



**HAL**  
open science

# Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus

Jean Garrigues

► **To cite this version:**

Jean Garrigues. Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus. Engineering school.  
Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus, 2012, pp.95. cel-00679923v1

**HAL Id: cel-00679923**

**<https://cel.hal.science/cel-00679923v1>**

Submitted on 16 Mar 2012 (v1), last revised 4 Oct 2022 (v4)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Algèbre et analyse tensorielle  
pour l'étude des milieux continus

Jean Garrigues

16 mars 2012

---

---

# Avant-propos

La description de la déformation et des efforts intérieurs en mécanique des milieux continus, nécessitent l'utilisation de tenseurs, non introduits en mécanique des points matériels ou en mécanique des solides indéformables. En effet, dans ces deux mécaniques élémentaires, pour représenter mathématiquement les grandeurs physiques envisagées (vitesses, forces, etc), il suffit de manipuler au plus des champs de vecteurs. En outre, les déformations et les efforts intérieurs n'étant généralement pas uniformes dans un domaine de milieu continu, on aura à envisager des *champs de tenseurs*. On aura donc à généraliser les notions de gradient, divergence, rotationnel et laplacien pour de tels champs.

Toutes les définitions et les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus peuvent s'exprimer systématiquement sous forme tensorielle. Outre l'avantage de la concision des formules, cette présentation met clairement en évidence que tout résultat de physique devrait être tensoriel par essence, c'est-à-dire indépendant de la base choisie pour faire les calculs et indépendant du système de coordonnées utilisé pour repérer un point dans l'espace.

Ce cours consiste donc en un complément mathématique d'introduction sur les tenseurs. Il est en partie limité aux tenseurs construits sur un espace vectoriel de dimension 3 et se restreint au strict minimum indispensable pour comprendre la mécanique des milieux continus. Il ne peut en aucun cas être considéré comme complet !

La lecture de ce cours suppose connues les notions suivantes :

- *algèbre et analyse des fonctions de variables réelles à valeur réelle* : fonctions de une ou plusieurs variables, dérivées partielles, équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, différentiabilité, intégrales simples et multiples;
- *algèbre et analyse vectorielle* : espace vectoriel, bases, produit scalaire, produit vectoriel, espace vectoriel euclidien, gradient d'un champ scalaire, divergence et rotationnel d'un champ vectoriel, théorème de Green, théorème de Stokes et théorème de la divergence (Ostrogradski);
- *algèbre matricielle* : matrice, produit matriciel, changement de base, inversion, valeurs propres et espaces propres associés, résolution de systèmes linéaires;

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :

- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple :  $a, \mu$ );
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple :  $\mathbf{v}$ );
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple :  $\mathbf{T}$ );
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne :  $\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = [m_{ij}]$
- la transposition des matrices est notée avec un  $T$  en exposant (exemple :  $M^T$ );
- les espaces d'entités mathématiques sont en majuscules doublées (exemples : l'espace des réels :  $\mathbb{R}$ , l'espace des vecteurs de dimension 3 :  $\mathbb{V}_3$ ).
- le produit vectoriel de deux vecteurs de  $\mathbb{V}_3$  est noté «  $\wedge$  ».



# Chapitre 1

## Algèbre tensorielle

Dans ce chapitre on définit les tenseurs et leurs opérations algébriques. Avant d'en donner la définition, on commence par introduire une convention de notation inventée par Einstein pour ses calculs en mécanique relativiste, et couramment utilisée aujourd'hui dans toutes les spécialités qui utilisent des calculs vectoriels, matriciels et tensoriels.

### 1.1 Convention de sommation d'Einstein

Dans les calculs sur les composantes de tenseurs, on aura souvent à manipuler des expressions de la forme :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a^i_{jk} b_i c^k \quad (\text{Les indices en haut ne sont pas des puissances mais des numéros})$$

En outre, les sommations auront toujours les mêmes bornes 1 et  $n$  (en mécanique des milieux continus classique,  $n = 3$ ).

REMARQUE : Pour l'instant, la hauteur des indices n'a pas de signification. Elle en prendra une plus loin.

La convention d'Einstein consiste à omettre les signes  $\Sigma$ . On écrira donc :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a^i_{jk} b_i c^k = a^i_{jk} b_i c^k$$

On reconnaît qu'il s'agit d'une sommation sur l'indice  $i$  car il apparaît deux fois, une fois en haut et une fois en bas, dans le monôme  $a^i_{jk} b_i c^k$ . Il en est de même pour l'indice  $k$ . Dans l'exemple ci-dessus, on est donc en présence d'une double sommation, l'une sur l'indice  $i$ , l'autre sur l'indice  $k$ . Pour  $n = 3$ , le monôme  $a^i_{jk} b_i c^k$  représente donc la somme de 9 produits de 3 termes :

$$\begin{aligned} & a^1_{j1} b_1 c^1 + a^1_{j2} b_1 c^2 + a^1_{j3} b_1 c^3 + \\ & a^2_{j1} b_2 c^1 + a^2_{j2} b_2 c^2 + a^2_{j3} b_2 c^3 + \\ & a^3_{j1} b_3 c^1 + a^3_{j2} b_3 c^2 + a^3_{j3} b_3 c^3 \end{aligned}$$

Les indices de sommation sont appelés *indices muets* car on peut changer leur nom sans changer la valeur du résultat. En effet :

$$a^i_{jk} b_i c^k = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a^i_{jk} b_i c^k = \sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n a^p_{jq} b_p c^q = a^p_{jq} b_p c^q$$

Les autres indices, qui n'apparaissent qu'une fois dans le monôme, sont appelés *indices réels*. Dans l'exemple précédent,  $j$  est un indice réel. Le monôme  $a^i_{jk} b_i c^k$  décrit donc 3 nombres ( $j = 1 \cdot \cdot \cdot 3$ ), chacun d'eux étant la somme de 9 termes.

Cette convention de sommation n'est pas seulement utile dans l'algèbre tensorielle. On peut aussi l'utiliser en calcul vectoriel ou matriciel.

EXEMPLE 1 : Soient un espace vectoriel  $\mathbb{V}$  de dimension  $n$  et l'une de ses bases  $\{e_i\}$ . Si on décide de numéroter ses composantes avec un indice en haut, un vecteur  $v \in \mathbb{V}$  s'écrit :

$$v = \sum_{i=1}^n v^i e_i = v^i e_i = v^m e_m$$

Remarquer que dans la ligne ci-dessus, il n'y a pas d'indice réel : il s'agit d'une seule égalité.

L'équation vectorielle  $u + 2v = w$  n'a ni indice de sommation ni indice réel. Cette égalité vectorielle est équivalente aux  $n$  égalités suivantes :

$$u^i + 2v^i = w^i$$

Noter que l'indice réel  $i$  est le même dans chaque monôme. Il permet de savoir que l'on a écrit  $n$  égalités en une seule ligne.

EXEMPLE 2 : Soit  $M$  une matrice carrée  $n \times n$ , de terme général  $M^i_j$ , avec la convention habituelle : l'indice de gauche est l'indice de ligne et l'indice de droite est l'indice de colonne. Pour rappeler la hauteur des indices de ses termes, on la note  $[M^\bullet_\bullet]$ . Soit une matrice colonne de  $n$  lignes, de terme général  $c^k$ , notée  $[c^\bullet]$ .

Les règles du produit matriciel donnent un sens au produit non commutatif  $[M^\bullet_\bullet][c^\bullet]$ . On sait que le résultat est une matrice colonne, que l'on notera  $[a^\bullet]$ , dont le terme général est :

$$a^i = \sum_{p=1}^n M^i_p c^p = M^i_p c^p$$

Remarquer que, là encore, l'indice réel  $i$  est le même dans tous les monômes; cette ligne représente donc  $n$  égalités.

EXEMPLE 3 : Le produit de deux matrices carrées  $[M^\bullet_\bullet]$  et  $[P^\bullet_\bullet]$  est une matrice carrée  $[Q^\bullet_\bullet]$  de terme général :

$$Q^i_j = \sum_{k=1}^n M^i_k P^k_j = M^i_k P^k_j \quad (\text{mêmes indices réels dans tous les monômes})$$

La ligne ci-dessus a deux indices réels ( $i$  et  $j$ ), elle représente donc  $n^2$  égalités.

### 1.1.1 Règles de la convention de sommation d'Einstein

Les constatations précédentes suggèrent de poser les règles suivantes dont une partie, sur les hauteurs d'indices, sera justifiée plus loin :

1. un indice de sommation est appelé *indice muet*; dans un monôme, il doit apparaître exactement deux fois : une fois en haut et une fois en bas;
2. le nom d'un indice muet est sans importance et peut donc être changé;
3. un indice non muet est appelé *indice réel*; dans un monôme, il ne peut apparaître qu'une seule fois (en haut ou en bas);
4. dans une égalité ou une somme de monômes, les indices réels de chaque terme doivent être les mêmes et placés à la même hauteur.

Si une expression indicelle utilisant la convention d'Einstein ne respecte pas strictement chacune de ces règles, elle est incorrecte et résulte soit d'une erreur conceptuelle (par exemple, on ne peut pas additionner un vecteur et une matrice), soit d'une erreur de calcul (mauvaise manipulation d'indice).

CONSEIL : C'est une bonne habitude quand on débute, de vérifier à chaque ligne de calcul, que toutes les règles sont bien respectées. En particulier, un indice ne doit jamais apparaître plus de deux fois dans un monôme.

### 1.1.2 Symbole de Kronecker

On définit le *symbole de Kronecker* :  $\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Si l'on range les  $\delta^i_j$  dans une matrice  $n \times n$ , on obtient la matrice unité. Noter que, contrairement aux

matrices, l'ordre de ses indices est sans importance. On peut l'écrire indifféremment :  $\delta_q^p = \delta^p_q = \delta_q^p$  (la règle des indices réels est respectée).

Lorsque l'un des indices de  $\delta_{\bullet}^{\bullet}$  sert d'indice muet dans un monôme, on peut simplifier le monôme en ne retenant que les termes non nuls.

EXEMPLES :

$$T^i_j \delta_i^k = T^k_j \qquad \mathbf{e}_j = \delta_j^i \mathbf{e}_i \qquad \delta_i^i = n \text{ (sommation sur } i \text{)}$$

### 1.1.3 Représentation matricielle de certaines sommations

Si une expression indicielle ne contient que des termes à un ou deux indices, on peut représenter les sommations qu'elle contient sous forme de produits matriciels. Pour ranger des quantités à un ou deux indices dans des matrices, on adopte les conventions suivantes :

- les quantités à un seul indice sont rangées dans des matrices colonnes, l'indice unique (en haut ou en bas) est donc un indice de ligne;
- les quantités à deux indices sont rangées dans des matrices carrées : l'indice de gauche (quelle que soit sa hauteur) est l'indice de ligne, l'indice de droite (quelle que soit sa hauteur) est l'indice de colonne.

Pour les termes à plus de deux indices, on n'utilise généralement pas de représentation matricielle<sup>1</sup>.

Si l'on respecte strictement ces conventions de rangement, on peut évaluer une expression indicielle avec des sommations en effectuant des opérations matricielles.

EXEMPLES : les  $n$  termes  $c_j$  définis par :  $c_j = A_j^i b_i = b_i A_j^i$  (sommation sur les indices  $i$ ) peuvent être calculés par les produits matriciels :

$$[c_{\bullet}] = [A_{\bullet \bullet}] [b_{\bullet}] \qquad \text{ou} \qquad [c_{\bullet}]^T = [b_{\bullet}]^T [A_{\bullet \bullet}]^T$$

Les  $n^2$  termes  $C_i^j$  définis par :  $C_i^j = A_i^k B_k^j = B_k^j A_i^k$  (sommation sur les indices  $k$ ) peuvent être calculés par les produits matriciels :

$$[C_{\bullet \bullet}] = [A_{\bullet \bullet}] [B_{\bullet \bullet}] \qquad \text{ou} \qquad [C_{\bullet \bullet}]^T = [B_{\bullet \bullet}]^T [A_{\bullet \bullet}]^T$$

ATTENTION : Le produit matriciel n'est pas commutatif ( $[A][B] \neq [B][A]$ ), alors que l'égalité (sommes de produits)  $B_k^j A_i^k = A_i^k B_k^j$  est vraie (le produit des nombres réels est commutatif).

Pour savoir si les  $n^2$  termes  $B_k^j A_i^k$  doivent être calculés par le produit matriciel  $[A][B]$  ou par le produit matriciel  $[B][A]$ , il convient donc de bien repérer la place des indices muets (ici  $k$ ) pour écrire le bon produit matriciel !

RÈGLES POUR TROUVER LE BON PRODUIT MATRICIEL : *Pour que les termes du monôme apparaissent dans le même ordre que dans le produit matriciel, il faut réorganiser le monôme de telle façon que :*

1. les indices de sommation soient contigus dans le monôme,
2. les indices réels soient conservés dans le même ordre.

Pour parvenir à ce résultat, il faut éventuellement transposer des matrices.

EXEMPLES : Les  $n$  termes  $c^i$  définis par :  $c^i = A^i b_j = b_j A^i$  peuvent être calculés par les produits matriciels :

$$[c^{\bullet}] = [A^{\bullet \bullet}]^T [b_{\bullet}] \qquad \text{ou} \qquad [c^{\bullet}]^T = [b_{\bullet}]^T [A^{\bullet \bullet}]$$

---

1. Pour ranger des termes à trois indices on pourrait utiliser une « matrice cubique »  $n \times n \times n$ . On peut éventuellement aussi les représenter avec une  $n$ -colonne contenant des matrices carrées  $n \times n$  ou bien par une matrice  $n \times n$  contenant des  $n$ -colonnes. On peut aussi ranger les termes à quatre indices dans des matrices carrées de matrices carrées. Ces rangements sont peu commodes pour les calculs.



Les  $n^2$  termes  $C_i^j$  définis par :  $C_i^j = A_{ki} B^{kj} = B^{kj} A_{ki}$  peuvent être calculés par les produits matriciels :

$$[C_{\bullet\bullet}^{\bullet}] = [A_{\bullet\bullet}]^T [B^{\bullet\bullet}] \quad \text{ou} \quad [C_{\bullet\bullet}^{\bullet}]^T = [B^{\bullet\bullet}]^T [A_{\bullet\bullet}]$$

Dans ce dernier cas, il a fallu transposer des matrices pour rendre les indices de sommation contigus et garder les indices réels dans le même ordre de chaque côté de l'égalité.

## 1.2 Algèbre vectorielle

Cette section contient peu de concepts nouveaux. On la développe néanmoins pour familiariser le lecteur avec la convention de sommation d'Einstein.

Soient  $\mathbb{V}$  un espace vectoriel de dimension  $n$ , soit  $\{\mathbf{e}_i\}$  une base quelconque<sup>2</sup> de  $\mathbb{V}$ , et soit  $\mathbf{v}$  un vecteur de  $\mathbb{V}$ . Pour respecter la convention d'Einstein, on numérote les composantes des vecteurs sur cette base avec des indices en haut. Un vecteur s'écrit donc :

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$$

DÉFINITION : Les nombres  $v^i$  sont appelés composantes contravariantes du vecteur  $\mathbf{v}$  sur la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

Les composantes contravariantes sont donc les composantes habituelles d'un vecteur sur une base. Le qualificatif « contravariante » est justifié par ce qui suit.

### 1.2.1 Changement de base

Soit  $\{\mathbf{e}'_j\}$  une autre base de  $\mathbb{V}$ . La nouvelle base  $\{\mathbf{e}'_j\}$  se définit naturellement par ses composantes (contravariantes) sur l'ancienne base  $\{\mathbf{e}_i\}$  par les  $n$  relations :

$$\mathbf{e}'_j = A^i_j \mathbf{e}_i \tag{1.1}$$

où  $A^i_j$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante contravariante du vecteur  $\mathbf{e}'_j$  sur la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

Inversement, l'ancienne base s'exprime sur la nouvelle par :

$$\mathbf{e}_i = B^k_i \mathbf{e}'_k \tag{1.2}$$

On peut ranger les nombres  $A^i_j$  et  $B^k_i$  dans des matrices carrées  $n \times n$ , avec la convention habituelle.

DÉFINITIONS : La matrice  $[A^{\bullet\bullet}]$  est appelée matrice de passage de  $\{\mathbf{e}_i\}$  à  $\{\mathbf{e}'_j\}$ .

La matrice  $[B^{\bullet\bullet}]$  est appelée matrice de passage de  $\{\mathbf{e}'_j\}$  à  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

La  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $[A^{\bullet\bullet}]$  contient les composantes contravariantes du vecteur  $\mathbf{e}'_j$  dans la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

En combinant les égalités (1.1) et (1.2) page 4, il vient :

$$\mathbf{e}'_j = B^k_i A^i_j \mathbf{e}'_k \quad (\text{double sommation sur } i \text{ et } k \Rightarrow \text{somme de } n^2 \text{ termes})$$

Les vecteurs d'une base étant indépendants, cette égalité ne peut être vraie que si  $j = k$ . On en déduit :

$$B^k_i A^i_j = \delta^k_j \quad \Leftrightarrow \quad [B^{\bullet\bullet}] [A^{\bullet\bullet}] = [I] \quad \text{où } [I] \text{ est la matrice unité.}$$

On en déduit la relation matricielle :  $[B^{\bullet\bullet}] = [A^{\bullet\bullet}]^{-1}$ . Les matrices  $[A^{\bullet\bullet}]$  et  $[B^{\bullet\bullet}]$  sont inverses.

Soit  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$  un vecteur donné par ses composantes contravariantes  $v^i$  sur la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ . Son expression sur la nouvelle base  $\{\mathbf{e}'_j\}$  est :

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v^i B^k_i \mathbf{e}'_k = v^k \mathbf{e}'_k$$

---

2. c'est-à-dire *a priori* ni orthogonale ni normée.

Les  $n$  composantes contravariantes  $\{v'^k\}$  du vecteur  $\mathbf{v}$  dans la nouvelle base  $\{\mathbf{e}'_k\}$  sont donc :

$$v'^k = B^k_i v^i \quad \Leftrightarrow \quad [v'^\bullet] = [B^\bullet_\bullet] [v^\bullet] \quad (1.3)$$

Alors que la nouvelle base  $\{\mathbf{e}'_i\}$  se définit sur l'ancienne base  $\{\mathbf{e}_i\}$  avec la matrice  $[A^\bullet_\bullet]$ , les composantes contravariantes  $v'^k$  du vecteur  $\mathbf{v}$  sur la nouvelle base se calculent en fonction des  $v^i$  avec la matrice  $[B^\bullet_\bullet] = [A^\bullet_\bullet]^{-1}$ . Cette constatation justifie le qualificatif de « contravariante » donné aux composantes ordinaires d'un vecteur sur la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

Il est facile de vérifier que le changement de base inverse est :

$$v^k = A^k_i v'^i \quad \Leftrightarrow \quad [v^\bullet] = [A^\bullet_\bullet] [v'^\bullet]$$

### 1.2.2 Base duale

Soit  $\mathbb{V}$  un espace vectoriel *euclidien* (on y a défini un produit scalaire).

DÉFINITION : On appelle base duale de la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  la base notée  $\{\mathbf{e}^j\}$  telle que :

$$\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = \delta^j_i \quad (1.4)$$

Par convention, les vecteurs de la base duale ont leur indice en haut.

REMARQUE : On peut interpréter géométriquement cette définition : un vecteur  $\mathbf{e}^i$  de la base duale est orthogonal à tous les vecteurs de la base initiale de numéro différent, et son produit scalaire avec le vecteur de même numéro vaut 1.

Il est facile de vérifier que la base duale de  $\{\mathbf{e}^i\}$  est la base initiale  $\{\mathbf{e}_i\}$ .

### 1.2.3 Composantes covariantes d'un vecteur

Soit  $\mathbf{v}$  un vecteur de  $\mathbb{V}$ . On note  $v_i$  ses composantes sur la base duale  $\{\mathbf{e}^i\}$ .

DÉFINITION : Les composantes  $v_i$  du vecteur  $\mathbf{v}$  sur la base duale sont appelées composantes covariantes de  $\mathbf{v}$ .

On peut donc écrire l'égalité :

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}^i$$

En calculant les produits scalaires  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k$  et  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^k$ , il vient :

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k = v_i \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = v_i \delta^i_k = v_k \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^k = v^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^k = v^i \delta^k_i = v^k \quad (1.5)$$

Les composantes covariantes d'un vecteur sont ses produits scalaires avec les vecteurs de la base initiale :

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v_i \mathbf{e}^i = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}^i) \mathbf{e}_i = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) \mathbf{e}^i \quad (1.6)$$

En effectuant le même changement de base que précédemment, on en déduit les formules de changement de base des composantes covariantes d'un vecteur :

$$v'_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_k = \mathbf{v} \cdot (A^i_k \mathbf{e}_i) = A^i_k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) = A^i_k v_i$$

$$v_k = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{v} \cdot (B^i_k \mathbf{e}'_i) = B^i_k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}'_i) = B^i_k v'_i$$

Contrairement aux composantes contravariantes, les formules de changement de base des composantes covariantes utilisent la matrice  $[A^\bullet_\bullet]$ , ce qui justifie le qualificatif de « covariante ».

On en déduit les matrices de passage entre les bases duales :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = v'_k \mathbf{e}^k &= A^i_k v_i \mathbf{e}'^k = v_i (A^i_k \mathbf{e}'^k) = v_i \mathbf{e}^i & \Rightarrow & \mathbf{e}^i = A^i_k \mathbf{e}'^k \\ \mathbf{v} = v_k \mathbf{e}^k &= B^i_k v'_i \mathbf{e}^k = v'_i (B^i_k \mathbf{e}^k) = v'_i \mathbf{e}'^i & \Rightarrow & \mathbf{e}'^i = B^i_k \mathbf{e}^k \end{aligned}$$

Les matrices de passage entre les bases duales sont les inverses des matrices de passage entre les bases initiales.

En résumé, tout vecteur de  $\mathbb{V}$  peut donc aussi bien être identifié par ses composantes contravariantes ou covariantes :

- les composantes contravariantes d'un vecteur sont les composantes habituelles c'est-à-dire les coefficients de la combinaison des vecteurs de la base ( $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ );
- les composantes covariantes sont les produits scalaires du vecteur avec les vecteurs de base ( $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ ); elles sont aussi les composantes ordinaires sur la base duale ( $\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}'^i$ ).

REMARQUES : Si la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  est orthonormée, on trouve facilement qu'elle est confondue avec sa base duale. On a alors la relation matricielle :  $[v^\bullet] = [v_\bullet]$ .

Dans ce cas, puisqu'il semble inutile de distinguer les variances, certains auteurs conviennent de mettre tous les indices à la même hauteur (généralement en bas), violant ainsi la convention de sommation d'Einstein.

Outre le fait que cette pratique astreint à n'utiliser que des bases orthonormées pour donner des composantes aux vecteurs, elle est peu recommandable car elle induit une confusion entre le concept de « composante » et le concept de « produit scalaire avec un vecteur de base ». Cette confusion est courante chez ceux qui ont l'habitude de n'utiliser que des bases orthonormées, elle risque d'entraîner des erreurs dans l'interprétation d'une formule indicielle. La règle qui impose une hauteur différente aux indices de sommation empêche cette confusion.

Par ailleurs, on montre facilement que la matrice de passage *entre deux bases orthonormées* est orthogonale :  $[B^\bullet_\bullet] = [A^\bullet_\bullet]^{-1} = [A^\bullet_\bullet]^T$

### 1.3 Tenseurs euclidiens réels

Soit  $\mathbb{V}$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ .

DÉFINITION : Une *tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre  $p$*  est une application  $p$ -linéaire de  $\mathbb{V}^p$  dans  $\mathbb{R}$ .

La  $p$ -linéarité signifie que l'application est linéaire par rapport à chacun de ses  $p$  arguments :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\dots, \mathbf{x}_k + \mathbf{x}'_k, \dots) &= \mathbf{T}(\dots, \mathbf{x}_k, \dots) + \mathbf{T}(\dots, \mathbf{x}'_k, \dots) & \forall k \in [1, \dots, p] \\ \mathbf{T}(\dots, \lambda \mathbf{x}_k, \dots) &= \lambda \mathbf{T}(\dots, \mathbf{x}_k, \dots) & \forall k \in [1, \dots, p] \end{aligned}$$

Par exemple, soient  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  trois vecteurs quelconques de  $\mathbb{V}$ . Un tenseur du troisième ordre  $\mathbf{T}$  est une application trilinéaire telle que :

$$\mathbf{T} : \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \in \mathbb{V}^3 \rightarrow \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}$$

EXEMPLES : L'application  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{V}^3 \rightarrow 3\mathbf{x} \cdot (2\mathbf{z} \wedge \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$  est un tenseur d'ordre 3 (on vérifie aisément qu'elle est trilinéaire).

En revanche, l'application  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in \mathbb{V}^3 \rightarrow 3\mathbf{x} \cdot (2\mathbf{z} + \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$  n'est pas un tenseur d'ordre 3 (elle n'est pas linéaire sur son second ni sur son troisième argument).

#### 1.3.1 Composantes d'un tenseur

Pour alléger les notations, on prend le cas d'un tenseur d'ordre 3. Si on se donne les vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  par leurs composantes contravariantes sur une base  $\{\mathbf{e}_i\}$  de  $\mathbb{V}$  :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \qquad \mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j \qquad \mathbf{z} = z^k \mathbf{e}_k$$

La trilinearité de l'opérateur  $\mathbf{T}$  entraîne :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{T}(x^i \mathbf{e}_i, y^j \mathbf{e}_j, z^k \mathbf{e}_k) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) x^i y^j z^k$$

On définit les  $n^3$  nombres :

$$T_{ijk} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$$

L'application (trilinéaire) du tenseur du troisième ordre  $\mathbf{T}$  aux trois vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , et  $\mathbf{z}$  s'écrit donc :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = T_{ijk} x^i y^j z^k$$

Les  $n^3$  nombres  $T_{ijk}$  sont appelés composantes<sup>3</sup> 123-covariantes (ou complètement covariantes) de  $\mathbf{T}$ . Ces  $n^3$  nombres déterminent complètement l'opérateur trilinéaire  $\mathbf{T}$ . Si on les connaît, on sait calculer le réel  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  pour tout triplet de vecteurs avec la formule ci-dessus.

On peut aussi choisir de donner certains ou tous les vecteurs par leurs composantes covariantes. Par exemple :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \qquad \mathbf{y} = y_j \mathbf{e}^j \qquad \mathbf{z} = z_k \mathbf{e}^k$$

On obtient alors :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k) x^i y_j z_k = T_i{}^{jk} x^i y_j z_k$$

Les  $n^3$  nombres  $T_i{}^{jk} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k)$  sont appelés composantes 1-covariantes 23-contravariantes du tenseur du troisième ordre  $\mathbf{T}$ .

Toutes les combinaisons sont possibles. Il existe donc différentes sortes de composantes du tenseur  $\mathbf{T}$ , repérées par des hauteurs d'indices différentes. Le nombre d'indices est égal à l'ordre du tenseur.

La généralisation aux tenseurs d'ordre  $p$  est immédiate : les tenseurs d'ordre  $p$  ont  $n^p$  composantes, chaque composante étant désignée avec  $p$  indices, inférieurs ou supérieurs.

## 1.3.2 Exemples de tenseurs euclidiens

### Le tenseur d'orientation

Soit  $\mathbb{V}_3$  un espace vectoriel euclidien de dimension trois<sup>4</sup>.

DÉFINITION : On appelle tenseur d'orientation le tenseur d'ordre 3, noté  $\mathbf{H}$ , défini par :

$$\mathbf{H} : \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \in \mathbb{V}_3^3 \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \in \mathbb{R}$$

où  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$  est le produit mixte des trois vecteurs.

On vérifie aisément que l'application  $\mathbf{H} : \mathbb{V}_3^3 \rightarrow \mathbb{R}$  est bien trilinéaire. Ce tenseur sera étudié en détail plus loin.

### Le tenseur métrique

Soit  $\mathbb{V}$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ .

DÉFINITION : On appelle tenseur métrique, noté  $\mathbf{G}$ , le tenseur du second ordre défini par :

$$\mathbf{G} : \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{R}$$

où  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$  est le produit scalaire des deux vecteurs.

On vérifie aisément que cette application  $\mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est bien bilinéaire. Ce tenseur sera étudié en détail plus loin.

3. Le terme de *composante* sera justifié plus loin.

4. Cette restriction est indispensable car le produit mixte de 3 vecteurs utilisé dans cet exemple n'est défini que dans un espace tridimensionnel. Il existe une généralisation à la dimension  $n$ . Elle implique l'introduction de la notion d'alterneur qui sort du cadre de ce cours. La dimension 3 est suffisante en mécanique classique.

### Les tenseurs euclidiens d'ordre 1 sont des vecteurs

Soit  $\mathbb{V}$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$  et soit  $\mathbf{v}$  un vecteur donné de  $\mathbb{V}$ . On définit le tenseur d'ordre 1 noté  $\mathcal{V}$  par :

$$\mathcal{V} : \mathbf{x} \in \mathbb{V} \rightarrow \mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \in \mathbb{R}$$

où  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}$  est le produit scalaire des deux vecteurs (on vérifie aisément que l'application  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$  est bien linéaire en  $\mathbf{x}$ ).

REMARQUE : Dans les cours d'algèbre, les tenseurs d'ordre 1 (applications linéaires  $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ ) sont appelés *formes linéaires*. On montre dans la section suivante que l'espace des tenseurs de tous ordres est un espace vectoriel, et donc en particulier l'espace des tenseurs d'ordre 1. Dans les cours d'algèbre, cet espace est appelé *espace dual* de  $\mathbb{V}$ . On verra plus loin qu'une base de cet espace est précisément la base duale  $\{\mathbf{e}^i\}$  définie précédemment.

Si  $\mathbf{x}$  est un vecteur donné par ses composantes contravariantes sur une base  $\{\mathbf{e}_i\} : \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i$ , l'application du tenseur du premier ordre  $\mathcal{V}$  au vecteur  $\mathbf{x}$  donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\mathbf{x}) &= \mathcal{V}(\mathbf{e}_i) x^i = v_i x^i \\ &= \mathbf{v} \cdot (x^i \mathbf{e}_i) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) x^i = v_i x^i \quad \forall x^i \end{aligned}$$

Les composantes covariantes  $v_i$  du tenseur du premier ordre  $\mathcal{V}$  sont égales aux composantes covariantes  $v_i$  du vecteur  $\mathbf{v}$ .

REMARQUE : Si on se donne le vecteur  $\mathbf{x}$  par ses composantes covariantes, on trouve  $v^i = \mathbf{v}^i$ .

On définit ainsi un isomorphisme entre les tenseurs du premier ordre et les vecteurs : à tout tenseur du premier ordre on associe de manière biunivoque le vecteur qui a les mêmes composantes. On vérifie aisément que cette association entre un tenseur d'ordre 1 et un vecteur par égalité de composantes est bien consistante à travers tout changement de base.

Dans la suite, on ne les distinguera plus et on écrira :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = v_i x^i = v^i x_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \tag{1.7}$$

Les vecteurs de  $\mathbb{V}$  peuvent toujours être considérés comme des tenseurs du premier ordre, et inversement. Dans l'égalité (1.7), à gauche  $\mathbf{v}$  est considéré comme un tenseur d'ordre 1 alors qu'à droite,  $\mathbf{v}$  est considéré comme un vecteur.

### 1.3.3 L'espace vectoriel des tenseurs d'ordre $p$

#### Opérations élémentaires sur les tenseurs

On définit deux opérations dans l'ensemble des tenseurs d'ordre  $p$  :

1. **Addition de deux tenseurs du même ordre** : soient  $\mathbf{T}_1$  et  $\mathbf{T}_2$  deux tenseurs d'ordre  $p$ .

DÉFINITION : On appelle *somme de  $\mathbf{T}_1$  et  $\mathbf{T}_2$*  le tenseur d'ordre  $p$ , noté  $\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2$ , défini par :

$$(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \mathbf{T}_1(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) + \mathbf{T}_2(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \quad \forall \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\} \in \mathbb{V}^p$$

On vérifie aisément que l'opérateur  $(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) : \mathbb{V}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est bien  $p$ -linéaire si  $\mathbf{T}_1$  et  $\mathbf{T}_2$  sont des tenseurs.

L'addition de deux tenseurs d'ordres différents n'a aucun sens.

2. **Multiplication d'un tenseur par un scalaire** : soit  $\lambda$  un scalaire et  $\mathbf{T}$  un tenseur d'ordre  $p$ .

DÉFINITION : On appelle *produit de  $\mathbf{T}$  par  $\lambda$*  le tenseur d'ordre  $p$  défini par :

$$(\lambda \mathbf{T})(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \lambda \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) \quad \forall \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\} \in \mathbb{V}^p$$

On vérifie aisément que l'opérateur  $(\lambda \mathbf{T}) : \mathbb{V}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est bien  $p$ -linéaire si  $\mathbf{T}$  est  $p$ -linéaire.

Muni de ces deux opérations, l'ensemble des tenseurs d'ordre  $p$  est un espace vectoriel; l'élément neutre de l'addition est le tenseur nul, noté  $\mathbf{0}$ , qui est défini par :  $\mathbf{0}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = 0 \quad \forall \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$  et l'élément neutre de la multiplication par un scalaire est le scalaire 1.

### Produit tensoriel de deux vecteurs

Considérons deux vecteurs (ou tenseurs d'ordre 1)  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$ .

DÉFINITION : On appelle produit tensoriel des deux vecteurs  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$  le tenseur du second ordre noté  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  défini par:

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w} : \forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathbb{V}^2 \rightarrow (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{y}) \in \mathbb{R}$$

On vérifie aisément que  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  est bien une application bilinéaire.

En exprimant les vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sur la base  $\{\mathbf{e}_i\}$ , on obtient les composantes covariantes du tenseur du second ordre  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= [\mathbf{v} \cdot (x^i \mathbf{e}_i)] [\mathbf{w} \cdot (y^j \mathbf{e}_j)] \\ &= [\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i] [\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_j] x^i y^j \\ (\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{ij} x^i y^j &= v_i w_j x^i y^j \quad \forall x^i y^j \end{aligned}$$

Les  $n^2$  composantes covariantes du tenseur du second ordre  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  sont donc les nombres :

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})_{ij} = v_i w_j$$

Le produit tensoriel de deux vecteurs n'est pas commutatif : on vérifie aisément que les tenseurs  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$  et  $\mathbf{w} \otimes \mathbf{v}$  sont des applications bilinéaires différentes :

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq (\mathbf{w} \otimes \mathbf{v})(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

On généralise sans difficulté : le produit tensoriel de  $p$  vecteurs est un tenseur d'ordre  $p$ . Par exemple, le produit tensoriel de 4 vecteurs est un tenseur d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{y})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{z})(\mathbf{d} \cdot \mathbf{t}) \\ (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{d})^{ijkl} &= a^i b^j c_k d_l \quad (\text{ici, les vecteurs } \mathbf{c} \text{ et } \mathbf{d} \text{ sont définis par leurs composantes covariantes}) \end{aligned}$$

### Une base pour l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre $p$

Pour faciliter la lecture des équations, on fait la démonstration pour l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre  $p = 3$  (le lecteur généralisera sans difficulté).

Considérons les  $n^3$  tenseurs d'ordre 3 construits par le produit tensoriel de 3 vecteurs<sup>5</sup> de la base duale  $\{\mathbf{e}^i\}$ . Leur application à un triplet  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$  de vecteurs quelconques s'écrit :

$$(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{x})(\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{y})(\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{z}) = x^i y^j z^k \quad (\text{voir (1.5) page 5})$$

Considérons maintenant un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 3 et son application à 3 vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= T_{ijk} x^i y^j z^k \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= T_{ijk} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k)(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad \forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \in \mathbb{V}^3 \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie quels que soient les vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$ , on en déduit l'égalité tensorielle suivante:

$$\mathbf{T} = T_{ijk} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k)$$

5. Ces vecteurs ne sont pas nécessairement distincts :  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$  est bien un tenseur du troisième ordre.

Cette égalité montre que tout tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 3 est une combinaison linéaire sur la  $n^3$ -base tensorielle  $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k\}$  de tenseurs de base. Le nom de « composante » précédemment donné aux  $n^3$  nombres  $T_{ijk}$  est donc pleinement justifié.

En exprimant les vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  par leurs composantes de différentes variances, on construit d'autres bases tensorielles et d'autres composantes de différentes variances du tenseur  $\mathbf{T}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_i^j{}_k (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k) && \text{(composantes 1-3-covariantes, 2-contravariantes)} \\ &= T_i^{jk} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) && \text{(composantes 1-covariantes, 2-3-contravariantes)} \\ &= \dots \end{aligned}$$

Le raisonnement se généralise facilement aux tenseurs d'ordre quelconque : une base dans l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre  $p$  est, par exemple, l'ensemble des  $n^p$  produits tensoriels :

$$\{\mathbf{e}_{i_1} \otimes \mathbf{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}\}$$

Dans cette  $n^p$ -base, les composantes du tenseur sont des composantes complètement contravariantes :

$$\mathbf{T} = T^{i_1 \dots i_p} \mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}$$

### Conclusion

L'espace des tenseurs d'ordre  $p$ , noté  $\mathbb{V}^{\otimes p}$ , est un espace vectoriel de dimension  $n^p$ . On peut construire des bases de cet espace en formant tous les produits tensoriels de  $p$  vecteurs de base (duale ou non) de  $\mathbb{V}$ .

EXEMPLE : L'une des bases de  $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$  est l'ensemble des 9 tenseurs du second ordre de base suivant :

$$\{\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3\}$$

Dans cette base, les composantes d'un tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  sont des composantes complètement contravariantes :  $\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$

### 1.3.4 Changement de base des tenseurs d'ordre $p$

Les tenseurs de base de  $\mathbb{V}^{\otimes p}$  sont des produits tensoriels de  $p$  vecteurs de base  $\mathbf{e}_i$  ou  $\mathbf{e}^j$  définis dans  $\mathbb{V}$ . Tout changement de base dans  $\mathbb{V}$  induit donc un changement de base dans  $\mathbb{V}^{\otimes p}$ . On va établir ici les formules de changement de base permettant de calculer les nouvelles composantes des tenseurs en fonction des anciennes.

Pour alléger les équations, on montre la démarche pour un tenseur d'ordre 3.

Soit un changement de base dans  $\mathbb{V}$  :

$$\mathbf{e}'_j = A^i{}_j \mathbf{e}_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}_j = B^i{}_j \mathbf{e}'_i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}'^j = B^j{}_i \mathbf{e}^i \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{e}^j = A^j{}_i \mathbf{e}'^i$$

On cherche la formule de changement de base des composantes  $T_{\bullet\bullet\bullet}$  du tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_i^{jk} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \\ &= T_i^{jk} (A^i{}_p \mathbf{e}'^p) \otimes (B^q{}_j \mathbf{e}'_q) \otimes (B^r{}_k \mathbf{e}'_r) \\ &= (A^i{}_p B^q{}_j B^r{}_k T_i^{jk}) (\mathbf{e}'^p \otimes \mathbf{e}'_q \otimes \mathbf{e}'_r) \end{aligned}$$

On en déduit les composantes de  $\mathbf{T}$  dans la nouvelle base :

$$T_p{}^{q'r} = A^i{}_p B^q{}_j B^r{}_k T_i^{jk}$$

L'analyse de cette démarche permet d'énoncer la règle suivante :

CONSTRUCTION DES FORMULES DE CHANGEMENT DE BASE : *Pour changer de base les composantes d'un tenseur, on somme chaque indice covariant avec des termes  $A^{\bullet\bullet}$  et on somme chaque indice contravariant avec des termes  $B^{\bullet\bullet}$ , tout en respectant les règles d'indices de la convention d'Einstein.*

*Cette règle est valable pour les tenseurs de tous ordres (y compris les vecteurs).*

### 1.3.5 Produit tensoriel de tenseurs

Le produit tensoriel n'a été défini qu'entre vecteurs :

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{y})$$

Les vecteurs étant des tenseurs d'ordre 1, on peut encore écrire (voir (1.7) page 8) :

$$(\mathbf{v} \otimes \mathbf{w})(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{w}(\mathbf{y})$$

Cette interprétation permet de généraliser la définition du produit tensoriel aux tenseurs de tous ordres :

**DÉFINITION :** Soient  $\mathbf{P}$  un tenseur d'ordre  $p$  et  $\mathbf{Q}$  un tenseur d'ordre  $q$ . On appelle produit tensoriel de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$ , noté  $\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$ , le tenseur d'ordre  $p+q$  défini par :

$$(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{p+q}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)\mathbf{Q}(\mathbf{x}_{p+1}, \dots, \mathbf{x}_{p+q})$$

On vérifie aisément que l'opérateur  $\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$  est bien linéaire par rapport à chacun de ses arguments (c'est-à-dire  $(p+q)$ -linéaire).

Par exemple, si  $\mathbf{P}$  est un tenseur d'ordre 2 et  $\mathbf{Q}$  un tenseur d'ordre 3,  $\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$  est un tenseur d'ordre 5 :

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &= \mathbf{P}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) & \forall \{\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \in \mathbb{V}^5 \\ &= P_{ij} Q_{kmn} v^i w^j x^k y^m z^n \\ &= P_i^j Q_k^m v^i w_j x^k y_m z^n & \dots \end{aligned}$$

Les égalités tensorielles suivantes donnent quelques exemples de décomposition de  $\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$  sur des tenseurs de base :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} &= P_{ij} Q_{kmn} (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n) & \Leftrightarrow & (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})_{ijklmn} = P_{ij} Q_{kmn} \\ &= P_i^j Q_k^m (\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}^n) & \Leftrightarrow & (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})_i^j k^m n = P_i^j Q_k^m \end{aligned}$$

On vérifie aisément que le produit tensoriel est associatif, non commutatif et distributif par rapport à l'addition des tenseurs :  $\mathbf{P} \otimes (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}') = \mathbf{P} \otimes \mathbf{Q} + \mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}'$ .

### 1.3.6 Traces d'un tenseur

Soit un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre  $p \geq 2$ . Ses composantes dans une certaine base sont un ensemble de  $n^p$  nombres à  $p$  indices (covariants ou contravariants).

On considère les  $n^{p-2}$  nombres calculés par une certaine sommation de ses composantes : on choisit deux indices de variance différente et on fait la sommation sur ces deux indices.

Par exemple, en faisant une sommation sur le second indice (covariant) et le quatrième indice (contra-variant) des composantes  $T_{i_1 i_2}^{i_3 i_4 \dots i_{p-1} i_p}$ , on définit les  $n^{p-2}$  nombres  $K_{i_1}^{i_3 i_5 \dots i_{p-1} i_p}$  calculés à partir des composantes de  $\mathbf{T}$  :

$$K_{i_1}^{i_3 i_5 \dots i_{p-1} i_p} = T_{i_1 k}^{i_3 k \dots i_{p-1} i_p} \quad (\text{sommation sur l'indice } k)$$

**PROPOSITION :** Les nombres  $K_{i_1}^{i_3 i_5 \dots i_{p-1} i_p}$  sont les composantes d'un tenseur.

**DÉMONSTRATION :** Jusqu'ici, tous les tenseurs ont été définis en se donnant un opérateur  $\mathbb{V}^p \rightarrow \mathbb{R}$  dont il suffisait de vérifier la  $p$ -linéarité pour affirmer sa tensorialité. Ici on tente de définir un tenseur  $\mathbf{K}$  par ses composantes obtenues par une manipulation des composantes dans une certaine base du tenseur  $\mathbf{T}$ . Pour



s'assurer que cette manipulation a un sens intrinsèque, il faut vérifier que si l'on fait la même manipulation dans une autre base, on obtient bien le même tenseur.

Pour alléger les écritures, on suppose que  $\mathbf{T}$  est d'ordre 4.

Ses composantes dans une  $n^4$ -base  $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m\}$  sont :  $T_{ij}^{km}$ . On définit les  $n^2$  nombres  $K_i^k = T_{ij}^{kj}$  (somme sur les indices 2 et 4).

Les composantes de  $\mathbf{T}$  dans une autre base  $\{\mathbf{e}'^i \otimes \mathbf{e}'^j \otimes \mathbf{e}'_k \otimes \mathbf{e}'_m\}$  sont  $T'_{pq}{}^{rs}$  et on définit pareillement les  $n^2$  nombres  $K_p'^r = T'_{pq}{}^{rq}$  (somme sur les mêmes indices 2 et 4).

La formule de changement de base des composantes de  $\mathbf{T}$  est :

$$T'_{pq}{}^{rs} = A^i{}_p A^j{}_q B^r{}_k B^s{}_m T_{ij}^{km}$$

En faisant la sommation sur les indices 2 et 4 des composantes de  $\mathbf{T}$  sur la nouvelle base, il vient :

$$K_p'^r = T'_{pq}{}^{rq} = A^i{}_p A^j{}_q B^r{}_k B^q{}_m T_{ij}^{km} = A^i{}_p B^r{}_k \delta_m^j T_{ij}^{km} = A^i{}_p B^r{}_k T_{ij}^{kj} = A^i{}_p B^r{}_k K_i^k$$

ce qui est la formule de changement de base des composantes covariante-contravariante d'un tenseur d'ordre 2. Il s'agit donc bien des composantes du même tenseur.

On obtient le même résultat avec des composantes d'autres variances.

**DÉFINITION :** La  $(r,s)$ -trace d'un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre  $p \geq 2$ , notée  $\text{Tr}^{(r,s)}\mathbf{T}$  est le tenseur d'ordre  $p-2$  dont les composantes sont la sommation sur les  $r^{\text{ème}}$  et  $s^{\text{ème}}$  indices des composantes de  $\mathbf{T}$ .

Cette sommation peut être faite sur les composantes dans toute base.

