HAL open science

Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus

Jean Garrigues

▶ To cite this version:

Jean Garrigues. Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus. Engineering school. Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus, 2012, pp.123. cel-00679923v2

HAL Id: cel-00679923

https://cel.hal.science/cel-00679923v2

Submitted on 22 Apr 2014 (v2), last revised 4 Oct 2022 (v4)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus

Jean Garrigues

(version du 22 avril 2014)

CENTRALE MARSEILLE

Avant-propos

La description des déformations, des vitesses de déformation et des efforts intérieurs dans les milieux continus, nécessitent l'utilisation de tenseurs. Ce concept mathématique n'est pas introduit en mécanique des points matériels ni en mécanique des solides indéformables car dans ces deux mécaniques élémentaires, il suffit de manipuler au plus des champs de vecteurs pour représenter mathématiquement les grandeurs physiques envisagées (vitesses, forces, etc).

En outre, en mécanique des milieux continus, les déformations et les efforts intérieurs ne sont généralement pas uniformes, on aura donc à envisager des *champs de tenseurs*. On sera donc amené à généraliser les notions de gradient, divergence, rotationnel et laplacien pour ces champs.

Toutes les définitions et les équations fondamentales de la mécanique des milieux continus peuvent s'exprimer systématiquement sous forme tensorielle. Outre l'avantage de la concision des formules, cette présentation met clairement en évidence que tout résultat de physique devrait être tensoriel par essence, c'est-à-dire indépendant de la base choisie pour faire les calculs et indépendant du système de coordonnées utilisé pour repérer un point dans l'espace.

Ce cours consiste donc en un complément mathématique d'introduction sur les tenseurs. Il est en partie limité aux tenseurs construits sur un espace vectoriel euclidien de dimension 3 et se restreint au minimum indispensable pour comprendre la mécanique des milieux continus. Il ne peut en aucun cas être considéré comme un cours complet sur les tenseurs ! Toutefois, l'auteur s'est délibérément refusé de concéder à deux limitations que s'imposent souvent des cours d'initiation aux tenseurs destinés à la mécanique des milieux continus :

1. dans les espaces vectoriels, on ne se restreint pas à l'utilisation des seules bases orthonormées ;
2. pour repérer un point dans l'espace, on ne se restreint pas à l'utilisation des seules coordonnées cartésiennes orthonormées.

Ce souci de généralité a un coût : il faut introduire les notions de covariance et de contravariance, ainsi que les coefficients de Christoffel, mais il a aussi un intérêt pédagogique : on comprend mieux comment on peut définir des systèmes de coordonnées.

Contrairement à beaucoup de cours élémentaires, les opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien, sont définis intrinsèquement, c'est-à-dire indépendamment de tout système de coordonnées et l'on saura trouver les composantes de ces opérateurs de manière systématique, quel que soit le système de coordonnées utilisé. Le lecteur souhaitant conserver les restrictions précitées pourra, en ignorant la variance des composantes et en annulant tous les coefficients de Christoffel, retrouver les formules données dans les cours simplifiés.

Enfin, le second chapitre est dédié à l'étude des fonctions d'arguments tensoriels et à valeur tensorielle. Cette étude est rarement développée dans les cours d'introduction aux tenseurs pour la mécanique des milieux continus car son utilité n'apparaît que lors de la construction de lois de comportement. Si le lecteur accepte d'utiliser les lois de comportement classiques présentées dans les cours élémentaires sans réelle justification, il peut ignorer ce chapitre.

La lecture de ce cours suppose connues les notions mathématiques suivantes :

Algèbre et analyse des fonctions de variables réelles à valeur réelle : fonctions réelles de une ou plusieurs variables réelles, dérivées partielles, équations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles, différentiabilité, intégrales simples et multiples ;

Algèbre et analyse vectorielle : espace vectoriel, bases, composantes, produit scalaire, produit vectoriel, espace vectoriel euclidien, gradient d'un champ scalaire, divergence et rotationnel d'un champ vectoriel, laplacien d'un champ scalaire, théorème de Green, théorème de Stokes et théorème de la divergence (Ostrogradski) ;

Algèbre matricielle : matrice, produit matriciel, changement de base, inversion, valeurs propres et espaces propres associés, résolution de systèmes linéaires.

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :
- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple : a, μ) ;
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple : $\boldsymbol{v}$) ;
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple : $\boldsymbol{T}$) ;
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \left[m_{ij}\right]$$

- la transposition des matrices est notée avec un $^\top$ en exposant (exemple : $M^\top$) ;
- les espaces d'entités mathématiques sont en majuscules doublées (exemples : l'espace des réels : $\mathbb{R}$, l'espace des vecteurs de dimension 3 : $\mathbb{V}_3$).
- le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{V}_3$ est noté « $\wedge$ ».

Remerciement

Je tiens à remercier très vivement Mathias LEGRAND [1], ce grand magicien de LaTeX, sans qui la mise en page de ce texte ne serait que celle par défaut de la classe `book` [2] et qui m'a aussi donné de précieux conseils sur la typographie française.

Bonne lecture.

Information – Ce texte est rédigé en vue d'une lecture dynamique à l'écran : toutes les références internes et externes sont actives et conduisent à la cible référencée (dans la plupart des visualisateurs de fichiers au format pdf, on revient à l'état précédent avec la combinaison de touches <alt><page arrière>). Néanmoins, les références de pages ont été conservées pour la lecture du document imprimé.

[1] De l'université McGill, de Montréal.
[2] Ceux qui écrivent en LaTeX me comprendront.

Table des matières

1 Algèbre tensorielle 9

1.1 Convention de sommation d'Einstein 9

Symbole de Kronecker, 11 • Représentation matricielle de certaines sommations, 11.

1.2 Algèbre vectorielle 12

Changement de base de vecteurs, 13 • Base duale, 14 • Composantes covariantes d'un vecteur, 14.

1.3 Tenseurs euclidiens réels 15

Composantes d'un tenseur, 16 • Tenseurs euclidiens particuliers, 17 • Espace vectoriel des tenseurs, 18 • Changement de base des tenseurs, 20 • Produit tensoriel de tenseurs, 21 • Traces d'un tenseur, 22 • Tenseurs d'ordre zéro, 23 • Produit contracté simple, 23 • Produit contracté double, 24.

1.4 Tenseur métrique 24

1.5 Tenseur d'orientation 26

Produit vectoriel, 27 • Identités algébriques importantes, 28.

1.6 Propriétés algébriques des tenseurs du second ordre 28

Produit scalaire et norme, 29 • Transposition, 29 • Symétrie, 30 • Antisymétrie, 30 • Vecteur adjoint, 31 • Parties symétrique et antisymétrique, 31 • Parties sphérique et déviatorique, 32 • Endomorphismes linéaires, 32 • Opérations internes, 34 • Spectre et invariants, 35 • Propriétés spectrales des tenseurs symétriques, 37 • Propriétés spectrales des tenseurs antisymétriques, 39 • Tenseurs orthogonaux, 40 • Décomposition polaire, 43 • Tenseurs uniaxiaux, 44.

1.7 En bref... 46

2 Fonctions tensorielles 47

2.1 Fonctions tensorielles d'un paramètre réel 47

Dérivée temporelle d'un tenseur, 47 • Cas des tenseurs symétriques, 48.

2.2 Fonctions scalaires d'une variable tensorielle 52

Opérateur linéaire tangent , 52 • Dérivée de fonctions composées, 54 • Composantes de l'opérateur linéaire tangent, 54 • Variables tensorielles contraintes, 55.

2.3 Fonctions scalaires de plusieurs tenseurs 56

Quelques identités utiles, 57 • Fonctions scalaires isotropes d'arguments tensoriels, 57.

2.4 Fonctions tensorielles d'arguments tensoriels 59

Fonctions d'un argument tensoriel, 59 • Fonctions tensorielles de plusieurs arguments tensoriels, 60 • Fonctions tensorielles isotropes, 60.

2.5 En bref... 60

3 Champs tensoriels 61

3.1 Systèmes de coordonnées 62

3.2 Base naturelle d'un système de coordonnées 63
Base physique, 64 • Variations de la base naturelle, 65.

3.3 Gradient d'un champ tensoriel 66

3.4 Éléments différentiels 68
Variations d'un point, 68 • Élément de volume, 68 • Élément de surface, 69 • Élément de longueur, 69.

3.5 Gradient d'un champ scalaire 70

3.6 Champs vectoriels 71
Gradient d'un champ vectoriel, 71 • Divergence d'un champ vectoriel, 73 • Rotationnel d'un champ vectoriel, 74 • Laplacien d'un champ scalaire, 74 • Propriétés des champs vectoriels, 75.

3.7 Champs tensoriels du second ordre 76
Gradient d'un champ tensoriel du second ordre, 76 • Divergence d'un champ tensoriel du second ordre, 77 • Rotationnel d'un champ tensoriel du second ordre, 77 • Laplacien d'un champ vectoriel, 78 • Propriétés des champs tensoriels du second ordre, 79.

3.8 Champs tensoriels d'ordre p 79

3.9 En bref... 80

4 Quelques applications 83

4.1 Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques 83
Gradient d'un champ scalaire, 83 • Champs vectoriels, 84.

4.2 Applications des théorèmes de la divergence 85

4.3 Dérivées d'intégrales de volume sur des domaines variables 85

4.4 Conditions de compatibilité 87
Autre forme, 89 • Méthode d'intégration, 89.

4.5 Cercles de Mohr 89

5 Conclusion 93

A Invariants et valeurs propres d'un tenseur symétrique réel 95

A.1 Condition d'existence de valeurs propres réelles 95

A.2 Définition de nouveaux invariants 96

A.3 Expression des valeurs propres en fonction des invariants 97

A.4 Classement des valeurs propres 98

A.5 Écart des valeurs propres extrêmes 98

A.6 Systèmes d'invariants 99

A.7 Détermination tensorielle des directions propres 100

A.8 En bref... 101

B Fonctions isotropes 103

B.1 Rotation d'un tenseur 103

B.2 Représentation des éléments d'un ensemble **105**

B.3 Représentation d'ensembles de vecteurs **105**

Vecteurs, 105 • Couples de vecteurs unitaires, 107 • Triplets de vecteurs unitaires, 108 • n-uplets de vecteurs unitaires, 108 • n-uplets de vecteurs, 109.

B.4 Représentation de directions non orientées **109**

Directions, 109 • Couples de directions, 110 • n-uplets de directions, 110.

B.5 Représentation de tenseurs réels du second ordre symétriques **110**

Tenseurs, 111 • Couples tenseur-direction, 111 • Couples de tenseurs, 112.

B.6 Fonctions scalaires isotropes **113**

B.7 Synthèse **115**

C Formulaire **117**

C.1 Système de coordonnées cylindriques **117**

Définition et notations, 117 • Champs scalaires, 118 • Champs vectoriels, 118 • Champs tensoriels du second ordre symétriques, 119.

C.2 Système de coordonnées sphériques **120**

Définition et notations, 120 • Champs scalaires, 121 • Champs vectoriels, 121 • Champs tensoriels du second ordre symétriques, 122.

1

Algèbre tensorielle

Dans ce chapitre on définit les tenseurs et leurs opérations algébriques. Avant d'en donner les définitions, on commence par introduire une convention de notation inventée par Albert EINSTEIN pour ses calculs en mécanique relativiste, mais qui est couramment utilisée aujourd'hui dans toutes les spécialités qui utilisent des calculs vectoriels, matriciels et tensoriels.

1.1 Convention de sommation d'Einstein

Dans les calculs sur les composantes de tenseurs, on aura souvent à manipuler des expressions de la forme :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^i{}_{jk}\, b_i\, c^k \quad \text{(Les indices en haut ne sont pas des puissances mais des numéros)}$$

En outre, les sommations auront toujours les mêmes bornes 1 et n (en mécanique des milieux continus classique : $n = 3$; en relativité générale $n = 4$).

Remarque 1.1 – Pour l'instant, la hauteur des indices n'a pas de signification. Elle en prendra une plus loin.

La convention d'Einstein consiste à omettre les signes Σ. On écrira donc :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^i{}_{jk}\, b_i\, c^k = a^i{}_{jk}\, b_i\, c^k \tag{1.1}$$

Dans le monôme $a^i{}_{jk}\, b_i\, c^k$ à droite de l'égalité (1.1), on reconnaît qu'il s'agit d'une sommation sur l'indice i car cet indice apparaît deux fois, une fois en haut et une fois en bas. Il en est de même pour l'indice k. Dans cet exemple, on est donc en présence d'une double sommation, l'une sur l'indice i, l'autre sur l'indice k. Pour $n = 3$, le monôme $a^i{}_{jk}\, b_i\, c^k$ représente donc la somme de neuf produits de trois termes :

$$\begin{aligned}
&a^1{}_{j1}\, b_1\, c^1 + a^1{}_{j2}\, b_1\, c^2 + a^1{}_{j3}\, b_1\, c^3 + && \text{($i = 1$, développement de la sommation sur k)}\\
&\quad a^2{}_{j1}\, b_2\, c^1 + a^2{}_{j2}\, b_2\, c^2 + a^2{}_{j3}\, b_2\, c^3 + && \text{($i = 2$, développement de la sommation sur k)}\\
&\qquad a^3{}_{j1}\, b_3\, c^1 + a^3{}_{j2}\, b_3\, c^2 + a^3{}_{j3}\, b_3\, c^3 && \text{($i = 3$, développement de la sommation sur k)}
\end{aligned}$$

Les indices de sommation sont appelés *indices muets* car on peut changer leur nom sans changer la valeur du résultat. En effet :

$$a^i{}_{jk}\, b_i\, c^k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a^i{}_{jk}\, b_i\, c^k = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a^p{}_{jq}\, b_p\, c^q = a^p{}_{jq}\, b_p\, c^q \tag{1.2}$$

Les autres indices, qui n'apparaissent qu'une fois dans le monôme, sont appelés *indices réels*. Dans le monôme $a^i{}_{jk}\, b_i\, c^k$, l'indice j est un indice réel ; ce monôme décrit donc trois nombres ($j = 1, \cdots, 3$), chacun d'eux étant la somme de neuf produits. Cette convention d'écriture des sommations n'est pas seulement utile en calcul tensoriel. On peut aussi l'utiliser en calcul vectoriel ou matriciel.

Exemple 1.1 – Soient un espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension n et l'une de ses bases $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Si on décide de numéroter les composantes des vecteurs avec un indice en haut, un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} v^i\, \boldsymbol{e}_i = v^i\, \boldsymbol{e}_i = v^m\, \boldsymbol{e}_m \tag{1.3}$$

Dans l'équation (1.3), il n'y a pas d'indice réel : il s'agit donc d'une seule égalité.

L'équation vectorielle $\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ n'a ni indice de sommation ni indice réel. Cette égalité vectorielle est équivalente aux n égalités entre nombres réels suivantes :

$$u^i + 2\, v^i = w^i$$

Noter que l'indice réel i est le même dans chaque monôme de l'égalité. Il permet de savoir que l'on a écrit n égalités en une seule ligne.

Exemple 1.2 – Soit M une matrice carrée $n \times n$, de terme général $M^i{}_j$, avec la convention habituelle : l'indice de gauche est l'indice de ligne et l'indice de droite est l'indice de colonne. Pour rappeler la hauteur des indices de ses termes, la matrice est notée $[M^\bullet{}_\bullet]$. Soit une matrice colonne de n lignes, de terme général c^k, notée $[c^\bullet]$. Les règles du produit matriciel donnent un sens au produit non commutatif $[M^\bullet{}_\bullet]\,[c^\bullet]$. On sait que le résultat est une matrice colonne, que l'on notera $[a^\bullet]$, dont le terme général est :

$$a^i = \sum_{p=1}^{n} M^i{}_p\, c^p = M^i{}_p\, c^p \tag{1.4}$$

Remarquer que, là encore, l'indice réel i est le même dans tous les monômes de l'égalité (1.4) ; cette ligne représente donc n égalités.

Exemple 1.3 – Le produit, non commutatif, de deux matrices carrées $[M^\bullet{}_\bullet]$ et $[P^\bullet{}_\bullet]$ est une matrice carrée $[Q^\bullet{}_\bullet]$ de terme général :

$$Q^i{}_j = \sum_{k=1}^{n} M^i{}_k\, P^k{}_j = M^i{}_k\, P^k{}_j \quad \text{(les indices réels } {}^i \text{ et } {}_j \text{ sont les mêmes dans tous les monômes)} \tag{1.5}$$

L'équation (1.5) contient deux indices réels i et j, elle représente donc n^2 égalités.

- **Règle 1.4 – Règles indicielles de la convention d'Einstein.** Les constatations précédentes suggèrent de poser les règles suivantes dont une partie, sur la hauteur des indices, sera justifiée plus loin :

1. Un indice de sommation est appelé *indice muet* ;
   - dans un monôme, un indice muet doit apparaître *exactement deux fois* : une fois en haut et une fois en bas ;
   - le nom d'un indice muet est sans importance et peut donc être changé ; il *doit* notamment être changé pour se distinguer des autres indices réels ou muets.
2. Un indice non muet est appelé *indice réel* ;
   - dans un monôme, un indice réel n'apparaît qu'*une seule fois*, en haut ou en bas ;
   - dans une égalité ou une somme de monômes, les indices réels de chaque terme doivent être les mêmes et placés à la même hauteur.

Si une expression indicielle utilisant la convention d'Einstein ne respecte pas strictement chacune de ces règles, elle est incorrecte ; elle résulte soit d'une erreur conceptuelle (par exemple, on ne peut pas additionner une matrice colonne et une matrice carrée), soit d'une erreur de calcul (mauvaise manipulation d'indice).

Conseil – C'est une bonne habitude, quand on débute, de vérifier à chaque ligne de calcul, que toutes les règles sont bien respectées. En particulier, un indice ne doit jamais figurer plus de deux fois dans un monôme.

1.1.1 Symbole de Kronecker

On définit le *symbole de Kronecker* :

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1.6}$$

Si l'on range les δ^i_j dans une matrice $n \times n$, on obtient la matrice unité. Noter que, contrairement aux matrices, l'ordre de ses indices est sans importance. On peut l'écrire indifféremment $\delta^p_q = \delta^p{}_q = \delta_q{}^p$ (la règle des indices réels est respectée). Lorsque l'un des indices de $\delta^\bullet_\bullet$ sert d'indice muet dans un monôme, on peut simplifier le monôme en ne retenant que les termes non nuls.

Exemple 1.5 – Quelques simplifications impliquant le symbole de Kronecker :

$$T^i{}_j\,\delta^k_i = T^k{}_j \quad ; \quad \delta^i_j \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{e}_j \quad ; \quad \delta^i_i = n \quad \text{(sommation sur } i\text{)}$$

1.1.2 Représentation matricielle de certaines sommations

La traduction matricielle de certaines égalités indicielles n'est jamais nécessaire, les égalités indicielles leur sont complètement équivalentes. Cette section n'a pour objectif que de retrouver des écritures matricielles couramment utilisées dans certains cours de mécanique des milieux continus.

Si une expression indicielle ne contient que des termes à un ou deux indices, on peut (si on le désire) représenter les sommations qu'elle contient sous forme de produits matriciels. Pour ranger des quantités à un ou deux indices dans des matrices, on adopte les conventions suivantes :
- les quantités à un seul indice sont rangées dans des matrices colonnes, l'indice unique (en haut ou en bas) est donc un indice de ligne ;
- les quantités à deux indices sont rangées dans des matrices carrées : l'indice de gauche (quelle que soit sa hauteur) est l'indice de ligne, l'indice de droite (quelle que soit sa hauteur) est l'indice de colonne.

Si l'on respecte strictement ces conventions de rangement, on peut évaluer une expression indicielle contenant des sommations en effectuant des opérations matricielles.

Pour les termes à plus de deux indices, on n'utilise généralement pas de représentation matricielle [1].

[1] Pour ranger des termes à trois indices on pourrait utiliser une « matrice cubique » $n \times n \times n$. On peut éventuellement aussi les représenter avec une n-colonne contenant des matrices carrées $n \times n$ ou bien par une matrice $n \times n$ contenant des n-colonnes. On peut aussi ranger les termes à quatre indices dans des matrices carrées de matrices carrées. Ces rangements sont peu commodes pour les calculs.

Exemple 1.6 – Les n termes c_j définis par $c_j = A_j{}^i b_i$ (que l'on peut aussi bien écrire $c_j = b_i A_j{}^i$) peuvent être calculés par les produits matriciels :

$$[c_\bullet] = [A_\bullet{}^\bullet]\,[b_\bullet] \qquad \text{ou} \qquad [c_\bullet]^\top = [b_\bullet]^\top\,[A_\bullet{}^\bullet]^\top$$

Exemple 1.7 – Les n^2 termes $C_i{}^j$ définis par $C_i{}^j = A_i{}^k B_k{}^j = B_k{}^j A_i{}^k$ (sommation sur les indices k) peuvent être calculés par les produits matriciels :

$$[C_\bullet{}^\bullet] = [A_\bullet{}^\bullet]\,[B_\bullet{}^\bullet] \qquad \text{ou} \qquad [C_\bullet{}^\bullet]^\top = [B_\bullet{}^\bullet]^\top\,[A_\bullet{}^\bullet]^\top$$

Attention – Le produit matriciel n'est pas commutatif : $[A]\,[B] \neq [B]\,[A]$, alors que l'on peut toujours écrire l'égalité $B_k{}^j A_i{}^k = A_i{}^k B_k{}^j$ parce que le produit des nombres réels est commutatif. Pour savoir si les n^2 termes $C_i{}^j = A_i{}^k B_k{}^j = B_k{}^j A_i{}^k$ doivent être calculés par le produit matriciel $[A]\,[B]$ ou par le produit matriciel $[B]\,[A]$, il convient de bien repérer la place des indices muets (ici k) pour écrire le bon produit matriciel.

- **Règle 1.8 – Règle pour trouver le bon produit matriciel.** Dans un monôme ne contenant que des termes à un ou deux indices avec des sommations, pour que les termes apparaissent dans le même ordre que dans le produit matriciel qui le représente, il est nécessaire de réorganiser le monôme de telle façon que :

1. les indices de sommation soient contigus dans le monôme,
2. les indices réels soient dans le même ordre de chaque côté de l'égalité.

Pour parvenir à ce résultat, il faut parfois transposer des matrices.

Exemple 1.9 – Les n termes c^i définis par $c^i = A^{ji} b_j = b_j A^{ji}$ peuvent être calculés par les produits matriciels :

$$[c^\bullet] = [A^{\bullet\bullet}]^\top\,[b_\bullet] \quad \text{ou} \quad [c^\bullet]^\top = [b_\bullet]^\top\,[A^{\bullet\bullet}]$$

Exemple 1.10 – Les n^2 termes $C_i{}^j$ définis par $C_i{}^j = A_{ki} B^{kj} = B^{kj} A_{ki}$ peuvent être calculés par les produits matriciels :

$$[C_\bullet{}^\bullet] = [A_{\bullet\bullet}]^\top\,[B^{\bullet\bullet}] \quad \text{ou} \quad [C_\bullet{}^\bullet]^\top = [B^{\bullet\bullet}]^\top\,[A_{\bullet\bullet}]$$

Il a fallu transposer des matrices carrées pour rendre les indices de sommation contigus tout en gardant les indices réels dans le même ordre de chaque coté de l'égalité.

1.2 Algèbre vectorielle

Cette section contient peu de concepts nouveaux. On la développe néanmoins pour familiariser le lecteur avec la pratique de la convention de sommation d'Einstein.

Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel de dimension n, soit $\{\boldsymbol{e}_i\}$ une base quelconque [2] de $\mathbb{V}$, et soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur de $\mathbb{V}$. Pour respecter la convention d'Einstein, on numérote les composantes des vecteurs sur cette base avec des indices en haut. Un vecteur s'écrit donc :

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$$

- **Définition 1.11 – Composantes contravariantes d'un vecteur.** Les nombres v^i sont appelés composantes contravariantes du vecteur $\boldsymbol{v}$ sur la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

Les composantes contravariantes sont donc les composantes habituelles d'un vecteur sur une base. Le qualificatif « contravariante » est justifié par ce qui suit.

[2] C'est-à-dire *a priori* ni orthogonale ni normée.

1.2.1 Changement de base de vecteurs

Soit $\{\boldsymbol{e}'_j\}$ une autre base de $\mathbb{V}$. Les vecteurs de la nouvelle base $\{\boldsymbol{e}'_j\}$ se définissent naturellement par leurs composantes (contravariantes) sur l'ancienne base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ par les n relations :

$$\boldsymbol{e}'_j = A^i{}_j\, \boldsymbol{e}_i \tag{1.7}$$

où le réel $A^i{}_j$ est la i^{e} composante contravariante du vecteur $\boldsymbol{e}'_j$ sur la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

Rappel – La condition $\det[A^\bullet{}_\bullet] \neq 0$ est nécessaire pour que les vecteurs $\{\boldsymbol{e}'_j\}$ soient une base de $\mathbb{V}$.

