Bingham [Bin22]. Dans le cas général $n > 0$ et $\sigma_0 > 0$ le modèle (3.1) a été introduit par Herschel et Bulkley [HB26]. Ce modèle recouvre ainsi les modèles que nous avons abordé précédemment (voir Fig. 3.1). Ici, l'énergie de dissipation $\mathcal{D}$ n'est plus différentiable dès que $\sigma_0 \neq 0$. Par contre elle est

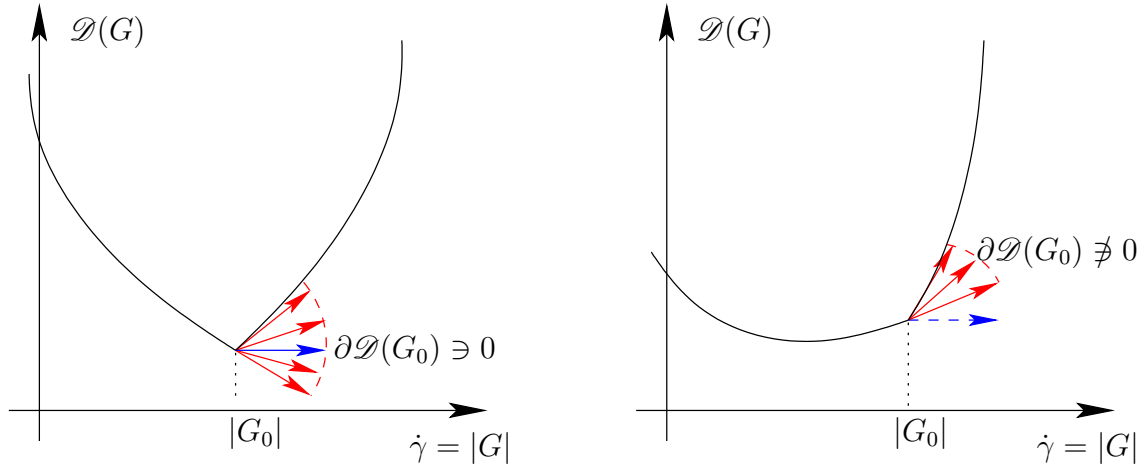


FIGURE 3.2 – Minimisation d'une énergie non-différentiable : (gauche) $0 \in \partial\mathcal{D}(G_0)$; (droite) $0 \notin \partial\mathcal{D}(G_0)$.

convexe, comme somme de fonctions convexes, et on peut définir son sous-différentiel :

$$\partial\mathcal{D}(G) = \{\sigma \in \mathbb{R}_s^{d \times d}; \mathcal{D}(\chi) - \mathcal{D}(G) \geq \sigma : (\chi - G), \forall \chi \in \mathbb{R}_s^{d \times d}\} \quad (3.2)$$

Ceci exprime que toutes les tangentes possibles en $(G, \mathcal{D}(G))$ sont situées sous la courbe convexe. Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, cette notion se réduit, si $\mathcal{D}$ est différentiable à gauche et à droite, à $\partial\mathcal{D}(G_0) = [\mathcal{D}'_-(G_0), \mathcal{D}'_+(G_0)]$ (voir Fig. 3.2).

Rappelons que le tenseur des contraintes totales de Cauchy se décompose $\sigma_{\text{tot}} = -p.I + \sigma$ où $-p.I$ est la partie *sphérique* et p la pression, et σ la partie *déviatrice*. Pour un fluide de Bingham, par définition σ est donné par :

$$\sigma \in \partial\mathcal{D}(2D(\mathbf{u})) \quad (3.3)$$

Clairement, il n'y a pas unicité des contraintes déviatrices σ , car l'ensemble $\mathcal{D}(2D(\mathbf{u}))$ ne contient pas qu'un seul élément en général. Il reste à calculer concrètement le sous-différentiel $\partial\mathcal{D}$ selon (3.2) lorsque l'énergie de dissipation $\mathcal{D}$ est donnée par (3.1). Lorsque $G = 2D(\mathbf{u}) \neq 0$, alors $\mathcal{D}(G)$ est dérivable et la définition du sous-différentiel coïncide du

ici avec la dérivée usuelle. Pour $G = 0$, par contre, la dérivée est multi-valuée : c'est un ensemble de valeurs.

$$\partial \mathcal{D}(G) = \begin{cases} \left\{ \sigma = K|G|^{-1+n} G + \sigma_0 \frac{G}{|G|} \right\}, & \text{si } G \neq 0 \\ \{\sigma, |\sigma| \leq \sigma_0\}, & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que la norme du déviateur des contraintes $|\sigma|$ s'exprime assez simplement en

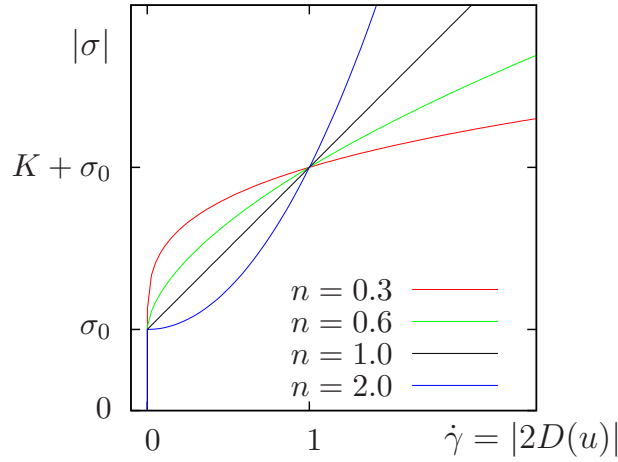


FIGURE 3.3 – Fluide viscoplastiques : norme des contraintes $|\sigma|$ en fonction de celle des taux de déformation $|2D(\mathbf{u})|$.

fonction de celle des taux de déformation $|2D(\mathbf{u})|$ (voir Fig. 3.3) :

$$\begin{cases} |\sigma| = K|2D(\mathbf{u})|^n + \sigma_0 & \text{si } |2D(\mathbf{u})| \neq 0 \\ |\sigma| \leq \sigma_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On complète cette équation constitutive (3.3) avec la conservation de la quantité de mouvement (1.2) et la relation d'incompressibilité (1.5), ainsi que des conditions aux bords et initiales pour obtenir un problème à trois inconnues :

trouver σ , $\mathbf{u}$ et p , définis dans $]0, T[\times \Omega$ tels que

$$\begin{cases} \sigma = K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n} 2D(\mathbf{u}) + \sigma_0 \frac{2D(\mathbf{u})}{|2D(\mathbf{u})|}, & \text{si } 2D(\mathbf{u}) \neq 0 \\ |\sigma| \leq \sigma_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \operatorname{div} \sigma + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{dans }]0, T[\times \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega \end{aligned}$$

où $\mathbf{f}$ sont les forces extérieures (gravité, etc) données, et les conditions aux bords et initiales $\mathbf{u}_\Gamma$ et $\mathbf{u}_0$ sont également connues.

Lorsqu'on cherche la solution stationnaire de ce problème et qu'on néglige le terme d'inertie $\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$, par exemple en supposant l'écoulement lent, on obtient :

(P) : trouver σ , $\mathbf{u}$ et p , définis dans Ω tels que

$$\begin{cases} \sigma = K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n} 2D(\mathbf{u}) + \sigma_0 \frac{2D(\mathbf{u})}{|2D(\mathbf{u})|}, & \text{si } 2D(\mathbf{u}) \neq 0 \\ |\sigma| \leq \sigma_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\Gamma & \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

Également, et sans négliger l'inertie, lorsqu'on discrétise en temps par la méthode des caractéristiques, on se ramène à chaque pas de temps à un problème de structure très similaire qui ne dépend que des variables d'espace.

3.2 Exemple : écoulement de Poiseuille

On étend l'exemple d'un écoulement entre deux plans introduit à la section 2.3, page 27, à un fluide viscoplastique. La pression est donnée par $p(z) = -fz$. Le tenseur symétrique σ n'a plus qu'une composante non-nulle $\sigma_{rz}(x)$. Le problème se réduit à :

(P) : trouver σ_{rz} et u , définis dans $] -L, L[$ et tels que

$$\begin{cases} \sigma_{rz}(x) = K|u'(x)|^{-1+n} u'(x) + \sigma_0 \frac{u'(x)}{|u'(x)|}, & \text{si } u'(x) \neq 0 \\ |\sigma_{rz}(x)| \leq \sigma_0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\sigma'_{rz} - f &= 0 & \text{dans }] -L, L[\\ u(-L) = u(L) &= 0 \end{aligned}$$

On se donne une contrainte représentative $\Sigma = fL$ et une vitesse représentative U telle que $K(U/L)^n = \Sigma$ et on effectue le changement d'inconnues :

$$x = L\tilde{x}, \quad u = U\tilde{u}, \quad \sigma_{rz} = \Sigma\tilde{\sigma}_{rz}$$

Le système se réduit à un problème avec seulement deux paramètres n et le nombre $Bi = \sigma_0/(fL)$. Comme il n'y a plus d'ambiguïté, on omet les tildes :

(P) : trouver σ_{rz} et u , définis dans $] -1, 1[$ et tels que

$$\begin{cases} \sigma_{rz}(x) = |u'(x)|^{-1+n} u'(x) + Bi \frac{u'(x)}{|u'(x)|}, & \text{si } u'(x) \neq 0 \\ |\sigma_{rz}(x)| \leq Bi & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -\sigma'_{rz} - 1 &= 0 & \text{dans }] -1, 1[\\ u(-1) = u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Remarquons que la solution est paire : $u(-x) = u(x)$. On obtient $\sigma_{rz}(x) = -x$ et le critère

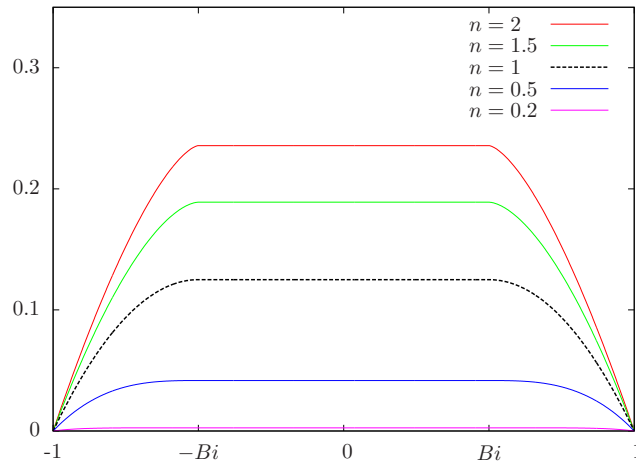


FIGURE 3.4 – Fluide viscoplastique :écoulement de Poiseuille pour $Bi = 1/2$.

de seuil donne $u(x) = 0$ quand $|x| \leq Bi$. Si $Bi > 1$ la solution est $u = 0$. Sinon, pour $|x| > Bi$, on obtient $|u'(x)|^n + Bi = |x|$ et finalement, avec les conditions aux limites et la continuité en $x = \pm Bi$:

$$u(x) = \frac{(1 - Bi)^{1+\frac{1}{n}} - \max(0, |x| - Bi)^{1+\frac{1}{n}}}{1 + \frac{1}{n}}$$

Cette solution est représentée sur la Fig. 3.4.

3.3 Formulation variationnelle

Décomposons l'énergie de dissipation $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$ suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(G) &= \frac{K}{1+n} |G|^{1+n} \\ \mathcal{D}_2(G) &= \sigma_0 |G|, \quad \forall G \in \mathbb{R}_s^{d \times d} \end{aligned}$$

Remarquons que $\mathcal{D}_1$ est différentiable : son sous-différentiel ne contient qu'un élément et $\partial\mathcal{D}_1(G) = \{K|G|^{-1+n}G\}$. Ainsi, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}\partial\mathcal{D}(G) &= \{\sigma = K|G|^{-1+n}G + \tau, \tau \in \partial\mathcal{D}_1(G)\} \\ \iff \partial\mathcal{D}_1(G) &= \{\tau = -K|G|^{-1+n}G + \sigma, \sigma \in \partial\mathcal{D}(G)\}\end{aligned}$$

De la convexité de $\mathcal{D}_1$ et de la définition (3.2) pour le sous-différentiel $\partial\mathcal{D}_1(G)$, on obtient pour tout $G \in \mathbb{R}_s^{d \times d}$ et $\text{tr}(G) = 0$, et $\sigma \in \partial\mathcal{D}(2D(\mathbf{u}))$ que :

$$\mathcal{D}_1(\chi) - \mathcal{D}_1(G) \geq (-K|G|^{-1+n}G + \sigma) : (\chi - G), \quad \forall \chi \in \mathbb{R}_s^{d \times d} \text{ et } \text{tr}(\chi) = 0$$

Choisissons $G = 2D(\mathbf{u})$: la contrainte $\text{tr}(G) = 0$ devient $\text{div}(\mathbf{u}) = 0$. De même, choisissons $\chi = 2D(\mathbf{v})$ avec $\text{div}(\mathbf{v}) = 0$ comme fonction test. En intégrant sur Ω , il vient l'inéquation variationnelle :

$$\int_{\Omega} (K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n}D(\mathbf{u})) : (2D(\mathbf{v} - \mathbf{u})) \, dx + j(2D(\mathbf{v})) - j(2D(\mathbf{u})) \geq \int_{\Omega} \sigma : (2D(\mathbf{v} - \mathbf{u})) \, dx$$

où on a posé :

$$j(\chi) = \int_{\Omega} \sigma_0 |\chi| \, dx$$

Comme pour les fluides quasi-newtoniens, on introduit les espaces :

$$\begin{aligned}V(\mathbf{g}) &= \{\mathbf{v} \in W^{1,1+n}(\Omega)^3; \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}\} \\ K(\mathbf{g}) &= \{\mathbf{v} \in V(\mathbf{g}); \text{div}(\mathbf{v}) = 0\}\end{aligned}$$

En multipliant la conservation de la quantité de mouvement $-\text{div} \sigma + \nabla p = \mathbf{f}$ par $\mathbf{v} - \mathbf{u}$ s'annulant sur le bord et en intégrant par parties :

$$\int_{\Omega} \sigma : (2D(\mathbf{v} - \mathbf{u})) \, dx - \int_{\Omega} p \, \text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx$$

En ajoutant cette equation à l'inéquation variationnelle précédente, et en incorporant la relation d'incompressibilité, il vient la formulation variationnelle du problème :

(FV) : trouver $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_{\Gamma})$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n}D(\mathbf{u})) : (2D(\mathbf{v} - \mathbf{u})) \, dx \\ + j(2D(\mathbf{v})) - j(2D(\mathbf{u})) - \int_{\Omega} p \, \text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx &\geq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx \\ - \int_{\Omega} q \, \text{div}(\mathbf{u}) \, dx &= 0\end{aligned}$$

ceci pour tout $\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_{\Gamma})$ et $q \in L^2(\Omega)$.

De même que pour le problème de Stokes et les fluides quasi-newtoniens, il est possible d'écrire ce problème sur le noyau de l'opérateur divergence :

(FV) : trouver $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ tel que

$$\int_{\Omega} (K|2D(\mathbf{u})|^{-1+n} D(\mathbf{u})) : (2D(\mathbf{v} - \mathbf{u})) \, dx + j(2D(\mathbf{v})) - j(2D(\mathbf{u})) \geq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \, dx$$

ceci pour tout $\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$.