### 1.3.7 Tenseurs d'ordre 0 :

La trace d'un tenseur d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 0 :  $\text{Tr}\mathbf{T} = T^i{}_i = T_i^i$ . C'est donc la trace de la matrice de ses composantes mixtes  $[T_\bullet^\bullet]$  ou  $[T^\bullet_\bullet]$  dans toute base.

**DÉFINITION :** Les tenseurs d'ordre 0 sont appelés scalaires ou encore invariants. Ce sont des nombres réels dont la définition est telle que leur valeur est invariante par changement de base.

**REMARQUES :** Tous les nombres réels ne sont pas des scalaires. Par exemple, le réel défini comme la première composante d'un vecteur n'est pas un scalaire car il change avec la base. Il en est de même pour la somme des composantes d'un vecteur. En revanche, la norme d'un vecteur est un scalaire.

Tout réel résultat d'un problème de physique devrait être un scalaire (un tenseur d'ordre 0), car un résultat physique est en principe indépendant de la base que l'on utilise pour faire les calculs.

Si le résultat physique est un vecteur ou un tenseur, les composantes de ce vecteur ou de ce tenseur sur une base n'ont *a priori* aucune interprétation physique possible, sauf si la base utilisée a une signification physique particulière.

### 1.3.8 Produit tensoriel contracté simple

Soit  $\mathbf{P}$  un tenseur d'ordre  $p \geq 1$  et soit  $\mathbf{Q}$  un tenseur d'ordre  $q \geq 1$ .

**DÉFINITION :** On appelle produit tensoriel contracté simple des tenseurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  le tenseur noté  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$  et d'ordre  $p+q-2$ , défini par :

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \text{Tr}^{(p,p+1)}(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) = P_{i_1 \dots i_{p-1} k} Q^k{}_{j_2 \dots j_q} (\mathbf{e}^{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{i_{p-1}} \otimes \mathbf{e}^{j_2} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_q})$$

Pour calculer les composantes de  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ , le dernier indice des composantes de  $\mathbf{P}$  est sommé avec le premier indice des composantes de  $\mathbf{Q}$ .

On vérifie aisément que le produit tensoriel contracté simple n'est, en général, ni commutatif, ni associatif, mais qu'il est distributif par rapport à l'addition des tenseurs :  $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}') = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}'$ .

La commutativité n'est vraie que pour le produit contracté simple entre deux vecteurs.

REMARQUES : Le produit contracté simple de deux tenseurs d'ordre 1 (vecteurs)  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  est un tenseur d'ordre 0 :  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_i v^i = u^i v_i$ . D'autre part, le produit scalaire de ces deux vecteurs est :  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u^i \mathbf{e}_i) \cdot (v_j \mathbf{e}^j) = u^i v_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j) = u^i v_j \delta_i^j = u^i v_i$  ( $= u_i v^i$ ). Le produit scalaire de deux vecteurs est donc aussi le produit contracté simple de ces deux vecteurs. On peut donc employer le même symbole. Il faut toutefois perdre les habitudes de commutativité qu'on a avec le symbole «  $\cdot$  » considéré comme un produit scalaire. *Le produit contracté simple n'est commutatif qu'entre deux vecteurs.* Pour éviter cette ambiguïté, le produit contracté simple est parfois noté «  $\overline{\otimes}$  ».

### 1.3.9 Produit tensoriel contracté double

Soit  $\mathbf{P}$  un tenseur d'ordre  $p \geq 2$  et soit  $\mathbf{Q}$  un tenseur d'ordre  $q \geq 2$ .

DÉFINITION : On appelle produit tensoriel doublement contracté des tenseurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$ , le tenseur d'ordre  $p + q - 4$ , noté  $\mathbf{P} : \mathbf{Q}$ , défini par :

$$\mathbf{P} : \mathbf{Q} = \text{Tr}^{(p-1,p)} (\text{Tr}^{(p,p+2)} (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}))$$

EXEMPLE : Si  $p = 3$  et  $q = 3$  on obtient un tenseur d'ordre 2 :

$$\mathbf{P} : \mathbf{Q} = P^{ijk} Q_{jk}^m (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_m) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{P} : \mathbf{Q})^{im} = P^{ijk} Q_{jk}^m$$

Pour calculer les composantes de  $\mathbf{P} : \mathbf{Q}$ , les deux derniers indices des composantes de  $\mathbf{P}$  sont sommés avec les deux premiers indices des composantes de  $\mathbf{Q}$ .

On vérifie aisément que le produit tensoriel contracté double n'est, en général, ni commutatif, ni associatif, mais qu'il est distributif par rapport à l'addition des tenseurs :  $\mathbf{P} : (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}') = \mathbf{P} : \mathbf{Q} + \mathbf{P} : \mathbf{Q}'$ .

REMARQUE : Le produit doublement contracté est parfois noté  $\overline{\otimes}$ .

On généralise facilement au produit  $r$  fois contracté de deux tenseurs d'ordre  $p \geq r$  et  $q \geq r$ . On note ce produit : «  $\overline{\otimes}^r$  ». Le résultat est un tenseur d'ordre  $p + q - 2r$  :

$$\mathbf{P} \overline{\otimes}^r \mathbf{Q} = P^{k_1 \dots k_{p-r} i_1 \dots i_r} Q_{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{q-r}} (\mathbf{e}_{k_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{k_{p-r}} \otimes \mathbf{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}^{j_{q-r}})$$

En particulier, si  $\mathbf{P}$  est un tenseur d'ordre  $p$ , son application à  $p$  vecteurs peut s'écrire :

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p) = \mathbf{P} \overline{\otimes}^p (\mathbf{x}_1 \otimes \dots \otimes \mathbf{x}_p) \quad (\text{égalité de tenseurs d'ordre 0})$$

## 1.4 Tenseur métrique

DÉFINITION : On appelle tenseur métrique le tenseur d'ordre 2 défini par :

$$\mathbf{G} : \forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{R}$$

Ce tenseur est d'ordre 2, il y a donc quatre sortes de composantes :

$$g_{ij} = \mathbf{G}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad g_i^j = \mathbf{G}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j \quad (1.8)$$

$$g^{ij} = \mathbf{G}(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j \quad g^i_j = \mathbf{G}(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_j^i \quad (1.9)$$

Il est remarquable de constater que les composantes de variances mixtes du tenseur métrique ont la même valeur dans toute base. Les composantes mixtes du tenseur métrique se rangent dans la matrice unité :  $[g^{\bullet \bullet}] = [g_{\bullet \bullet}] = [I]$ .

En revanche, les termes des deux matrices de composantes  $[g_{\bullet \bullet}]$  et  $[g^{\bullet \bullet}]$  dépendent de la base. Ces deux matrices sont symétriques :  $g_{ij} = g_{ji}$  et  $g^{ij} = g^{ji}$  car le produit scalaire de deux vecteurs est commutatif.

Les différentes manières d'écrire le produit scalaire de deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  en fonction de leurs composantes sont donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{G} : (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) = \mathbf{G} : (\mathbf{y} \otimes \mathbf{x}) \\ &= g_{ij} x^i y^j = g^{ij} x_i y_j = x^i y_i = x_i y^i\end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ : Soit  $\mathbf{T}$  un tenseur d'ordre  $p$ , on a l'égalité  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T}$ .  
En effet,

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{T} = g_i^j T_j \dots (\mathbf{e}^i \otimes \dots) = \delta_i^j T_j \dots (\mathbf{e}^i \otimes \dots) = T_i \dots (\mathbf{e}^i \otimes \dots) = \mathbf{T} \quad (1.10)$$

On montre aisément de la même manière que  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T}$ .

Soit  $\mathbf{v}$  un vecteur. On a donc en particulier  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}$ .

Si l'on calcule le produit contracté  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{v}$  avec les composantes non mixtes, il vient :

$$\mathbf{v} = g^{ji} v_i \mathbf{e}_j \Leftrightarrow v^j = g^{ji} v_i \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = g_{ji} v^j \mathbf{e}^j \Leftrightarrow v_j = g_{ji} v^j \quad (1.11)$$

Ces formules montrent que les composantes non mixtes de  $\mathbf{G}$  permettent de calculer les composantes contravariantes d'un vecteur en fonction de ses composantes covariantes et inversement. Cette propriété, appelée « ascenseur d'indice », sera généralisée aux tenseurs de tous ordres (voir plus loin page 14).

Matriciellement, les relations (1.11) s'écrivent:  $[v^\bullet] = [g^{\bullet\bullet}] [v_\bullet]$  et  $[v_\bullet] = [g_{\bullet\bullet}] [v^\bullet]$ .

On en déduit la relation matricielle :  $[g^{\bullet\bullet}] = [g_{\bullet\bullet}]^{-1}$ .

On définit le nombre *non scalaire*  $g$ , qui interviendra dans la suite :

$$g = \det [g_{\bullet\bullet}] \quad \Leftrightarrow \quad \det [g^{\bullet\bullet}] = \frac{1}{g} \quad (1.12)$$

En appliquant (1.11) aux vecteurs de base, on obtient une relation entre les vecteurs de base et ceux de sa base duale :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_i = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}_i &= g_{pq} (\mathbf{e}_i)^q \mathbf{e}^p = g_{pq} \delta_i^q \mathbf{e}^p = g_{pi} \mathbf{e}^p = g_{ip} \mathbf{e}^p & \Rightarrow & \quad \mathbf{e}_i = g_{ip} \mathbf{e}^p \\ \mathbf{e}^i = \mathbf{G} \cdot \mathbf{e}^i &= g^{pq} (\mathbf{e}^i)_q \mathbf{e}_p = g^{pq} \delta_q^i \mathbf{e}_p = g^{pi} \mathbf{e}_p = g^{ip} \mathbf{e}_p & \Rightarrow & \quad \mathbf{e}^i = g^{ip} \mathbf{e}_p\end{aligned}$$

Ces relations vont permettre de calculer les composantes d'une certaine variance d'un tenseur  $\mathbf{T}$  quelconque en fonction de ses composantes dans une autre variance.

Pour alléger les écritures, on suppose qu'un tenseur  $\mathbf{T}$  est d'ordre 3 et que l'on connaît ses composantes  $T_{\bullet\bullet}^\bullet$ . On cherche, par exemple, ses composantes  $T^{\bullet\bullet}$  :

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= T_{ij}^k \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k = T_{ij}^k (g^{ip} \mathbf{e}_p) \otimes \mathbf{e}^j \otimes (g_{kq} \mathbf{e}^q) \\ &= g^{ip} g_{kq} T_{ij}^k \mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^q \Rightarrow T^p_{jq} = g^{ip} g_{kq} T_{ij}^k\end{aligned}$$

On en déduit la règle suivante :

RÈGLE DE « L'ASCENSEUR D'INDICES » : Pour « élever un indice » de composante, il faut le sommer avec  $g^{\bullet\bullet}$  et pour « abaisser un indice », il faut le sommer avec  $g_{\bullet\bullet}$ .

## 1.5 Tenseur d'orientation dans $\mathbb{V}_3$

DÉFINITION : On appelle tenseur d'orientation dans  $\mathbb{V}_3$ , noté  $\mathbf{H}$ , le tenseur d'ordre trois défini par :

$$\mathbf{H} : \{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\} \in \mathbb{V}^3 \longrightarrow \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \in \mathbb{R}$$

où  $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$  est le produit mixte des trois vecteurs.

Les indices  $i, j$  et  $k$  varient de 1 à 3 et on suppose en outre que la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  est directe.

REMARQUE : Cette définition n'a de sens que si  $\mathbb{V}$  est de dimension 3, ce qui sera suffisant en mécanique des milieux continus. En effet, le produit vectoriel de deux vecteurs et le produit mixte de trois vecteurs n'ont pas de sens pour des dimensions supérieures<sup>6</sup>.

On note  $h_{ijk}$  les composantes covariantes et  $h^{ijk}$  les composantes contravariantes de  $\mathbf{H}$  dans une base :

$$\mathbf{H} = h_{ijk} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}^k = h^{ijk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

On calcule d'abord les composantes complètement covariantes de  $\mathbf{H}$ :

$$h_{ijk} = \mathbf{H}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) = [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k]$$

Les propriétés du produit mixte entraînent que:

- les composantes qui ont deux indices égaux sont nulles;
- une permutation paire des indices ne change pas sa valeur ;
- une permutation impaire des indices change son signe.

Il suffit donc de calculer  $h_{123} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) > 0$  car la base est directe.

Les composantes covariantes du vecteur  $\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3$  sont :

$$(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_1 = h_{123} > 0 \quad (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \cdot \mathbf{e}_3 = 0$$

On en déduit que :  $(\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = h_{123} \mathbf{e}^1$  et donc :  $\|\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\| = h_{123} \|\mathbf{e}^1\|$ .

$$\begin{aligned} (h_{123})^2 \|\mathbf{e}^1\|^2 &= \|\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\|^2 = (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \cdot (\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) = [\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \\ &= ((\mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3) \wedge \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = ((\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_3 - (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 \quad (\text{formule du double produit vectoriel}) \\ &= (g_{22} \mathbf{e}_3 - g_{23} \mathbf{e}_2) \cdot \mathbf{e}_3 = g_{22} g_{33} - g_{23} g_{23} \\ h_{123} \|\mathbf{e}^1\| &= \sqrt{g_{22} g_{33} - g_{23} g_{23}} \\ h_{123} &= \frac{\sqrt{g_{22} g_{33} - g_{23} g_{23}}}{\|\mathbf{e}^1\|} \end{aligned}$$

Or,  $\|\mathbf{e}^1\|^2 = \mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}^1 = g^{11}$ , et d'autre part  $[g^{\bullet\bullet}] = [g_{\bullet\bullet}]^{-1} \Rightarrow g^{11} = \frac{g_{22} g_{33} - g_{23} g_{32}}{g}$ .

Il reste donc :  $h_{123} = \sqrt{g}$

Ainsi, les composantes covariantes non nulles du tenseur d'orientation  $\mathbf{H}$  sont :

$$h_{123} = h_{231} = h_{312} = -h_{132} = -h_{213} = -h_{321} = \sqrt{g} \quad (1.13)$$

Les composantes contravariantes  $h^{ijk} = [\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j, \mathbf{e}^k]$  ont les mêmes propriétés de permutation d'indices que les composantes  $h_{ijk}$ . Avec un calcul analogue au précédent, on trouve que les composantes contravariantes non nulles de  $\mathbf{H}$  sont :

$$h^{123} = h^{231} = h^{312} = -h^{132} = -h^{213} = -h^{321} = \frac{1}{\sqrt{g}} \quad (1.14)$$

Les composantes mixtes de  $\mathbf{H}$  ont des expressions compliquées qu'on évite d'utiliser. On peut toujours les calculer avec la règle de « l'ascenseur d'indices » page 14.

6. Il existe une généralisation de ce concept pour des espaces de dimension supérieure à 3, voir note 4 page 7.

### 1.5.1 Application : produits vectoriels dans $\mathbb{V}_3$

Soient deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\mathbb{V}_3$  et soit  $\mathbf{z} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= (x^i \mathbf{e}_i) \wedge (y^j \mathbf{e}_j) = x^i y^j \mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j \\ z_k &= \mathbf{z} \cdot \mathbf{e}_k = x^i y^j [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k] \\ &= x^i y^j h_{ijk} = h_{kij} x^i y^j \end{aligned}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs peut donc s'écrire avec le tenseur d'orientation :

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{H} : (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})_k = h_{kij} x^i y^j \\ (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})^k = h^{kij} x_i y_j \end{cases} \quad (1.15)$$

### 1.5.2 Identités algébriques importantes

Le produit contracté simple  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}$  est un tenseur d'ordre 4 de composantes :

$$\begin{aligned} h_{ijk} h^{kmn} &= (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j)_k (\mathbf{e}^m \wedge \mathbf{e}^n)^k = (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}^m \wedge \mathbf{e}^n) \\ &= [\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}^m \wedge \mathbf{e}^n] = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{e}_j \wedge (\mathbf{e}^m \wedge \mathbf{e}^n)) \\ &= \mathbf{e}_i \cdot ((\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^n) \mathbf{e}^m - (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}^m) \mathbf{e}^n) \\ h_{ijk} h^{kmn} &= \delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m \end{aligned} \quad (1.16)$$

On a donc l'identité tensorielle :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} &= (\delta_i^m \delta_j^n - \delta_i^n \delta_j^m) \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{H} &= \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j \otimes (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) \end{aligned} \quad (1.17)$$

On en déduit les composantes du produit  $\mathbf{H} : \mathbf{H}$  (c'est un tenseur d'ordre 2) :

$$h_{ijk} h^{jkn} = -h_{ijk} h^{kjn} = -\delta_i^j \delta_j^n + \delta_i^n \delta_j^j = -\delta_i^n + 3\delta_i^n = 2\delta_i^n$$

On en déduit l'identité tensorielle :

$$\mathbf{H} : \mathbf{H} = 2\mathbf{G} \quad (1.18)$$

## 1.6 Propriétés algébriques des tenseurs réels du second ordre

Les tenseurs du second ordre jouent un rôle très important en mécanique des milieux continus. On consacre cette section à leur étude. Certaines des propriétés suivantes sont particulières aux tenseurs du second ordre construits sur  $\mathbb{V}_3$ .

Les tenseurs réels du second ordre sont les applications bilinéaires  $\mathbb{V}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Ils sont dans un espace vectoriel de dimension  $n^2$  noté  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$  (si  $n = 3$ , sa dimension est 9, l'espace est noté  $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ ).

Les tenseurs de base de cet espace sont les  $n^2$  produits tensoriels de deux vecteurs de base de  $\mathbb{V}$  ou de sa duale.

Tout tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  s'écrit donc :

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j = T^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = T_i^j \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j$$

Son application à deux vecteurs  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  est un scalaire :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = T^{ij} x_i y_j = T_{ij} x^i y^j = T^i_j x_i y^j = T_i^j x^i y_j$$

On peut écrire ce scalaire avec des opérations tensorielles :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{T} : (\mathbf{x} \otimes \mathbf{y})$$

### 1.6.1 Produit scalaire et norme dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$

Le produit contracté double de deux tenseurs du second ordre est un *scalaire*.

Pour deux tenseurs du second ordre, le produit « : » est commutatif. En effet :

$$\mathbf{P} : \mathbf{Q} = P^i_j Q_i^j = Q_i^j P^i_j = \mathbf{Q} : \mathbf{P}$$

En outre, on vérifie aisément que :

$$\mathbf{T} : \mathbf{T} = T^i_j T_i^j = \text{Tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T) = \text{Tr}([T^\bullet \bullet] [T^\bullet \bullet]^T) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (T^i_j)^2 > 0 \quad \forall \mathbf{T} \quad (1.19)$$

et que  $\mathbf{0} : \mathbf{T} = \mathbf{T} : \mathbf{0} = 0$ .

Ces trois propriétés permettent d'affirmer que le produit contracté double est un *produit scalaire* dans l'espace vectoriel  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ . Muni de ce produit scalaire, l'espace des tenseurs du second ordre  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$  est un espace vectoriel euclidien.

On peut donc définir la *norme euclidienne* d'un tenseur du second ordre :

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}} \quad (1.20)$$

### 1.6.2 Transposé d'un tenseur du second ordre

DÉFINITION : On dit que le tenseur  $\mathbf{U}$  est le transposé du tenseur  $\mathbf{T}$  si :

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathbb{V} \quad (1.21)$$

Le tenseur transposé du tenseur  $\mathbf{T}$  sera noté  $\mathbf{T}^T$ .

Dans une base quelconque, les relations entre les composantes de  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}^T$  sont :

$$\begin{aligned} (T^T)_{ij} = T_{ji} &\Leftrightarrow [(T^T)_{\bullet\bullet}] = [T_{\bullet\bullet}]^T & ; & & (T^T)^{ij} = T^{ji} &\Leftrightarrow & [(T^T)^{\bullet\bullet}] = [T^{\bullet\bullet}]^T \\ (T^T)^i_j = T^j_i &\Leftrightarrow [(T^T)^\bullet \bullet] = [T^\bullet \bullet]^T & ; & & (T^T)_i^j = T^j_i &\Leftrightarrow & [(T^T)^\bullet \bullet] = [T^\bullet \bullet]^T \end{aligned}$$

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \mathbf{Q} = \text{Tr}(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}^T) &= \text{Tr}(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{Q}) = \text{Tr}(\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{P}) & (1.22) \\ \mathbf{T} : \mathbf{T} = \mathbf{T}^T : \mathbf{T}^T &\Rightarrow \|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{T}^T\| \end{aligned}$$

### 1.6.3 Tenseurs du second ordre symétriques

DÉFINITION : On dit qu'un tenseur du second ordre  $\mathbf{S}$  est symétrique s'il est égal à son transposé.

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{S}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathbb{V}^2$$

Les composantes de  $\mathbf{S}$  dans une base ont donc les propriétés suivantes :

$$S_{ij} = S_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad [S_{\bullet\bullet}] = [S_{\bullet\bullet}]^T \quad ; \quad S^{ij} = S^{ji} \quad \Leftrightarrow \quad [S^{\bullet\bullet}] = [S^{\bullet\bullet}]^T \quad (1.23)$$

$$S^i_j = S^j_i \quad \Leftrightarrow \quad [S^\bullet \bullet] = [S^\bullet \bullet]^T \quad ; \quad S_i^j = S^j_i \quad \Leftrightarrow \quad [S^\bullet \bullet] = [S^\bullet \bullet]^T \quad (1.24)$$

Remarquer que les matrices de composantes covariantes  $[S_{\bullet\bullet}]$  et contravariantes  $[S^{\bullet\bullet}]$  sont des matrices symétriques. En revanche, les matrices des composantes mixtes d'un tenseur du second ordre symétrique  $[S^\bullet \bullet]$  et  $[S^\bullet \bullet]$  ne sont pas symétriques en général<sup>7</sup>.

7. Sauf si la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  est orthonormée.

Les tenseurs du second ordre symétriques constituent un sous-espace vectoriel car l'addition et la multiplication par un scalaire conservent la symétrie. Ce sous-espace est de dimension  $n(n+1)/2$ . On le notera  $\mathbb{V}^{\otimes 2s}$ . Une base de ce sous-espace est par exemple la 6-base :  $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i\}$ .

On vérifie aisément la propriété suivante :

$$\mathbf{S} \text{ symétrique} \Leftrightarrow \mathbf{H} : \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (1.25)$$

### 1.6.4 Tenseurs du second ordre antisymétriques

DÉFINITION : On dit qu'un tenseur du second ordre  $\mathbf{A}$  est antisymétrique s'il est opposé à son transposé :

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\mathbf{A}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathbb{V}^2$$

Les composantes de  $\mathbf{A}$  dans une base ont donc les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} A_{ij} = -A_{ji} &\Leftrightarrow [A_{\bullet\bullet}] = -[A_{\bullet\bullet}]^T & ; & \quad A^{ij} = -A^{ji} &\Leftrightarrow [A^{\bullet\bullet}] = -[A^{\bullet\bullet}]^T \\ A^i_j = -A^j_i &\Leftrightarrow [A^{\bullet\cdot}] = -[A^{\bullet\cdot}]^T & ; & \quad A_i^j = -A^j_i &\Leftrightarrow [A_{\cdot\bullet}] = -[A_{\cdot\bullet}]^T \end{aligned}$$

Remarquer que les matrices de composantes covariantes  $[A_{\bullet\bullet}]$  et contravariantes  $[A^{\bullet\bullet}]$  sont des matrices antisymétriques (elles ont donc une diagonale nulle). En revanche, les matrices des composantes mixtes d'un tenseur du second ordre symétrique  $[A_{\cdot\cdot}]$  et  $[A^{\cdot\cdot}]$  ne sont pas antisymétriques en général<sup>8</sup>.

Les tenseurs du second ordre antisymétriques constituent un sous-espace vectoriel car l'addition et la multiplication par un scalaire conservent l'antisymétrie. Ce sous-espace est de dimension  $n(n-1)/2$  et une base de ce sous-espace est par exemple  $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i\}$ . On le notera  $\mathbb{V}^{\otimes 2a}$ .

On vérifie aisément la propriété suivante :

$$\mathbf{A} \text{ antisymétrique} \quad \Leftrightarrow \quad \{\mathbf{G} : \mathbf{A} = \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}\} \quad (1.26)$$

### 1.6.5 Vecteur adjoint à un tenseur antisymétrique

On se limite ici au cas particulier où  $n = 3$ . La dimension de l'espace vectoriel des tenseurs antisymétriques est donc  $n(n-1)/2 = 3$ .

DÉFINITION : On appelle vecteur adjoint au tenseur du second ordre antisymétrique  $\mathbf{A}$  le vecteur noté  $\mathbf{a}$  défini par :

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \mathbf{H} : \mathbf{A} \quad (1.27)$$

En utilisant (1.16) page 16, on montre facilement que :

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{A} \quad (1.28)$$

On construit ainsi un isomorphisme entre les tenseurs du second ordre antisymétriques et les vecteurs.

En utilisant (1.15) page 16, on en déduit la propriété suivante :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{v} \quad (1.29)$$

---

8. Sauf si la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  est orthonormée.

### 1.6.6 Décomposition en parties symétrique et antisymétrique

Le sous-espace des tenseurs du second ordre symétriques  $\mathbb{V}^{\otimes 2s}$  et le sous-espace des tenseurs du second ordre antisymétriques  $\mathbb{V}^{\otimes 2a}$  sont orthogonaux. En effet, soient  $\mathbf{S} \in \mathbb{V}^{\otimes 2s}$  et  $\mathbf{A} \in \mathbb{V}^{\otimes 2a}$ , leur produit scalaire est nul :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \mathbf{A} &= S_{ij} A^{ij} = -S_{ij} A^{ji} = -S_{ji} A^{ji} = -S_{ij} A^{ij} = -\mathbf{S} : \mathbf{A} \\ \Rightarrow \mathbf{S} : \mathbf{A} &= 0 \end{aligned} \quad (1.30)$$

Tout tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  peut donc être décomposé de manière unique en la somme d'un tenseur symétrique et antisymétrique. La décomposition est :

$$\mathbf{T} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^T)}_{\text{sym}(\mathbf{T})} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^T)}_{\text{antisym}(\mathbf{T})} \quad (1.31)$$

On les appelle respectivement *partie symétrique* de  $\mathbf{T}$  et *partie antisymétrique* de  $\mathbf{T}$ .

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

$$\|\mathbf{T}\|^2 = \|\text{sym} \mathbf{T}\|^2 + \|\text{antisym} \mathbf{T}\|^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \|\mathbf{T}\| \geq \|\text{sym} \mathbf{T}\| \\ \|\mathbf{T}\| \geq \|\text{antisym} \mathbf{T}\| \end{cases} \quad (1.32)$$

### 1.6.7 Décomposition en parties sphérique et déviatorique

DÉFINITIONS : On dit qu'un tenseur du second ordre  $\mathbf{S}$  est *sphérique* s'il est un multiple du tenseur métrique ( $\mathbf{S} = \alpha \mathbf{G}$ ).

On dit qu'un tenseur  $\mathbf{D}$  est *déviatorique* (on dit aussi que c'est un *déviateur*) si sa trace est nulle ( $\text{Tr} \mathbf{D} = 0$ ).

Le sous-espace des tenseurs sphériques est un espace vectoriel (car l'addition et la multiplication par un scalaire conservent la sphéricité). Ce sous-espace est de dimension 1. De même, le sous-espace des déviateurs est un espace vectoriel car l'addition et la multiplication par un scalaire conservent la trace nulle. Ce sous-espace est de dimension  $n^2 - 1$ . Ces deux sous-espaces sont orthogonaux. En effet, si  $\mathbf{S}$  est sphérique et  $\mathbf{D}$  est un déviateur, leur produit scalaire  $\mathbf{S} : \mathbf{D}$  est nul car :

$$\mathbf{S} : \mathbf{D} = \alpha \mathbf{G} : \mathbf{D} = \alpha \text{Tr}(\mathbf{D}) = 0 \quad (1.33)$$

Tout tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  peut donc être décomposé de manière unique en la somme d'un tenseur sphérique et d'un déviateur. La décomposition est :

$$\mathbf{T} = \underbrace{\frac{\text{Tr}(\mathbf{T})}{n} \mathbf{G}}_{\text{sph} \mathbf{T}} + \underbrace{\mathbf{T} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{T})}{n} \mathbf{G}}_{\text{dev} \mathbf{T}} \quad (1.34)$$

On vérifie aisément que  $\text{Tr} \text{dev} \mathbf{T} = \text{Tr} \left( \mathbf{T} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{T})}{n} \mathbf{G} \right) = 0$ , car  $\text{Tr}(\mathbf{G}) = n$ . On les appelle respectivement *partie sphérique* de  $\mathbf{T}$  et *partie déviatorique* de  $\mathbf{T}$ .

REMARQUE SUR LE VOCABULAIRE : Les mots « déviateur » et « déviatorique » sont consacrés par l'usage mais peuvent induire en erreur : quand on considère un tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  comme un endomorphisme linéaire de  $\mathbb{V}$  (voir 1.6.8), on constate bien qu'un tenseur sphérique ne dévie pas les vecteurs et que la partie déviatorique les dévie. Cependant, la partie sphérique de  $\mathbf{T}$  contribue aussi à la valeur de la déviation due à  $\mathbf{T}$ . En effet, soit  $\mathbf{w} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{S} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{v}$ , le cosinus de la déviation est :

$$\cos(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{w}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{D}) \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{S} + \mathbf{D}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{S} + \mathbf{D}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{S} + \mathbf{D}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} = \frac{\text{Tr} \mathbf{T}}{n \|\mathbf{S} + \mathbf{D}\| \cdot \|\mathbf{v}\|} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\| \|\mathbf{S} + \mathbf{D}\| \cdot \|\mathbf{v}\|}$$

Il vaudrait mieux appeler les déviateurs : « tenseurs de trace nulle ».



### 1.6.8 Endomorphismes linéaires $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ et tenseurs d'ordre 2

Le produit contracté simple d'un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 2 et d'un vecteur  $\mathbf{v}$  est un vecteur :

$$\mathbf{w} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = T^i_j v^j \mathbf{e}_i = T^{ij} v_j \mathbf{e}_i = T_i^j v_j \mathbf{e}^i = T_{ij} v^j \mathbf{e}^i$$

Les composantes de  $\mathbf{w}$  sont :  $w^i = T^i_j v^j = T^{ij} v_j$  ou bien  $w_i = T_i^j v_j = T_{ij} v^j$ .

REMARQUE : Ces sommations peuvent s'évaluer avec des opérations matricielles :

$$[\mathbf{w}^\bullet] = [T^\bullet \cdot] [\mathbf{v}^\bullet] = [T^{\bullet\bullet}] [\mathbf{v}_\bullet] \qquad [\mathbf{w}_\bullet] = [T_\bullet \cdot] [\mathbf{v}_\bullet] = [T_{\bullet\bullet}] [\mathbf{v}^\bullet]$$

On vérifie aisément la non commutativité :  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \neq \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$ .

À tout tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  on peut donc associer un endomorphisme linéaire  $\mathcal{L} : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  tel que  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = \mathcal{L}(\mathbf{v})$ . Puisque  $w^i = T^i_j v^j$ , le terme général de la matrice de l'endomorphisme  $\mathcal{L}$  dans la base  $\{\mathbf{e}_i\}$  est :  $\mathcal{L}^i_j = T^i_j$ .

Inversement, si l'on se donne un endomorphisme linéaire  $\mathcal{L}$ , de matrice  $\mathcal{L}^i_j$ , on peut lui associer un tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  défini par :  $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathcal{L}(\mathbf{v})$ . On vérifie aisément que les composantes mixtes de ce tenseur sont :  $T^i_j = \mathcal{L}^i_j$ .

Il existe donc une bijection entre l'ensemble des tenseurs d'ordre 2 et l'ensemble des endomorphismes linéaires de  $\mathbb{V}$  :  $\mathcal{L}$  est l'endomorphisme linéaire de  $\mathbb{V}$  dont la matrice est  $[T^\bullet \cdot]$  et  $\mathbf{T}$  est le tenseur du second ordre qui a pour composantes  $T^i_j$  les termes de la matrice  $\mathcal{L}^i_j$ . On vérifie aisément que cet isomorphisme défini par égalité de matrices dans une certaine base est consistant à travers tout changement de base.

On les confond désormais et on écrit :

$$\mathcal{L} = \mathbf{T} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{L}(\mathbf{v})^\bullet] = [T^\bullet \cdot] [\mathbf{v}^\bullet] = [\mathcal{L}^\bullet \cdot] [\mathbf{v}^\bullet] \quad (1.35)$$

REMARQUES : Le produit contracté  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}$  est aussi un vecteur. On peut de la même manière faire une autre bijection  $\mathcal{B}^t : \mathbb{V}^{\otimes 2} \leftrightarrow \mathbb{L}$ , en faisant correspondre la matrice de l'endomorphisme avec les composantes  $[T_\bullet \cdot] : \mathcal{L}^i_j = T^i_j$ . On vérifie aisément que le tenseur  $\mathbf{T}'$  associé à l'endomorphisme  $\mathcal{L}$  par la bijection  $\mathcal{B}^t$  est le transposé de  $\mathbf{T}$ . Lorsque  $\mathbf{T}$  est symétrique, les deux bijections se confondent. Dans la suite, on ne parlera que d'un seul endomorphisme de  $\mathbb{V}$  associé à  $\mathbf{T}$ , celui défini par  $\mathcal{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}$ .

D'autre part, puisque  $\mathbf{G} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{v}$ , on en déduit que l'endomorphisme linéaire associé au tenseur métrique est l'identité.

#### Opération interne dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$

Le produit contracté simple de deux tenseurs du second ordre est un tenseur du second ordre. Le produit contracté simple est donc un produit interne dans  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$  :

$$\mathbf{W} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} \in \mathbb{V}^{\otimes 2}$$

On vérifie aisément que l'endomorphisme linéaire  $\mathcal{W}$  associé à  $\mathbf{W}$  est la composition des endomorphismes linéaires  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{U}$  associés à  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{U}$ . En vertu de la bijection (1.35), on écrit :

$$\mathcal{W} = \mathcal{T} \circ \mathcal{U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{W} \quad (1.36)$$

#### Produit combiné dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$

On dispose dans  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$  du produit interne «  $\cdot$  » (non commutatif) et du produit scalaire «  $\cdot$  » (commutatif dans  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ ). Leur combinaison, que l'on pourrait appeler « produit mixte » dans  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ , donne un scalaire :

$$\begin{aligned} A_{ij} (B^{ik} C_k^j) &= B^{ik} (A_{ij} C_k^j) &= C_k^j (B^{ik} A_{ij}) \\ \mathbf{A} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= \mathbf{B} : (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}^T) &= \mathbf{C} : (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (1.37)$$

Ces identités, similaires au produit mixte des vecteurs, sont utiles pour factoriser des expressions tensorielles de scalaires.

### Puissances entières d'un tenseur du second ordre

Le produit simplement contracté de deux tenseurs du second ordre étant un produit interne, on peut définir la puissance entière d'un tenseur du second ordre :

$$\mathbf{T}^q = \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \cdot \dots \cdot \mathbf{T}}_{q \text{ fois}} ; q \in \mathbb{N}$$

On pose par convention  $\mathbf{T}^0 = \mathbf{G}$ .

### Exponentielle d'un tenseur du second ordre

En généralisant le développement de l'exponentielle d'un réel, on définit l'exponentielle d'un tenseur du second ordre :

$$\mathbf{e}^{\mathbf{T}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^q}{q!} = \mathbf{G} + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\mathbf{T}^q}{q!}$$

REMARQUE : En général, le produit «  $\cdot$  » n'est pas commutatif dans  $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ . On n'a donc pas la propriété classique des exponentielles de réels :  $\mathbf{e}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{T}'} \neq \mathbf{e}^{\mathbf{T}+\mathbf{T}'}$ .

On verra plus loin que la commutativité de l'opération «  $\cdot$  » entre deux tenseurs du second ordre est rétablie quand les deux tenseurs ont une base propre commune. La propriété  $\mathbf{e}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{T}'} = \mathbf{e}^{\mathbf{T}+\mathbf{T}'}$  est alors rétablie.

### Inverse d'un tenseur du second ordre

Si l'endomorphisme linéaire  $\mathcal{L}$  associé à un tenseur  $\mathbf{T}$  est inversible, (c'est-à-dire  $\det[\mathcal{L} \bullet \bullet] = \det[\mathbf{T} \bullet \bullet] \neq 0$ ), on définit l'inverse d'un tenseur du second ordre : c'est le tenseur du second ordre, noté  $\mathbf{T}^{-1}$ , associé à l'inverse  $\mathcal{L}^{-1}$  de cet endomorphisme :

$$\det[\mathcal{L} \bullet \bullet] = \det[\mathbf{T} \bullet \bullet] \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathbf{T}^{-1} \text{ tel que } [(\mathbf{T}^{-1}) \bullet \bullet] = [\mathbf{T} \bullet \bullet]^{-1} \quad (1.38)$$

REMARQUE : D'une part :  $\mathbf{y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x} \Leftrightarrow [\mathbf{y} \bullet] = [\mathbf{T} \bullet \bullet][\mathbf{x} \bullet] \Leftrightarrow [\mathbf{x} \bullet] = [\mathbf{T} \bullet \bullet]^{-1}[\mathbf{y} \bullet]$ ; d'autre part :  $\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{y} \Leftrightarrow [\mathbf{x} \bullet] = [(\mathbf{T}^{-1}) \bullet \bullet][\mathbf{y} \bullet]$ . On en déduit la relation entre les composantes mixtes covariantes-contravariantes de  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}^{-1}$  :  $[(\mathbf{T}^{-1}) \bullet \bullet] = [\mathbf{T} \bullet \bullet]^{-1}$ .

En revanche, on vérifie aisément avec un calcul analogue, que pour les composantes non mixtes, on a les relations suivantes :  $[(\mathbf{T}^{-1}) \bullet \bullet] = [\mathbf{T} \bullet \bullet]^{-1}$  et  $[(\mathbf{T}^{-1}) \bullet \bullet] = [\mathbf{T} \bullet \bullet]^{-1}$ . Ces distinctions disparaissent si les composantes des tenseurs sont données dans une base orthonormée.

### Puissance entière négative d'un tenseur du second ordre inversible

Pour un tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  inversible, on peut donner un sens aux puissances entières négatives d'un tenseur du second ordre :

$$\mathbf{T}^{-q} = (\mathbf{T}^{-1})^q \quad \forall q \in \mathbb{Z}$$

### Déterminant d'un tenseur du second ordre

La relation (1.38) permet de définir le *déterminant d'un tenseur du second ordre* :

$$\det \mathbf{T} = \det[\mathbf{T} \bullet \bullet]$$

On vérifie aisément que :  $\det \mathbf{T} = \det[\mathbf{T} \bullet \bullet] = \det[\mathbf{T} \bullet \bullet] \neq \det[\mathbf{T} \bullet \bullet] \neq \det[\mathbf{T} \bullet \bullet]$

Le déterminant d'un tenseur du second ordre est le déterminant de la matrice de ses composantes *mixtes*.

On vérifie aisément, par changement de base sur les composantes mixtes de  $\mathbf{T}$ , que le *déterminant d'un tenseur du second ordre est un scalaire (ou invariant)*.

En revanche, le déterminant des composantes non mixtes n'est pas un scalaire : il fait intervenir le nombre  $g = \det[g_{\bullet\bullet}]$  qui dépend de la base.

### 1.6.9 Spectre, espaces propres, invariants dans $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$

Les tenseurs du second ordre étant isomorphes aux endomorphismes linéaires de  $\mathbb{V}$ , ils en ont toutes les propriétés, que l'on rappelle ici sans démonstration.

DÉFINITION : On appelle *valeur propre*  $\lambda$  et *vecteur propre associé*  $\mathbf{u}_\lambda$  toute solution de l'équation :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_\lambda = \lambda \mathbf{u}_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{G}) \cdot \mathbf{u}_\lambda = \mathbf{0}$$

Les valeurs propres  $\lambda$  sont les solutions de l'équation :

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{G}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det([\mathbf{T} \bullet \bullet] - \lambda [I]) = \det([\mathbf{T} \bullet \bullet] - \lambda [I]) = 0$$

En développant le déterminant, on obtient le polynôme caractéristique de la matrice des composantes *mixtes*. Pour  $n = 3$ , le polynôme caractéristique est :

$$-\lambda^3 + T_I \lambda^2 - T_{II} \lambda + T_{III} = 0 \quad (1.39)$$

où les coefficients  $T_I$ ,  $T_{II}$  et  $T_{III}$  sont :

$$\begin{aligned} T_I &= \text{Tr}([\mathbf{T} \bullet \bullet]) = \text{Tr}([\mathbf{T} \bullet \bullet]) = \text{Tr} \mathbf{T} \\ T_{II} &= \frac{1}{2} (\text{Tr} \mathbf{T})^2 - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}^2) \\ &= (T^1_1 T^2_2 - T^1_2 T^2_1) + (T^2_2 T^3_3 - T^2_3 T^3_2) + (T^3_3 T^1_1 - T^3_1 T^1_3) \\ &= (T^1_1 T^2_2 - T^1_2 T^2_1) + (T^2_2 T^3_3 - T^2_3 T^3_2) + (T^3_3 T^1_1 - T^3_1 T^1_3) \\ T_{III} &= \det([\mathbf{T} \bullet \bullet]) = \det([\mathbf{T} \bullet \bullet]) = \det \mathbf{T} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Les trois coefficients  $T_I$ ,  $T_{II}$  et  $T_{III}$  sont des scalaires appelés *invariants fondamentaux* de  $\mathbf{T}$ .

REMARQUE : Le coefficient  $T_{II}$  est la somme des cofacteurs de la diagonale des matrices des composantes mixtes.

On rappelle, également sans démonstration, l'identité de Cayley-Hamilton : tout tenseur du second ordre est solution de son polynôme caractéristique. Pour  $n = 3$ , elle s'écrit :

$$-\mathbf{T}^3 + T_I \mathbf{T}^2 - T_{II} \mathbf{T} + T_{III} \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (1.41)$$

Cette identité montre que tout polynôme en  $\mathbf{T}$  peut être ramené à un polynôme de degré 2.

En prenant la trace de (1.41), on obtient une autre expression utile du déterminant d'un tenseur du second ordre :

$$\det \mathbf{T} = T_{III} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{T}^3) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}^2) \text{Tr} \mathbf{T} + \frac{1}{6} (\text{Tr} \mathbf{T})^3 \quad (1.42)$$

Le polynôme caractéristique étant invariant par changement de base, les valeurs propres  $\lambda_i$  racines de ce polynôme sont aussi des invariants.

REMARQUE : Le polynôme caractéristique est de degré  $n$ . Pour  $n$  impair, on est assuré que l'une des racines au moins est réelle. En particulier, pour  $n = 3$ , l'une des racines est réelle, les deux autres racines sont soit toutes les deux réelles soit toutes les deux complexes conjuguées.

Si certaines valeurs propres  $\lambda$  sont des racines multiples de multiplicité  $k$ , on dit que  $k$  est l'ordre de multiplicité de  $\lambda$ .

Les vecteurs propres  $\mathbf{u}_\lambda$  associés à la valeur propre  $\lambda$  sont solutions de l'équation vectorielle :

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_\lambda = \lambda \mathbf{u}_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad [T^\bullet \bullet] [\mathbf{u}^\bullet] = \lambda [\mathbf{u}^\bullet] \quad \Leftrightarrow \quad [T_\bullet \bullet] [\mathbf{u}_\bullet] = \lambda [\mathbf{u}_\bullet] \quad (1.43)$$

L'ensemble des vecteurs  $\mathbf{u}_\lambda$ , solutions de (1.43), forme un sous-espace vectoriel  $\mathbb{E}_\lambda$  appelé *espace propre associé à  $\lambda$* . Sa dimension est l'ordre de multiplicité  $k$  de  $\lambda$ .

Les équations (1.43) montrent que les colonnes propres de la matrice des composantes mixtes  $[T^\bullet \bullet]$  sont les composantes contravariantes des vecteurs propres, et les colonnes propres de la matrice  $[T_\bullet \bullet]$  sont les composantes covariantes des vecteurs propres.

REMARQUE : Dans le cas particulier des tenseurs du second ordre de  $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ , on peut donner une autre définition des scalaires  $T_I$ ,  $T_{II}$  et  $T_{III}$ , à l'aide du tenseur d'orientation  $\mathbf{H}$ . Soient  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  trois vecteurs quelconques mais non coplanaires :

$$T_I = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{w})}{\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} \quad (1.44)$$

$$T_{II} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{w}) + \mathbf{H}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{w})}{\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} \quad (1.45)$$

$$T_{III} = \frac{\mathbf{H}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{T} \cdot \mathbf{w})}{\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})} \quad (1.46)$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que ces trois définitions sont bien équivalentes aux définitions précédentes.

Indications pour la démonstration : on montre d'abord que les numérateurs peuvent se mettre sous la forme  $\mathbf{K}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$  où  $\mathbf{K}$  est un tenseur d'ordre 3 complètement antisymétrique ; on en déduit ensuite que  $\mathbf{K}$  est de la forme  $\alpha \mathbf{H}$  où  $\alpha$  est l'invariant cherché.

### Identités algébriques utiles :

On vérifie aisément les identités suivantes :

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} \quad (1.47)$$

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = (\det \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-T} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \quad (1.48)$$

$$\det(\mathbf{G} + \mathbf{T}) = 1 + T_I + T_{II} + T_{III} \quad (1.49)$$

$$\|\text{sym } \mathbf{T}\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{T}\|^2 + \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}^2) \quad (1.50)$$

$$\text{Tr} \mathbf{T} = \text{Tr}(\mathbf{T}^T) \quad (1.51)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'') = \text{Tr}(\mathbf{T}'' \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}') = \text{Tr}(\mathbf{T}' \cdot \mathbf{T}'' \cdot \mathbf{T}) \quad (1.52)$$

REMARQUE : Les identités (1.48) et (1.49) se vérifient plus aisément à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

### Tenseurs du second ordre réels symétriques

Si le tenseur du second ordre est réel et symétrique, on a les propriétés supplémentaires suivantes :

- les  $n$  valeurs propres sont réelles;
- les espaces propres sont orthogonaux entre eux, il est donc toujours possible de construire une base orthonormée de vecteurs propres;
- dans une base propre orthonormée, les composantes du tenseur symétrique se rangent dans une matrice diagonale dont les termes sont les valeurs propres.