Inversement, l'ancienne base s'exprime sur la nouvelle base par les n relations :

$$\boldsymbol{e}_i = B^k{}_i\, \boldsymbol{e}'_k \tag{1.8}$$

On range les nombres $A^i{}_j$ et $B^k{}_i$ dans les deux matrices $[A^\bullet{}_\bullet]$ et $[B^\bullet{}_\bullet]$, avec la convention habituelle : l'indice de gauche est l'indice de ligne et l'indice de droite est l'indice de colonne.

- **Définition 1.12 – Matrices de passage.**
  – La matrice $[A^\bullet{}_\bullet]$ est appelée matrice de passage de $\{\boldsymbol{e}_i\}$ à $\{\boldsymbol{e}'_i\}$.
  – La matrice $[B^\bullet{}_\bullet]$ est appelée matrice de passage de $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ à $\{\boldsymbol{e}_i\}$.
  La j^{e} colonne de $[A^\bullet{}_\bullet]$ contient les composantes contravariantes du vecteur $\boldsymbol{e}'_j$ dans la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

- **Proposition 1.13 –** Les matrices $[A^\bullet{}_\bullet]$ et $[B^\bullet{}_\bullet]$ sont inverses.

  Démonstration – En combinant les deux égalités (1.7) et (1.8), il vient :

  $\boldsymbol{e}'_j = B^k{}_i A^i{}_j \boldsymbol{e}'_k$ (double sommation sur i et $k \Rightarrow$ somme de n^2 termes)

  Les vecteurs d'une base étant indépendants, cette égalité ne peut être vraie que pour $j = k$:

  $B^k{}_i A^i{}_j = \delta^k_j \quad \Leftrightarrow \quad [B^\bullet{}_\bullet]\,[A^\bullet{}_\bullet] = [I]$ où $[I]$ est la matrice unité. $\quad \Leftrightarrow \quad [B^\bullet{}_\bullet] = [A^\bullet{}_\bullet]^{-1}$

- **Proposition 1.14 – Changement de base des composantes contravariantes d'un vecteur.** Les composantes contravariantes d'un vecteur dans la base $\{\boldsymbol{e}'_j\}$ sont :

$$v'^k = B^k{}_i\, v^i \quad \Leftrightarrow \quad [v'^\bullet] = [B^\bullet{}_\bullet]\,[v^\bullet] \tag{1.9}$$

  Démonstration – Soit $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$ un vecteur donné par ses composantes contravariantes v^i sur la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Son expression sur la nouvelle base $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ est :

  $\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = v^i\, B^k{}_i\, \boldsymbol{e}'_k$ [éq. (1.8) p. 13]

  $= v'^k\, \boldsymbol{e}'_k$ (par définition)

  On en déduit les composantes contravariantes $\{v'^k\}$ du vecteur $\boldsymbol{v}$ dans la nouvelle base $\{\boldsymbol{e}'_k\}$:

  $v'^k = B^k{}_i\, v^i \quad \Leftrightarrow \quad [v'^\bullet] = [B^\bullet{}_\bullet]\,[v^\bullet]$

Alors que la nouvelle base $\{\boldsymbol{e}'_i\}$ se définit sur l'ancienne base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ avec la matrice $[A^\bullet{}_\bullet]$, les composantes contravariantes v'^k du vecteur $\boldsymbol{v}$ sur la nouvelle base se calculent en fonction des composantes contravariantes v^i avec la matrice $[B^\bullet{}_\bullet] = [A^\bullet{}_\bullet]^{-1}$. Cette constatation justifie le qualificatif de « contravariante » donné aux composantes ordinaires d'un vecteur sur la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

On vérifie aisément que le changement de base inverse des composantes contravariantes s'écrit :

$$v^k = A^k{}_i\, v'^i \quad \Leftrightarrow \quad [v^\bullet] = [A^\bullet{}_\bullet]\,[v'^\bullet] \tag{1.10}$$

1.2.2 Base duale

Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel *euclidien* (on y a défini un produit scalaire) de dimension n.

- **Définition 1.15 – Base duale.** On appelle base duale de la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ la base notée $\{\boldsymbol{e}^j\}$ dont les n vecteurs sont définis par :

$$\boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}_i = \delta_i^j \tag{1.11}$$

Par convention, les vecteurs de la base duale ont leur indice en haut.

Remarque – On peut interpréter géométriquement cette définition : un vecteur $\boldsymbol{e}^i$ de la base duale est orthogonal à tous les vecteurs de la base initiale de numéro différent, et son produit scalaire avec le vecteur de même numéro vaut 1.

Le lecteur vérifiera aisément que la base duale de la base duale $\{\boldsymbol{e}^i\}$ est la base initiale $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

1.2.3 Composantes covariantes d'un vecteur

Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur de $\mathbb{V}$. On note v_i ses composantes sur la base duale $\{\boldsymbol{e}^i\}$.

- **Définition 1.16 – Composantes covariantes d'un vecteur.** Les composantes v_i du vecteur $\boldsymbol{v}$ sur la base duale sont appelées composantes covariantes de $\boldsymbol{v}$.

On peut donc écrire l'égalité :

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = v_i \boldsymbol{e}^i$$

- **Proposition 1.17 –** Les composantes d'un vecteur sur la base duale sont ses produits scalaires avec les vecteurs de la base initiale.

Démonstration – En calculant les produits scalaires $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_k$ et $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^k$, il vient :

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_k = v_i \boldsymbol{e}^i \cdot \boldsymbol{e}_k = v_i\, \delta_k^i = v_k \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^k = v^i \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^k = v^i\, \delta_i^k = v^k$$

Les différentes manières d'écrire un vecteur $\boldsymbol{v}$ sont donc :

$$\boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i = v_i \boldsymbol{e}^i = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}^i)\boldsymbol{e}_i = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}^i \tag{1.12}$$

- **Proposition 1.18 – Changement de base des composantes covariances d'un vecteur.** Les composantes contravariantes d'un vecteur dans la base $\{\boldsymbol{e}'_j\}$ sont :

$$v'_k = A^i{}_k\, v_i$$

Démonstration – Considérons le changement de base défini dans l'équation (1.7) [p. 13] :

$$v'_k = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}'_k = \boldsymbol{v} \cdot (A^i{}_k \boldsymbol{e}_i) = A^i{}_k\, (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i) = A^i{}_k\, v_i$$

$$v_k = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{v} \cdot (B^i{}_k \boldsymbol{e}'_i) = B^i{}_k\, (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}'_i) = B^i{}_k\, v'_i \quad \text{(changement de base inverse)}$$

On constate que, contrairement aux composantes contravariantes, le changement de base des composantes covariantes utilise la matrice $[A^\bullet{}_\bullet]$, ce qui justifie le qualificatif de « covariante ».

Remarque 1.2 – On en déduit les matrices de passage entre les bases duales :

$$\boldsymbol{v} = v'_k \boldsymbol{e}'^k = A^i{}_k\, v_i \boldsymbol{e}'^k = v_i\,(A^i{}_k \boldsymbol{e}'^k) = v_i \boldsymbol{e}^i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}^i = A^i{}_k \boldsymbol{e}'^k$$
$$\boldsymbol{v} = v_k \boldsymbol{e}^k = B^i{}_k\, v'_i \boldsymbol{e}^k = v'_i\,(B^i{}_k \boldsymbol{e}^k) = v'_i \boldsymbol{e}'^i \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{e}'^i = B^i{}_k \boldsymbol{e}^k$$

Les matrices de passage entre les bases duales sont les inverses des matrices de passage entre les bases initiales.

En résumé, tout vecteur de $\mathbb{V}$ peut aussi bien être défini par ses composantes contravariantes ou covariantes sur une base :
- les composantes contravariantes d'un vecteur sont les composantes habituelles c'est-à-dire les coefficients de la combinaison linéaire des vecteurs de la base : $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^i \boldsymbol{e}_i$;
- les composantes covariantes d'un vecteur sont les produits scalaires de ce vecteur avec les vecteurs de base : $v_i = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i$ (elles sont aussi les composantes ordinaires sur la base duale : $\boldsymbol{v} = v_i \boldsymbol{e}^i$).

Bases orthonormées – Si la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ est orthonormée, le lecteur établira facilement qu'elle est confondue avec sa base duale. On a alors la relation matricielle $[v^\bullet] = [v_\bullet]$ (la convention d'Einstein interdit d'écrire « $v^i = v_i$ »).

Puisque dans ce cas, il semble inutile de distinguer les variances, beaucoup auteurs conviennent de mettre tous les indices à la même hauteur (généralement en bas), en modifiant la convention de sommation d'Einstein (sommation sur des indices répétés en bas).

Outre le fait que cette pratique astreint à n'utiliser que des bases orthonormées pour donner des composantes aux vecteurs, elle est peu recommandable car elle induit une confusion entre le concept de « composante » et le concept de « produit scalaire avec un vecteur de base ». Cette confusion, courante chez ceux qui ont l'habitude de n'utiliser que des bases orthonormées, risque d'entraîner des erreurs dans l'interprétation d'une formule indicielle. La règle qui impose une hauteur différente aux indices de sommation empêche cette confusion.

On laisse le soin au lecteur de vérifier que la matrice de passage *entre deux bases orthonormées* est une matrice orthogonale, c'est-à-dire telle que $[A^\bullet{}_\bullet]^{-1} = [A^\bullet{}_\bullet]^\top$.

1.3 Tenseurs euclidiens réels

Dans cette section on définit la notion de tenseur, ainsi que des opérations sur les tenseurs, ce qui constitue une *algèbre tensorielle* [3].

■ **Définition 1.19 – Tenseur.** Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. Un tenseur d'ordre p est une application p-linéaire de $\mathbb{V}^p$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $\boldsymbol{T}$ un tenseur d'ordre p. La p-linéarité du tenseur $\boldsymbol{T}$ signifie que son application à p vecteurs est linéaire par rapport à chacun de ses arguments :

$$\boldsymbol{T}(\cdots,\boldsymbol{x}_k+\boldsymbol{x}'_k,\cdots) = \boldsymbol{T}(\cdots,\boldsymbol{x}_k,\cdots)+\boldsymbol{T}(\cdots,\boldsymbol{x}'_k,\cdots), \quad \forall k \in [1,\cdots,p]$$
$$\boldsymbol{T}(\cdots,\lambda\,\boldsymbol{x}_k,\cdots) = \lambda\,\boldsymbol{T}(\cdots,\boldsymbol{x}_k,\cdots), \quad \forall k \in [1,\cdots,p]$$

Exemple 1.20 – L'application $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{V}^3 \;\to\; 3\boldsymbol{x}\cdot(2\boldsymbol{z}\wedge\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ est un tenseur d'ordre 3 (on vérifie aisément qu'elle est trilinéaire).

En revanche, l'application $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{V}^3 \;\to\; 3\boldsymbol{x}\cdot(2\boldsymbol{z}+\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ n'est pas un tenseur d'ordre 3 (elle n'est pas linéaire sur son second ni sur son troisième argument).

[3] Le lecteur est déjà familiarisé avec l'algèbre vectorielle.

1.3.1 Composantes d'un tenseur

Soit $\boldsymbol{T}$ un tenseur d'ordre p et soient p vecteurs $\{\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p\}$ donnés par leurs composantes contravariantes sur une base $\{\boldsymbol{e}_i\}$:

$$\boldsymbol{v}_1 = (v_1)^{i_1}\,\boldsymbol{e}_{i_1} \quad ; \quad \cdots \quad ; \quad \boldsymbol{v}_p = (v_p)^{i_p}\,\boldsymbol{e}_{i_p} \qquad \text{(sommations sur les indices } i_k\text{)}$$

L'application de $\boldsymbol{T}$ à ces p vecteurs conduit au nombre réel :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p) &= \boldsymbol{T}\left((v_1)^{i_1}\,\boldsymbol{e}_{i_1}, \cdots, (v_p)^{i_p}\,\boldsymbol{e}_{i_p}\right) && (p \text{ sommations sur les indices } i_1, \cdots, i_p) \\ &= \underbrace{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_p})}_{T_{i_1 \cdots i_p}} (v_1)^{i_1} \cdots (v_p)^{i_p} && (p\text{-linéarité du tenseur } \boldsymbol{T}) \end{aligned} \tag{1.13}$$

- **Définition 1.21 – Composantes covariantes d'un tenseur.** On appelle composantes covariantes du tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre p, les n^p nombres notés $T_{i_1 \cdots i_p}$, obtenus par l'application de $\boldsymbol{T}$ à p vecteurs de base :

$$T_{i_1 \cdots i_p} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_{i_1}, \cdots, \boldsymbol{e}_{i_p})$$

Exemple 1.22 – Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur d'ordre 3, son application à trois vecteurs $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{T}(u^i\,\boldsymbol{e}_i, v^j\,\boldsymbol{e}_j, w^k\,\boldsymbol{e}_k) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)\,u^i\,v^j\,w^k \qquad \text{(trilinéarité)}$$

Les n^3 réels $T_{ijk} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)$ sont les composantes covariantes de $\boldsymbol{T}$.

Le terme « composante » sera justifié plus loin. L'équation (1.13) montre que la connaissance des n^p réels $T_{i_1 \cdots i_p}$ suffit pour calculer le résultat de l'application du tenseur $\boldsymbol{T}$ à p vecteurs :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_p) = T_{i_1 \cdots i_p}\,(v_1)^{i_1} \cdots (v_p)^{i_p}$$

- **Définition 1.23 – Composantes d'autres variances.** On peut aussi choisir de définir certains ou tous les vecteurs arguments de $\boldsymbol{T}$ par leurs composantes covariantes. On obtient alors des composantes de variances différentes.

Exemple 1.24 – Si $\boldsymbol{T}$ est un tenseur d'ordre trois et si les trois vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ sont définis par :

$$\boldsymbol{x} = x^i\,\boldsymbol{e}_i \text{ (comp. contravariantes)} \quad ; \quad \boldsymbol{y} = y_j\,\boldsymbol{e}^j \text{ (comp. covariantes)} \quad ; \quad \boldsymbol{z} = z_k\,\boldsymbol{e}^k \text{ (comp. covariantes)}$$

L'application d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre trois à ces trois vecteurs donne le réel :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{T}(x^i\,\boldsymbol{e}_i, y_j\,\boldsymbol{e}^j, z_k\,\boldsymbol{e}^k) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j, \boldsymbol{e}^k)\,x^i\,y_j\,z_k = T_i^{\,jk}\,x^i\,y_j\,z_k \tag{1.14}$$

Les n^3 nombres $T_i^{\,jk} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}^j, \boldsymbol{e}^k)$ sont appelés composantes 1-covariantes 2-3-contravariantes du tenseur du troisième ordre $\boldsymbol{T}$.

Toutes les combinaisons sont possibles. Il existe donc différentes sortes de composantes du tenseur $\boldsymbol{T}$, désignées par des indices de hauteurs différentes. Le nombre d'indices est toujours égal à l'ordre du tenseur. D'une manière générale, les tenseurs d'ordre p ont n^p composantes d'une certaine combinaison de variances, chaque composante étant désignée avec p indices, inférieurs ou supérieurs.

1.3.2 Tenseurs euclidiens particuliers

- **Définition 1.25 – Tenseur métrique.** Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. On appelle tenseur métrique, noté $\boldsymbol{G}$, le tenseur du second ordre défini par :

$$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\} \in \mathbb{V}^2 \xrightarrow{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}$$

où $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}$ est le produit scalaire des deux vecteurs.

On vérifie aisément que l'application $\boldsymbol{G}$ est bien bilinéaire ; il s'agit donc bien un tenseur d'ordre deux. Ce tenseur sera étudié en détail plus loin.

- **Définition 1.26 – Tenseur d'orientation.** Soit $\mathbb{V}_3$ un espace vectoriel euclidien *de dimension trois* [4]. On appelle tenseur d'orientation le tenseur d'ordre 3, noté $\boldsymbol{H}$, défini par :

$$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\} \in \mathbb{V}_3\times\mathbb{V}_3\times\mathbb{V}_3 \xrightarrow{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}] \in \mathbb{R}$$

où $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$ est le produit mixte des trois vecteurs.

On vérifie aisément que l'application $\boldsymbol{H}$ est bien trilinéaire ; il s'agit donc bien un tenseur d'ordre trois. Ce tenseur sera étudié en détail plus loin.

- **Théorème 1.27 – Tenseurs euclidiens d'ordre 1.** Les tenseurs euclidiens d'ordre 1 sont isomorphes aux vecteurs.

Démonstration – Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel euclidien de dimension n, et soit $\boldsymbol{T}$ un tenseur d'ordre 1 quelconque. Son application à un vecteur $\boldsymbol{x} = x^i\boldsymbol{e}_i$ s'écrit :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(x^i\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{e}_i)x^i = T_i x^i \tag{1.15}$$

où les T_i sont les composantes covariantes du tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre 1.

Considérons maintenant un vecteur $\boldsymbol{v}$. On peut construire une application linéaire $\mathscr{V}$ qui à tout vecteur $\boldsymbol{x}$ associe le réel $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x}$. Cette application linéaire est un tenseur d'ordre 1 :

$$\mathscr{V}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} = v_i x^i$$

où, d'après l'équation (1.15), les v_i sont aussi les composantes covariantes du tenseur $\mathscr{V}$ d'ordre 1. On a donc l'égalité $v_i = \mathscr{V}_i$ (on laisse le soin au lecteur de vérifier que si le vecteur $\boldsymbol{x}$ est donné par ses composantes covariantes x_i, on obtient l'égalité $v^i = \mathscr{V}^i$).

On définit ainsi un isomorphisme entre les tenseurs du premier ordre et les vecteurs : à tout tenseur du premier ordre $\mathscr{V}$ on peut associer de manière biunivoque le vecteur $\boldsymbol{v}$ qui, dans une base, a les mêmes composantes ($v_i = \mathscr{V}_i$ ou $v^i = \mathscr{V}^i$). On invite le lecteur à vérifier, à titre d'exercice, que cette bijection entre l'ensemble des tenseurs d'ordre 1 et l'ensemble des vecteurs, définie par égalité de composantes dans une certaine base, est bien consistante à travers tout changement de base, c'est-à-dire de montrer que $v_i = \mathscr{V}_i \Leftrightarrow v'_i = \mathscr{V}'_i$.

Dans la suite, on ne distinguera donc plus les vecteurs et les tenseurs d'ordre 1, et on écrira :

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = v_i x^i = v^i x_i = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x} \tag{1.16}$$

Les vecteurs de $\mathbb{V}$ peuvent toujours être considérés comme des tenseurs du premier ordre, et inversement. Dans l'égalité (1.16), à gauche le symbole $\boldsymbol{v}$ est considéré comme un tenseur d'ordre 1 appliqué au vecteur $\boldsymbol{x}$, alors qu'à droite, le symbole $\boldsymbol{v}$ est considéré comme un vecteur.

[4] Cette restriction est indispensable car le produit mixte de trois vecteurs utilisé dans la définition du tenseur d'orientation n'est défini que dans un espace tridimensionnel. Il existe une généralisation à la dimension n. Elle implique l'introduction de la notion d'alterneur qui sort du cadre de ce cours. La dimension 3 est suffisante en mécanique classique.

Vocabulaire – Dans les cours d'algèbre linéaire, les tenseurs d'ordre 1 (applications linéaires $\mathbb{V} \to \mathbb{R}$) sont appelés *formes linéaires*. On montre dans la section suivante que l'espace des tenseurs de tous ordres (et donc en particulier l'espace des tenseurs d'ordre 1) est un espace vectoriel. Dans les cours d'algèbre linéaire, l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre 1 est appelé *espace dual* de $\mathbb{V}$. On verra plus loin qu'une base de cet espace dual est précisément la base duale $\{\boldsymbol{e}^i\}$ définie en (1.11) [p. 14].

1.3.3 Espace vectoriel des tenseurs d'ordre p

On définit deux opérations dans l'ensemble des tenseurs d'ordre p :

- **Définition 1.28 – Addition de deux tenseurs du même ordre.** Soient $\boldsymbol{T}_1$ et $\boldsymbol{T}_2$ deux tenseurs d'ordre p. On appelle somme de $\boldsymbol{T}_1$ et $\boldsymbol{T}_2$ le tenseur d'ordre p, noté $\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2$, défini par :

$$(\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2)(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) = \boldsymbol{T}_1(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) + \boldsymbol{T}_2(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p), \quad \forall \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p\} \in \mathbb{V}^p$$

On vérifie aisément que l'opérateur $(\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_2) : \mathbb{V}^p \to \mathbb{R}$ est bien p-linéaire si $\boldsymbol{T}_1$ et $\boldsymbol{T}_2$ sont des tenseurs d'ordre p. L'addition de deux tenseurs d'ordre différents n'a aucun sens.

- **Définition 1.29 – Multiplication d'un tenseur par un scalaire.** Soit λ un scalaire et $\boldsymbol{T}$ un tenseur d'ordre p. On appelle produit de $\boldsymbol{T}$ par λ le tenseur d'ordre p défini par :

$$(\lambda \boldsymbol{T})(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) = \lambda\, \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p), \quad \forall \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p\} \in \mathbb{V}^p$$

On vérifie aisément que l'opérateur $(\lambda \boldsymbol{T}) : \mathbb{V}^p \to \mathbb{R}$ est bien p-linéaire si $\boldsymbol{T}$ est p-linéaire.

- **Théorème 1.30 –** L'ensemble des tenseurs d'ordre p est un espace vectoriel.

Démonstration – Muni de ces deux opérations (addition et multiplication par un scalaire), l'ensemble des tenseurs d'ordre p satisfait aux axiomes de définition d'un espace vectoriel : l'élément neutre de l'addition est le tenseur nul d'ordre p, noté $\mathbf{0}$, qui est défini par :

$$\mathbf{0}(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p) = 0, \quad \forall \{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_p\}$$

et l'élément neutre de la multiplication par un scalaire est le scalaire 1.

Dans le but de définir une base de l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p, on définit une nouvelle opération entre vecteurs :

- **Définition 1.31 – Produit tensoriel de deux vecteurs.** On appelle produit tensoriel de deux vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$, le tenseur *du second ordre* noté $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ défini par :

$$\forall \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \in \mathbb{V}^2 \xrightarrow{\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}} (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x})(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$$

On vérifie aisément que le produit tensoriel $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ est bien une application bilinéaire, c'est-à-dire un tenseur du second ordre. En exprimant les vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sur la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$, on obtient les composantes covariantes du tenseur du second ordre $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$:

$$(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \big(\boldsymbol{v} \cdot (x^i \boldsymbol{e}_i)\big)\big(\boldsymbol{w} \cdot (y^j \boldsymbol{e}_j)\big) = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{e}_i)(\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{e}_j)\, x^i y^j$$
$$(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})_{ij}\, x^i y^j = v_i w_j\, x^i y^j, \quad \forall x^i y^j$$

Les n^2 composantes covariantes du tenseur du second ordre $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w}$ sont donc les nombres :

$$(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{w})_{ij} = v_i w_j$$

Le produit tensoriel de deux vecteurs n'est pas commutatif : on vérifie aisément que les tenseurs $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w}$ et $\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v}$ sont des applications bilinéaires différentes :

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \neq (\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{v})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

Vocabulaire – Dans certains textes, le produit tensoriel de deux vecteurs est appelé *produit dyadique*.

- **Définition 1.32 – Produit tensoriel de m vecteurs.** On appelle produit tensoriel de m vecteurs le tenseur d'ordre m défini par :

$$(\boldsymbol{v}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{v}_m)(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_m) = \prod_{i=1}^{m}\boldsymbol{v}_i\cdot\boldsymbol{x}_i = (\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{x}_1)\cdots(\boldsymbol{v}_m\cdot\boldsymbol{x}_m)$$

On vérifie aisément que ce produit tensoriel est bien m-linéaire.

Exemple 1.33 – Le produit tensoriel des vecteurs $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ est le tenseur d'ordre quatre défini par :

$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{y})\,(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{z})\,(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{t})$$
$$(\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d})^{ij}{}_{kl} = a^i\,b^j\,c_k\,d_l$$

où ici, les vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont définis par leurs composantes contravariantes, et les vecteurs $\boldsymbol{c}$ et $\boldsymbol{d}$ sont définis par leurs composantes covariantes. On obtient ainsi les composantes 1-2-contravariantes 3-4-covariantes du tenseur d'ordre quatre $\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{c}\otimes\boldsymbol{d}$.

- **Théorème 1.34 –** Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel de dimension n, soit $\{\boldsymbol{e}_i\}$ une base de $\mathbb{V}$ et soit $\{\boldsymbol{e}^i\}$ sa base duale. L'espace des tenseurs d'ordre p est un espace vectoriel de dimension n^p. Les n^p produits tensoriels de p vecteurs de base (ou de la base duale) sont une base de cet espace.

Démonstration – Soit $\mathbb{V}$ un espace de vecteurs de dimension n dont une n-base est $\{\boldsymbol{e}_i\}$ et sa n-base duale est $\{\boldsymbol{e}^i\}$. Pour faciliter la lecture, on fait la démonstration pour l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre $p=3$ (le lecteur généralisera sans difficulté).