Cette formulation est élégante mais a l'inconvénient de conduire, une fois écrite sur des espaces de dimension finie, à un système d'inéquations non-linéaire de grande taille et très difficile à résoudre.

Le problème de minimisation s'écrit :

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{v} \in K(\mathbf{u}_\Gamma)} J(\mathbf{v})$$

avec

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} \mathcal{D}(2D(\mathbf{v})) \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \\ &= \frac{K}{1+n} \int_{\Omega} |2D(\mathbf{v})|^{1+n} \, dx + \sigma_0 \int_{\Omega} |2D(\mathbf{v})| \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \end{aligned}$$

3.4 Régularisation : un problème modifié

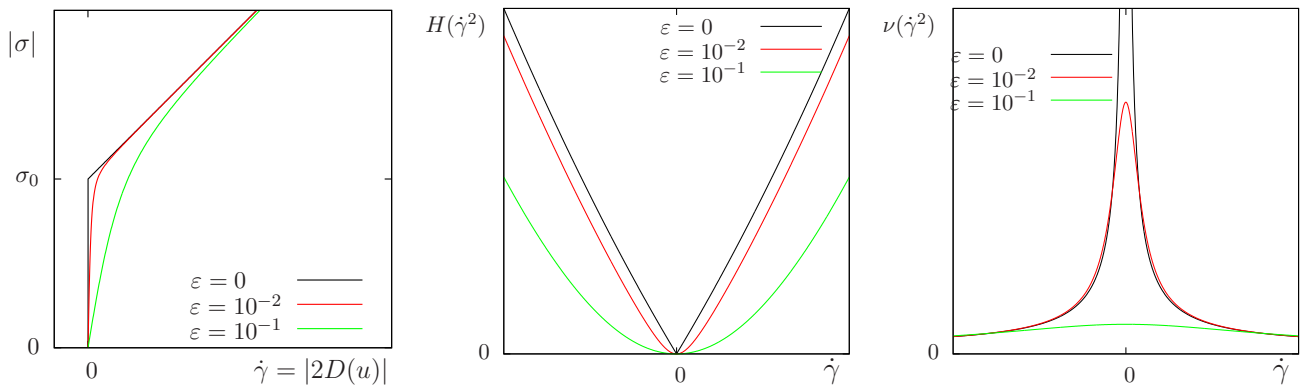


FIGURE 3.5 – Régularisation des fluides viscoplastiques pour $n = 1$ et $\sigma_0 = 1/2$: (gauche) : norme des contraintes $|\sigma|$ en fonction de celle des taux de déformation $\dot{\gamma} = |2D(\mathbf{u})|$; (centre) : énergie $H(\dot{\gamma}^2)$; (droite) : coercivité $\nu(\dot{\gamma}^2)$.

On remplace l'équation constitutive des fluides viscoplastiques par celle d'un fluide quasi-newtonien [GLT81, p. 364] :

$$\begin{aligned}\sigma &= \left(K |2D(\mathbf{u})|^{-1+n} + \frac{\sigma_0}{(|2D(\mathbf{u})|^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \right) 2D(\mathbf{u}) \\ &= 2\eta_\varepsilon (|2D(\mathbf{u})|^2) D(\mathbf{u})\end{aligned}$$

avec $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ et où on a posé :

$$\eta_\varepsilon(\chi) = K\chi^{\frac{-1+n}{2}} + \frac{\sigma_0}{(\chi + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \forall \chi \in \mathbb{R}^+$$

La coercivité de la jacobienne est assurée avec un coefficient $\nu(\dot{\gamma}) > 0$. On ne divise plus par $|2D(\mathbf{u})|$, ce qui évite les problèmes dans les *zones rigides* associées à $2D(\mathbf{u}) = 0$ (voir Fig. 3.5). Les méthodes vues au chapitre 2 s'appliquent donc *a priori*. Ainsi, cela permet de réutiliser ici un code de calcul permettant de résoudre des écoulements quasi-newtoniens. Avec les notations du chapitre 2, le problème de minimisation est associé à la fonction H_ε suivante :

$$H_\varepsilon(\xi) = \frac{2K}{1+n} \xi^{\frac{1+n}{2}} + \sigma_0 \left(\sqrt{\xi + \varepsilon^2} - \varepsilon \right), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+$$

On montre [GLT81, p. 370] dans le cas $n = 1$ et pour Ω la section circulaire, que le problème régularisé est bien posé et que sa solution, notée $\mathbf{u}_\varepsilon$, converge, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, vers la solution $\mathbf{u}$ du problème initial suivant :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,2,\Omega} &\leq c \varepsilon \sqrt{-\log \varepsilon} \\ \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon\|_{0,\infty,\Omega} &\leq c \varepsilon\end{aligned}$$

où $c > 0$ est indépendante de ε .

La première difficulté vient de ce que ε doit être choisis petit pour que la solution de ce problème quasi-newtonien ressemble à celle du problème viscoelastique. Pour ε petit, le problème quasi-newtonien en dimension finie devient difficile à résoudre : les matrices dépendent de ε et leur conditionnement est en $1/\varepsilon$, ce qui dégrade les propriétés de convergence des méthodes itératives : point fixe ou méthode de Newton. Ceci s'observe sur la Fig. 3.5.c : le coefficient $\nu(|2D(\mathbf{u})|^2)$ assurant la coercivité est non-borné uniformément en ε , il tends vers $+\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans les régions rigides où $\xi = |D(\mathbf{u})|^2 = 0$.

La seconde difficulté vient de ce que pour tout $\varepsilon > 0$ il n'existe plus de zones rigides associées à $D(\mathbf{u}) = 0$. Ceci est d'autant plus gênant que l'un des intérêts de ce modèle est de permettre de prédire ces zones : stabilité d'une fondation, résistance aux contraintes pour une barre d'acier, départ ou arrêt d'un glissement de terrain ou d'une avalanche... Avec ces modèles régularisés, on est plus capable de déterminer ces situations dites d'*analyse de charge limite*.

Ces deux inconvénients ont motivé la recherche d'algorithmes de résolution du problème initial, non-régularisé.

3.5 Algorithme du lagrangien augmenté

Cet algorithme a été proposée par Fortin et Glowinski [FG83]. L'idée consiste à introduire $\gamma = 2D(\mathbf{u})$ comme variable supplémentaire indépendante dans le problème ainsi qu'un multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $\gamma - (2D(\mathbf{u}) = 0)$. Le multiplicateur va coïncider avec le déviateur des contraintes et est donc noté σ . Le problème se formule comme le point-de-selle du Lagrangien

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}, \gamma; p, \sigma) = & \frac{K}{1+n} \int_{\Omega} |\gamma|^{1+n} dx + \sigma_0 \int_{\Omega} |\gamma| dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx \\ & - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : (\gamma - 2D(\mathbf{u})) dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\gamma - 2D(\mathbf{u})|^2 dx \end{aligned}$$

Le paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ correspond au paramètre d'augmentation du lagrangien : on ajoute un terme quadratique en $\mathbf{u}$. Le problème s'écrit :

$$(\mathbf{u}, \gamma; p, \sigma) = \arg \inf_{(\mathbf{v}, \delta) \in V(\mathbf{u}_\Gamma) \times L^2(\Omega)_s^{d \times d}} \sup_{(q, \tau) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)_s^{d \times d}} L(\mathbf{v}, \delta; q, \tau)$$

La contrainte $\gamma - 2D(\mathbf{u})$ ne peut être que satisfaite par la solution : autrement, la maximisation en σ correspond à une valeur infinie. Pour $\gamma = 2D(\mathbf{u})$ on obtient alors $L(\mathbf{u}, \gamma; p, \sigma) = J(\mathbf{u})$ qui est l'énergie du système.

La façon la plus simple de résoudre ce problème est d'écrire un algorithme de descente à pas fixe (Uzawa) sur la fonctionnelle duale :

$$J_*(\sigma) = - \arg \inf_{(\mathbf{v}, \delta) \in V(\mathbf{u}_\Gamma) \times L^2(\Omega)_s^{d \times d}} \sup_{q \in L^2(\Omega)} L(\mathbf{v}, \delta; q, \sigma)$$

On obtient

Algorithme 1 (Uzawa)

- $k = 0$: σ_0 donné
- $k \geq 1$: σ_{k-1} connu, calculer

$$(\mathbf{u}_k, \gamma_k; p_k) = \arg \inf_{(\mathbf{v}, \delta) \in V(\mathbf{u}_\Gamma) \times L^2(\Omega)_s^{d \times d}} \sup_{q \in L^2(\Omega)} L(\mathbf{v}, \delta; q, \sigma_{k-1})$$

puis descendre dans la direction opposée au gradient de J_* :

$\sigma_k = \sigma_{k-1} + \beta (\gamma_k - 2D(\mathbf{u}_k))$
où β est le pas de descente. Dans la pratique on choisit ce paramètre comme étant le paramètre d'augmentation : $\beta = \alpha > 0$.

La première étape du calcul de $(\mathbf{u}_k, \gamma_k; p_k)$ est découpée en deux parties : tout d'abord le calcul de $(\mathbf{u}_k, p_k)$ puis celui de γ_k . La nouvelle variante de l'algorithme s'écrit :

Algorithme 2 (Fortin-Glowinski, forme abstraite)

- $k = 0$: σ_0 et γ_0 donnés
- $k \geq 1$: σ_{k-1} et γ_{k-1} connus, calculer successivement :

$$(\mathbf{u}_k; p_k) = \arg \inf_{\mathbf{v} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)} \sup_{q \in L^2(\Omega)} L(\mathbf{v}, \gamma_{k-1}; q, \sigma_{k-1}) \quad (3.5)$$

$$\gamma_k = \arg \inf_{\delta \in L^2(\Omega)_s^{d \times d}} L(\mathbf{u}_k, \delta; p_k, \sigma_{k-1}) \quad (3.6)$$

puis descendre dans la direction opposée au gradient de J_* :

Regardons en détail les étapes (3.5) et (3.5) de l'algorithme. Le lagrangien L est dérivable par rapport à $\mathbf{u}$ et p si bien que la première étape (3.5) s'écrit encore :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_k, \gamma_{k-1}; p_k, \sigma_{k-1}) \cdot (\mathbf{v}) &= 0, \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d \\ \frac{\partial L}{\partial q}(\mathbf{u}_k, \gamma_{k-1}; p_k, \sigma_{k-1}) \cdot (q) &= 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega) \end{aligned}$$

Un petit calcul donne :

$$\begin{aligned} L(\mathbf{u}, \gamma; p, \sigma) &= \frac{K}{1+n} \int_{\Omega} |\gamma|^{1+n} dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} |\gamma|^2 dx + \sigma_0 \int_{\Omega} |\gamma| dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{u} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma : (\gamma - 2D(\mathbf{u})) dx \\ &\quad + \alpha \int_{\Omega} D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{u}) dx - \alpha \int_{\Omega} \gamma : D(\mathbf{u}) dx \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}, \gamma; p, \sigma) \cdot (\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} 2\alpha D(\mathbf{u}) : D(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} dx \\ &\quad - \int_{\Omega} (\sigma + \alpha\gamma) : 2D(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \\ \frac{\partial L}{\partial q}(\mathbf{u}, \gamma; p, \sigma) \cdot (q) &= \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} dx \end{aligned}$$

La première étape (3.5) se ramène à la résolution d'un problème de Stokes :

(P1) : trouver $(\mathbf{u}_k, p_k)$ tels que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} 2\alpha D(\mathbf{u}_k) : D(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} p_k \operatorname{div} \mathbf{v} dx &= l_{k-1}(\mathbf{v}) \\ - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}_k dx &= 0 \end{aligned}$$

ceci pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$ et $q \in L^2(\Omega)$ et où on a posé :

$$l_{k-1}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} (\sigma_{k-1} + \alpha\gamma_{k-1}) : D(\mathbf{v}) dx$$

La résolution de ce sous-problème est complètement standard : il a été traité en détails au chapitre 1.

La seconde étape (3.5) de l'algorithme correspond à la minimisation du lagrangien L par rapport à γ : cette fois-ci, L n'est pas dérivable en γ mais peut s'écrire point par point presque pour tout $x \in \Omega$ fixé :

$$\gamma_k(x) = \arg \min_{\delta \in \mathbb{R}_s^{d \times d}} j(\delta)$$

où on a posé, pour tout $\delta \in \mathbb{R}_s^{d \times d}$:

$$\begin{aligned} j(\delta) &= \frac{K}{1+n} |\delta|^{1+n} + \frac{\alpha}{2} |\delta|^2 + \sigma_0 |\delta| - \chi : \delta \\ \chi &= \sigma_{k-1}(x) - 2\alpha D(\mathbf{u}_k)(x) \end{aligned}$$

Remarquons que j est convexe et donc ce problème de minimisation dans $\mathbb{R}_s^{d \times d}$ admet une solution unique. Pour tout $\delta \in \mathbb{R}_s^{d \times d}$, le sous-différentiel $\partial j(\delta)$ est :

$$\partial j(\delta) = \begin{cases} \left\{ \tau = K|\delta|^{-1+n}\delta + \alpha\delta + \sigma_0 \frac{\delta}{|\delta|} - \chi(x) \right\} & \text{si } \delta \neq 0 \\ \{ \tau \in \mathbb{R}_s^{d \times d}, \quad |\tau| \leq \sigma_0 \} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le minimum γ de j est caractérisé par $0 \in \partial j(\gamma)$. En recherchant $\gamma \neq 0$ on obtient successivement :

$$\begin{aligned} K|\delta|^{-1+n}\delta + \alpha\delta + \sigma_0 \frac{\delta}{|\delta|} &= \chi \\ K|\delta|^n + \alpha|\delta| &= |\chi| - \sigma_0 \end{aligned}$$

Une condition nécessaire pour avoir le minimum $\gamma \neq 0$ est $|\chi| \geq \sigma_0$. Posons

$$\psi(\xi) = K\xi^n + \alpha\xi, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^+$$

Puisque ψ est strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, elle est inversible et notons ψ^{-1} sont inverse. Pour $n = 1$ on a explicitement $\psi^{-1}(\zeta) = \zeta/(K + \alpha)$. Dans le cas général $n \in \mathbb{R}^+$, on peut calculer efficacement ψ^{-1} par une méthode de Newton. Remarquons que $\psi(0) = 0$ et donc $\psi^{-1}(0) = 0$. Ainsi, si $|\chi| \geq \sigma_0$ on a :

$$|\delta| = \psi^{-1}(|\chi| - \sigma_0)$$

D'autre part, les matrices δ et χ sont proportionnelles :

$$\left(K|\delta|^{-1+n} + \alpha + \frac{\sigma_0}{|\delta|} \right) \delta = \chi$$

si bien qu'elles ont même direction, noté $\chi/|\chi|$. Finalement, le minimum de j , noté $P(\chi)$ est :

$$\gamma = P(\chi) = \psi^{-1}(\max(0, |\chi| - \sigma_0)) \frac{\chi}{|\chi|}$$

La seconde étape s'écrit :

$$\gamma_k(x) = P(\sigma_{k-1}(x) - 2\alpha D(\mathbf{u}_k)(x)), \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

Algorithme 2 (Fortin-Glowinski, forme concrète)

- $k = 0$: σ_0 et γ_0 donnés
- $k \geq 1$: σ_{k-1} et γ_{k-1} étant connus, effectuer en trois étapes :
 - 1) trouver $(\mathbf{u}_k; p_k) \in V(\mathbf{u}_\Gamma) \times L^2(\Omega)$, solution du problème de Stokes :

$$\begin{aligned} 2\alpha \int_{\Omega} D(\mathbf{u}_k) : D(\mathbf{v}) \, dx - \int_{\Omega} p_k \, \text{div } \mathbf{v} \, dx &= l_{k-1}(\mathbf{v}) \\ - \int_{\Omega} q \, \text{div } \mathbf{u}_k \, dx &= 0 \end{aligned}$$

ceci pour tout $\mathbf{v} \in W^{1,r'}(\Omega)^d$ et $q \in L^2(\Omega)$, avec :

$$l_{k-1}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} (\sigma_{k-1} + \alpha \gamma^{(k-1)}) : 2D(\mathbf{v}) \, dx$$

- 2) calculer point par point :

$$\gamma_k(x) = P(\sigma_{k-1}(x) - 2\alpha D(\mathbf{u}_k)(x)), \quad \text{p.p. } x \in \Omega$$

- 3) effectuer la descente :

$$\sigma_k = \sigma_{k-1} + \alpha (\gamma_k - 2D(\mathbf{u}_k))$$

La première étape consiste en la résolution du sous-problème de Stokes. Les deux dernières étapes du calcul sont des calculs points par points, très rapides. Le test d'arrêt s'effectue sur $\|\gamma^{(k)} - 2D(\mathbf{u}^{(k)})\|_{0,1+n,\Omega} < \varepsilon$.