REMARQUE : Pour  $n = 3$ , si les 3 valeurs propres sont distinctes, il existe 8 bases propres orthonormées dont 4 directes. Si 2 valeurs propres sont égales, il en existe une infinité (il y a un plan de directions propres). Si les 3 valeurs propres sont égales, c'est un tenseur sphérique et toutes les bases sont des bases propres.

Soit  $\mathbf{S} \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2s}$  symétrique. On note  $s_1, s_2$  et  $s_3$  ses trois valeurs propres réelles, et on note  $\{\mathbf{u}_i\}$  une base propre orthonormée de  $\mathbf{S}$ . La matrice des composantes de  $\mathbf{S}$  dans cette base propre est<sup>9</sup> :

$$[\mathbf{S}^\bullet_\bullet] = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 s_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

On en déduit facilement les propriétés suivantes pour les tenseurs de  $\mathbb{V}_3^{\otimes 2s}$  :

- les invariants fondamentaux s’expriment en fonction des valeurs propres :

$$S_I = s_1 + s_2 + s_3 \quad S_{II} = s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1 \quad S_{III} = s_1 s_2 s_3$$

Les relations inverses sont démontrées dans l’annexe A, voir (A.5), (A.6) et (A.7) page 73;

- le produit contracté simple de deux tenseurs du second ordre symétriques ayant trois directions propres communes est commutatif;
- la puissance entière d’un tenseur du second ordre symétrique est un tenseur symétrique de mêmes directions propres;
- l’exponentielle d’un tenseur du second ordre symétrique est un tenseur symétrique de mêmes directions propres;
- si les deux tenseurs du second ordre symétriques  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{S}'$  ont 3 directions propres communes, alors :

$$e^{\mathbf{S}} \cdot e^{\mathbf{S}'} = e^{\mathbf{S}+\mathbf{S}'}$$

En se plaçant dans une base propre orthonormée, on montre facilement que :

$$(\mathbf{G}+\mathbf{S})_I = 3 + S_I \quad (\mathbf{G}+\mathbf{S})_{II} = 3 + 2S_I + S_{II} \quad (\mathbf{G}+\mathbf{S})_{III} = 1 + S_I + S_{II} + S_{III}$$

et en utilisant le développement en série de  $(1+x)^{-1}$  avec  $|x| < 1$ , on établit facilement l’identité :

$$(\mathbf{G}+\mathbf{S})^{-1} = \mathbf{G} + \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \mathbf{S}^p \quad \forall \mathbf{S} \text{ symétrique tel que } \|\mathbf{S}\| < 1 \quad (1.53)$$

Les directions propres de  $\mathbf{G}+\mathbf{S}$  et  $(\mathbf{G}+\mathbf{S})^{-1}$  sont celles de  $\mathbf{S}$ .

### Tenseurs du second ordre symétriques définis positifs

DÉFINITION : *Un tenseur du second ordre  $\mathbf{S}$  est dit symétrique défini positif si :*

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V} \quad (1.54)$$

PROPRIÉTÉ : *Les valeurs propres d’un tenseur symétrique défini positif sont strictement positives.*

En effet, si  $\mathbf{u}_\lambda$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ , la définition (1.54) implique :

$$\mathbf{u}_\lambda \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{u}_\lambda = \lambda \|\mathbf{u}_\lambda\|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0$$

Pour les tenseurs symétriques définis positifs, on définit les puissances d’exposant réel. Soit  $\mathbf{S}$  un tenseur symétrique défini positif. On note  $\lambda_i > 0$  ses valeurs propres et  $\{\mathbf{s}_i\}$  une base propre orthonormée. On pose la définition suivante :

$$\mathbf{S}^\alpha = \sum_{i=1}^n \lambda_i^\alpha \mathbf{s}_i \otimes \mathbf{s}_i \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

---

9. L’ordre des valeurs propres peut être différent: en effet, il n’y a aucune raison pour classer les vecteurs propres. En général, on ordonne les valeurs propres en ordre décroissant et on choisit le sens des vecteurs propres de la base pour que la base propre soit directe.

En particulier, si  $\alpha = \frac{1}{p}$  avec  $p \in \mathbb{N}$ , on peut définir la racine  $p^{\text{ème}}$  d'un tenseur symétrique défini positif.

En remarquant que

$$\mathbf{e}^{\mathbf{S}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mathbf{S}^p}{p!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{i=1}^3 \lambda_i^p \mathbf{s}_i \otimes \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \lambda_i^p \mathbf{s}_i \otimes \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^3 e^{\lambda_i} \mathbf{s}_i \otimes \mathbf{s}_i$$

on définit le logarithme népérien d'un tenseur symétrique défini positif :

$$\ln \mathbf{S} = \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i \mathbf{s}_i \otimes \mathbf{s}_i \quad (\lambda_i > 0) \quad (1.55)$$

Les puissances, l'exponentielle et le logarithme d'un tenseur symétrique défini positif  $\mathbf{S}$  ont donc les mêmes direction propres que  $\mathbf{S}$ .

### Tenseurs du second ordre réels antisymétriques de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$ :

Soit  $\mathbf{A} \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$  et soit  $\mathbf{a}$  son vecteur adjoint (voir (1.27) page 18). L'endomorphisme linéaire associé à  $\mathbf{A}$  est :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{a} \quad (\text{voir (1.15) page 16})$$

On montre facilement que les invariants fondamentaux de  $\mathbf{A}$  sont :

$$A_I = 0 \quad A_{II} = \|\mathbf{a}\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{A}\|^2 = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{A}^2) \quad A_{III} = 0 \quad (1.56)$$

REMARQUE : Le tenseur  $\mathbf{A}^2$  est symétrique, son endomorphisme linéaire associé est :  $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{v} \wedge \mathbf{a}) \wedge \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2 \mathbf{v} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{a}$ .  
On vérifie aisément que le vecteur  $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{v}$  est orthogonal au vecteur  $\mathbf{a}$ . Ses valeurs propres sont :  $(0, -\|\mathbf{a}\|, -\|\mathbf{a}\|)$ , les espaces propres associés sont respectivement  $k\mathbf{a}$  (noyau de  $\mathbf{A}$ ) et un plan propre orthogonal à  $\mathbf{a}$ .

Le polynôme caractéristique d'un tenseur antisymétrique  $\mathbf{A}$  (voir (1.39) page 22) est donc réduit à :

$$\lambda^3 + \|\mathbf{a}\|^2 \lambda = 0$$

dont la seule racine réelle est  $\lambda = 0$ . L'espace propre associé (de dimension 1) est engendré par le vecteur adjoint  $\mathbf{a}$ . C'est le noyau de l'endomorphisme linéaire  $\mathbf{A}$  car  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ .

Pour les tenseurs antisymétriques de  $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ , l'identité de Cayley-Hamilton (1.41) page 22 se réduit à :

$$\mathbf{A}^3 = \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{A}^2) \mathbf{A}$$

En itérant, on en déduit les puissances successives d'un tenseur de  $\mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$  :

$$\mathbf{A}^{2q+1} = \frac{1}{2^q} (\text{Tr}(\mathbf{A}^2))^q \mathbf{A} \quad \mathbf{A}^{2q+2} = \frac{1}{2^q} (\text{Tr}(\mathbf{A}^2))^q \mathbf{A}^2$$

où  $\text{Tr}(\mathbf{A}^2) = -2 \|\mathbf{a}\|^2$  (voir (1.56) page 25).

En séparant les exposants pairs et impairs, l'exponentielle de  $\mathbf{A}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{A}} &= \mathbf{G} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{2q+1}}{(2q+1)!} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{2q+2}}{(2q+2)!} \\
 &= \mathbf{G} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^q} \frac{(\text{Tr}(\mathbf{A}^2))^q}{(2q+1)!} \mathbf{A} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^q} \frac{(\text{Tr}(\mathbf{A}^2))^q}{(2q+2)!} \mathbf{A}^2 \\
 &= \mathbf{G} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^q} \frac{(-2\|\mathbf{a}\|^2)^q}{(2q+1)!} \mathbf{A} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^q} \frac{(-2\|\mathbf{a}\|^2)^q}{(2q+2)!} \mathbf{A}^2 \\
 &= \mathbf{G} + \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\|\mathbf{a}\|^{2q+1}}{(2q+1)!} \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{a}\|} + \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\|\mathbf{a}\|^{2q+2}}{(2q+2)!} \frac{\mathbf{A}^2}{\|\mathbf{a}\|^2} \\
 e^{\mathbf{A}} &= \mathbf{G} + \sin\|\mathbf{a}\| \frac{\mathbf{A}}{\|\mathbf{a}\|} + (1 - \cos\|\mathbf{a}\|) \frac{\mathbf{A}^2}{\|\mathbf{a}\|^2} \tag{1.57}
 \end{aligned}$$

On vérifie aisément l'égalité  $e^{\mathbf{A}} \cdot (e^{\mathbf{A}})^T = \mathbf{G}$ . On en déduit que l'exponentielle d'un tenseur antisymétrique est un tenseur orthogonal (voir la définition (1.58) ci-dessous).

### 1.6.10 Tenseurs du second ordre orthogonaux de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$

DÉFINITION : On dit qu'un tenseur du second ordre  $\mathbf{Q}$  est orthogonal si :

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{G} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \tag{1.58}$$

Le tenseur  $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$  est donc aussi orthogonal.

Il découle de la définition (1.58) que :

$$\det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{Q} \det \mathbf{Q}^T = 1 \quad \Rightarrow \quad (\det \mathbf{Q})^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \det \mathbf{Q} = \pm 1$$

les tenseurs orthogonaux de déterminant +1 sont appelés *rotations*,  
 les tenseurs orthogonaux de déterminant -1 sont appelés *retournements*.

PROPRIÉTÉS : On montre facilement les propriétés algébriques suivantes (où  $\mathbf{T}$  est un tenseur du second ordre) :

- les valeurs propres de  $\mathbf{T}$  et de  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T$  sont les mêmes;
- si  $\mathbf{u}$  est vecteur propre du tenseur  $\mathbf{T}$ , alors le vecteur  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}$  est vecteur propre du tenseur  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T$ ;
- si les tenseurs  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{Q}'$  sont orthogonaux, leur produit contracté  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}'$  est aussi un tenseur orthogonal; on en déduit que  $\mathbf{Q}^q$  est orthogonal  $\forall q \in \mathbb{N}$ ;
- l'ensemble des tenseurs orthogonaux n'est pas un espace vectoriel mais c'est un groupe pour l'opération interne «  $\cdot$  »; on le notera  $\mathbb{Q}_3$ .

Dans les identités qui suivent,  $\mathbf{Q}$  est orthogonal,  $\mathbf{S}$  est symétrique,  $\mathbf{A}$  est antisymétrique,  $\mathbf{T}$  est un tenseur du

second ordre quelconque,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$  sont des vecteurs.

$$\|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| \quad (1.59)$$

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad (1.60)$$

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}) \wedge (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{w}) = (\det \mathbf{Q}) \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \quad (\text{voir (1.48) page 23}) \quad (1.61)$$

$$[\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{w}] = \det \mathbf{Q} [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] \quad (\text{voir (1.46) page 23}) \quad (1.62)$$

$$\text{Tr}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T) = \text{Tr} \mathbf{T} \quad (1.63)$$

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T)_{II} = T_{II} \quad (1.64)$$

$$\det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T) = \det \mathbf{T} \quad (1.65)$$

$$\|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}\| = \|\mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}\| = \|\mathbf{T}\| \quad (1.66)$$

$$\|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T\| = \|\mathbf{T}\| \quad (1.67)$$

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T) : (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}' \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{T} : \mathbf{T}' \quad (1.68)$$

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T)^q = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}^q \cdot \mathbf{Q}^T \quad (q \in \mathbb{N}) \quad (1.69)$$

$$(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T)^\alpha = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}^\alpha \cdot \mathbf{Q}^T \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{S} \text{ symétrique défini positif}) \quad (1.70)$$

$$\text{sym}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot \text{sym} \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.71)$$

$$\text{antisym}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot \text{antisym} \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.72)$$

$$\text{adj}(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T) = \mathbf{Q} \cdot \text{adj} \mathbf{A} \quad (1.73)$$

**THÉORÈME :** Les valeurs propres (éventuellement complexes) d'un tenseur orthogonal sont de module unité.

**DÉMONSTRATION :** L'équation  $\lambda \mathbf{u} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}$  implique :  $|\lambda|^2 \|\mathbf{u}\|^2 = \|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$ .

On a donc :  $|\lambda|^2 = 1 \Rightarrow |\lambda| = 1$ .

Le polynôme caractéristique d'un tenseur orthogonal  $\mathbf{Q} \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$  est :

$$-\lambda^3 + Q_I \lambda^2 - Q_{II} \lambda + \varepsilon = 0 \quad (\text{on a posé } Q_{III} = \det \mathbf{Q} = \varepsilon = \pm 1)$$

**THÉORÈME :** Les invariants fondamentaux d'un tenseur orthogonal de  $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$  sont liés par la relation :

$$Q_I = \varepsilon Q_{II}$$

**DÉMONSTRATION :** Le théorème de Cayley-Hamilton s'écrit :  $-\mathbf{Q}^3 + Q_I \mathbf{Q}^2 - Q_{II} \mathbf{Q} + \varepsilon \mathbf{G} = \mathbf{0}$  (voir (1.41) page 22). En multipliant successivement par  $\mathbf{Q}^T$ , il vient :

$$-\mathbf{Q}^2 + Q_I \mathbf{Q} - Q_{II} \mathbf{G} + \varepsilon \mathbf{Q}^T = \mathbf{0} \quad (1.74)$$

$$-\mathbf{Q} + Q_I \mathbf{G} - Q_{II} \mathbf{Q}^T + \varepsilon \mathbf{Q}^{2T} = \mathbf{0} \quad (1.75)$$

En transposant (1.75) et multipliant par  $\varepsilon$ , il vient :

$$\mathbf{Q}^2 - \varepsilon Q_{II} \mathbf{Q} + \varepsilon Q_I \mathbf{G} - \varepsilon \mathbf{Q}^T = \mathbf{0} \quad (1.76)$$

La somme (1.74) + (1.76) donne :

$$(Q_I - \varepsilon Q_{II})(\mathbf{Q} + \varepsilon \mathbf{G}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad Q_I = \varepsilon Q_{II} \quad (\text{en supposant } \mathbf{Q} \neq -\varepsilon \mathbf{G})$$

Un tenseur orthogonal n'a donc que deux invariants fondamentaux indépendants :  $Q_I$  et  $Q_{III} = \varepsilon = \pm 1$ .

On en déduit le polynôme caractéristique d'un tenseur orthogonal  $\mathbf{Q} \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$  :

$$-\lambda^3 + Q_I \lambda^2 - \varepsilon Q_I \lambda + \varepsilon = 0 = (\lambda - \varepsilon)(-\lambda^2 + \lambda(Q_I - \varepsilon) - 1)$$

dont une racine réelle est  $\lambda_1 = \varepsilon = \pm 1$  (on a bien  $|\lambda_1| = 1$ ). Les deux autres racines sont les complexes conjugués de module unité  $e^{i\theta}$  et  $e^{-i\theta}$  avec  $\theta \in [0, \pi]$ , qui deviennent les réels (1,1) si  $\theta = 0$  ou les réels (-1, -1) si  $\theta = \pi$ .



On doit donc envisager les situations suivantes :

1. *Cas général* :  $\mathbf{Q}$  a une seule valeur propre réelle  $\varepsilon = \pm 1$  ( $\theta \neq 0$  et  $\theta \neq \pi$ ); la direction propre (unique) de  $\mathbf{Q}$  associée est appelée *axe du tenseur orthogonal*.  
La trace  $Q_I = \varepsilon + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = \varepsilon + 2 \cos \theta$  détermine l'angle  $\theta$  qui est appelé *angle du tenseur orthogonal*<sup>10</sup>:

$$\cos \theta = \frac{Q_I - \varepsilon}{2}$$

2. *Cas dégénérés* :  $\mathbf{Q}$  a 3 valeurs propres réelles,  $(\varepsilon, 1, 1)$  ou  $(\varepsilon, -1, -1)$  ;
  - pour une rotation ( $\varepsilon = +1$ ), on obtient dans le premier cas  $\mathbf{Q} = \mathbf{G}$  (rotation d'angle nul autour d'un axe quelconque) et dans le second cas une rotation d'angle  $\pi$  autour de la direction propre associée à la valeur propre  $+1$  ;
  - pour un retournement ( $\varepsilon = -1$ ), on obtient dans le premier cas une symétrie plane par rapport à un plan normal à la direction propre associée à la valeur propre  $-1$  et dans le second cas  $\mathbf{Q} = -\mathbf{G}$  (symétrie par rapport à un point).

### Forme générale des tenseurs orthogonaux

THÉORÈME : Soit  $\mathbf{w}$  unitaire l'axe d'un tenseur orthogonal, soit  $\theta \in [0, \pi]$  son angle et soit  $\varepsilon = \pm 1$  son déterminant. L'expression tensorielle de ce tenseur orthogonal est :

$$\mathbf{Q} = \cos \theta \mathbf{G} + (\varepsilon - \cos \theta) \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} - \sin \theta \mathbf{H} \cdot \mathbf{w} \quad (1.77)$$

DÉMONSTRATION : Il suffit de vérifier que  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{G}$ , que  $\det \mathbf{Q} = \varepsilon$  et que  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{w} = \varepsilon \mathbf{w}$ .

REMARQUE : En écrivant les composantes de (1.77) dans une base orthonormée  $\{\mathbf{w}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ , et en prenant  $\varepsilon = 1$ , on reconnaît la matrice de rotation d'angle  $\theta$  autour du vecteur  $\mathbf{w}$  :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}_{\{\mathbf{w}, \mathbf{a}, \mathbf{b}\}}$$

### Identification d'un tenseur orthogonal

En remarquant que :

$$\mathbf{sym} \mathbf{Q} = \cos \theta \mathbf{G} + (\varepsilon - \cos \theta) \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \quad \text{et} \quad \mathbf{antisym} \mathbf{Q} = -\sin \theta \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}$$

on en déduit une méthode simple d'identification d'un tenseur orthogonal donné par ses composantes :

- le signe de  $\det \mathbf{Q} = \varepsilon$  détermine si  $\mathbf{Q}$  est une rotation ou un retournement ;
- l'angle (compris entre 0 et  $\pi$ ) est donné par sa trace :

$$\cos \theta = \frac{Q_I - \varepsilon}{2} \quad (1.78)$$

- l'axe  $\mathbf{w}$  est l'opposé du vecteur adjoint normé de sa partie antisymétrique :

$$\mathbf{w} = -\frac{\mathbf{H} : \mathbf{antisym} \mathbf{Q}}{\|\mathbf{H} : \mathbf{Q}\|} = -\frac{\mathbf{H} : \mathbf{Q}}{\sin \theta} \quad (1.79)$$

On évite ainsi la recherche des vecteurs propres et l'ambiguïté du sens du vecteur propre.

---

10. L'angle  $\theta \in [0, \pi]$  est complètement déterminé par son cosinus.

### Petites rotations

DÉFINITION : On appelle *petite rotation*, notée  $\delta\mathbf{Q}$ , une rotation telle que son angle est  $\theta \ll 1$ .

On sait que dans ce cas, au second ordre près,  $\cos \theta \simeq 1$  et  $\sin \theta \simeq \theta$ . En utilisant (1.77) page 28, il vient :

$$\delta\mathbf{Q} \simeq \mathbf{G} + \underbrace{\theta\mathbf{H} \cdot \mathbf{w}}_{\mathbf{A}} \quad (1.80)$$

Une petite rotation est, au second ordre près, la somme du tenseur métrique et d'un tenseur antisymétrique  $\mathbf{A}$  tel que  $\|\mathbf{A}\| \ll 1$ .

Les petites rotations se composent de manière simplifiée :

$$\delta\mathbf{Q} \cdot \delta\mathbf{Q}' \simeq (\mathbf{G} + \mathbf{A}) \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{A}') \simeq \mathbf{G} + \mathbf{A} + \mathbf{A}' \quad (\text{au second ordre près}) \quad (1.81)$$

### 1.6.11 Décomposition polaire des tenseurs du second ordre

THÉORÈME : Tout tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  inversible peut être écrit sous l'une des formes suivantes :

$$\mathbf{T} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \quad (1.82)$$

où  $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T}$  et  $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}}$  sont symétriques définis positifs, et où  $\mathbf{Q}$  est orthogonal ( $\det \mathbf{Q} = \frac{\det \mathbf{T}}{|\det \mathbf{T}|} = \text{sgn}(\det \mathbf{T})$ ).

DÉMONSTRATION : Le tenseur  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T$  est évidemment symétrique défini positif. Il est donc inversible et sa racine carrée  $\mathbf{V}$  existe et est aussi symétrique définie positive. Il suffit donc de vérifier que le tenseur  $\mathbf{Q} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T)^{-1} \cdot \mathbf{T}$  est orthogonal, ce qui se fait sans difficulté.

La démonstration de la décomposition  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}$  se fait de la même manière. On vérifie aisément l'unicité de ces décompositions polaires.

La décomposition polaire  $\mathbf{T} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}$  est appelée *décomposition polaire à gauche*, l'autre  $\mathbf{T} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}$  est appelée *décomposition polaire à droite*.

PROPRIÉTÉS : On vérifie facilement les propriétés suivantes :

- la relation entre  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  est :  $\mathbf{U} = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}^T$ ;
- les valeurs propres (positives) de  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont les mêmes;
- si  $\mathbf{u}$  est vecteur propre de  $\mathbf{U}$ , alors  $\mathbf{v} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}$  est un vecteur propre de  $\mathbf{V}$ .

## 1.7 En bref...

Les tenseurs d'ordre  $p$  sont des applications  $p$ -linéaires  $\mathbb{V}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . On a défini de nouvelles opérations algébriques sur les tenseurs :

- l'addition de deux tenseurs du même ordre;
- la multiplication d'un tenseur par un scalaire;
- le produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre  $p$  et  $q$ , le résultat est d'ordre  $p + q$ ;
- le produit tensoriel contracté simple de deux tenseurs d'ordre  $p \geq 1$  et  $q \geq 1$ , le résultat est d'ordre  $p + q - 2$ ;
- le produit tensoriel contracté double de deux tenseurs d'ordre  $p \geq 2$  et  $q \geq 2$ , le résultat est d'ordre  $p + q - 4$ .

Les tenseurs d'ordre 0 sont les scalaires (ou invariants).

Les tenseurs d'ordre 1 sont confondus avec les vecteurs.

Les tenseurs d'ordre 2 sont confondus avec les endomorphismes  $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  linéaires. Ils peuvent être décomposés :

- en la somme d'une partie symétrique et d'une partie antisymétrique,
- en la somme d'une partie sphérique et d'une partie de trace nulle,
- en le produit contracté simple d'une partie symétrique définie positive et d'une partie orthogonale.

Les tenseurs d'ordre 2 ont des valeurs propres scalaires (dont une au moins est réelle) et des espaces propres associés à chaque valeur propre distincte;

- s'ils sont symétriques, toutes les valeurs propres sont réelles et les espaces propres sont orthogonaux entre eux.
- s'ils sont antisymétriques, ils sont isomorphes à leur vecteur adjoint;
- s'ils sont orthogonaux, ils sont définis par leur déterminant  $\varepsilon = \pm 1$ , un vecteur unitaire et un angle compris entre 0 et  $\pi$ .

# Chapitre 2

## Fonctions tensorielles

### 2.1 Fonctions tensorielles d'argument réel

On étudie ici des tenseurs qui sont fonction d'un paramètre réel  $t : t \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{T}(t) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$ .

En mécanique des milieux continus, ce paramètre est le plus souvent le temps. La dérivée  $\frac{d\mathbf{T}}{dt}$  sera donc appelée *dérivée temporelle*.

#### 2.1.1 Dérivée temporelle d'un tenseur d'ordre $p$

La dérivée temporelle d'une fonction à valeur tensorielle est naturellement définie par :

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{T}(t+h) - \mathbf{T}(t)}{h} \quad (2.1)$$

La dérivée temporelle d'un tenseur d'ordre  $p$  est donc un tenseur d'ordre  $p$ .

On vérifie aisément que les dérivées temporelles du produit tensoriel, et des produits  $n$ -contractés suivent les règles habituelles des dérivées de produits non commutatifs.

EXEMPLES :

$$\frac{d(\mathbf{T} \otimes \mathbf{U})}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \otimes \mathbf{U} + \mathbf{T} \otimes \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad ; \quad \frac{d(\mathbf{T} \cdot \mathbf{U})}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{U}}{dt} \quad ; \quad \frac{d(\mathbf{T} : \mathbf{U})}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{dt} : \mathbf{U} + \mathbf{T} : \frac{d\mathbf{U}}{dt}$$

Tout tenseur fonction du temps ainsi que sa dérivée temporelle peuvent être décrits par des composantes fonction du temps sur une base (*a priori* également fonction du temps).

EXEMPLE : Si  $\mathbf{T}(t)$  est ordre 2 :  $\mathbf{T} = T^j_k(t) \mathbf{e}_j(t) \otimes \mathbf{e}^k(t)$ , sa dérivée temporelle est :

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dT^j_k}{dt} \mathbf{e}_j(t) \otimes \mathbf{e}^k(t) + T^j_k \frac{d\mathbf{e}_j}{dt} \otimes \mathbf{e}^k + T^j_k \mathbf{e}_j \otimes \frac{d\mathbf{e}^k}{dt}$$

Si la base sur laquelle on donne les composantes de  $\mathbf{T}$  n'est pas fonction du temps, cette dérivée se réduit au premier monôme.

PROPRIÉTÉS : Si un tenseur  $\mathbf{T}$  du second ordre est *par définition* symétrique (il conserve cette symétrie au cours du temps), alors sa dérivée temporelle est symétrique. Il en est de même pour l'antisymétrie, la sphéricité et la trace nulle.

DÉMONSTRATION : : Cette propriété découle du fait que les ensembles de tenseurs symétriques, antisymétriques, sphériques et déviatoriques sont des sous-espaces vectoriels. La différence  $\mathbf{T}(t+h) - \mathbf{T}(t)$  appartient donc au même sous-espace.

En revanche, pour les tenseurs orthogonaux de  $\mathbb{Q}_3$  restant orthogonaux au cours du temps, la dérivée temporelle est un tenseur d'ordre 2 *non orthogonal*<sup>1</sup> en général. On peut néanmoins donner un résultat :

$$\mathbf{Q}(t) \cdot \mathbf{Q}(t)^T = \mathbf{G} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \cdot \mathbf{Q}^T + \mathbf{Q} \cdot \frac{d\mathbf{Q}^T}{dt} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \cdot \mathbf{Q}^T = - \left( \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \cdot \mathbf{Q}^T \right)^T \quad (2.2)$$

Le tenseur du second ordre  $\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \cdot \mathbf{Q}^T$ , ainsi que son transposé  $\mathbf{Q} \cdot \frac{d\mathbf{Q}^T}{dt}$  sont des tenseurs antisymétriques.

### 2.1.2 Cas particulier des tenseurs réels du second ordre symétriques

Dans cette section, pour alléger les notations, on note  $\dot{\mathbf{S}}$  la dérivée  $\frac{d\mathbf{S}}{dt}$ .

Le tenseur réel  $\mathbf{S}(t)$  étant symétrique et restant symétrique au cours du temps, le tenseur  $\dot{\mathbf{S}}$  est symétrique.

La symétrie de  $\mathbf{S}$  implique l'existence d'une base orthonormée  $\{\mathbf{u}_i(t)\}$  construite sur les directions propres de  $\mathbf{S}$  telle que :

$$\mathbf{S}(t) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \mathbf{u}_i(t) \otimes \mathbf{u}_i(t)$$

où  $\lambda_i(t)$  sont les valeurs propres réelles de  $\mathbf{S}$  à l'instant  $t$ .

La dérivée temporelle s'écrit :

$$\dot{\mathbf{S}}(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^3 \dot{\lambda}_i(t) \mathbf{u}_i(t) \otimes \mathbf{u}_i(t)}_{\widehat{\mathbf{S}}(t)} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \dot{\mathbf{u}}_i(t) \otimes \mathbf{u}_i(t) + \sum_{i=1}^3 \lambda_i(t) \mathbf{u}_i(t) \otimes \dot{\mathbf{u}}_i(t)}_{\check{\mathbf{S}}(t)} \quad (2.3)$$

Quand le tenseur  $\mathbf{S}$  varie avec  $t$ , ses valeurs propres et ses directions propres varient en fonction de  $t$  :

- Le tenseur symétrique réel  $\widehat{\mathbf{S}}$  est la dérivée de  $\mathbf{S}$  à directions propres constantes, ses directions propres sont celles de  $\mathbf{S}$ ;
- Le tenseur symétrique réel  $\check{\mathbf{S}}$  est la dérivée de  $\mathbf{S}$  à valeurs propres de  $\mathbf{S}$  constantes (attention : les valeurs propres de  $\check{\mathbf{S}}$  ne sont pas celles de  $\mathbf{S}$ ).

La dérivée temporelle  $\dot{\mathbf{S}}$  est la somme de ces deux tenseurs :  $\dot{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{S}} + \check{\mathbf{S}}$ .

Le tenseur  $\mathbf{S}$  étant symétrique et restant symétrique au cours du temps, toute base propre orthonormée  $\{\mathbf{u}_i(t)\}$  reste orthonormée dans son évolution. Il existe donc un vecteur « vitesse de rotation<sup>2</sup> » de la base propre, noté  $\boldsymbol{\omega}_S$ , tel que :

$$\dot{\mathbf{u}}_i = \boldsymbol{\omega}_S \wedge \mathbf{u}_i = \mathbf{H} : (\boldsymbol{\omega}_S \otimes \mathbf{u}_i) = \boldsymbol{\Omega}_S \cdot \mathbf{u}_i \quad \text{avec} \quad \boldsymbol{\Omega}_S = -\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S \quad \text{antisymétrique}$$

où  $\mathbf{H}$  est le tenseur d'orientation défini en 1.5 page 14.

La dérivée à valeurs propres constantes s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \check{\mathbf{S}} &= \sum_{i=1}^3 \lambda_i (\boldsymbol{\Omega}_S \cdot \mathbf{u}_i) \otimes \mathbf{u}_i + \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes (\boldsymbol{\Omega}_S \cdot \mathbf{u}_i) \\ &= \boldsymbol{\Omega}_S \cdot \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i + \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i \right) \cdot \boldsymbol{\Omega}_S^T \\ &= \boldsymbol{\Omega}_S \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}_S \end{aligned}$$

Connaissant  $\mathbf{S}$  et  $\dot{\mathbf{S}}$  symétriques, on se propose de trouver les tenseurs symétriques  $\widehat{\mathbf{S}}$  et  $\check{\mathbf{S}}$ , c'est-à-dire respectivement la dérivée à directions propres constantes et la dérivée à valeurs propres constantes.

1. Si  $\mathbf{Q}$  est par définition orthogonal, la différence  $\mathbf{Q}(t+h) - \mathbf{Q}(t)$  n'est pas un tenseur orthogonal en général.  
2. par analogie avec la cinématique des solides

**Détermination de la vitesse de rotation des directions propres**

En vertu de Eq. (2.3), on a  $\dot{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{S}} + \check{\mathbf{S}}$ . On en déduit :

$$\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}} = \mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{S}} + \mathbf{S} \cdot \check{\mathbf{S}} \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S} = \widehat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S} + \check{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}$$

et par différence (les tenseurs  $\mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{S}}$  et  $\widehat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}$  commutent car ils ont les mêmes directions propres) :

$$\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S} = \underbrace{\mathbf{S} \cdot \widehat{\mathbf{S}} - \widehat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}}_0 + \mathbf{S} \cdot \check{\mathbf{S}} - \check{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{S}$$

Le tenseur symétrique  $\check{\mathbf{S}}$  est donc solution de l'équation tensorielle antisymétrique :

$$2 \text{ antisym} (\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}}) = 2 \text{ antisym} (\mathbf{S} \cdot \check{\mathbf{S}}) \quad (2.4)$$

La recherche de  $\check{\mathbf{S}} = \mathbf{\Omega}_S \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}_S$  (symétrique) revient à rechercher le tenseur antisymétrique  $\mathbf{\Omega}_S$ . En remplaçant  $\check{\mathbf{S}}$  dans Eq. (2.4), le tenseur antisymétrique  $\mathbf{\Omega}_S$  est donc solution de l'équation tensorielle :

$$\begin{aligned} 2 \text{ antisym} (\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}}) &= \mathbf{S} \cdot (\mathbf{\Omega}_S \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}_S) - (\mathbf{\Omega}_S \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}_S) \cdot \mathbf{S} \\ &= 2 \mathbf{S} \cdot \mathbf{\Omega}_S \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S}^2 \cdot \mathbf{\Omega}_S - \mathbf{\Omega}_S \cdot \mathbf{S}^2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Le tenseur antisymétrique recherché  $\mathbf{\Omega}_S = -\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S$  se ramène à la recherche du vecteur  $\boldsymbol{\omega}_S$ . L'équation tensorielle antisymétrique Eq. (2.5) s'écrit donc :

$$2 \text{ antisym} (\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}}) = -2 \mathbf{S} \cdot (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S) \cdot \mathbf{S} + \mathbf{S}^2 \cdot (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S) + (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S) \cdot \mathbf{S}^2$$

Cette équation tensorielle du second ordre antisymétrique est équivalente à l'équation vectorielle suivante :

$$2 \mathbf{H} : \text{antisym} (\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}}) = -2 \mathbf{H} : (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S) \cdot \mathbf{S}) + \mathbf{H} : (\mathbf{S}^2 \cdot (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S)) + \mathbf{H} : ((\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S) \cdot \mathbf{S}^2) \quad (2.6)$$

En utilisant les propriétés de complète antisymétrie du tenseur  $\mathbf{H}$  et la symétrie de  $\mathbf{S}$  on vérifie aisément les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{H} : (\mathbf{S} \cdot (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S) \cdot \mathbf{S}) &= ((\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}) : (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H})) \cdot \boldsymbol{\omega}_S \\ \mathbf{H} : (\mathbf{S}^2 \cdot (\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S)) &= ((\mathbf{S} : \mathbf{S}) \mathbf{G} - \mathbf{S}^2) \cdot \boldsymbol{\omega}_S \\ \mathbf{H} : ((\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S) \cdot \mathbf{S}^2) &= ((\mathbf{S} : \mathbf{S}) \mathbf{G} - \mathbf{S}^2) \cdot \boldsymbol{\omega}_S \end{aligned}$$

En utilisant ces identités dans (2.6), le vecteur  $\boldsymbol{\omega}_S$  est solution de l'équation vectorielle :

$$\underbrace{\mathbf{H} : \text{antisym} (\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}})}_{\mathbf{v}} = \underbrace{\left[ -(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}) : (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}) + (\mathbf{S} : \mathbf{S}) \mathbf{G} - \mathbf{S}^2 \right]}_{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\omega}_S \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{v}$  est un vecteur et  $\mathbf{T}$  un tenseur du second ordre symétrique, tous les deux connus.

La recherche de  $\boldsymbol{\omega}_S$  se ramène donc à la résolution de l'équation (2.7), qui lorsqu'on exprime les composantes de  $\mathbf{S}$  et  $\dot{\mathbf{S}}$  dans une base de calcul quelconque se ramène à la résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues, par exemple :  $[\mathbf{v}^\bullet] = [\mathbf{T}^\bullet \cdot \bullet] [\boldsymbol{\omega}_S^\bullet]$ .

En se plaçant dans une base propre orthonormée de  $\mathbf{S}$  (de valeurs propres  $\lambda_i$ ), on trouve facilement que :

$$\det \mathbf{T} = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 (\lambda_2 - \lambda_3)^2 (\lambda_3 - \lambda_1)^2$$

Si les valeurs propres de  $\mathbf{S}$  sont distinctes, alors  $\det \mathbf{T} \neq 0$ , et la solution  $\boldsymbol{\omega}_S$  est unique :

$$\boldsymbol{\omega}_S = \left[ -(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}) : (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}) + (\mathbf{S} : \mathbf{S}) \mathbf{G} - \mathbf{S}^2 \right]^{-1} \cdot \mathbf{H} : \text{antisym} (\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}}) \quad (2.8)$$

En revanche, si les valeurs propres ne sont pas distinctes, alors  $\det \mathbf{T} = 0$ , la formule Eq. (2.8) est invalide car le tenseur  $\mathbf{T}$  n'est pas inversible. Il y a une infinité de solutions en  $\boldsymbol{\omega}_S$ , et l'on peut prendre l'une quelconque d'entre elles.

REMARQUE : Bien que l'équation (2.7) puisse être écrite et résolue dans toute base, il est intéressant de l'écrire dans une base propre orthonormée de  $\mathbf{S}$ . Elle se réduit à :  $\dot{s}_{23}(\lambda_2 - \lambda_3) = \omega_1(\lambda_2 - \lambda_3)^2$  ;  $\dot{s}_{31}(\lambda_3 - \lambda_1) = \omega_2(\lambda_3 - \lambda_1)^2$  ;  $\dot{s}_{12}(\lambda_1 - \lambda_2) = \omega_3(\lambda_1 - \lambda_2)^2$  ; ce qui montre que toute composante de  $\boldsymbol{\omega}_S$  normale à un plan de directions propres tel que  $\lambda_i = \lambda_j$  est indéterminée.

Si les valeurs propres de  $\mathbf{S}$  sont distinctes, la solution est unique et les composantes dans une base propre orthonormée de  $\mathbf{S}$  de la vitesse de rotation de la base propre de  $\mathbf{S}$  sont :  $\omega_1 = \frac{\dot{s}_{23}}{\lambda_2 - \lambda_3}$  ;  $\omega_2 = -\frac{\dot{s}_{13}}{\lambda_1 - \lambda_3}$  ;  $\omega_3 = \frac{\dot{s}_{12}}{\lambda_1 - \lambda_2}$ .

### Récapitulation

La dérivée temporelle  $\dot{\mathbf{S}}$  d'un tenseur symétrique  $\mathbf{S}$  peut être décomposée en une somme :  $\dot{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{S}} + \check{\mathbf{S}}$  où :

- le tenseur  $\widehat{\mathbf{S}}$  est la dérivée à directions propres de  $\mathbf{S}$  constantes,
- le tenseur  $\check{\mathbf{S}}$  est la dérivée à valeurs propres de  $\mathbf{S}$  constantes.

$\mathbf{S}$  et  $\dot{\mathbf{S}}$  étant connus, on détermine  $\widehat{\mathbf{S}}$  et  $\check{\mathbf{S}}$  comme suit :

1. Le vecteur vitesse de rotation des bases propres  $\boldsymbol{\omega}_S$  est une solution de l'équation vectorielle :

$$\mathbf{H} : \text{antisym}(\mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{S}}) = \left[ -(\mathbf{H} \cdot \mathbf{S}) : (\mathbf{S} \cdot \mathbf{H}) + (\mathbf{S} : \mathbf{S}) \mathbf{G} - \mathbf{S}^2 \right] \cdot \boldsymbol{\omega}_S \quad (2.9)$$

Si la solution n'est pas unique (les composantes de  $\boldsymbol{\omega}_S$  normales aux plans de directions propres sont indéterminées), on peut prendre l'une quelconque d'entre elles.

2. On calcule  $\boldsymbol{\Omega}_S = -\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S$  (antisymétrique)
3. La dérivée à valeurs propres constantes est :  $\check{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\Omega}_S \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}_S$  (symétrique de trace nulle).
4. La dérivée à base propre constant est :  $\widehat{\mathbf{S}} = \dot{\mathbf{S}} - \check{\mathbf{S}}$  (symétrique, de même directions propres que  $\mathbf{S}$ ).

### Quelques propriétés algébriques de $\widehat{\mathbf{S}}$ et $\check{\mathbf{S}}$

Soit  $\mathbf{S}'$  un tenseur symétrique de mêmes directions propres que  $\mathbf{S}$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{S}' : \check{\mathbf{S}} &= \mathbf{S}' : (\boldsymbol{\Omega}_S \cdot \mathbf{S}) - \mathbf{S}' : (\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}_S) \\ &= (\mathbf{S}' \cdot \mathbf{S}) : \boldsymbol{\Omega}_S - (\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}') : \boldsymbol{\Omega}_S \quad (\text{voir (1.37) page 20}) \\ &= (\mathbf{S}' \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}') : \boldsymbol{\Omega}_S = 0 \quad (\text{car } \mathbf{S} \text{ et } \mathbf{S}' \text{ commutent}) \end{aligned}$$

En particulier, on a les orthogonalités tensorielles suivantes :

$$\mathbf{S} : \check{\mathbf{S}} = 0 \quad \text{et} \quad \widehat{\mathbf{S}} : \check{\mathbf{S}} = 0 \quad (2.10)$$

En utilisant ces propriétés d'orthogonalité, on établit sans difficulté les propriétés utiles suivantes :

$$(\text{Tr} \mathbf{S}) \cdot = \text{Tr} \dot{\mathbf{S}} = \text{Tr}(\widehat{\mathbf{S}} + \check{\mathbf{S}}) = \text{Tr} \widehat{\mathbf{S}} \quad (2.11)$$

$$(\text{dev} \mathbf{S}) \cdot = \text{dev} \dot{\mathbf{S}} = \text{dev}(\widehat{\mathbf{S}} + \check{\mathbf{S}}) = \text{dev} \widehat{\mathbf{S}} + \check{\mathbf{S}} = (\text{dev} \mathbf{S}) \cdot \widehat{\mathbf{S}} + \check{\mathbf{S}} \quad (2.12)$$

$$\|\mathbf{S}\| \cdot = \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} : \dot{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} : (\widehat{\mathbf{S}} + \check{\mathbf{S}}) = \frac{\mathbf{S}}{\|\mathbf{S}\|} : \widehat{\mathbf{S}} \quad (2.13)$$

$$\|\text{dev} \mathbf{S}\| \cdot = \frac{\text{dev} \mathbf{S}}{\|\text{dev} \mathbf{S}\|} : \text{dev} \widehat{\mathbf{S}} \quad (2.14)$$

$$(\det \mathbf{S}) \cdot = (S_{II} \mathbf{G} - S_I \mathbf{S} + \mathbf{S}^2) : \dot{\mathbf{S}} = (S_{II} \mathbf{G} - S_I \mathbf{S} + \mathbf{S}^2) : \widehat{\mathbf{S}} \quad (2.15)$$

$$= (\det \mathbf{S}) \mathbf{S}^{-1} : \widehat{\mathbf{S}} \quad (\text{si } \mathbf{S}^{-1} \text{ existe}) \quad (2.16)$$

$$(\det \text{dev} \mathbf{S}) \cdot = (\text{dev} \mathbf{S})^2 : \text{dev} \widehat{\mathbf{S}} \quad (2.17)$$

où  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\}$  sont les trois invariants fondamentaux de  $\mathbf{S}$  définis en (1.40) et suivantes page 22.

## 2.2 Fonctions scalaires d'une variable tensorielle

En mécanique des milieux continus, on doit considérer des fonctions à valeur scalaire dont l'argument est tensoriel :

$$f : \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p} \rightarrow f(\mathbf{T}) \in \mathbb{R} \quad (2.18)$$

et on a besoin de connaître les variations du scalaire  $f(\mathbf{T})$  quand l'argument  $\mathbf{T}$  varie.

### 2.2.1 Opérateur linéaire tangent

La description des variations d'un argument tensoriel d'ordre  $p$  est plus compliquée que pour les fonctions à variables réelles car les tenseurs d'ordre  $p$  sont dans un espace vectoriel de dimension  $n^p$ , alors que  $\mathbb{R}$  est de dimension 1.

REMARQUES : La dérivée habituelle, en  $x$ , d'une fonction  $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^{\otimes p}$  est l'application  $\mathbf{g}'$  (notée aussi  $\frac{d\mathbf{g}}{dx}$ ) définie par :

$$\mathbf{g}' : x \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{g}'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{g}(x+h) - \mathbf{g}(x)}{h} \in \mathbb{R}$$

On ne peut pas généraliser cette définition pour  $x$  et  $h$  tensoriels car la division par un tenseur n'a aucun sens.

D'autre part, les fonctions  $f$  envisagées en (2.18) sont à valeur scalaire, la valeur du réel  $f(\mathbf{T})$  doit être indépendante de la base dans laquelle on exprime les composantes du tenseur  $\mathbf{T}$ . Les fonctions  $\mathbb{V}^{\otimes p} \rightarrow \mathbb{R}$  sont donc une sous-classe des fonctions à  $n^p$  variables réelles indépendantes : elles doivent être invariantes par changement de base des composantes de  $\mathbf{T}$ .

Une variation arbitraire de l'argument tensoriel  $\mathbf{T}$  sera notée  $d\mathbf{T}$ . C'est un tenseur de même ordre. À chaque variation arbitraire  $d\mathbf{T}$  du tenseur  $\mathbf{T}$  correspond une variation  $f(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - f(\mathbf{T})$  différente.

DÉFINITION : On dit que l'application  $f : \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $\mathbf{T}$  s'il existe une application linéaire, notée  $\nabla f$ , appelée application linéaire tangente à  $f$  en  $\mathbf{T}$ , telle que :

$$\forall d\mathbf{T}, f(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - f(\mathbf{T}) = \nabla f \overline{\otimes}^p d\mathbf{T} + \|d\mathbf{T}\| o(d\mathbf{T}) \in \mathbb{R} \quad (2.19)$$

où  $o(d\mathbf{T})$  est une fonction  $\mathbb{V}^{\otimes p} \rightarrow \mathbb{R}$  quelconque qui tend vers 0 quand  $\|d\mathbf{T}\| \rightarrow 0$ , et où  $\overline{\otimes}^p$  est le produit contracté  $p$  fois.