Considérons les n^3 tenseurs $\{\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j\otimes\boldsymbol{e}^k\}$ (d'ordre 3) construits par le produit tensoriel de trois vecteurs [5] de la base duale $\{\boldsymbol{e}^i\}$. L'application de ces n^3 tenseurs à trois vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ s'écrit :

$$(\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j\otimes\boldsymbol{e}^k)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{x})\,(\boldsymbol{e}^j\cdot\boldsymbol{y})\,(\boldsymbol{e}^k\cdot\boldsymbol{z}) = x^i\,y^j\,z^k \quad \text{[déf. 1.32 p. 19 et éq. (1.12) p. 14]} \tag{1.17}$$

Considérons un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre 3 quelconque et son application à trois vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$:

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = T_{ijk}\,x^i\,y^j\,z^k \qquad \text{[éq. (1.21) p. 16]}$$
$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = T_{ijk}\,(\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j\otimes\boldsymbol{e}^k)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}), \quad \forall\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}\in\mathbb{V}^3 \qquad \text{[éq. (1.17)]} \tag{1.18}$$

L'égalité (1.18) étant vraie quels que soient les vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$, on en déduit l'égalité tensorielle suivante :

$$\boldsymbol{T} = T_{ijk}(\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j\otimes\boldsymbol{e}^k)$$

Cette égalité montre que tout tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre 3 est une combinaison linéaire des n^3 tenseurs d'ordre trois $\{\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j\otimes\boldsymbol{e}^k\}$. Ces n^3 tenseurs d'ordre trois constituent donc une base de l'espace des tenseurs d'ordre 3. Le nom de « composante » précédemment donné aux n^3 nombres T_{ijk} est donc pleinement justifié.

En exprimant les vecteurs $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ et $\boldsymbol{z}$ par leurs composantes de différentes variances, on construit d'autres bases tensorielles et d'autres composantes de différentes variances du tenseur $\boldsymbol{T}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T} &= T_i{}^j{}_k(\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}^k) && \text{(composantes 1-3-covariantes, 2-contravariantes)}\\ &= T_i{}^{jk}(\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_k) && \text{(composantes 1-covariantes, 2-3-contravariantes)}\\ &= \cdots\end{aligned}$$

[5] Ces vecteurs ne sont pas nécessairement distincts : $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}$ est bien un tenseur du troisième ordre.

Le raisonnement se généralise facilement aux tenseurs d'ordre quelconque : une base dans l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p est, par exemple, l'ensemble des n^p produits tensoriels :

$$\{\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \boldsymbol{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p}\}$$

Dans cette n^p-base, les composantes du tenseur sont des composantes complètement contravariantes :

$$\boldsymbol{T} = T^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p}$$

L'espace des tenseurs d'ordre p, noté $\mathbb{V}^{\otimes p}$, est donc un espace vectoriel de dimension n^p. On peut construire des bases de cet espace en formant tous les produits tensoriels de p vecteurs de base (duale ou non) de $\mathbb{V}$.

Exemple 1.35 – L'une des bases de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ (tenseurs du second ordre construits sur $\mathbb{V}_3$) est l'ensemble des neuf tenseurs de base du second ordre suivant :

$$\{\boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1 \otimes \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_2 \otimes \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \otimes \boldsymbol{e}_3\}$$

Dans cette base, les composantes d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ sont des composantes complètement contravariantes : $\boldsymbol{T} = T^{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j$.

1.3.4 Changement de base des tenseurs d'ordre p

Les tenseurs de base de l'espace vectoriel $\mathbb{V}^{\otimes p}$ sont des produits tensoriels de p vecteurs de base $\boldsymbol{e}_i$ ou $\boldsymbol{e}^j$ de l'espace vectoriel $\mathbb{V}$. Tout changement de base dans $\mathbb{V}$ induit donc un changement de base dans $\mathbb{V}^{\otimes p}$. On va établir ici les formules de changement de base permettant de calculer les nouvelles composantes des tenseurs en fonction des anciennes. Pour alléger les équations, on montre la démarche pour un tenseur d'ordre 3.

Soit un changement de base dans l'espace vectoriel $\mathbb{V}$:

$$\boldsymbol{e}'_j = A^i{}_j \boldsymbol{e}_i \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}_j = B^i{}_j \boldsymbol{e}'_i \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}'^j = B^j{}_i \boldsymbol{e}^i \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{e}^j = A^j{}_i \boldsymbol{e}'^i$$

On cherche la formule de changement de base des composantes $T_\bullet^{\bullet\bullet}$ du tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre 3 :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= T_i^{jk}\, \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k && \text{(expression de } \boldsymbol{T} \text{ dans l'ancienne base)} \\
&= T_i^{jk}\, (A^i{}_p \boldsymbol{e}'^p) \otimes (B^q{}_j \boldsymbol{e}'_q) \otimes (B^r{}_k \boldsymbol{e}'_r) && \text{(introduction de la nouvelle base)} \\
&= (A^i{}_p B^q{}_j B^r{}_k T_i^{jk})\, (\boldsymbol{e}'^p \otimes \boldsymbol{e}'_q \otimes \boldsymbol{e}'_r) && \text{(expression de } \boldsymbol{T} \text{ dans la nouvelle base)}
\end{aligned}$$

On en déduit les composantes de $\boldsymbol{T}$ dans la nouvelle base :

$$T'^{qr}_p = A^i{}_p B^q{}_j B^r{}_k T_i^{jk}$$

L'analyse de cette démarche permet d'énoncer la règle suivante :

- **Règle 1.36 – Construction des formules de changement de base.** Pour changer de base les composantes d'un tenseur, on somme chaque indice covariant avec des termes $A^\bullet_\bullet$ et on somme chaque indice contravariant avec des termes $B^\bullet_\bullet$, tout en respectant les règles d'indices de la convention d'Einstein. Cette règle est valable pour les tenseurs de tous ordres (y compris les vecteurs).

1.3.5 Produit tensoriel de tenseurs

Le produit tensoriel n'a été défini que pour des vecteurs :

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{x})(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{y})$$

Les vecteurs étant des tenseurs d'ordre 1, on peut encore écrire :

$$(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{w})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{y}) \qquad \text{[éq. (1.16) p. 17]}$$

Cette interprétation permet de généraliser la définition du produit tensoriel aux tenseurs de tous ordres :

- **Définition 1.37 –** Soit $\boldsymbol{P}$ un tenseur d'ordre p et soit $\boldsymbol{Q}$ un tenseur d'ordre q. On appelle produit tensoriel de $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$, noté $\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}$, le tenseur d'ordre $p+q$ défini par :

$$(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{p+q}) = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p)\,\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_{p+1},\cdots,\boldsymbol{x}_{p+q}) \tag{1.19}$$

On vérifie aisément que l'opérateur $\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}$ est bien linéaire par rapport à chacun de ses arguments, c'est-à-dire qu'il est $(p+q)$-linéaire si $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont des tenseurs.

Les composantes covariantes (par exemple) de $\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}$ sont :

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})_{i_1\cdots i_{p+q}} &= (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_{p+q}}) && \text{[déf. 1.21 p. 16]}\\
&= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_p})\,\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{e}_{i_{p+1}},\cdots,\boldsymbol{e}_{i_{p+q}}) && \text{[déf. 1.37]}\\
&= P_{i_1\cdots i_p}\,Q_{i_{p+1}\cdots i_{p+q}} && \text{[déf. 1.21 p. 16]}
\end{aligned}$$

Chacune des n^{p+q} composantes de $\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}$ est le produit d'une composante de $\boldsymbol{P}$ et d'une composante de $\boldsymbol{Q}$.

Exemple 1.38 – Si $\boldsymbol{P}$ est un tenseur d'ordre 2 et $\boldsymbol{Q}$ un tenseur d'ordre 3, le tenseur $\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}$ est un tenseur d'ordre 5 :

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\,\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}), \quad \forall\{\boldsymbol{v},\boldsymbol{w},\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\}\in\mathbb{V}^5\\
&= P_{ij}\,Q_{kmn}\,v^i\,w^j\,x^k\,y^m\,z^n\\
&= P_i{}^j\,Q_k{}^m{}_n\,v^i\,w_j\,x^k\,y_m\,z^n\\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Chacune des n^5 composantes de $\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}$ est le produit de l'une des n^2 composantes de $\boldsymbol{P}$ avec l'une des n^3 composantes de $\boldsymbol{Q}$. Les égalités suivantes donnent quelques exemples de différentes variances des composantes de $\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}$ sur des tenseurs de base :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q} &= P_{ij}\,Q_{kmn}\,(\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j\otimes\boldsymbol{e}^k\otimes\boldsymbol{e}^m\otimes\boldsymbol{e}^n) \quad\Leftrightarrow\quad (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})_{ijkmn} = P_{ij}\,Q_{kmn}\\
&= P_i{}^j\,Q_k{}^m{}_n\,(\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}^k\otimes\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{e}^n) \quad\Leftrightarrow\quad (\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})_i{}^j{}_k{}^m{}_n = P_i{}^j\,Q_k{}^m{}_n\\
&= \cdots
\end{aligned}$$

On vérifie aisément que le produit tensoriel est associatif, non commutatif et distributif par rapport à l'addition des tenseurs :

$$\boldsymbol{P}\otimes(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}') = \boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}'$$

1.3.6 Traces d'un tenseur

Soit un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre $p \geqslant 2$. Ses composantes dans une certaine base sont un ensemble de n^p nombres à p indices, chacun étant soit covariant soit contravariant.

On considère les n^{p-2} nombres calculés par une certaine sommation de ses composantes : on choisit deux indices de variance différente et on fait la sommation sur ces deux indices.

Par exemple, en faisant une sommation sur le second indice (covariant) et le quatrième indice (contravariant) des composantes $T_{i_1 i_2}{}^{i_3 i_4 \cdots i_{p-1}}{}_{i_p}$, on définit les n^{p-2} nombres $K_{i_1}{}^{i_3 i_5 \cdots i_{p-1}}{}_{i_p}$ calculés à partir des composantes de $\boldsymbol{T}$ par la sommation suivante :

$$K_{i_1}{}^{i_3 i_5 \cdots i_{p-1}}{}_{i_p} = T_{i_1 \boldsymbol{k}}{}^{i_3 \boldsymbol{k} i_5 \cdots i_{p-1}}{}_{i_p} \quad \text{(sommation sur l'indice } k\text{)}$$

- **Proposition 1.39 –** Les n^{p-2} nombres $K_{i_1}{}^{i_3 i_5 \cdots i_{p-1}}{}_{i_p}$ sont les composantes d'un tenseur.

Démonstration – Jusqu'ici, tous les tenseurs ont été définis en se donnant un opérateur $\mathbb{V}^p \to \mathbb{R}$ dont il suffisait de vérifier la p-linéarité pour affirmer sa tensorialité. Ici, on tente de définir un tenseur $\boldsymbol{K}$ par ses composantes obtenues par une sommation de composantes *dans une certaine base* du tenseur $\boldsymbol{T}$. Pour s'assurer que cette définition a un sens intrinsèque, il faut vérifier que si l'on fait la même sommation dans une autre base, on obtient bien le même tenseur.

Pour alléger les écritures, on suppose que $\boldsymbol{T}$ est un tenseur d'ordre 4. Ses composantes dans la n^4-base $\{\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_m\}$ sont $T_{ij}{}^{km}$. On définit les n^2 nombres :

$$K_i{}^k = T_{ij}{}^{kj} \qquad \text{(sommation sur les indices 2 et 4)}$$

Les composantes de $\boldsymbol{T}$ dans une autre base $\{\boldsymbol{e}'^i \otimes \boldsymbol{e}'^j \otimes \boldsymbol{e}'_k \otimes \boldsymbol{e}'_m\}$ sont $T'_{pq}{}^{rs}$ et on définit pareillement les n^2 nombres :

$$K'_p{}^r = T'_{pq}{}^{rq} \qquad \text{(sommation sur les mêmes indices 2 et 4)}$$

La formule de changement de base des composantes du tenseur $\boldsymbol{T}$ est :

$$T'_{pq}{}^{rs} = A^i{}_p A^j{}_q B^r{}_k B^s{}_m T_{ij}{}^{km} \quad \text{[règle 1.36 p. 20]}$$

En faisant la sommation sur les indices 2 et 4 des composantes de $\boldsymbol{T}$ dans la nouvelle base, il vient :

$$\begin{aligned} K'_p{}^r &= T'_{pq}{}^{rq} = A^i{}_p A^j{}_q B^r{}_k B^q{}_m T_{ij}{}^{km} \\ &= A^i{}_p B^r{}_k \delta^j_m T_{ij}{}^{km} \\ &= A^i{}_p B^r{}_k T_{ij}{}^{kj} \\ K'_p{}^r &= A^i{}_p B^r{}_k K_i{}^k \end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement de base des composantes 1-covariante 2-contravariante d'un tenseur d'ordre 2 [règle 1.36 p. 20]. Les nombres $K'_p{}^r$ et $K_i{}^k$ sont donc les composantes d'un même tenseur $\boldsymbol{K}$ respectivement sur les n^2-bases $\{\boldsymbol{e}'^p \otimes \boldsymbol{e}'_r\}$ et $\{\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_k\}$.

La proposition 1.39 permet de poser la définition suivante :

- **Définition 1.40 – Traces d'un tenseur.** On appelle (r,s)-trace d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre $p \geqslant 2$, notée $\mathbf{tr}^{(r,s)}\boldsymbol{T}$, le tenseur d'ordre $p-2$ dont les composantes sont la sommation sur les r^{e} et s^{e} indices (ils doivent être de variance différente) des composantes de $\boldsymbol{T}$.

Cas particulier – La trace d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre 2 est un tenseur d'ordre zéro [6] :

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{T} = T^i{}_i = T_i{}^i, \text{ sa formule de changement de base est : } T'^i{}_i = T^i{}_i \ \ (= T'_i{}^i = T_i{}^i) \tag{1.20}$$

C'est donc la trace de la matrice [7] de ses composantes *mixtes* $[T_\bullet{}^\bullet]$ ou $[T^\bullet{}_\bullet]$ dans toute base.

[6] Pour la trace d'un tenseur d'ordre deux, il est inutile de préciser sur quels indices on fait la sommation.
[7] La trace d'une matrice est définie dans tous les cours d'algèbre matricielle.

1.3.7 Tenseurs d'ordre zéro

- **Définition 1.41 – Scalaire, invariant.** Les tenseurs d'ordre zéro sont appelés scalaires ou encore invariants. Ce sont des nombres réels dont la définition est telle que leur valeur est invariante par changement de base.

  Remarques 1.3 – *Tous les nombres réels ne sont pas des scalaires*. Par exemple, le réel défini comme la première composante d'un vecteur n'est pas un scalaire car il change avec la base. Il en est de même pour la somme des composantes d'un vecteur.

  En revanche, la trace d'un tenseur du second ordre est un scalaire [éq. (1.20) p. 22]. On en déduit que la norme d'un vecteur est un scalaire :

  $$\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} = v_i\, v^i = \mathrm{tr}(\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v})$$

  Tout nombre réel résultat d'un problème de physique devrait être un scalaire car un résultat physique est en principe indépendant de la base que l'on utilise pour faire les calculs. Si le résultat physique est un vecteur ou un tenseur, les composantes de ce vecteur ou de ce tenseur sur une base n'ont *a priori* aucune interprétation physique possible, sauf si la base utilisée a une signification physique particulière.

1.3.8 Produit tensoriel contracté simple

- **Définition 1.42 – Produit tensoriel contracté simple.** Soit $\boldsymbol{P}$ un tenseur d'ordre $p \geqslant 1$ et soit $\boldsymbol{Q}$ un tenseur d'ordre $q \geqslant 1$. On appelle produit tensoriel contracté simple des tenseurs $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$, le tenseur noté $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}$ et d'ordre $p+q-2$, défini par :

  $$\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q} = \mathrm{tr}^{(p,p+1)}(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q}) = P_{i_1\cdots i_{p-1}k}\, Q^k{}_{j_2\cdots j_q}\, (\boldsymbol{e}^{i_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{i_{p-1}}\otimes\boldsymbol{e}^{j_2}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_q})$$

- **Règle 1.43 – Composantes d'un produit contracté simple.** Pour calculer les composantes de $\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}$, le dernier indice des composantes du tenseur $\boldsymbol{P}$ est sommé avec le premier indice des composantes du tenseur $\boldsymbol{Q}$ [(8)].

- **Propriété 1.44 –** On vérifie aisément que le produit tensoriel contracté simple n'est, en général, ni commutatif, ni associatif, mais qu'il est distributif par rapport à l'addition des tenseurs :

  $$\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}') = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}'$$

  Remarque 1.4 – Le produit contracté simple de deux tenseurs d'ordre 1 (vecteurs) $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{v}$ est donc un tenseur d'ordre 0 [déf. 1.42] :

  $$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_i\, v^i = u^i\, v_i$$

  D'autre part, le produit scalaire de ces deux vecteurs est :

  $$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = (u^i\,\boldsymbol{e}_i)\cdot(v_j\,\boldsymbol{e}^j) = u^i\, v_j\,(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j) = u^i\, v_j\,\delta_i^j = u^i\, v_i \quad (= u_i\, v^i)$$

  Le produit scalaire de deux vecteurs est donc aussi le produit contracté simple de ces deux vecteurs, ce qui justifie l'emploi du même symbole « · ». Il faut toutefois perdre les habitudes de commutativité que l'on a avec le symbole « · » considéré comme un produit scalaire de vecteurs. *Le produit contracté simple n'est commutatif qu'entre deux vecteurs*. Pour éviter cette ambiguïté, le produit contracté simple est parfois noté « $\overline{\otimes}$ ».

[(8)] Rappel : il faut que les indices de sommation aient des variances différentes [règle 1.4 p. 10] ; il faut donc que les composantes des tenseurs $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ soient données dans des variances convenables pour les indices de sommation. Pour changer les variances, on pourra utiliser au besoin l'« ascenseur d'indices » (voir plus loin la règle 1.50 [p. 26])

1.3.9 Produit tensoriel contracté double

- **Définition 1.45 – Produit contracté double.** Soit $\boldsymbol{P}$ un tenseur d'ordre $p \geqslant 2$ et soit $\boldsymbol{Q}$ un tenseur d'ordre $q \geqslant 2$. On appelle produit tensoriel doublement contracté des tenseurs $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$, le tenseur d'ordre $p+q-4$, noté $\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q}$, défini par :

$$\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q} = \mathbf{tr}^{(p-1,p)}\left(\mathbf{tr}^{(p,p+2)}(\boldsymbol{P}\otimes\boldsymbol{Q})\right)$$

- **Règle 1.46 – Composantes d'un produit contracté double.** Pour calculer les composantes de $\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q}$, les deux derniers indices des composantes de $\boldsymbol{P}$ sont sommés avec les deux premiers indices des composantes de $\boldsymbol{Q}$ [9].

Exemple 1.47 – Si $p=3$ et $q=3$, le tenseur $\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q}$ est un tenseur d'ordre 2 :

$$\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q} = P^{ijk}\,Q_{jk}{}^{m}\,(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_m) \quad\Leftrightarrow\quad (\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q})^{im} = P^{ijk}\,Q_{jk}{}^{m}$$

On vérifie aisément que le produit tensoriel contracté double n'est, en général, ni commutatif, ni associatif, mais qu'il est distributif par rapport à l'addition des tenseurs :

$$\boldsymbol{P}:(\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{Q}') = \boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q}'$$

Remarque 1.5 – Le produit doublement contracté est parfois noté $\overline{\overline{\otimes}}$.

On généralise facilement au produit r fois contracté de deux tenseurs $\boldsymbol{P}$ d'ordre $p \geqslant r$ et $\boldsymbol{Q}$ d'ordre $q \geqslant r$. On note ce produit : « $\overline{\otimes}^r$ ». Le résultat est un tenseur d'ordre $p+q-2r$:

$$\boldsymbol{P}\overline{\otimes}^r\boldsymbol{Q} = P^{k_1\cdots k_{p-r}\,i_1\cdots i_r}\,Q_{i_1\cdots i_r\,j_1\cdots j_{q-r}}\,(\boldsymbol{e}_{k_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}_{k_{p-r}}\otimes\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_{q-r}})$$

En particulier, l'application de tout tenseur $\boldsymbol{P}$ d'ordre p à p vecteurs peut s'écrire :

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_p) = \boldsymbol{P}\overline{\otimes}^p(\boldsymbol{x}_1\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{x}_p) \quad \text{(égalité de tenseurs d'ordre 0)}$$

1.4 Tenseur métrique

- **Définition 1.48 – Tenseur métrique.** On appelle tenseur métrique le tenseur du second ordre, noté $\boldsymbol{G}$, défini par :

$$\forall\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}\in\mathbb{V}\times\mathbb{V} \xrightarrow{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}$$

Étant du second ordre, les composantes du tenseur métrique peuvent être de quatre variances différentes :

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \quad ; \quad g_i{}^j = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}^j) = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j = \delta_i^j \\ g^{ij} &= \boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{e}^j) = \boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}^j \quad ; \quad g^i{}_j = \boldsymbol{G}(\boldsymbol{e}^i,\boldsymbol{e}_j) = \boldsymbol{e}^i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_j^i \end{aligned} \tag{1.21}$$

Il est remarquable de constater que les composantes de variances mixtes du tenseur métrique ont la même valeur dans toute base. Les composantes mixtes du tenseur métrique se rangent dans la matrice unité :

$$[g^\bullet{}_\bullet] = [g_\bullet{}^\bullet] = [I]$$

[9] Voir la note 8 [p. 23].

En revanche, les termes des deux matrices de composantes $[g_{\bullet\bullet}]$ et $[g^{\bullet\bullet}]$ dépendent de la base. Ces deux matrices sont symétriques, $g_{ij} = g_{ji}$ et $g^{ij} = g^{ji}$, car le produit scalaire de deux vecteurs est commutatif.

Les différentes manières d'écrire le produit scalaire de deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ en fonction de leurs composantes sont donc :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G} : (\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{G} : (\boldsymbol{y}\otimes\boldsymbol{x}) && \text{(écritures tensorielles)} \\ &= g_{ij}\, x^i\, y^j = g^{ij}\, x_i\, y_j = x^i\, y_i = x_i\, y^i && \text{(écritures indicielles)} \end{aligned} \tag{1.22}$$

■ **Propriété 1.49 –** Soit $\boldsymbol{T}$ un tenseur d'ordre p, on a les égalités $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{G} = \boldsymbol{T}$.

Démonstration –

$$\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{T} = g_i{}^j\, T_j{}^{\cdots}\, (\boldsymbol{e}^i\otimes\cdots) = \delta_i^j\, T_j{}^{\cdots}\, (\boldsymbol{e}^i\otimes\cdots) = T_i{}^{\cdots}\, (\boldsymbol{e}^i\otimes\cdots) = \boldsymbol{T}$$

On montre aisément de la même manière que $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{G} = \boldsymbol{T}$.

Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur. On a donc en particulier $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$. Si l'on calcule le produit contracté $\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{v}$ avec les composantes non mixtes de $\boldsymbol{G}$, il vient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{v} &= g^{ji}\, v_i\, \boldsymbol{e}_j \quad \Leftrightarrow \quad v^j = g^{ji}\, v_i \\ &= g_{ji}\, v^i\, \boldsymbol{e}^j \quad \Leftrightarrow \quad v_j = g_{ji}\, v^i \end{aligned} \tag{1.23}$$

Les formules (1.23) montrent que les composantes non mixtes du tenseur métrique $\boldsymbol{G}$ permettent de calculer les composantes contravariantes d'un vecteur en fonction de ses composantes covariantes et inversement. Cette faculté de changement de variance des composantes, appelée « ascenseur d'indice », sera généralisée aux tenseurs de tous ordres [règle 1.50 p. 26].

Matriciellement, les relations (1.23) s'écrivent :

$$[v^\bullet] = [g^{\bullet\bullet}][v_\bullet] \quad \text{et} \quad [v_\bullet] = [g_{\bullet\bullet}][v^\bullet]$$

On en déduit une propriété importante des composantes non mixtes du tenseur métrique :

$$[g^{\bullet\bullet}] = [g_{\bullet\bullet}]^{-1} \tag{1.24}$$

On définit le nombre réel *non scalaire* [10] g, qui interviendra dans la suite :

$$g = \det[g_{\bullet\bullet}] \quad \Leftrightarrow \quad \det[g^{\bullet\bullet}] = \frac{1}{g} \tag{1.25}$$

En appliquant l'équation (1.23) aux vecteurs de base, on obtient une relation entre les vecteurs de base et ceux de sa base duale :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}_i = g_{pq}\,(\boldsymbol{e}_i)^q\, \boldsymbol{e}^p = g_{pq}\,\delta_i^q\, \boldsymbol{e}^p = g_{pi}\, \boldsymbol{e}^p = g_{ip}\, \boldsymbol{e}^p \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{e}_i = g_{ip}\, \boldsymbol{e}^p \\ \boldsymbol{e}^i = \boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{e}^i = g^{pq}\,(\boldsymbol{e}^i)_q\, \boldsymbol{e}_p = g^{pq}\,\delta_q^i\, \boldsymbol{e}_p = g^{pi}\, \boldsymbol{e}_p = g^{ip}\, \boldsymbol{e}_p \quad &\Rightarrow \quad \boldsymbol{e}^i = g^{ip}\, \boldsymbol{e}_p \end{aligned} \tag{1.26}$$

Les relations (1.26) permettent de calculer les composantes d'une certaine variance d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ quelconque en fonction de ses composantes dans une autre variance. Pour alléger les

[10] Sa valeur dépend de la base.