3.6 Approximation en espace

Les contraintes ne peuvent pas être discrétisées n'importe comment : elle doivent l'être d'une façon qui est compatible avec la discrétisation des vitesses. De même que pour Stokes et Navier-Stokes, les vitesses devaient être discrétisées d'une façon qui était compatible avec la discrétisation des pressions. On se retrouve ici avec deux conditions de compatibilités imbriquées.

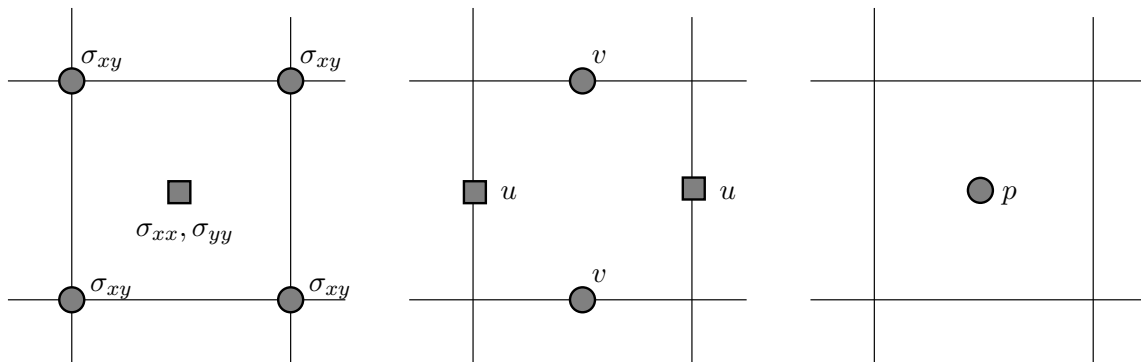


FIGURE 3.6 – Différences finies pour Stokes trois champs.

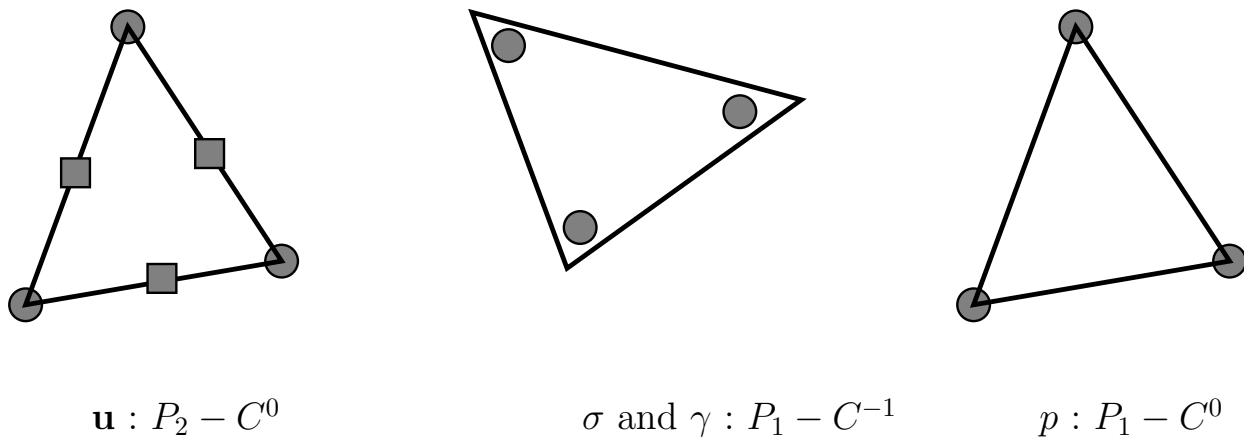


FIGURE 3.7 – Éléments finis pour Stokes trois champs.

Pour comprendre cela, on regarde ce qui se passe pour $n = 1$ et $Bi = 0$: le modèle décrit un fluide newtonien de viscosité K (voir Fig. 3.1). Le problème stationnaire se réduit à Stokes trois champs :

(FV) : trouver $\sigma \in L^2(\Omega)_s^{d \times d}$, $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{array}{rclcl} \frac{1}{2K}\sigma & - & D(\mathbf{u}) & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{div}(\sigma) & - & \nabla p & = & -\mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \\ & & \mathbf{div} \mathbf{u} & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ & & \mathbf{u} & = & \mathbf{u}_\Gamma \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

On pose :

$$\begin{aligned} m(\sigma, \tau) &= \frac{1}{2K} \int_{\Omega} \sigma : \tau \, dx \\ d(\sigma, \mathbf{u}) &= - \int_{\Omega} \sigma : D(\mathbf{u}) \, dx \\ b(\mathbf{u}, p) &= \int_{\Omega} p \, \mathbf{div} \mathbf{u} \, dx \\ l(\mathbf{v}) &= - \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, dx \end{aligned}$$

La formulation variationnelle est :

(FV) : trouver $\sigma \in L^2(\Omega)_s^{d \times d}$, $\mathbf{u} \in V(\mathbf{u}_\Gamma)$ et $p \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\begin{array}{rclcl} m(\sigma, \tau) & + & d(\tau, \mathbf{u}) & = & 0 \\ d(\sigma, \mathbf{v}) & & + & b(\mathbf{v}, p) & = & l(\mathbf{v}) \\ & & b(\mathbf{u}, q) & = & 0 \end{array}$$

ceci pour tout $\tau \in L^2(\Omega)_s^{d \times d}$, $\mathbf{v} \in V(0)$ et $q \in L^2(\Omega)$.

On connaît actuellement deux types de discrétisation possibles pour ce problème : l'une en différences finis, les grilles décalées, l'autre en éléments finis $P1d - P2 - P1$ (cf Fig. 3.7).

Chapitre 4

Fluides viscoélastiques

4.1 Principe de la loi de comportement

Lorsqu'on cherche à décrire un comportement de type élasticité linéaire, on écrit que qu'une contrainte τ correspond à la force exercé par un ressort lorsqu'il est étiré :

$$\tau = \mu(\nabla \mathbf{d} + \nabla \mathbf{d}^T)$$

où μ est le module d'élasticité et $\mathbf{d} = \nabla X$ représente les déformations du milieu décrit par $X(t, x)$: la particule qui était en x à $t = 0$ sera en $X(t, x)$ à l'instant t . Ce milieu décrit par exemple un enchevêtrement de longues molécules de type caoutchouc, tel un élastique.

La vitesse est $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{d}}$, c'est-à-dire la dérivée par rapport à t des déformations $\mathbf{d}$. En dérivant la relation précédente par rapport à t , on obtient :

$$\dot{\tau} = 2\mu D(\mathbf{u})$$

Ici $\dot{\tau}$ correspond à la dérivée lagrangienne de τ , soit dans un repère eulérien, non lié au matériau :

$$\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau \quad (4.1)$$

Lorsque les longues molécules peuvent se réarranger en glissant les unes par rapport aux autres, la contrainte s'amortit. Ainsi, en tirant lentement sur un chewim-gum, on obtient une relaxation des contraintes et le matériau ne reprend pas sa forme initiale. Ceci s'écrit en ajoutant un terme d'amortissement visqueux :

$$\dot{\tau} + \frac{\tau}{\eta} = 2\mu D(\mathbf{u})$$

où $\eta_m > 0$ est la viscosité. Posons $\lambda = \eta/\mu$: cette quantité a l'échelle d'un temps, c'est le temps de relaxation du milieu. En multipliant l'équation précédente par λ , il vient :

$$\lambda \dot{\tau} + \tau = 2\eta_m D(\mathbf{u})$$

En prenant $\sigma_{\text{tot}} = -p.I + \tau$ comme tenseur des contraintes totales de Cauchy, on obtient l'équation constitutive viscoélastique de Maxwell. C'est le modèle viscoélastique le plus simple possible. En prenant $\sigma_{\text{tot}} = -p.I + 2\eta_s D(\mathbf{u}) + \tau$ comme tenseur des contraintes, on obtient l'équation constitutive viscoélastique d'Oldroyd [Old50].

4.2 Invariance par changement de repère

Oldroyd [Old50] a regardé en détails comment exprimer la dérivée $\dot{\tau}$. Il a fait remarquer que le matériau était le même, indépendamment de la personne qui l'observe. Il devait en être de même de l'équation constitutive : les calculs et les quantités devront être les mêmes indépendamment du mouvement du repère utilisé. En particulier il a montré que prendre pour $\dot{\tau}$ la dérivée lagrangienne $\partial_t \tau + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau$ ne permettait pas d'écrire des équations indépendantes du repère, et il a proposé une méthode pour remédier à cela.

Considérons deux observateurs, l'un à la position $x(t)$ et l'autre animé d'un mouvement de rotation-translation par rapport à l'autre :

$$\hat{x}(t) = R(t) x(t) + T(t), \quad \forall t > 0$$

La vitesse pour le premier observateur est donnée par $\mathbf{u} = \dot{x}$ et pour le second par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \dot{\hat{x}} \\ &= \dot{R}x + R\mathbf{u} + \dot{T} \end{aligned}$$

Le gradient des vitesses pour le premier observateur est $\nabla \mathbf{u}$ et pour le second :

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} &= \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial \hat{x}_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d} \\ &= \left(\sum_{k=1}^d \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_i}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial \hat{x}_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d} \end{aligned}$$

Remarquons que la rotation s'écrit :

$$R = \left(\frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}$$

et son inverse :

$$R^{-1} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \hat{x}_j} \right)_{1 \leq i, j \leq d}$$

De plus, par propriété du mouvement de rotation, $R^{-1} = R^T$. En effet, par exemple pour $d = 3$, avec un vecteur rotation $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ on a :

$$\begin{aligned} Rx &= \mathbf{w} \wedge x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme R^{-1} est associé au vecteur rotation $-\mathbf{w}$ et que R est antisymétrique, on a bien $R^{-1} = R^T$. La démonstration est similaire pour $d = 2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} &= \nabla \hat{\mathbf{u}} R^T \\ &= \nabla (\dot{R}x + R\dot{x} + T) R^T \\ &= (\dot{R} + R\nabla \dot{x}) R^T \\ &= R \nabla \mathbf{u} R^T + \dot{R} R^T \end{aligned}$$

La tenseur des taux de déformation pour le premier observateur est $2D(\mathbf{u})$ et pour le second :

$$\begin{aligned} 2\hat{D}(\hat{\mathbf{u}}) &= \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} + \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^T \\ &= R \nabla \mathbf{u} R^T + \dot{R} R^T + R \nabla \mathbf{u}^T R^T + R \dot{R}^T \end{aligned}$$

De $R^{-1} = R^T$ il vient $RR^T = I$ et en dérivant par rapport au temps $\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = 0$ si bien que :

$$2\hat{D}(\hat{\mathbf{u}}) = R 2D(\mathbf{u}) R^T$$

De même, le tenseur symétrique des contraintes τ pour le premier observateur correspondra, pour le second à

$$\hat{\tau} = R \tau R^T$$

En dérivant par rapport à t :

$$\dot{\hat{\tau}} = \dot{R} \tau R^T + R \dot{\tau} R^T + R \tau \dot{R}^T$$

Finalement, à l'équation constitutive $\lambda \dot{\tau} + \tau - 2\eta_m D(\mathbf{u}) = 0$ du premier observateur correspondra l'équation :

$$\begin{aligned} \lambda \dot{\hat{\tau}} + \hat{\tau} - 2\eta_m \hat{D}(\hat{\mathbf{u}}) &= R (\lambda \dot{\tau} + \tau - 2\eta_m D(\mathbf{u})) R^T + \lambda (\dot{R} \tau R^T + R \tau \dot{R}^T) \\ &= \lambda (\dot{R} \tau R^T + R \tau \dot{R}^T) \\ &\neq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Le terme résiduel, issu des rotations du repère, n'est pas nul en général : le modèle n'est pas invariant par changement de repère. L'idée d'Oldroyd est d'incorporer ces termes dans une nouvelle définition de la dérivée en temps des tenseurs afin de pouvoir écrire des modèles invariants par changement de repère.

4.3 Dérivation objective d'un tenseur

Pour cela, observons comment se transforme le tenseur de taux de rotation du matériau $2W(\mathbf{u}) = \nabla \mathbf{u} - \nabla \mathbf{u}^T$. On a :

$$\begin{aligned} 2\hat{W}(\hat{\mathbf{u}}) &= \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} - \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}}^T \\ &= R \nabla \mathbf{u} R^T + \dot{R} R^T - R \nabla \mathbf{u}^T R^T - R \dot{R}^T \\ &= R 2W(\mathbf{u}) R^T + 2\dot{R} R^T \end{aligned}$$

L'effet de la rotation du matériau $W(\mathbf{u})$ sur le tenseur symétrique des contraintes τ s'évalue par :

$$\tau W(\mathbf{u}) + (\tau W(\mathbf{u}))^T = \tau W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u}) \tau$$

Ce terme est vu par le second observateur comme :

$$\begin{aligned} \hat{\tau} \hat{W}(\hat{\mathbf{u}}) - \hat{W}(\hat{\mathbf{u}}) \hat{\tau} &= (R \tau R^T)(R W(\mathbf{u}) R^T + \dot{R} R^T) \\ &\quad - (R W(\mathbf{u}) R^T + \dot{R} R^T)(R \tau R^T) \\ &= R (\tau W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u}) \tau) R^T + R \tau R^T \dot{R} R^T - \dot{R} \tau R^T \end{aligned}$$

On a vu précédemment que $\dot{R} R^T = -R \dot{R}^T$, et donc :

$$\hat{\tau} \hat{W}(\hat{\mathbf{u}}) - \hat{W}(\hat{\mathbf{u}}) \hat{\tau} = R (\tau W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u}) \tau) R^T - R \tau \dot{R}^T - \dot{R} \tau R^T$$

Remarquons que les deux termes supplémentaires sont exactement, au signe près, ceux qui apparaissent en transformant l'équation constitutive (4.2). On introduit une nouvelle définition de la dérivée d'un tenseur :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{D}\tau}{\mathcal{D}t} &= \dot{\tau} + \tau W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u}) \tau \\ &= \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau + \tau W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u}) \tau \end{aligned}$$

Cette dérivée est aussi appelée la dérivée de Lie en mathématiques ou encore dérivée de Jaumann en mécanique. En observant que le tenseur symétrique $\tau D(\mathbf{u}) + (\tau D(\mathbf{u}))^T = \tau D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u}) \tau$ se transforme de façon invariante en $R (\tau D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u}) \tau) R^T$ on peut définir, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la dérivée objective suivante :

$$\frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau + \tau W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u}) \tau - a (\tau D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u}) \tau) \quad (4.3)$$

Pour $a = 0$ on retrouve la dérivée de Jaumann, pour $a = 1$ c'est la dérivée convectée supérieure et pour $a = -1$ c'est la dérivée convectée inférieure. Pour $a \in [-1, 1]$ on parle de la dérivée de Gordon-Schowalters.