Les règles de l'algèbre tensorielle impliquent que l'opérateur linéaire tangent  $\nabla f$  est un tenseur d'ordre  $p$ .

DÉFINITION : Le scalaire  $df = \nabla f \overline{\otimes}^p d\mathbf{T}$  est appelé différentielle de  $f$ .

AUTRE NOTATION : L'opérateur linéaire tangent  $\nabla f$  est souvent noté  $\frac{df}{d\mathbf{T}}$ . Dans ce cas on écrit :  $df = \frac{df}{d\mathbf{T}} \overline{\otimes}^p d\mathbf{T}$ . Mais il faut bien considérer la « fraction »  $\frac{df}{d\mathbf{T}}$  comme un symbole indissociable ! Il ne s'agit nullement d'une division et le produit  $p$ -contracté «  $\overline{\otimes}^p$  » n'est pas une simple multiplication. Toute « simplification » par  $d\mathbf{T}$  n'aurait aucun sens !

Lorsque  $\|d\mathbf{T}\| \rightarrow 0$ , le reste  $\|d\mathbf{T}\| o(d\mathbf{T})$  tend vers 0 plus vite que le terme  $df = \nabla f \overline{\otimes}^p d\mathbf{T}$  qui est linéaire en  $d\mathbf{T}$ . Ainsi, quand  $\|d\mathbf{T}\| \rightarrow 0$ , la différentielle  $df$  s'approche de la variation exacte  $f(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - f(\mathbf{T})$ .

L'opérateur linéaire tangent  $\nabla f$ , quand il est noté  $\frac{df}{d\mathbf{T}}$ , est souvent improprement appelé « dérivée de  $f$  par rapport à  $\mathbf{T}$  » bien qu'il ne s'agisse nullement d'une limite puisque le résultat dépend de la direction de  $d\mathbf{T}$  dans l'espace  $\mathbb{V}^{\otimes p}$ .

On peut néanmoins définir une dérivée de  $f$  lorsque le tenseur  $\mathbf{T}$  varie tout en restant colinéaire à une « direction tensorielle » constante dans l'espace  $\mathbb{V}^{\otimes p}$  de la manière suivante : en divisant (2.19) par  $\|d\mathbf{T}\|$ , il vient :

$$\frac{f(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) - f(\mathbf{T})}{\|d\mathbf{T}\|} = \nabla f \overline{\otimes}^p \frac{d\mathbf{T}}{\|d\mathbf{T}\|} + o(d\mathbf{T})$$

où le tenseur d'ordre  $p$  :  $\mathbf{T}_0 = \frac{d\mathbf{T}}{\|d\mathbf{T}\|}$  (de norme 1) est une « direction unitaire » dans l'espace vectoriel  $\mathbb{V}^{\otimes p}$  (de dimension  $n^p$ ).

Quand on passe à la limite  $\|d\mathbf{T}\| \rightarrow 0$  à  $\mathbf{T}_0$  constant, on peut alors définir la dérivée de  $f$  dans la direction tensorielle unitaire  $\mathbf{T}_0$  :



DÉFINITION : On appelle *dérivée de la fonction  $f(\mathbf{T})$  dans la direction unitaire (tensorielle)  $\mathbf{T}_0$*  la limite suivante :

$$f'_{\mathbf{T}_0}(\mathbf{T}) = \lim_{\substack{\|\mathbf{dT}\| \rightarrow 0 \\ \mathbf{T}_0 \text{ constant}}} \frac{f(\mathbf{T} + \mathbf{dT}) - f(\mathbf{T})}{\|\mathbf{dT}\|} = \nabla f \overline{\otimes}^p \mathbf{T}_0$$

### 2.2.2 Dérivée de fonctions composées

S'il existe une application  $\mathbf{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^{\otimes p}$  telle que  $\mathbf{T} = \mathbf{F}(t)$ , alors la fonction  $h = f \circ \mathbf{F}$  est une application  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dont on peut calculer la dérivée par rapport à  $t$ .

$$h'(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{h(t+dt) - h(t)}{dt} \quad (2.20)$$

où :

$$\begin{aligned} h(t+dt) &= f(\mathbf{F}(t+dt)) = f\left(\mathbf{F}(t) + \frac{d\mathbf{F}}{dt} dt + |dt| o(dt)\right) \quad (\text{voir (2.1) page 31}) \\ &= f(\mathbf{F}(t)) + \nabla f \overline{\otimes}^p \left(\frac{d\mathbf{F}}{dt} dt + |dt| o(dt)\right) + \left\| \frac{d\mathbf{F}}{dt} dt + |dt| o(dt) \right\| o\left(\frac{d\mathbf{F}}{dt} dt + |dt| o(dt)\right) \end{aligned}$$

La dérivée définie en (2.20) est alors :

$$h'(t) = \nabla f \overline{\otimes}^p \frac{d\mathbf{F}}{dt} \quad (\text{qu'on peut aussi écrire : } \frac{df}{dt} = \frac{df}{d\mathbf{T}} \overline{\otimes}^p \frac{d\mathbf{T}}{dt}) \quad (2.21)$$

L'opérateur linéaire tangent  $\nabla f$  (tenseur d'ordre  $p$ ) permet donc de généraliser formellement la formule de dérivation des fonctions composées, mais avec le produit  $\overline{\otimes}^p$ .

### 2.2.3 Composantes sur une base de l'opérateur linéaire tangent $\nabla f$

Pour alléger les écritures, on illustre la méthode avec des tenseurs d'ordre 2 construits sur  $\mathbb{V}_3$ . Le tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  peut être défini par ses composantes dans une base tensorielle. Dans la suite, on prend par exemple, des composantes mixtes :

$$\mathbf{T} = T^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \quad (2.22)$$

Dans la base  $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j\}$ , une variation arbitraire  $d\mathbf{T}$  du tenseur  $\mathbf{T}$  est donc définie par 9 variations  $dT^i_j$ , arbitraires et indépendantes, de chacune de ses composantes :

$$d\mathbf{T} = dT^i_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$$

À la fonction  $f(\mathbf{T})$  et à la base tensorielle  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j\}$  choisie, on peut associer une fonction  $f_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$f(\mathbf{T}) = f_{\mathcal{B}}(T^1_1, T^1_2, T^1_3, T^2_1, T^2_2, T^2_3, T^3_1, T^3_2, T^3_3)$$

La fonction  $f_{\mathcal{B}}$  permet d'évaluer le scalaire  $f(\mathbf{T})$  en fonction des composantes de  $\mathbf{T}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

L'égalité  $df = df_{\mathcal{B}}$  implique l'égalité suivante :

$$\underbrace{(\nabla f)_i^j dT^i_j}_{df = \nabla f : d\mathbf{T}} = \underbrace{\frac{\partial f_{\mathcal{B}}}{\partial T^i_j} dT^i_j}_{df_{\mathcal{B}}} \quad \forall d\mathbf{T}$$

On en déduit immédiatement par identification les composantes du tenseur  $\nabla f$  dans la base  $\{\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j\}$  :

$$(\nabla f)_i^j = \frac{\partial f_{\mathcal{B}}}{\partial T^i_j} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla f = \frac{\partial f_{\mathcal{B}}}{\partial T^i_j} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j$$

Bien noter la position des indices : les règles de sommation dans le double produit contracté  $\nabla f : d\mathbf{T}$  impliquent que, quand on dérive la fonction  $f_{\mathcal{B}}$  par rapport aux composantes d'une certaine variance, on obtient les composantes de  $\nabla f$  de variances inverses.

On généralise sans difficulté aux fonctions scalaires d'argument tensoriel d'ordre quelconque. Par exemple, si  $\mathbf{T} = T^i j^k l^l \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^l$ , les composantes de  $\nabla f$  dans la base  $\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^k \otimes \mathbf{e}_l$  sont :

$$(\nabla f)_{i^j k^l} = \frac{\partial f_{\mathcal{B}}}{\partial T^i j^k l^l}$$

### 2.2.4 Variables tensorielles contraintes

En mécanique des milieux continus, la plupart des tenseurs du second ordre sont des tenseurs symétriques par définition. Ils restent donc symétriques dans leurs variations.

REMARQUE : L'espace des tenseurs symétriques est un espace vectoriel de dimension 6 et le tenseur  $d\mathbf{T}$  appartient à cet espace. À la fonction  $f(\mathbf{T})$  et à une base tensorielle  $\mathcal{B}^s$  bien choisie (n'engendrant que des tenseurs symétriques<sup>3</sup>), on pourrait associer une fonction  $f_{\mathcal{B}^s} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :  $f(\mathbf{T}) = f_{\mathcal{B}^s}(T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{22}, T_{23}, T_{33})$ , où les  $T_{ij}$  sont les composantes (ici complètement covariantes, la matrice  $[T_{\bullet\bullet}]$  est donc symétrique) de  $\mathbf{T}$  dans cette base. On pourrait toujours écrire  $df = df_{\mathcal{B}^s}$  et donc  $(\nabla f)^{ij} dT_{ij} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j \geq i}^3 \frac{\partial f_{\mathcal{B}^s}}{\partial T_{ij}} dT_{ij}$ . Mais le terme de droite n'est pas le développement d'un double produit contracté et l'identification des composantes de  $\nabla f$  sur la base n'est plus possible!

D'autres contraintes sur les variations  $d\mathbf{T}$  peuvent intervenir (le tenseur  $\mathbf{T}$  est par définition sphérique, ou de trace nulle, ou antisymétrique). À chaque fois, la dimension de l'espace vectoriel dans lequel  $d\mathbf{T}$  arbitraire peut évoluer est différente.

Plutôt que d'établir une définition particulière de l'opérateur linéaire tangent pour chaque type de contrainte, on va utiliser un théorème qui nous permet *dans certains cas* « d'ignorer la contrainte » pendant la dérivation puis de la rétablir ensuite après dérivation.

THÉORÈME : Soit  $\tilde{f}$  une fonction de  $m$  variables réelles  $x_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), certaines variables étant liées aux autres par  $r$  égalités de la forme :

$$x_k = h_k(\dots, x_{p \notin [1,r]}, \dots) \quad k \in [1, r] \quad (2.23)$$

alors,

$$d\tilde{f} = \left[ \sum_{i=1}^m \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_i} dx_i \right]_{\{x_k = h_k(\dots, x_{p \notin [1,r]}, \dots) \quad k \in [1, r]\}}$$

Autrement dit, si certaines variables sont des fonctions des autres variables, on peut dériver  $\tilde{f}$  comme si les  $x_i$  n'étaient pas liés, puis remplacer ensuite dans le résultat, les variables liées  $x_k$  par leur expression en fonction des autres.

DÉMONSTRATION : Pour alléger les écritures, on suppose que  $\tilde{f}$  a 4 variables  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_4$  et qu'il n'y a qu'une seule contrainte :  $x_1 = h_1(x_2, x_3)$ . On définit la fonction  $g$  de 3 variables indépendantes de la manière suivante :

$$g(x_2, x_3, x_4) = \tilde{f}(h_1(x_2, x_3), x_2, x_3, x_4)$$

Pour une variation arbitraire  $(dx_1, dx_2, dx_3, dx_4)$  satisfaisant les contraintes, on a évidemment  $d\tilde{f} = dg$  et donc en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} \quad \frac{\partial g}{\partial x_3} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} \quad \frac{\partial g}{\partial x_4} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4}$$

3. par exemple, la 6-base :  $\{\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1, (\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^1), (\mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^3 + \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^2), \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2, (\mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^1 + \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^3), \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3\}$

et donc

$$\begin{aligned} dg &= \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left( \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} \right) dx_3 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4} dx_4 \\ &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} \underbrace{\left( \frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_3} dx_3 \right)}_{dh_1} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4} dx_4 \end{aligned}$$

On peut donc calculer la différentielle sous contrainte en posant formellement :

$$d\tilde{f} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_4} dx_4$$

puis remplacer  $x_1$  par  $h_1(x_2, x_3)$  et remplacer  $dx_1$  par  $\frac{\partial h_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_3} dx_3$ .

REMARQUE IMPORTANTE : Il faut bien noter que la méthode de calcul des composantes de  $\nabla f(\mathbf{T})$  avec des contraintes sur  $\mathbf{T}$  qui vient d'être donnée, n'est valable que si les contraintes sur les composantes peuvent s'exprimer strictement sous la forme donnée dans le théorème (2.23) page 37.

Ce n'est notamment pas le cas pour une contrainte du type «  $\mathbf{T}$  orthogonal » ou encore  $\|\mathbf{T}\| = 1$ . Les ensembles de tenseurs soumis à ces contraintes ne sont pas des espaces vectoriels et le tenseur  $d\mathbf{T}$  n'appartient pas à ces ensembles. Dans ces cas, la contrainte ne se traduit pas par l'expression de certaines composantes en fonction d'autres (les fonctions  $h_k$  n'existent pas).

EXEMPLE : La fonction  $f : \mathbb{V}_3^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} : \mathbf{Q}$  avec la contrainte «  $\mathbf{Q}$  orthogonal » est une fonction qui vaut 3 quel que soit  $\mathbf{Q}$ . Le tenseur du second ordre  $\nabla f$  (la « dérivée par rapport à  $\mathbf{Q}$  ») est donc évidemment nul. Or, la formule de dérivation sans contraintes est :  $\nabla(\mathbf{T} : \mathbf{T}) = 2\mathbf{T}$ . On voit bien que la contrainte «  $\mathbf{Q}$  orthogonal » appliquée après dérivation ne donne pas  $\mathbf{0}$ . De fait, la contrainte «  $\mathbf{Q}$  orthogonal » ne peut pas se réduire à des relations de certaines composantes en fonction des autres telles que celles précisées dans le théorème (2.23) page 37.

En pratique, le théorème est utilisable pour des contraintes de symétrie ou d'antisymétrie (avec des relations portant sur des composantes non mixtes) ou des contraintes de sphéricité ou de trace nulle (avec des relations portant sur des composantes mixtes).

## 2.3 Fonctions scalaires de plusieurs tenseurs

En mécanique des milieux continus, il arrive souvent que des fonctions à valeur scalaire soient à plusieurs arguments tensoriels  $\mathbf{T}_i$ , d'ordre respectif  $p_i$ .

On définit sans difficulté les « dérivées partielles » par rapport aux arguments tensoriels, que l'on devrait appeler « opérateurs linéaires tangents partiels » : c'est l'opérateur linéaire tangent de  $f$  quand l'un de ses arguments varie, les autres étant constants. On notera  $\partial_i f$  la « dérivée partielle » de  $f$  par rapport à son  $i^{\text{ème}}$  argument. Le tenseur  $\partial_i f$  est donc un tenseur d'ordre  $p_i$ .

EXEMPLE : Soit  $f(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \in \mathbb{R}$  où  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$  sont des tenseurs d'ordre respectivement  $p$  et  $q$ , le terme  $\partial_1 f$  est un tenseur d'ordre  $p$  qui est la « dérivée partielle de  $f$  par rapport à  $\mathbf{P}$  » à  $\mathbf{Q}$  constant. De même  $\partial_2 f$  est un tenseur d'ordre  $q$ . Pour toute variation arbitraire des arguments tensoriels (liés ou non par une contrainte), la différentielle est :

$$df = \partial_1 f \otimes^p d\mathbf{P} + \partial_2 f \otimes^q d\mathbf{Q}$$

On généralise facilement à un nombre quelconque d'arguments tensoriels.

### 2.3.1 Quelques identités utiles

On vérifie sans difficulté les identités suivantes où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont des vecteurs et où  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{U}$  sont des tenseurs du second ordre :

Fonctions scalaires à variables vectorielles :

$$\partial_1(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) = \mathbf{y} \qquad \nabla(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) = 2\mathbf{x} \qquad \nabla\|\mathbf{x}\| = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \qquad (2.24)$$

Fonctions scalaires à variables tensorielles d'ordre 2:

$$\partial_1(\mathbf{T} : \mathbf{U}) = \mathbf{U} \quad \nabla(\mathbf{T} : \mathbf{T}) = 2\mathbf{T} \quad \nabla\|\mathbf{T}\| = \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} \quad (2.25)$$

$$\nabla\text{Tr}\mathbf{T} = \mathbf{G} \quad \nabla\text{Tr}(\mathbf{T}^2) = 2\mathbf{T}^T \quad \nabla\text{Tr}(\mathbf{T}^n) = n(\mathbf{T}^{n-1})^T \quad (2.26)$$

$$\nabla(T_I) = \mathbf{G} \quad \nabla(T_{II}) = T_I \mathbf{G} - \mathbf{T}^T \quad \nabla(T_{III}) = T_{II} \mathbf{G} - T_I \mathbf{T}^T + \mathbf{T}^{2T} \quad (2.27)$$

$$\text{si } \mathbf{T} \text{ inversible :} \quad \nabla(T_{III}) = T_{III} \mathbf{T}^{-T} \quad (2.28)$$

Dérivées temporelles :

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{x}\| = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad \frac{d}{dt}\|\mathbf{T}\| = \frac{\mathbf{T}}{\|\mathbf{T}\|} : \frac{d\mathbf{T}}{dt} \quad \frac{d}{dt}(\text{Tr}\mathbf{T}^n) = n(\mathbf{T}^{n-1})^T : \frac{d\mathbf{T}}{dt} \quad (2.29)$$

$$\frac{dT_I}{dt} = \text{Tr} \frac{d\mathbf{T}}{dt} \quad \frac{dT_{II}}{dt} = T_I \text{Tr} \frac{d\mathbf{T}}{dt} - \mathbf{T}^T : \frac{d\mathbf{T}}{dt} \quad \frac{dT_{III}}{dt} = T_{II} \text{Tr} \frac{d\mathbf{T}}{dt} - T_I \mathbf{T}^T : \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \mathbf{T}^{2T} : \frac{d\mathbf{T}}{dt} \quad (2.30)$$

$$\text{si } \mathbf{T} \text{ inversible :} \quad \frac{dT_{III}}{dt} = T_{III} \mathbf{T}^{-T} : \frac{d\mathbf{T}}{dt} \quad (2.31)$$

### 2.3.2 Fonctions scalaires isotropes d'arguments tensoriels

DEFINITIONS : On appelle rotation par  $\mathbf{Q}$  d'un vecteur  $\mathbf{v}$  le vecteur  $\tilde{\mathbf{v}}$  défini par :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{v}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}$$

On appelle rotation par  $\mathbf{Q}$  d'un tenseur du second ordre  $\mathbf{T}$  le tenseur du second ordre  $\tilde{\mathbf{T}}$  défini par :

$$\tilde{\mathbf{T}} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T$$

REMARQUE : Les propriétés algébriques des tenseurs orthogonaux données page 26 montrent que les tenseurs du second ordre  $\mathbf{T}$  et  $\tilde{\mathbf{T}}$  ont les mêmes valeurs propres et que leurs vecteurs propres se transforment par :  $\tilde{\mathbf{t}} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{t})$ . En outre, si  $\mathbf{T}$  est symétrique ou antisymétrique ou shérique ou déviatorique ou orthogonal ou symétrique défini positif,  $\tilde{\mathbf{T}}$  a les mêmes propriétés. Une base propre orthonormée de  $\mathbf{T}$  se transforme par  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$  en une base propre orthonormée de  $\tilde{\mathbf{T}}$ .

On sait écrire tensoriellement la rotation de tenseurs d'ordres supérieurs (voir annexe (B.1) page 78).

DÉFINITION : On dit qu'une fonction à valeur scalaire est isotrope si :

$$f(\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n) = f(\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_1), \dots, \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_n)) \quad (2.32)$$

En mécanique des milieux continus, il arrive souvent que l'on impose cette propriété d'isotropie aux fonctions réelles d'arguments tensoriels, c'est-à-dire que leur valeur doit être insensible à toute rotation de ses arguments<sup>4</sup>.

La démonstration des résultats<sup>5</sup> sur les fonctions isotropes d'arguments appartenant à  $\mathbb{V}_3$  ou à  $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$  sort du cadre de ce chapitre. On se contente de citer quelques résultats utiles dans la suite (on trouvera les démonstrations dans l'annexe B page 77).

On se limite ici à des arguments tensoriels d'ordre 1 ou 2. En outre, les tenseurs du second ordre sont supposés symétriques<sup>6</sup>.

4. La justification de cette condition supplémentaire apparaîtra en mécanique des milieux continus : elle signifie que le scalaire  $f(\mathbf{T})$  doit avoir la même valeur pour tous les observateurs.

5. Ils ont été initiés par BOEHLER puis repris par SPENCER, WANG et d'autres.

6. Tout tenseur du second ordre pouvant être décomposé en parties symétrique et antisymétrique, et les tenseurs antisymétriques étant isomorphes à leur vecteur adjoint, un argument tensoriel du second ordre quelconque peut donc être vu comme un couple d'arguments indépendants, l'un symétrique du second ordre et l'autre vectoriel.

La théorie des fonctions isotropes prouve que si une fonction  $f$  à valeur scalaire et d'arguments tensoriels est isotrope, alors il existe une fonction  $\bar{f}$  de  $m$  arguments scalaires telle que :

$$f(\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n) = \bar{f}(I_1, \dots, I_m)$$

Plus précisément :

$$f(\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n) = f(\mathcal{R}_Q(\mathbf{T}_1), \dots, \mathcal{R}_Q(\mathbf{T}_n)) \quad \forall Q \forall \mathbf{T}_1 \dots \forall \mathbf{T}_n \Rightarrow \exists \bar{f} \text{ tel que } f(\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n) = \bar{f}(I_1, \dots, I_m)$$

Les  $m$  arguments  $\{I_1, \dots, I_m\}$  de  $\bar{f}$  sont des scalaires (des invariants) calculés à partir d'un ou plusieurs arguments tensoriels de  $f$ . Cette liste dépend à la fois de l'ordre de tensorialité et du nombre d'arguments tensoriels de  $f$ . Le nombre  $m$  de ces scalaires est toujours inférieur au nombre total de composantes des arguments tensoriels.

On ne présente ici que quelques résultats. Dans ce qui suit,  $\mathbf{v}$  est un vecteur et  $\mathbf{S}$  est un tenseur du second ordre symétrique, d'invariants  $S_I, S_{II}, S_{III}$  et de valeur propres  $s_1, s_2, s_3$ .

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) \text{ isotrope} &\Rightarrow \exists \bar{f} \text{ tel que } f(\mathbf{v}) = \bar{f}(\|\mathbf{v}\|) \\ f(\mathbf{S}) \text{ isotrope} &\Rightarrow \exists \bar{f} \text{ tel que } f(\mathbf{S}) = \bar{f}(S_I, S_{II}, S_{III}) = \bar{f}'(\text{Tr} \mathbf{S}, \text{Tr}(\mathbf{S}^2), \text{Tr}(\mathbf{S}^3)) = \bar{f}''(s_1, s_2, s_3) \\ f(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \text{ isotrope} &\Rightarrow \exists \bar{f} \text{ tel que } f(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \bar{f}(\|\mathbf{v}\|, \|\mathbf{v}'\|, \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') \\ f(\mathbf{v}, \mathbf{S}) \text{ isotrope} &\Rightarrow \exists \bar{f} \text{ tel que } f(\mathbf{v}, \mathbf{S}) = \bar{f}(\|\mathbf{v}\|, S_I, S_{II}, S_{III}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \mathbf{v}) \end{aligned}$$

On trouvera un tableau de résultats plus complet en annexe B.4 page 85.

Comme on peut le constater, par exemple dans le cas  $f(\mathbf{S})$  où on a donné plusieurs listes possibles, les listes d'invariants  $\{I_1, I_2, \dots, I_m\}$  ne sont pas uniques, mais leur longueur est toujours la même et le jacobien de la transformation  $\{I_1, I_2, \dots, I_m\} \leftrightarrow \{I'_1, I'_2, \dots, I'_m\}$  doit être régulier.

REMARQUES : On peut comprendre géométriquement la présence des invariants dits « croisés » (ceux qui sont calculés à partir de plusieurs arguments tensoriels de  $f$ ) : ils traduisent le fait que dans toute rotation  $\mathcal{R}_Q$ , les orientations relatives des différents arguments tensoriels de  $f$  restent invariantes.

Par exemple, l'invariant  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'$  du cas  $f(\mathbf{v}, \mathbf{v}')$  traduit l'angle non orienté entre les deux arguments vectoriels. De même, on montre dans l'annexe B page 77 que les deux invariants  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S} : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$  et  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{S}^2 : (\mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$  du cas  $f(\mathbf{v}, \mathbf{S})$  sont deux scalaires nécessaires et suffisants pour préciser l'orientation relative de la direction non orientée  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$ , par rapport aux directions propres du tenseur symétrique du second ordre  $\mathbf{S}$ . On peut trouver d'autres invariants croisés physiquement plus significatifs pour représenter la même information.

Enfin, si certains arguments tensoriels de  $f$  présentent des particularités permanentes (norme unité ou trace nulle par exemple), le nombre de variables de  $\bar{f}$  s'en trouve diminué. Par exemple, si  $\mathbf{v}$  est par définition un vecteur unitaire,  $\|\mathbf{v}\| = 1$  n'est plus une variable de la fonction  $\bar{f}$ .

## 2.4 Fonctions tensorielles d'arguments tensoriels

### 2.4.1 Fonctions à un argument tensoriel :

On considère maintenant des applications  $f : \mathbb{V}_3^{\otimes p} \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes q}$ . Si l'application  $f(\mathbf{T})$  est différentiable en  $\mathbf{T}$ , l'opérateur linéaire tangent est défini par :

$$d\mathbf{f} = \nabla \mathbf{f} \bar{\otimes}^p d\mathbf{T} \quad \text{où } d\mathbf{f} \in \mathbb{V}_3^{\otimes q} \text{ et } d\mathbf{T} \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$$

L'opérateur linéaire tangent  $\nabla \mathbf{f}$  est donc un tenseur d'ordre  $p + q$ . Ses composantes dans une base fixe se calculent suivant les mêmes règles que précédemment.

EXEMPLE : Si  $p = 2$  et  $q = 2$ , l'opérateur linéaire tangent de l'application  $\mathbf{T}(\mathbf{U})$  est d'ordre 4, et ses composantes dans une base sont par exemple :

$$(\nabla \mathbf{T})_{j m}^{i k} = \frac{\partial T^i_j(U_1^1, \dots, U_3^3)}{\partial U_k^m}$$

Noter qu'ici encore, la dérivation par rapport à une composante de certaines variances donne une composante de  $\nabla \mathbf{f}$  de variances inverses.

### Cas particulier des endomorphismes inversibles $\mathbb{V} \leftrightarrow \mathbb{V}$

Soit  $f$  un endomorphisme (non linéaire *a priori*) inversible  $\mathbb{V} \leftrightarrow \mathbb{V}$  :  $\mathbf{v} = f(\mathbf{u})$ .  
L'inversibilité de  $f$  implique qu'il existe  $f^{-1}$  tel que :  $\mathbf{u} = f^{-1}(\mathbf{v})$ .

Les opérateurs linéaires tangents des deux applications  $f$  et  $f^{-1}$  sont définis par :

$$d\mathbf{v} = \nabla f \cdot d\mathbf{u} \quad \text{et} \quad d\mathbf{u} = \nabla(f^{-1}) \cdot d\mathbf{v}$$

Les opérateurs linéaires tangents  $\nabla f$  et  $\nabla(f^{-1})$  sont donc tous les deux des tenseurs d'ordre 2, c'est-à-dire des endomorphismes *linéaires*  $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ . Les deux égalités ci-dessus montrent qu'ils sont inverses. On a donc :

$$f : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \text{ inversible} \quad \Rightarrow \quad (\nabla f)^{-1} = \nabla(f^{-1}) \quad (2.33)$$

### 2.4.2 Fonctions tensorielles à plusieurs arguments tensoriels :

On définit sans difficulté les opérateurs linéaires tangents partiels comme étant les opérateurs linéaires tangents de l'application  $f$ , à valeur tensorielle d'ordre  $p$ , quand l'un de ses arguments tensoriel  $\mathbf{T}_i$  varie, les autres étant constants. La différentielle de l'application  $f(\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n)$  est :

$$df = \sum_{i=1}^n \partial_i f \otimes^{\otimes p_i} d\mathbf{T}_i \in \mathbb{V}^{\otimes p}$$

où  $p_i$  est l'ordre du tenseur  $\mathbf{T}_i$  et où  $\partial_i f$  est un tenseur d'ordre  $p + p_i$ .

Si les tenseurs  $\mathbf{T}_i$  sont fonction d'un paramètre réel  $t$ , on montre facilement que :

$$\frac{df}{dt} = \sum_{i=1}^n \partial_i f \otimes^{\otimes p_i} \frac{d\mathbf{T}_i}{dt}$$

### 2.4.3 Fonctions tensorielles isotropes

DÉFINITION : Une fonction tensorielle  $f(\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$  est dite *isotrope* si

$$\mathcal{R}_Q(f(\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n)) = f(\mathcal{R}_Q(\mathbf{T}_1), \dots, \mathcal{R}_Q(\mathbf{T}_n))$$

REMARQUE : C'est notamment le cas des lois de comportement des milieux continus qui sont de la forme  $\boldsymbol{\sigma} = f(T, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{D}, \dots)$ . Elles doivent être isotropes pour garantir l'invariance de la loi dans tout changement d'observateur.

## 2.5 En bref...

La dérivation temporelle d'un tenseur conserve la symétrie, l'antisymétrie, la sphéricité et la trace nulle, mais pas l'orthogonalité ni la norme.

On peut définir des opérateurs linéaires tangents (« dérivée généralisée ») de fonctions scalaires ou tensorielles d'arguments tensoriels.

Les fonctions scalaires d'arguments tensoriels qui sont isotropes peuvent être remplacées par des fonctions scalaires d'arguments scalaires.



# Chapitre 3

## Champs tensoriels dans $\mathcal{E}_3$

En mécanique des milieux continus, on a besoin de représenter certaines grandeurs physiques par des tenseurs (par exemple les contraintes, les déformations). Ces tenseurs ont en général une valeur différente en chaque point  $M$  d'un domaine  $\mathcal{D}$  de l'espace occupé par un milieu continu. Pour décrire la distribution spatiale de ces grandeurs, il faut donc des champs de tenseurs :

$$\mathbf{T} : \forall M \in \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{T}(M) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$$

On suppose que l'espace physique qui nous entoure est représentable par un espace affine tridimensionnel de points, qui sera noté  $\mathcal{E}_3$ . Certaines des notions qui suivent sont généralisables à des dimensions supérieures, mais puisque dans ce cours, on ne se préoccupe que de mécanique non relativiste, on se limite à  $\mathcal{E}_3$ . On aura à considérer des champs scalaires (tenseurs d'ordre 0), des champs vectoriels (tenseurs d'ordre 1) et des champs tensoriels (tenseurs d'ordre supérieur à 1).

L'objectif de ce chapitre est de faire de l'analyse des champs sans se préoccuper du système de coordonnées utilisé. La définition des opérateurs différentiels (gradient, divergence, rotationnel, laplacien) est donnée sous forme tensorielle, c'est-à-dire valable pour tout système de coordonnées. Accessoirement, cette démarche permet de construire de manière systématique des formulaires donnant les composantes de ces opérateurs différentiels sur les bases locales attachées à ces systèmes de coordonnées.

### Notation pour les dérivées partielles par rapport aux coordonnées.

Soit  $f(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$  une fonction quelconque des trois coordonnées réelles  $(x^1, x^2, x^3)$ . Dans ce chapitre, on fait grand usage de dérivées partielles par rapport aux coordonnées de la forme  $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ . En calcul tensoriel, l'usage est d'employer des notations plus concises. On écrit :

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_i f \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x^i} = f_{,i}$$

Dans la dernière notation, les indices qui suivent la virgule sont des indices de dérivation (leur ordre est donc quelconque). Cette notation est la plus concise et présente des avantages d'ordre d'indices qui apparaîtront plus loin. On l'utilisera systématiquement dans la suite.

### 3.1 Systèmes de coordonnées

Pour repérer les points  $M \in \mathcal{E}_3$ , on choisit arbitrairement un point  $O \in \mathcal{E}_3$ , que l'on appelle *origine*, et deux autres points  $A$  et  $B$  non alignés avec  $O$ . On sait alors associer de manière biunivoque à chaque point  $M$  de



### 3. CHAMPS TENSORIELS DANS $\mathcal{E}_3$

$\mathcal{E}_3$  le bipoint  $(O, M) \in \mathcal{E}_3 \times \mathcal{E}_3$  et un vecteur (dit « libre »)  $\mathbf{x}_M \in \mathbb{V}_3$  déterminé par ses « composantes » sur la « base de points »  $\{OA, OB, OC = OA \wedge OB\}$ . On peut alors définir la différence entre deux points comme étant la différence entre les vecteurs qui lui sont associés :

$$M' - M = \mathbf{x}_{M'} - \mathbf{x}_M$$

La différence entre deux points est un vecteur indépendant du choix de l'origine.

Choisir un système de coordonnées c'est choisir une méthode pour associer de manière biunivoque trois réels, appelés *coordonnées*, que l'on notera  $(x^1, x^2, x^3)$ , à chaque point  $M \in \mathcal{E}_3$ . Chaque méthode définit un système de coordonnées particulier. Si la méthode est correcte, on a les bijections suivantes (au moins dans une certaine portion de l'espace) :

$$(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \begin{array}{c} \text{système de} \\ \longleftrightarrow \\ \text{coordonnées} \end{array} \begin{array}{c} O, A, B, C \in \mathcal{E}_3 \text{ choisis} \\ M \in \mathcal{E}_3 \end{array} \longleftrightarrow \mathbf{x}_M \in \mathbb{V}_3 \quad (3.1)$$

Quand on a choisi un système de coordonnées, on dispose donc d'une application  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{E}_3$  telle que :

$$M = g(x^1, x^2, x^3)$$

On peut construire une infinité de systèmes de coordonnées.

EXEMPLES : Les systèmes de coordonnées classiques sont :

- *les coordonnées cartésiennes* : les coordonnées cartésiennes  $\{x^i\}$  d'un point  $M$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{x}_M$  dans la « base de points » initialement choisie :  $\{\mathbf{E}_i\} = \{\mathbf{E}_1 = \mathbf{OA}, \mathbf{E}_2 = \mathbf{OB}, \mathbf{E}_3 = \mathbf{OC}\}$ . La fonction  $g$  est :

$$g(x^1, x^2, x^3) = x^i \mathbf{E}_i$$

- *les coordonnées cylindriques* : on choisit  $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{OC}}{\|\mathbf{OC}\|}$  et  $\mathbf{u}_0$  unitaire perpendiculaire à  $\mathbf{k}$  dans le plan  $AOC$ . Le demi-plan  $\mathcal{P}_0 = (O, \mathbf{u}_0, \mathbf{k})$  est appelé demi-plan méridien de référence. Soit  $M$  le point à repérer. On appelle demi-plan méridien de  $M$  le demi-plan  $\mathcal{P}_\theta = (O, \mathbf{x}_M, \mathbf{k})$ . On appelle angle polaire  $0 \leq \theta < 2\pi$  l'angle orienté autour de  $\mathbf{k}$  de  $\mathcal{P}_0$  à  $\mathcal{P}_\theta$ . On note  $\mathbf{u}_\theta$  le vecteur unitaire de  $\mathcal{P}_\theta$  perpendiculaire à  $\mathbf{k}$ . Dans le demi-plan  $\mathcal{P}_\theta$ , le point  $M$  est repéré par ses coordonnées cartésiennes  $r > 0$  et  $z$  sur le repère orthonormé  $\{O, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{k}\}$ . La fonction  $g$  est :

$$g(r, \theta, z) = r\mathbf{u}_\theta + z\mathbf{k}$$

Pour pouvoir écrire des sommations, on pose  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$  et  $x^3 = z$ .

- *les coordonnées sphériques* : les choix arbitraires  $O$ ,  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{u}_0$  sont les mêmes qu'en coordonnées cylindriques, mais le point  $M$  est repéré dans le demi-plan méridien  $\mathcal{P}_\theta$  par ses coordonnées polaires :  $r = \|\mathbf{OM}\| > 0$  et l'angle  $\varphi = (\mathbf{k}, \mathbf{x}_M)$  ( $0 \leq \varphi \leq \pi$ ). On note  $\mathbf{w}$  le vecteur unitaire  $\mathbf{w} = \frac{\mathbf{OM}}{\|\mathbf{OM}\|}$ . La fonction  $g$  est :

$$g(r, \varphi, \theta) = r\mathbf{w}(\theta, \varphi)$$

Pour pouvoir écrire des sommations, on pose  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \varphi$  et  $x^3 = \theta$ .

- *les coordonnées géographiques* : elles sont semblables aux coordonnées sphériques, mais l'angle  $\varphi$  est défini différemment :  $\varphi = (\mathbf{u}_\theta, \mathbf{x}_M)$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ). L'angle  $\theta$  est la longitude, et l'angle  $\varphi$  la latitude. La fonction  $g$  est :

$$g(r, \varphi, \theta) = r\mathbf{w}(\theta, \varphi)$$

Pour pouvoir écrire des sommations, on pose  $x^1 = r$ ,  $x^2 = \theta$  et  $x^3 = \varphi$ .

On peut en inventer bien d'autres : par exemple, on peut choisir une surface  $\mathcal{S}$  particulière de  $\mathcal{E}_3$ , repérer la projection  $m$  de  $M$  sur la surface  $\mathcal{S}$  par deux coordonnées surfaciques, la troisième coordonnée étant la distance  $mM$  suivant la normale à la surface. Un tel système de coordonnées est commode à utiliser en théorie des coques (mécanique des milieux continus minces). Un système de coordonnées toriques est utile pour repérer les points dans un coude de conduite.

En mécanique des milieux continus, le choix d'un système de coordonnées est généralement suggéré par la forme du domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$  dans lequel on travaille : on choisit un système de coordonnées qui rend facile l'identification des points du domaine et de sa frontière.

Dans ce chapitre, on se propose donc de faire de l'analyse des champs *en utilisant un système de coordonnées quelconque* : un point  $M$  de l'espace est repéré par trois réels  $\{x^1, x^2, x^3\}$  sous la forme d'une application biunivoque  $g : \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathcal{E}_3$  non précisée :

$$M = g(x^1, x^2, x^3)$$

Aucune hypothèse n'est faite sur la signification géométrique de ces trois réels (composante, produit scalaire, distance, angle, etc). La seule condition est que l'application  $g$  soit bien une bijection entre  $\mathbb{R}^3$  et les points de  $\mathcal{E}_3$ , au moins dans une certaine région de l'espace<sup>1</sup>.

Les dérivées partielles de la fonction  $g$  sont des vecteurs, car ce sont des limites de la différence entre deux points :

$$\frac{\partial g}{\partial x^i} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x^k \text{ constant } k \neq i}} \frac{g(\dots, x^i + h, \dots) - g(x^1, x^2, x^3)}{h}$$

## 3.2 Base naturelle d'un système de coordonnées

Soit un système de coordonnées quelconque  $S_g$  défini par  $M = g(x^1, x^2, x^3)$ .

DÉFINITION : On appelle base naturelle en  $M$  du système de coordonnées  $S_g$ , le système de vecteurs  $\{\mathbf{e}_i\}$  défini par :

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial g}{\partial x^i} = g_{,i} \quad (3.2)$$

L'inversibilité de la fonction  $g$  garantit que ces trois vecteurs forment une base de  $\mathbb{V}_3$ .

L'ordre des vecteurs de la base naturelle est induit par l'ordre dans lequel on a classé les trois coordonnées  $\{x^i\}$ . On peut toujours choisir un ordre des coordonnées tel que la base naturelle soit directe.

La base naturelle d'un système de coordonnées n'est, en général, ni orthogonale ni normée. En outre, elle est généralement variable avec le point  $M$ .

EXEMPLES : Bases naturelles de quelques systèmes de coordonnées usuels :

- en coordonnées cartésiennes,  $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i$ , la base naturelle est donc la même en tout point  $M$ ;
- en coordonnées cylindriques,  $\mathbf{e}_r = \mathbf{u}_\theta$ ,  $\mathbf{e}_\theta = r\mathbf{v}_\theta$ , et  $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$  où  $\mathbf{v}_\theta = \frac{\partial \mathbf{u}_\theta}{\partial \theta} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{u}$ ; la base naturelle est orthogonale non normée et elle change avec le point  $M$ ;
- en coordonnées sphériques,  $\mathbf{e}_r = \mathbf{w}$ ;  $\mathbf{e}_\varphi = r\mathbf{t}$ ;  $\mathbf{e}_\theta = r \sin \varphi \mathbf{v}$  où  $\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \varphi}$ ; la base naturelle est orthogonale non normée et elle change avec le point  $M$ ;
- en coordonnées géographiques,  $\mathbf{e}_r = \mathbf{w}$ ;  $\mathbf{e}_\theta = r \cos \varphi \mathbf{v}$ ;  $\mathbf{e}_\varphi = r\mathbf{s}$  où  $\mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \varphi}$ ; la base naturelle est orthogonale non normée et elle change avec le point  $M$ .

### 3.2.1 Base physique

Comme on le verra dans la suite, le principal avantage de la base naturelle est que les expressions des composantes des opérateurs différentiels dans la base naturelle sont les mêmes quel que soit le système de coordonnées utilisé. En revanche, puisque les coordonnées ne sont généralement pas toutes de même nature géométrique (longueurs, produits scalaires, angles, etc), la base naturelle n'est généralement pas adimensionnelle.

EXEMPLE : En coordonnées cylindriques, les normes des vecteurs de la base naturelle sont :  $\|\mathbf{e}_r\| = 1$  (adimensionnel);  $\|\mathbf{e}_\theta\| = r$  (longueur);  $\|\mathbf{e}_z\| = 1$  (adimensionnel).

Si  $\mathbf{v}$  est un vecteur vitesse dont on donne les composantes contravariantes sur la base naturelle :  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = v^r \mathbf{e}_r + v^\theta \mathbf{e}_\theta + v^z \mathbf{e}_z$ , l'analyse dimensionnelle de cette égalité indique que les composantes  $v^r$  et  $v^z$  ont la dimension d'une vitesse, alors que la composante  $v^\theta$  a la dimension d'une fréquence.

Pour éviter cet inconvénient, on définit la base physique :

DÉFINITION : On appelle base physique (ou base locale), notée  $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$ , la base naturelle normée :

$$\tilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|}$$

1. Certains systèmes de coordonnées ne sont pas des bijections en tout point de  $\mathcal{E}_3$ . C'est notamment le cas des coordonnées cylindriques pour les points  $r = 0$  et des coordonnées sphériques ou géographiques en  $r = 0$  et aux pôles.

Par construction, la base  $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$  est adimensionnelle et normée. En général, elle n'est pas orthonormée sauf si la base naturelle est orthogonale.

Même si l'on effectue des calculs avec des composantes de tenseurs sur la base naturelle<sup>2</sup>, il est préférable de présenter les résultats par des composantes de ces tenseurs sur la base physique, afin que la dimension des composantes soit la même que celle de la grandeur physique qu'elles représentent.

Le changement de base est toujours très simple car la matrice de passage de la base naturelle  $\{\mathbf{e}_i\}$  à la base physique  $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$  est diagonale :

$$[A^\bullet] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\mathbf{e}_1\|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|\mathbf{e}_2\|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\|\mathbf{e}_3\|} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Variations de la base naturelle

Une fois fait le choix d'un système de coordonnées  $\mathcal{S}_g$ , il définit la base naturelle  $\{\mathbf{e}_i = g_{,i}\}$  en chaque point  $M$ . Cette base varie en général avec  $M$ , c'est-à-dire avec les coordonnées  $(x^1, x^2, x^3)$  de  $M$ . On en étudie ici les variations.

Les dérivées par rapport aux coordonnées des vecteurs de la base naturelle sont des vecteurs. On désigne leurs 27 composantes contravariantes sur la base naturelle comme suit :

$$\mathbf{e}_{i,j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_{ij}^k = \mathbf{e}_{i,j} \cdot \mathbf{e}^k \quad (\text{voir (1.6) page 5}) \quad (3.4)$$

Le nombre  $\Gamma_{ij}^k$  est la  $k^{\text{ème}}$  composante contravariante du vecteur  $\mathbf{e}_{i,j}$  sur la base naturelle  $\{\mathbf{e}_k\}$ . Ces 27 nombres sont appelés *coefficients de Christoffel*.

Pour les calculer, la méthode la plus simple est souvent de calculer directement la dérivée des vecteurs de la base naturelle à partir de leur définition<sup>3</sup> et d'en donner les composantes contravariantes sur la base naturelle. Néanmoins, on va montrer que les coefficients de Christoffel peuvent se calculer de façon systématique en fonction des dérivées des composantes sur la base naturelle du tenseur métrique<sup>4</sup>.