écritures, on suppose qu'un tenseur $\boldsymbol{T}$ est d'ordre 3 et que l'on connaît ses composantes $T_{\bullet\bullet}{}^{\bullet}$. On cherche, par exemple, ses composantes $T^{\bullet}{}_{\bullet\bullet}$:

$$\boldsymbol{T} = T_{ij}{}^{k}\,\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}_k = T_{ij}{}^{k}\,(g^{ip}\,\boldsymbol{e}_p) \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes (g_{kq}\,\boldsymbol{e}^q) = g^{ip}\,g_{kq}\,T_{ij}{}^{k}\,\boldsymbol{e}_p \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^q$$

on en déduit la relation entre des composantes de variances différentes :

$$T^{p}{}_{jq} = g^{ip}\,g_{kq}\,T_{ij}{}^{k}$$

L'analyse du calcul précédent permet d'énoncer la règle générale suivante :

- **Règle 1.50 – Règle de « l'ascenceur d'indices ».** Pour « élever un indice » de composante, il faut le sommer avec $g^{\bullet\bullet}$ alors que pour « abaisser un indice » de composante, il faut le sommer avec $g_{\bullet\bullet}$, tout en respectant les règles d'indices de la convention d'Einstein.

1.5 Tenseur d'orientation dans $\mathbb{V}_3$

- **Définition 1.51 – Tenseur d'orientation.** On appelle tenseur d'orientation dans $\mathbb{V}_3$, noté $\boldsymbol{H}$, le tenseur d'ordre trois défini par :

$$\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\} \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \times \mathbb{V}_3 \xrightarrow{\boldsymbol{H}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = [\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}] \in \mathbb{R}$$

où $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}]$ est le produit mixte des trois vecteurs.

Les indices i, j et k varient de 1 à 3 et on suppose en outre que la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ est directe.

Restriction – La définition 1.51 du tenseur d'orientation n'a de sens que si $\mathbb{V}$ est de dimension 3, ce qui sera suffisant en mécanique des milieux continus. En effet, le produit vectoriel de deux vecteurs et le produit mixte de trois vecteurs ne sont pas définis pour des dimensions supérieures [11].

On se propose de calculer les composantes du tenseur d'orientation. On note h_{ijk} ses composantes complètement covariantes et h^{ijk} ses composantes complètement contravariantes dans une base. Le tenseur d'orientation $\boldsymbol{H}$ peut s'écrire :

$$\boldsymbol{H} = h_{ijk}\,\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^k = h^{ijk}\,\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k$$

On calcule d'abord les composantes complètement covariantes de $\boldsymbol{H}$. Par définition [def. 1.21 p. 16], elles sont :

$$h_{ijk} = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k) = [\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j,\boldsymbol{e}_k]$$

Les propriétés du produit mixte entraînent que :
– les composantes qui ont deux indices égaux sont nulles ;
– une permutation paire des indices ne change pas sa valeur ;
– une permutation impaire des indices change son signe.

[11] Il existe une généralisation du concept de tenseur d'orientation dans des espaces de dimension supérieure à 3, voir la note 4 [p. 17].

Il suffit donc de calculer $h_{123} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3] = \boldsymbol{e}_1 \cdot (\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) > 0$ (on suppose la base directe [12]). Les composantes covariantes du vecteur $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$ sont ses produits scalaires avec les vecteurs de base [propriété 1.17 p. 14] :

$$(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \cdot \boldsymbol{e}_1 = h_{123} > 0 \quad ; \quad (\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \cdot \boldsymbol{e}_2 \quad = 0 \quad ; \quad (\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0$$

On en déduit que :

$$(\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) = h_{123}\, \boldsymbol{e}^1$$

et donc :

$$\|\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3\| = h_{123}\, \|\boldsymbol{e}^1\|$$

Le carré de la norme du vecteur $\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3$ est donc :

$$\begin{aligned}
(h_{123})^2\, \|\boldsymbol{e}^1\|^2 &= \|\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3\|^2 = (\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \cdot (\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) = [\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3\,, \boldsymbol{e}_2\,, \boldsymbol{e}_3] \\
&= \big((\boldsymbol{e}_2 \wedge \boldsymbol{e}_3) \wedge \boldsymbol{e}_2\big) \cdot \boldsymbol{e}_3 = \big((\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2)\boldsymbol{e}_3 - (\boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3)\boldsymbol{e}_2\big) \cdot \boldsymbol{e}_3 \quad \text{(double produit vectoriel)} \\
&= (g_{22}\, \boldsymbol{e}_3 - g_{23}\, \boldsymbol{e}_2) \cdot \boldsymbol{e}_3 = g_{22}\, g_{33} - g_{23}\, g_{23}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$h_{123}\, \|\boldsymbol{e}^1\| = \sqrt{g_{22}\, g_{33} - g_{23}\, g_{23}} \quad \Rightarrow \quad h_{123} = \frac{\sqrt{g_{22}\, g_{33} - g_{23}\, g_{23}}}{\|\boldsymbol{e}^1\|}$$

Or, $\|\boldsymbol{e}^1\|^2 = \boldsymbol{e}^1 \cdot \boldsymbol{e}^1 = g^{11}$, et d'autre part :

$$[g^{\bullet\bullet}] = [g_{\bullet\bullet}]^{-1} \ \text{[éq. (1.24) p. 25]} \quad \Rightarrow \quad g^{11} = \frac{g_{22}\, g_{33} - g_{23}\, g_{32}}{g} \ \text{[éq. (1.25) p. 25]}$$

Il reste donc : $h_{123} = \sqrt{g}$. Les composantes covariantes non nulles du tenseur d'orientation $\boldsymbol{H}$ sont :

$$h_{123} = h_{231} = h_{312} = -h_{132} = -h_{213} = -h_{321} = \sqrt{g} \tag{1.27}$$

Les composantes contravariantes $h^{ijk} = [\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{e}^j, \boldsymbol{e}^k]$ ont les mêmes propriétés de permutation d'indices que les composantes h_{ijk}. Avec un calcul analogue au précédent, on trouve que les composantes contravariantes non nulles de $\boldsymbol{H}$ sont :

$$h^{123} = h^{231} = h^{312} = -h^{132} = -h^{213} = -h^{321} = \frac{1}{\sqrt{g}} \tag{1.28}$$

Les composantes mixtes de $\boldsymbol{H}$ ont des expressions compliquées que l'on évite d'utiliser. On peut toujours les calculer avec la règle de « l'ascenseur d'indices » [règle 1.50 p. 26].

1.5.1 Application : produit vectoriel dans $\mathbb{V}_3$

Soient deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ de $\mathbb{V}_3$ et soit $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z} &= (x^i \boldsymbol{e}_i) \wedge (y^j \boldsymbol{e}_j) = x^i\, y^j\, \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \\
z_k &= \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{e}_k = x^i\, y^j\, [\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k] = x^i\, y^j\, h_{ijk} = h_{kij}\, x^i\, y^j
\end{aligned}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs peut donc s'écrire avec le tenseur d'orientation :

$$\begin{aligned}
& \boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{y}) \\
\Leftrightarrow \quad & (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})_k = h_{kij}\, x^i\, y^j \\
\Leftrightarrow \quad & (\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y})^k = h^{kij}\, x_i\, y_j
\end{aligned} \tag{1.29}$$

[12] Le signe des composantes de $\boldsymbol{H}$ dépend de l'orientation de la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$. Pour cette raison, ce tenseur est souvent qualifié de « pseudo-tenseur »

1.5.2 Identités algébriques importantes

Le produit contracté simple $\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}$ est un tenseur d'ordre 4 de composantes :

$$\begin{aligned}
h_{ijk}\,h^{kmn} &= (\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j)_k\,(\boldsymbol{e}^m\wedge\boldsymbol{e}^n)^k = (\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j)\cdot(\boldsymbol{e}^m\wedge\boldsymbol{e}^n)\\
&= [\boldsymbol{e}_i\,,\boldsymbol{e}_j\,,\boldsymbol{e}^m\wedge\boldsymbol{e}^n] = \boldsymbol{e}_i\cdot\big(\boldsymbol{e}_j\wedge(\boldsymbol{e}^m\wedge\boldsymbol{e}^n)\big)\\
&= \boldsymbol{e}_i\cdot\big((\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}^n)\,\boldsymbol{e}^m-(\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}^m)\,\boldsymbol{e}^n\big) \qquad \text{(double produit vectoriel)}\\
h_{ijk}\,h^{kmn} &= \delta_i^m\,\delta_j^n-\delta_i^n\,\delta_j^m
\end{aligned} \tag{1.30}$$

On en déduit une identité tensorielle importante :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H} &= (\delta_i^m\,\delta_j^n-\delta_i^n\,\delta_j^m)\,\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j\otimes\boldsymbol{e}_m\otimes\boldsymbol{e}_n\\
\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j\otimes(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{e}_i)
\end{aligned} \tag{1.31}$$

De l'équation (1.31) on déduit les composantes du produit $\boldsymbol{H}:\boldsymbol{H}$ (c'est un tenseur d'ordre 2) :

$$h_{ijk}\,h^{jkn} = -h_{ijk}\,h^{kjn} = -\delta_i^j\,\delta_j^n+\delta_i^n\,\delta_j^j = -\delta_i^n+3\,\delta_i^n = 2\,\delta_i^n$$

On en déduit une autre identité tensorielle importante :

$$\boldsymbol{H}:\boldsymbol{H} = 2\boldsymbol{G} \tag{1.32}$$

1.6 Propriétés algébriques des tenseurs réels du second ordre

Les tenseurs réels du second ordre jouent un rôle très important en mécanique des milieux continus. On consacre cette section à leur étude. Certaines des propriétés qui suivent sont particulières aux tenseurs réels du second ordre construits sur $\mathbb{V}_3$. Dans toute la suite, les seuls tenseurs considérés sont des tenseurs *réels*, c'est-à-dire que leurs composantes sur une base sont des nombres réels ; pour alléger la lecture, on omettra le plus souvent de le préciser.

Les tenseurs du second ordre sont les applications bilinéaires $\mathbb{V}^2\to\mathbb{R}$. Ils sont dans un espace vectoriel de dimension n^2 noté $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ (si $n=3$, sa dimension est 9, l'espace est noté $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$). Les tenseurs de base de cet espace sont les n^2 produits tensoriels de deux vecteurs de base de $\mathbb{V}$ ou de sa base duale. Tout tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ peut donc s'écrire sous les quatre formes suivantes :

$$\boldsymbol{T} = T^{ij}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j = T_{ij}\,\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j = T^i{}_j\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^j = T_i{}^j\,\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

Son application à deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ est un *scalaire* :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = T^{ij}\,x_i\,y_i = T_{ij}\,x^i\,y^i = T^i{}_j\,x_i\,y^j = T_i{}^j\,x^i\,y_j$$

On peut écrire ce scalaire avec des opérations tensorielles :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}:(\boldsymbol{x}\otimes\boldsymbol{y})$$

1.6.1 Produit scalaire et norme dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$

- **Théorème 1.52 – Produit scalaire dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$.** Le produit doublement contracté est un produit scalaire dans l'espace vectoriel des tenseurs du second ordre réels.

  Démonstration – Le produit doublement contracté de deux tenseurs du second ordre a les quatre propriétés suivantes :
  1. le produit contracté double de deux tenseurs du second ordre est un *scalaire* (tenseur d'ordre 0) ;
  2. le produit contracté double de deux tenseurs du second ordre est commutatif :
  $$\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q} = P^i{}_j\, Q_i{}^j = Q_i{}^j\, P^i{}_j = \boldsymbol{Q}:\boldsymbol{P}$$
  3. le produit contracté double d'un tenseur du second ordre avec lui-même est non négatif :
  $$\boldsymbol{T}:\boldsymbol{T} = T^i{}_j\, T_i{}^j = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^\top) = \mathrm{tr}\big([T^\bullet{}_\bullet]\,[T^\bullet{}_\bullet]^\top\big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(T^i{}_j)^2 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{T}:\boldsymbol{T} > 0, \quad \forall\boldsymbol{T}$$
  4. le produit contracté double d'un tenseur du second ordre avec le tenseur nul est nul :
  $$\boldsymbol{0}:\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}:\boldsymbol{0} = 0$$

  Ces quatre propriétés permettent d'affirmer que le produit contracté double satisfait aux axiomes de définition d'un *produit scalaire* dans l'espace vectoriel $\mathbb{V}^{\otimes 2}$.

Muni de ce produit scalaire, l'espace des tenseurs du second ordre réels $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ est un espace vectoriel *euclidien*. On peut donc poser la définition suivante :

- **Définition 1.53 – Norme euclidienne d'un tenseur du second ordre.** La norme euclidienne d'un tenseur du second ordre est définie par :

$$\|\boldsymbol{T}\| = \sqrt{\boldsymbol{T}:\boldsymbol{T}} \tag{1.33}$$

1.6.2 Transposé d'un tenseur du second ordre

- **Définition 1.54 – Transposé d'un tenseur du second ordre.** On dit que le tenseur du second ordre $\boldsymbol{U}$ est le transposé du tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ si :

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}), \quad \forall\{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\}\in\mathbb{V} \tag{1.34}$$

Le tenseur transposé du tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ sera noté $\boldsymbol{T}^\top$.

Dans une base quelconque, les relations entre les composantes de $\boldsymbol{T}$ et de $\boldsymbol{T}^\top$ sont :

$$\begin{aligned}
&(T^\top)_{ij} = T_{ji} \Leftrightarrow [(T^\top)_{\bullet\bullet}] = [T_{\bullet\bullet}]^\top \quad ; \quad (T^\top)^{ij} = T^{ji} \Leftrightarrow [(T^\top)^{\bullet\bullet}] = [T^{\bullet\bullet}]^\top\\
&(T^\top)^i{}_j = T_j{}^i \Leftrightarrow [(T^\top)^\bullet{}_\bullet] = [T_\bullet{}^\bullet]^\top \quad ; \quad (T^\top)_i{}^j = T^j{}_i \Leftrightarrow [(T^\top)_\bullet{}^\bullet] = [T^\bullet{}_\bullet]^\top
\end{aligned}$$

Remarque – Noter les variances des composantes dans la seconde ligne.

On laisse le soin au lecteur de vérifier les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{P}:\boldsymbol{Q} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{Q}^\top) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{P}^\top\cdot\boldsymbol{Q}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}^\top\cdot\boldsymbol{P}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{P}^\top)\\
&\boldsymbol{T}:\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^\top:\boldsymbol{T}^\top \;\Rightarrow\; \|\boldsymbol{T}\| = \|\boldsymbol{T}^\top\|
\end{aligned} \tag{1.35}$$

1.6.3 Tenseurs du second ordre symétriques

- **Définition 1.55 – Tenseur symétrique.** On dit qu'un tenseur du second ordre est symétrique s'il est égal à son transposé :

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^\top \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{S}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}), \quad \forall \{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\} \in \mathbb{V}^2$$

Les composantes d'un tenseur d'un second ordre symétrique $\boldsymbol{S}$ dans une base quelconque ont donc les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} S_{ij} = S_{ji} \;\Leftrightarrow\; [S_{\bullet\bullet}] = [S_{\bullet\bullet}]^\top \quad &; \quad S^{ij} = S^{ji} \;\Leftrightarrow\; [S^{\bullet\bullet}] = [S^{\bullet\bullet}]^\top \\ S^i{}_j = S_j{}^i \;\Leftrightarrow\; [S^\bullet{}_\bullet] = [S_\bullet{}^\bullet]^\top \quad &; \quad S_i{}^j = S^j{}_i \;\Leftrightarrow\; [S_\bullet{}^\bullet] = [S^\bullet{}_\bullet]^\top \end{aligned} \tag{1.36}$$

Remarque 1.6 – Les matrices de composantes covariantes $[S_{\bullet\bullet}]$ et contravariantes $[S^{\bullet\bullet}]$ d'un tenseur du second ordre symétrique sont des matrices symétriques. En revanche, les matrices des composantes mixtes d'un tenseur du second ordre symétrique $[S_\bullet{}^\bullet]$ et $[S^\bullet{}_\bullet]$ ne sont pas symétriques en général [13].

L'ensemble des tenseurs du second ordre symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ car l'addition et la multiplication par un scalaire conservent la symétrie. La dimension de ce sous-espace est $d = n(n+1)/2$ (si $n = 3$ alors $d = 6$). On le notera $\mathbb{V}^{\otimes 2s}$. Une base de ce sous-espace est, par exemple, la d-base de tenseurs symétriques : $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j + \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i\}$.

- **Proposition 1.56 –** On a l'équivalence suivante :

$$\boldsymbol{S} \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2s} \; (\boldsymbol{S} \text{ symétrique}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{H} : \boldsymbol{S} = \boldsymbol{0} \tag{1.37}$$

Démonstration – On démontre aisément cette équivalence en utilisant la symétrie des composantes non mixtes de $\boldsymbol{S}$ [éq. (1.36) p. 30] et les propriétés d'indices du tenseur d'orientation $\boldsymbol{H}$.

1.6.4 Tenseurs du second ordre antisymétriques

- **Définition 1.57 – Tenseur antisymétrique.** On dit qu'un tenseur du second ordre est antisymétrique s'il est opposé à son transposé :

$$\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^\top \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}), \quad \forall \{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\} \in \mathbb{V}^2$$

Les composantes d'un tenseur du second ordre antisymétrique $\boldsymbol{A}$ dans une base quelconque ont donc les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} A_{ij} = -A_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad [A_{\bullet\bullet}] = -[A_{\bullet\bullet}]^\top \quad &; \quad A^{ij} = -A^{ji} \quad \Leftrightarrow \quad [A^{\bullet\bullet}] = -[A^{\bullet\bullet}]^\top \\ A^i{}_j = -A_j{}^i \quad \Leftrightarrow \quad [A^\bullet{}_\bullet] = -[A_\bullet{}^\bullet]^\top \quad &; \quad A_i{}^j = -A^j{}_i \quad \Leftrightarrow \quad [A_\bullet{}^\bullet] = -[A^\bullet{}_\bullet]^\top \end{aligned}$$

Remarque 1.7 – Les matrices de composantes covariantes $[A_{\bullet\bullet}]$ et contravariantes $[A^{\bullet\bullet}]$ d'un tenseur du second ordre antisymétrique sont des matrices antisymétriques (elles ont donc une diagonale nulle). En revanche, les matrices des composantes mixtes d'un tenseur du second ordre antisymétrique $[A_\bullet{}^\bullet]$ et $[A^\bullet{}_\bullet]$ ne sont pas antisymétriques en général [14].

L'ensemble des tenseurs du second ordre antisymétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{V}^{\otimes 2}$ car l'addition et la multiplication par un scalaire conservent l'antisymétrie. La dimension de ce sous-espace est $d = n(n-1)/2$ (si $n = 3$ alors $d = 3$). On le notera $\mathbb{V}^{\otimes 2a}$. Une base de ce sous-espace est, par exemple, la d-base de tenseurs antisymétriques $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_i\}$.

[13] Sauf si la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ est orthonormée.
[14] Sauf si la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ est orthonormée.

1.6.5 Vecteur adjoint à un tenseur antisymétrique de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$

On se limite ici au cas particulier où $n = 3$. La dimension de l'espace vectoriel des tenseurs antisymétriques est donc $n(n-1)/2 = 3$.

- **Définition 1.58 – Vecteur adjoint.** On appelle vecteur adjoint au tenseur du second ordre antisymétrique $\boldsymbol{A} \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$, le vecteur noté $\boldsymbol{a}$ défini par :

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} : \boldsymbol{A} \tag{1.38}$$

En utilisant l'équation (1.30) [p. 28], le lecteur montrera facilement que :

$$\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{A} \tag{1.39}$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

- **Théorème 1.59 –** L'espace des tenseurs du second ordre antisymétriques $\mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$ est isomorphe à l'espace des vecteurs $\mathbb{V}_3$ par les relations :

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} : \boldsymbol{A} \in \mathbb{V}_3 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{a} \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2a} \tag{1.40}$$

En utilisant l'équation (1.29) [p. 27], on en déduit la propriété suivante :

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{v} \tag{1.41}$$

1.6.6 Décomposition en parties symétrique et antisymétrique

Le sous-espace des tenseurs du second ordre symétriques $\mathbb{V}^{\otimes 2s}$ et le sous-espace des tenseurs du second ordre antisymétriques $\mathbb{V}^{\otimes 2a}$ sont orthogonaux. En effet, soient $\boldsymbol{S} \in \mathbb{V}^{\otimes 2s}$ et $\boldsymbol{A} \in \mathbb{V}^{\otimes 2a}$, leur produit scalaire est nul :

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} = S_{ij}A^{ij} = -S_{ij}A^{ji} = -S_{ji}A^{ji} = -\boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{S} : \boldsymbol{A} = 0$$

Tout tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ peut donc être décomposé de manière unique en la somme d'un tenseur symétrique et antisymétrique. La décomposition est :

$$\boldsymbol{T} = \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}^\top)}_{\mathbf{sym}\,\boldsymbol{T}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\boldsymbol{T} - \boldsymbol{T}^\top)}_{\mathbf{asym}\,\boldsymbol{T}} \tag{1.42}$$

On vérifie aisément que $\mathbf{sym}\,\boldsymbol{T}$ est symétrique et que $\mathbf{asym}\,\boldsymbol{T}$ est antisymétrique. On les appelle respectivement *partie symétrique* de $\boldsymbol{T}$ et *partie antisymétrique* de $\boldsymbol{T}$.

On laisse le soin au lecteur de vérifier les propriétés suivantes :

$$\|\boldsymbol{T}\|^2 = \|\mathbf{sym}\,\boldsymbol{T}\|^2 + \|\mathbf{asym}\,\boldsymbol{T}\|^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \|\boldsymbol{T}\| \geqslant \|\mathbf{sym}\,\boldsymbol{T}\| \\ \|\boldsymbol{T}\| \geqslant \|\mathbf{asym}\,\boldsymbol{T}\| \end{cases} \tag{1.43}$$

1.6.7 Décomposition en parties sphérique et déviatorique

- **Définition 1.60 – Tenseur sphérique.** On dit qu'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{S}$ est sphérique s'il est un multiple du tenseur métrique : $\boldsymbol{S} = \alpha \boldsymbol{G}$, où α est un scalaire.

- **Définition 1.61 – Déviateur.** On dit qu'un tenseur $\boldsymbol{D}$ est déviatorique (ou un déviateur) si sa trace est nulle : $\mathrm{tr}\boldsymbol{D} = 0$.

L'ensemble des tenseurs sphériques est un sous-espace vectoriel car l'addition et la multiplication par un scalaire conservent la sphéricité. Ce sous-espace est de dimension 1. De même, l'ensemble des déviateurs est un sous-espace vectoriel car l'addition et la multiplication par un scalaire conservent la trace nulle. Ce sous-espace est de dimension $n^2 - 1$. Ces deux sous-espaces sont orthogonaux. En effet, si $\boldsymbol{S}$ est sphérique et $\boldsymbol{D}$ est un déviateur, leur produit scalaire est nul :

$$\boldsymbol{S} : \boldsymbol{D} = \alpha \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} = \alpha \, \mathrm{tr}\boldsymbol{D} = 0$$

Tout tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ peut donc être décomposé de manière unique en la somme d'un tenseur sphérique et d'un déviateur. La décomposition est :

$$\boldsymbol{T} = \underbrace{\left(\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{T}}{n}\boldsymbol{G}\right)}_{\mathbf{sph}\boldsymbol{T}} + \underbrace{\left(\boldsymbol{T} - \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{T}}{n}\boldsymbol{G}\right)}_{\mathbf{dev}\boldsymbol{T}} \tag{1.44}$$

Le tenseur $\mathbf{sph}\boldsymbol{T}$ est bien sphérique et le tenseur $\mathbf{dev}\boldsymbol{T}$ est bien de trace nulle :

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{dev}\boldsymbol{T} = \mathrm{tr}\left(\boldsymbol{T} - \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{T}}{n}\boldsymbol{G}\right) = \mathrm{tr}\boldsymbol{T} - \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{T}}{n}\,\mathrm{tr}\boldsymbol{G} = 0, \quad \text{car } \mathrm{tr}\boldsymbol{G} = n$$

On les appelle respectivement *partie sphérique* de $\boldsymbol{T}$ et *partie déviatorique* de $\boldsymbol{T}$.

Vocabulaire – Les mots « déviateur » et « déviatorique » sont consacrés par l'usage mais ils peuvent induire en erreur : quand on considère un tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ comme un endomorphisme linéaire de $\mathbb{V}$ [section 1.6.8], on constate bien que sa partie sphérique ne fait que changer le module des vecteurs sans changer leur direction. La partie déviatorique, quant à elle, les dévie en général [15] mais change aussi leur module. Si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur transformé par $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{S} + \boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{v}$, le cosinus de la déviation est :

$$\cos(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \cdot \frac{\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{w}\|} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \cdot \frac{(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{v}}{\|(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{v}\|} = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{v}\|} + \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\| \, \|(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{v}\|}$$

La déviation d'un vecteur par un tenseur du second ordre n'est donc pas seulement due à sa partie déviatorique, comme pourrait le suggérer la terminologie en usage. Il vaudrait mieux dénommer les « déviateurs » par *tenseurs de trace nulle* [16]. Les tenseurs du second ordre qui dévient les vecteurs sans changer leur module sont les tenseurs orthogonaux [section 1.6.13 p. 40].