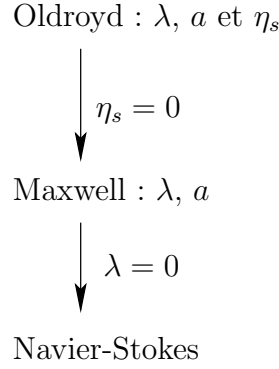


FIGURE 4.1 – Fluides viscoélastiques : une hiérarchie de modèles.

4.4 Le modèle d'Oldroyd

Le tenseur des contraintes totales de Cauchy est $\sigma_{\text{tot}} = -p.I + 2\eta_s D(\mathbf{u}) + \tau$ et τ vérifie l'équation du premier ordre :

$$\lambda \frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} + \tau = 2\eta_m D(\mathbf{u}) \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega$$

où $\lambda \geq 0$ est le temps de relaxation et $\eta_s \geq 0$, $\eta_m > 0$ sont des viscosités. Pour $\lambda = 0$ on retrouve un fluide newtonien de viscosité $\eta = \eta_s + \eta_m$. Pour $\eta_s = 0$ ce modèle s'appelle le modèle de Maxwell. En complétant avec les conservations de la masse et de la quantité de mouvement, on obtient le problème suivant :

(P) : trouver τ , $\mathbf{u}$ et p , définis dans $]0, T[\times \Omega$ tels que

$$\begin{aligned}
\lambda \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \tau + \beta_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) \right) + \tau - 2\eta_m D(\mathbf{u}) &= 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega \\
\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \text{div}(\tau) - \text{div}(2\eta_s D(\mathbf{u})) + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega \\
\text{div } \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega \\
\tau &= \tau_\Gamma \quad \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega_- \\
\mathbf{u} &= \mathbf{u}_\Gamma \quad \text{sur }]0, T[\times \partial\Omega \\
\tau(t=0) &= \tau_0 \quad \text{dans } \Omega \\
\mathbf{u}(t=0) &= \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega
\end{aligned}$$

où $\mathbf{f}$ sont les forces extérieures (gravité, etc) données, et les conditions aux bords et initiales τ_Γ , $\mathbf{u}_\Gamma$ et τ_0 , $\mathbf{u}_0$ sont également connues. On a noté $\partial\Omega_-$ l'amont, c'est-à-dire la portion de frontière présentant un flux entrant :

$$\partial\Omega_-(t) = \{x \in \partial\Omega; \mathbf{u}_\Gamma(t, x) \cdot \mathbf{n}(x) < 0\}$$

Par commodité on regroupe les termes issus de la dérivée objective dans

$$\beta_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) = \tau W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u}) \tau - a(\tau D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u}) \tau) \quad (4.4)$$

4.5 Exemple : écoulement de Poiseuille

On reprend l'exemple d'un écoulement entre deux plaques parallèles introduits à la section 2.3 page 27 et poursuivi à la section 3.4 page 41.

Lorsque l'écoulement est établi, la vitesse est de la forme $\mathbf{u}(x) = (0, 0, u(x))$ et le gradient des vitesses est donné par

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ u' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le tenseur des contraintes élastiques a la forme :

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_{xx} & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \tau_{zz} \end{pmatrix}$$

En effet, en plus de la contrainte élastique de cisaillement τ_{xz} , le fluide peut développer des contraintes élastiques normales τ_{xx} et τ_{zz} . Un petit calcul conduit à :

$$\beta_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) = \begin{pmatrix} (1-a)u'\tau_{xz} & 0 & -\frac{1+a}{2}u'\tau_{xx} + \frac{1-a}{2}u'\tau_{zz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1+a}{2}u'\tau_{xx} + \frac{1-a}{2}u'\tau_{zz} & 0 & -(1+a)u'\tau_{xz} \end{pmatrix}$$

Le problème se réduit ` :

(P) : trouver $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}$ et u , définis dans $] -L, L[$ tels que

$$\begin{aligned} \lambda(1-a)u'\tau_{xz} + \tau_{xx} &= 0 \\ -\lambda(1+a)u'\tau_{xz} + \tau_{zz} &= 0 \\ -\frac{\lambda(1+a)}{2}u'\tau_{xx} + \frac{\lambda(1-a)}{2}u'\tau_{zz} + \tau_{xz} - \eta_m u' &= 0 \\ -\tau'_{xz} - \eta_s u'' &= f \\ u(-L) = u(L) &= 0 \end{aligned}$$

Pour renormaliser le problème, on pose $\tilde{x} = x/L$. De même, on va remplacer l'inconnue $u(x)$ par $\tilde{u}(\tilde{x}) = u(L\tilde{x})/U$, avec $U > 0$ qu'on va préciser. Les contraintes sont renormalisées par $\tilde{\tau}_{ij} = \Sigma \tau_{ij}$ avec $\Sigma = (\eta_s + \eta_m)U/L$. Le problème devient :

($\tilde{P}$) : trouver $\tilde{\tau}_{xx}, \tilde{\tau}_{zz}, \tilde{\tau}_{xz}$ et $\tilde{u}$, définis dans $] -1, 1[$ tels que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda U}{L}(1-a)\tilde{u}'\tilde{\tau}_{xz} + \tilde{\tau}_{xx} &= 0 \\ -\frac{\lambda U}{L}(1+a)\tilde{u}'\tilde{\tau}_{xz} + \tilde{\tau}_{zz} &= 0 \\ -\frac{\lambda U}{L}\left(\frac{1+a}{2}\tilde{u}'\tilde{\tau}_{xx} + \frac{1-a}{2}\tilde{u}'\tilde{\tau}_{zz}\right) + \tilde{\tau}_{xz} - \frac{\eta_m}{\eta_s + \eta_m}\tilde{u}' &= 0 \\ -\tilde{\tau}'_{xz} - \frac{\eta_s}{\eta_s + \eta_m}\tilde{u}'' &= \frac{fL^2}{(\eta_s + \eta_m)U} \\ \tilde{u}(-1) = \tilde{u}(1) &= 0 \end{aligned}$$

Choisissons, sans perte de généralité $U = fL^2/((\eta_s + \eta_m)U)$ et posons $We = \lambda U/L$ et $\alpha = \eta_m/(\eta_s + \eta_m)$. Comme nous allons travailler avec ce problème renormalisé, et qu'il n'y a plus d'ambiguïté, nous pouvons omettre les tildes :

(P) : trouver $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}$ et u , définis dans $] -1, 1[$ tels que

$$We(1-a)u'\tau_{xz} + \tau_{xx} = 0 \quad (4.5)$$

$$-We(1+a)u'\tau_{xz} + \tau_{zz} = 0 \quad (4.6)$$

$$\frac{We}{2}(-(1+a)u'\tau_{xx} + (1-a)u'\tau_{zz}) + \tau_{xz} - \alpha u' = 0 \quad (4.7)$$

$$-\tau'_{xz} - (1-\alpha)u'' = 1 \quad (4.8)$$

$$u(-1) = u(1) = 0 \quad (4.9)$$

Le problème contient trois paramètres : $We \geq 0$ appelé nombre de Weissenberg, et correspondant à l'effet mémoire du fluide, $\alpha \in]0, 1]$ correspondant à un effet de retard, et $a \in \mathbb{R}$ le paramètre de la dérivée des tenseurs. De (4.5) et (4.6) il vient :

$$\tau_{xx} = -We(1-a)u'\tau_{xz} \text{ et } \tau_{zz} = We(1+a)u'\tau_{xz} \quad (4.10)$$

et (4.7) conduit à :

$$(1 + (1-a^2)We^2(u')^2)\tau_{xz} = \alpha u'$$

Le paramètre de dérivation de tenseur sera définitivement réduit à $a \in [-1, 1]$. Posons par commodité $k^2 = (1-a^2)We^2$. Ainsi

$$\tau_{xz} = \frac{\alpha u'}{1 + k^2(u')^2} \quad (4.11)$$

et (4.8), une fois intégrée, conduit à une équation en u' :

$$\frac{\alpha u'}{(1 + k^2(u')^2)} + (1-\alpha)u' + x = 0$$

La constante d'intégration est nulle du fait de la symétrie en x de la solution. L'équation précédente s'écrit encore :

$$(1 - \alpha)k^2(u')^3 + k^2x(u')^2 + u' + x = 0$$

Il s'agit d'une équation du troisième degré en u' .

Pour $a = \pm 1$ on a $k^2 = 0$ et cette équation se réduit à $u' = x$ ce qui permet d'obtenir la solution :

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1 - x^2}{2} \\ \tau_{xz}(x) &= -\alpha x \\ \tau_{xx}(x) &= -We(1 - a)\alpha x^2 \\ \tau_{zz}(x) &= We(1 + a)\alpha x^2 \end{aligned}$$

Pour $a \in]-1, 1[$ on a $k > 0$: opérons le changement de variable $\delta = -ku'$ et $\zeta = kx$. L'équation du troisième degré prend la forme plus concise :

$$(1 - \alpha)\delta^3 - \zeta\delta^2 + \delta - \zeta = 0$$

Pour $\alpha = 1$ (modèle de Maxwell) l'équation se réduit au second degré :

$$\zeta\delta^2 - \delta + \zeta = 0$$

Le discriminant est $\Delta = 1 - 4\zeta^2$. Ce déterminant n'est positif que si $We\sqrt{1 - a^2}x < 1/2$, $\forall x \in [-1, 1]$ ce qui donne une condition d'existence de la solution : $We\sqrt{1 - a^2} < 1/2$. Dans ce cas, remarquons que la plus grande des deux racines est non-bornée quand $x = 0$ tandis que la plus petite des deux s'annule en $x = 0$, ce qui est requis pour des raisons de symétrie de la solution.

En prenant la plus petite des deux racines :

$$u'(x) = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4k^2x^2}}{2k^2x}, \quad \forall x \in [-1, 1]$$

d'où finalement la solution pour $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2k^2} \left(\sqrt{1 - 4k^2x^2} - \sqrt{1 - 4k^2} + \log \left(\frac{1 + \sqrt{1 - 4k^2}}{1 + \sqrt{1 - 4k^2x^2}} \right) \right) \\ \tau_{xz}(x) &= x \\ \tau_{xx}(x) &= -We(1 - a)x^2 \\ \tau_{zz}(x) &= We(1 + a)x^2 \end{aligned}$$

ceci $\forall x \in [-1, 1]$. La solution est représentée sur la Fig. 4.2 pour le cas limite $k = \sqrt{1 - a^2}We = 1/2$. il n'existe plus de solution pour $k > \sqrt{1 - a^2}We = 1/2$, c'est-à-dire pour $|a| < 1$ et We assez grand.

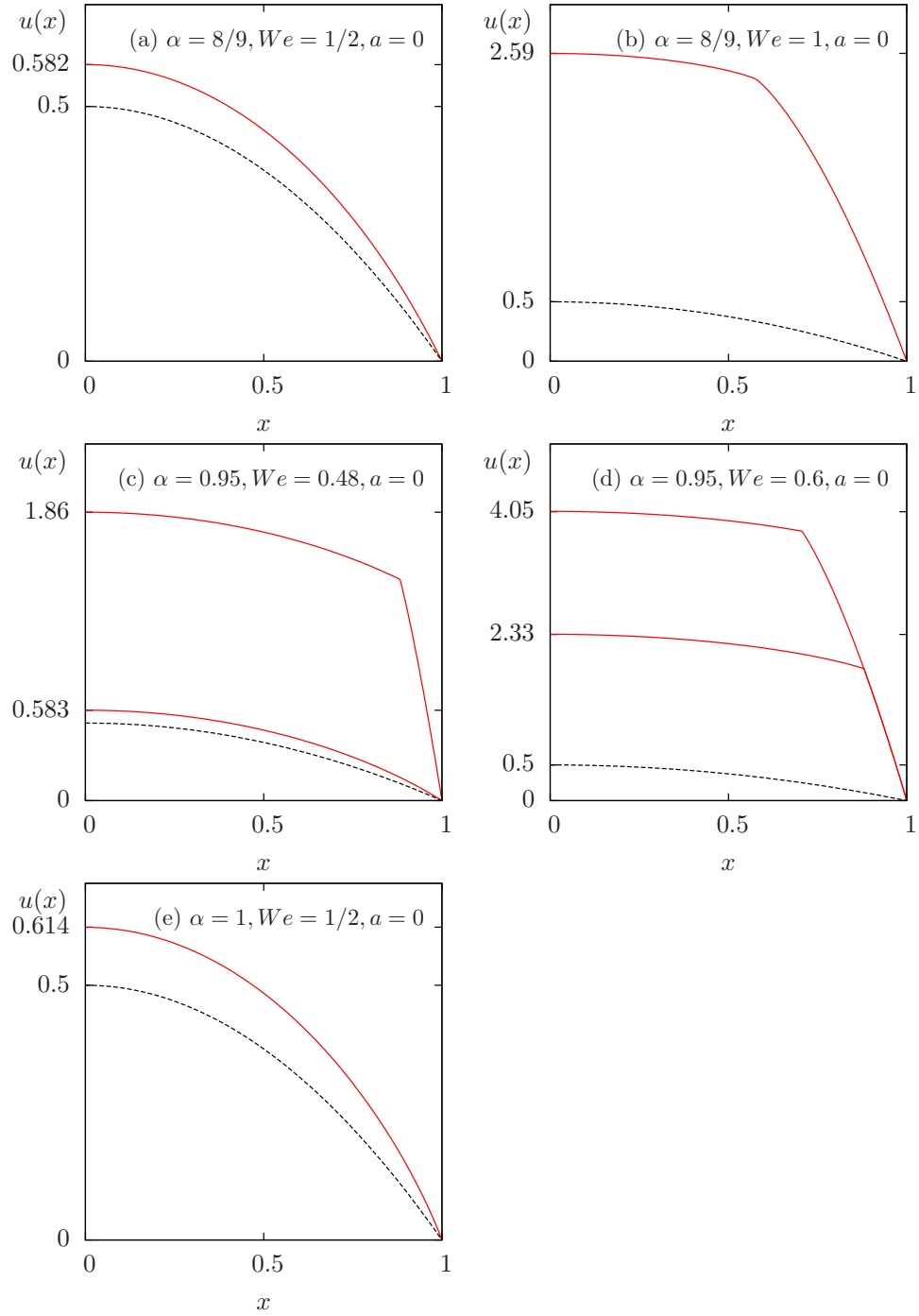


FIGURE 4.2 – Fluides viscoélastiques : écoulement de Poiseuille avec $a = 0$: (a,b) $\alpha = 8/9$ et (a) $We = 1/2$, (b) $We = 1$; (c,d) $\alpha = 0.95$ et (c) $We = 0.48$, (d) $We = 1$; (e) $\alpha = 1$ et $We = 1/2$. En pointillé, la solution newtonienne $u(x) = (1 - x^2)/2$.