La définition du système de coordonnées  $M = g(x^1, x^2, x^3)$  et ses dérivées étant des fonctions suffisamment régulières des coordonnées, on peut écrire :

$$\mathbf{e}_{i,j} = (g_{,i})_{,j} = g_{,ij} = g_{,ji} = (g_{,j})_{,i} = \mathbf{e}_{j,i} \quad \Rightarrow \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

Les 27 coefficients de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  sont donc symétriques par rapport aux indices inférieurs. Il suffit donc de n'en calculer que 18. Compte tenu de cette symétrie, la dérivée d'un vecteur de base peut s'écrire :

$$\mathbf{e}_{i,j} = \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{i,j} + \mathbf{e}_{j,i})$$

---

2. Les calculs y sont généralement plus simples, notamment les intégrations d'équations différentielles.

3. Cette définition dépend du système de coordonnées choisi.

4. Cette méthode de calcul systématique est plus facilement programmable dans un logiciel de calcul formel.

Calculons maintenant les  $\Gamma_{ij}^k$  :

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} (\mathbf{e}_{j,i} + \mathbf{e}_{i,j}) \cdot \mathbf{e}^k \\ &= \frac{1}{2} g^{k\mu} (\mathbf{e}_{j,i} + \mathbf{e}_{i,j}) \cdot \mathbf{e}_\mu\end{aligned}\quad (3.5)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} g^{k\mu} ((\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_\mu)_{,i} + (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\mu)_{,j} - \mathbf{e}_{\mu,i} \cdot \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{\mu,j} \cdot \mathbf{e}_i) \\ &= \frac{1}{2} g^{k\mu} ((\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_\mu)_{,i} + (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\mu)_{,j} - \mathbf{e}_{i,\mu} \cdot \mathbf{e}_j - \mathbf{e}_{j,\mu} \cdot \mathbf{e}_i) \\ &= \frac{1}{2} g^{k\mu} ((\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_\mu)_{,i} + (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_\mu)_{,j} - (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)_{,\mu}) \\ \Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2} g^{k\mu} (g_{j\mu,i} + g_{i\mu,j} - g_{ij,\mu})\end{aligned}\quad (3.6)$$

où les  $g_{\bullet\bullet}$  sont les composantes covariantes du tenseur métrique sur la base naturelle ( $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ , voir (1.8) page 13).

On calcule maintenant les dérivées des vecteurs de la base duale  $\{\mathbf{e}^j\}$ . On pose comme précédemment 27 nouveaux coefficients  $\Gamma_{ik}^j$  à déterminer :

$$\mathbf{e}^j_{,i} = \Gamma_{ik}^j \mathbf{e}^k$$

En remarquant que :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j)_{,k} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j_{,k} + \mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_{i,k} = 0$$

on en déduit que :

$$\Gamma_{ik}^j = \mathbf{e}^j_{,k} \cdot \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_{i,k} = -\Gamma_{ik}^j$$

Les dérivées des vecteurs de la base duale s'expriment donc aussi avec les coefficients de Christoffel  $\Gamma_{ik}^j$  :

$$\mathbf{e}^j_{,i} = -\Gamma_{ik}^j \mathbf{e}^k \quad (3.7)$$

Chaque système de coordonnées a donc sa propre collection de coefficients de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$ , que l'on peut calculer une fois pour toutes.

REMARQUE : Il est important de noter que les coefficients de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  ne sont pas les composantes d'un tenseur d'ordre 3. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que les formules de changement de base des  $\Gamma_{ij}^k$  ne sont pas celles d'un tenseur. On ne peut donc pas utiliser la règle de « l'ascenseur d'indices » (voir page 14) pour faire monter ou descendre les indices de ces coefficients.

### 3.3 Champ tensoriel différentiable

Un champ tensoriel  $\mathfrak{A}$  est une application qui associe à tout point  $M \in \mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$  un tenseur d'ordre  $p$  :

$$\mathfrak{A} : M \in \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{A}(M) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$$

DÉFINITION : On dit que le champ tensoriel  $\mathfrak{A}(M)$  est différentiable en  $M$  s'il existe un opérateur linéaire  $\mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}^{\otimes p}$ , noté  $\mathbf{grad} \mathfrak{A}$ , tel que :

$$\mathfrak{A}(M') - \mathfrak{A}(M) = \mathbf{grad} \mathfrak{A} \cdot \mathbf{MM}' + \|\mathbf{MM}'\| \mathbf{o}(\mathbf{MM}') \quad \forall \mathbf{MM}' \quad (3.8)$$

où  $\mathbf{o}(\mathbf{MM}')$  est une fonction quelconque à valeur dans  $\mathbb{V}^{\otimes p}$  et qui tend vers le tenseur nul d'ordre  $p$  quand  $M' \rightarrow M$ .

La différence  $\mathfrak{A}(M') - \mathfrak{A}(M)$  est un tenseur d'ordre  $p$  et le vecteur  $\mathbf{MM}'$  est un tenseur d'ordre 1. Les règles du produit contracté simple impliquent que l'opérateur linéaire  $\mathbf{grad} \mathfrak{A}$  est un tenseur d'ordre  $p+1$ .

Lorsque le champ  $\mathcal{A}(M)$  est différentiable en  $M$ , l'opérateur linéaire  $\mathbf{grad} \mathcal{A}$  existe en  $M$  et on définit la différentielle de  $\mathcal{A}$  en  $M$  :

$$d\mathcal{A} = \mathbf{grad} \mathcal{A} \cdot d\mathbf{M} \quad \text{où } d\mathbf{M} \text{ est un vecteur quelconque} \quad (3.9)$$

REMARQUE 1 : La différentiabilité en  $M$  du champ  $\mathcal{A}(M)$  signifie que localement autour de  $M$ , la variation exacte  $\mathcal{A}(M') - \mathcal{A}(M)$  peut être approximée par le produit contracté  $\mathbf{grad} \mathcal{A} \cdot \mathbf{MM}'$ , avec une erreur d'autant plus petite que  $M'$  est proche de  $M$  et ceci quelle que soit la direction du vecteur  $d\mathbf{M} = \mathbf{MM}'$ . La différentielle  $d\mathcal{A}$  n'est pas la variation de  $\mathcal{A}$  quand on passe du point  $M$  au point  $M'$ , le vecteur  $d\mathbf{M} = \mathbf{MM}'$  étant un vecteur arbitraire de direction et de norme quelconques.

La variation exacte de  $\mathcal{A}$  est :  $\mathcal{A}(M') - \mathcal{A}(M) = d\mathcal{A} + \|d\mathbf{M}\| \mathcal{O}(d\mathbf{M})$ .

REMARQUE 2 : Il découle de la définition (3.8) que  $\mathbf{grad} \mathcal{A}$  est un opérateur linéaire  $\mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes p}$ . C'est l'opérateur linéaire tangent d'une application  $\mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes p}$ . Ce n'est que si l'on a choisi une origine dans  $\mathcal{E}_3$  que l'on peut voir un champ  $\mathcal{A}(\mathbf{M})$  comme une application  $\mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes p}$ . Il faut avoir choisi une origine pour écrire :  $\mathbf{grad} \mathcal{A} = \mathbf{V}\mathcal{A}$  (voir section 2.4 page 40). Tant que l'on n'a pas choisi d'origine, on réserve le nom de *gradient* à l'application linéaire tangente d'une application  $\mathcal{E}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes p}$ .

L'opérateur linéaire  $\mathbf{grad} \mathcal{A}$  permet de définir la *dérivée en  $M$*  de la fonction  $\mathcal{A}(M)$  quand le point  $M$  se déplace dans une direction unitaire donnée  $\mathbf{u}_0$ . Soit  $M$  un point de  $\mathcal{E}_3$  et soit un autre point  $M'$  dans la direction  $\mathbf{u}_0$  défini par :

$$M' = M + \|d\mathbf{M}\| \mathbf{u}_0$$

En utilisant la définition (3.8) du gradient, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(M + \|d\mathbf{M}\| \mathbf{u}_0) - \mathcal{A}(M) &= \mathbf{grad} \mathcal{A} \cdot (\|d\mathbf{M}\| \mathbf{u}_0) + \|d\mathbf{M}\| \mathcal{O}(d\mathbf{M}) \\ \frac{\mathcal{A}(M + \|d\mathbf{M}\| \mathbf{u}_0) - \mathcal{A}(M)}{\|d\mathbf{M}\|} &= \mathbf{grad} \mathcal{A} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathcal{O}(d\mathbf{M}) \\ \lim_{\substack{\|d\mathbf{M}\| \rightarrow 0 \\ \mathbf{u}_0 \text{ constant}}} \frac{\mathcal{A}(M + \|d\mathbf{M}\| \mathbf{u}_0) - \mathcal{A}(M)}{\|d\mathbf{M}\|} &= \mathbf{grad} \mathcal{A} \cdot \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

Le terme de gauche est, par définition, la dérivée en  $M$  de la fonction  $\mathcal{A}(M)$  quand  $M$  varie dans la direction unitaire donnée  $\mathbf{u}_0$ . La valeur de cette dérivée dépend de la direction unitaire  $\mathbf{u}_0$ .

DÉFINITION : La dérivée de  $\mathcal{A}(M)$  dans la direction  $\mathbf{u}_0$  est :

$$\mathcal{A}'_{\mathbf{u}_0} = \lim_{\substack{\|d\mathbf{M}\| \rightarrow 0 \\ \mathbf{u}_0 \text{ constant}}} \frac{\mathcal{A}(M + \|d\mathbf{M}\| \mathbf{u}_0) - \mathcal{A}(M)}{\|d\mathbf{M}\|} = \mathbf{grad} \mathcal{A} \cdot \mathbf{u}_0 \quad (3.10)$$

Si le champ  $\mathcal{A}$  est partout différentiable dans le domaine  $\mathcal{D}$ , on définit ainsi sur  $\mathcal{D}$  un *champ de tenseurs*  $\mathbf{grad} \mathcal{A}(M)$ , d'ordre  $p+1$ .

## 3.4 Éléments différentiels dans les systèmes de coordonnées

En mécanique des milieux continus, on aura à calculer des intégrales sur des volumes, des surfaces, des courbes. On précise ici les éléments différentiels utiles pour ces intégrales.

### 3.4.1 Composantes contravariantes du vecteur $d\mathbf{M}$ dans la base naturelle

Soit  $\mathcal{S}_g$  un système de coordonnées. On fait varier le point  $M$  en donnant des variations arbitraires  $dx^1, dx^2, dx^3$  aux trois coordonnées  $(x^1, x^2, x^3)$ . Le vecteur  $d\mathbf{M}$  s'écrit donc :

$$d\mathbf{M} = d\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x^i} dx^i = dx^i \mathbf{e}_i$$

Les composantes contravariantes du vecteur  $d\mathbf{M}$  sur la base naturelle sont simplement les  $dx^i$ , quel que soit le système de coordonnées utilisé.

REMARQUE : C'est là le grand avantage de l'utilisation de la base naturelle. Il en est différemment sur la base physique. Par exemple, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= dx^i \mathbf{e}_i = dr \mathbf{e}_r + d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z && \text{(sur la base naturelle)} \\ &= dr \tilde{\mathbf{e}}_r + (r d\theta) \tilde{\mathbf{e}}_\theta + dz \tilde{\mathbf{e}}_z && \text{(sur la base physique)} \end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques, les composantes du vecteur  $d\mathbf{M}$  sur la base physique sont :  $\{dr, r d\theta, dz\}$ .

Pour des variations arbitraires  $\{dx^i\}$  des coordonnées, le carré de l'élément de longueur est :

$$dl^2 = d\mathbf{M}^2 = d\mathbf{M} \cdot d\mathbf{M} = \mathbf{G}(d\mathbf{M}, d\mathbf{M}) = g_{ij} dx^i dx^j$$

La métrique de  $\mathcal{E}_3$  se définit donc avec le tenseur métrique  $\mathbf{G}$ , ce qui justifie sa dénomination.

### 3.4.2 Élément de volume pour les intégrales de volume :

Soit  $M$  un point courant du volume  $\mathcal{D}$ . Considérons les trois variations individuelles de  $\mathbf{M}$  en ne faisant varier qu'une de ses coordonnées :

$$d\mathbf{M}_1 = dx^1 \mathbf{e}_1 \qquad d\mathbf{M}_2 = dx^2 \mathbf{e}_2 \qquad d\mathbf{M}_3 = dx^3 \mathbf{e}_3$$

L'élément de volume est défini par leur produit mixte (voir 1.5 page 14) :

$$\begin{aligned} dv &= \mathbf{H}(d\mathbf{M}_1, d\mathbf{M}_2, d\mathbf{M}_3) = \mathbf{H}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) dx^1 dx^2 dx^3 \\ &= h_{123} dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad \text{(voir (1.13) page 15)} \end{aligned} \tag{3.11}$$

où  $g$  est le déterminant de la matrice des composantes covariantes de  $\mathbf{G}$  dans la base naturelle (voir (1.12) page 14).

### 3.4.3 Élément de surface pour les intégrales de surface :

Une surface  $\mathcal{S}$  est une variété de dimension 2 plongée dans  $\mathcal{E}_3$ . Soit  $N$  un point courant de  $\mathcal{S}$ . Une surface est définie par l'application  $f_S$  :

$$f_S : (u^1, u^2) \in \mathcal{D}' \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow N = f_S(u^1, u^2) \in \mathcal{E}_3$$

On dit que la surface  $\mathcal{S}$  est paramétrée par les deux réels  $u^1$  et  $u^2$ . Quand on a choisi une origine dans  $\mathcal{E}_3$  et un système de coordonnées, les équations paramétriques d'une surface  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{E}_3$  sont donc les trois fonctions  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  suivantes :

$$x^1 = f_S^1(u^1, u^2) \qquad x^2 = f_S^2(u^1, u^2) \qquad x^3 = f_S^3(u^1, u^2)$$

REMARQUE : La définition paramétrique d'une surface, donnée ci-dessus, est la plus générale. Pour certaines surfaces, il est possible de paramétrer le point courant  $N$  de la surface  $\mathcal{S}$  avec deux de ses coordonnées spatiales. Par exemple, pour certaines surfaces, il est possible de prendre comme paramètres  $u^1 = x^1$  et  $u^2 = x^2$ . La définition de la surface se réduit alors à l'équation  $x^3 = f^3(x^1, x^2)$ . Néanmoins cette réduction n'est pas toujours possible<sup>5</sup>.

Les deux vecteurs  $\mathbf{a}_1 = \frac{\partial f_S}{\partial u^1}$  et  $\mathbf{a}_2 = \frac{\partial f_S}{\partial u^2}$  sont tangents en  $N$  à  $\mathcal{S}$  et constituent une base naturelle du plan tangent en  $N$  à  $\mathcal{S}$ . Considérons deux variations arbitraires  $du^1$  et  $du^2$  des paramètres  $u^1$  et  $u^2$  :

$$d\mathbf{N}_1 = \mathbf{a}_1 du^1 \qquad d\mathbf{N}_2 = \mathbf{a}_2 du^2$$

<sup>5</sup> par exemple si la surface  $\mathcal{S}$  est la frontière d'un domaine fermé

l'élément de surface de  $S$  est défini par :

$$ds = \|\mathbf{dN}_1 \wedge \mathbf{dN}_2\| = \|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\| du^1 du^2 = \left\| \frac{\partial f_S}{\partial u^1} \wedge \frac{\partial f_S}{\partial u^2} \right\| du^1 du^2$$

REMARQUE : Les vecteurs  $\mathbf{a}_1$  et  $\mathbf{a}_2$  étant tangents en  $N$  à la surface  $S$ , le vecteur  $\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2$  est donc normal à la surface. On définit une normale unitaire  $\mathbf{n}$  en un point  $N$  de  $S$  par  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2}{\|\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2\|}$ . Le sens de cette normale dépend de l'ordre des paramètres  $u^1$  et  $u^2$ . Il n'y a aucune raison de privilégier l'un des sens sauf si la surface est fermée : on peut alors définir un intérieur et un extérieur et choisir l'ordre des paramètres ( $u^1, u^2$ ) pour que la normale à la surface soit sortante.

### 3.4.4 Élément de longueur pour les intégrales curvilignes :

Une courbe  $C$  est une variété de dimension 1 plongée dans  $\mathcal{E}_3$ . Soit  $N$  le point courant de  $C$ . La courbe est définie par l'application :

$$f_C : u \in \mathcal{D}'' \subset \mathbb{R} \rightarrow N = f_C(u) \in \mathcal{E}_3$$

On dit que la courbe  $C$  est paramétrée par le réel  $u$ . Les équations paramétriques d'une courbe  $C$  de  $\mathcal{E}_3$  sont donc :

$$x^1 = f_C^1(u) \qquad x^2 = f_C^2(u) \qquad x^3 = f_C^3(u)$$

Le vecteur  $\mathbf{a} = \frac{\partial f_C}{\partial u}$  est tangent à  $C$  et constitue une base naturelle de la droite tangente en  $M$  à  $C$ . Considérons la variation élémentaire  $du$  du paramètre  $u$  :

$$\mathbf{dN} = \mathbf{a} du$$

L'élément de longueur de  $C$  est défini par :

$$dl = \|\mathbf{dN}\| = \|\mathbf{a}\| du = \left\| \frac{\partial f_C}{\partial u} \right\| du$$

REMARQUE : Si le paramètre  $u$  est l'abscisse curviligne sur la courbe  $C$ , le vecteur tangent  $\mathbf{a}$  est unitaire, c'est le premier vecteur du trièdre de Fresnet.

## 3.5 Gradient d'un champ scalaire

Les champs scalaires sont des champs de tenseurs d'ordre 0. Soit un champ scalaire  $f(M)$  différentiable. Par définition, sa différentielle est :

$$df = \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{dM} \qquad \text{(voir (3.9) page 48)} \qquad (3.12)$$

Le gradient  $\mathbf{grad} f$  d'un champ scalaire  $f$  est donc un champ de tenseurs d'ordre 1 (un champ de vecteurs).

Soit  $S_g$  un système de coordonnées défini par sa fonction  $g$ . On définit la fonction  $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$f(M) = f(g(x^1, x^2, x^3)) = \bar{f}(x^1, x^2, x^3)$$

La fonction  $\bar{f} = f \circ g$  est celle que l'on donne pour décrire le champ  $f(M)$  quand on a choisi le système de coordonnées  $S_g$ . Pour des variations arbitraires  $\{dx^i\}$  des trois coordonnées, on a évidemment :

$$\begin{aligned} df &= d\bar{f} & \forall \mathbf{dM} &= dx^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{dM} &= \bar{f}_{,i} dx^i & \forall \mathbf{dM} &= dx^i \mathbf{e}_i \\ (\mathbf{grad} f)_i dx^i &= \bar{f}_{,i} dx^i & \forall dx^i & \end{aligned}$$

On en déduit les composantes covariantes de  $\mathbf{grad} f$  dans la base naturelle de  $S_g$  :

$$(\mathbf{grad} f)_i = \bar{f}_{,i} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{grad} f = \bar{f}_{,i} \mathbf{e}^i \quad (3.13)$$

L'expression des composantes covariantes de  $\mathbf{grad} f$  dans la base naturelle de  $S_g$  est la même quel que soit le système de coordonnées utilisé.

REMARQUE : Dans les formulaires classiques, les composantes du vecteur  $\mathbf{grad} f$  sont données dans la base physique et non dans la base naturelle. Le changement de base fait intervenir les normes des vecteurs de la base naturelle (voir 3.3 page 46), qui sont spécifiques à chaque système de coordonnées. L'expression des composantes du vecteur  $\mathbf{grad} f$  dans la base physique est donc spécifique à chaque système de coordonnées. C'est ce qui explique l'existence de formulaires spécifiques à chaque système de coordonnées. Si on donne les composantes du gradient dans la base naturelle (non normée), il n'y a pas besoin de formulaire (voir (3.13) page 51)!

AUTRES NOTATIONS : On trouve dans la littérature scientifique la notation  $\nabla f$  pour  $\mathbf{grad} f$ . Elle ne se justifie que quand on a choisi une origine (voir remarque 2 page 48). L'opérateur  $\nabla f$  est aussi souvent noté  $\frac{df}{dM}$ .

On vérifie aisément les identités suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} (f_1 + f_2) &= \mathbf{grad} f_1 + \mathbf{grad} f_2 \\ \mathbf{grad} (\lambda f) &= \lambda \mathbf{grad} f \quad (\lambda \text{ constant dans l'espace}) \\ \mathbf{grad} (f_1 f_2) &= f_2 \mathbf{grad} f_1 + f_1 \mathbf{grad} f_2 \end{aligned}$$

## 3.6 Champs vectoriels

### 3.6.1 Gradient d'un champ vectoriel

Les champs vectoriels sont des champs de tenseurs d'ordre 1. Soit  $\mathbf{v}(M)$  un champ vectoriel différentiable. Par définition, sa différentielle est :

$$d\mathbf{v} = \mathbf{grad} \mathbf{v} \cdot dM \quad \forall dM \quad (\text{voir (3.9) page 48}) \quad (3.14)$$

Les règles de l'algèbre tensorielle impliquent que  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  est un tenseur d'ordre 2. On se propose de calculer les composantes de ce tenseur dans la base naturelle d'un système de coordonnées.

Soit  $S_g$  un système de coordonnées. Il existe une fonction  $\bar{\mathbf{v}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}$  telle que :

$$\mathbf{v}(M) = \mathbf{v}(g(x^1, x^2, x^3)) = \bar{\mathbf{v}}(x^1, x^2, x^3) \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{v} = d\bar{\mathbf{v}} \quad \forall dM \quad (3.15)$$

Pour définir le champ de vecteurs  $\mathbf{v}(M)$ , on choisit, dans un premier temps, de donner les trois fonctions  $\bar{v}^i(x^1, x^2, x^3)$  de ses composantes contravariantes sur la base naturelle de  $S_g$  :

$$\mathbf{v}(M) = \bar{v}^i(x^1, x^2, x^3) \mathbf{e}_i$$

L'égalité (3.15) implique :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} \mathbf{v} \cdot dM &= \bar{v}_{,i} dx^i & \forall dM &= dx^i \mathbf{e}_i \\ &= (\bar{v}^j \mathbf{e}_j)_{,i} dx^i \\ &= (\bar{v}^j_{,i} \mathbf{e}_j + \bar{v}^j \mathbf{e}_{j,i}) dx^i \\ &= (\bar{v}^j_{,i} \mathbf{e}_j + \bar{v}^j \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k) dx^i & (\text{voir (3.4) page 46}) \\ &= (\bar{v}^j_{,i} \mathbf{e}_j + \bar{v}^k \Gamma_{ik}^j \mathbf{e}_j) dx^i & (\text{changement d'indices muets}) \\ (\mathbf{grad} \mathbf{v})^j_i dx^i \mathbf{e}_j &= (\bar{v}^j_{,i} + \bar{v}^k \Gamma_{ik}^j) dx^i \mathbf{e}_j & \forall dM &= dx^i \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

On en déduit par identification les composantes  $(\mathbf{grad} \mathbf{v})^j_i$  :

$$(\mathbf{grad} \mathbf{v})^j_i = \bar{v}^j_{,i} + \bar{v}^k \Gamma_{ik}^j \quad (3.16)$$



La formule est la même pour tous les systèmes de coordonnées. Quand on a choisi un système de coordonnées, il suffit de remplacer les  $\Gamma_{ik}^j$  par leur valeur.

REMARQUE : Attention à l'ordre des indices: le dernier indice de  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  est l'indice de dérivation. On voit ici l'avantage de la notation des dérivées partielles avec une virgule. Avec la notation  $\partial$  on aurait :  $(\mathbf{grad} \mathbf{v})^j_i = \partial_i \bar{v}^j + \bar{v}^k \Gamma_{ik}^j$  où dans le terme  $\partial_i \bar{v}^j$  l'ordre des indices réels est inversé.

En revanche, l'ordre des indices des coefficients de Christoffel est sans importance, ce ne sont pas les composantes d'un tenseur et on sait qu'ils sont symétriques pour les deux indices inférieurs.

Si le champ de vecteurs  $\mathbf{v}(M)$  est défini par ses composantes covariantes sur la base naturelle de  $S_g$ , c'est-à-dire :  $\mathbf{v}(M) = \bar{v}_i(x^1, x^2, x^3) \mathbf{e}^i$ , on trouve par un calcul analogue les composantes  $(\mathbf{grad} \mathbf{v})_{ij}$  :

$$(\mathbf{grad} \mathbf{v})_{ij} = \bar{v}_{i,j} - \bar{v}_k \Gamma_{ij}^k \quad (\text{le signe } - \text{ apparaît car on dérive la base duale})$$

Finalement :

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \underbrace{(\bar{v}^i_{,j} + \bar{v}^k \Gamma_{jk}^i)}_{(\mathbf{grad} \mathbf{v})^i_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j = \underbrace{(\bar{v}_{i,j} - \bar{v}_k \Gamma_{ij}^k)}_{(\mathbf{grad} \mathbf{v})_{ij}} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$$

Le tenseur du second ordre  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  n'est pas symétrique en général.

AUTRES NOTATIONS : On trouve dans la littérature d'autres notations :

- $\mathbf{Vv}$  ou  $\frac{d\mathbf{v}}{dM}$  pour  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  ; ces notations ne se justifient que quand on a choisi une origine (voir remarque 2 page 48);
- certains auteurs écrivent les composantes de  $\mathbf{Vv}$  sous la forme  $\nabla_i v^j = \partial_i \bar{v}^j + \bar{v}^k \Gamma_{ik}^j$ ; dans ce cas, l'indice de dérivation est à gauche et non à droite. Le symbole  $\mathbf{Vv}$  désigne alors le transposé de  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  et on doit écrire :  $d\mathbf{v} = dM \cdot \mathbf{Vv}$  ce qui est une autre définition (inhabituelle) de la différentielle d'un champ vectoriel;
- $\bar{v}^j_{;i} = (\mathbf{grad} \mathbf{v})^j_i = \bar{v}^j_{,i} + \bar{v}^k \Gamma_{ik}^j$  le terme  $\bar{v}^j_{;i}$  est appelé « dérivée covariante de  $\bar{v}^j$  par rapport à  $x^i$  »;
- $\bar{v}_{j;i} = (\mathbf{grad} \mathbf{v})_{ji} = \bar{v}_{j,i} - \bar{v}_k \Gamma_{ji}^k$  le terme  $\bar{v}_{j;i}$  est appelé « dérivée covariante de  $\bar{v}_j$  par rapport à  $x^i$  »;
- puisque  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  est un tenseur, on peut aussi donner ses composantes avec son second indice contravariant<sup>6</sup> en utilisant la règle de « l'ascenseur d'indices » (voir page 14) :

$$\begin{aligned} (\mathbf{grad} \mathbf{v})^{ij} &= g^{i\mu} (\mathbf{grad} \mathbf{v})_{i\mu} = g^{i\mu} \bar{v}_{i,\mu} - \bar{v}_k \Gamma_{i\mu}^k g^{i\mu} \\ (\mathbf{grad} \mathbf{v})^{ij} &= g^{i\mu} (\mathbf{grad} \mathbf{v})^i_{\mu} = g^{i\mu} \bar{v}^i_{,\mu} + \bar{v}^k \Gamma_{k\mu}^i g^{i\mu} \end{aligned}$$

ces composantes sont parfois appelées « dérivées contravariantes », bien qu'elles ne reflètent pas des dérivées par rapport aux coordonnées  $x^i$  de  $M$ ;

- la matrice des composantes de  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  dans la base naturelle d'un système de coordonnées cartésiennes orthonormés<sup>7</sup> est aussi appelée *matrice jacobienne* du champ vectoriel  $\mathbf{v}$ .

On vérifie aisément les identités suivantes :

$$\mathbf{grad} \mathbf{OM} = \mathbf{G} \quad (\text{avec la notation en « fraction », on écrirait : } \frac{dM}{dM} = \mathbf{G}) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{grad} (f \mathbf{v}) = f \mathbf{grad} \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \mathbf{grad} f \quad (3.18)$$

$$\mathbf{grad} \mathbf{grad} f = \mathbf{grad}^T \mathbf{grad} f \quad (\text{c'est-à-dire : } \mathbf{grad} \mathbf{grad} f \text{ est symétrique}) \quad (3.19)$$

REMARQUE : Le champ de vecteurs  $\mathbf{v}(M)$  peut être défini par ses composantes covariantes  $\bar{v}_i(x^1, x^2, x^3)$  ou contravariantes  $\bar{v}^i(x^1, x^2, x^3)$  dans la base naturelle ou par ses composantes covariantes  $\tilde{v}_i(x^1, x^2, x^3)$  ou contravariantes  $\tilde{v}^i(x^1, x^2, x^3)$  dans la base physique. De même, le vecteur  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  peut être exprimé par ses composantes de toutes variances dans la base naturelle ou dans la base physique. Il convient donc de bien préciser la signification des symboles que l'on utilise.

Dans les formulaires classiques, les composantes de  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  sont généralement celles dans la base physique. Pour retrouver les formules classiques données dans les formulaires, il faut donc faire les changements de base (toujours très simples) entre la base naturelle  $\{\mathbf{e}_i\}$  et la base physique  $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$ .

Les formules des composantes de  $\mathbf{grad} \mathbf{v}$  dans la base naturelle sont les mêmes pour tout système de coordonnées. En revanche, le passage à la base physique fait intervenir la norme des vecteurs de la base naturelle, qui est différente pour chaque système de coordonnées. C'est pourquoi les formulaires classiques sont spécifiques à un système de coordonnées particulier.

6. Noter que les termes  $\bar{v}^j_{,i}$  et  $\Gamma_{ij}^k$  ne sont pas les composantes d'un tenseur. On ne peut donc pas appliquer la règle de « l'ascenseur d'indice » sur ces nombres (voir page 14). Les écritures «  $v^i_{,j}$  » et «  $\Gamma_i^{jk}$  » n'ont aucun sens.

7. la variance des composantes est donc indifférente.

### 3.6.2 Divergence d'un champ vectoriel

DÉFINITION : La divergence d'un champ vectoriel est le champ scalaire défini par :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{grad} \mathbf{v} : \mathbf{G} = \operatorname{Tr} \operatorname{grad} \mathbf{v} \quad (3.20)$$

L'expression de ce scalaire avec les composantes contravariantes de  $\mathbf{v}$  sur la base naturelle d'un système de coordonnées est donc :

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \bar{v}^i_{,i} + \bar{v}^k \Gamma^i_{ki}$$

REMARQUES : Si le champ de vecteurs n'est pas défini par ses composantes contravariantes, on peut les calculer avec la règle de « l'ascenseur d'indice » page 14 :  $v^i = g^{i\mu} v_\mu$ .

Dans un système de coordonnées cartésiennes (orthonormées ou non), tous les coefficients de Christoffel sont nuls et on retrouve la formule classique :  $\operatorname{div} \mathbf{v} = \bar{v}^i_{,i}$ .

### 3.6.3 Rotationnel d'un champ vectoriel

DÉFINITION : Le rotationnel d'un champ vectoriel est le champ vectoriel défini par :

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = -\operatorname{grad} \mathbf{v} : \mathbf{H} \quad (3.21)$$

Les composantes contravariantes de ce vecteur sur la base naturelle d'un système de coordonnées sont :

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})^k = (\operatorname{grad} \mathbf{v})_{ij} h^{jik} = \bar{v}_{i,j} h^{jik} - \underbrace{\bar{v}_m \Gamma^m_{ij} h^{jik}}_0 = -\bar{v}_{i,j} h^{ijk}$$

REMARQUES : On constate que dans l'expression des composantes sur la base naturelle du rotationnel d'un vecteur, les coefficients de Christoffel disparaissent. Cette particularité n'est plus vraie pour le rotationnel de tenseurs d'ordre supérieur.

En développant la sommation, on retrouve les formules classiques (valables dans tout système de coordonnées, puis que les coefficients de Christoffel n'interviennent pas) :

$$(\operatorname{rot} \mathbf{v})^1 = h^{123} (v_{3,2} - v_{2,3}) \quad (\operatorname{rot} \mathbf{v})^2 = h^{123} (v_{1,3} - v_{3,1}) \quad (\operatorname{rot} \mathbf{v})^3 = h^{123} (v_{2,1} - v_{1,2})$$

### 3.6.4 Laplacien d'un champ scalaire

DÉFINITION : Soit  $f(M)$  un champ scalaire. Le laplacien d'un champ scalaire est le champ scalaire défini par :

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f \quad (3.22)$$

Le laplacien d'un champ scalaire est donc :

$$\Delta f = \operatorname{grad} (\operatorname{grad} f) : \mathbf{G} = g^{ij} f_{,ij} + g^{mi} f_{,i} \Gamma^k_{mk}$$

### 3.6.5 Propriétés des champs vectoriels

On vérifie aisément les identités suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} &= 0 \\ \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\operatorname{div} (f \mathbf{v}) = f \operatorname{div} \mathbf{v} + \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{v} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (f \mathbf{v}) &= f \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} f \wedge \mathbf{v} \\ \operatorname{div} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) &= \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad}^T \mathbf{v} \quad (3.26)$$

On rappelle ici, sans démonstration, des résultats classiques d'analyse vectorielle utiles en mécanique des milieux continus :

### Champs irrotationnels, potentiel scalaire

On dit qu'un champ vectoriel  $\mathbf{v}(M)$  est irrotationnel dans un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$  si  $\mathbf{rot} \mathbf{v}(M) = \mathbf{0} \forall M \in \mathcal{D}$ . On rappelle le résultat suivant :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v}(M) = \mathbf{0} \forall M \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \varphi(M) \text{ tel que } \mathbf{v}(M) = \mathbf{grad} \varphi(M) \quad (3.27)$$

Le champ scalaire  $\varphi(M)$  est appelé potentiel scalaire du champ irrotationnel  $\mathbf{v}(M)$ . Le potentiel scalaire  $\varphi$  est évidemment défini à un champ uniforme  $\varphi_0$  près.

### Champs conservatifs, potentiel vecteur

On dit qu'un champ vectoriel  $\mathbf{v}(M)$  est conservatif dans un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$  si  $\mathbf{div} \mathbf{v}(M) = \mathbf{0} \forall M \in \mathcal{D}$ . On rappelle le résultat suivant :

$$\mathbf{div} \mathbf{v}(M) = \mathbf{0} \forall M \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathbf{a}(M) \text{ tel que } \mathbf{v}(M) = \mathbf{rot} \mathbf{a}(M) \quad (3.28)$$

Le champ vectoriel  $\mathbf{a}(M)$  est appelé potentiel vecteur du champ conservatif  $\mathbf{v}(M)$ . Le potentiel vecteur n'est défini qu'à un champ de gradient près (voir identité (3.23) page 53).

### Théorème de Stokes

Soit  $\mathbf{v}(M)$  un champ de vecteurs défini dans un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$ , et soit  $S \subset \mathcal{D}$  une surface de point courant  $N$  et de normale unitaire  $\mathbf{n}(N)$ . On note  $\partial S$  le(s) contour(s)<sup>8</sup> frontière(s) de  $S$ , de point courant  $P$  et on note  $\mathbf{u}(P)$  la normale unitaire extérieure au contour  $\partial S$  et tangente à  $S$ . Le vecteur  $\mathbf{t}(P) = \mathbf{n}(P) \wedge \mathbf{u}(P)$  est unitaire et tangent au contour  $\partial S$ . Il définit son orientation<sup>9</sup>.

Si  $\mathbf{rot} \mathbf{v}$  est défini en tout point de  $S$  et de sa frontière  $\partial S$ , on a l'identité scalaire suivante :

$$\int_S \mathbf{rot} \mathbf{v}(N) \cdot \mathbf{n}(N) ds = \int_{\partial S} \mathbf{v}(P) \cdot \mathbf{t}(P) dl \quad (3.29)$$

Le flux du rotationnel d'un champ de vecteurs  $\mathbf{v}$  à travers une surface  $S$  est égal à la circulation du vecteur  $\mathbf{v}$  le long du contour  $\partial S$  de  $S$ .

### Théorème de la divergence (ou d'Ostrogradski)

Soit  $\mathbf{v}(M)$  un champ de vecteurs défini sur un domaine volumique fermé  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$ . On note  $\partial \mathcal{D}$  sa (ses) surface(s) frontière(s)<sup>10</sup>, de point courant  $N$  et de normale unitaire sortante  $\mathbf{n}(N)$ .

Si  $\mathbf{div} \mathbf{v}$  est défini en tout point de  $\mathcal{D}$  et de sa frontière  $\partial \mathcal{D}$ , on a l'identité scalaire suivante :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{div} \mathbf{v}(M) dv = \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{v}(N) \cdot \mathbf{n}(N) ds \quad (3.30)$$

L'intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs  $\mathbf{v}$  dans un volume fermé  $\mathcal{D}$  est égale au flux du vecteur  $\mathbf{v}$  à travers la frontière  $\partial \mathcal{D}$  de  $\mathcal{D}$ .

---

8. La surface  $S$  peut ne pas être simplement connexe (elle peut avoir des « trous » finis). Dans ce cas, elle a un contour extérieur et un ou plusieurs contours intérieurs (qui ne se coupent pas). Toutefois, un « trou » ne peut se réduire à un point car dans ce cas la tangente au contour n'est pas définie. Le théorème de Stokes est inapplicable dans ce cas.

9. Si la surface n'est pas simplement connexe,  $\mathbf{t}$  définit une orientation sur chaque contour (extérieur et intérieurs). Le trièdre orthonormé direct  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{u})$ , défini en chaque point des contours d'une surface, est appelé *trièdre de Darboux-Ribeaucourt*.

10. Le volume  $\mathcal{D}$  peut avoir des « trous » finis (la normale à la frontière  $\mathbf{n}(N)$  doit être partout définie).

## 3.7 Champs tensoriels du second ordre

### 3.7.1 Gradient d'un champ tensoriel du second ordre

Soit  $\mathbf{T}(M)$  un champ différentiable de tenseurs du second ordre. Par définition, sa différentielle est :

$$d\mathbf{T} = \mathbf{grad T} \cdot d\mathbf{M} \quad \forall d\mathbf{M} \quad (\text{voir (3.9) page 48}) \quad (3.31)$$

Le gradient d'un champ tensoriel d'ordre 2 est un champ tensoriel d'ordre 3.

Comme précédemment, dans un certain système de coordonnées, le champ  $\mathbf{T}(M)$  est donné par une fonction  $\bar{\mathbf{T}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{V}^{\otimes 2}$  telle que  $\bar{\mathbf{T}}(x^1, x^2, x^3) = \mathbf{T}(M)$ .

Si la fonction  $\bar{\mathbf{T}}$  définit le tenseur  $\mathbf{T}$  par ses composantes contravariantes sur la base naturelle, on donne les 9 fonctions  $\bar{T}^{ij} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\mathbf{T}(M) = \bar{T}^{ij}(x^1, x^2, x^3) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

L'égalité tensorielle  $d\mathbf{T} = d\bar{\mathbf{T}} \quad \forall d\mathbf{M} = dx^i \mathbf{e}_i$  conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad T} \cdot d\mathbf{M} &= d\bar{T}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \bar{T}^{ij} d\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \bar{T}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes d\mathbf{e}_j \\ &= \bar{T}^{ij}{}_{,k} dx^k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \bar{T}^{ij} \mathbf{e}_{i,k} \otimes \mathbf{e}_j dx^k + \bar{T}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_{j,k} dx^k \\ &= \left( \bar{T}^{ij}{}_{,k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j + \bar{T}^{ij} (\Gamma_{ki}^m \mathbf{e}_m) \otimes \mathbf{e}_j + \bar{T}^{ij} \mathbf{e}_i \otimes (\Gamma_{kj}^m \mathbf{e}_m) \right) dx^k \\ &= (\bar{T}^{ij}{}_{,k} + \bar{T}^{mj} \Gamma_{km}^i + \bar{T}^{im} \Gamma_{km}^j) dx^k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \forall d\mathbf{M} = dx^i \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

On a donc l'égalité tensorielle :

$$(\mathbf{grad T})^{ij}{}_k dx^k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = (\bar{T}^{ij}{}_{,k} + \bar{T}^{mj} \Gamma_{km}^i + \bar{T}^{im} \Gamma_{km}^j) dx^k \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad \forall d\mathbf{M} = dx^i \mathbf{e}_i$$

Les composantes  $(\mathbf{grad T})^{ij}{}_k$  du tenseur  $\mathbf{grad T}$  sont donc<sup>11</sup> :

$$(\mathbf{grad T})^{ij}{}_k = \bar{T}^{ij}{}_{,k} + \bar{T}^{mj} \Gamma_{km}^i + \bar{T}^{im} \Gamma_{km}^j$$

En définissant le champ  $\mathbf{T}$  par ses composantes de différentes variances, on obtient des composantes d'autres variances de  $\mathbf{grad T}$  :

$$\begin{aligned} (\mathbf{grad T})_{ijk} &= \bar{T}_{ij,k} - \bar{T}_{mj} \Gamma_{ki}^m - \bar{T}_{im} \Gamma_{kj}^m \\ (\mathbf{grad T})_i{}^j{}_k &= \bar{T}_i{}^j{}_{,k} - \bar{T}_m{}^j \Gamma_{ki}^m + \bar{T}_i{}^m \Gamma_{km}^j \\ (\mathbf{grad T})^i{}_{jk} &= \bar{T}^i{}_{j,k} + \bar{T}^m{}_j \Gamma_{km}^i - \bar{T}^i{}_m \Gamma_{kj}^m \end{aligned}$$

TECHNIQUE DE CONSTRUCTION DE CES FORMULES : On ajoute au terme dérivé les sommations «  $+\bar{T} \Gamma$  » pour chaque indice contravariant et «  $-\bar{T} \Gamma$  » pour chaque indice covariant. On complète ensuite les indices réels en respectant les règles de la convention d'Einstein (voir 1.1.1 page 2). Ce procédé est encore valable pour la construction des formules des composantes de gradient de tenseurs d'ordre  $p$  : il y a alors  $p$  termes de la forme «  $\pm \bar{T} \Gamma$  ».

AUTRES NOTATIONS : Comme pour les champs vectoriels, on trouve dans la littérature d'autres notations pour  $\mathbf{grad T}$  :

- $\nabla \mathbf{T}$  ou  $\frac{d\mathbf{T}}{d\mathbf{M}}$  ; ces notations ne se justifient que quand on a choisi une origine (voir remarque 2 page 48) ; comme pour les vecteurs, il vaut mieux éviter d'écrire  $(\nabla \mathbf{T})_{ijk} = \nabla_i \bar{T}_{jk}$  car la différentielle s'écrirait  $d\mathbf{T} = d\mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{T}$ .
- $\bar{T}^{ij}{}_{,k} = (\mathbf{grad V})^{ij}{}_k = \bar{T}^{ij}{}_{,k} + \bar{T}^{mj} \Gamma_{mk}^i + \bar{T}^{im} \Gamma_{mk}^j$  (« dérivée covariante de  $\bar{T}^{ij}$  par rapport à  $x^k$  ») ;
- de même pour  $\bar{T}_{ij;k}$ ,  $\bar{T}_i{}^j{}_{,k}$  et  $\bar{T}^i{}_{j;k}$ .

On vérifie aisément la propriété importante suivante :

$$\mathbf{grad G} = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

11. Il convient de bien faire attention à l'ordre des indices : le dernier indice de  $\mathbf{grad T}$  est l'indice de dérivation, les deux premiers sont les indices de  $\bar{\mathbf{T}}$ .

### 3.7.2 Divergence d'un tenseur du second ordre

DÉFINITION : La divergence d'un champ tensoriel du second ordre  $\mathbf{T}(M)$  est le champ vectoriel défini par :

$$\mathbf{div} \mathbf{T} = \mathbf{grad} \mathbf{T} : \mathbf{G} = \text{Tr}^{(23)} \mathbf{grad} \mathbf{T}$$

Les composantes de ce vecteur dans la base naturelle sont donc :

$$\begin{aligned} (\mathbf{div} \mathbf{T})^i &= (\mathbf{grad} \mathbf{T})^{ik}{}_{,k} = \bar{T}^{ik}{}_{,k} + \bar{T}^{mk} \Gamma_{mk}^i + \bar{T}^{im} \Gamma_{mk}^k \\ (\mathbf{div} \mathbf{T})_i &= (\mathbf{grad} \mathbf{T})^k{}_{i,k} = \bar{T}_i{}^k{}_{,k} - \bar{T}_m{}^k \Gamma_{ik}^m + \bar{T}_i{}^m \Gamma_{mk}^k \end{aligned}$$

On vérifie aisément les identités vectorielles suivantes :

$$\mathbf{div} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \mathbf{T} + \mathbf{T} : \mathbf{grad} \mathbf{v} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{div} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} (\mathbf{T}^T) + \mathbf{T}^T : \mathbf{grad} \mathbf{v} \quad (3.34)$$

### 3.7.3 Rotationnel d'un tenseur du second ordre

DÉFINITION : Le rotationnel d'un tenseur du second ordre  $\mathbf{T}(M)$  est le champ tensoriel du second ordre défini par :

$$\mathbf{rot} \mathbf{T} = -\mathbf{grad} \mathbf{T} : \mathbf{H} \quad (3.35)$$

Les composantes de ce tenseur du second ordre dans la base naturelle d'un système de coordonnées sont :

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \mathbf{T})^{ij} &= (\mathbf{grad} \mathbf{T})^i{}_{pq} h^{qpj} = \bar{T}^i{}_{p,q} h^{qpj} + \bar{T}^m{}_p \Gamma_{mq}^i h^{qpj} - \underbrace{\bar{T}^i{}_m \Gamma_{pq}^m h^{qpj}}_0 \\ &= (\bar{T}^i{}_{p,q} + \bar{T}^m{}_p \Gamma_{mq}^i) h^{qpj} \\ (\mathbf{rot} \mathbf{T})_i{}^j &= (\mathbf{grad} \mathbf{T})_{ipq} h^{qpj} = \bar{T}_{ip,q} h^{qpj} - \bar{T}_{mp} \Gamma_{iq}^m h^{qpj} - \underbrace{\bar{T}_{im} \Gamma_{pq}^m h^{qpj}}_0 \\ &= (\bar{T}_{ip,q} - \bar{T}_{mp} \Gamma_{iq}^m) h^{qpj} \end{aligned}$$

Contrairement au rotationnel d'un champ vectoriel, tous les coefficients de Christoffel ne disparaissent pas.