1.6.8 Endomorphismes linéaires de $\mathbb{V}$ et tenseurs du second ordre

- **Théorème 1.62 –** Les endomorphismes linéaires de $\mathbb{V}$ sont isomorphes aux tenseurs du second ordre. L'isomorphisme est défini par :

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v}, \ \forall \boldsymbol{v}$$

[15] Mais pas tous : les vecteurs propres associés à une valeur propre positive [déf. 1.70 p. 35] ne sont pas déviés.
[16] Les anglophones disent *traceless tensor*.

Démonstration – Soit une base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ de $\mathbb{V}$. Le produit contracté simple d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ et d'un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ est un vecteur $\boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} \quad \Leftrightarrow \quad w^i = T^i{}_j v^j \quad \Leftrightarrow \quad [w^\bullet] = [T^\bullet{}_\bullet]\,[v^\bullet]$$

À tout tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ on peut donc associer un endomorphisme linéaire $\mathscr{L}$ de $\mathbb{V}$, de matrice $[\mathscr{L}^\bullet{}_\bullet]$, tel que :

$$\mathscr{L}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v}$$
$$\mathscr{L}^i{}_j v^j = T^i{}_j v^j \quad \forall v^j$$

Le terme général de la matrice de l'endomorphisme $\mathscr{L}$ dans la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ est donc :

$$\mathscr{L}^i{}_j = T^i{}_j \quad \Leftrightarrow \quad [\mathscr{L}^\bullet{}_\bullet] = [\boldsymbol{T}^\bullet{}_\bullet]$$

Inversement, si l'on se donne un endomorphisme linéaire $\mathscr{L}$, de matrice $[\mathscr{L}^\bullet{}_\bullet]$, on peut lui associer un tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ défini par :

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u} \cdot \mathscr{L}(\boldsymbol{v}), \qquad \forall \boldsymbol{u}\, \forall \boldsymbol{v}$$
$$T^i{}_j u_i v^j = u_i\,(\mathscr{L}^i{}_j v^j), \quad \forall u_i\, \forall v^j$$
$$T^i{}_j u_i v^j = \mathscr{L}^i{}_j u_i v^j, \qquad \forall u_i\, \forall v^j$$

Les composantes mixtes du tenseur $\boldsymbol{T}$ dans la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ sont donc :

$$T^i{}_j = \mathscr{L}^i{}_j \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{T}^\bullet{}_\bullet] = [\mathscr{L}^\bullet{}_\bullet] \tag{1.45}$$

Il existe donc une bijection entre l'ensemble des tenseurs du second ordre et l'ensemble des endomorphismes linéaires de $\mathbb{V}$:
– $\mathscr{L}$ est l'endomorphisme linéaire de $\mathbb{V}$ dont la matrice dans une base est $[T^\bullet{}_\bullet]$;
– $\boldsymbol{T}$ est le tenseur d'ordre 2 dont la matrice de composantes mixtes dans la même base est $[\mathscr{L}^\bullet{}_\bullet]$.
On laisse le soin au lecteur de vérifier que cet isomorphisme, défini par une égalité de matrices dans une certaine base, est consistant à travers tout changement de base, c'est-à-dire $T^i{}_j = \mathscr{L}^i{}_j \Leftrightarrow T'^i{}_j = \mathscr{L}'^i{}_j$.

Désormais, on confond tenseurs du second ordre et endomorphismes linéaires de $\mathbb{V}$:

$$\mathscr{L} = \boldsymbol{T} \quad \text{et on écrit :} \quad \boldsymbol{T}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} \tag{1.46}$$

Puisque $\boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, on en déduit que l'endomorphisme linéaire associé au tenseur métrique est l'identité.

Remarque 1.8 – Le produit contracté $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T}$ est aussi un vecteur. On pourrait donc de la même manière établir une autre bijection en faisant correspondre à l'endomorphisme $\mathscr{L}$ un tenseur $\boldsymbol{T}'$ tel que $\mathscr{L}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T}'$. Le lecteur vérifiera aisément que le tenseur $\boldsymbol{T}'$ est le transposé de $\boldsymbol{T}$. Lorsque le tenseur $\boldsymbol{T}$ est symétrique, les deux bijections se confondent. Dans la suite, on ne considèrera qu'un seul endomorphisme de $\mathbb{V}$ associé à $\boldsymbol{T}$: celui défini par $\mathscr{L}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v}$.

■ **Théorème 1.63 – Composition d'endomorphismes.** Soient $\mathscr{T}$ et $\mathscr{U}$ deux endomorphismes linéaires de $\mathbb{V}_3$ et soient $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}$ les tenseurs du second ordre qui leurs sont isomorphes [th. 1.62 p. 32]. La composition des endomorphismes est isomorphe au produit simplement contracté des tenseurs :

$$\{\mathscr{T} \leftrightarrow \boldsymbol{T} \ \text{ et } \ \mathscr{U} \leftrightarrow \boldsymbol{U}\} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{T} \circ \mathscr{U} \leftrightarrow \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U}$$

Démonstration – On sait de l'algèbre linéaire élémentaire que la matrice de l'endomorphisme linéaire composé $\mathscr{T} \circ \mathscr{U}$ est le produit matriciel $[\mathscr{T}^\bullet{}_\bullet]\,[\mathscr{U}^\bullet{}_\bullet]$.

$$\begin{aligned}
[\mathscr{T}^\bullet{}_\bullet]\,[\mathscr{U}^\bullet{}_\bullet] &= [T^\bullet{}_\bullet]\,[U^\bullet{}_\bullet] && \text{[éq. (1.45) p. 33]}\\
&= [(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U})^\bullet{}_\bullet] && \text{[déf. 1.42 p. 23]}\\
&= [(\mathscr{T} \circ \mathscr{U})^\bullet{}_\bullet] && \text{[éq. (1.45) p. 33]}
\end{aligned}$$

En vertu de l'isomorphisme (1.46) [p. 33], on peut donc écrire :

$$\mathscr{W} = \mathscr{T} \circ \mathscr{U} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U} = \boldsymbol{W} \tag{1.47}$$

1.6.9 Opérations internes dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$

Dans l'espace vectoriel des tenseurs du second ordre $\mathbb{V}^{\otimes 2}$, on dispose maintenant d'un produit interne « · » (non commutatif) et d'un produit scalaire « : » (commutatif dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$). Leur combinaison conduit à la définition suivante :

- **Définition 1.64 – Produit combiné dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$.** On appelle produit combiné de tenseurs du second ordre l'opération ternaire suivante : $\boldsymbol{A} : (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \in \mathbb{R}$

On laisse le soin au lecteur de vérifier les identités suivantes :

$$\begin{aligned} A_{ij}\,(B^{ik}\,C_k{}^j) &= B^{ik}\,(A_{ij}\,C_k{}^j) &= C_k{}^j\,(B^{ik}\,A_{ij}) \\ \boldsymbol{A} : (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{B} : (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C}^\top) &= \boldsymbol{C} : (\boldsymbol{B}^\top \cdot \boldsymbol{A}) \end{aligned} \tag{1.48}$$

Ces identités, sont utiles pour factoriser des expressions tensorielles de scalaires.

Remarque 1.9 – En mécanique des milieux continus, la grande majorité des tenseurs du second ordre utilisés sont symétriques et les transpositions disparaissent.

- **Définition 1.65 – Puissance entière dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$.** La puissance entière d'un tenseur du second ordre est le tenseur du second ordre défini par :

$$\boldsymbol{T}^q = \underbrace{\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{T}}_{q \text{ termes}}, \quad \forall q \in \mathbb{N}\,; \quad \text{par convention : } \boldsymbol{T}^0 = \boldsymbol{G}. \tag{1.49}$$

- **Définition 1.66 – Exponentielle dans $\mathbb{V}^{\otimes 2}$.** On définit l'exponentielle d'un tenseur du second ordre par :

$$\mathbf{e}^{\boldsymbol{T}} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{T}^q}{q!} = \boldsymbol{G} + \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\boldsymbol{T}^q}{q!} \tag{1.50}$$

Cette définition est une généralisation du développement en série de l'exponentielle d'un réel [17].

Attention – L'exponentielle d'un tenseur du second ordre n'a pas toutes les propriétés classiques de l'exponentielle des réels ou des complexes. Notamment, $\mathbf{e}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{e}^{\boldsymbol{T}'} \neq \mathbf{e}^{\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}'}$ en raison de la non commutativité du produit « . » pour les tenseurs du second ordre. On verra plus loin que la commutativité de l'opération « · » entre deux tenseurs du second ordre est vraie si les deux tenseurs sont symétriques et ont une base propre commune ; dans ce cas, la propriété $\mathbf{e}^{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{e}^{\boldsymbol{T}'} = \mathbf{e}^{\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}'}$ est rétablie.

- **Définition 1.67 – Déterminant d'un tenseur du second ordre.** On appelle déterminant d'un tenseur du second ordre le déterminant de la matrice de son endomorphisme associé :

$$\det \boldsymbol{T} = \det[\mathscr{L}^\bullet{}_\bullet] = \det[\boldsymbol{T}^\bullet{}_\bullet] \qquad \text{[éq. (1.45) p. 33]}$$

[17] Il faut toutefois vérifier que cette série converge, ce qui est vrai si $\|\boldsymbol{T}\| < \infty$.

On vérifie aisément en utilisant la règle de l'ascenseur d'indice [règle 1.50 p. 26] que :

$$\det \boldsymbol{T} = \det[\boldsymbol{T}^{\bullet}{}_{\bullet}] = \det[\boldsymbol{T}_{\bullet}{}^{\bullet}] = g^{-1}\det[\boldsymbol{T}_{\bullet\bullet}] = g\det[\boldsymbol{T}^{\bullet\bullet}] \qquad \text{[éq. 1.25 p. 25]}$$

Le déterminant d'un tenseur du second ordre est donc le déterminant de la matrice de ses composantes *mixtes*. On laisse le soin au lecteur de vérifier, par changement de base sur les composantes mixtes de $\boldsymbol{T}$, que le déterminant d'un tenseur du second ordre est bien un *scalaire* (ou un invariant). En revanche, les déterminants des matrices de composantes non mixtes ne sont pas des scalaires car le nombre $g = \det[g_{\bullet\bullet}]$ dépend de la base [éq. 1.25 p. 25].

Bases orthonormées – Si les composantes de $\boldsymbol{T}$ sont données dans une base orthonormée, alors $g = 1$ et la variance des composantes devient sans importance.

- **Définition 1.68 – Inverse d'un tenseur du second ordre.** Si l'endomorphisme linéaire $\mathscr{L}$ associé à un tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ est inversible, (c'est-à-dire si $\det[\mathscr{L}^{\bullet}{}_{\bullet}] = \det\boldsymbol{T} \neq 0$), on appelle l'inverse d'un tenseur du second ordre, le tenseur du second ordre, noté $\boldsymbol{T}^{-1}$, associé à l'inverse $\mathscr{L}^{-1}$ de cet endomorphisme :

$$\det\boldsymbol{T} \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{T}^{-1} \text{ tel que } [(\boldsymbol{T}^{-1})^{\bullet}{}_{\bullet}] = [\boldsymbol{T}^{\bullet}{}_{\bullet}]^{-1} \tag{1.51}$$

Si $\det\boldsymbol{T} \neq 0$ et si $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{x}$, alors $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{y}$.

Remarque 1.10 – On peut préciser les relations entre les composantes d'autres variances des tenseurs $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}^{-1}$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{y} = \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad [y_{\bullet}] = [\boldsymbol{T}_{\bullet}{}^{\bullet}]\,[\boldsymbol{x}_{\bullet}] \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{x}_{\bullet}] = [\boldsymbol{T}_{\bullet}{}^{\bullet}]^{-1}\,[y_{\bullet}] \\ &\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{y} \quad \Leftrightarrow \quad [\boldsymbol{x}_{\bullet}] = [(\boldsymbol{T}^{-1})_{\bullet}{}^{\bullet}]\,[y_{\bullet}] \end{aligned}$$

La relation entre les composantes mixtes covariantes-contravariantes de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}^{-1}$ est donc :

$$[(\boldsymbol{T}^{-1})_{\bullet}{}^{\bullet}] = [\boldsymbol{T}_{\bullet}{}^{\bullet}]^{-1}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier, avec un calcul analogue, que pour les composantes non mixtes de $\boldsymbol{T}$, on a les relations suivantes (remarquer les changements de variance) :

$$[(\boldsymbol{T}^{-1})^{\bullet\bullet}] = [\boldsymbol{T}_{\bullet\bullet}]^{-1} \quad \text{et} \quad [(\boldsymbol{T}^{-1})_{\bullet\bullet}] = [\boldsymbol{T}^{\bullet\bullet}]^{-1}$$

Ces distinctions disparaissent si les composantes des tenseurs sont dans une base orthonormée.

- **Définition 1.69 – Puissance entière négative d'un tenseur du second ordre inversible.** La puissance entière négative d'un tenseur du second ordre inversible est définie par :

$$\boldsymbol{T}^{-q} = (\boldsymbol{T}^{-1})^{q}, \quad \forall q \in \mathbb{N}$$

1.6.10 Spectre, espaces propres, invariants dans $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$

Les tenseurs du second ordre étant isomorphes aux endomorphismes linéaires de $\mathbb{V}$, ils en ont toutes les propriétés spectrales, que l'on rappelle ici sans démonstration [18].

- **Définition 1.70 – Valeur propre et vecteur propre.** On appelle valeur propre λ et on appelle vecteur propre $\boldsymbol{u}_\lambda$ associé à λ, tout couple $\{\lambda, \boldsymbol{u}_\lambda\}$ solution de l'équation :

$$\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}_\lambda = \lambda\,\boldsymbol{u}_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{T} - \lambda\,\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{u}_\lambda = \boldsymbol{0} \tag{1.52}$$

$$\text{Dans une base } \{\boldsymbol{e}_i\} : \quad \Leftrightarrow \quad [T^{\bullet}{}_{\bullet}]\,[\boldsymbol{u}_\lambda{}^{\bullet}] = \lambda\,[\boldsymbol{u}_\lambda{}^{\bullet}] \quad \Leftrightarrow \quad [T_{\bullet}{}^{\bullet}]\,[\boldsymbol{u}_{\lambda\bullet}] = \lambda\,[\boldsymbol{u}_{\lambda\bullet}] \tag{1.53}$$

On appelle spectre l'ensemble des valeurs propres du tenseur $\boldsymbol{T}$.

[18] Si nécessaire, le lecteur est invité à consulter n'importe quel cours d'initiation à l'algèbre linéaire.

Interprétation – L'équation (1.52) montre que les vecteurs propres $\boldsymbol{u}_\lambda$ sont les vecteurs qui ne sont pas déviés par l'endomorphisme linéaire associé à $\boldsymbol{T}$. La valeur propre λ est l'amplification du module de ces vecteurs.

Les valeurs propres λ sont les solutions de l'équation :

$$\det(\boldsymbol{T} - \lambda\,\boldsymbol{G}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det\big([T^\bullet{}_\bullet] - \lambda\,[I]\big) = \det\big([T_\bullet{}^\bullet] - \lambda\,[I]\big) = 0 \tag{1.54}$$

En développant le déterminant de l'équation (1.54), on obtient le *polynôme caractéristique* de la matrice des composantes *mixtes* du tenseur $\boldsymbol{T}$. Le polynôme caractéristique est un polynôme en λ de degré n [19]. Pour n impair, on est assuré que l'une des racines au moins est réelle. En particulier, pour $n = 3$, l'une des valeurs propres est réelle ; les deux autres sont soit toutes les deux réelles soit toutes les deux complexes conjuguées. Pour $n = 3$, le polynôme caractéristique s'écrit :

$$-\lambda^3 + T_{\mathrm{I}}\,\lambda^2 - T_{\mathrm{II}}\,\lambda + T_{\mathrm{III}} = 0 \qquad \text{(forme normalisée)} \tag{1.55}$$

où les coefficients T_{I}, T_{II} et T_{III} sont :

$$T_{\mathrm{I}} = \mathrm{tr}([T^\bullet{}_\bullet]) = \mathrm{tr}([T_\bullet{}^\bullet]) = \mathrm{tr}\boldsymbol{T} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned} T_{\mathrm{II}} &= \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\boldsymbol{T})^2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^2) \\ &= (T^1{}_1\,T^2{}_2 - T^1{}_2\,T^2{}_1) + (T^2{}_2\,T^3{}_3 - T^2{}_3\,T^3{}_2) + (T^3{}_3\,T^1{}_1 - T^3{}_1\,T^1{}_3) \\ &= (T_1{}^1\,T_2{}^2 - T_1{}^2\,T_2{}^1) + (T_2{}^2\,T_3{}^3 - T_2{}^3\,T_3{}^2) + (T_3{}^3\,T_1{}^1 - T_3{}^1\,T_1{}^3) \end{aligned} \tag{1.57}$$

$$T_{\mathrm{III}} = \det([T^\bullet{}_\bullet]) = \det([T_\bullet{}^\bullet]) = \det\boldsymbol{T} \tag{1.58}$$

Remarque 1.11 – Le coefficient T_{II} est la somme des cofacteurs de la diagonale des matrices des composantes mixtes. L'équation (1.57) montre que, comme les coefficients T_{I} et T_{III}, il est invariant par changement de base car la trace d'un tenseur du second ordre est un scalaire.

■ **Définition 1.71 – Invariants fondamentaux.** On appelle invariants fondamentaux d'un tenseur du second ordre les coefficients de son polynôme caractéristique normalisé.

Pour $n = 3$, les invariants fondamentaux sont les coefficients T_{I}, T_{II} et T_{III} définis dans les équations (1.56), (1.57) et (1.58).

Remarque 1.12 – *Dans le cas particulier des tenseurs du second ordre de* $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$, on peut donner une autre définition utile des invariants fondamentaux T_{I}, T_{II} et T_{III}, à l'aide du tenseur d'orientation $\boldsymbol{H}$. Soient $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ trois vecteurs quelconques mais non coplanaires :

$$T_{\mathrm{I}} = \frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{w})}{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})} \tag{1.59}$$

$$T_{\mathrm{II}} = \frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u},\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{w}) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{w})}{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})} \tag{1.60}$$

$$T_{\mathrm{III}} = \frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u},\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{w})}{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})} \tag{1.61}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que ces trois définitions sont bien équivalentes aux définitions précédentes.

Indications pour la démonstration : on montre d'abord que les numérateurs peuvent se mettre sous la forme $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})$ où $\boldsymbol{K}$ est un tenseur d'ordre 3 complètement antisymétrique ; on en déduit ensuite que $\boldsymbol{K}$ est de la forme $\alpha\boldsymbol{H}$ où α est l'invariant cherché.

[19] Sa forme normalisée est celle où le coefficient de λ^n vaut -1.

On trouve les vecteurs propres $\boldsymbol{u}_\lambda$ associés à une valeur propre λ en résolvant l'équation vectorielle (1.52) [p. 35] ou bien les équations matricielles (1.53) [p. 35]. L'ensemble de ces vecteurs propres est un espace vectoriel appelé *espace propre associé* à la valeur propre λ. Si λ est une racine simple du polynôme caractéristique (1.55) [p. 36], son espace propre associé est de dimension 1 ; si λ est une racine multiple de multiplicité k, son espace propre associé est de dimension k. Les équations matricielles (1.53) [p. 35] montrent que les colonnes propres $[u_\lambda{}^\bullet]$ de la matrice des composantes mixtes $[T^\bullet{}_\bullet]$ sont les composantes contravariantes des vecteurs propres dans la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$, alors que les colonnes propres $[u_{\lambda\bullet}]$ de la matrice $[T_\bullet{}^\bullet]$ sont les composantes covariantes des vecteurs propres dans la base $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

On rappelle, également sans démonstration, *l'identité de Cayley-Hamilton* : tout tenseur du second ordre est solution de son polynôme caractéristique. Pour $n = 3$, elle s'écrit :

$$-\boldsymbol{T}^3 + T_{\mathrm{I}}\,\boldsymbol{T}^2 - T_{\mathrm{II}}\boldsymbol{T} + T_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{0} \tag{1.62}$$

Lorsque $n = 3$, tout polynôme en $\boldsymbol{T}$ peut donc être ramené à un polynôme de degré 2.

Remarque 1.13 – En prenant la trace de l'équation (1.62), on obtient une autre expression utile du déterminant d'un tenseur du second ordre pour $n = 3$:

$$\det\boldsymbol{T} = T_{\mathrm{III}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^3) - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^2)\,\mathrm{tr}\boldsymbol{T} + \frac{1}{6}\,(\mathrm{tr}\boldsymbol{T})^3 \tag{1.63}$$

Identités algébriques utiles On laisse le soin au lecteur de vérifier les identités suivantes :

$$(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{T}^\top\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v} \tag{1.64}$$

$$(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u})\wedge(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}) = (\det\boldsymbol{T})\,\boldsymbol{T}^{-\top}\cdot(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}) \tag{1.65}$$

$$\det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{T}) = 1 + T_{\mathrm{I}} + T_{\mathrm{II}} + T_{\mathrm{III}} \tag{1.66}$$

$$\|\,\mathbf{sym}\boldsymbol{T}\,\|^2 = \frac{1}{2}\,\|\boldsymbol{T}\|^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^2) \tag{1.67}$$

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{T} = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}^\top) \tag{1.68}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{T}'') = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}''\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}') = \mathrm{tr}(\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{T}''\cdot\boldsymbol{T}) \tag{1.69}$$

Conseil – Les identités (1.65) et (1.66) se vérifient plus aisément avec un logiciel de calcul formel.

1.6.11 Propriétés spectrales des tenseurs du second ordre symétriques

- **Propriété 1.72 – Tenseurs du second ordre symétriques.** Les tenseurs du second ordre réels symétriques, ont les propriétés spectrales suivantes :
  - les n valeurs propres sont réelles (pas nécessairement distinctes) ;
  - les espaces propres associés aux valeurs propres sont orthogonaux entre eux, il est donc toujours possible de construire une base orthonormée de vecteurs propres ;
  - dans une base propre *orthonormée* $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\}$, les composantes d'un tenseur symétrique $\boldsymbol{S}$ se rangent dans une matrice diagonale dont les termes sont les valeurs propres λ_i :

$$[S^\bullet{}_\bullet] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\otimes\widetilde{\boldsymbol{e}}_i \tag{1.70}$$

– $\boldsymbol{S}^q$ ($q \in \mathbb{N}$) est symétrique, de mêmes directions propres que $\boldsymbol{S}$ et ses valeurs propres sont λ_i^q ;
– $\mathbf{e}^{\boldsymbol{S}}$ est symétrique, de mêmes directions propres que $\boldsymbol{S}$ et ses valeurs propres sont e^{λ_i} ;
– si $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S}'$ sont symétriques et ont une base propre commune, alors :

$$\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{S} \quad \text{et} \quad \mathbf{e}^{\boldsymbol{S}}\cdot\mathbf{e}^{\boldsymbol{S}'} = \mathbf{e}^{\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}'}$$

■ **Propriété 1.73 – Cas particulier des tenseurs de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2s}$.** Dans le cas particulier où $n = 3$, on peut préciser les propriétés suivantes :
– Si les trois valeurs propres sont distinctes, il existe huit bases propres orthonormées dont quatre sont directes. Si deux valeurs propres sont égales, il en existe une infinité (il y a un plan de directions propres). Si les trois valeurs propres sont égales, le tenseur est sphérique et toutes les bases sont des bases propres.
– L'expression des trois invariants fondamentaux en fonction des valeurs propres est :

$$S_{\mathrm{I}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad ; \quad S_{\mathrm{II}} = \lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_2\,\lambda_3 + \lambda_3\,\lambda_1 \quad ; \quad S_{\mathrm{III}} = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$$

Les relations inverses sont démontrées dans l'annexe A [éq. (A.8), (A.9) et (A.10) p. 97].
– On laisse le soin au lecteur de vérifier les résultats suivants [20] :

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{S})_{\mathrm{I}} = 3 + S_{\mathrm{I}}\\
&(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{S})_{\mathrm{II}} = 3 + 2S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}}\\
&(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{S})_{\mathrm{III}} = 1 + S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}} + S_{\mathrm{III}}\\
&(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{S})^{-1} = \boldsymbol{G} + \sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\,\boldsymbol{S}^p, \quad \forall\boldsymbol{S} \text{ symétrique tel que } \|\boldsymbol{S}\| < 1
\end{aligned} \tag{1.71}$$

Les directions propres de $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{S}$ et $(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{S})^{-1}$ sont celles de $\boldsymbol{S}$.

■ **Définition 1.74 – Tenseur symétrique défini positif.** Un tenseur du second ordre $\boldsymbol{S}$ est dit symétrique défini positif si :

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) > 0, \quad \forall\boldsymbol{v} \in \mathbb{V} \tag{1.72}$$

■ **Théorème 1.75 –** Les valeurs propres d'un tenseur symétrique défini positif sont strictement positives.