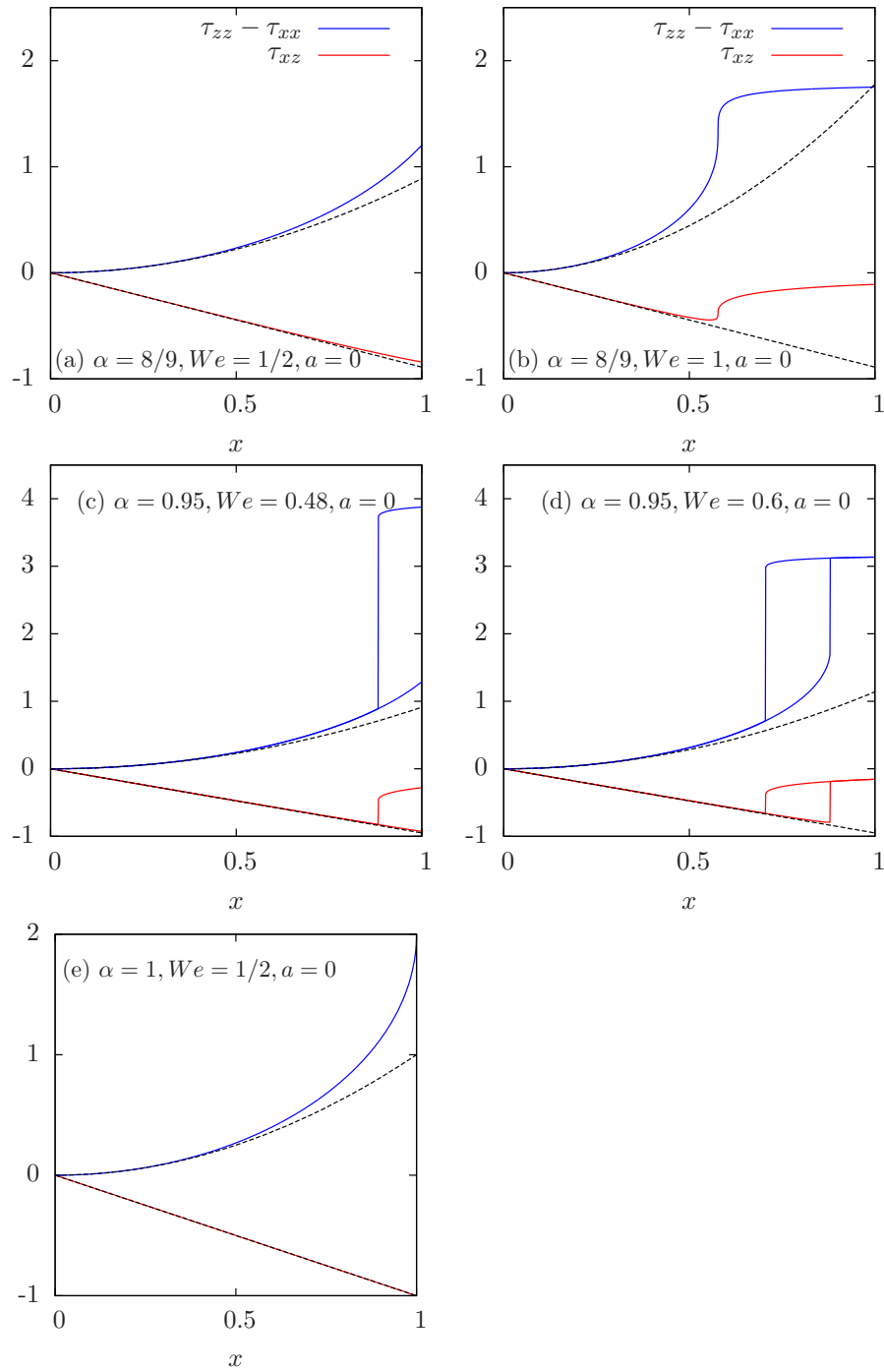


FIGURE 4.3 – Fluides viscoélastiques : écoulement de Poiseuille avec $a = 0$: contraintes (a,b) $\alpha = 8/9$ et (a) $We = 1/2$, (b) $We = 1$; (c,d) $\alpha = 0.95$ et (c) $We = 0.48$, (d) $We = 1$; (e) $\alpha = 1$ et $We = 1/2$. En pointillé, la solution pour $|a| = 1$.

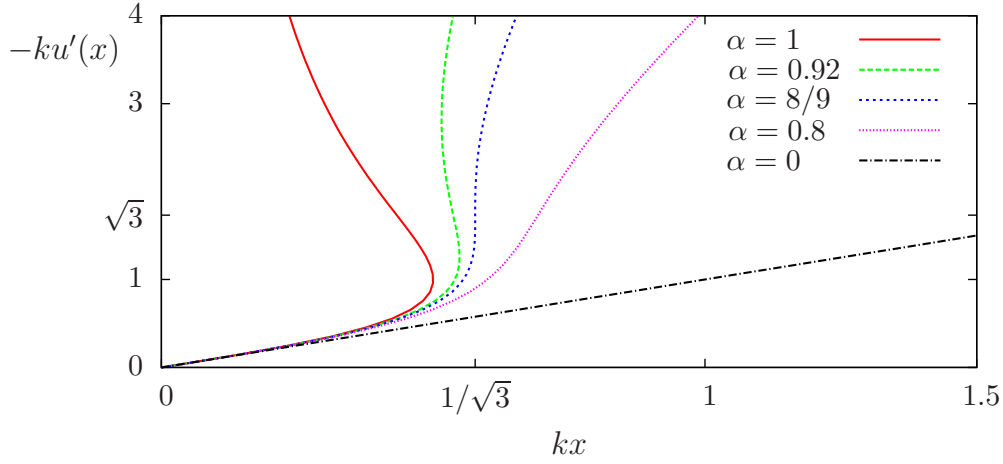


FIGURE 4.4 – Fluides viscoélastiques : courbe caractéristique $\delta = -ku'(x)$ en fonction de $\zeta = kx$ avec $k = \sqrt{1 - a^2 We}$.

Pour $\alpha < 1$ l'équation caractéristique (4.12) est strictement du troisième degré. Remarquons que nous pouvons exprimer $\zeta = kx$ en fonction de $\delta = ku'$:

$$\zeta = \frac{(1 + (1 - \alpha)\delta^2) \delta}{1 + \delta^2}$$

ce qui permet d'en réaliser facilement le graphique (voir Fig. 4.4). Les points de rebroussement correspondent à $d\zeta/d\delta = 0$ soit encore à l'équation bicarrée :

$$(1 - \alpha)\delta^4 + (2 - 3\alpha)\delta^2 + 1 = 0$$

dont le discriminant est $(9\alpha - 8)/\alpha$. Pour $\alpha < 8/9$, il n'y a pas de points de rebroussement et ainsi δ est unique pour chaque valeur de ζ : il y a existence et unicité de la solution. Pour $1 > \alpha > 8/9$, il y a deux points de rebroussement : il y a alors multiplicité de la solution. Pour $\alpha = 8/9$, les deux points de rebroussement sont confondus en un point $(\zeta_0, \delta_0) = (1/\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (voir Fig. 4.4).

Posons $\delta = \phi + \zeta/(3(1 - \alpha))$: l'équation prend la forme canonique :

$$\phi^3 + p\phi + q = 0$$

avec

$$\begin{aligned} p &= \frac{3(1 - \alpha) - \zeta^2}{3(1 - \alpha)^2} \\ q &= \frac{\zeta(9(1 - \alpha)(3\alpha - 2) - 2\zeta^2)}{27(1 - \alpha)^3} \end{aligned}$$

Par la méthode de cardan, on obtient le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= q^2 + \frac{4}{27}p^3 \\ &= \frac{4\zeta^4 + (27\alpha^2 - 36\alpha + 8)\zeta^2 + 4(1 - \alpha)}{27(1 - \alpha)^4}\end{aligned}$$

Le signe du discriminant est porté par le numérateur qui est un polynôme équation bicarrée, dont le discriminant est $\alpha(9\alpha - 8)^3$.

- Si $\alpha \in]0, 8/9[$, alors Δ est toujours positif et l'équation du troisième degré a exactement une solution réelle :

$$\phi_{0,1,2} = \left(\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

- Si $\alpha = 8/9$, alors $\Delta = 0$ et l'équation admet deux solutions

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \frac{3q}{p} \\ \phi_{1,2} &= -\frac{3q}{2p}\end{aligned}$$

- Si $\alpha \in]8/9, 1[$, alors $\Delta < 0$ et l'équation trois solutions

$$\phi_k = 2\sqrt{\frac{-p}{3}} \cos \left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{q}{2}\sqrt{\frac{-27}{p^3}} \right) \right), k = 0, 1, 2$$

Pour chaque $x \in [0, 1]$ il peut exister trois solutions, si bien qu'on est conduit à un continuum de solutions $u'(x)$. On construit les solutions minimales et maximales associées à $\phi_{\min} = \min_{k=0,1,2} \phi_k$ et $\phi_{\max} = \max_{k=0,1,2} \phi_k$.

On obtient par les formules de Cardan une expression explicite de $u'(x)$ et des contraintes $\tau(x)$ mais il n'existe pas de primitive usuelle de u' : le calcul de $u(x)$ se fait par intégration numérique :

$$u(x) = - \int_x^1 u'(y) dy \approx - \sum_{i=0}^N u'(y_i) \Delta y$$

avec $y_i = x + (i + \frac{1}{2})\Delta y$, $\Delta y = (1 - x)/N$ et $N = 1000$.

4.6 Algorithme du θ -schéma

Cet algorithme a été introduit pour la première fois dans [Sar90, Sar94]. On néglige le terme d'inertie $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$ dans le problème : le fluide est supposé lent. On pose

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \tau \\ \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} \tau_0 \\ \mathbf{u}_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M = \text{diag} \left(\frac{\lambda}{2\eta_m}, -\rho, 0 \right)$$

et

$$A(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2\eta_m} (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau + \beta_a (\nabla \mathbf{u}, \tau)) + \frac{\tau}{2\eta_m} & -D(\mathbf{u}) \\ \mathbf{div}(\tau) & +\mathbf{div}(2\eta_s D(\mathbf{u})) \\ & \mathbf{div} \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad -\nabla p$$

Le problème peut se mettre sous la forme :

(P) : trouver $\mathcal{U}$ tel que

$$\begin{aligned} M \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + A(\mathcal{U}) &= \mathcal{F} \\ M \mathcal{U}(t=0) &= M \mathcal{U}_0 \end{aligned}$$

Le schéma de discrétisation en temps s'appuie sur une décomposition de l'opérateur $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$ avec

$$A_1(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\tau}{2\eta_m} & -D(\mathbf{u}) \\ \mathbf{div}(\tau) & +\mathbf{div}(2\eta_s D(\mathbf{u})) \\ & \mathbf{div} \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad -\nabla p$$

$$A_2(\mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2\eta_m} (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau + \beta_a (\nabla \mathbf{u}, \tau)) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et le θ -schéma suivant :

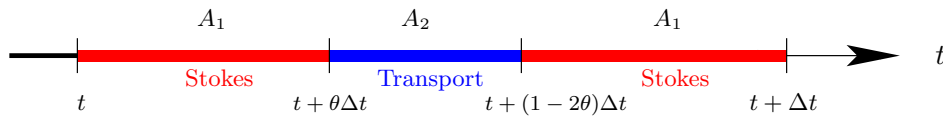


FIGURE 4.5 – Fluides viscoélastiques : le θ -schéma.

(P)_k : au pas de temps $k \geq 0$, $\mathcal{U}_k$ étant connu, calculer successivement $\mathcal{U}_{k+\theta}$, $\mathcal{U}_{k+1-\theta}$ et $\mathcal{U}_{k+1}$ suivant :

$$\begin{aligned} M \frac{\mathcal{U}_{k+\theta} - \mathcal{U}_k}{\theta \Delta t} + A_1(\mathcal{U}_{k+\theta}) + A_2(\mathcal{U}_k) &= \mathcal{F} \\ M \frac{\mathcal{U}_{k+1-\theta} - \mathcal{U}_{k+\theta}}{(1-2\theta)\Delta t} + A_1(\mathcal{U}_{k+\theta}) + A_2(\mathcal{U}_{k+1-\theta}) &= \mathcal{F} \\ M \frac{\mathcal{U}_{k+1} - \mathcal{U}_{k+1-\theta}}{\theta \Delta t} + A_1(\mathcal{U}_{k+1}) + A_2(\mathcal{U}_{k+1-\theta}) &= \mathcal{F} \end{aligned}$$

avec $\Delta t > 0$ et $\theta \in]0, 1/2[$.

Étape 1

Connaissant τ_k et $\mathbf{u}_k$, trouver $\tau_{k+\theta}$, $\mathbf{u}_{k+\theta}$ et $p_{k+\theta}$ tels que

$$\frac{\lambda}{2\eta_m} \left(\frac{\tau_{k+\theta} - \tau_k}{\theta \Delta t} \right) + \frac{\tau_{k+\theta}}{2\eta_m} - D(\mathbf{u}_{k+\theta}) = -\frac{\lambda}{2\eta_m} (\mathbf{u}_k \cdot \nabla \tau_k + \beta_a(\nabla \mathbf{u}_k, \tau_k)) \quad (4.12)$$

$$-\rho \left(\frac{\mathbf{u}_{k+\theta} - \mathbf{u}_k}{\theta \Delta t} \right) + \mathbf{div}(\tau_{k+\theta}) + \mathbf{div}(2\eta_s D(\mathbf{u}_{k+\theta})) - \nabla p_{k+\theta} = -\mathbf{f} \text{ dans } \Omega \quad (4.13)$$

$$\mathbf{div} \mathbf{u}_{k+\theta} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (4.14)$$

$$\mathbf{u}_{k+\theta} = \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.15)$$

Posons $\gamma_k = \mathbf{u}_k \cdot \nabla \tau_k + \beta_a(\nabla \mathbf{u}_k, \tau_k)$. De (4.12) il vient une xpression explicite de $\tau_{k+\theta}$ en fonction de l'inconnue $\mathbf{u}_{k+\theta}$ et de grandeurs connues :

$$\tau_{k+\theta} = \frac{1}{\lambda + \theta \Delta t} (\lambda \tau_k + 2\eta_m \theta \Delta t D(\mathbf{u}_{k+\theta}) - \lambda \theta \Delta t \gamma_k)$$

En reportant dans (4.13) et en rajoutant (4.14) et (4.15) on obtient :

(P1) : trouver $\mathbf{u}_k$ et p_k tels que

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\theta \Delta t} \mathbf{u}_{k+\theta} - \mathbf{div}(2\eta_* D(\mathbf{u}_{k+\theta})) + \nabla p_k &= \mathbf{f}_k \text{ dans } \Omega \\ -\mathbf{div} \mathbf{u}_{k+\theta} &= 0 \text{ dans } \Omega \\ \mathbf{u}_{k+\theta} &= \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k &= \mathbf{f} + \frac{\rho}{\theta \Delta t} \mathbf{u}_k + \frac{1}{\lambda + \theta \Delta t} \mathbf{div}(\lambda \tau_k - \lambda \theta \Delta t \gamma_k) \\ \eta_* &= \eta_s + \left(\frac{\theta \Delta t}{\lambda + \theta \Delta t} \right) \eta_m \end{aligned}$$

L'étape 1 se ramène donc à la résolution d'un sous-problème linéaire de type Stokes suivit du calcul explicite de $\tau_{k+\theta}$.