On peut calculer les composantes dans les autres variances en utilisant la règle de « l'ascenseur d'indices » page 14. Par exemple :

$$\begin{aligned} (\mathbf{rot} \mathbf{T})_{ik} &= (\mathbf{rot} \mathbf{T})_i{}^k g_{jk} = (\bar{T}_{ip,q} - \bar{T}_{mp} \Gamma_{iq}^m) h^{qpj} g_{jk} \\ &= (\bar{T}_{ip,q} - \bar{T}_{mp} \Gamma_{iq}^m) h^{qp}{}_k \end{aligned}$$

Dans les identités suivantes,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{A}$  sont des champs tensoriels d'ordre 2,  $\mathbf{S}$  est symétrique,  $\mathbf{A}$  est antisymétrique et  $\mathbf{v}$  est un vecteur :

$$\mathbf{rot} \mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{grad} \mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{rot}^T \mathbf{grad}^T \mathbf{v} \quad (3.37)$$

$$\mathbf{rot} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{grad}^T \mathbf{v} - (\mathbf{div} \mathbf{v}) \mathbf{G} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{rot} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{T} - (\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}) : \mathbf{H} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{rot} (\mathbf{T}^T) - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{v}) : \mathbf{H} \\ (\mathbf{rot} \mathbf{S}) : \mathbf{G} &= 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot}^T \mathbf{T} = \mathbf{rot}^T \mathbf{rot}^T \mathbf{T}^T \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{rot}^T \mathbf{S} & \text{symétrique} \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot}^T \mathbf{A} & \text{antisymétrique} \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\mathbf{rot} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{U}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{U} - \mathbf{grad} \mathbf{T} : (\mathbf{U} \cdot \mathbf{H}) \quad (3.42)$$

### 3.7.4 Laplacien d'un champ de vecteurs

DÉFINITION : *Le laplacien d'un champ de vecteurs  $\mathbf{v}(M)$  est le champ vectoriel défini par :*

$$\Delta \mathbf{v} = \text{div grad } \mathbf{v}$$

dont les composantes dans la base naturelle d'un système de coordonnées sont :

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{v})^i &= (\text{grad } \mathbf{v})^i_{p,q} g^{pq} + (\text{grad } \mathbf{v})^m_p \Gamma^i_{mq} g^{pq} - (\text{grad } \mathbf{v})^i_m \Gamma^m_{pq} g^{pq} \\ (\Delta \mathbf{v})_i &= (\text{grad } \mathbf{v})_{i,p,q} g^{pq} - (\text{grad } \mathbf{v})_{mp} \Gamma^m_{iq} g^{pq} - (\text{grad } \mathbf{v})_{im} \Gamma^m_{pq} g^{pq} \end{aligned}$$

REMARQUE : L'expression détaillée des composantes de  $\Delta \mathbf{v}$  dans la base naturelle d'un système de coordonnées quelconque est donc compliquée. Notamment, la dérivée  $(\text{grad } \mathbf{v})^i_{p,q}$  fait apparaître des dérivées de coefficients de Christoffel. Pour trouver son expression dans un système de coordonnées non standard, il vaut mieux s'aider d'un logiciel de calcul formel (voir note 13 page 59).

On vérifie aisément l'identité vectorielle suivante<sup>12</sup> :

$$\Delta \mathbf{v} = \text{grad div } \mathbf{v} - \text{rot rot } \mathbf{v} \quad (3.43)$$

### 3.7.5 Propriétés des champs tensoriels du second ordre

On démontre sans difficulté les généralisations des propriétés des champs vectoriels suivantes :

– **Champs tensoriels d'ordre 2 irrotationnels :**

On dit qu'un champ tensoriel du second ordre  $\mathbf{T}(M)$  est irrotationnel dans un domaine  $\mathcal{D}$  si  $\text{rot } \mathbf{T}(M) = \mathbf{0} \forall M \in \mathcal{D}$ . On a le résultat suivant :

$$\text{rot } \mathbf{T}(M) = \mathbf{0} \quad \forall M \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathbf{v}(M) \text{ tel que } \mathbf{T}(M) = \text{grad } \mathbf{v}(M) \quad (3.44)$$

– **Champs tensoriels d'ordre 2 conservatifs :**

On dit qu'un champ tensoriel du second ordre  $\mathbf{T}(M)$  est conservatif dans un domaine  $\mathcal{D}$  si  $\text{div } \mathbf{T}(M) = \mathbf{0} \forall M \in \mathcal{D}$ . On a le résultat suivant :

$$\text{div } \mathbf{T}(M) = \mathbf{0} \quad \forall M \in \mathcal{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \mathbf{U}(M) \text{ tel que } \mathbf{T}(M) = \text{rot } \mathbf{U}(M) \quad (3.45)$$

– **Théorème de Stokes pour les tenseurs d'ordre 2 :**

Avec les notations et les conditions de la section 3.6.5 page 53, on a l'identité *vectorielle* suivante :

$$\int_S (\text{rot } \mathbf{T}) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_C \mathbf{T} \cdot \mathbf{t} \, dl \quad (3.46)$$

– **Théorème de la divergence pour les tenseurs d'ordre 2 :**

Avec les notations et les conditions de la section 3.6.5 page 53, on a l'identité *vectorielle* suivante :

$$\int_{\mathcal{D}} \text{div } \mathbf{T} \, dv = \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (3.47)$$

INDICATIONS POUR LES DÉMONSTRATIONS : Soit une base orthonormée fixe  $\{\mathbf{e}_k\}$ . En projetant sur cette base chaque membre des égalités, des égalités entre tenseurs d'ordre diminué de 1. On peut alors utiliser pour chacune d'elles les propriétés de la section 3.6.5 page 53. Ces trois traitements permettent d'aboutir à la reconstruction du résultat tensoriel.

Par exemple pour montrer (3.44) :  $\mathbf{e}_1 \cdot \text{rot } (\mathbf{T}) = \text{rot } (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T})$  (identité 3.39 page 56)  $\Leftrightarrow \exists \varphi^1$  tel que :  $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} = \text{grad } \varphi^1 = \mathbf{e}_1 \cdot \text{grad } (\varphi^1 \mathbf{e}_1)$  (identité (3.18) page 52). Le vecteur  $\varphi^i \mathbf{e}_i$  existe donc.

12. Pour vérifier une identité tensorielle par des calculs sur les composantes, peu importe le système de coordonnées utilisé. En effet, pour prouver qu'un tenseur est nul, il suffit de montrer que ses composantes sont nulles dans n'importe quelle base. On a évidemment intérêt à utiliser un système de coordonnées cartésiennes, dans lequel tous les  $\Gamma^i_{jk}$  sont nuls.

### 3.8 Champs tensoriels d'ordre $p$

Le gradient d'un champ  $U(M)$  d'ordre  $p$  est un champ tensoriel d'ordre  $p + 1$  défini par :

$$dU = \text{grad } U \cdot dM$$

Comme précédemment, ses composantes dans la base naturelle d'un système de coordonnées se déduisent de l'égalité :

$$dU(M) = d\bar{U}(x^1, x^2, x^3) \nabla dM$$

Par exemple, les composantes complètement covariantes du gradient d'un tenseur d'ordre 3 sur la base naturelle sont (voir la technique de construction des formules page 55) :

$$(\text{grad } U)_{ijkl} = \bar{U}_{ijk,l} - \bar{U}_{mjk} \Gamma_{il}^m - \bar{U}_{imk} \Gamma_{jl}^m - \bar{U}_{ijm} \Gamma_{kl}^m$$

On vérifie aisément la propriété importante suivante:

$$\text{grad } H = 0 \quad (3.48)$$

La divergence d'un champ tensoriel  $U$  d'ordre  $p$  est le champ tensoriel d'ordre  $p - 1$  défini par :

$$\text{div } U = \text{grad } U : G$$

Le rotationnel d'un champ tensoriel  $U$  d'ordre  $p$  est le champ tensoriel d'ordre  $p$  défini par :

$$\text{rot } U = -\text{grad } U : H$$

Le laplacien d'un champ tensoriel  $U$  d'ordre  $p$  est le champ de tenseurs d'ordre  $p$  défini par:

$$\Delta U = \text{div grad } T$$

On vérifie aisément les identités suivantes (voir note 12 page 57), dans lesquelles  $T$  est un champ tensoriel d'ordre 2 et  $v$  un vecteur :

$$\text{rot rot } T = \text{grad div } T - \Delta T \quad \forall T \in \mathcal{V}_3^{\otimes 2} \quad (3.49)$$

$$\text{div } (T \otimes v) = \text{grad } T \cdot v + T \text{ div } v \quad \forall T \in \mathbb{V}^{\otimes p} \quad (3.50)$$

$$\text{div } (v \otimes T) = v \otimes \text{div } T + \text{grad } v \cdot T^T \quad (3.51)$$

On généralise sans difficulté le théorème de la divergence pour les tenseurs d'ordre  $p$  en utilisant par récurrence le procédé donné page 57 :

$$\int_{\mathcal{D}} \text{div } T \, dv = \int_{\partial \mathcal{D}} T \cdot n \, ds \quad \forall T \in \mathbb{V}^{\otimes p} \quad (3.52)$$

### 3.9 En bref...

En mécanique des milieux continus, on doit envisager des champs de tenseurs définis sur les points d'un domaine de l'espace.

Pour repérer les points du domaine, on choisit un système de coordonnées commode pour parcourir le domaine. Chaque système de coordonnées a sa propre base naturelle (en général non orthonormée) et ses propres coefficients de Christoffel.

On a généralisé les opérateurs différentiels aux champs de tenseurs :

- Le gradient d'un champ tensoriel d'ordre  $p$  est d'ordre  $p + 1$ .

- La divergence d'un champ tensoriel d'ordre  $p$  est d'ordre  $p - 1$ .
- Le rotationnel d'un champ tensoriel d'ordre  $p$  est d'ordre  $p$ .
- Le laplacien d'un champ tensoriel d'ordre  $p$  est d'ordre  $p$ .

L'expression des composantes de ces opérateurs sur la base naturelle est la même pour tous les systèmes de coordonnées. Seuls les coefficients de Christoffel (calculés une fois pour toutes) sont caractéristiques de chaque système de coordonnées.

Le gradient, la divergence, le rotationnel et le laplacien ont été définis intrinsèquement par des opérations tensorielles, qui peuvent être évaluées avec des composantes dans n'importe quelle base.

Dans un système de coordonnées non standard, bien que systématiques, les calculs, peuvent être fastidieux. Pour les faire, on peut s'aider d'un logiciel de calcul formel<sup>13</sup>.

Un formulaire des opérateurs différentiels utiles pour les systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique est donné en annexe C.1 page 87.

---

13. L'auteur met à la disposition des utilisateurs des logiciels de calcul formel MAPLE® ou MATHEMATICA®, deux « packages » destinés à faciliter la pratique de l'algèbre tensorielle dans une base quelconque et de l'analyse tensorielle dans un système de coordonnées quelconque. Ils sont téléchargeables actuellement (16 mars 2012) à <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d>.





# Chapitre 4

## Quelques applications

### 4.1 Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

Pour illustrer la méthode générale d'obtention des composantes des opérateurs différentiels dans un système de coordonnées quelconque, on va retrouver ici quelques formules classiques données dans les formulaires pour le système de coordonnées cylindriques et les étendre aux champs tensoriels<sup>1</sup>.

En coordonnées cylindriques, le point courant est donné par :  $\mathbf{x}_M = r\mathbf{u}_\theta + z\mathbf{k}$ .

On en déduit la base naturelle de ce système de coordonnées (voir (3.2) page 45) :

$$\mathbf{e}_r = (\mathbf{x}_M)_{,r} = \mathbf{u}_\theta \quad \mathbf{e}_\theta = (\mathbf{x}_M)_{,\theta} = r\mathbf{v}_\theta \quad \mathbf{e}_z = (\mathbf{x}_M)_{,z} = \mathbf{k}$$

Cette base naturelle est orthogonale mais non normée ( $\|\mathbf{e}_\theta\| = r \neq 1$ ).

Les coefficients de Christoffel (voir (3.4) page 46) se calculent soit par dérivation directe des vecteurs de la base naturelle, soit en utilisant les formules systématiques (3.6) page 47. Les seuls coefficients non nuls sont :

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r} \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r$$

La base physique  $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$  est la base naturelle normée :

$$\tilde{\mathbf{e}}_r = \mathbf{e}_r = \mathbf{u}_\theta \quad \tilde{\mathbf{e}}_\theta = \frac{\mathbf{e}_\theta}{r} = \mathbf{v}_\theta \quad \tilde{\mathbf{e}}_z = \mathbf{e}_z = \mathbf{k} \quad \Rightarrow \quad [\tilde{\mathbf{A}}_\bullet \bullet] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En coordonnées cylindriques, il se trouve que la base physique est orthonormée car la base naturelle est orthogonale.

#### 4.1.1 Gradient d'un champ scalaire

Soit  $f(M) = \bar{f}(r, \theta, z)$  un champ scalaire. En utilisant (3.13) page 51 on trouve les composantes covariantes du vecteur  $\mathbf{grad} f$  sur la base naturelle :

$$\mathbf{grad} f = \bar{f}_{,r} \mathbf{e}^r + \bar{f}_{,\theta} \mathbf{e}^\theta + \bar{f}_{,z} \mathbf{e}^z$$

Par changement de base des composantes covariantes de vecteurs (voir page 10), on trouve les composantes covariantes de  $\mathbf{grad} f$  sur la base physique :

$$\mathbf{grad} f = \bar{f}_{,r} \tilde{\mathbf{e}}^r + \frac{\bar{f}_{,\theta}}{r} \tilde{\mathbf{e}}^\theta + \bar{f}_{,z} \tilde{\mathbf{e}}^z \quad (\text{formule classique}) \quad (4.1)$$

REMARQUE : Puisque la base physique est orthonormée, les composantes covariantes et contravariantes sont identiques.

1. Un formulaire complet est donné en annexe C.1 page 87.

### 4.1.2 Champs vectoriels :

Soit  $\mathbf{v}(M)$  un champ vectoriel dont on donne les composantes sur la base physique :

$$\mathbf{v} = \tilde{v}^r(r, \theta, z) \tilde{\mathbf{e}}_r + \tilde{v}^\theta(r, \theta, z) \tilde{\mathbf{e}}_\theta + \tilde{v}^z(r, \theta, z) \tilde{\mathbf{e}}_z$$

Par changement de base des composantes contravariantes de vecteurs (voir page 10), on en déduit ses composantes contravariantes sur la base naturelle :

$$\tilde{v}^r = \tilde{v}^r \quad \tilde{v}^\theta = \frac{\tilde{v}^\theta}{r} \quad \tilde{v}^z = \tilde{v}^z \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} = \tilde{v}^r \mathbf{e}_r + \frac{\tilde{v}^\theta}{r} \mathbf{e}_\theta + \tilde{v}^z \mathbf{e}_z$$

On peut alors utiliser les formules (3.16) page 51 pour trouver les composantes mixtes  $[(\mathbf{grad} \mathbf{v})^\bullet \bullet]_{\mathbf{e}_i}$  sur la base naturelle :

$$[(\mathbf{grad} \mathbf{v})^\bullet \bullet]_{\mathbf{e}_i} = \begin{bmatrix} \tilde{v}^r_{,r} & \tilde{v}^r_{,\theta} - \tilde{v}^\theta & \tilde{v}^r_{,z} \\ \frac{\tilde{v}^\theta_{,r}}{r} & \frac{\tilde{v}^\theta_{,\theta}}{r} + \frac{\tilde{v}^r}{r} & \frac{\tilde{v}^\theta_{,z}}{r} \\ \tilde{v}^z_{,r} & \tilde{v}^z_{,\theta} & \tilde{v}^z_{,z} \end{bmatrix}$$

Par changement de base pour les tenseurs du second ordre (voir page 10), on en déduit les composantes  $[(\mathbf{grad} \mathbf{v})^\bullet \bullet]_{\tilde{\mathbf{e}}_i}$  sur la base physique (la base  $\{\tilde{\mathbf{e}}_i\}$  étant orthonormée, on peut ignorer les variances) :

$$[(\mathbf{grad} \mathbf{v})^\bullet \bullet]_{\tilde{\mathbf{e}}_i} = \begin{bmatrix} \tilde{v}^r_{,r} & \frac{\tilde{v}^r_{,\theta}}{r} - \frac{\tilde{v}^\theta}{r} & \tilde{v}^r_{,z} \\ \tilde{v}^\theta_{,r} & \frac{\tilde{v}^\theta_{,\theta}}{r} + \frac{\tilde{v}^r}{r} & \tilde{v}^\theta_{,z} \\ \tilde{v}^z_{,r} & \frac{\tilde{v}^z_{,\theta}}{r} & \tilde{v}^z_{,z} \end{bmatrix}$$

Le scalaire  $\text{div} \mathbf{v}$  se calcule avec la définition (3.20) page 53 :

$$\text{div} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbf{G} = \tilde{v}^r_{,r} + \frac{\tilde{v}^\theta_{,\theta}}{r} + \frac{\tilde{v}^r}{r} + \tilde{v}^z_{,z} \quad (\text{formule classique})$$

REMARQUE : Par définition,  $\text{div} \mathbf{v} = \mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbf{G} = \text{Tr} \mathbf{grad} \mathbf{v} = (\mathbf{grad} \mathbf{v})_I$ . C'est la trace d'une matrice de *composantes mixtes*. On peut la calculer dans n'importe quelle base (en particulier dans la base naturelle comme dans la base physique).

En prenant  $\mathbf{v} = \mathbf{grad} f = \bar{f}_{,r} \tilde{\mathbf{e}}^r + \frac{\bar{f}_{,\theta}}{r} \tilde{\mathbf{e}}^\theta + \bar{f}_{,z} \tilde{\mathbf{e}}^z$  (voir (4.1) page 61), on en déduit le laplacien d'un champ scalaire (définition en (3.22) page 53) :

$$\Delta f = \text{div} \mathbf{grad} f = \bar{f}_{,rr} + \frac{\bar{f}_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\bar{f}_{,r}}{r} + \bar{f}_{,zz} \quad (\text{formule classique})$$

Le vecteur  $\mathbf{rot} \mathbf{v}$  se calcule avec la définition (3.21) page 53. Ses composantes dans la base physique sont<sup>2</sup> :

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbf{H} = \left( \frac{\tilde{v}^z_{,\theta}}{r} - \tilde{v}^\theta_{,z} \right) \tilde{\mathbf{e}}_r + \left( \tilde{v}^r_{,z} - \tilde{v}^z_{,r} \right) \tilde{\mathbf{e}}_\theta + \left( \tilde{v}^\theta_{,r} - \frac{\tilde{v}^r_{,\theta}}{r} + \frac{\tilde{v}^\theta}{r} \right) \tilde{\mathbf{e}}_z \quad (\text{formule classique})$$

On peut sans difficulté majeure<sup>3</sup>, trouver par la même démarche les formules des composantes d'opérateurs différentiels de champs de tenseurs d'ordre supérieur.

2. Cette base est orthonormée. Les composantes du tenseur d'orientation  $\mathbf{H}$  dans cette base sont donc 1, -1 ou 0. Il est plus simple de faire le double produit contracté  $-\mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbf{H}$  avec les composantes des tenseurs dans cette base.

3. voir note 13 page 59.

## 4.2 Applications des théorèmes de la divergence

Dans les formules qui suivent,  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$  est un volume fermé de frontière  $\partial\mathcal{D}$  et de volume  $vol(\mathcal{D})$ ,  $N$  est un point courant de la frontière  $\partial\mathcal{D}$ , de normale unitaire sortante  $\mathbf{n}(N)$  et  $\mathbf{u}_0$  est un vecteur fixe. En utilisant les théorèmes de la divergence, on vérifie aisément les identités suivantes, valables pour tout domaine  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{n}(N) ds &= \mathbf{0} & \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{ON} \wedge \mathbf{n}(N) ds &= \mathbf{0} \\ \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{ON} \cdot \mathbf{n}(N) ds &= 3 vol(\mathcal{D}) & \int_{\partial\mathcal{D}} (\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{ON}) \mathbf{n}(N) ds &= vol(\mathcal{D}) \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

Les deux dernières identités donnent différentes manières d'évaluer le volume d'un domaine avec des intégrales de surface sur la frontière.

## 4.3 Dérivées d'intégrales de volume sur des domaines variables

En mécanique des milieux continus, on aura à considérer des intégrales sur des domaines volumiques variables en fonction d'un paramètre  $t$ .

On choisit arbitrairement une valeur particulière  $t_0$  du paramètre  $t$ . Le domaine pour  $t = t_0$  est noté  $\mathcal{D}_0$  et son point courant est noté  $M_0$ . Pour décrire le domaine pour toute valeur de  $t$ , on se donne l'application  $f$  qui donne les points  $M_t$  de  $\mathcal{D}_t$  en fonction de  $M_0$  et de  $t$ .

$$f : M_0 \in \mathcal{D}_0 \leftrightarrow f(M_0, t) = M_t$$

On suppose que l'application  $f$  à  $t$  constant est différentiable en tout point  $M_0$  de  $\mathcal{D}_0$  et qu'elle est inversible. D'autre part on suppose qu'elle est dérivable par rapport à  $t$ . Autrement dit, les variations du domaine  $\mathcal{D}_t$  sont suffisamment régulières.

L'application  $f$  est un endomorphisme  $\mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$ . Son gradient en  $M_0$  est l'application linéaire tangente :

$$dM_t = \mathbf{grad} f \cdot dM_0$$

L'opérateur linéaire  $\mathbf{grad} f$  est donc un tenseur du second ordre (voir (1.35) page 20).

Soit un champ tensoriel  $\mathbf{T}$  d'ordre  $p$ , fonction aussi du paramètre  $t$ , différentiable en tout  $M \in \mathcal{E}_3$  et dérivable par rapport à  $t$  :

$$\mathbf{T} : (M, t) \in \mathcal{E}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{T}(M, t) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$$

On considère l'intégrale :  $I(t) = \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{T}(M_t, t) dv_t$ .

Cette intégrale est un tenseur d'ordre  $p$ , qui est fonction de  $t$  pour deux raisons : d'une part le champ  $\mathbf{T}$  varie avec  $t$ , d'autre part le domaine d'intégration varie aussi avec  $t$ .

On se propose de calculer la dérivée par rapport à  $t$  de cette intégrale. Pour ce faire, on va effectuer un changement de variable qui la ramène au calcul de la dérivée d'une intégrale sur le domaine fixe  $\mathcal{D}_0$ .

### Changement de variable sur l'élément de volume :

Soit  $S_g$  un système de coordonnées. À l'application  $f$  on peut associer les trois applications bijectives  $f_{S_g}^i$  :

$$f_{S_g}^i : (x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) \in \mathbb{R}^4 \leftrightarrow f_{S_g}^i(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) = x_t^i$$

où les  $x_0^i$  sont les coordonnées de  $M_0 \in \mathcal{D}_0$  et les  $x_t^i$  sont les coordonnées de  $M_t \in \mathcal{D}_t$ . L'élément de volume dans  $\mathcal{D}_0$  est :

$$dv_0 = \sqrt{g} dx_0^1 dx_0^2 dx_0^3 \quad (\text{voir (3.11) page 49})$$

De même, l'élément de volume dans  $\mathcal{D}_t$  est :

$$\begin{aligned} dv_t &= \sqrt{g} dx_t^1 dx_t^2 dx_t^3 = \sqrt{g} \left( \frac{\partial f_{S_g}^1}{\partial x_0^i} dx_0^i \right) \left( \frac{\partial f_{S_g}^2}{\partial x_0^j} dx_0^j \right) \left( \frac{\partial f_{S_g}^3}{\partial x_0^k} dx_0^k \right) = \sqrt{g} \det [f_{S_g}^i, j] dx_0^1 dx_0^2 dx_0^3 \\ dv_t &= \det \mathbf{grad} f dv_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Remarquer que le rapport des éléments de volume est indépendant du système de coordonnées  $S_g$ . Il ne dépend que de l'application  $f$  qui définit le volume  $\mathcal{D}_t$  à tout instant.

Dans la suite du calcul, on aura besoin de connaître la dérivée par rapport à  $t$  de  $\det \mathbf{grad} f(M_0, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \det \mathbf{grad} f &= \mathbf{V} \det \mathbf{grad} f : \frac{d \mathbf{grad} f}{dt} && \text{(voir (2.21) page 36)} \\ &= \det \mathbf{grad} f \mathbf{grad}^{-T} f : \frac{d(\mathbf{grad} f)}{dt} && \text{(voir (2.28) page 39)} \\ &= \det \mathbf{grad} f \operatorname{Tr} \left( \frac{d(\mathbf{grad} f)}{dt} \cdot \mathbf{grad}^{-1} f \right) && \text{(voir (1.22) page 17)} \\ &= \det \mathbf{grad} f \operatorname{Tr} \left( \mathbf{grad} \frac{df}{dt} \cdot \mathbf{grad} f^{-1} \right) \\ &= \det \mathbf{grad} f \operatorname{Tr} \mathbf{grad} \left( \frac{df}{dt} \circ f^{-1} \right) \\ \frac{d}{dt} \det \mathbf{grad} f &= \det \mathbf{grad} f \operatorname{Tr} \mathbf{grad} \frac{dM_t}{dt} = \det \mathbf{grad} f \operatorname{div} \frac{dM_t}{dt} \end{aligned} \quad (4.3)$$

#### Dérivation de l'intégrale :

En faisant le changement de variable  $M_t = f(M_0, t)$  et  $dv_t = \det \mathbf{grad} f dv_0$ , l'intégrale sur le domaine  $\mathcal{D}_t$  se ramène à une intégrale sur le domaine  $\mathcal{D}_0$  :

$$\mathbf{I}(t) = \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{T}(M_t, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{T}(f(M_0, t), t) \det \mathbf{grad} f(M_0, t) dv_0$$

Le domaine d'intégration  $\mathcal{D}_0$  n'est pas fonction de  $t$ . La variation de l'intégrale  $\mathbf{I}(t)$  en fonction de  $t$  n'est due qu'aux variations de l'intégrande. La dérivée par rapport à  $t$  de cette intégrale s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= \int_{\mathcal{D}_0} \frac{d}{dt} \left( \mathbf{T}(f(M_0, t), t) \det \mathbf{grad} f(M_0, t) \right) dv_0 \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \frac{d\mathbf{T}(f(M_0, t), t)}{dt} \det \mathbf{grad} f(M_0, t) dv_0 + \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{T}(f(M_0, t), t) \frac{d \det \mathbf{grad} f}{dt} dv_0 \\ &= \int_{\mathcal{D}_0} \left( \frac{\partial \mathbf{T}(f(M_0, t), t)}{\partial t} + \mathbf{grad} \mathbf{T} \cdot \frac{dM_t}{dt} \right) \det \mathbf{grad} f dv_0 + \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{T}(f(M_0, t), t) \operatorname{div} \frac{dM_t}{dt} \det \mathbf{grad} f dv_0 \end{aligned}$$

On peut alors faire le changement de variables inverse :  $M_0 = f^{-1}(M_t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= \int_{\mathcal{D}_t} \left( \frac{\partial \mathbf{T}(M_t, t)}{\partial t} + \mathbf{grad} \mathbf{T} \cdot \frac{dM_t}{dt} + \mathbf{T}(M_t, t) \operatorname{div} \frac{dM_t}{dt} \right) dv_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} \left( \frac{\partial \mathbf{T}(M_t, t)}{\partial t} + \mathbf{div} \left( \mathbf{T} \otimes \frac{dM_t}{dt} \right) \right) dv_t \quad \text{(identité (3.50) page 58)} \\ &= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial \mathbf{T}(M_t, t)}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \left( \mathbf{T} \otimes \frac{dM_t}{dt} \right) \cdot \mathbf{n} ds_t \quad \text{(théorème de la divergence)} \\ \frac{d\mathbf{I}}{dt} &= \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial \mathbf{T}(M_t, t)}{\partial t} dv + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{T} \left( \frac{dM_t}{dt} \cdot \mathbf{n} \right) ds_t \end{aligned} \quad (4.4)$$

Si le paramètre  $t$  est le temps, le vecteur  $\frac{dM_t}{dt}$  est la vitesse  $\tilde{\mathbf{v}}$  du point  $M_t$  dans le mouvement du domaine.

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial \mathbf{T}(M_t, t)}{\partial t} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{T}(M_t, t) (\tilde{\mathbf{v}}(M_t, t) \cdot \mathbf{n}) ds_t \quad (4.5)$$

Cette formule de dérivation des intégrales de volume sur des domaines variables est très utilisée en mécanique des milieux continus. Il est remarquable de constater que dans la formule (4.5), dans l'intégrale de frontière, seule intervient la vitesse des points de la frontière du domaine  $\mathcal{D}_t$ .

## 4.4 Conditions de compatibilité

Dans certains problèmes de mécanique des milieux continus, on est amené à résoudre le problème suivant : Soit  $\mathbf{S}(M)$  un champ de tenseurs symétriques du second ordre.

Trouver le champ vectoriel  $\mathbf{v}$  tel que  $\mathbf{sym grad v} = \mathbf{S}$ .

On montre ici que ce problème n'a de solution que si et seulement si le champ symétrique  $\mathbf{S}(M)$  satisfait à certaines conditions appelées *conditions de compatibilité*.

**Écriture d'une condition nécessaire :**

Soit  $\mathbf{v}(M)$  un champ vectoriel et soit  $\mathbf{S}(M)$  la partie symétrique de son gradient :  $\mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{grad v} + \mathbf{grad}^T \mathbf{v})$

On en déduit :  $\mathbf{rot S} = \frac{1}{2} \underbrace{\mathbf{rot grad v}}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{rot grad}^T \mathbf{v}$  (identité (3.36) page 56)

En transposant cette égalité, il vient :

$$\mathbf{rot}^T \mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{rot}^T \mathbf{grad}^T \mathbf{v} = \frac{1}{2} \mathbf{grad rot v} \quad (\text{identité (3.37) page 56}) \quad (4.6)$$

En utilisant à nouveau l'identité (3.36) page 56, on en déduit une condition nécessaire sur le champ  $\mathbf{S}(M)$  :

$$\mathbf{rot rot}^T \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (6 \text{ équations, voir (3.41) page 56}) \quad (4.7)$$

**La condition (4.7) est suffisante :**

Soit maintenant un champ de tenseurs symétriques  $\mathbf{S}(M)$  respectant la condition nécessaire (4.7)  $\forall M$ . Cherchons le champ  $\mathbf{v}(M)$  tel que  $\mathbf{S}(M) = \mathbf{sym grad v}(M)$ .

Le champ  $\mathbf{v}(M)$  est solution de l'équation différentielle tensorielle (9 équations aux dérivées partielles):

$$\mathbf{grad v} = \underbrace{\mathbf{sym grad v}}_S + \underbrace{\mathbf{antisym grad v}}_A = \mathbf{S} + \mathbf{A} \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{A}(M)$  est un champ de tenseurs antisymétriques inconnu à déterminer.

La condition (4.7) garantit que l'équation (4.6) a une solution (en vertu de (3.44) page 57). Cette équation est une équation dont l'inconnue est  $\mathbf{A}$ . En effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}^T \mathbf{S} &= \frac{1}{2} \mathbf{grad rot v} = \frac{1}{2} \mathbf{grad} (-\mathbf{grad v} : \mathbf{H}) \quad (\text{définition (3.21) page 53}) \\ &= -\frac{1}{2} \mathbf{grad} ((\mathbf{S} + \mathbf{A}) : \mathbf{H}) \\ &= -\mathbf{grad} \left( \frac{1}{2} \mathbf{A} : \mathbf{H} \right) \quad (\mathbf{S} : \mathbf{H} = \mathbf{0} \text{ car } \mathbf{S} \text{ symétrique}) \\ \mathbf{rot}^T \mathbf{S} &= -\mathbf{grad a} \quad (\mathbf{a} \text{ est le vecteur adjoint de } \mathbf{A}, \text{ définition (1.27) page 18}) \end{aligned} \quad (4.9)$$

Le vecteur  $\mathbf{a}$  (et donc le tenseur antisymétrique  $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}$ ) est donc la solution du système (4.9) (9 équations aux dérivées partielles) :

$$\mathbf{grad} \mathbf{a} = -\mathbf{rot}^T \mathbf{S} \quad (4.10)$$

L'intégration de cette équation différentielle tensorielle, d'inconnue  $\mathbf{a}(M)$ , dont on sait qu'elle a une solution grâce à la condition (4.7), donne le champ de tenseurs antisymétriques  $\mathbf{A}(M) = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}(M)$  (voir (1.28) page 18).

L'équation (4.8) page 65, d'inconnue  $\mathbf{v}(M)$ , peut alors être complétée :

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{S} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{a} \quad (4.11)$$

Cette équation n'a de solution que si et seulement si  $\mathbf{rot}(\mathbf{S} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{0}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \mathbf{rot} \mathbf{S} + \frac{1}{2} \mathbf{rot}(\mathbf{H} \cdot \mathbf{a}) \\ &= \mathbf{rot} \mathbf{S} + \mathbf{grad}^T \mathbf{a} - \mathbf{div} \mathbf{a} \mathbf{G} \quad (\text{identité (3.38) page 56}) \\ &= -\mathbf{grad}^T \mathbf{a} + \mathbf{grad}^T \mathbf{a} - \mathbf{div} \mathbf{a} \mathbf{G} \quad (\text{équation (4.9) page 65}) \\ &\Rightarrow \mathbf{div} \mathbf{a} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Cette dernière condition sur le champ  $\mathbf{a}(M)$  est toujours satisfaite car  $\mathbf{S}$  est symétrique. En effet :

$$\mathbf{div} \mathbf{a} = \mathbf{grad} \mathbf{a} : \mathbf{G} = -(\mathbf{rot}^T \mathbf{S}) : \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (\text{identité (3.40) page 56})$$

En conclusion, on est assuré de l'existence d'un champ  $\mathbf{v}(M)$  solution du problème posé sous réserve que le champ tensoriel symétrique  $\mathbf{S}(M)$  satisfasse les conditions de compatibilité :

$$\mathbf{rot} \mathbf{rot}^T \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (6 \text{ équations}) \quad (4.12)$$

#### 4.4.1 Autre forme des équations de compatibilité :

Dans beaucoup de cours de mécanique des milieux continus, les conditions de compatibilité (4.12) sont présentées sous la forme suivante<sup>4</sup> :

$$\mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{S} + \mathbf{grad}^T \mathbf{div} \mathbf{S} - \mathbf{grad} \mathbf{grad} \text{Tr} \mathbf{S} - \Delta \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que le système des six équations différentielles (4.12) est équivalent au système des six équations différentielles (4.13).

INDICATIONS POUR LA DÉMONSTRATION : Si l'on pose :

$$\mathbf{T} = \mathbf{rot} \mathbf{rot}^T \mathbf{S} \quad \text{et} \quad \mathbf{T}' = \mathbf{grad} \mathbf{div} \mathbf{S} + \mathbf{grad}^T \mathbf{div} \mathbf{S} - \mathbf{grad} \mathbf{grad} \text{Tr} \mathbf{S} - \Delta \mathbf{S}$$

on vérifie aisément que l'identité  $\mathbf{T}' = \mathbf{T} - (\text{Tr} \mathbf{T}) \mathbf{G}$  est vraie  $\forall \mathbf{S}$ . Il est facile de montrer ensuite que  $\mathbf{T} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{T}' = \mathbf{0}$ .

#### 4.4.2 Méthode d'intégration

La démonstration qui précède donne la méthode générale pour trouver le champ  $\mathbf{v}(M)$ . Soit un champ de tenseurs du second ordre symétrique  $\mathbf{S}(M)$  satisfaisant aux conditions de compatibilité (4.12).

1. On cherche d'abord le champ vectoriel  $\mathbf{a}(M)$  solution de (4.10) :

$$\mathbf{grad} \mathbf{a} = -\mathbf{rot}^T \mathbf{S} \quad (9 \text{ équations aux dérivées partielles}) \quad (4.14)$$

---

4. Cette forme, d'expression plus compliquée, évite l'introduction du rotationnel d'un tenseur du second ordre.

2. On cherche ensuite le champ vectoriel  $\mathbf{v}(M)$  solution de (4.8) :

$$\mathbf{grad} \mathbf{v} = \mathbf{S} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{a} \quad (9 \text{ équations aux dérivées partielles}) \quad (4.15)$$

Les champs vectoriels  $\mathbf{v}$  solutions ne sont pas uniques. En effet :

- les solutions  $\mathbf{a}(M)$  de (4.14) sont définies à un champ vectoriel uniforme  $\mathbf{a}_0$  près,
- les solutions  $\mathbf{v}(M)$  de (4.15) sont définies à un champ vectoriel uniforme  $\mathbf{v}_0$  près.

## 4.5 Représentation de Mohr pour les tenseurs symétriques

Soit  $\mathbf{S}$  un tenseur du second ordre symétrique. Il a donc trois valeurs propres réelles  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  et il existe une base propre orthonormée  $\{\mathbf{u}_i\}$ . On peut donc écrire :

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

On considère ce tenseur comme un endomorphisme linéaire de  $\mathbb{V}_3$  :  $\mathbf{w} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v}$  et on observe géométriquement comment le tenseur  $\mathbf{S}$  transforme le vecteur  $\mathbf{v}$ . On constate :

1. une dilatation  $d = \frac{\|\mathbf{w}\|}{\|\mathbf{v}\|}$  (la transformation change la norme)
2. une déviation  $\alpha = (\mathbf{v}, \mathbf{w})$  (la transformation change la direction)

La transformation étant linéaire, on a  $\mathbf{S} \cdot (k\mathbf{v}) = k\mathbf{w}$ . On constate que la dilatation  $d$  et la déviation  $\alpha$  sont indépendantes de  $k$ . Il suffit donc de n'envisager que les transformations de vecteurs  $\mathbf{v}$  unitaires.

La dilatation du vecteur unitaire  $\mathbf{v}$  est donc :  $d = \|\mathbf{w}\|$ .

Pour appréhender les évolutions de la dilatation et de la déviation quand le vecteur unitaire  $\mathbf{v}$  varie, on choisit la méthode suivante :

1. on appelle *partie normale de  $\mathbf{w}$*  le vecteur :  $\mathbf{w}_n = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) \mathbf{v}$
2. on appelle *partie tangentielle de  $\mathbf{w}$*  le reste :  $\mathbf{w}_t = \mathbf{w} - \mathbf{w}_n$

JUSTIFICATION DU VOCABULAIRE : Le vecteur unitaire  $\mathbf{v}$  définit un plan dont il est la normale unitaire. La partie normale de  $\mathbf{w}$  est sa partie hors plan, la partie tangentielle de  $\mathbf{w}$  est donc sa projection dans le plan.

La connaissance des scalaires  $w_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  et  $w_t = \|\mathbf{w} - \mathbf{w}_n\|$  suffit pour reconstituer la dilatation  $d$  et la déviation  $\alpha$ . En effet :

$$d = \sqrt{w_n^2 + w_t^2} \quad \text{et} \quad \tan \alpha = \frac{w_t}{w_n} \quad (4.16)$$

Afin de comprendre géométriquement comment évoluent la dilatation et la déviation quand le vecteur unitaire  $\mathbf{v}$  varie, on va tracer les vecteurs  $\mathbf{w}$  dans un plan  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t)$ , avec en abscisse les  $w_n$  et en ordonnées les  $w_t$ . D'après (4.16), un vecteur  $OM = w_n \mathbf{e}_n + w_t \mathbf{e}_t$  a pour module la dilatation  $d$  et pour angle polaire la déviation  $\alpha$ .

Si on note  $v_i$  les composantes du vecteur  $\mathbf{v}$  dans la base propre orthonormée  $\{\mathbf{u}_i\}$  de  $\mathbf{S}$ , il vient :

$$1 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \quad (4.17)$$

$$w_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2 \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_t + \mathbf{w}_n &= \mathbf{w} = \lambda_1 v_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 v_2 \mathbf{e}_2 + \lambda_3 v_3 \mathbf{e}_3 \\ w_n^2 + w_t^2 &= \lambda_1^2 v_1^2 + \lambda_2^2 v_2^2 + \lambda_3^2 v_3^2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Si on se donne un point  $(w_n, w_t)$  du plan  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t)$ , les vecteurs  $\mathbf{v}$  de composantes  $(v_1, v_2, v_3)$  qui correspondent à ce point sont solution du système d'équations (4.17), (4.18), (4.19).



La solution est :

$$v_1^2 = \frac{w_t^2 + (w_n - \lambda_2)(w_n - \lambda_3)}{\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}_{\geq 0}} \quad v_2^2 = \frac{w_t^2 + (w_n - \lambda_3)(w_n - \lambda_1)}{\underbrace{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\leq 0}} \quad v_3^2 = \frac{w_t^2 + (w_n - \lambda_1)(w_n - \lambda_2)}{\underbrace{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}_{\geq 0}}$$

Puisque les termes de gauche sont nécessairement non négatifs, des solutions n'existent que si :

$$w_t^2 + (w_n - \lambda_2)(w_n - \lambda_3) \geq 0 \quad w_t^2 + (w_n - \lambda_3)(w_n - \lambda_1) \leq 0 \quad w_t^2 + (w_n - \lambda_1)(w_n - \lambda_2) \geq 0$$

REMARQUE : Si deux valeurs propres sont égales, certaines composantes de  $\mathbf{v}$  sont indéterminées.

On voit donc que tous les points du plan  $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_t)$  ne peuvent pas correspondre à un vecteur  $\mathbf{v}$ . Autrement dit, pour un tenseur  $\mathcal{S}$  symétrique donné, les coordonnées  $w_n$  et  $w_t$  (ou bien la dilatation  $d$  et la déviation  $\alpha$ ) ne peuvent prendre des valeurs quelconques, il faut qu'elles satisfassent les inégalités-ci dessus.

Dans le cas où les valeurs propres sont distinctes, ces inégalités impliquent que les points les points  $(w_n, w_t)$  doivent se trouver dans la zone délimitée par les trois cercles de la figure ci-dessous :

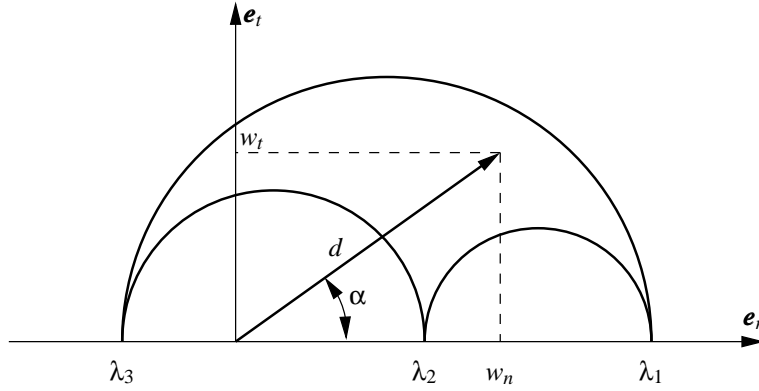


FIG. 4.1 – Tricercle de Mohr

On constate que  $\lambda_3 \leq w_n \leq \lambda_1$  et que  $w_t \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2}$ .

Si deux valeurs propres sont égales, le domaine se réduit à un demi cercle.

Si les trois valeurs propres sont égales (le tenseur  $\mathcal{S}$  est sphérique), le domaine se réduit au point  $(\lambda, 0)$ .

# Conclusion

L'algèbre et l'analyse tensorielle sont nécessaires pour la description et la manipulation des grandeurs physiques qui sont introduites en mécanique des milieux continus. Ce cours n'a présenté que les concepts qui sont strictement nécessaires à mécanique des milieux continus. Il ne peut en aucun cas être considéré comme un cours complet sur les tenseurs. En particulier, bon nombre de résultats (soigneusement signalés) ne sont valables que pour les tenseurs construits sur  $\mathbb{V}_3$ .

Ces développements permettent de simplifier la présentation de la mécanique des milieux continus. En effet, les équations de la mécanique peuvent s'écrire uniquement avec des opérations tensorielles algébriques et des opérateurs différentiels tensoriels (gradient, divergence, rotationnel et laplacien). Sous cette forme condensée, on peut alors se concentrer sur l'essentiel : les concepts de la mécanique, sans s'encombrer des choix (accessoires car non physiques) d'un quelconque système de coordonnées ou d'une quelconque base pour donner des composantes aux tenseurs. Les équations tensorielles sont par essence valables quels que soient ces choix.

Il n'en reste pas moins que pour résoudre effectivement un problème particulier, il faut choisir un système de coordonnées commode pour repérer les points du domaine étudié, et il faut choisir une base pour exprimer les composantes des tenseurs. Les équations tensorielles (algébriques ou différentielles) se traduisent alors par des équations ordinaires (algébriques ou différentielles) portant sur des composantes et qu'il faut résoudre soit analytiquement (quand on peut) par les méthodes mathématiques standard (ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel), soit numériquement par des méthodes numériques approchées (généralement à l'aide d'un ordinateur).

C'est pour expliquer clairement le passage des équations tensorielles aux équations ordinaires que les chapitres précédents ont été soigneusement détaillés.



## Annexe A

# Invariants et valeurs propres d'un tenseur symétrique réel

Tout tenseur réel symétrique du second ordre  $\mathcal{S}$  construit sur  $\mathbb{V}_3$  a trois valeurs propres réelles  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  et un système de trois invariants réels  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\}$  qui sont les coefficients du polynôme caractéristique. L'expression de  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\}$  en fonction des valeurs propres est triviale :

$$S_I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad S_{II} = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1 \quad S_{III} = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$$

En revanche, le problème inverse l'est moins. Au passage, on va notamment montrer que le triplet d'invariants  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\}$  ne peut prendre des valeurs quelconques : ces trois invariants sont soumis à des conditions d'inégalités pour qu'ils puissent être les invariants d'un tenseur réel symétrique.

Les trois invariants  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\}$  étant considérés comme connus, les trois valeurs propres sont, par définition, les solutions du polynôme caractéristique de la matrice  $[S^\bullet_\bullet]$  des composantes mixtes<sup>1</sup> de  $\mathcal{S}$  :

$$\lambda^3 - S_I \lambda^2 + S_{II} \lambda - S_{III} = 0 \quad (\text{A.1})$$

### A.1 Condition d'existence de valeurs propres réelles

On va montrer ici que les invariants  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\}$  d'un tenseur symétrique réel ne peuvent prendre des valeurs quelconques : il doivent nécessairement satisfaire certaines inégalités.