Démonstration – Si $\boldsymbol{u}_\lambda$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, la définition (1.72) implique :

$$\boldsymbol{u}_\lambda\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{u}_\lambda = \lambda\,\|\boldsymbol{u}_\lambda\|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 0$$

■ **Définition 1.76 – Puissance réelle d'un tenseur symétrique défini positif.** La puissance réelle d'un tenseur symétrique défini positif est définie par :

$$\boldsymbol{S}^x = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^x\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\otimes\widetilde{\boldsymbol{e}}_i, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad \{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\} \text{ base propre de } \boldsymbol{S}.$$

■ **Définition 1.77 – Racine p^{e} d'un tenseur du second ordre symétrique défini positif.** La racine p^{e} d'un tenseur du second ordre symétrique défini positif est :

$$\sqrt[p]{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S}^{\frac{1}{p}} = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{p}}\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\otimes\widetilde{\boldsymbol{e}}_i, \qquad p \in \mathbb{N}, \quad \{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\} \text{ base propre de } \boldsymbol{S}.$$

[20] On les montre facilement en raisonnant dans une base propre orthonormée de $\boldsymbol{S}$. Pour la propriété (1.71), on utilise le développement en série de $(1+x)^{-1}$ avec $|x| < 1$.

- **Définition 1.78 – Logarithme népérien d'un tenseur du second ordre symétrique défini positif.** Le logarithme népérien d'un tenseur du second ordre symétrique défini positif est :

$$\mathbf{ln}\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n} \ln \lambda_i \, \widetilde{\boldsymbol{e}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{e}}_i, \qquad \{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\} \text{ base propre de } \boldsymbol{S} \qquad (\ln \lambda_i \text{ est défini car } \lambda_i > 0) \tag{1.73}$$

Les puissances, l'exponentielle et le logarithme népérien d'un tenseur du second ordre symétrique défini positif $\boldsymbol{S}$ ont, par définition, les mêmes directions propres que $\boldsymbol{S}$.

1.6.12 Propriétés spectrales des tenseurs du second ordre antisymétriques de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$

Dans cette section, on se restreint au cas $n = 3$.

- **Propriété 1.79 – Propriétés des tenseurs antisymétriques.** Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$ et soit $\boldsymbol{a}$ son vecteur adjoint [déf. 1.58 p. 31]. On laisse le soin au lecteur de vérifier les propriétés suivantes :
  - L'endomorphisme linéaire associé au tenseur $\boldsymbol{A}$ est :

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a} \quad \text{[éq. (1.41) p. 31]}$$

  - Les invariants fondamentaux de $\boldsymbol{A}$ sont :

$$A_{\mathrm{I}} = 0 \quad ; \quad A_{\mathrm{II}} = \|\boldsymbol{a}\|^2 = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{A}\|^2 = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^2) \quad ; \quad A_{\mathrm{III}} = 0 \tag{1.74}$$

  - Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}$ [éq. (1.55) p. 36] est donc :

$$-\lambda^3 - \|\boldsymbol{a}\|^2 \lambda = 0$$

  - La seule valeur propre réelle est $\lambda = 0$. L'espace propre associé, de dimension 1, est engendré par le vecteur adjoint $\boldsymbol{a}$. C'est le noyau de l'endomorphisme linéaire $\boldsymbol{A}$ car $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$.

- **Propriété 1.80 – Propriétés de $\boldsymbol{A}^2$.** – Le tenseur $\boldsymbol{A}^2$ est symétrique, son endomorphisme linéaire associé est :

$$\boldsymbol{A}^2 \cdot \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{a}) \wedge \boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2 \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{a}$$

  - Les invariants fondamentaux de $\boldsymbol{A}^2$ sont :

$$(A^2)_{\mathrm{I}} = -2\|\boldsymbol{a}\| \quad ; \quad (A^2)_{\mathrm{II}} = \|\boldsymbol{a}\|^2 = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{A}\|^2 = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^2) \quad ; \quad (A^2)_{\mathrm{III}} = 0 \tag{1.75}$$

  - Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}^2$ [éq. (1.55) p. 36] est :

$$-\lambda^3 - 2\|\boldsymbol{a}\|\lambda^2 - \|\boldsymbol{a}\|^2 \lambda = 0$$

  - Les valeurs propres du tenseur symétrique $\boldsymbol{A}^2$ sont $(0, -||\boldsymbol{a}||, -||\boldsymbol{a}||)$ et les espaces propres associés sont respectivement $k\boldsymbol{a}$ (le noyau de $\boldsymbol{A}$ et de $\boldsymbol{A}^2$) et un plan propre orthogonal à $\boldsymbol{a}$.

L'identité de Cayley-Hamilton [éq. (1.62) p. 37] appliquée au tenseur $\boldsymbol{A}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{A}^3 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^2)\boldsymbol{A}$$

En itérant l'équation précédente par produit contracté avec $\boldsymbol{A}$, on en déduit les puissances entières successives d'un tenseur $\boldsymbol{A}$ de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$:

$$\boldsymbol{A}^{2q+1} = \frac{1}{2^q}\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)\right)^q \boldsymbol{A} \qquad \text{(les puissances impaires sont antisymétriques)}$$
$$\boldsymbol{A}^{2q+2} = \frac{1}{2^q}\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)\right)^q \boldsymbol{A}^2 \qquad \text{(les puissances paires sont symétriques)}$$

où $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2) = -2\,\|\boldsymbol{a}\|^2$ [éq. (1.74) p. 39].

- **Proposition 1.81 –** L'exponentielle d'un tenseur antisymétrique de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$ est un *tenseur orthogonal* [déf. 1.82]

Démonstration – En séparant les exposants pairs et impairs, l'exponentielle de $\boldsymbol{A}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}^{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{G} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^{2q+1}}{(2q+1)!} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{A}^{2q+2}}{(2q+2)!} \qquad \text{[éq. (1.50) p. 34]}\\
&= \boldsymbol{G} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^q}\frac{\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)\right)^q}{(2q+1)!}\boldsymbol{A} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^q}\frac{\left(\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^2)\right)^q}{(2q+2)!}\boldsymbol{A}^2\\
&= \boldsymbol{G} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^q}\frac{\left(-2\,\|\boldsymbol{a}\|^2\right)^q}{(2q+1)!}\boldsymbol{A} + \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{2^q}\frac{\left(-2\,\|\boldsymbol{a}\|^2\right)^q}{(2q+2)!}\boldsymbol{A}^2 \qquad \text{[éq. (1.74) p. 39]}\\
&= \boldsymbol{G} + \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\|\boldsymbol{a}\|^{2q+1}}{(2q+1)!}\frac{\boldsymbol{A}}{\|\boldsymbol{a}\|} + \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{\|\boldsymbol{a}\|^{2q+2}}{(2q+2)!}\frac{\boldsymbol{A}^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\\
\mathbf{e}^{\boldsymbol{A}} &= \boldsymbol{G} + \sin\|\boldsymbol{a}\|\,\frac{\boldsymbol{A}}{\|\boldsymbol{a}\|} + (1-\cos\|\boldsymbol{a}\|)\,\frac{\boldsymbol{A}^2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \qquad (1.76)
\end{aligned}$$

Avec l'équation (1.76), on vérifie aisément que $\mathbf{e}^{\boldsymbol{A}}\cdot(\mathbf{e}^{\boldsymbol{A}})^\top = \boldsymbol{G}$, c'est-à-dire que l'exponentielle de $\boldsymbol{A}$ est un *tenseur orthogonal* [déf. 1.82].

1.6.13 Tenseurs du second ordre orthogonaux de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$

- **Définition 1.82 – Tenseur orthogonal.** Un tenseur du second ordre $\boldsymbol{Q}$ est orthogonal si :

$$\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^\top = \boldsymbol{G} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\top \qquad (1.77)$$

- **Notation 1.83 –** L'ensemble des tenseurs orthogonaux sera noté $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}_3$ si $n=3$).

Le tenseur $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^\top$ est donc aussi orthogonal. Il découle de la définition 1.82 que :

$$\det(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^\top) = 1 \;\Rightarrow\; \det\boldsymbol{Q}\,\det\boldsymbol{Q}^\top = 1 \;\Rightarrow\; (\det\boldsymbol{Q})^2 = 1 \;\Rightarrow\; \det\boldsymbol{Q} = \pm 1$$

Il existe donc deux classes de tenseurs orthogonaux :

- **Définition 1.84 – Rotation.** Les tenseurs orthogonaux de déterminant $+1$ sont appelés rotations. L'ensemble des rotations sera noté $\mathbb{Q}_+$ (ou $\mathbb{Q}_{3+}$ si $n=3$).

- **Définition 1.85 – Retournement.** Les tenseurs orthogonaux de déterminant -1 sont appelés retournements.

- **Propriété 1.86 –** Si $\boldsymbol{T} \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ et si $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_3$, on laisse le soin au lecteur de vérifier les propriétés algébriques suivantes :

– les valeurs propres de $\boldsymbol{T}$ et de $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top$ sont les mêmes ;
– si $\boldsymbol{u}$ est un vecteur propre du tenseur $\boldsymbol{T}$, alors le vecteur $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}$ est un vecteur propre du tenseur $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top$;
– si les tenseurs $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{Q}'$ sont orthogonaux, leur produit contracté $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}'$ est aussi un tenseur orthogonal ; on en déduit que $\boldsymbol{Q}^q \in \mathbb{Q}$, $\forall q \in \mathbb{N}$;
– l'ensemble $\mathbb{Q}$ des tenseurs orthogonaux n'est pas un espace vectoriel mais c'est un groupe pour l'opération interne « $\cdot$ ».
– l'ensemble des rotations $\mathbb{Q}_+$ est un sous-groupe de $\mathbb{Q}$.

Remarque 1.14 – L'ensemble des retournements n'est pas un sous-groupe de $\mathbb{Q}$ car la composition de deux retournements n'est pas un retournement mais une rotation.

On laisse le soin au lecteur de vérifier les identités algébriques utiles qui suivent, dans lesquelles : $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{Q}$, $\boldsymbol{S}\in\mathbb{V}_3^{\otimes 2s}$, $\boldsymbol{A}\in\mathbb{V}_3^{\otimes 2a}$, $\boldsymbol{T}\in\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$, $\boldsymbol{u}\in\mathbb{V}_3$ et $\boldsymbol{w}\in\mathbb{V}_3$.

$$\|\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\| \tag{1.78}$$
$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} \tag{1.79}$$
$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v})\wedge(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{w}) = (\det\boldsymbol{Q})\,\boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}) \quad \text{[éq. (1.65) page 37]} \tag{1.80}$$
$$[\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u},\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v},\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{w}] = \det\boldsymbol{Q}\,[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}] \quad \text{[éq. (1.61) page 36]} \tag{1.81}$$
$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top) = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} \tag{1.82}$$
$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top)_{\mathrm{II}} = T_{\mathrm{II}} \tag{1.83}$$
$$\det(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top) = \det\boldsymbol{T} \tag{1.84}$$
$$\|\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\| = \|\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}\| = \|\boldsymbol{T}\| \tag{1.85}$$
$$\|\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top\| = \|\boldsymbol{T}\| \tag{1.86}$$
$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top):(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}'\cdot\boldsymbol{Q}^\top) = \boldsymbol{T}:\boldsymbol{T}' \tag{1.87}$$
$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top)^q = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}^q\cdot\boldsymbol{Q}^\top \quad (q\in\mathbb{N}) \tag{1.88}$$
$$(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{Q}^\top)^\alpha = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{S}^\alpha\cdot\boldsymbol{Q}^\top \quad (\alpha\in\mathbb{R},\ \boldsymbol{S}\ \text{symétrique défini positif}) \tag{1.89}$$
$$\mathbf{sym}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top) = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{sym}\,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top \tag{1.90}$$
$$\mathbf{asym}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top) = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{asym}\,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top \tag{1.91}$$
$$\mathbf{adj}(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Q}^\top) = \boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{adj}\,\boldsymbol{A} \tag{1.92}$$

■ **Théorème 1.87 –** Les valeurs propres (éventuellement complexes) d'un tenseur orthogonal sont de module unité.

Démonstration – L'équation $\lambda\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}$ implique :

$$|\lambda|^2\,\|\boldsymbol{u}\|^2 = \|\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}\|^2 = (\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{Q}^\top\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u} = \|\boldsymbol{u}\|^2$$

On en déduit $|\lambda|^2 = 1 \;\Rightarrow\; |\lambda| = 1$.

■ **Proposition 1.88 –** Les invariants fondamentaux d'un tenseur orthogonal de $\mathbb{Q}_3$ sont liés par la relation :

$$Q_{\mathrm{I}} = \varepsilon\,Q_{\mathrm{II}} \quad \text{où } \varepsilon = \det\boldsymbol{Q} = \pm 1$$

Démonstration – Le polynôme caractéristique d'un tenseur orthogonal $\boldsymbol{Q}\in\mathbb{Q}_3$ est *a priori* de la forme :

$$-\lambda^3 + Q_{\mathrm{I}}\,\lambda^2 - Q_{\mathrm{II}}\,\lambda + \varepsilon = 0 \quad (\text{on a posé } Q_{\mathrm{III}} = \det\boldsymbol{Q} = \varepsilon = \pm 1) \tag{1.93}$$

Le théorème de Cayley-Hamilton [éq. (1.62) p. 37] s'écrit : ,

$$\mathbf{0} = -\boldsymbol{Q}^3 + Q_{\mathrm{I}}\boldsymbol{Q}^2 - Q_{\mathrm{II}}\boldsymbol{Q} + \varepsilon\boldsymbol{G}$$

En multipliant successivement par $\boldsymbol{Q}^\top = \boldsymbol{Q}^{-1}$, il vient :

$$\mathbf{0} = -\boldsymbol{Q}^2 + Q_{\mathrm{I}}\boldsymbol{Q} - Q_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} + \varepsilon\boldsymbol{Q}^\top \tag{1.94}$$

$$\mathbf{0} = -\boldsymbol{Q} + Q_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G} - Q_{\mathrm{II}}\boldsymbol{Q}^\top + \varepsilon\boldsymbol{Q}^{2\top} \tag{1.95}$$

En transposant l'équation (1.95) et en multipliant par ε, il vient :

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{Q}^2 - \varepsilon Q_{\mathrm{II}}\boldsymbol{Q} + \varepsilon Q_i\boldsymbol{G} - \varepsilon\boldsymbol{Q}^\top \tag{1.96}$$

La somme (1.94) + (1.96) conduit à l'égalité :

$$\mathbf{0} = (Q_{\mathrm{I}} - \varepsilon Q_{\mathrm{II}})(\boldsymbol{Q} + \varepsilon\boldsymbol{G}) \quad \Rightarrow \quad Q_{\mathrm{I}} = \varepsilon Q_{\mathrm{II}} \quad \text{(en supposant } \boldsymbol{Q} \neq -\varepsilon\boldsymbol{G})$$

On vérifie aisément que cette relation est encore vraie pour $\boldsymbol{Q} = \varepsilon\boldsymbol{G}$.

Un tenseur orthogonal n'a donc que deux invariants fondamentaux indépendants : sa trace Q_{I} et son déterminant $Q_{\mathrm{III}} = \varepsilon = \pm 1$. On en déduit que le polynôme caractéristique d'un tenseur orthogonal $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_3$ [éq. (1.93) p. 41] s'écrit :

$$0 = -\lambda^3 + Q_{\mathrm{I}}\lambda^2 - \varepsilon Q_{\mathrm{I}}\lambda + \varepsilon = (\lambda - \varepsilon)(-\lambda^2 + \lambda(Q_{\mathrm{I}} - \varepsilon) - 1)$$

Ce polynôme en λ a une racine réelle : $\lambda_1 = \varepsilon = \pm 1$ (on a bien $|\lambda_1| = 1$) ; les deux autres racines sont les complexes conjugués de module unité $\mathrm{e}^{i\theta}$ et $\mathrm{e}^{-i\theta}$ [th. 1.87 p 41] avec $\theta \in [0;\pi]$, qui deviennent les réels $(1,1)$ si $\theta = 0$ ou bien les réels $(-1,-1)$ si $\theta = \pi$.

On peut donc classer les tenseurs orthogonaux de $\mathbb{Q}_3$ de la manière suivante :

Cas général : $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$. Le tenseur orthogonal $\boldsymbol{Q}$ a une seule valeur propre réelle $\varepsilon = \pm 1$; la direction propre réelle et unique de $\boldsymbol{Q}$ associée à la valeur propre ε est appelée *axe du tenseur orthogonal*. La trace $Q_{\mathrm{I}} = \varepsilon + \mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta} = \varepsilon + 2\cos\theta$ détermine l'angle θ qui est appelé *angle du tenseur orthogonal* [21] :

$$\cos\theta = \frac{Q_{\mathrm{I}} - \varepsilon}{2}$$

Cas dégénérés : $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Le tenseur orthogonal $\boldsymbol{Q}$ a trois valeurs propres réelles : pour $\theta = 0$ les valeurs propres sont $(\varepsilon, 1, 1)$; pour $\theta = \pi$ les valeurs propres sont $(\varepsilon, -1, -1)$.

- *si $\boldsymbol{Q}$ est une rotation* ($\varepsilon = +1$) :
  - si $\theta = 0$, alors $\boldsymbol{Q}$ est rotation d'angle nul autour d'un axe quelconque ($\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G}$),
  - si $\theta = \pi$, alors $\boldsymbol{Q}$ une rotation d'angle π autour de la direction propre ;
- *si $\boldsymbol{Q}$ est un retournement* ($\varepsilon = -1$) :
  - si $\theta = 0$, alors $\boldsymbol{Q}$ est une symétrie plane par rapport à un plan normal à la direction propre,
  - si $\theta = \pi$, alors $\boldsymbol{Q}$ est une symétrie par rapport à un point ($\boldsymbol{Q} = -\boldsymbol{G}$).

Forme générale des tenseurs orthogonaux

■ **Théorème 1.89 –** Soit $\boldsymbol{w}$ un vecteur unitaire, soit $\theta \in [0;\pi]$ et soit $\varepsilon = \pm 1$. L'expression tensorielle du tenseur orthogonal d'axe $\boldsymbol{w}$, d'angle θ et de déterminant ε est :

$$\boldsymbol{Q} = \cos\theta\,\boldsymbol{G} + (\varepsilon - \cos\theta)\,\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{w} - \sin\theta\,\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{w} \tag{1.97}$$

[21] L'angle $\theta \in [0;\pi]$ est complètement déterminé par son cosinus.

Démonstration – Il suffit de vérifier que $\boldsymbol{Q}$ est orthogonal ($\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^\top = \boldsymbol{G}$), que $\det\boldsymbol{Q} = \varepsilon$ et que $\boldsymbol{w}$ est la direction propre associée à ε ($\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{w} = \varepsilon\boldsymbol{w}$).

Remarque 1.15 – En écrivant les composantes de l'équation (1.97) dans une base orthonormée $\{\boldsymbol{w},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}$, et en prenant $\varepsilon = 1$, on reconnaît la matrice classique de la rotation géométrique d'angle θ autour du vecteur $\boldsymbol{w}$:

$$[Q^\bullet{}_\bullet]_{\{\boldsymbol{w},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}_{\{\boldsymbol{w},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\}}$$

Identification d'un tenseur orthogonal À partir de l'équation (1.97) [p. 42], on trouve les parties symétrique et antisymétrique d'un tenseur orthogonal de $\mathbb{Q}_3$:

$$\mathbf{sym}\,\boldsymbol{Q} = \cos\theta\,\boldsymbol{G} + (\varepsilon - \cos\theta)\,\boldsymbol{w}\otimes\boldsymbol{w} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{asym}\,\boldsymbol{Q} = -\sin\theta\,\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{w}$$

On en déduit une méthode simple d'identification d'un tenseur orthogonal :
– le signe de $\det\boldsymbol{Q} = \varepsilon$ détermine si $\boldsymbol{Q}$ est une rotation ou un retournement ;
– l'angle (compris entre 0 et π) est donné par sa trace :

$$\cos\theta = \frac{Q_{\mathrm{I}} - \varepsilon}{2} \tag{1.98}$$

– l'axe $\boldsymbol{w}$ est l'opposé du vecteur adjoint normé de sa partie antisymétrique :

$$\boldsymbol{w} = -\frac{\boldsymbol{H} : \mathbf{asym}\,\boldsymbol{Q}}{\|\boldsymbol{H} : \boldsymbol{Q}\|} = -\frac{\boldsymbol{H} : \boldsymbol{Q}}{\sin\theta} \tag{1.99}$$

On évite ainsi la recherche des vecteurs propres et l'ambiguïté du sens du vecteur propre.

■ **Définition 1.90 – Petite rotation.** On appelle petite rotation, notée $\boldsymbol{\delta Q}$, une rotation telle que son angle θ est un infiniment petit d'ordre 1 (on écrira : $\theta \ll 1$).

Dans ce cas, *au second ordre près*, $\cos\theta \simeq 1$ et $\sin\theta \simeq \theta$. De l'équation (1.97) [p. 42] il vient :

$$\boldsymbol{\delta Q} \simeq \boldsymbol{G} + \theta\,\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{w}, \quad \theta \ll 1$$

Si on note $\boldsymbol{A} = \theta\,\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{w}$ (antisymétrique), une petite rotation est, au second ordre près, la somme du tenseur métrique et d'un tenseur antisymétrique $\boldsymbol{A}$ tel que $\|\boldsymbol{A}\| \ll 1$. Les petites rotations se composent de manière simplifiée :

$$\boldsymbol{\delta Q}\cdot\boldsymbol{\delta Q}' \simeq (\boldsymbol{G}+\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{A}') \simeq \boldsymbol{G}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}' \quad \text{(au second ordre près)} \tag{1.100}$$

1.6.14 Décomposition polaire des tenseurs du second ordre

■ **Théorème 1.91 –** Tout tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ inversible peut être écrit sous l'une des formes suivantes :

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{U} \tag{1.101}$$

où $\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^\top}$ et $\boldsymbol{U} = \sqrt{\boldsymbol{T}^\top\cdot\boldsymbol{T}}$ sont symétriques définis positifs, et où $\boldsymbol{Q}$ est orthogonal.

Démonstration – Le tenseur $\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^\top$ est évidemment symétrique défini positif. Il est donc inversible et sa racine carrée $\boldsymbol{V}$ existe et est aussi symétrique définie positive. Il suffit donc de vérifier que le tenseur $\boldsymbol{Q}=(\sqrt{\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^\top})^{-1}\cdot\boldsymbol{T}$ est orthogonal, ce qui se fait sans difficulté. La démonstration de la décomposition $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{U}$ se fait de la même manière. On vérifie aisément l'unicité de ces décompositions polaires.

- **Définition 1.92 –** La décomposition polaire $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{Q}$ est appelée *décomposition polaire à gauche*, l'autre $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{U}$ est appelée *décomposition polaire à droite*.

- **Propriété 1.93 –** On laisse le soin au lecteur de vérifier les propriétés suivantes :
  - la relation entre $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ est : $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{Q}^\top\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{Q}\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{V}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}^\top$;
  - les valeurs propres (positives) de $\boldsymbol{U}$ et de $\boldsymbol{V}$ sont les mêmes ;
  - si $\boldsymbol{u}$ est vecteur propre de $\boldsymbol{U}$, alors $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{u}$ est un vecteur propre de $\boldsymbol{V}$.

1.6.15 Tenseurs uniaxiaux

- **Définition 1.94 – Tenseur uniaxial.** On dit qu'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{U}$ est uniaxial s'il existe un vecteur $\boldsymbol{u}$ tel que :

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{u}\in\mathbb{V}$$

- **Proposition 1.95 –** Le tenseur uniaxial $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$ est symétrique, il n'a qu'une seule valeur propre non nulle, qui est $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}=\|\boldsymbol{u}\|^2$. L'espace propre associé à cette valeur propre est de dimension 1 ; c'est la direction de l'espace engendrée par le vecteur $\boldsymbol{u}$.

Démonstration – La symétrie du tenseur $\boldsymbol{U}$ est évidente. Soit une base $\{\boldsymbol{e}_i\}$ et un vecteur $\boldsymbol{u}=u^i\boldsymbol{e}_i$. Le tenseur uniaxial $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u}$ s'écrit : $\boldsymbol{U}=u^iu^j\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$. Son application au vecteur $\boldsymbol{u}$ conduit à :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{u}&=(\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}\\&=u^iu^j(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\cdot(u^k\boldsymbol{e}_k)\\&=u^iu^ju^k(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j)\cdot\boldsymbol{e}_k\\&=u^i(u^ju^kg_{jk})\boldsymbol{e}_i\\&=u^i(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{e}_i\quad\text{[éq. (1.22) p. 25]}\\\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{u}&=(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}\end{aligned}\tag{1.102}$$

ce qui montre que le vecteur $\boldsymbol{u}$ est un vecteur propre et que la valeur propre est le produit scalaire $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$.