Étape 2

Posons $\theta' = 1 - 2\theta$. Connaissant $\tau_{k+\theta}$ et $\mathbf{u}_{k+\theta}$, trouver $\tau_{k+1-\theta}$ et $\mathbf{u}_{k+1-\theta}$ tels que

$$\frac{\lambda}{2\eta_m} \left(\frac{\tau_{k+1-\theta} - \tau_{k+\theta}}{\theta' \Delta t} + \mathbf{u}_{k+1-\theta} \cdot \nabla \tau_{k+1-\theta} + \beta_a(\nabla \mathbf{u}_{k+1-\theta}, \tau_{k+1-\theta}) \right) = -\frac{\tau_{k+\theta}}{2\eta_m} + D(\mathbf{u}_{k+\theta}) \quad (4.16)$$

$$-\rho \left(\frac{\mathbf{u}_{k+1-\theta} - \mathbf{u}_{k+\theta}}{\theta' \Delta t} \right) = -\mathbf{f} - \mathbf{div}(\tau_{k+\theta}) - \mathbf{div}(2\eta_s D(\mathbf{u}_{k+\theta})) + \nabla p_{k+\theta} \text{ dans } \Omega \quad (4.17)$$

$$\tau_{k+1-\theta} = \tau_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.18)$$

En soustrayant (4.13) à (4.17) et en divisant par ρ , il vient :

$$\frac{\mathbf{u}_{k+1-\theta} - \mathbf{u}_{k+\theta}}{\theta' \Delta t} = \frac{\mathbf{u}_{k+\theta} - \mathbf{u}_k}{\theta \Delta t}$$

soit encore, l'expression explicite de $\mathbf{u}_{k+1-\theta}$ en fonction de grandeurs connues :

$$\mathbf{u}_{k+1-\theta} = \frac{1-\theta}{\theta} \mathbf{u}_{k+\theta} - \frac{1-2\theta}{\theta} \mathbf{u}_k$$

Posons

$$\chi_{k+\theta} = \frac{1}{\theta' \Delta t} \tau_{k+\theta} + \frac{2\eta_m}{\lambda} \left(-\frac{\tau_{k+\theta}}{2\eta_m} + D(\mathbf{u}_{k+\theta}) \right)$$

L'étape 2 se réduit à

(P2) : trouver $\tau_{k+1-\theta}$ tel que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1-\theta} \cdot \nabla \tau_{k+1-\theta} + \beta_a(\nabla \mathbf{u}_{k+1-\theta}, \tau_{k+1-\theta}) + \frac{1}{\theta' \Delta t} \tau_{k+1-\theta} &= \chi_{k+\theta} \text{ dans } \Omega \\ \tau_{k+1-\theta} &= \tau_\Gamma \text{ sur } \partial\Omega_- \end{aligned}$$

Il s'agit d'un système hyperbolique linéaire, faisant apparaître le terme de transport $\mathbf{u} \cdot \nabla$.

Étape 3

Cette étape de symétrisation est identique à l'étape 1, à un décalage d'indice près. Elle permet d'obtenir un schéma d'ordre 2 en temps à condition de prendre $\theta = 1 - 1/\sqrt{2}$ (voir [Sar97]). L'algorithme conduit à une succession de sous-problèmes linéaires de type Stokes, qui sont complètement standard, et de type transport, dont l'étude fait l'objet d'un prochain paragraphesuivant.

4.7 Approximation en espace

L'approximation en espace des inconnues $(\tau, \mathbf{u}, p)$ est similaire à celle du problème viscoplastique, introduite à la section 3.6 page 48. Le problème peut être discrétisé par différences finies ou bien par éléments finis (voir Fig. 3.6 et 3.7). L'approximation par éléments finis a été introduite dans [FF89]. L'approximation par différences finies s'interprète comme une méthode d'éléments finis mixtes [Sar90, Sar94].

4.8 Système hyperbolique de transport des contraintes

On va se concentrer sur le sous-problème de transport, et comme il n'y aura plus d'ambiguïté, on omet l'indice $k + 1 - \theta$. On pose $\nu = 1/(\theta' \Delta t)$ et on introduit les opérateurs :

$$\begin{aligned} A(\tau) &= \mathbf{u} \cdot \nabla \tau + \beta_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) + \nu \tau, \quad \forall \tau \in L^2(\Omega)_s^{d \times d} \\ B &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ M &= |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}| \end{aligned}$$

Le problème s'écrit :

(T) : trouver τ tel que

$$A\tau = \chi \text{ dans } \Omega \quad (4.19)$$

$$(M - B)(\tau - \tau_\Gamma) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad (4.20)$$

D'une part, par intégration par partie :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla \tau) : \gamma \, dx = - \int_{\Omega} \tau : (\mathbf{u} \cdot \nabla \gamma) \, dx - \int_{\Omega} (\tau : \gamma) \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx + \int_{\partial\Omega} (\tau : \gamma) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

D'autre part, de la définition de β_a à l'équation (4.4), page 56 :

$$\int_{\Omega} \beta_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) : \gamma \, dx = - \int_{\Omega} \tau : \beta_{-a}(\nabla \mathbf{u}, \gamma) \, dx$$

En effet, τ et γ étant symétriques et $W(\mathbf{u})$ anti-symétrique :

$$\begin{aligned} (\tau W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\tau) : \gamma &= \sum_{i,j,k=1}^d \tau_{ik} W_{kj}(\mathbf{u}) \gamma_{ij} - \sum_{i,j,k=1}^d W_{ik}(\mathbf{u}) \tau_{kj} \gamma_{ij} \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^d \tau_{ik} \gamma_{ij} W_{jk}(\mathbf{u}) + \sum_{i,j,k=1}^d \tau_{kj} W_{ki}(\mathbf{u}) \gamma_{ij} \\ &= -\tau : (\gamma W(\mathbf{u}) - W(\mathbf{u})\gamma) \end{aligned}$$

De façon similaire, $D(\mathbf{u})$ étant symétrique :

$$(\tau D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u})\tau) : \gamma = \tau : (\gamma D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u})\gamma)$$

Introduisons l'adjoint formel A^* de A :

$$A^*(\tau) = -\mathbf{u} \cdot \nabla \tau - \beta_{-a}(\nabla \mathbf{u}, \tau) + (\nu - \operatorname{div} \mathbf{u})\tau, \quad \forall \tau \in L^2(\Omega)_s^{d \times d}$$

De l'intégration par partie précédente, il vient :

$$\int_{\Omega} A(\tau) : \gamma \, dx = \int_{\Omega} \tau : A^*(\gamma) \, dx + \int_{\partial\Omega} (\tau : \gamma) \, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad \forall \tau, \gamma \in L^2(\Omega)_s^{d \times d}$$

On introduit $A_s = (A + A^*)/2$ la partie symétrique de A . Il vient :

$$\begin{aligned} A_s(\tau) &= \left(\nu - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \tau + \frac{1}{2} (\beta_a(\nabla \mathbf{u}, \tau) - \beta_{-a}(\nabla \mathbf{u}, \tau)) \\ &= \left(\nu - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \tau - a (\tau D(\mathbf{u}) + D(\mathbf{u}) \tau) \end{aligned}$$

L'opérateur A est dit *positif* au sens de Friedrichs si il existe une constante $a_0 > 0$ telle que

$$A_s(\tau) : \tau \geq a_0 |\tau|^2 \quad \text{dans } \Omega, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}_s^{d \times d}$$

avec la norme matricielle $|\tau|^2 = (\tau : \tau)/2$. L'opérateur A_s dépend du champs de vecteur $\mathbf{u}$: la positivité impose une condition sur $\mathbf{u}$ qui doit être vérifiée dans tout Ω . De l'expression précédente de A_s , il vient :

$$A_s(\tau) : \tau = (2\nu - \operatorname{div} \mathbf{u}) |\tau|^2 - 2a (\tau D(\mathbf{u})) : \tau$$

Une condition suffisante sur $\mathbf{u}$ pour que A soit positif est

$$\mathbf{u} \in W^{1,\infty}(\Omega)^d \text{ et } 2\nu - \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\infty,\Omega} - 2|a| \|D(\mathbf{u})\|_{0,\infty,\Omega} > 0$$

Lorsque $\mathbf{u} = 0$ comme c'est le cas ici pour le problème qui nous intéresse, et avec le choix $a = 0$, cette condition est vérifiée. Lorsque $a \neq 0$, rappelant la définition $\nu = 1/(\theta' \Delta t)$ il vient une condition sur le pas de temps :

$$\Delta t < \Delta t_c = \frac{2}{(1 - 2\theta) (\|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{0,\infty,\Omega} + 2|a| \|2D(\mathbf{u})\|_{0,\infty,\Omega})}$$

Nous dirons que $\tau \in L^2(\Omega)_s^{d \times d}$ est *solution faible* du problème de transport des contraintes si

$$\int_{\Omega} \tau : A^*(\gamma) \, dx = \int_{\Omega} \chi : \gamma \, dx + \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (M - B)(\tau_{\Gamma}) : \gamma \, ds$$

ceci $\forall \gamma \in L^2(\Omega)_s^{d \times d}$ et vérifiant les *conditions aux limites adjointes* :

$$(M + B)(\gamma) = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

Ainsi, pour $\operatorname{div} \mathbf{u} \neq 0$ ou $a \neq 0$, le pas de temps ne doit pas être choisis trop petit pour garantir que le sous-problème de type transport admette une solution faible. Dans la pratique, $\mathbf{u}$ étant connu, il est même possible de calculer Δt_c et de satisfaire cette condition.

4.9 Discrétisation : décentrage par discontinuité

Si la donnée χ en second membre n'est pas régulière, par exemple discontinue, la solution τ sera aussi discontinue le long des caractéristiques, ou lignes intégrales du champs de vecteur $\mathbf{u}$, autrement dit le long des trajectoires. C'est une propriété de l'opérateur de transport $\mathbf{u} \cdot \nabla$.

L'approximation par différences finies ou éléments finis de ce problème conduit à des solutions qui présentent de grandes oscillations. Un des remède est de décentrer les schémas. Nous avons vu, lors de l'approximation en temps des équations de Navier-Stokes (section 1.6), comment la méthode des caractéristiques permet d'approcher le terme de transport $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Cette méthode s'applique lorsque l'approximation polynomiale est continue, ce qui est le cas pour le champs de vecteur $\mathbf{u}$. Ici le champs transporté τ est discontinu au niveau discret : nous allons utiliser un décentrage par discontinuité connu sous le nom de la méthode de Galerkin discontinue ou méthode de Lesaint-Raviart.

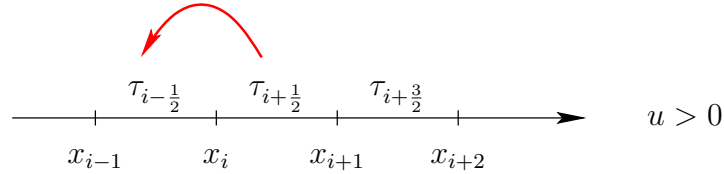


FIGURE 4.6 – Schéma décentré amont.

Cette méthode généralise en dimension quelconque, pour des polynômes de degré $k \geq 0$ et pour des maillages non-structurés arbitraires le schéma de différences finies décentré amont (voir Fig 4.6). Rappelons que, pour un transport scalaire en une dimension,

$$u \frac{d\tau}{dx}(x) + \tau(x) = \chi(x)$$

le schéma centré en $x_{i+\frac{1}{2}}$ s'écrit :

$$u \left(\frac{\tau_{i+\frac{3}{2}} - \tau_{i-\frac{1}{2}}}{2h} \right) + \tau_{i+\frac{1}{2}} = \chi_{i+\frac{1}{2}}$$

On le remplace par le le schéma décentré suivant :

$$\begin{cases} u \left(\frac{\tau_{i+\frac{1}{2}} - \tau_{i-\frac{1}{2}}}{h} \right) + \tau_{i+\frac{1}{2}} = \chi_{i+\frac{1}{2}} & \text{si } u \geq 0 \\ u \left(\frac{\tau_{i+\frac{3}{2}} - \tau_{i+\frac{1}{2}}}{h} \right) + \tau_{i+\frac{1}{2}} = \chi_{i+\frac{1}{2}} & \text{si } u < 0 \end{cases}$$

Ce schéma peut s'écrire encore :

$$\frac{u + |u|}{2} \left(\frac{\tau_{i+\frac{1}{2}} - \tau_{i-\frac{1}{2}}}{h} \right) + \frac{u - |u|}{2} \left(\frac{\tau_{i+\frac{3}{2}} - \tau_{i+\frac{1}{2}}}{h} \right) + \tau_{i+\frac{1}{2}} = \chi_{i+\frac{1}{2}}$$

Il s'interprète comme la méthode de galerkin discontinue avec un degré $k = 0$ (polynômes P_0 , constant par morceaux) en dimension 1 et sur un maillage uniforme de pas h .

On introduit l'espace des fonctions discontinues et polynomiales par morceaux sur le maillage $\mathcal{T}_h$ de Ω :

$$T_h = \{ \gamma_h \in L^2(\Omega)_s^{d \times d}; \gamma_{h|K} \in (P_k)_s^{d \times d}, \forall K \in \mathcal{T}_h \}$$

L'approximation du problème (4.19)-(4.20) s'écrit :

$(T)_h$: trouver $\tau_h \in T_h$ tel que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(\tau_h) : \gamma_h \, dx - \sum_{S \in \mathcal{S}_h} \int_S B[\tau_h]_S : \gamma_h \, dx + \frac{1}{2} \sum_{S \subset \partial\Omega} \int_S (M - B)(\tau_h) : \gamma_h \, dx \\ = \int_{\Omega} \chi : \gamma_h \, dx + \frac{1}{2} \sum_{S \subset \partial\Omega} \int_S (M - B)(\tau_{\Gamma}) : \gamma_h \, dx \end{aligned}$$

ceci pour tout $\gamma_h \in T_h$. Tout d'abord, on remarque que la condition aux limites $\tau = \tau_{\Gamma}$ est ici imposé faiblement sur les faces S de la frontière : τ_{Γ} n'est pas imposé via l'espace T_h mais par un second membre du problème. Ensuite on remarque le terme de somme sur les faces internes du maillage $\mathcal{T}_h$, et noté $\mathcal{S}_h$. Ce terme fait apparaître le saut $[\tau_h]$ de τ_h au travers d'une face $S \in \mathcal{S}_h$. Supposons que la face S sépare deux éléments K_1 et K_2 voisins, c'est-à-dire $S = \partial K_1 \cap \partial K_2$. On suppose que la face S est orientée par sa normale $\mathbf{n}$ sortante de K_1 et entrante dans K_2 . Alors

$$[\tau_h]_S = \tau_{h|K_1} - \tau_{h|K_2}$$

a un signe qui dépend du choix de l'orientation de S . D'autre part, le terme $B = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ contient également $\mathbf{n}$: le produit $B[\tau_h]$ est donc indépendant du choix de l'orientation des faces internes du maillage.