Au lieu de chercher les solutions  $\lambda$  de (A.1), on effectue le changement d'inconnues :  $\lambda = x + \frac{S_I}{3}$  (ce qui revient à chercher les valeurs propres  $x$  du déviateur de  $\mathcal{S}$ ). L'équation (A.1) devient :

$$x^3 + \underbrace{\left(S_{II} - \frac{S_I^2}{3}\right)}_p x + \underbrace{\frac{S_I S_{II}}{3} - \frac{2S_I^3}{27} - S_{III}}_q = 0 \quad (\text{A.2})$$

dont on sait qu'elle n'a 3 racines réelles que si :

$$R = 4p^3 + 27q^2 = 27S_{III}^2 + (4S_I^3 - 18S_I S_{II}) S_{III} + 4S_{II}^3 - S_I^2 S_{II}^2 < 0$$

1. On peut aussi bien prendre les composantes mixtes  $[S^\bullet_\bullet]$ . On obtient les mêmes valeurs propres, mais les vecteurs propres sont obtenus par leurs composantes covariantes. Ici, on ne s'intéresse qu'aux valeurs propres.

Ce polynôme de degré 2 en  $S_{III}$ , de coefficient en  $S_{III}^2$  positif, ne peut être négatif qu'entre des racines réelles éventuelles. Pour qu'il ait des racines réelles en  $S_{III}$ , il faut que son discriminant soit positif :

$$\Delta = 16 (S_I^2 - 3S_{II})^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_I^2 - 3S_{II} > 0 \quad (\text{A.3})$$

Les racines en  $S_{III}$  sont alors :

$$\frac{S_I S_{II}}{3} - \frac{2S_I^3}{27} \pm \frac{2}{27} (S_I^2 - 3S_{II})^{\frac{3}{2}}$$

Dans ces conditions,  $R < 0$  si  $S_{III}$  est compris entre les racines :

$$\begin{aligned} \frac{S_I S_{II}}{3} - \frac{2S_I^3}{27} - \frac{2}{27} (S_I^2 - 3S_{II})^{\frac{3}{2}} < S_{III} < \frac{S_I S_{II}}{3} - \frac{2S_I^3}{27} + \frac{2}{27} (S_I^2 - 3S_{II})^{\frac{3}{2}} \\ -\frac{2}{27} (S_I^2 - 3S_{II})^{\frac{3}{2}} < S_{III} - \frac{S_I S_{II}}{3} + \frac{2S_I^3}{27} < +\frac{2}{27} (S_I^2 - 3S_{II})^{\frac{3}{2}} \\ -1 < \frac{27S_{III} - 9S_I S_{II} + 2S_I^3}{2(S_I^2 - 3S_{II})^{\frac{3}{2}}} < 1 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Les invariants fondamentaux d'un tenseur symétrique réel vérifient nécessairement les inégalités (A.3) et (A.4).

## A.2 Définition de nouveaux invariants

On peut donc définir deux nouveaux invariants  $J$  et  $\phi$  pour les tenseurs réels symétriques :

$$J = \sqrt{S_I^2 - 3S_{II}} > 0$$

$$\phi = \text{Arccos} \frac{27S_{III} - 9S_I S_{II} + 2S_I^3}{2(S_I^2 - 3S_{II})^{\frac{3}{2}}} = \text{Arccos} \frac{27S_{III} - 9S_I S_{II} + 2S_I^3}{2J^3}$$

$$\text{où } \phi \in [0, \pi] \text{ et } \cos \phi \in [-1, 1]$$

On peut interpréter ces nouveaux invariants en remarquant que :

$$J = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \|\text{dev } \mathbf{S}\| = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{dev } \mathbf{S} : \text{dev } \mathbf{S}$$

$$\text{et } 27S_{III} - 9S_I S_{II} + 2S_I^3 = 27 \det \text{dev } \mathbf{S} \Rightarrow \cos \phi = 3\sqrt{6} \det \left( \frac{\text{dev } \mathbf{S}}{\|\text{dev } \mathbf{S}\|} \right)$$

À des constantes près, l'invariant  $J$  reflète la norme du déviateur de  $\mathbf{S}$  et l'invariant  $\cos \phi$  reflète le déterminant du déviateur normé.

REMARQUE : En mécanique des milieux continus, si  $\mathbf{S}$  est un tenseur des contraintes, l'invariant  $J$  est appelé : contrainte équivalente de Von Mises.

D'autre part, on constate que le déterminant du déviateur normé d'un tenseur du second ordre symétrique réel est toujours compris entre  $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$  et  $\frac{1}{3\sqrt{6}} \simeq 0.136$ . Il est nul pour  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . On verra plus loin que ceci se produit quand la valeur propre intermédiaire  $\lambda_2$  vaut le tiers de la trace.

Les relations inverses sont :

$$S_{II} = \frac{S_I^2 - J^2}{3} \quad S_{III} = \frac{2J^3 \cos \phi - 3J^2 S_I + S_I^3}{27}$$

Les triplets d'invariants  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\}$  et  $\{S_I, J, \cos \phi \text{ ou } \phi\}$  sont donc équivalents en ce sens que si on connaît l'un des triplets on peut calculer l'autre et inversement. Néanmoins, contrairement au triplet  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\}$ , le nouveau triplet  $\{S_I, J, \cos \phi \text{ ou } \phi\}$  présente un avantage : chacun des trois réels peut prendre une valeur arbitraire dans son domaine de définition indépendamment des autres :  $S_I \in \mathbb{R}$ ,  $J \geq 0$  et  $\phi \in [0, \pi]$ .

### A.3 Expression des valeurs propres en fonction des invariants

Après substitution, l'équation (A.2) page 71 devient :  $x^3 - \frac{J^2}{3}x - \frac{2J^3 \cos \phi}{27} = 0$

En remarquant que  $\cos \phi = 4 \cos^3 \frac{\phi}{3} - 3 \cos \frac{\phi}{3}$ , cette équation se factorise :

$$\left(3x - 2J \cos \frac{\phi}{3}\right) \left(9x^2 + 6Jx \cos \frac{\phi}{3} - 3J^2 + 4J^2 \cos^2 \frac{\phi}{3}\right) = 0$$

Une première solution est donnée par le facteur de gauche :  $x_1 = \frac{2J}{3} \cos \frac{\phi}{3}$

Le discriminant du second facteur est :  $108J^2 \left(1 - \cos^2 \frac{\phi}{3}\right) = \left(6\sqrt{3}J \sin \frac{\phi}{3}\right)^2 > 0$

Il a donc deux solutions réelles qui sont :

$$x_2 = \frac{J}{3} \left(-\cos \frac{\phi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\phi}{3}\right) \quad x_3 = \frac{J}{3} \left(-\cos \frac{\phi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\phi}{3}\right)$$

Les valeurs propres de  $\mathbf{S}$  sont donc :

$$\lambda_1 = \frac{2J}{3} \cos \frac{\phi}{3} + \frac{S_I}{3} \tag{A.5}$$

$$\lambda_2 = \frac{J}{3} \left(-\cos \frac{\phi}{3} + \sqrt{3} \sin \frac{\phi}{3}\right) + \frac{S_I}{3} = \frac{2J}{3} \cos \left(\frac{\phi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{S_I}{3} \tag{A.6}$$

$$\lambda_3 = \frac{J}{3} \left(-\cos \frac{\phi}{3} - \sqrt{3} \sin \frac{\phi}{3}\right) + \frac{S_I}{3} = \frac{2J}{3} \cos \left(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{S_I}{3} \tag{A.7}$$

où :

$$J = \sqrt{S_I^2 - 3S_{II}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \|\mathbf{dev} \mathbf{S}\| = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{dev} \mathbf{S} : \mathbf{dev} \mathbf{S}} \geq 0$$

$$\phi = \text{Arccos} \frac{27S_{III} - 9S_I S_{II} + 2S_I^3}{2(S_I^2 - 3S_{II})^{\frac{3}{2}}} = \text{Arccos} \left[ 3\sqrt{6} \det \left( \frac{\mathbf{dev} \mathbf{S}}{\|\mathbf{dev} \mathbf{S}\|} \right) \right] ; \phi \in [0, \pi]$$

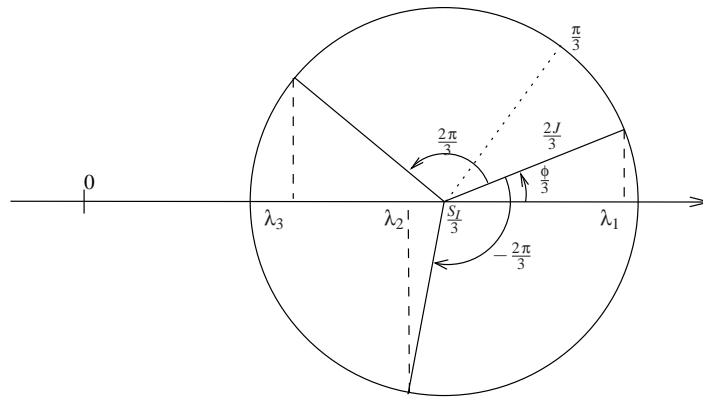


FIG. A.1 – Représentation géométrique des valeurs propres d'un tenseur réel symétrique ( $\phi \in [0, \pi]$ )

## A.4 Classement des valeurs propres

$\phi \in [0, \pi]$ , on a donc  $\frac{1}{2} \leq \cos \frac{\phi}{3} \leq 1$  et  $0 \leq \sin \frac{\phi}{3} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ce qui permet de classer les valeurs propres :

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \underbrace{J \cos \frac{\phi}{3}}_{\geq \frac{1}{2}J} - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3} J \sin \frac{\phi}{3}}_{\leq \frac{1}{2}J} \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} J \sin \frac{\phi}{3} \geq 0$$

On a donc  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$ .

En analysant les valeurs des invariants  $J$  et  $\phi$ , on peut statuer sur la multiplicité des valeurs propres :

- si  $J = 0$ , c'est-à-dire  $S_I^2 - 3S_{II} = 0$ , la norme du déviateur de  $\mathbf{S}$  est nulle, le tenseur  $\mathbf{S}$  est donc sphérique, les trois valeurs propres sont égales à  $\frac{S_I}{3}$  et  $\phi$  est indéterminé ;
- si  $J \neq 0$  et  $\phi = 0$ , alors  $\lambda_2 = \lambda_3$  ;
- si  $J \neq 0$  et  $\phi = \pi$ , alors  $\lambda_1 = \lambda_2$  ;
- si  $J \neq 0$ ,  $\phi \neq 0$  et  $\phi \neq \pi$ , alors les valeurs propres sont distinctes.

REMARQUE : Si  $J \neq 0$  et  $\phi = \frac{\pi}{2}$ , alors  $\lambda_2 = \frac{S_I}{3}$  et  $\frac{\lambda_1 + \lambda_3}{2} = \frac{S_I}{3}$ .

## A.5 Écart des valeurs propres extrêmes

En utilisant (A.5) et (A.7) page 73, il vient :

$$\lambda_1 - \lambda_3 = \frac{2J}{3} \left( \cos \frac{\phi}{3} - \cos \left( \frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \frac{2J}{3} \sqrt{3} \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\phi}{3} \right)$$

où  $\cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\phi}{3} \right)$  varie entre  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  et 1, lorsque  $\phi$  varie entre 0 et  $\pi$ , soit une variation de 13.4%. on a donc :

$$J \leq \lambda_1 - \lambda_3 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} J \simeq 1.155 J$$

On peut donc faire une estimation de  $\lambda_1 - \lambda_3$  à 6.7% près en prenant comme estimation la valeur médiane :

$$\lambda_1 - \lambda_3 \simeq \frac{J}{3} \sqrt{3} \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \simeq 1.077 J$$

REMARQUE : Si  $\mathbf{S}$  est un déviateur ( $S_I = 0$ ), de valeurs propres  $\{\lambda'_1 \geq \lambda'_2 \geq \lambda'_3\}$ , on peut donner le rapport entre les valeurs propres extrêmes (conditionnement de la matrice des composantes de  $\mathbf{dev} \mathbf{S}$ ) :

$$\frac{\lambda'_3}{\lambda'_1} = \frac{\cos(\frac{\phi}{3} + \frac{\pi}{3})}{\cos \frac{\phi}{3}} = -\frac{1}{2} (1 + \sqrt{3} \tan \frac{\phi}{3}) \quad \Rightarrow \quad -2 \leq \frac{\lambda'_3}{\lambda'_1} \leq -\frac{1}{2}$$

## A.6 Systèmes d'invariants d'un tenseur d'ordre 2 réel symétrique

Pour un tenseur réel symétrique  $\mathbf{S}$ , il y a donc complète équivalence entre la connaissance des trois invariants fondamentaux (coefficients du polynôme caractéristique)  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\}$ , la connaissance des trois invariants  $\left\{ S_I, J \text{ ou } \|\mathbf{dev} \mathbf{S}\|, \phi \text{ ou } \det \left( \frac{\mathbf{dev} \mathbf{S}}{\|\mathbf{dev} \mathbf{S}\|} \right) \right\}$  et la connaissance de ses 3 valeurs propres classées  $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3\}$ , car connaissant un triplet, on peut calculer les autres.

Il est à noter que certains auteurs utilisent aussi le triplet d'invariants  $\{S_1, S_2, S_3\}$  défini par :

$$S_1 = S_I = \text{Tr} \mathbf{S} \quad ; \quad S_2 = \text{Tr}(\mathbf{S}^2) = S_I^2 - 2S_{II} \quad ; \quad S_3 = \text{Tr}(\mathbf{S}^3) = 3S_{III} - 3S_I S_{II} + S_I^3$$

On montre facilement que les formules inverses sont :

$$S_1 = S_I \quad ; \quad S_{II} = \frac{1}{2} (S_1^2 - S_2) \quad ; \quad S_{III} = \frac{1}{3} (S_3 - \frac{3}{2} S_1 S_2 + \frac{1}{2} S_1^3)$$

Le triplet  $\{S_1, S_2, S_3\}$  est donc aussi un triplet équivalent.

Il est même possible d'en définir une infinité d'autres car toute fonction scalaire d'invariants est un invariant. Plus précisément, soient  $\{f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}\}$  trois fonctions des invariants fondamentaux  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\}$  et à valeur scalaire ; elles définissent un triplet d'invariants valide

$$\{S^{(1)} = f^{(1)}(S_I, S_{II}, S_{III}), S^{(2)} = f^{(2)}(S_I, S_{II}, S_{III}), S^{(3)} = f^{(3)}(S_I, S_{II}, S_{III})\}$$

si la transformation  $\{S_I, S_{II}, S_{III}\} \leftrightarrow \{S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}\}$  est inversible, c'est-à-dire si la matrice jacobienne de la transformation est régulière :  $\det(f^{(i)}, j) \neq 0$ .

REMARQUE : Le choix d'un triplet d'invariants  $\{S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}\}$  comme arguments d'une fonction réelle isotrope devrait être donc guidé par l'interprétation physique des termes du triplet choisi. Cette fonction peut toujours être ramenée à une fonction des trois invariants fondamentaux. Par exemple :

$$\begin{aligned} \psi &= f_\psi(S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}) \\ &= f_\psi(f^{(1)}(S_I, S_{II}, S_{III}), f^{(2)}(S_I, S_{II}, S_{III}), f^{(3)}(S_I, S_{II}, S_{III})) \\ &= g_\psi(S_I, S_{II}, S_{III}) \end{aligned}$$

pourvu que la matrice  $3 \times 3$  de terme général  $f^{(i)}, j$  soit de déterminant non nul.

## A.7 Détermination tensorielle des directions propres

Pour tout tenseur réel symétrique du second ordre  $\mathbf{S}$  construit sur  $\mathbb{V}_3$ , on peut toujours trouver au moins une base orthonormée  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  de  $\mathbb{V}_3$  telle que le tenseur  $\mathbf{S}$  s'écrit :

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \underbrace{\mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i}_{\mathbf{U}_i}$$

où  $\mathbf{U}_i = \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$  est un tenseur uniaxial représentant une direction propre non orientée associée à la valeur propre  $\lambda_i$ .

DÉFINITION : Si  $\{\mathbf{u}_i\}$  est un triplet de vecteurs propres orthonormés de  $\mathbf{S}$ , on appelle tenseurs uniaxiaux propres les tenseurs  $\mathbf{U}_i = \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$ .

On vérifie aisément que  $\mathbf{S} \cdot \mathbf{U}_i = \lambda_i \mathbf{U}_i$ .

Les vecteurs  $\{\mathbf{u}_i\}$  formant une base orthonormée, on vérifie aisément les propriétés des tenseurs uniaxiaux  $\mathbf{U}_i$  suivantes :

$$(\mathbf{U}_i)_I = 1 \quad (\mathbf{U}_i)_{II} = 0 \quad (\mathbf{U}_i)_{III} = 0 \quad (\mathbf{U}_i)^n = \mathbf{U}_i \quad \|\mathbf{U}_i\| = 1 \quad \mathbf{U}_i : \mathbf{U}_j = 0 \quad (i \neq j) \quad (\text{A.8})$$

Les deux dernières propriétés expriment que puisque le triplet de vecteurs propres  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$  forme une base vectorielle orthonormée, alors le triplet de tenseurs uniaxiaux  $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$  est aussi orthonormé.

Les valeurs propres classées des tenseurs symétriques  $\mathbf{U}_i$  sont  $\{1, 0, 0\}$  et la direction propre associée à la valeur propre 1 est la  $i^{\text{ème}}$  direction propre de  $\mathbf{S}$ .

Connaissant  $\mathbf{S}$  (par ses composantes dans une base quelconque), on peut calculer les invariants  $S_I, J$  et  $\phi$  et le triplet des valeurs propres classées  $\{\lambda_i\}$  par les formules (A.5), (A.6), (A.7) page 73.



En se plaçant dans la base propre, on vérifie aisément que les directions propres  $\mathbf{U}_i$  sont les solutions des trois équations tensorielles suivantes :

$$\mathbf{S}^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{S} + \lambda_2\lambda_3\mathbf{G} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\mathbf{U}_1 \quad (\text{A.9})$$

$$\mathbf{S}^2 - (\lambda_3 + \lambda_1)\mathbf{S} + \lambda_3\lambda_1\mathbf{G} = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{U}_2 \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{S}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{S} + \lambda_1\lambda_2\mathbf{G} = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\mathbf{U}_3 \quad (\text{A.11})$$

Si les valeurs propres  $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3\}$  sont distinctes ( $J \neq 0$  et  $\phi \neq 0$  et  $\phi \neq \pi$ ) la solution  $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$  est unique. En revanche,

- si  $J = 0$ , le tenseur  $\mathbf{S}$  est sphérique ( $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ), les trois équations ci-dessus sont identiquement vérifiées  $\forall \mathbf{U}_i$  et tout triplet orthonormé  $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$  est solution ;
- si  $J \neq 0$  et  $\phi = 0$ , alors  $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$  ; l'équation en  $\mathbf{U}_1$  a une solution unique et les deux autres sont identiquement vérifiées  $\forall \mathbf{U}_2 \forall \mathbf{U}_3$  ; le tenseur  $\mathbf{U}_1$  peut être complété par tout couple de tenseurs uniaxiaux  $\{\mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$  tel que le triplet  $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$  soit orthonormé ;
- si  $J \neq 0$  et  $\phi = \pi$ , alors  $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$  ; l'équation en  $\mathbf{U}_3$  a une solution unique et les deux autres sont identiquement vérifiées  $\forall \mathbf{U}_1 \forall \mathbf{U}_2$  ; le tenseur  $\mathbf{U}_3$  peut être complété par tout couple de tenseurs uniaxiaux  $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2\}$  tel que le triplet  $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$  soit orthonormé.

## A.8 En bref...

Pour les tenseurs symétriques réels :

- On sait calculer les valeurs propres classées en fonction des invariants fondamentaux avec les formules (A.5) et suivantes page 73.
- Les valeurs propres étant connues on sait trouver les tenseur uniaxiaux propres avec des formules tensorielles, donc valables dans tout base (voir (A.9) et suivantes page 76).
- On peut construire une infinité de triplets d'invariants équivalents (voir A.6 page 74).

## Annexe B

# Fonctions isotropes

L'objectif de cette annexe est de proposer des listes d'invariants scalaires nécessaires et suffisants pour représenter la liste des arguments tensoriels de fonctions réelles isotropes utiles en mécanique des milieux continus.

De nombreux auteurs (BOEHLER, SPENCER et WANG et autres) ont publié des listes d'invariants pour les fonctions isotropes de leurs arguments tensoriels<sup>1</sup>. La plupart se sont focalisés sur la recherche d'invariants qu'ils appellent « algébriques », c'est-à-dire dont l'expression en fonction des composantes sur une base<sup>2</sup> est un polynôme de composantes<sup>3</sup>. Les démonstrations publiées qui aboutissent à ces listes sont la plupart du temps très laborieuses et compliquées à lire.

On se propose ici de trouver des listes d'invariants pour les fonctions isotropes de leurs arguments tensoriels dans les cas utiles en mécanique des milieux continus, sans se préoccuper si ces invariants sont des polynômes de composantes ou non. On montrera par ailleurs que ces listes ne sont pas uniques. Enfin, les démonstrations étant rédigées avec des raisonnements géométriques, elles fournissent une interprétation géométrique des invariants de ces listes. On pourra noter au passage que ces démonstrations ne requièrent aucune propriété de continuité ou de dérivabilité de la fonction isotrope, on ne lui demande que la qualité d'être une fonction, c'est-à-dire une application  $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$  où  $\mathbb{E}$  et  $\mathbb{F}$  sont des produits cartésiens d'espaces de tenseurs. Pour les fonctions réelles isotropes, on aura  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ .

### B.1 Rotation d'un tenseur

Soit  $\mathcal{Q}$  un tenseur orthogonal de déterminant  $+1$  (une rotation). On sait l'identifier indifféremment (et de manière biunivoque) soit par ses composantes dans une base, soit par un vecteur rotation  $\omega = \theta \tilde{\omega}$ , où  $\tilde{\omega}$  est un vecteur unitaire et où  $\theta$  est l'angle de rotation  $\theta \in [0, \pi]$  (voir (1.77), (1.78) et (1.79) page 28).

Dans la suite, on notera  $\mathcal{Q}_+$  l'ensemble des rotations.

La rotation par  $\mathcal{Q}$  d'un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre  $p$  est un tenseur d'ordre  $p$  noté  $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{T})$ . Son calcul dépend de l'ordre de tensorialité  $p$  :

- pour  $p = 0$  (le tenseur est un scalaire  $x$ ) :  $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}(x) = x$ .

---

1. Un désaccord est apparu dans le cas de deux arguments tensoriels du second ordre symétriques : BOEHLER donne une liste minimale de 4 invariants, d'autres auteurs soutenant que trois suffisent. Cette question est abordée en B.2.3 page 83.

2. le plus souvent orthonormée!

3. La stricte définition des nombres algébriques est qu'ils sont des racines de polynômes. En ce sens, les valeurs propres sont donc des nombres algébriques, puisqu'elles sont les racines du polynôme caractéristique. Elles ne s'expriment pas toujours comme des polynômes des composantes dans une base quelconque (voir (A.5) et suivantes page 73)), mais il existe des bases dans lesquelles elles sont des expressions simples des composantes : ce sont les bases propres orthonormées.

- pour  $p = 1$  (le tenseur est un vecteur  $\mathbf{v}$ ) :  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{v}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}$ . Il s'agit de la rotation classique du vecteur  $\mathbf{v}$  autour de l'axe orienté  $\tilde{\omega}$  et d'angle  $\theta \in [0, \pi]$ .
- pour  $p = 2$  (le tenseur  $\mathbf{T}$  est d'ordre 2) :  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}) = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T$ . On vérifie aisément que les tenseurs  $\mathbf{T}$  et  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T})$  ont les mêmes valeurs propres et que les vecteurs propres de  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T})$  sont les transformés par  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$  des vecteurs propres de  $\mathbf{T}$  (voir 1.6.10 page 26).

Pour généraliser aux ordres supérieurs à 2, on définit un nouveau produit tensoriel, noté  $\boxtimes$  et parfois appelé *produit tensoriel de Kronecker*. Ce produit n'opère que sur des tenseurs d'ordre 2 :

DÉFINITION : Soient  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{U}$  deux tenseurs d'ordre 2, le tenseur  $\mathbf{T} \boxtimes \mathbf{U}$  est un tenseur d'ordre 4 défini par :

$$\mathbf{T} \boxtimes \mathbf{U} = T^i_m U^j_n (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{T} \boxtimes \mathbf{U})^{ij}_{mn} = T^i_m U^j_n$$

En fait, ce produit tensoriel est une certaine transposition du produit  $\mathbf{T} \otimes \mathbf{U}$  :  $(\mathbf{T} \boxtimes \mathbf{U})^{ij}_{mn} = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{U})^i_m{}^j_n$ .

On généralise sans difficulté. Par exemple, le produit de trois tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 6 :

$$\mathbf{T} \boxtimes \mathbf{U} \boxtimes \mathbf{S} = T^i_m U^j_n S^k_p (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}^m \otimes \mathbf{e}^n \otimes \mathbf{e}^p) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{T} \boxtimes \mathbf{U} \boxtimes \mathbf{S})^{ijk}_{mnp} = T^i_m U^j_n S^k_p$$

Grâce à ce produit, on peut récrire la rotation d'un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 2 sous la forme suivante :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}) = (\mathbf{Q} \boxtimes \mathbf{Q}) : \mathbf{T} = Q^i_m Q^j_n T^{mn} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$$

De même, la rotation par  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$  d'un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre 3 s'écrit :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}) = (\mathbf{Q} \boxtimes \mathbf{Q} \boxtimes \mathbf{Q}) \overline{\otimes}^3 \mathbf{T} = Q^i_m Q^j_n Q^k_p T^{mnp} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)$$

et d'une manière générale, la rotation d'un tenseur  $\mathbf{T}$  d'ordre  $p$  s'écrit :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}) = \underbrace{(\mathbf{Q} \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{Q})}_{p \text{ fois}} \overline{\otimes}^p \mathbf{T} = \underbrace{Q^{i_1}_{j_1} \dots Q^{i_p}_{j_p}}_{p \text{ termes}} T^{j_1 \dots j_p} (\mathbf{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{e}_{i_p}) \quad (\text{B.1})$$

où  $\overline{\otimes}^p$  est le produit contracté  $p$  fois.

REMARQUE : En mécanique des milieux continus, les tenseurs qui ont à subir des rotations seront d'ordre 1, 2 ou 4.

## B.2 Représentation des éléments d'un ensemble

DÉFINITION : On dit que les éléments d'un ensemble  $\mathbb{E}$  sont représentés par les éléments d'un ensemble  $\mathbb{E}'$  s'il existe une surjection<sup>4</sup>  $s : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ .

Soit  $s$  une telle surjection, et soient  $e \in \mathbb{E}$  et  $e' \in \mathbb{E}'$ .

L'élément  $e'$  est appelé représentant de  $e$  si  $e = s(e')$ .

La surjection  $s$  est appelée représentation de  $\mathbb{E}$ .

Si une représentation  $s$  existe, tous les éléments de  $\mathbb{E}$  ont donc au moins un représentant (il peut y en avoir plusieurs). D'autre part, il peut exister plusieurs représentations de  $\mathbb{E}$ , c'est-à-dire qu'on peut trouver plusieurs couples  $(\mathbb{E}'', s'')$  où  $s''$  est une surjection  $\mathbb{E}'' \rightarrow \mathbb{E}$ .

Soit une fonction  $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}$ . S'il existe une représentation  $s : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{E}$ , alors il existe une fonction  $g = s \circ f : \mathbb{E}' \rightarrow \mathbb{F}$  telle que  $g(e') = f(e)$  où  $e' \in \mathbb{E}'$  et  $e \in \mathbb{E}$ .

Dans la suite, on cherchera des représentations de  $\mathbb{E}$  telles que l'ensemble  $\mathbb{E}'$  des représentants soit de la forme  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{Q}_+$  où les éléments de  $\mathbb{R}^m$  sont des scalaires invariants dans toute rotation des éléments de  $\mathbb{E}$ . L'intérêt d'une telle représentation des éléments de  $\mathbb{E}$  apparaîtra lorsque la fonction  $f$  est une fonction isotrope de ses arguments (voir B.3 page 84).

4. Tous les éléments de  $\mathbb{E}$  ont au moins un antécédent dans  $\mathbb{E}'$ , autrement dit : l'image de  $\mathbb{E}'$  par la surjection  $s$  est exactement  $\mathbb{E}$ .

### B.2.1 Représentation de vecteurs

Un vecteur de  $\mathbb{V}_3$  peut être défini par sa norme ( $r = \|\mathbf{v}\| \geq 0$ ) et un vecteur unitaire  $\tilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ .  
On a donc :  $\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\tilde{\mathbf{v}}$  où  $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ .

On note  $\tilde{\mathbb{V}}$  l'ensemble des vecteurs unitaires et  $\mathbb{R}_+$  l'ensemble des réels non négatifs.

La surjection  $s : \mathbb{R}_+ \times \tilde{\mathbb{V}} \rightarrow \mathbb{V}$  telle que  $s(\|\mathbf{v}\|, \tilde{\mathbf{v}}) = \|\mathbf{v}\|\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$  est une représentation de l'ensemble  $\mathbb{V}$ .

On construit maintenant une représentation de  $\tilde{\mathbb{V}}$  de la manière suivante : on choisit un vecteur unitaire arbitraire  $\tilde{\mathbf{v}}_0$ . Il existe toujours une rotation  $\mathbf{R} \in \mathbb{Q}_+$  telle que  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0$ .

REMARQUE : Il existe une infinité de rotations  $\mathbf{R}$  qui font passer de  $\tilde{\mathbf{v}}_0$  à  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Toutes ces rotations ont leur axe dans le plan bissecteur de  $(\tilde{\mathbf{v}}_0, \tilde{\mathbf{v}})$ . Toutefois, si on se limitait aux rotations d'angle  $\pi$ , il n'en existe que deux pour passer de  $\tilde{\mathbf{v}}_0$  à  $\tilde{\mathbf{v}}$  : leur axe  $\tilde{\mathbf{w}}$  est sur la bissectrice unitaire :  $\tilde{\mathbf{w}} = \pm \frac{\tilde{\mathbf{v}}_0 + \tilde{\mathbf{v}}}{\|\tilde{\mathbf{v}}_0 + \tilde{\mathbf{v}}\|}$ . Quoiqu'il en soit, une unicité n'est pas nécessaire : l'ensemble des rotations  $\mathbf{R}$  engendre l'ensemble des vecteurs unitaires.

Une représentation de  $\tilde{\mathbb{V}}$  est donc la surjection  $s'$  telle que

$$\mathbf{R} \in \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbf{R} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0 = \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathbb{V}} \quad (\text{B.2})$$

Le vecteur unitaire  $\tilde{\mathbf{v}}_0$  étant choisi, on a ainsi construit une représentation de l'ensemble  $\mathbb{V}$  :

$$(\|\mathbf{v}\|, \mathbf{R}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbf{v} \in \mathbb{V} \quad (\text{B.3})$$

De plus, le réel  $\|\mathbf{v}\|$  est invariant par toute rotation  $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}$  du vecteur  $\mathbf{v}$  car  $\|\mathbf{v}\| = \|\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}(\mathbf{v})\| \forall \mathcal{Q} \in \mathbb{Q}_+$ .

#### Représentation d'un couple de vecteurs unitaires

Soit un couple de vecteurs unitaires  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}\}$ . On note  $\alpha = \text{Arccos}(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \in [0, \pi]$  l'angle (non orienté<sup>5</sup>)  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})$  (dans  $\mathbb{V}_3$ ,  $\alpha \in [0, \pi]$ , il est donc entièrement défini par son cosinus).

On construit une représentation du couple de vecteurs unitaires  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}\}$  de la manière suivante :

1. on choisit un vecteur unitaire  $\tilde{\mathbf{u}}_0$ ;
2. on choisit un vecteur unitaire  $\tilde{\mathbf{v}}_0$  qui fait un angle  $\alpha$  avec  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  (il en existe une infinité);
3. il existe une rotation  $\mathbf{R}$  (unique<sup>6</sup>) qui transforme le couple  $\{\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0\}$  en le couple  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}\}$ .

On a ainsi construit une surjection  $s$  telle que :

$$(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{R}) \in [0, 1] \times \mathbb{Q}_+ \rightarrow \{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}\} \in \tilde{\mathbb{V}} \times \tilde{\mathbb{V}} \quad (\text{B.4})$$

De plus, on vérifie aisément que le produit scalaire  $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$  (ou l'angle  $\alpha$ ) est invariant dans toute rotation  $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}$  du couple de vecteurs  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}\}$ , c'est-à-dire que  $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = \mathcal{R}_{\mathcal{Q}}(\tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathcal{R}_{\mathcal{Q}}(\tilde{\mathbf{v}}) \forall \mathcal{Q} \in \mathbb{Q}_+$  (voir (1.60) page 27).

#### Représentation d'un triplet de vecteurs unitaires

Soit un triplet de vecteurs unitaires  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}\}$ . On note :

- $\gamma = \text{Arccos}(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}) \in [0, \pi]$  l'angle (non orienté)  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}})$ ,
- $\beta = \text{Arccos}(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{w}}) \in [0, \pi]$  l'angle (non orienté)  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{w}})$ ,
- $\alpha = \text{Arccos}(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{w}}) \in [0, \pi]$  l'angle (non orienté)  $(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}})$ ,
- $\varepsilon = \text{sgn}[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}] = \pm 1$  le signe du produit mixte des trois vecteurs.

5. Il n'est pas possible de donner un signe à l'angle entre deux vecteurs de  $\mathbb{V}_3$ .

6. On peut démontrer algébriquement cette affirmation géométrique.

On construit une représentation du triplet de vecteurs unitaires  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}\}$  de la manière suivante :

1. on choisit un vecteur unitaire  $\tilde{\mathbf{u}}_0$ ,
2. on choisit un vecteur unitaire  $\tilde{\mathbf{v}}_0$  qui fait un angle  $\gamma$  avec  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  (il en existe une infinité),
3. on construit un vecteur unitaire  $\tilde{\mathbf{w}}_0$  qui fait un angle  $\beta$  avec  $\tilde{\mathbf{u}}_0$  et un angle  $\alpha$  avec  $\tilde{\mathbf{v}}_0$  (il en existe deux, symétriques par rapport au plan  $(\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0)$ ),
4. le signe  $\varepsilon$  du produit mixte permet de choisir  $\tilde{\mathbf{w}}_0$  unique,
5. il existe une rotation  $\mathbf{R}$  (unique<sup>7</sup>) qui transforme le triplet  $\{\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0, \tilde{\mathbf{w}}_0\}$  en le triplet  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}\}$  (la rotation  $\mathbf{R}$  conserve les angles entre les vecteurs, ainsi que leur produit mixte).

On a ainsi construit une surjection  $s$  telle que

$$(\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}, \varepsilon, \mathbf{R}) \in [0,1]^3 \times [\pm 1] \times \mathbb{Q}_+ \rightarrow \{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}\} \in \tilde{\mathbb{V}}^3 \quad (\text{B.5})$$

où les réels  $\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$  et  $\varepsilon$  sont invariants dans toute rotation  $\mathcal{R}_Q$  du triplet de vecteurs  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ .

### Représentation d'un $n$ -uplet de vecteurs unitaires

Comme on l'aura compris avec les exemples précédents, les invariants nécessaires et suffisants pour représenter un  $n$ -uplet de vecteurs unitaires sont les angles (ou leur cosinus) et les signes des produits mixtes permettant de reconstruire sans ambiguïté la position relative des arguments vectoriels.

Pour chaque vecteur unitaire  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  de numéro  $i > 3$ , il faut donc ajouter, par exemple, les cosinus des angles non orientés  $\cos \alpha_{1i} = \tilde{\mathbf{v}}_1 \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i$  et  $\cos \alpha_{2i} = \tilde{\mathbf{v}}_2 \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i$ , ainsi que le signe du produit mixte  $\varepsilon_{12i} = [\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_i]$ .

REMARQUE : On verra dans la section suivante que les signes des produits mixtes disparaissent de la liste des représentants si les vecteurs unitaires sont remplacés par des directions non orientées.

### Représentation d'un $n$ -uplet de vecteurs non unitaires

En conséquence de ce qui précède, un  $n$ -uplet de vecteurs est représentable par la liste des  $n$  réels non négatifs représentant les normes, complétée par la représentation des  $n$  vecteurs unitaires comme précisé dans les paragraphes précédents. En résumé :

- représentation d'un vecteur :  $\{\|\mathbf{v}\|, \mathbf{R}\}$ ;
- représentation de 2 vecteurs :  $\{r_1, r_2, \alpha_{12}, \mathbf{R}\}$ ;
- représentation de 3 vecteurs :  $\{r_1, r_2, r_3, \alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \varepsilon_{123}, \mathbf{R}\}$ ;
- représentation de 4 vecteurs :  $\{r_1, r_2, r_3, r_4, \alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \varepsilon_{123}, \alpha_{41}, \alpha_{42}, \varepsilon_{124}, \mathbf{R}\}$ ;
- représentation de 5 vecteurs :  $\{r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, \alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \varepsilon_{123}, \alpha_{41}, \alpha_{42}, \varepsilon_{124}, \alpha_{51}, \alpha_{52}, \varepsilon_{125}, \mathbf{R}\}$ ;
- etc.

où

- $r_i = \|\mathbf{v}_i\|$  ;
- les angles  $\alpha_{ij} \in [0, \pi]$  peuvent donc être représentés par leur cosinus :  $\cos \alpha_{ij} = \frac{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j}{\|\mathbf{v}_i\| \cdot \|\mathbf{v}_j\|}$  ;
- les  $\varepsilon_{ijk} = \pm 1$  sont les signes des produits mixtes  $[\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_k]$ .

REMARQUE : Les représentations proposées ne sont pas uniques; par exemple, l'orientation du vecteur  $\mathbf{v}_4$  peut être faite par rapport aux vecteurs précédents avec les angles  $\alpha_{42}$  et  $\alpha_{43}$  complétés du signe  $\varepsilon_{234}$ .

Comme précédemment, les réels  $r_i$ , les angles  $\alpha_{ij}$  (ou leur cosinus) ainsi que les signes  $\varepsilon_{ijk}$  sont invariants dans toute rotation  $\mathcal{R}_Q$  du  $n$ -uplet de vecteurs.

7. C'est la rotation unique qui fait passer, par exemple, du couple  $\{\tilde{\mathbf{u}}_0, \tilde{\mathbf{v}}_0\}$  au couple  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}\}$ .

### B.2.2 Représentation de directions non orientées

En mécanique des milieux continus, on a souvent besoin de considérer des directions non orientées, comme par exemple des directions d'anisotropie de la matière.

Une manière de définir algébriquement une direction non orientée de l'espace tridimensionnel est de donner un tenseur uniaxial normé défini de la manière suivante :

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{où } \tilde{\mathbf{u}} \text{ est un vecteur unitaire}$$

Le tenseur  $\mathbf{U}$  est réel, du second ordre, symétrique et ses valeurs propres classées sont  $\{1,0,0\}$ . La direction non orientée ainsi définie est la direction propre unique<sup>8</sup> associée à la valeur propre 1, c'est-à-dire  $\pm k\tilde{\mathbf{u}}$ .

On peut donc représenter toute direction non orientée de l'espace par un tenseur uniaxial unitaire.

On vérifie aisément les propriétés suivantes : si  $\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}$  et  $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}$ ,

$$\mathbf{U}^n = \mathbf{U} \quad \forall n \qquad \|\mathbf{U}\|^2 = \mathbf{U} : \mathbf{U} = 1 \qquad \mathbf{U} : \mathbf{V} = (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\mathbf{v}})^2 = \cos^2 \alpha \in [0,1]$$

L'angle entre deux directions non orientées de l'espace peut donc toujours être défini par un angle compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ .

REMARQUE : Le produit doublement contracté étant un produit scalaire pour les tenseurs du second ordre, on pourrait définir un « angle tensoriel »  $\Phi$  entre les tenseurs uniaxiaux  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ , par analogie avec les vecteurs, de la manière suivante :

$$\cos \Phi = \frac{\mathbf{U} : \mathbf{V}}{\|\mathbf{U}\| \|\mathbf{V}\|} = \cos^2 \alpha \in [0,1]$$

Les directions non orientées  $\mathbf{U}$  sont représentables par les vecteurs unitaires  $\tilde{\mathbf{u}}$  (par la surjection  $\tilde{\mathbf{u}} \rightarrow \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}$ ) qui sont eux-mêmes représentables par les rotations  $\mathbf{R} \in \mathbb{Q}_+$  (voir B.2 page 79).

On note  $\tilde{\mathbb{U}}$  l'ensemble des directions de l'espace (ou bien l'ensemble des tenseurs du second ordre uniaxiaux unitaires). Une représentation des directions non orientées est donc l'ensemble  $\mathbb{Q}_+$ :

$$\mathbf{R} \in \mathbb{Q}_+ \rightarrow \mathbf{U} \in \tilde{\mathbb{U}} \tag{B.6}$$

#### Représentation d'un couple de directions non orientées

Un couple de directions non orientées  $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$  est représenté par un couple de vecteurs unitaires par la surjection  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}\} \rightarrow \{\tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}\}$ ; d'autre part, on a vu en (B.4) page 79 que le couple de vecteurs unitaires  $\{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}\}$  est représenté par la surjection  $\{\alpha, \mathbf{R}\} \rightarrow \{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}\}$ . On construit ainsi une surjection  $\{\alpha, \mathbf{R}\} \rightarrow \{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ .

Une représentation d'un couple de directions non orientées est donc représenté par  $\{\alpha, \mathbf{R}\}$  avec  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  et  $\cos^2 \alpha = \mathbf{U} : \mathbf{V} \in [0,1]$ , soit encore :

$$(\mathbf{U} : \mathbf{V}, \mathbf{R}) \in [0,1] \times \mathbb{Q}_+ \rightarrow \{\mathbf{U}, \mathbf{V}\} \in \tilde{\mathbb{U}}^2 \tag{B.7}$$

On vérifie aisément que le réel  $\mathbf{U} : \mathbf{V}$  (ou bien  $\alpha$ ) est invariant par toute rotation  $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}$  du couple  $\{\mathbf{U}, \mathbf{V}\}$ .

#### Représentation d'un $n$ -uplet de directions non orientées

Un  $n$ -uplet de directions non orientées est représenté par un  $n$ -uplet de vecteurs unitaires par la surjection  $\{\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_n\} \rightarrow \{\tilde{\mathbf{u}}_1 \otimes \tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_n \otimes \tilde{\mathbf{u}}_n\}$ . Cependant, contrairement aux  $n$ -uplet de vecteurs unitaires, les produits mixtes peuvent prendre un signe quelconque<sup>9</sup>.

8. En effet, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 car l'ordre de multiplicité de cette valeur propre est 1, c'est donc une direction de l'espace.

9. On peut remplacer  $\mathbf{u}_i$  par  $-\mathbf{u}_i$  sans changer la direction  $\mathbf{U}_i$

Une représentation d'un  $n$ -uplet de directions non orientées est donc (par exemple) :

$$(\alpha_{12}, (\alpha_{31}, \alpha_{32}), (\alpha_{41}, \alpha_{42}), \dots, (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}), \mathbf{R}) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^{2(n-2)+1} \times \mathbb{Q}_+ \rightarrow \{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n\} \in \tilde{\mathbb{U}}^n \quad (\text{B.8})$$

où les réels  $\alpha_{ij}$  peuvent être remplacés par  $\cos^2 \alpha_{ij} = \mathbf{U}_i \cdot \mathbf{U}_j$  et sont invariants dans toute rotation  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$  du  $n$ -uplet  $\{\mathbf{U}_1, \dots, \mathbf{U}_n\}$ .

### B.2.3 Représentation des tenseurs réels du second ordre symétriques

Tout tenseur  $\mathbf{S}$  réel du second ordre symétrique construit sur  $\mathbb{V}_3$  peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \tilde{\mathbf{u}}_i \otimes \tilde{\mathbf{u}}_i = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{U}_i \quad (\text{B.9})$$

où :

- les réels  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$  sont les valeurs propres (leur classement induit leur numérotation);
- les vecteurs  $\{\tilde{\mathbf{u}}_i\}$  sont une base propre orthonormée que l'on peut toujours choisir directe;
- les tenseurs  $\mathbf{U}_i = \tilde{\mathbf{u}}_i \otimes \tilde{\mathbf{u}}_i$  sont des tenseurs uniaxiaux qui représentent la direction propre (non orientée) associée à la valeur propre  $\lambda_i$ . Le tenseur  $\mathbf{S}$  étant symétrique, les tenseurs uniaxiaux  $\mathbf{U}_i$  sont orthonormés (voir (A.8) page 75).

Une représentation des tenseurs réels symétriques du second ordre est donc  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3\}$ .

Le triplet de tenseurs uniaxiaux  $\{\mathbf{U}_i\}$  est représentable par  $\{\alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \mathbf{R}\}$  (voir (B.8) page 82) où les  $\alpha_{ij}$  sont des constantes égales à  $\frac{\pi}{2}$ . La représentation du triplet de directions orthogonales se réduit donc à  $\mathbf{R}$ .

On note  $\mathbb{S}$  l'ensemble des tenseurs réels du second ordre symétriques. Tout tenseur symétrique du second ordre est donc représentable par :

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathbf{R}\} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbf{S} \in \mathbb{S} \quad (\text{B.10})$$

où les trois valeurs propres réelles classées  $\lambda_1, \lambda_2$  et  $\lambda_3$  sont invariantes dans toute rotation  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$  de  $\mathbf{S}$  (les valeurs propres de  $\mathbf{S}$  et de  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{Q}^T$  sont les mêmes).