Le tenseur $\boldsymbol{U}$ étant symétrique, ses autres directions propres sont orthogonales à $\boldsymbol{u}$. Soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur orthogonal à $\boldsymbol{u}$. Le lecteur montrera facilement avec un calcul analogue au précédent que

$$\forall\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{u},\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{v}=0$$

ce qui montre que toutes les autres valeurs propres sont nulles [22]. La valeur propre $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}$ est donc la seule non nulle, son ordre de multiplicité est 1 et l'espace propre associé est donc la direction de l'espace engendrée par le vecteur $\boldsymbol{u}$ [éq. (1.102)].

Les tenseurs uniaxiaux sont donc une *représentation* [23] des directions de l'espace. Toutefois, cette représentation n'est pas bijective car il existe une infinité de tenseurs uniaxiaux qui représentent la même direction de l'espace. Afin d'obtenir une représentation unique on pose la définition suivante :

[22] Le noyau de $\boldsymbol{U}$ est le plan orthogonal au vecteur $\boldsymbol{u}$.

[23] C'est-à-dire une surjection de l'ensemble des tenseurs uniaxiaux vers l'ensemble des directions de l'espace. Voir la définition générale d'une représentation dans l'annexe B [section B.2 p. 105].

- **Définition 1.96 – Tenseur uniaxial unitaire.** Un tenseur uniaxial $\boldsymbol{U}$ est dit unitaire si $\|\boldsymbol{U}\| = 1$.

- **Théorème 1.97 –** Un tenseur uniaxial unitaire est de la forme $\boldsymbol{U} = \widetilde{\boldsymbol{u}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}$ où $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ est un vecteur unitaire.

  Démonstration – Soit $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$. Le carré de sa norme est :

  $$\begin{aligned} \|\boldsymbol{U}\|^2 &= \boldsymbol{U} : \boldsymbol{U} = (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) : (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) \\ &= (u^i u^j)(u_i u_j) = (u^i u_i)(u^j u_j) \\ \|\boldsymbol{U}\|^2 &= (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u})^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 \end{aligned}$$

  Si $\|\boldsymbol{U}\| = 1$, alors $\|\boldsymbol{u}\| = 1$.

- **Théorème 1.98 –** Il existe une bijection entre l'ensemble des directions de l'espace et l'ensemble des tenseurs uniaxiaux unitaires.

  Démonstration – Il suffit de montrer que la représentation est une injection, c'est-à-dire que les directions de l'espace n'ont qu'un seul représentant dans l'ensemble des tenseurs uniaxiaux unitaires. Or, dans une direction de l'espace, il existe deux vecteurs unitaires $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ et $-\widetilde{\boldsymbol{u}}$, et ces deux vecteurs unitaires conduisent au même représentant uniaxial unitaire car $\widetilde{\boldsymbol{u}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}} = (-\widetilde{\boldsymbol{u}}) \otimes (-\widetilde{\boldsymbol{u}})$.

- **Propriété 1.99 –** On laisse le soin au lecteur de vérifier les deux propriétés suivantes :

  1. Si deux vecteurs sont orthogonaux, les tenseurs uniaxiaux associés sont orthogonaux, et inversement, c'est-à-dire :

     $$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) : (\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = 0 \tag{1.103}$$

     En particulier, si $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_i\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{V}_3$, alors les trois tenseurs uniaxiaux unitaires $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_i = \widetilde{\boldsymbol{u}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}_i\}$ sont orthonormés.
  2. Si $\widetilde{\boldsymbol{U}}$ est uniaxial unitaire, alors

     $$\widetilde{\boldsymbol{U}}^q = \widetilde{\boldsymbol{U}}, \ \forall q \in \mathbb{N}$$

- **Propriété 1.100 – Caractérisation des tenseurs uniaxiaux unitaires.** Les tenseurs uniaxiaux unitaires sont caractérisés par les trois propriétés suivantes :

  $$\widetilde{\boldsymbol{U}} \text{ uniaxial unitaire} \quad \Leftrightarrow \quad \{\widetilde{U}_{\mathrm{I}} = 1 \quad \text{et} \quad \widetilde{U}_{\mathrm{II}} = 0 \quad \text{et} \quad \widetilde{U}_{\mathrm{III}} = 0\} \tag{1.104}$$

  Démonstration – Si un tenseur est uniaxial unitaire, ses invariants fondamentaux sont évidemment ceux de l'équation (1.104) [déf. 1.96 p. 45]. Inversement, ces trois relations impliquent que les valeurs propres sont $(1,0,0)$ [éq. (A.8) et suivantes p. 97]. Le tenseur est donc de la forme $\widetilde{\boldsymbol{U}} = \widetilde{\boldsymbol{u}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}$ [éq. (1.70) p. 37] où $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ est un vecteur propre unitaire associé à la valeur propre 1.

  Remarque – L'ensemble des tenseurs uniaxiaux ne constitue pas un espace vectoriel car l'addition de deux tenseurs uniaxiaux n'est pas en général un tenseur uniaxial.

En mécanique des milieux continus, il est souvent nécessaire de considérer des directions de l'espace non orientées comme, par exemple, les directions propres d'un tenseur du second ordre ou encore des directions matérielles d'anisotropie. On peut désormais désigner ces directions sous la forme d'un tenseur uniaxial unitaire.

Exemple 1.101 – Les tenseurs du second ordre symétriques peuvent s'écrire :

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \widetilde{\boldsymbol{s}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{s}}_i \qquad \text{[éq. (1.70) p. 37]}$$

où les trois vecteurs $\{\widetilde{\boldsymbol{s}}_i\}$ constituent une base propre orthonormée de $\mathbb{V}_3$. On peut maintenant écrire :

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \widetilde{\boldsymbol{S}}_i$$

Les trois tenseurs uniaxiaux unitaires $\widetilde{\boldsymbol{S}}_i$ peuvent être appelés *tenseurs uniaxiaux propres* de $\boldsymbol{S}$ car on vérifie aisément que $\boldsymbol{S} \cdot \widetilde{\boldsymbol{S}}_i = \lambda_i \widetilde{\boldsymbol{S}}_i$.

Angle entre deux directions – Comme pour les vecteurs, on peut définir un « angle tensoriel » Θ entre deux tenseurs uniaxiaux unitaires (ou deux directions de l'espace) $\widetilde{\boldsymbol{U}} = \widetilde{\boldsymbol{u}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}$ et $\widetilde{\boldsymbol{V}} = \widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}$ dont le cosinus est leur produit scalaire :

$$\cos\Theta = \widetilde{\boldsymbol{U}} : \widetilde{\boldsymbol{V}} \qquad \text{car } \|\widetilde{\boldsymbol{U}}\| = \|\widetilde{\boldsymbol{V}}\| = 1$$

On a alors :

$$\cos\Theta = (\widetilde{\boldsymbol{u}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}) : (\widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}}) = (\widetilde{\boldsymbol{u}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}})^2 = \cos^2\theta$$

où $\theta \in [0;\pi]$ est l'angle géométrique habituel entre les vecteurs $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ et $\widetilde{\boldsymbol{v}}$. Pour caractériser l'angle entre deux directions non orientées, la connaissance $\cos^2\theta$ est suffisante. l'angle entre deux directions non orientées est un angle géométrique θ de cosinus positif, c'est-à-dire dans l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$.

1.7 En bref...

Les tenseurs d'ordre p sont des applications p-linéaires $\mathbb{V}^p \to \mathbb{R}$. L'espace des tenseurs d'ordre p est un espace vectoriel de dimension n^p dans lequel on sait construire des bases. On définit des opérations algébriques sur les tenseurs :
- l'addition de deux tenseurs du même ordre ;
- la multiplication d'un tenseur par un scalaire ;
- le produit tensoriel de deux tenseurs d'ordre p et q est un tenseur d'ordre $p+q$;
- les traces d'un tenseur d'ordre $p \geqslant 2$ sont des tenseurs d'ordre $p-2$;
- le produit tensoriel contracté simple de deux tenseurs d'ordre $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$ est un tenseur d'ordre $p+q-2$;
- le produit tensoriel contracté double de deux tenseurs d'ordre $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ est un tenseur d'ordre $p+q-4$.

Les tenseurs d'ordre 0 sont les scalaires (ou invariants).
Les tenseurs d'ordre 1 sont confondus avec les vecteurs.
Les tenseurs d'ordre 2 sont confondus avec les endomorphismes linéaires de $\mathbb{V}$. Ils peuvent être décomposés :
- en la somme d'une partie symétrique et d'une partie antisymétrique,
- en la somme d'une partie sphérique et d'une partie de trace nulle,
- en le produit contracté simple d'une partie symétrique définie positive et d'une partie orthogonale.

Tout tenseur d'ordre 2 construit sur $\mathbb{V}_3$ a des valeurs propres scalaires (dont une au moins est réelle) et un espace propre associé à chaque valeur propre ;
- s'il est symétrique, toutes les valeurs propres sont réelles et les espaces propres sont orthogonaux entre eux.
- s'il est antisymétrique, il est isomorphe à son vecteur adjoint ;
- s'il est orthogonal, il est défini par son déterminant $\varepsilon = \pm 1$, un vecteur unitaire et un angle compris entre 0 et π.
- s'il est uniaxial unitaire il est une représentation unique d'une direction de l'espace.

2

Fonctions tensorielles

2.1 Fonctions tensorielles d'un paramètre réel

Dans cette section on étudie des fonctions à valeur tensorielle d'un paramètre réel t :

$$t \in \mathbb{R} \xrightarrow{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{T}(t) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$$

En mécanique des milieux continus, ce paramètre est le plus souvent le temps. Pour simplifier le langage, la dérivée par rapport au paramètre t sera appelée *dérivée temporelle*.

2.1.1 Dérivée temporelle d'un tenseur d'ordre p

La dérivée temporelle d'une fonction à valeur tensoriellle est naturellement définie par :

$$\boldsymbol{T}'(t) = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{\boldsymbol{T}(t+\mathrm{d}t) - \boldsymbol{T}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.1}$$

La dérivée temporelle d'une fonction tensorielle d'ordre p est donc une fonction tensorielle d'ordre p.

On laisse le soin au lecteur de vérifier [1] que les dérivées temporelles du produit tensoriel, et des produits r-contractés suivent les règles habituelles des dérivées de produits non commutatifs :

$$\frac{\mathbf{d}(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{U})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \otimes \boldsymbol{U} + \boldsymbol{T} \otimes \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathbf{d}(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{U})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{U} + \boldsymbol{T} \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathbf{d}(\boldsymbol{T} : \boldsymbol{U})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} : \boldsymbol{U} + \boldsymbol{T} : \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathbf{d}(\boldsymbol{T} \overline{\otimes}^r \boldsymbol{U})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \overline{\otimes}^r \boldsymbol{U} + \boldsymbol{T} \overline{\otimes}^r \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t}$$

Remarque – En mécanique des milieux continus, il arrive que la définition de certains tenseurs soit donnée sur une base fonction du temps. Par exemple, si $\boldsymbol{T}(t)$ est ordre 2,

$$\boldsymbol{T} = T^j{}_k(t)\, \boldsymbol{e}_j(t) \otimes \boldsymbol{e}^k(t)$$

sa dérivée temporelle s'écrit :

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}T^j{}_k}{\mathrm{d}t}\, \boldsymbol{e}_j(t) \otimes \boldsymbol{e}^k(t) + T^j{}_k\, \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{e}_j}{\mathrm{d}t} \otimes \boldsymbol{e}^k + T^j{}_k\, \boldsymbol{e}_j \otimes \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{e}^k}{\mathrm{d}t}$$

Pour connaître les composantes de la dérivée temporelle $\boldsymbol{T}'$, il faut connaître la dérivée temporelle des vecteurs de la base variable.

[1] En écrivant les composantes (fonction du temps) des tenseurs sur une base fixe.

- **Propriété 2.1 –** Si un tenseur $\boldsymbol{T}$ du second ordre est *par définition* symétrique (il conserve cette symétrie au cours du temps), alors sa dérivée temporelle est symétrique. Il en est de même pour l'antisymétrie, la sphéricité et la trace nulle.

  Démonstration – Les ensembles de tenseurs symétriques, antisymétriques, sphériques et déviatoriques sont des sous-espaces vectoriels. La différence $\boldsymbol{T}(t+h)-\boldsymbol{T}(t)$ appartient donc au même sous-espace.

En revanche, pour les tenseurs orthogonaux de $\mathbb{Q}_3$ restant orthogonaux au cours du temps, la dérivée temporelle d'un tenseur orthogonal est un tenseur d'ordre 2 *non orthogonal* car la différence $\boldsymbol{Q}(t+h)-\boldsymbol{Q}(t)$ n'est pas un tenseur orthogonal en général [(2)]. On peut néanmoins donner un résultat, la définition d'un tenseur orthogonal est [déf. 1.82 p. 40] :

$$\boldsymbol{Q}(t)\cdot\boldsymbol{Q}^{\top}(t)=\boldsymbol{G}$$

En dérivant par rapport à t, il vient :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}^{\top}+\boldsymbol{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}^{\top}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{0}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}^{\top}=-\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}^{\top}\right)^{\top}$$

Le tenseur $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}^{\top}$, ainsi que son transposé $\boldsymbol{Q}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}^{\top}}{\mathrm{d}t}$, sont donc antisymétriques.

2.1.2 Cas particulier des tenseurs réels du second ordre symétriques

La dérivée temporelle d'un tenseur symétrique du second ordre n'est pas plus compliquée que celle de tous les autres tenseurs : les composantes du tenseur dérivé sont la dérivée des composantes sur une base indépendante du temps. Cependant, puisque les tenseurs du second ordre symétriques possèdent des caractéristiques spectrales (valeurs propres et bases propres) qui ont un sens physique en mécanique des milieux continus, on va s'intéresser aux variations de leurs caractéristiques spectrales. Dans cette section, on se limite aux tenseurs de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2s}$ et pour alléger les notations, on note $\dot{\boldsymbol{X}}$ [(3)] la dérivée temporelle d'un tenseur (ou vecteur) $\boldsymbol{X}$.

Le tenseur réel $\boldsymbol{S}(t)$ étant symétrique, il existe une base orthonormée $\{\boldsymbol{u}_i(t)\}$ construite sur les directions propres de $\boldsymbol{S}$ telle que :

$$\boldsymbol{S}(t)=\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t)\,\boldsymbol{u}_i(t)\otimes\boldsymbol{u}_i(t)\qquad\text{[éq. (1.70) p. 37]}$$

où les $\lambda_i(t)$ sont les valeurs propres réelles de $\boldsymbol{S}$ à l'instant t et où les $\boldsymbol{u}_i(t)$ sont les vecteurs unitaires d'une base propre orthonormée à l'instant t. La dérivée temporelle de $\boldsymbol{S}$ s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{S}}(t)=\underbrace{\sum_{i=1}^{3}\dot{\lambda}_i(t)\boldsymbol{u}_i(t)\otimes\boldsymbol{u}_i(t)}_{\hat{\boldsymbol{S}}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t)\dot{\boldsymbol{u}}_i(t)\otimes\boldsymbol{u}_i(t)+\sum_{i=1}^{3}\lambda_i(t)\boldsymbol{u}_i(t)\otimes\dot{\boldsymbol{u}}_i(t)}_{\check{\boldsymbol{S}}}\tag{2.2}$$

(2) L'ensemble $\mathbb{Q}_3$ n'est pas un espace vectoriel.

(3) En mécanique des milieux continus, cette notation de dérivée temporelle prendra un sens particulier : la dérivée particulaire.

Le tenseur $\dot{\boldsymbol{S}}$ est symétrique. On définit les deux tenseurs symétriques $\hat{\boldsymbol{S}}$ et $\breve{\boldsymbol{S}}$ suivants :

$$\hat{\boldsymbol{S}}(t) = \sum_{i=1}^{3} \dot{\lambda}_i(t)\,\boldsymbol{u}_i(t) \otimes \boldsymbol{u}_i(t) \tag{2.3}$$

$$\breve{\boldsymbol{S}}(t) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t)\,\dot{\boldsymbol{u}}_i(t) \otimes \boldsymbol{u}_i(t) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i(t)\,\boldsymbol{u}_i(t) \otimes \dot{\boldsymbol{u}}_i(t) \tag{2.4}$$

- Le tenseur symétrique $\hat{\boldsymbol{S}}$ est la dérivée de $\boldsymbol{S}$ *à directions propres constantes*, ses directions propres sont celles de $\boldsymbol{S}$, ses valeurs propres sont $\dot{\lambda}_i$) ;
- Le tenseur symétrique $\breve{\boldsymbol{S}}$ est la dérivée de $\boldsymbol{S}$ *à valeurs propres constantes* (attention : ses valeurs propres sont différentes de celles de $\boldsymbol{S}$).

L'équation (2.2) montre que la dérivée temporelle $\dot{\boldsymbol{S}}$ est la somme de ces deux dérivées :

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}} + \breve{\boldsymbol{S}} \tag{2.5}$$

Le tenseur $\boldsymbol{S}(t)$ étant réel et symétrique, et conservant ces propriétés au cours du temps, toute base propre orthonormée $\{\boldsymbol{u}_i(t)\}$ reste orthonormée dans son évolution. Il existe donc un vecteur « vitesse de rotation de la base propre » [(4)] , noté $\boldsymbol{\omega}_S$, tel que :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{u}}_i &= \boldsymbol{\omega}_S \wedge \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{H} : (\boldsymbol{\omega}_S \otimes \boldsymbol{u}_i), \quad \forall i = 1,2,3 \qquad \text{[éq. (1.29) p. 27]} \\ &= \boldsymbol{\Omega}_S \cdot \boldsymbol{u}_i \quad \forall i = 1,2,3 \end{aligned}$$

où le tenseur $\boldsymbol{\Omega}_S = -\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_S$ est antisymétrique.

La dérivée à valeurs propres constantes $\breve{\boldsymbol{S}}$ [éq. (2.4) p. 49] s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \breve{\boldsymbol{S}} &= \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\,(\boldsymbol{\Omega}_S \cdot \boldsymbol{u}_i) \otimes \boldsymbol{u}_i + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \otimes (\boldsymbol{\Omega}_S \cdot \boldsymbol{u}_i) \\ &= \boldsymbol{\Omega}_S \cdot \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i + \Big(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i\Big) \cdot \boldsymbol{\Omega}_S^{\top} \\ \breve{\boldsymbol{S}} &= \boldsymbol{\Omega}_S \cdot \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}_S \quad (\boldsymbol{\Omega}_S \text{ est antisymétrique}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Connaissant $\boldsymbol{S}$ et $\dot{\boldsymbol{S}}$ symétriques, on se propose de trouver les tenseurs symétriques $\hat{\boldsymbol{S}}$ et $\breve{\boldsymbol{S}}$, qui sont respectivement la dérivée à directions propres contantes et la dérivée à valeurs propres constantes.

Détermination de la vitesse de rotation des directions propres

Par un produit contracté avec $\boldsymbol{S}$ à gauche et à droite de l'équation (2.5), on obtient les deux égalités :

$$\boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{S}} + \boldsymbol{S} \cdot \breve{\boldsymbol{S}} \qquad \text{et} \qquad \dot{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{S} + \breve{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{S}$$

Par différence de ces deux égalités (où $\boldsymbol{S} \cdot \hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{S}$ car ils ont les mêmes directions propres) :

$$\boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{S}} - \dot{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{S} = \boldsymbol{S} \cdot \breve{\boldsymbol{S}} - \breve{\boldsymbol{S}} \cdot \boldsymbol{S} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\,\mathbf{asym}(\boldsymbol{S} \cdot \dot{\boldsymbol{S}}) = 2\,\mathbf{asym}(\boldsymbol{S} \cdot \breve{\boldsymbol{S}}) \tag{2.7}$$

[(4)] Par analogie avec la cinématique des solides

Le tenseur symétrique $\breve{\boldsymbol{S}}$ est solution de cette équation tensorielle antisymétrique (trois équations scalaires).

La recherche de $\breve{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{\Omega}_S \cdot \boldsymbol{S} - \boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{\Omega}_S$ [éq. (2.6) p. 49] se ramène à la recherche du tenseur antisymétrique $\boldsymbol{\Omega}_S$. En remplaçant $\breve{\boldsymbol{S}}$ dans l'équation (2.7) [p. 49], le tenseur antisymétrique $\boldsymbol{\Omega}_S$ est solution de l'équation tensorielle antisymétrique :

$$\begin{aligned} 2\,\mathbf{asym}(\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{S}}) &= \boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{\Omega}_S\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\Omega}_S)-(\boldsymbol{\Omega}_S\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\Omega}_S)\cdot\boldsymbol{S} \\ &= 2\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\Omega}_S\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{S}^2\cdot\boldsymbol{\Omega}_S-\boldsymbol{\Omega}_S\cdot\boldsymbol{S}^2 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Le tenseur antisymétrique recherché $\boldsymbol{\Omega}_S = -\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S$ se ramène à la recherche du vecteur $\boldsymbol{\omega}_S$. L'équation tensorielle antisymétrique (2.8) s'écrit donc :

$$2\,\mathbf{asym}(\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{S}}) = -2\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S)\cdot\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^2\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S)+(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S)\cdot\boldsymbol{S}^2 \tag{2.9}$$

Cette équation tensorielle antisymétrique est équivalente à l'équation vectorielle suivante :

$$2\boldsymbol{H}:\mathbf{asym}(\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{S}}) = -2\boldsymbol{H}:(\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S)\cdot\boldsymbol{S})+\boldsymbol{H}:(\boldsymbol{S}^2\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S))+\boldsymbol{H}:((\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S)\cdot\boldsymbol{S}^2) \tag{2.10}$$

En utilisant les propriétés de complète antisymétrie du tenseur d'orientation $\boldsymbol{H}$ et la symétrie de $\boldsymbol{S}$, on vérifie aisément les identités suivantes :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H}:(\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S)\cdot\boldsymbol{S}) = ((\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{S}):(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}))\cdot\boldsymbol{\omega}_S \\ &\boldsymbol{H}:(\boldsymbol{S}^2\cdot(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S)) = ((\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S})\boldsymbol{G}-\boldsymbol{S}^2)\cdot\boldsymbol{\omega}_S \\ &\boldsymbol{H}:((\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S)\cdot\boldsymbol{S}^2) = ((\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S})\boldsymbol{G}-\boldsymbol{S}^2)\cdot\boldsymbol{\omega}_S \end{aligned}$$

En utilisant ces identités dans l'équation (2.10), on trouve que le vecteur $\boldsymbol{\omega}_S$ est solution de l'équation vectorielle :

$$\underbrace{\boldsymbol{H}:\mathbf{asym}(\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{S}})}_{\boldsymbol{v}} = \Big[\underbrace{-(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{S}):(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S})\boldsymbol{G}-\boldsymbol{S}^2}_{\boldsymbol{T}}\Big]\cdot\boldsymbol{\omega}_S \tag{2.11}$$

où $\boldsymbol{v}$ est un vecteur et $\boldsymbol{T}$ un tenseur du second ordre symétrique, tous les deux connus. La recherche du vecteur vitesse de rotation des bases propres $\boldsymbol{\omega}_S$ se ramène donc à la résolution de l'équation (2.11), qui lorsque l'on exprime les composantes de $\boldsymbol{S}$ et $\dot{\boldsymbol{S}}$ dans une base de calcul quelconque se ramène à la résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues :

$$[v^\bullet] = [T^\bullet{}_\bullet]\,[\omega_S^\bullet]$$

En se plaçant dans une base propre orthonormée de $\boldsymbol{S}$, on trouve facilement que le déterminant de ce système d'équations est :

$$\det\boldsymbol{T} = \det[T^\bullet{}_\bullet] = (\lambda_1-\lambda_2)^2\,(\lambda_2-\lambda_3)^2\,(\lambda_3-\lambda_1)^2 \tag{2.12}$$

On en déduit que si les valeurs propres de $\boldsymbol{S}$ sont distinctes alors $\det\boldsymbol{T} \neq 0$ et la solution $\boldsymbol{\omega}_S$ de l'équation (2.11) est unique :

$$\boldsymbol{\omega}_S = \boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{v} = \big[-(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{S}):(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S})\boldsymbol{G}-\boldsymbol{S}^2\big]^{-1}\cdot\boldsymbol{H}:\mathbf{asym}(\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{S}}) \tag{2.13}$$

En revanche, si les valeurs propres de $\boldsymbol{S}$ ne sont pas distinctes, alors $\det\boldsymbol{T} = 0$ et la formule (2.13) est invalide car le tenseur $\boldsymbol{T}$ n'est pas inversible. Il y a une infinité de solutions en $\boldsymbol{\omega}_S$, et on peut prendre l'une quelconque d'entre elles.