Notons S_2 la face de K_2 orienté avec la normale $\mathbf{n}_2$ sortante de K_2 et entrante dans K_1 . De même, notons S_1 la face de K_1 orienté avec la normale $\mathbf{n}_1$ sortante de K_1 et entrante dans K_2 . On remarque que S_1 coïncide avec S et que S_2 a l'orientation opposée : $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}$; Avec les définitions de $M = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|$ et $B = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{S_1} (M - B)[\tau_h]_{S_1} : \gamma_h \, ds + \frac{1}{2} \int_{S_2} (M - B)[\tau_h]_{S_2} : \gamma_h \, ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{S_1} (|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1| - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_1)(\tau_{h|K_1} - \tau_{h|K_2}) : \gamma_h \, ds + \frac{1}{2} \int_{S_2} (|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2| - \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_2)(\tau_{h|K_2} - \tau_{h|K_1}) : \gamma_h \, ds \\ &= - \int_S B[\tau_h]_S : \gamma_h \, ds \end{aligned}$$

Ainsi le problème discret s'écrit de façon équivalente :

$(T)_h$: trouver $\tau_h \in T_h$ tel que

$$\begin{aligned} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\int_K A(\tau_h) : \gamma_h \, dx + \frac{1}{2} \sum_{S \subset \partial K \setminus \partial \Omega} \int_S (M - B)[\tau_h]_S : \gamma_h \, dx \right) + \frac{1}{2} \sum_{S \subset \partial \Omega} \int_S (M - B)(\tau_h) : \gamma_h \, dx \\ = \int_{\Omega} \chi : \gamma_h \, dx + \frac{1}{2} \sum_{S \subset \partial \Omega} \int_S (M - B)(\tau_{\Gamma}) : \gamma_h \, dx \end{aligned}$$

ceci pour tout $\gamma_h \in T_h$. A partir de cette forme, on vérifie facilement que le terme de saut ajouté dans le système discret permet de retrouver, pour $k = 0$ et en dimension 1 sur un maillage uniforme, le schéma de différences finies décentré amont.

La méthode est ici utilisée pour $k = 1$ pour approcher le problème de transport du tenseur des contraintes. —————

Chapitre 5

Fluides élastoviscoplastiques

5.1 Principes de la thermodynamique

5.1.1 Conservation de l'énergie

Le **premier principe** exprime la conservation de l'*énergie*, notée e : sa variation est égale au travail des forces plus les sources de chaleur, notées r :

$$\rho \dot{e} = \sigma_{\text{tot}} : D(\mathbf{u}) - \text{div } \mathbf{q} + r \quad (5.1)$$

avec

$$\dot{e} = \frac{\partial e}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla e$$

Ici $\sigma_{\text{tot}} : D(\mathbf{u})$ correspond au travail des forces, $\text{div } \mathbf{q}$ aux flux de chaleur par diffusion et r aux autres sources de chaleur.

5.1.2 Second principe

Ce principe postule l'existence d'une *température* $\theta > 0$ et d'une *entropie* s qui vérifient l'inégalité d'évolution :

$$\rho \dot{s} + \text{div} \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) - \frac{r}{\theta} \geq 0 \quad (5.2)$$

En introduisant l'*énergie spécifique* de Helmholtz, notée $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = 2(e - s\theta)$$

on obtient que :

$$\rho\theta\dot{s} = \rho\dot{e} - \rho\left(\frac{1}{2}\dot{\mathcal{E}} + s\dot{\theta}\right)$$

En combinant cette dernière relation avec (5.1) et (5.2) on obtient une inégalité équivalente au second principe de la thermodynamique, l'inégalité de Clausius-Duhem :

$$-\rho\left(\frac{1}{2}\dot{\mathcal{E}} + s\dot{\theta}\right) + \sigma_{\text{tot}} : D(\mathbf{u}) - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0 \quad (5.3)$$

5.2 Loi de comportement

Les lois de comportement doivent vérifier le second principe de la thermodynamique. Afin de construire facilement des lois de comportement plus complexes que celles présentées jusqu'à présent (Bingham et Herschel-Bulkley, Maxwell et Oldroyd), et qui vérifient ce principe, nous allons nous doter d'un cadre général. Suivant Halphen et Nguyen [HN75] (voir aussi [LT90] ou [Mau92, p. 97]) on définit un *matériau standard généralisé* : il est complètement caractérisé par la donnée de deux fonctions : une énergie libre $\mathcal{E}$ et un potentiel de dissipation $\mathcal{D}$. La convexité de ces deux fonctions va garantir que le second principe de la thermodynamique est vérifié, ce qui fait le principal attrait de ce cadre abstrait.

Notons $\mathbf{d}$ le champs des déplacements dans le matériau : la vitesse est donnée par $\mathbf{u} = \dot{\mathbf{d}}$. Notons $\varepsilon = \nabla \mathbf{d} + \nabla \mathbf{d}^T$ le tenseur des déformations : le tenseur des taux de déformation est donné par $2D(\mathbf{u}) = \dot{\varepsilon}$.

Pour un matériau standard généralisé, la fonction $\mathcal{E}$ dépend de θ , ε et éventuellement de $m - 1$ variables d'état internes $(\chi_2, \dots, \chi_m)$ tandis que la fonction $\mathcal{D}$ ne dépend que de $\dot{\varepsilon}$ et $(\dot{\chi}_2, \dots, \dot{\chi}_m)$. Pour alléger les notation, on notera $\chi_1 = \varepsilon$ et $\chi = (\varepsilon, \chi_2, \dots, \chi_m)$. Les équations constitutives du matériau standard généralisé sont définies par :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} &= \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon}(\theta, \chi) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varepsilon}}(\theta, \chi) \\ 0 &= \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \chi_i}(\theta, \chi) + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\chi}_i}(\theta, \chi), \quad 2 \leq i \leq m \\ 2s &= -\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}(\theta, \chi) \end{aligned}$$

Lorsque $\mathcal{D}$ n'est pas différentiable, on écrit de façon plus générale :

$$\sigma_{\text{tot}} - \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon}(\theta, \chi) \in \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\varepsilon}}(\theta, \chi) \quad (5.4)$$

$$-\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \chi_i}(\theta, \chi) \in \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\chi}_i}(\theta, \chi), \quad 2 \leq i \leq m \quad (5.5)$$

$$2s = -\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}(\theta, \chi) \quad (5.6)$$

Supposons que $\mathcal{D} \geq 0$ et $\mathcal{D}(0) = 0$. Montrons alors que la convexité de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ conduit automatiquement à ce que le second principe de la thermodynamique soit vérifié. Supposons que le flux de chaleur est donné par la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -k(\theta) \nabla \theta$$

où k est un tenseur positif. On obtient

$$-\frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} = (k(\theta) \nabla \theta) \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (5.7)$$

De la convexité de $\mathcal{D}$ et de la définition du sous-différentiel (3.2) page 38, il vient que, pour tout élément $Z = (Z_1, \dots, Z_m) \in \partial \mathcal{D}(\dot{\chi})$ que

$$\mathcal{D}(\dot{Y}) \geq \mathcal{D}(\dot{\chi}) + Z \cdot (\dot{Y} - \dot{\chi})$$

ceci pour tout $\dot{Y}$. Rappelons que cette relation exprime que la tangente se trouve toujours sous la courbe. Ainsi, pour $\dot{Y} = 0$:

$$Z \cdot \dot{\chi} \geq \mathcal{D}(\dot{\chi}) \geq 0$$

d'après les hypothèses faites sur $\mathcal{D}$. En particulier, pour

$$Z = \left(\sigma_{\text{tot}} - \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon}(\theta, \chi), \left(-\rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \chi_i}(\theta, \chi) \right)_{2 \leq i \leq m} \right) \in \partial \mathcal{D}(\dot{\chi})$$

on a

$$\left(\sigma_{\text{tot}} - \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon}(\theta, \chi) \right) \cdot \dot{\varepsilon} - \sum_{i=2}^m \rho \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \chi_i}(\theta, \chi) \cdot \dot{\chi}_i \geq 0$$

Or

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(\theta, \chi) \cdot (\dot{\theta}, \dot{\chi}) &= \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \theta}(\theta, \chi) \cdot \dot{\theta} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon}(\theta, \chi) \cdot \dot{\varepsilon} + \sum_{i=2}^m \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \chi_i}(\theta, \chi) \cdot \dot{\chi}_i \\ &= -2s \dot{\theta} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon}(\theta, \chi) \cdot \dot{\varepsilon} + \sum_{i=2}^m \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \chi_i}(\theta, \chi) \cdot \dot{\chi}_i \quad \text{d'après (5.6)} \end{aligned}$$

L'inégalité précédente devient

$$-\rho \left(\dot{\mathcal{E}}(\theta, \chi) \cdot (\dot{\theta}, \dot{\chi}) + 2s \dot{\theta} \right) + \sigma_{\text{tot}} : \dot{\varepsilon} \geq 0$$

Rappelons que $\dot{\varepsilon} = 2D(\mathbf{u})$. En ajoutant (5.7), on obtient finalement l'inégalité de Clausius-Duhem (5.3) qui est une expression équivalente au second principe de la thermodynamique.

5.3 Application des outils thermodynamiques

5.3.1 Application 1 : modèle de Herschel-Bulkley

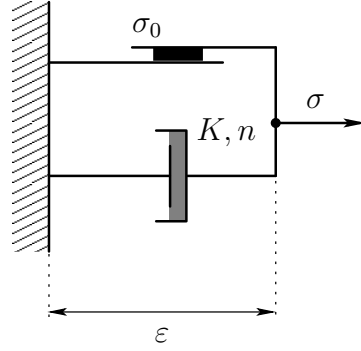


FIGURE 5.1 – Fluide viscoplastique : représentation schématique.

Le modèle étudié au chapitre 3 et introduit en (3.1) correspond ici au choix $m = 1$ (pas de variables internes) avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\theta, \varepsilon) &= 0, & \forall \theta \in \mathbb{R}_+, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_s^{d \times d} \\ \mathcal{D}(\dot{\varepsilon}) &= \frac{K}{1+n} |\dot{\varepsilon}|^{1+n} + \sigma_0 |\dot{\varepsilon}|, & \forall \dot{\varepsilon} \in \mathbb{R}_s^{d \times d} \end{aligned}$$

La Fig. 5.1 donne la représentation schématique du modèle : ce type de représentation nous sera utile pour manipuler simplement des modèles plus complexes. Comme nous l'avons vu au chapitre 3 le sous-différentiel de $\mathcal{D}$ s'écrit pour tout $\dot{\varepsilon} \in \mathbb{R}_s^{d \times d}$:

$$\partial \mathcal{D}(\dot{\varepsilon}) = \begin{cases} \left\{ \tau = K |\dot{\varepsilon}|^{-1+n} \dot{\varepsilon} + \sigma_0 \frac{\dot{\varepsilon}}{|\dot{\varepsilon}|} \right\} & \text{si } \dot{\varepsilon} \neq 0 \\ \{ \tau \in \mathbb{R}_s^{d \times d}; |\tau| \leq \sigma_0 \} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le dual $\mathcal{D}^*$ de $\mathcal{D}$ est caractérisé par l'identité de Fenchel : pour tout $\tau \in \partial \mathcal{D}(\dot{\varepsilon})$, by $\mathcal{D}^*(\tau) = \tau : \dot{\varepsilon} - \mathcal{D}(\dot{\varepsilon})$. De plus, $\tau \in \partial \mathcal{D}(\dot{\varepsilon})$ est équivalent à $\dot{\varepsilon} \in \partial \mathcal{D}^*(\tau)$. Après calcul :

$$\partial \mathcal{D}^*(\tau) = \begin{cases} \left\{ \dot{\varepsilon} = \left(\frac{|\tau| - \sigma_0}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\tau}{|\tau|} \right\} & \text{si } |\tau| > \sigma_0 \\ \{ \dot{\varepsilon} = 0 \} & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.8)$$

En érivant $\dot{\varepsilon} = 2D(\mathbf{u}) \in \partial \mathcal{D}^*(\sigma)$ et en complétant avec les relations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse, ainsi que des conditions aux bords, nous obtenons une nouvelle écriture équivalente du modèle de Herschel-Bulkley (3.4), page 40 :

(P) : trouver σ , $\mathbf{u}$ et p , définis dans $]0, T[\times \Omega$ tels que

$$\begin{aligned} \max \left(0, \frac{|\sigma| - \sigma_0}{K|\sigma|^n} \right)^{\frac{1}{n}} \sigma - 2D(\mathbf{u}) &= 0 \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \operatorname{div} \sigma + \nabla p &= \mathbf{f} \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \text{ dans }]0, T[\times \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\Gamma \text{ sur }]0, T[\times \partial \Omega \\ \mathbf{u}(t=0) &= \mathbf{u}_0 \text{ dans } \Omega \end{aligned}$$

5.3.2 Application 2 : modèle d'Oldroyd

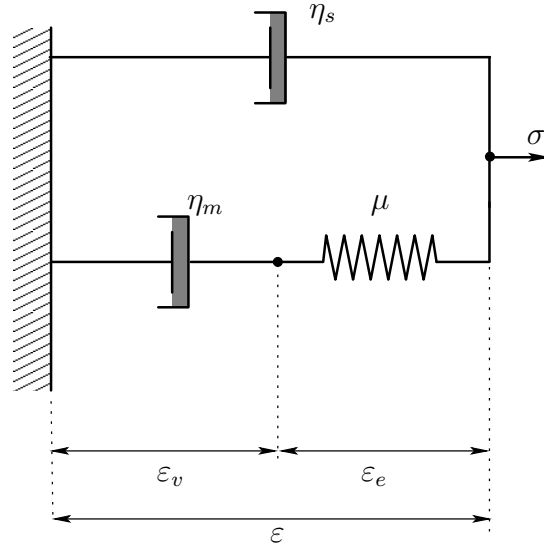


FIGURE 5.2 – Fluide viscoélastique : représentation schématique.

Le modèle étudié au chapitre 4 correspond ici au choix $m = 2$, avec une variable interne notée ε_e :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\theta, \varepsilon, \varepsilon_e) &= \frac{\mu}{2\rho} |\varepsilon_e|^2 \\ \mathcal{D}(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_e) &= \frac{\eta_s}{2} |\dot{\varepsilon}|^2 + \frac{\eta_m}{2} |\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e|^2 \end{aligned}$$

On introduit ε_v tel que $\varepsilon = \dot{\varepsilon}_e + \varepsilon_v$: la variable ε_v s'interprète comme les déformations irréversibles dues aux effets visqueux. La variable ε_e s'interprète comme les déformations réversibles dues aux effets élastiques. La Fig. 5.2 donne la représentation schématique du modèle.

Les équations constitutives, données par (5.4)-(5.6), conduisent ici à :

$$\begin{aligned}\sigma &= \eta_s \dot{\varepsilon} + \eta_m (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e) \\ 0 &= \mu \varepsilon_e - \eta_m (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e)\end{aligned}$$

Posons $\tau = \mu \varepsilon_e$ et $\lambda = \eta_m / \mu$ on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma &= \eta_s \dot{\varepsilon} + \tau \\ \lambda \dot{\tau} + \tau &= \eta_m \dot{\varepsilon}\end{aligned}$$

On prend $\dot{\varepsilon} = 2D(\mathbf{u})$ et $\dot{\tau} = \frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t}$, la dérivé de Gordon-Schowalter donnée par (4.3), puis on complète avec les relations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse, ainsi que des conditions aux bords. Nous retrouvons le problème introduit au chapitre 3.