REMARQUE 1 : La surjection trouvée ici n'est jamais une bijection : quand les valeurs propres sont distinctes, il existe quatre rotations  $\mathbf{R}$  qui transforment le triplet  $\{\mathbf{U}_{0i}\}$  en le triplet  $\{\mathbf{U}_i\}$ . Quand les valeurs propres ne sont pas toutes distinctes il en existe une infinité.

REMARQUE 2 : Le triplet des valeurs propres classées  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$  peut être représenté par d'autres triplets d'invariants (voir A.6 page 74).

### Représentation d'un tenseur symétrique réel du second ordre et d'une direction non orientée

Soit un tenseur symétrique du second ordre  $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{U}_i$  et soit une direction non orientée définie par le tenseur uniaxial normé  $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{v}} \otimes \tilde{\mathbf{v}}$ .

Une représentation de l'ensemble  $\{\mathbf{S}, \mathbf{V}\}$  est l'ensemble  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{V}\}$ .

Une représentation des quatre directions orthogonales non orientées  $\{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{V}\}$  est (par exemple) l'ensemble  $\{\alpha_{1V}, \alpha_{2V}, \mathbf{R}\}$ <sup>10</sup> où  $\alpha_{1V} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  est l'angle  $(\mathbf{V}, \mathbf{U}_1)$  et  $\alpha_{2V} \in [0, \frac{\pi}{2}]$  est l'angle  $(\mathbf{V}, \mathbf{U}_2)$  (voir (B.8) page 82). Une représentation de  $\{\mathbf{S}, \mathbf{V}\}$  est donc :

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \alpha_{1V}, \alpha_{2V}, \mathbf{R}\} \in \mathbb{R}^3 \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2 \times \mathbb{Q}_+ \rightarrow \{\mathbf{S}, \mathbf{V}\} \in \mathbb{S} \times \tilde{\mathbb{U}} \quad (\text{B.11})$$

10. les angles  $\alpha_{12}, \alpha_{13}$  et  $\alpha_{23}$  sont des angles droits.

où les angles  $\alpha_{1V}$  et  $\alpha_{2V}$  peuvent être remplacés par le carré de leur cosinus :

$$\cos^2 \alpha_{1V} = \mathbf{U}_1 : \mathbf{V} \qquad \cos^2 \alpha_{2V} = \mathbf{U}_2 : \mathbf{V}$$

REMARQUE : En utilisant les expressions tensorielles des directions propres (A.9) et suivantes page 76, il vient :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\mathbf{U}_1 : \mathbf{V}) &= (\mathbf{S}^2 : \mathbf{V}) - (\lambda_2 + \lambda_3)(\mathbf{S} : \mathbf{V}) + \lambda_2 \lambda_3 \\ (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)(\mathbf{U}_2 : \mathbf{V}) &= (\mathbf{S}^2 : \mathbf{V}) - (\lambda_3 + \lambda_1)(\mathbf{S} : \mathbf{V}) + \lambda_3 \lambda_1 \end{aligned}$$

La proposition de J. P. BOELHER pour les invariants « croisés » était  $\mathbf{S} : \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{S} \cdot \tilde{\mathbf{v}}$  et  $\mathbf{S}^2 : \mathbf{V} = \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{S}^2 \cdot \tilde{\mathbf{v}}$ . Les formules ci-dessus montrent que des combinaisons de ces deux invariants avec les invariants de  $\mathbf{S}$  permettent de déterminer les angles de la direction  $\mathbf{V}$  avec les directions propres  $\mathbf{U}_1$  et  $\mathbf{U}_2$  de  $\mathbf{S}$ .

On montrerait de même que la représentation de  $\{\mathbf{S}, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n\}$ <sup>11</sup> est par exemple :

$$\{(\mathbf{V}_1 : \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_1 : \mathbf{U}_2), \dots, (\mathbf{V}_n : \mathbf{U}_1, \mathbf{V}_n : \mathbf{U}_2), \mathbf{R}\} \in [0, 1]^n \times \mathbb{Q}_+ \rightarrow \{\mathbf{S}, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n\} \in \mathbb{S} \times \tilde{\mathbb{U}}^n \quad (\text{B.12})$$

où les produits scalaires  $\mathbf{V}_j : \mathbf{U}_j$  peuvent être remplacés par les produits scalaires (moins facilement interprétables)  $\mathbf{V}_j : \mathbf{S}$  en utilisant les formules (A.9) et suivantes page 76.

### Représentation d'un couple de tenseurs réels symétriques du second ordre

Soient les deux tenseurs symétriques du second ordre  $\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{U}_i$  et  $\mathbf{S}' = \sum_{j=1}^3 \lambda'_j \mathbf{U}'_j$ . Pour construire une représentation du couple de triplets  $\{\{\mathbf{U}_i\}, \{\mathbf{U}'_j\}\}$ , on procède de la manière suivante :

1. on choisit un triplet de directions non orientées orthogonales arbitraire  $\{\mathbf{U}_{0i}\}$ ;
2. on construit  $\mathbf{U}'_{01}$  déterminé (par exemple) par les deux angles  $\alpha_{1'1} = (\mathbf{U}'_{01}, \mathbf{U}_{01})$  et  $\alpha_{1'2} = (\mathbf{U}'_{01}, \mathbf{U}_{02})$ ;
3. on construit  $\mathbf{U}'_{03}$  (par exemple) par l'angle  $\alpha_{3'3} = (\mathbf{U}'_{03}, \mathbf{U}_{03})$ ;
4. la direction  $\mathbf{U}'_{02}$  est alors unique.

Par ce procédé, les deux couples de trièdres  $\{\{\mathbf{U}_i\}, \{\mathbf{U}'_j\}\}$  et  $\{\{\mathbf{U}_{0i}\}, \{\mathbf{U}'_{0j}\}\}$  ont les mêmes positions relatives et il existe une rotation  $\mathbf{R}$  qui passe de d'un couple de trièdres à l'autre. On a donc construit une surjection  $\{\alpha_{1'1}, \alpha_{1'2}, \alpha_{3'3}, \mathbf{R}\} \rightarrow \{\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}'_1, \mathbf{U}'_2, \mathbf{U}'_3\}$  (il en existe d'autres<sup>12</sup>).

Une représentation du couple de tenseurs symétriques est donc :

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \alpha_{1'1}, \alpha_{1'2}, \alpha_{3'3}, \mathbf{R}\} \in \mathbb{R}^6 \times [0, \frac{\pi}{2}]^3 \times \mathbb{Q}_+ \rightarrow \{\mathbf{S}, \mathbf{S}'\} \in \mathbb{S}^2 \quad (\text{B.13})$$

On vérifie aisément que les réels  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \alpha_{1'1}, \alpha_{1'2}, \alpha_{3'3}\}$  sont invariants dans toute rotation  $\mathcal{R}_{\mathcal{Q}}$  du couple  $\{\mathbf{S}, \mathbf{S}'\}$ .

Les trois angles  $\alpha_{1'1}$ ,  $\alpha_{1'2}$  et  $\alpha_{3'3}$  peuvent être remplacés par le carré de leur cosinus (compris dans  $[0, 1]$ ) :

$$\cos^2 \alpha_{1'1} = \mathbf{U}'_1 : \mathbf{U}_1 \qquad \cos^2 \alpha_{1'2} = \mathbf{U}'_1 : \mathbf{U}_2 \qquad \cos^2 \alpha_{3'3} = \mathbf{U}'_3 : \mathbf{U}_3 \quad (\text{B.14})$$

REMARQUE : Ces trois produits scalaires peuvent être exprimés tensoriellement en utilisant les formules tensorielles qui donnent les directions propres (voir (A.9) et suivantes page 76) de (B.14). Par exemple, le produit scalaire  $\mathbf{U}_1 : \mathbf{U}'_1$  est solution de :

$$(\mathbf{S}^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)\mathbf{S} + \lambda_2 \lambda_3 \mathbf{G}) : (\mathbf{S}'^2 - (\lambda'_2 + \lambda'_3)\mathbf{S}' + \lambda'_2 \lambda'_3 \mathbf{G}) = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda'_1 - \lambda'_2)(\lambda'_1 - \lambda'_3)(\mathbf{U}_1 : \mathbf{U}'_1)$$

soit encore en développant :

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda'_1 - \lambda'_2)(\lambda'_1 - \lambda'_3)(\mathbf{U}_1 : \mathbf{U}'_1) = \\ (\mathbf{S}^2 : \mathbf{S}'^2) - (\lambda_2 + \lambda_3)(\mathbf{S} : \mathbf{S}'^2) - (\lambda'_2 + \lambda'_3)(\mathbf{S}'^2 : \mathbf{S}) + (\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda'_2 + \lambda'_3)(\mathbf{S} : \mathbf{S}') + \\ \lambda_2 \lambda_3 \text{Tr}(\mathbf{S}'^2) + \lambda'_2 \lambda'_3 \text{Tr}(\mathbf{S}^2) - \lambda_2 \lambda_3 (\lambda'_2 + \lambda'_3) \text{Tr} \mathbf{S}' - \lambda'_2 \lambda'_3 (\lambda_2 + \lambda_3) \text{Tr} \mathbf{S} + 3 \lambda_2 \lambda_3 \lambda'_2 \lambda'_3 \end{aligned}$$

11. En mécanique des milieux continus, c'est utile pour des directions d'anisotropie multiples.

12. En effet, on connaît plusieurs manières de situer un trièdre par rapport à un autre avec trois angles; par exemple, les angles d'Euler (précession, nutation, rotation propre), les angles de navigation (roulis, tangage, lacet), etc.



On obtient des formules similaires pour les produits scalaires  $\mathbf{U}'_1 : \mathbf{U}_2$  et  $\mathbf{U}'_3 : \mathbf{U}_3$  de (B.14). On constate que l'expression de ces trois produits scalaires font apparaître les quatre « invariants croisés »  $(\mathbf{S}^2 : \mathbf{S}'^2)$ ,  $(\mathbf{S} : \mathbf{S}'^2)$ ,  $(\mathbf{S}^2 : \mathbf{S}')$  et  $(\mathbf{S} : \mathbf{S}')$  qui ont été proposés par J. P. BOELHER comme liste minimale et qui ont été à l'origine de controverses avec d'autres auteurs soutenant, à juste titre, que trois invariants sont suffisants. Le calcul précédent montre que la liste d'invariants de BOELHER n'est pas minimale, car trois invariants suffisent. Ces trois invariants ne sont pas une sous-liste des quatre invariants proposés par BOELHER. La formule ci-dessus montre qu'on peut déterminer trois invariants strictement nécessaires et suffisants par des combinaisons adéquates des quatre invariants de BOELHER avec les invariants propres à chaque tenseur.

### B.3 Fonctions réelles isotropes

DÉFINITION : Une fonction réelle est dite isotrope si elle est invariante dans toute rotation de ses arguments :

$$f(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n) = f(\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_1), \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_2), \dots, \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_n)) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{Q}_+$$

REMARQUE : En mécanique des milieux continus, cette condition a une interprétation physique : la valeur de la fonction réelle  $f$  est invariante par changement d'observateur. C'est notamment ce qu'on exige quand on cherche à écrire des fonctions d'état thermodynamiques (énergie interne, entropie, énergie libre ...) dont les variables d'état sont des vecteurs ou tenseurs d'ordre supérieur.

Si on dispose d'une représentation de la suite des arguments tensoriels  $\{\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n\}$  de  $f$  constituée d'une suite de scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  invariants dans toute rotation  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$  des arguments de  $f$ , complétée par une rotation  $\mathbf{R}$ , alors il existe une fonction  $\bar{f} = f \circ s$  telle que  $\bar{f}(I_1, \dots, I_m, \mathbf{R}) = f(\mathbf{T}_1, \dots, \mathbf{T}_n)$ .

L'isotropie de la fonction  $f$  s'écrit :

$$f(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n) = f(\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_1), \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_2), \dots, \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_n)) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{Q}_+$$

ce qui implique l'égalité :

$$\bar{f}(I_1, \dots, I_m, \mathbf{Q}) = \bar{f}(I'_1, \dots, I'_m, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{Q}_+$$

où  $\{I'_1, \dots, I'_m\}$  sont des scalaires calculés à partir des arguments  $\{\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_1), \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_2), \dots, \mathcal{R}_{\mathbf{Q}}(\mathbf{T}_n)\}$  avec les mêmes définitions que celles utilisées pour calculer les scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  à partir des arguments  $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n\}$ .

Puisque dans les représentations précédentes, on a choisi des scalaires invariants dans toute rotation  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$  des arguments, on a :  $I'_j = I_j \forall j \in [1, m]$ , l'égalité précédente s'écrit encore :

$$\bar{f}(I_1, \dots, I_m, \mathbf{Q}) = \bar{f}(I_1, \dots, I_m, \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{Q}_+$$

où  $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}^T \forall \mathbf{Q} \in \mathbb{Q}_+$  est une rotation quelconque. On en déduit que la fonction  $\bar{f}$  est insensible à son dernier argument :

$$\bar{f}(I_1, \dots, I_m, \mathbf{Q}) = \bar{f}(I_1, \dots, I_m)$$

Ainsi, si la fonction  $f(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n)$  est réelle et isotrope, il existe une fonction  $\bar{f}$  telle que :

$$f(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n) = \bar{f}(I_1, \dots, I_m)$$

Ce résultat est important dans la pratique de la mécanique des milieux continus : il permet de remplacer toute fonction réelle  $f$  de  $n$  arguments tensoriels par une fonction  $\bar{f}$  de  $m$  arguments scalaires quand on a trouvé une représentation des  $n$  arguments tensoriels  $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_n\}$  sous la forme  $\{I_1, \dots, I_m, \mathbf{R}\}$  où  $\{I_1, \dots, I_m\}$  sont des scalaires invariants dans toute rotation  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}}$  des arguments tensoriels.

Pour trouver les arguments de  $\bar{f}$ , il suffit de supprimer  $\mathbf{R}$  de la liste de la représentation des quelques cas qui ont été exposés dans la section précédente.

## B.4 En bref...

Les fonctions réelles isotropes d'arguments tensoriels peuvent être remplacées par des fonctions réelles d'arguments réels, calculés à partir des arguments tensoriels. On rassemble ici les quelques cas étudiés :

| arguments de $f$                                | arguments de $\bar{f}$  |
|---|---|
| $\mathbf{v}_1$                                  | $\ \mathbf{v}_1\ $  |
| $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$             | $\ \mathbf{v}_1\ , \dots, \ \mathbf{v}_n\ , \alpha_{12}, (\alpha_{31}, \alpha_{32}, \varepsilon_{123}), \dots, (\alpha_{n1}, \alpha_{n2}, \varepsilon_{12n})$ |
| $\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$             | $\beta_{12}, (\beta_{31}, \beta_{32}), \dots, (\beta_{n1}, \beta_{n2})$   |
| $\mathbf{S}$                                    | $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$   |
| $\mathbf{S}, \mathbf{V}_1$                      | $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \beta_{11}, \beta_{21}$   |
| $\mathbf{S}, \mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n$ | $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, (\beta_{11}, \beta_{21}), \dots, (\beta_{1n}, \beta_{2n})$  |
| $\mathbf{S}, \mathbf{S}'$                       | $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \beta_{1'1}, \beta_{1'2}, \beta_{3'3}$  |

où :

- les  $\mathbf{v}_i$  sont des vecteurs ;
- les  $\mathbf{V}_i$  sont des directions non orientées (tenseurs uniaxiaux unitaires) ;
- les  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{S}'$  sont des tenseurs du second ordre symétriques ;
- les angles entre vecteurs  $\alpha_{ij}$  peuvent être remplacés par les produits scalaires  $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$  ;
- les angles entre directions  $\beta_{ij}$  peuvent être remplacés par les produits scalaires  $\mathbf{V}_i : \mathbf{V}_j$  ;
- les groupes de valeurs propres classées  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  peuvent être remplacés par les invariants  $S_I, S_{II}, S_{III}$  ou  $S_I, J, \phi$  ou d'autres (voir A.6 page 74).



## Annexe C

# Formulaire

On donne ici (sans démonstration<sup>1</sup>) les expressions des opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien dans deux systèmes de coordonnées classiques : les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

### C.1 Système de coordonnées cylindriques

#### C.1.1 Définition et notations

Un point  $M$  de l'espace est repéré par les 3 réels  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  définis sur la figure C.1.

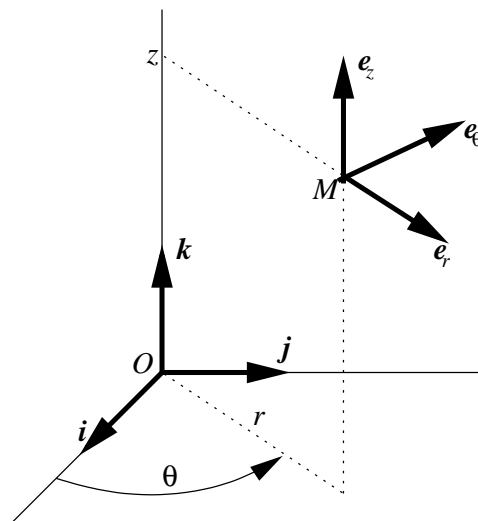


FIG. C.1 – Système de coordonnées cylindrique

1. Ces formules ont été établies automatiquement avec un « package » nommé `tens3d`, écrit par l'auteur, destiné faire de l'algèbre tensorielle dans des bases quelconques et de l'analyse tensorielle dans des systèmes de coordonnées quelconques. L'auteur le met à la disposition des utilisateurs des logiciels de calcul formel MAPLE<sup>®</sup> ou MATHEMATICA<sup>®</sup>. Ces packages sont téléchargeables actuellement (16 mars 2012) à <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d>.

À chaque point  $M$  on associe une base locale orthonormée  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  définie par :

$$\mathbf{e}_r = \partial_r \mathbf{OM} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta \mathbf{OM} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{e}_r \quad \mathbf{e}_z = \partial_z \mathbf{OM} = \mathbf{k}$$

Le point courant  $M$  est défini par :

$$\mathbf{OM} = r \cos \theta \mathbf{i} + r \sin \theta \mathbf{j} + z \mathbf{k} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{k}$$

Sur la base locale en  $M$ , on a

$$d\mathbf{M} = dr \mathbf{e}_r + r d\mathbf{e}_r + dz \mathbf{e}_z + z d\mathbf{e}_z = dr \mathbf{e}_r + r d\theta \mathbf{e}_\theta + dz \mathbf{e}_z$$

### C.1.2 Champs scalaires

Soit  $f$  un champ scalaire :

$$f : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow f(M) = f(r, \theta, z) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= \partial_r f \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \partial_\theta f \mathbf{e}_\theta + \partial_z f \mathbf{e}_z \\ \Delta f &= \partial_{rr} f + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} f + \frac{1}{r} \partial_r f + \partial_{zz} f \\ &= \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} f + \partial_{zz} f \end{aligned}$$

### C.1.3 Champs vectoriels

Soit  $\mathbf{v}$  un champ vectoriel :

$$\mathbf{v} : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbf{v}(M) = v_r(r, \theta, z) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta + v_z(r, \theta, z) \mathbf{e}_z$$

$$[(\mathbf{grad} \mathbf{v})_{ij}] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r} (\partial_\theta v_r - v_\theta) & \partial_z v_r \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\theta + v_r) & \partial_z v_\theta \\ \partial_r v_z & \frac{1}{r} \partial_\theta v_z & \partial_z v_z \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_r v_r + \frac{1}{r} (\partial_\theta v_\theta + v_r) + \partial_z v_z$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{v} = \left( \frac{1}{r} \partial_\theta v_z - \partial_z v_\theta \right) \mathbf{e}_r + (\partial_z v_r - \partial_r v_z) \mathbf{e}_\theta + \left( \partial_r v_\theta - \frac{1}{r} (\partial_\theta v_r - v_\theta) \right) \mathbf{e}_z$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} &= \left( \partial_{rr} v_r + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_r - 2 \partial_\theta v_\theta - v_r) + \frac{1}{r} \partial_r v_r + \partial_{zz} v_r \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left( \partial_{rr} v_\theta + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2 \partial_\theta v_r - v_\theta) + \frac{1}{r} \partial_r v_\theta + \partial_{zz} v_\theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left( \partial_{rr} v_z + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} v_z + \frac{1}{r} \partial_r v_z + \partial_{zz} v_z \right) \mathbf{e}_z \\ &= \left( \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r v_r) \right) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_r - 2 \partial_\theta v_\theta) + \partial_{zz} v_r \right) \mathbf{e}_r \\ &\quad + \left( \partial_r \left( \frac{1}{r} \partial_r (r v_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2 \partial_\theta v_r) + \partial_{zz} v_\theta \right) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \left( \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r v_z) + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} v_z + \partial_{zz} v_z \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

### C.1.4 Champs tensoriels du second ordre symétriques

Soit  $\mathbf{T}$  un champ tensoriel du second ordre *symétrique* :

$$\mathbf{T} : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbf{T}(M) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$$

Les composantes de  $\mathbf{T}$  dans la base  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  sont :

$$\begin{bmatrix} T_{rr}(r, \theta, z) & T_{r\theta}(r, \theta, z) & T_{rz}(r, \theta, z) \\ T_{r\theta}(r, \theta, z) & T_{\theta\theta}(r, \theta, z) & T_{\theta z}(r, \theta, z) \\ T_{rz}(r, \theta, z) & T_{\theta z}(r, \theta, z) & T_{zz}(r, \theta, z) \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}} \quad (\text{matrice symétrique})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{div} \mathbf{T} &= \left( \partial_r T_{rr} + \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{r\theta} + T_{rr} - T_{\theta\theta}) + \partial_z T_{rz} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left( \partial_r T_{r\theta} + \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{\theta\theta} + 2T_{r\theta}) + \partial_z T_{\theta z} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left( \partial_r T_{rz} + \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{\theta z} + T_{rz}) + \partial_z T_{zz} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}) - \partial_z T_{r\theta} & \partial_z T_{rr} - \partial_r T_{rz} & \partial_r T_{r\theta} - \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{rr} - 2T_{r\theta}) \\ \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{\theta z} + T_{rz}) - \partial_z T_{\theta\theta} & \partial_z T_{r\theta} - \partial_r T_{\theta z} & \partial_r T_{\theta\theta} - \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{r\theta} + T_{rr} - T_{\theta\theta}) \\ \frac{1}{r} \partial_\theta T_{zz} - \partial_z T_{\theta z} & \partial_z T_{rz} - \partial_r T_{zz} & \partial_r T_{\theta z} - \frac{1}{r} (\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}) \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}}$$

$$\begin{aligned} (\Delta \mathbf{T})_{rr} &= \partial_{rr} T_{rr} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{rr} - 4\partial_\theta T_{r\theta} - 2T_{rr} + 2T_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{rr} + \partial_{zz} T_{rr} \\ (\Delta \mathbf{T})_{r\theta} &= (\Delta \mathbf{T})_{\theta r} = \partial_{rr} T_{r\theta} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{r\theta} + 2\partial_\theta T_{rr} - 2\partial_\theta T_{\theta\theta} - 4T_{r\theta}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{r\theta} + \partial_{zz} T_{r\theta} \\ (\Delta \mathbf{T})_{rz} &= (\Delta \mathbf{T})_{zr} = \partial_{rr} T_{rz} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{rz} - 2\partial_\theta T_{\theta z} - T_{rz}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{rz} + \partial_{zz} T_{rz} \\ (\Delta \mathbf{T})_{\theta\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{\theta\theta} + 4\partial_\theta T_{r\theta} + 2T_{rr} - 2T_{\theta\theta}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{\theta\theta} + \partial_{zz} T_{\theta\theta} \\ (\Delta \mathbf{T})_{\theta z} &= (\Delta \mathbf{T})_{z\theta} = \partial_{rr} T_{\theta z} + \frac{1}{r^2} (\partial_{\theta\theta} T_{\theta z} + 2\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}) + \frac{1}{r} \partial_r T_{\theta z} + \partial_{zz} T_{\theta z} \\ (\Delta \mathbf{T})_{zz} &= \partial_{rr} T_{zz} + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta} T_{zz} + \frac{1}{r} \partial_r T_{zz} + \partial_{zz} T_{zz} \end{aligned}$$

## C.2 Système de coordonnées sphériques

NOTE IMPORTANTE : Dans la littérature scientifique, il existe deux versions du système de coordonnées sphérique.

Dans celle présentée ici, l'angle  $\varphi$  est mesuré à partir du plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ . On pourrait les appeler « coordonnées géographiques » ( $\theta$  est la longitude,  $\varphi$  est la latitude, le plan  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  est le plan équatorial). Le trièdre  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  est direct.

Dans l'autre version l'angle  $\varphi$  est mesuré sur le méridien de  $M$  à partir du pôle Nord. On a donc :

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_\varphi$$

On convertit aisément les formules avec :

$$\cos \varphi \rightarrow \sin \phi \quad \text{et} \quad \sin \varphi \rightarrow \cos \phi$$

### C.2.1 Définition et notations

Un point  $M$  de l'espace est repéré par 3 réels  $r$ ,  $\theta$  et  $\phi$  définis sur la figure C.2.

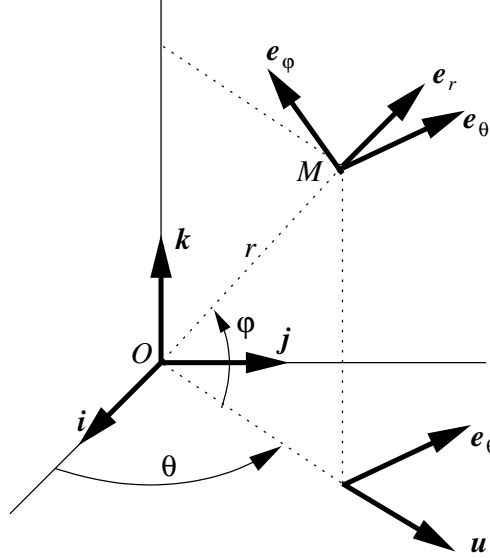


FIG. C.2 – Système de coordonnées sphériques

À chaque point  $M$  on associe une base locale orthonormée  $\{e_r, e_\theta, e_\phi\}$  définie par :

$$\begin{aligned} e_r &= \partial_r \mathbf{OM} = \cos \phi \mathbf{u} + \sin \phi \mathbf{k} = \cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \phi \mathbf{j} + \sin \phi \mathbf{k} \\ e_\theta &= \frac{\partial_\theta \mathbf{OM}}{r \cos \phi} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \\ e_\phi &= \frac{\partial_\phi \mathbf{OM}}{r} = -\sin \phi \mathbf{u} + \cos \phi \mathbf{k} = -\cos \theta \sin \phi \mathbf{i} + \sin \theta \cos \phi \mathbf{j} + \sin \phi \mathbf{k} \end{aligned}$$

Le point courant est :

$$\mathbf{OM} = r \cos \phi \cos \theta \mathbf{i} + r \cos \phi \sin \theta \mathbf{j} + r \sin \phi \mathbf{k} = r e_r$$

Sur la base locale en  $M$ , on a :

$$d\mathbf{M} = dr e_r + r de_r = dr e_r + r \cos \phi d\theta e_\theta + r d\phi e_\phi$$

### C.2.2 Champs scalaires

Soit  $f$  un champ scalaire :

$$f : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow f(M) = f(r, \theta, \phi) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} f &= \partial_r f e_r + \frac{\partial_\theta f}{r \cos \phi} e_\theta + \frac{\partial_\phi f}{r} e_\phi \\ \Delta f &= \partial_{rr} f + \frac{\partial_{\theta\theta} f - \sin \phi \partial_\phi f}{r^2 \cos^2 \phi} + \frac{2 \partial_r f}{r} + \frac{\partial_{\phi\phi} f}{r^2} \end{aligned}$$

### C.2.3 Champs vectoriels

Soit  $\mathbf{v}$  un champ vectoriel :

$$\mathbf{v} : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbf{v}(M) = v_r(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_r + v_\theta(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_\theta + v_\varphi(r, \theta, \varphi) \mathbf{e}_\varphi \in \mathbb{V}_3$$

$$[(\mathbf{grad} \mathbf{v})_{ij}] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r \cos \varphi} \partial_\theta v_r - \frac{1}{r} v_\theta & \frac{1}{r} (\partial_\varphi v_r - v_\varphi) \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r \cos \varphi} (\partial_\theta v_\theta - \sin \varphi v_\varphi) + \frac{1}{r} v_r & \frac{1}{r} \partial_\varphi v_\theta \\ \partial_r v_\varphi & \frac{1}{r \cos \varphi} (\partial_\theta v_\varphi + \sin \varphi v_\theta) & \frac{1}{r} (\partial_\varphi v_\varphi + v_r) \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \partial_r v_r + \frac{\partial_\theta v_\theta - \sin \varphi v_\varphi}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi v_\varphi + 2 v_r}{r}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \left( \frac{\partial_\theta v_\varphi + \sin \varphi v_\theta}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial_\varphi v_r - v_\varphi}{r} - \partial_r v_\varphi \right) \mathbf{e}_\theta + \left( \partial_r v_\theta - \frac{\partial_\theta v_r}{r \cos \varphi} + \frac{v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\Delta \mathbf{v} = \left( \partial_{rr} v_r + \frac{\partial_{\theta\theta} v_r}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} v_r - 2 \partial_\varphi v_\varphi - 2 v_r}{r^2} + \frac{2 \sin \varphi v_\varphi - 2 \partial_\theta v_\theta - \sin \varphi \partial_\varphi v_r}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r v_r}{r} \right) \mathbf{e}_r$$

$$+ \left( \partial_{rr} v_\theta + \frac{\partial_{\theta\theta} v_\theta - 2 \sin \varphi \partial_\theta v_\varphi - v_\theta}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} v_\theta}{r^2} + \frac{2 \partial_\theta v_r - \sin \varphi \partial_\varphi v_\theta}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r v_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \left( \partial_{rr} v_\varphi + \frac{\partial_{\theta\theta} v_\varphi + 2 \sin \varphi \partial_\theta v_\theta - v_\varphi}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} v_\varphi + 2 \partial_\varphi v_r}{r^2} - \frac{\sin \varphi \partial_\varphi v_\varphi}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r v_\varphi}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

### C.2.4 Champs tensoriels du second ordre symétriques

Soit  $\mathbf{T}$  un champ tensoriel du second ordre *symétrique* :

$$\mathbf{T} : M \in \mathbb{V}_3 \longrightarrow \mathbf{T}(M) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$$

Les composantes de  $\mathbf{T}$  dans la base  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}$  sont :

$$\begin{bmatrix} T_{rr}(r, \theta, \varphi) & T_{r\theta}(r, \theta, \varphi) & T_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) \\ T_{r\theta}(r, \theta, \varphi) & T_{\theta\theta}(r, \theta, \varphi) & T_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi) \\ T_{r\varphi}(r, \theta, \varphi) & T_{\theta\varphi}(r, \theta, \varphi) & T_{\varphi\varphi}(r, \theta, \varphi) \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}} \quad (\text{matrice symétrique})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \left( \partial_r T_{rr} + \frac{\partial_\theta T_{r\theta} - \sin \varphi T_{r\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{r\varphi} + 2 T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}}{r} \right) \mathbf{e}_r$$

$$+ \left( \partial_r T_{r\theta} + \frac{\partial_\theta T_{\theta\theta} - 2 \sin \varphi T_{\theta\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{\theta\varphi} + 3 T_{r\theta}}{r} \right) \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \left( \partial_r T_{r\varphi} + \frac{\partial_\theta T_{\theta\varphi} + \sin \varphi T_{\theta\theta} - \sin \varphi T_{\varphi\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{\varphi\varphi} + 3 T_{r\varphi}}{r} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial_\theta T_{r\varphi} + \sin \varphi T_{r\theta}}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{r\theta}}{r} & \frac{\partial_\varphi T_{rr} - 2 T_{r\varphi}}{r} - \partial_r T_{r\varphi} & \partial_r T_{r\theta} - \frac{\partial_\theta T_{rr}}{r \cos \varphi} + \frac{2 T_{r\theta}}{r} \\ \frac{\partial_\theta T_{\theta\varphi} + \sin \varphi (T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi})}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{\theta\theta} - T_{r\varphi}}{r} & \frac{\partial_\varphi T_{r\theta} - T_{\theta\varphi}}{r} - \partial_r T_{\theta\varphi} & \partial_r T_{\theta\theta} - \frac{\partial_\theta T_{r\theta} - \sin \varphi T_{r\varphi}}{r \cos \varphi} + \frac{T_{\theta\theta} - T_{rr}}{r} \\ \frac{\partial_\theta T_{\varphi\varphi} + 2 \sin \varphi T_{\theta\varphi}}{r \cos \varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{\theta\varphi} + T_{r\theta}}{r} & \frac{\partial_\varphi T_{r\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} - \partial_r T_{\varphi\varphi} & \partial_r T_{\theta\varphi} - \frac{\partial_\theta T_{r\varphi} + \sin \varphi T_{r\theta}}{r \cos \varphi} + \frac{T_{\theta\varphi}}{r} \end{bmatrix}_{\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi\}}$$



$$\begin{aligned}
(\Delta \mathbf{T})_{rr} &= \partial_{rr} T_{rr} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{rr}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{rr} - 4 \partial_{\varphi} T_{r\varphi} - 4 T_{rr} + 2 T_{\theta\theta}}{r^2} \\
&\quad + \frac{\sin \varphi \partial_{\varphi} T_{rr} + 4 \sin \varphi T_{r\varphi} - 4 \partial_{\theta} T_{r\theta}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{rr}}{r} \\
(\Delta \mathbf{T})_{r\theta} = (\Delta \mathbf{T})_{\theta r} &= \partial_{rr} T_{r\theta} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{r\theta} - 2 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{r\varphi} - T_{r\theta}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{r\theta} - 2 \partial_{\varphi} T_{\theta\varphi} - 4 T_{r\theta}}{r^2} \\
&\quad + \frac{2 \partial_{\theta} T_{rr} - 2 \partial_{\theta} T_{\theta\theta} - \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{r\theta} + 4 \sin \varphi T_{\theta\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{r\theta}}{r} \\
(\Delta \mathbf{T})_{r\varphi} = (\Delta \mathbf{T})_{\varphi r} &= \partial_{rr} T_{r\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{r\varphi} + 2 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{r\theta} - T_{r\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{r\varphi} + 2 \partial_{\varphi} T_{rr} - 2 \partial_{\varphi} T_{\varphi\varphi} - 4 T_{r\varphi}}{r^2} \\
&\quad + \frac{-2 \partial_{\theta} T_{\theta\varphi} - \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{r\varphi} - 2 \sin \varphi T_{\theta\theta} + 2 \sin \varphi T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{r\varphi}}{r} \\
(\Delta \mathbf{T})_{\theta\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\theta} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\theta\theta} - 4 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{\theta\varphi} - 2 T_{\theta\theta} + 2 T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\theta\theta} + 2 T_{rr} - 2 T_{\varphi\varphi}}{r^2} \\
&\quad + \frac{4 \partial_{\theta} T_{r\theta} + \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{\theta\theta} - 4 \sin \varphi T_{r\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{\theta\theta}}{r} \\
(\Delta \mathbf{T})_{\theta\varphi} = (\Delta \mathbf{T})_{\varphi\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\theta\varphi} + 2 \partial_{\theta} T_{\theta\theta} - 2 \partial_{\theta} T_{\varphi\varphi} - 4 T_{\theta\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\theta\varphi} + 2 \partial_{\varphi} T_{r\theta} + 2 T_{\theta\varphi}}{r^2} \\
&\quad + \frac{2 \partial_{\theta} T_{r\varphi} - \sin \varphi \partial_{\varphi} T_{\theta\varphi} + 2 \sin \varphi T_{r\theta}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{\theta\varphi}}{r} \\
(\Delta \mathbf{T})_{\varphi\varphi} &= \partial_{rr} T_{\varphi\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\varphi\varphi} + 4 \sin \varphi \partial_{\theta} T_{\theta\varphi} + 2 T_{\theta\theta} - 2 T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos^2 \varphi} \\
&\quad + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\varphi\varphi} + 4 \partial_{\varphi} T_{r\varphi} + 2 T_{rr} - 2 T_{\theta\theta}}{r^2} - \frac{\sin \varphi \partial_{\varphi} T_{\varphi\varphi}}{r^2 \cos \varphi} + \frac{2 \partial_r T_{\varphi\varphi}}{r}
\end{aligned}$$

# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Algèbre tensorielle</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | Convention de sommation d'Einstein   | 1         |
| 1.1.1    | Règles de la convention de sommation d'Einstein                                    | 2         |
| 1.1.2    | Symbole de Kronecker   | 2         |
| 1.1.3    | Représentation matricielle de certaines sommations                                 | 3         |
| 1.2      | Algèbre vectorielle  | 4         |
| 1.2.1    | Changement de base   | 4         |
| 1.2.2    | Base duale   | 5         |
| 1.2.3    | Composantes covariantes d'un vecteur   | 5         |
| 1.3      | Tenseurs euclidiens réels  | 6         |
| 1.3.1    | Composantes d'un tenseur   | 6         |
| 1.3.2    | Exemples de tenseurs euclidiens  | 7         |
| 1.3.3    | L'espace vectoriel des tenseurs d'ordre $p$  | 8         |
| 1.3.4    | Changement de base des tenseurs d'ordre $p$  | 10        |
| 1.3.5    | Produit tensoriel de tenseurs  | 11        |
| 1.3.6    | Traces d'un tenseur  | 11        |
| 1.3.7    | Tenseurs d'ordre 0 :   | 12        |
| 1.3.8    | Produit tensoriel contracté simple   | 12        |
| 1.3.9    | Produit tensoriel contracté double   | 13        |
| 1.4      | Tenseur métrique   | 13        |
| 1.5      | Tenseur d'orientation dans $\mathbb{V}_3$  | 14        |
| 1.5.1    | Application : produits vectoriels dans $\mathbb{V}_3$                              | 16        |
| 1.5.2    | Identités algébriques importantes  | 16        |
| 1.6      | Tenseurs du second ordre   | 16        |
| 1.6.1    | Produit scalaire et norme dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$                            | 17        |
| 1.6.2    | Transposé d'un tenseur du second ordre   | 17        |
| 1.6.3    | Tenseurs du second ordre symétriques   | 17        |
| 1.6.4    | Tenseurs du second ordre antisymétriques   | 18        |
| 1.6.5    | Vecteur adjoint à un tenseur antisymétrique  | 18        |
| 1.6.6    | Décomposition en parties symétrique et antisymétrique                              | 19        |
| 1.6.7    | Décomposition en parties sphérique et déviatorique                                 | 19        |
| 1.6.8    | Endomorphismes linéaires $\mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ et tenseurs d'ordre 2 | 20        |
| 1.6.9    | Spectre, espaces propres, invariants dans $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$               | 22        |
| 1.6.10   | Tenseurs du second ordre orthogonaux de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$                 | 26        |
| 1.6.11   | Décomposition polaire des tenseurs du second ordre                                 | 29        |
| 1.7      | En bref...   | 29        |
| <b>2</b> | <b>Fonctions tensorielles</b>  | <b>31</b> |
| 2.1      | Fonctions tensorielles d'argument réel   | 31        |
| 2.1.1    | Dérivée temporelle d'un tenseur d'ordre $p$  | 31        |
| 2.1.2    | Cas particulier des tenseurs réels du second ordre symétriques                     | 32        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 2.2      | Fonctions scalaires d'une variable tensorielle . . . . .                      | 35        |
| 2.2.1    | Opérateur linéaire tangent . . . . .  | 35        |
| 2.2.2    | Dérivée de fonctions composées . . . . .                                      | 36        |
| 2.2.3    | Composantes sur une base de l'opérateur linéaire tangent $\nabla f$ . . . . . | 36        |
| 2.2.4    | Variables tensorielles contraintes . . . . .                                  | 37        |
| 2.3      | Fonctions scalaires de plusieurs tenseurs . . . . .                           | 38        |
| 2.3.1    | Quelques identités utiles . . . . .   | 38        |
| 2.3.2    | Fonctions scalaires isotropes d'arguments tensoriels . . . . .                | 39        |
| 2.4      | Fonctions tensorielles d'arguments tensoriels . . . . .                       | 40        |
| 2.4.1    | Fonctions à un argument tensoriel : . . . . .                                 | 40        |
| 2.4.2    | Fonctions tensorielles à plusieurs arguments tensoriels : . . . . .           | 41        |
| 2.4.3    | Fonctions tensorielles isotropes . . . . .                                    | 41        |
| 2.5      | En bref... . . . . .  | 41        |
| <b>3</b> | <b>Champs tensoriels dans <math>\mathcal{E}_3</math></b> . . . . .            | <b>43</b> |
| 3.1      | Systèmes de coordonnées . . . . .   | 43        |
| 3.2      | Base naturelle d'un système de coordonnées . . . . .                          | 45        |
| 3.2.1    | Base physique . . . . .   | 45        |
| 3.2.2    | Variations de la base naturelle . . . . .                                     | 46        |
| 3.3      | Champ tensoriel différentiable . . . . .                                      | 47        |
| 3.4      | Éléments différentiels . . . . .  | 48        |
| 3.4.1    | Composantes contravariantes de $d\mathbf{M}$ . . . . .                        | 48        |
| 3.4.2    | Élément de volume pour les intégrales de volume : . . . . .                   | 49        |
| 3.4.3    | Élément de surface pour les intégrales de surface : . . . . .                 | 49        |
| 3.4.4    | Élément de longueur pour les intégrales curvilignes : . . . . .               | 50        |
| 3.5      | Gradient d'un champ scalaire . . . . .  | 50        |
| 3.6      | Champs vectoriels . . . . .   | 51        |
| 3.6.1    | Gradient d'un champ vectoriel . . . . .                                       | 51        |
| 3.6.2    | Divergence d'un champ vectoriel . . . . .                                     | 53        |
| 3.6.3    | Rotationnel d'un champ vectoriel . . . . .                                    | 53        |
| 3.6.4    | Laplacien d'un champ scalaire . . . . .                                       | 53        |
| 3.6.5    | Propriétés des champs vectoriels . . . . .                                    | 53        |
| 3.7      | Champs tensoriels du second ordre . . . . .                                   | 55        |
| 3.7.1    | Gradient d'un champ tensoriel du second ordre . . . . .                       | 55        |
| 3.7.2    | Divergence d'un tenseur du second ordre . . . . .                             | 56        |
| 3.7.3    | Rotationnel d'un tenseur du second ordre . . . . .                            | 56        |
| 3.7.4    | Laplacien d'un champ de vecteurs . . . . .                                    | 57        |
| 3.7.5    | Propriétés des champs tensoriels du second ordre . . . . .                    | 57        |
| 3.8      | Champs tensoriels d'ordre $p$ . . . . .                                       | 58        |
| 3.9      | En bref... . . . . .  | 58        |
| <b>4</b> | <b>Quelques applications</b> . . . . .  | <b>61</b> |
| 4.1      | Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques . . . . .                | 61        |
| 4.1.1    | Gradient d'un champ scalaire . . . . .  | 61        |
| 4.1.2    | Champs vectoriels : . . . . .   | 62        |
| 4.2      | Applications des théorèmes de la divergence . . . . .                         | 63        |
| 4.3      | Dérivées d'intégrales de volume sur des domaines variables . . . . .          | 63        |
| 4.4      | Conditions de compatibilité . . . . .   | 65        |
| 4.4.1    | Autre forme des équations de compatibilité : . . . . .                        | 66        |
| 4.4.2    | Méthode d'intégration . . . . .   | 66        |
| 4.5      | Représentation de Mohr pour les tenseurs symétriques . . . . .                | 67        |
| <b>A</b> | <b>Invariants et valeurs propres d'un tenseur symétrique réel</b> . . . . .   | <b>71</b> |
| A.1      | Condition d'existence de valeurs propres réelles . . . . .                    | 71        |

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| A.2      | Définition de nouveaux invariants . . . . .                             | 72        |
| A.3      | Expression des valeurs propres en fonction des invariants . . . . .     | 73        |
| A.4      | Classement des valeurs propres . . . . .                                | 74        |
| A.5      | Écart des valeurs propres extrêmes . . . . .                            | 74        |
| A.6      | Systèmes d'invariants d'un tenseur d'ordre 2 réel symétrique . . . . .  | 74        |
| A.7      | Détermination tensorielle des directions propres . . . . .              | 75        |
| A.8      | En bref... . . . . .  | 76        |
| <b>B</b> | <b>Fonctions isotropes</b>  | <b>77</b> |
| B.1      | Rotation d'un tenseur . . . . .   | 77        |
| B.2      | Représentation des éléments d'un ensemble . . . . .                     | 78        |
| B.2.1    | Représentation de vecteurs . . . . .                                    | 79        |
| B.2.2    | Représentation de directions non orientées . . . . .                    | 81        |
| B.2.3    | Représentation des tenseurs réels du second ordre symétriques . . . . . | 82        |
| B.3      | Fonctions réelles isotropes . . . . .                                   | 84        |
| B.4      | En bref... . . . . .  | 85        |
| <b>C</b> | <b>Formulaire</b>   | <b>87</b> |
| C.1      | Système de coordonnées cylindriques . . . . .                           | 87        |
| C.1.1    | Définition et notations . . . . .                                       | 87        |
| C.1.2    | Champs scalaires . . . . .  | 88        |
| C.1.3    | Champs vectoriels . . . . .   | 88        |
| C.1.4    | Champs tensoriels du second ordre symétriques . . . . .                 | 89        |
| C.2      | Système de coordonnées sphériques . . . . .                             | 89        |
| C.2.1    | Définition et notations . . . . .                                       | 90        |
| C.2.2    | Champs scalaires . . . . .  | 90        |
| C.2.3    | Champs vectoriels . . . . .   | 91        |
| C.2.4    | Champs tensoriels du second ordre symétriques . . . . .                 | 91        |