5.3.3 Application 3 : modèle élastoviscoplastique

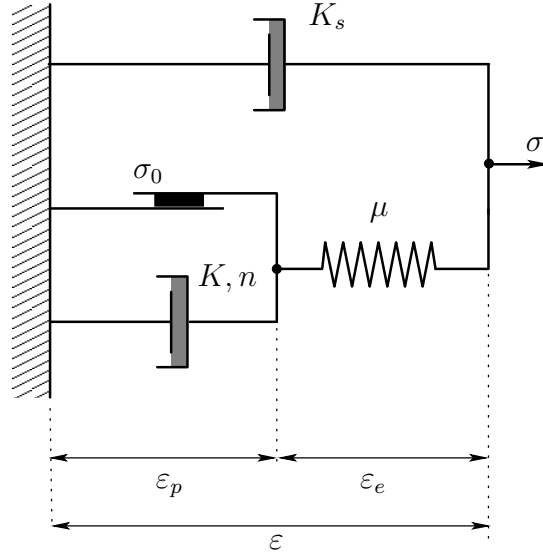


FIGURE 5.3 – Fluide élastoviscoplastique : représentation schématique.

Le modèle représenté sur la Fig. 5.3 s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\theta, \varepsilon, \varepsilon_e) &= \frac{\mu}{2\rho} |\varepsilon_e|^2 \\ \mathcal{D}(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_e) &= \frac{K_s}{2} |\dot{\varepsilon}|^2 + \varphi(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e)\end{aligned}$$

où $\varphi(\dot{\varepsilon}_p) = \frac{K}{1+n} |\dot{\varepsilon}_p|^{1+n} + \sigma_0 |\dot{\varepsilon}_p|$, $\forall \varepsilon_p \in \mathbb{R}_s^{d \times d}$.

La notation ε_p tel que $\varepsilon = \dot{\varepsilon}_p + \varepsilon_e$: la variable ε_p s'interprète s'interprète comme les déformations irréversibles dues aux effets plastiques et visqueux. La variable ε_e s'interprète comme les déformations réversibles dues aux effets élastiques. Ce modèle a été introduit pour la première fois dans [Sar07, Sar09]. Les équations constitutives, données par (5.4)-(5.6), conduisent ici à :

$$\begin{aligned}\sigma &\in K_s \dot{\varepsilon} + \partial\varphi(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e) \\ 0 &\in \mu \varepsilon_e - \partial\varphi(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_e)\end{aligned}$$

Posons $\tau = \mu \varepsilon_e$. De façon équivalente, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\sigma &= K_s \dot{\varepsilon} + \tau \\ \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\tau}}{\mu} &\in \partial\varphi^*(\tau)\end{aligned}$$

Le sous-gradient du dual φ^* , noté $\partial\varphi^*$, est donné par (5.8). On obtient :

$$\begin{aligned}\sigma &= K_s \dot{\varepsilon} + \tau \\ \dot{\tau} &= \mu \dot{\varepsilon} \quad \text{si } |\tau| \leq \sigma_0 \\ \frac{\dot{\tau}}{\mu} + \left(\frac{|\tau| - \sigma_0}{K} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{\tau}{|\tau|} &= \dot{\varepsilon} \quad \text{si } |\tau| \geq \sigma_0\end{aligned}$$

Dans le cas où $|\tau| \leq \sigma_0$ on obtient le comportement d'un solide élastique : $\tau = \mu \varepsilon$. Dans le cas où $|\tau| \geq \sigma_0$ il s'agit d'un fluide viscoélastique : il y a un amortissement non-linéaire.

On prend $\dot{\varepsilon} = 2D(\mathbf{u})$ et $\dot{\tau} = \left(\frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} \right)_d$, la partie déviatrice de la dérivé de Gordon-Schowalter donnée par (4.3), puis on complète avec les relations de conservation de la quantité de mouvement et de la masse, ainsi que des conditions aux bords. Les équations s'écrivent :

(P) : trouver σ , $\mathbf{u}$ et p , définis dans $]0, T[\times \Omega$ tels que

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\mathcal{D}_a \tau}{\mathcal{D}t} \right)_d + \max \left(0, \frac{|\tau| - \sigma_0}{K |\tau|^n} \right)^{\frac{1}{n}} \tau - 2D(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega \quad (5.9)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) - \operatorname{div} \tau - \operatorname{div} (2K_s D(\mathbf{u})) + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega \quad (5.10)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans }]0, T[\times \Omega \quad (5.11)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\Gamma \quad \text{sur } \partial]0, T[\times \Omega \quad (5.12)$$

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega \quad (5.13)$$

Pour $1/\mu = 0$ et $K_s = 0$ nous retrouvons le modèle de Herschel-Bulkley. Pour $\sigma_0 = 0$ et $n = 1$ nous retrouvons le modèle d'Oldroyd.

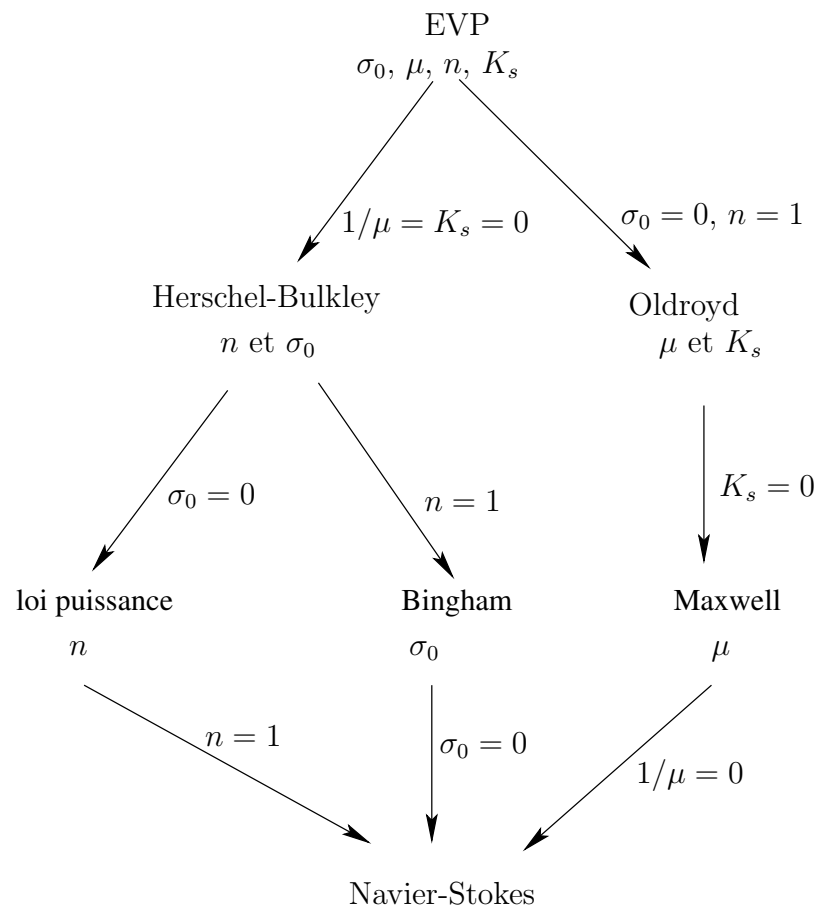


FIGURE 5.4 – Fluide élastoviscoplatique : une hiérarchie de modèles.

5.4 Algorithme du θ -schéma

Bibliographie

- [BAH87] R. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager. *Dynamics of polymeric liquids. Volume 1. Fluid mechanics*. Wiley, New-York, second edition, 1987. 25
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and hybrid finite element methods*. Springer, 1991. 19
- [Bin22] E. C. Bingham. *Fluidity and plasticity*. Mc Graw-Hill, New-York, USA, 1922. 38
- [BN90] J. Baranger and K. Najib. Analyse numerique des ecoulements quasi-Newtoniens dont la viscosite obeit a la loi puissance ou la loi de Carreau. *Numer. Math.*, 58(1) :35–49, 1990. 30
- [Dav07] T. A. Davis. *UMFPACK version 5.2 user guide*. University of Florida, USA, 2007. 20
- [DD94] T. A. Davis and I. S. Duff. An unsymmetgric-pattern multifrontal method for sparse LU factorization. Technical Report TR-94-038, University of Florida, 1994. 20
- [FF89] M. Fortin and A. Fortin. A new approach for the FEM simulation of viscoelastic flows. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 32(3) :295–310, 1989. 65
- [FG83] M. Fortin and R. Glowinski. *Augmented Lagrangian methods*. Elsevier, 1983. 45
- [GLT81] R. Glowinski, J. L. Lions, and R. Trémolières. *Numerical analysis of variational inequalities*. Elsevier, 1981. 44
- [GR86] V. Girault and P. A. Raviart. *Finite element methods for the Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*. Springer, 1986. 17
- [HB26] W. H. Herschel and T. Bulkley. Measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions. *Proceedings of the American Society for Testing and Material*, 26(2) :621–633, 1926. 38
- [Hec81] F. Hecht. Construction d’une base de fonctions P_1 non conforme à divergence nulle dans $\mathbb{R}^3$. *RAIRO - Anal. Num.*, 15(2) :119–150, 1981. 17
- [HN75] B. Halphen and Q. S. NGuyen. Sur les matériaux standard généralisés. *J. Méca.*, 14 :39–63, 1975. 72
- [HT74] P. Hood and G. Taylor. Navier-Stokes equations using mixed interpolation. In *Finite element in flow problems*, Oden ed., UAH Press, 1974. 19

- [LÓ4] E. Lévêque. *De la turbulence universelle aux modèles de fermeture*. École de physique stellaire d'Aussois 2004 : *Dynamique des fluides stellaires et simulations numériques associées*, 2004. http://www.ast.obs-mip.fr/users/rieutord/PROG_aussois_files/Lectures/aussois.leveque.pdf. 26
- [Lio69] J.-L. Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Gauthier-Villars, Paris, 1969. 14
- [LT86] P. Lascaux and R. Théodor. *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur. Tome 1*. Masson, Paris, 1986. 20
- [LT90] P. Le Tallec. *Numerical analysis of viscoelastic problems*. Masson, Paris, France, 1990. 72
- [Mau92] G. A. Maugin. *The thermomechanics of plasticity and fracture*. Cambridge University Press, UK, 1992. 72
- [Old50] J. G. Oldroyd. On the formulation of rheological equations of states. *Proc. Roy. Soc. London A*, 200 :523–541, 1950. 52
- [Pir88] O. Pironneau. *Méthode des éléments finis pour les fluides*. Masson, Paris, France, 1988. 13, 14, 17
- [Sar90] P. Saramito. *Simulation numérique d'écoulements de fluides viscoélastiques par éléments finis incompressibles et une méthode de directions alternées; applications*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1990. 62, 65
- [Sar94] P. Saramito. Numerical simulation of viscoelastic fluid flows using incompressible finite element method and a θ -method. *M2AN*, 28(1) :1–35, 1994. 62, 65
- [Sar97] P. Saramito. Operator splitting in viscoelasticity. *Élasticité, Viscoélasticité et Contrôle Optimal, Lyon, décembre 1995, ESAIM : Proceedings*, 2 :275–281, 1997. 65
- [Sar07] P. Saramito. A new constitutive equation for elastoviscoplastic fluid flows. *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 145(1) :1–14, 2007. 77
- [Sar09] P. Saramito. A new elastoviscoplastic model based on the Herschel-Bulkley viscoplasticity. *J. Non Newtonian Fluid Mech.*, 158(1–3) :154–161, 2009. 77
- [Sar11] P. Saramito. *Efficient C++ finite element computing with Rheolef*. CNRS and LJK, 2011. <http://www-ljk.imag.fr/membres/Pierre.Saramito/rheolef/rheolef.pdf>. 20, 21, 24, 32, 34

GNU Free Documentation License

Version 1.3, 3 November 2008

Copyright © 2000, 2001, 2002, 2007, 2008 Free Software Foundation, Inc.

`<http://fsf.org/>`

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document “free” in the sense of freedom : to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of “copyleft”, which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation : a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals ; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

1. Applicability and definitions

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The “**Document**”, below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as “**you**”. You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A “**Modified Version**” of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A “**Secondary Section**” is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document’s overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The “**Invariant Sections**” are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The “**Cover Texts**” are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A “**Transparent**” copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not “Transparent” is called “**Opaque**”.

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The “**Title Page**” means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, “Title Page” means the text near the most prominent appearance of the work’s title, preceding the beginning of the body of the text.

The “**publisher**” means any person or entity that distributes copies of the Document to the public.

A section “**Entitled XYZ**” means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as “**Acknowledgements**”, “**Dedications**”, “**Endorsements**”, or “**History**”.) To “**Preserve the Title**” of such a section when you modify the Document means that it remains a section “Entitled XYZ” according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties : any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

2. Verbatim copying

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or non-commercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

3. Copying in quantity

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts : Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

4. Modifications

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In

addition, you must do these things in the Modified Version :

- A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- D. Preserve all the copyright notices of the Document.
- E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- H. Include an unaltered copy of this License.
- I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.
- J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
- O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled “Endorsements”, provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

5. Combining documents

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled “History” in the various original documents, forming one section Entitled “History”; likewise combine any sections Entitled “Acknowledgements”, and any sections Entitled “Dedications”. You must delete

all sections Entitled “Endorsements”.

6. Collections of documents

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

7. Aggregation with independent works

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an “aggregate” if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation’s users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document’s Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

8. Translation

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original

English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled “Acknowledgements”, “Dedications”, or “History”, the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

9. Termination

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense, or distribute it is void, and will automatically terminate your rights under this License.

However, if you cease all violation of this License, then your license from a particular copyright holder is reinstated (a) provisionally, unless and until the copyright holder explicitly and finally terminates your license, and (b) permanently, if the copyright holder fails to notify you of the violation by some reasonable means prior to 60 days after the cessation.

Moreover, your license from a particular copyright holder is reinstated permanently if the copyright holder notifies you of the violation by some reasonable means, this is the first time you have received notice of violation of this License (for any work) from that copyright holder, and you cure the violation prior to 30 days after your receipt of the notice.

Termination of your rights under this section does not terminate the licenses of parties who have received copies or rights from you under this License. If your rights have been terminated and not permanently reinstated, receipt of a copy of some or all of the same material does not give you any rights to use it.

10. Future revision of this licence

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License “or any later version” applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified

version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document specifies that a proxy can decide which future versions of this License can be used, that proxy's public statement of acceptance of a version permanently authorizes you to choose that version for the Document.

11. Relicensing

“Massive Multiauthor Collaboration Site” (or “MMC Site”) means any World Wide Web server that publishes copyrightable works and also provides prominent facilities for anybody to edit those works. A public wiki that anybody can edit is an example of such a server. A “Massive Multiauthor Collaboration” (or “MMC”) contained in the site means any set of copyrightable works thus published on the MMC site.

“CC-BY-SA” means the Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 license published by Creative Commons Corporation, a not-for-profit corporation with a principal place of business in San Francisco, California, as well as future copyleft versions of that license published by that same organization.

“Incorporate” means to publish or republish a Document, in whole or in part, as part of another Document.

An MMC is “eligible for relicensing” if it is licensed under this License, and if all works that were first published under this License somewhere other than this MMC, and subsequently incorporated in whole or in part into the MMC, (1) had no cover texts or invariant sections, and (2) were thus incorporated prior to November 1, 2008.

The operator of an MMC Site may republish an MMC contained in the site under CC-BY-SA on the same site at any time before August 1, 2009, provided the MMC is eligible for relicensing.

Addendum : how to use this License for your documents

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page :

Copyright © YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.3 or any later version published by the Free Software Foundation; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled “GNU Free Documentation License”.

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the “with ... Texts.” line with this :

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.