Remarque 2.1 – Bien que l'équation vectorielle (2.11) puisse être écrite et résolue dans toute base, il est intéressant de l'écrire dans une base propre orthonormée de $\boldsymbol{S}$. Elle se réduit au système de trois équations suivant :

$$\begin{aligned}
\dot{s}_{23}\,(\lambda_2-\lambda_3) &= \omega_1\,(\lambda_2-\lambda_3)^2\\
\dot{s}_{31}\,(\lambda_3-\lambda_1) &= \omega_2\,(\lambda_3-\lambda_1)^2\\
\dot{s}_{12}\,(\lambda_1-\lambda_2) &= \omega_3\,(\lambda_1-\lambda_2)^2
\end{aligned}$$

ce qui montre que toute composante de $\boldsymbol{\omega}_S$ normale à un plan propre est indéterminée. Si les valeurs propres de $\boldsymbol{S}$ sont distinctes, la solution est unique et les composantes dans une base propre orthonormée de $\boldsymbol{S}$ de la vitesse de rotation de la base propre de $\boldsymbol{S}$ sont :

$$\omega_1 = \frac{\dot{s}_{23}}{\lambda_2-\lambda_3} \quad ; \quad \omega_2 = -\frac{\dot{s}_{13}}{\lambda_1-\lambda_3} \quad ; \quad \omega_3 = \frac{\dot{s}_{12}}{\lambda_1-\lambda_2}$$

Synthèse

La dérivée temporelle $\dot{\boldsymbol{S}}$ d'un tenseur symétrique $\boldsymbol{S}$ peut être décomposée en une somme :

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{S}} + \breve{\boldsymbol{S}}$$

où :
- le tenseur $\hat{\boldsymbol{S}}$ est la dérivée à directions propres constantes ; ses valeurs propres sont les dérivées des valeurs propres de $\boldsymbol{S}$.
- le tenseur $\breve{\boldsymbol{S}}$ est la dérivée à valeurs propres constantes.

Les tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\dot{\boldsymbol{S}}$ étant connus, on détermine $\hat{\boldsymbol{S}}$ et $\breve{\boldsymbol{S}}$ comme suit :

1. Le vecteur vitesse de rotation $\boldsymbol{\omega}_S$ des bases propres de $\boldsymbol{S}$ est une solution de l'équation vectorielle :

$$\underbrace{\boldsymbol{H} : \mathbf{asym}(\boldsymbol{S}\cdot\dot{\boldsymbol{S}})}_{\text{ordre 1}} = \underbrace{\left[-(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{S}) : (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{H}) + (\boldsymbol{S}:\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{G} - \boldsymbol{S}^2\right]}_{\text{ordre 2, symétrique}} \cdot \boldsymbol{\omega}_S \tag{2.14}$$

   Si la solution n'est pas unique (les composantes de $\boldsymbol{\omega}_S$ normales aux éventuels plans propres sont indéterminées), on peut prendre l'une quelconque d'entre elles.
2. On calcule $\boldsymbol{\Omega}_S = -\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_S$ (antisymétrique)
3. La dérivée à valeurs propres constantes est : $\breve{\boldsymbol{S}} = \boldsymbol{\Omega}_S\cdot\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\Omega}_S$ (symétrique de trace nulle).
4. La dérivée à base propre constante est : $\hat{\boldsymbol{S}} = \dot{\boldsymbol{S}} - \breve{\boldsymbol{S}}$ (symétrique, de même directions propres que $\boldsymbol{S}$).

Quelques propriétés algébriques de $\hat{\boldsymbol{S}}$ et $\breve{\boldsymbol{S}}$

Soit $\boldsymbol{S}'$ un tenseur symétrique de mêmes directions propres que $\boldsymbol{S}$.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S}' : \breve{\boldsymbol{S}} &= \boldsymbol{S}' : (\boldsymbol{\Omega}_S\cdot\boldsymbol{S}) - \boldsymbol{S}' : (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{\Omega}_S)\\
&= (\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{S}) : \boldsymbol{\Omega}_S - (\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}') : \boldsymbol{\Omega}_S \quad \text{[éq. (1.48) p. 34]}\\
&= (\boldsymbol{S}'\cdot\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S}') : \boldsymbol{\Omega}_S\\
\boldsymbol{S}' : \breve{\boldsymbol{S}} &= 0 \quad \text{(car } \boldsymbol{S} \text{ et } \boldsymbol{S}' \text{ commutent)}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

En particulier, on a les orthogonalités tensorielles suivantes :

$$\boldsymbol{S} : \breve{\boldsymbol{S}} = 0 \quad (\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S} \text{ dans éq. (2.15)}) \qquad \text{et} \qquad \hat{\boldsymbol{S}} : \breve{\boldsymbol{S}} = 0 \quad (\boldsymbol{S}' = \hat{\boldsymbol{S}} \text{ dans éq. (2.15)}) \tag{2.16}$$

En utilisant ces propriétés, on établit sans difficulté les dérivées temporelles utiles suivantes :

$$(\mathrm{tr}\boldsymbol{S})^{\cdot} = \mathrm{tr}\dot{\boldsymbol{S}} = \mathrm{tr}(\hat{\boldsymbol{S}}+\check{\boldsymbol{S}}) = \mathrm{tr}\hat{\boldsymbol{S}} \tag{2.17}$$

$$(\mathbf{dev}\boldsymbol{S})^{\cdot} = \mathbf{dev}\dot{\boldsymbol{S}} = \mathbf{dev}(\hat{\boldsymbol{S}}+\check{\boldsymbol{S}}) = \mathbf{dev}\hat{\boldsymbol{S}}+\check{\boldsymbol{S}} = (\mathbf{dev}\boldsymbol{S})\hat{}+\check{\boldsymbol{S}} \tag{2.18}$$

$$\|\boldsymbol{S}\|^{\cdot} = \frac{\boldsymbol{S}}{\|\boldsymbol{S}\|} : \dot{\boldsymbol{S}} = \frac{\boldsymbol{S}}{\|\boldsymbol{S}\|} : (\hat{\boldsymbol{S}}+\check{\boldsymbol{S}}) = \frac{\boldsymbol{S}}{\|\boldsymbol{S}\|} : \hat{\boldsymbol{S}} \tag{2.19}$$

$$\|\mathbf{dev}\boldsymbol{S}\|^{\cdot} = \frac{\mathbf{dev}\boldsymbol{S}}{\|\mathbf{dev}\boldsymbol{S}\|} : \mathbf{dev}\hat{\boldsymbol{S}} \tag{2.20}$$

$$(\det\boldsymbol{S})^{\cdot} = (S_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - S_{\mathrm{I}}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^2) : \dot{\boldsymbol{S}} = (S_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - S_{\mathrm{I}}\boldsymbol{S}+\boldsymbol{S}^2) : \hat{\boldsymbol{S}} \tag{2.21}$$

$$(\det\boldsymbol{S})^{\cdot} = (\det\boldsymbol{S})\,\boldsymbol{S}^{-1} : \hat{\boldsymbol{S}} \quad \text{(si } \boldsymbol{S}^{-1} \text{ existe)} \tag{2.22}$$

$$(\det\mathbf{dev}\boldsymbol{S})^{\cdot} = (\mathbf{dev}\boldsymbol{S})^2 : \mathbf{dev}\hat{\boldsymbol{S}} \tag{2.23}$$

où $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\}$ sont les trois invariants fondamentaux de $\boldsymbol{S}$ [éq. (1.56), (1.57) et (1.58) p. 36].

2.2 Fonctions scalaires d'une variable tensorielle

En mécanique des milieux continus, on a besoin d'envisager des fonctions à valeur scalaire dont l'argument est tensoriel :

$$\boldsymbol{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p} \xrightarrow{f} f(\boldsymbol{T}) \in \mathbb{R} \tag{2.24}$$

et on veut connaître les variations du scalaire $f(\boldsymbol{T})$ quand l'argument tensoriel $\boldsymbol{T}$ varie.

Remarques 2.2 – La dérivée habituelle, en x, d'une fonction $\boldsymbol{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^{\otimes p}$ est l'application $\boldsymbol{g}'$ (notée aussi $\frac{d\boldsymbol{g}}{dx}$) définie par :

$$x \in \mathbb{R} \xrightarrow{g'} \boldsymbol{g}'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{g}(x+h)-\boldsymbol{g}(x)}{h} \in \mathbb{V}^{\otimes p}$$

On ne peut pas généraliser cette définition pour x et h tensoriels car la division par un tenseur n'a aucun sens. D'autre part, les fonctions f envisagées en (2.24) sont à valeur scalaire ; pour que l'application f ait un sens, la valeur du réel $f(\boldsymbol{T})$ doit être indépendante de la base dans laquelle on exprime les composantes du tenseur $\boldsymbol{T}$. Les fonctions $\mathbb{V}^{\otimes p} \to \mathbb{R}$ sont donc une sous-classe des fonctions à n^p variables réelles indépendantes.

2.2.1 Opérateur linéaire tangent

La description des variations d'un argument tensoriel d'ordre p est plus compliquée que pour les fonctions à variables réelles car les tenseurs d'ordre p sont dans un espace vectoriel de dimension n^p, alors que $\mathbb{R}$ est de dimension 1.

Une variation arbitraire de l'argument tensoriel $\boldsymbol{T}$ sera notée $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$. C'est un tenseur de même ordre. À chaque variation arbitraire $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ du tenseur $\boldsymbol{T}$ correspond une variation $f(\boldsymbol{T}+\mathbf{d}\boldsymbol{T}) - f(\boldsymbol{T})$ différente.

- **Définition 2.2 – Différentiabilité.** On dit que l'application $f : \boldsymbol{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p} \xrightarrow{f} f(\boldsymbol{T}) \in \mathbb{R}$ est différentiable en $\boldsymbol{T}$ s'il existe une application linéaire, notée $\boldsymbol{\nabla} f$, appelée *application linéaire tangente* à f en $\boldsymbol{T}$, telle que :

$$\forall \mathbf{d}\boldsymbol{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p},\ f(\boldsymbol{T}+\mathbf{d}\boldsymbol{T}) - f(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\nabla} f \overline{\otimes}^p \mathbf{d}\boldsymbol{T} + \|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|\,\mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{T}) \ \in \mathbb{R} \tag{2.25}$$

où $\mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{T})$ est une fonction $\mathbb{V}^{\otimes p} \to \mathbb{R}$ quelconque qui tend vers 0 quand $\mathbf{d}\boldsymbol{T} \to \mathbf{0}$, et où $\overline{\otimes}^p$ est le produit contracté p fois.

Les règles de l'algèbre tensorielle impliquent que l'opérateur linéaire tangent $\boldsymbol{\nabla} f$ est un tenseur d'ordre p.

- **Définition 2.3 – Différentielle.** Si l'opérateur $\boldsymbol{\nabla} f$ existe, le scalaire $\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f \overline{\otimes}^p \mathbf{d}\boldsymbol{T}$ est appelé différentielle de f.

Avec cette définition, l'équation (2.25) s'écrit :

$$f(\boldsymbol{T} + \mathbf{d}\boldsymbol{T}) - f(\boldsymbol{T}) = \mathrm{d}f + \|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\| \, \mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{T})$$

Lorsque la variation arbitraire $\mathbf{d}\boldsymbol{T} \to \mathbf{0}$, le terme $\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\| \, \mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{T})$ tend vers 0 plus vite que le terme $\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f \overline{\otimes}^p \mathbf{d}\boldsymbol{T}$ qui est linéaire en $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$. Ainsi, quand $\mathbf{d}\boldsymbol{T} \to 0$, la différentielle $\mathrm{d}f \to 0$ en s'approchant de la variation exacte $f(\boldsymbol{T} + \mathbf{d}\boldsymbol{T}) - f(\boldsymbol{T})$ qui tend aussi vers 0.

Remarques 2.3 – L'opérateur linéaire tangent $\boldsymbol{\nabla} f$ est souvent noté $\frac{\mathrm{d}f}{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}$. Dans ce cas on écrit : $\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} \overline{\otimes}^p \mathbf{d}\boldsymbol{T}$. Mais il faut bien considérer la « fraction » $\frac{\mathrm{d}f}{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}$ comme un symbole indissociable ! Il ne s'agit nullement d'une division et le produit p-contracté « $\overline{\otimes}^p$ » n'est pas une simple multiplication. Toute « simplification » par $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ n'aurait aucun sens !

La *différentielle* $\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f \overline{\otimes}^p \mathbf{d}\boldsymbol{T} = f(\boldsymbol{T} + \mathbf{d}\boldsymbol{T}) - f(\boldsymbol{T}) - \|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\| \, \mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{T})$, est notée avec l'opérateur « d » ; la *variation arbitraire* $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ de la variable tensorielle $\boldsymbol{T}$ est notée avec le même symbole « $\mathbf{d}$ ». Ces deux quantités sont souvent appelées « petites variations » de f et de $\boldsymbol{T}$. Il faut bien noter que : d'une part, ces deux quantités ne sont pas nécessairement « petites » ; d'autre part, si la quantité $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ est bien une variation arbitraire de $\boldsymbol{T}$, la quantité $\mathrm{d}f$ n'est pas une variation exacte de f. L'équation (2.25) montre que lorsque l'on passe à la limite $\mathbf{d}\boldsymbol{T} \to \mathbf{0}$, les deux quantités $\mathrm{d}f$ et $f(\boldsymbol{T} + \mathbf{d}\boldsymbol{T}) - f(\boldsymbol{T})$ tendent vers 0 en s'approchant l'une de l'autre.

L'opérateur linéaire tangent $\boldsymbol{\nabla} f$, quand il est noté $\frac{\mathrm{d}f}{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}$, est souvent improprement appelé « dérivée de f par rapport à $\boldsymbol{T}$ » bien qu'il ne s'agisse nullement d'une limite puisque le résultat dépend de la direction de $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ dans l'espace $\mathbb{V}^{\otimes p}$ (voir la définition 2.4 ci-après).

En divisant l'égalité (2.25) [p. 52] par $\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|$, il vient :

$$\frac{f(\boldsymbol{T} + \mathbf{d}\boldsymbol{T}) - f(\boldsymbol{T})}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|} = \boldsymbol{\nabla} f \overline{\otimes}^p \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|} + \mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{T}) \tag{2.26}$$

où le tenseur $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|}$, d'ordre p et de norme unité, est un tenseur unitaire dans l'espace $\mathbb{V}^{\otimes p}$. Lorsque l'on passe à la limite $\mathbf{d}\boldsymbol{T} \to 0$, le tenseur $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|}$ tend vers un tenseur unitaire $\boldsymbol{T}_0$ et on peut alors définir *la dérivée de f dans la « direction tensorielle »* [5] *unitaire* $\boldsymbol{T}_0$:

- **Définition 2.4 – Dérivée dans la direction $\boldsymbol{T}_0$.** On appelle dérivée de la fonction $f(\boldsymbol{T})$ dans la direction tensorielle unitaire $\boldsymbol{T}_0$, la limite suivante :

$$f'_{\boldsymbol{T}_0}(\boldsymbol{T}) = \lim_{\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|} \to \boldsymbol{T}_0} \frac{f(\boldsymbol{T} + \mathbf{d}\boldsymbol{T}) - f(\boldsymbol{T})}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{T}\|} = \boldsymbol{\nabla} f \overline{\otimes}^p \boldsymbol{T}_0$$

[5] Attention : le tenseur $\boldsymbol{T}_0$ est une direction unitaire de l'espace $\mathbb{V}^{\otimes p}$ et non de l'espace $\mathbb{V}$; le tenseur $\boldsymbol{T}_0$ n'est pas uniaxial au sens de la définition 1.94 [p. 44].

2.2.2 Dérivée de fonctions composées

S'il existe une fonction $\boldsymbol{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{V}^{\otimes p}$ telle que $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{F}(t)$, alors la fonction $h = f \circ \boldsymbol{F}$ est une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle que $h(t) = f(\boldsymbol{T}) = f(\boldsymbol{F}(t))$, dont la dérivée par rapport à t est :

$$h'(t) = \lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{h(t+\mathrm{d}t) - h(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.27}$$

Or,

$$\begin{aligned} h(t+\mathrm{d}t) &= f\big(\boldsymbol{F}(t+\mathrm{d}t)\big) = f\big(\boldsymbol{F}(t) + \mathbf{d}\boldsymbol{F} + |\mathrm{d}t|\,\mathscr{O}(\mathrm{d}t)\big) \\ &= \underbrace{f\big(\boldsymbol{F}(t)\big)}_{h(t)} + \boldsymbol{\nabla} f \,\overline{\otimes}^p \big(\mathbf{d}\boldsymbol{F} + |\mathrm{d}t|\,\mathscr{O}(\mathrm{d}t)\big) + \|\mathbf{d}\boldsymbol{F} + |\mathrm{d}t|\,\mathscr{O}(\mathrm{d}t)\|\,\mathscr{O}\big(\mathbf{d}\boldsymbol{F} + |\mathrm{d}t|\,\mathscr{O}(\mathrm{d}t)\big) \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{h(t+\mathrm{d}t) - h(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\nabla} f \,\overline{\otimes}^p \left(\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} + \mathscr{O}(\mathrm{d}t)\right) + \left\|\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t} + \mathscr{O}(\mathrm{d}t)\right\| \mathscr{O}\Big(\mathbf{d}\boldsymbol{F} + |\mathrm{d}t|\,\mathscr{O}(\mathrm{d}t)\Big)$$

En passant à la limite $\mathrm{d}t \to 0$ ($\Rightarrow \mathbf{d}\boldsymbol{F} \to 0$), on trouve que la dérivée définie en (2.27) est :

$$h'(t) = \boldsymbol{\nabla} f \,\overline{\otimes}^p \boldsymbol{F}' \qquad (\boldsymbol{\nabla} f \text{ et } \boldsymbol{F}' \text{ sont d'ordre } p) \tag{2.28}$$

La formule (2.28) est une généralisation de la dérivation des fonctions composées.

Remarque – L'équation (2.28) peut s'écrire $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} \,\overline{\otimes}^p\, \dfrac{\mathbf{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}t}$ ou encore $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathbf{d}\boldsymbol{T}} \,\overline{\otimes}^p\, \dfrac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}$.

2.2.3 Composantes de l'opérateur linéaire tangent

Pour alléger les écritures, on illustre la méthode avec des tenseurs de $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$. Le tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ peut être défini par ses composantes dans une base tensorielle. Dans la suite, on prend (par exemple) des composantes mixtes :

$$\boldsymbol{T} = T^i{}_j\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j \tag{2.29}$$

Dans la base $\{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j\}$, une variation arbitraire $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ du tenseur $\boldsymbol{T}$ est définie par 9 variations $\mathrm{d}T^i{}_j$ arbitraires de chacune de ses composantes :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{T} = \mathrm{d}T^i{}_j\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j$$

À la fonction $f(\boldsymbol{T})$ et à la base tensorielle $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j\}$ choisie, on peut associer une fonction $f_{\mathscr{B}} : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(\boldsymbol{T}) = f_{\mathscr{B}}(T^1{}_1, T^1{}_2, T^1{}_3, T^2{}_1, T^2{}_2, T^2{}_3, T^3{}_1, T^3{}_2, T^3{}_3)$$

La fonction $f_{\mathscr{B}}$ permet d'évaluer le scalaire $f(\boldsymbol{T})$ en fonction des composantes de $\boldsymbol{T}$ dans la base $\mathscr{B}$. L'égalité $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_{\mathscr{B}}$ implique l'égalité suivante :

$$\underbrace{(\boldsymbol{\nabla} f)_i{}^j\, \mathrm{d}T^i{}_j}_{\mathrm{d}f = \boldsymbol{\nabla} f : \mathbf{d}\boldsymbol{T}} = \underbrace{\frac{\partial f_{\mathscr{B}}}{\partial T^i{}_j}\, \mathrm{d}T^i{}_j}_{\mathrm{d}f_{\mathscr{B}}}, \quad \forall \mathbf{d}\boldsymbol{T} \tag{2.30}$$

On en déduit par identification les composantes du tenseur $\boldsymbol{\nabla} f$ dans la base $\{\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j\}$:

$$(\boldsymbol{\nabla} f)_i{}^j = \frac{\partial f_{\mathscr{B}}}{\partial T^i{}_j} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial f_{\mathscr{B}}}{\partial T^i{}_j}\, \boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j$$

Position des indices – Les règles de sommation dans le produit doublement contracté $\boldsymbol{\nabla} f : \mathbf{d}\boldsymbol{T}$ de l'équation (2.30) impliquent que, quand on dérive la fonction $f_{\mathscr{B}}$ par rapport aux composantes d'une certaine variance, on obtient les composantes de $\boldsymbol{\nabla} f$ de variances inverses.

On généralise sans difficulté aux fonctions scalaires d'argument tensoriel d'ordre quelconque. Par exemple, pour un tenseur d'ordre quatre $\boldsymbol{T} = T^i{}_j{}^k{}_\ell\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}^\ell$, les composantes du tenseur d'ordre quatre $\boldsymbol{\nabla} f$ dans la base $\mathscr{B} = \{\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}_\ell\}$ sont :

$$(\boldsymbol{\nabla} f)_i{}^j{}_k{}^\ell = \frac{\partial f_{\mathscr{B}}}{\partial T^i{}_j{}^k{}_\ell}$$

2.2.4 Variables tensorielles contraintes

En mécanique des milieux continus, la plupart des tenseurs du second ordre sont des tenseurs symétriques par définition. Ils restent donc symétriques dans leurs variations.

Remarque 2.4 – L'espace des tenseurs symétriques est un espace vectoriel de dimension 6 et le tenseur $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ appartient à cet espace. À la fonction $f(\boldsymbol{T})$ et à une base tensorielle $\mathscr{B}^s$ bien choisie (n'engendrant que des tenseurs symétriques [6]), on pourrait associer une fonction $f_{\mathscr{B}^s} : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(\boldsymbol{T}) = f_{\mathscr{B}^s}(T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{22}, T_{23}, T_{33}) \tag{2.31}$$

où les T_{ij} sont les composantes (ici complètement covariantes, la matrice $[T_{\bullet\bullet}]$ est donc symétrique) de $\boldsymbol{T}$ dans cette base. On pourrait toujours écrire $\mathrm{d}f = \mathrm{d}f_{\mathscr{B}^s}$ et donc

$$(\boldsymbol{\nabla} f)^{ij}\, \mathrm{d}T_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j \geqslant i}^{3} \frac{\partial f_{\mathscr{B}^s}}{\partial T_{ij}}\, \mathrm{d}T_{ij} \tag{2.32}$$

Mais le terme de droite n'est pas le développement d'un double produit contracté et l'identification des composantes de $\boldsymbol{\nabla} f$ sur la base n'est plus possible !

D'autres contraintes sur les variations $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ peuvent intervenir : par exemple le tenseur $\boldsymbol{T}$ est par définition sphérique, ou de trace nulle, ou antisymétrique. À chaque fois, la dimension de l'espace vectoriel dans lequel le tenseur $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ arbitraire peut évoluer est différente. Plutôt que d'établir une définition particulière de l'opérateur linéaire tangent pour chaque type de contrainte, on va utiliser un théorème qui nous permet *dans certains cas* « d'ignorer la contrainte » pendant la dérivation puis de la rétablir ensuite après dérivation.

- **Théorème 2.5 –** Soit $\widetilde{f}$ une fonction de m variables réelles x_i $(i = 1, \cdots, m)$, certaines variables étant liées aux autres par r égalités de la forme :

$$x_k = h_k(\cdots, x_{p \notin [1;r]}, \cdots) \quad k \in [1;r]$$

$$\text{alors,} \quad \mathrm{d}\widetilde{f} = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_i}\, \mathrm{d}x_i \right]_{\{x_k = h_k(\cdots, x_{p \notin [1;r]}, \cdots) \quad k \in [1;r]\}}$$

[6] par exemple, la 6-base :

$$\boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^1, (\boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^2 + \boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^1), (\boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^3 + \boldsymbol{e}^3 \otimes \boldsymbol{e}^2), \boldsymbol{e}^2 \otimes \boldsymbol{e}^2, (\boldsymbol{e}^3 \otimes \boldsymbol{e}^1 + \boldsymbol{e}^1 \otimes \boldsymbol{e}^3), \boldsymbol{e}^3 \otimes \boldsymbol{e}^3$$

Autrement dit, si certaines variables x_k sont des fonctions des autres variables, on peut dériver $\widetilde{f}$ comme si les x_i n'étaient pas liés, puis remplacer ensuite dans le résultat, les variables liées x_k par leur expression en fonction des autres.

Démonstration – Pour alléger les écritures, on suppose que $\widetilde{f}$ a quatre variables x_1, x_2, x_3 et x_4 et qu'il n'y a qu'une seule contrainte $x_1 = h_1(x_2, x_3)$. On définit la fonction g de 3 variables indépendantes de la manière suivante :

$$g(x_2, x_3, x_4) = \widetilde{f}(h_1(x_2, x_3), x_2, x_3, x_4)$$

Pour une variation arbitraire $(\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_4)$ satisfaisant les contraintes, on a évidemment $\mathrm{d}\widetilde{f} = \mathrm{d}g$ et donc en utilisant la règle de dérivation des fonctions composées :

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_2} \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial x_3} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_3} \quad ; \quad \frac{\partial g}{\partial x_4} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_4}$$

et la différentielle de g est donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}g &= \Big(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_2}\Big)\mathrm{d}x_2 + \Big(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1}\frac{\partial h_1}{\partial x_3} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_3}\Big)\mathrm{d}x_3 + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_4}\mathrm{d}x_4 \\ &= \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1}\underbrace{\Big(\frac{\partial h_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial h_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3\Big)}_{\mathrm{d}h_1} + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_4}\mathrm{d}x_4\end{aligned}$$

On peut donc calculer la différentielle sous contrainte en posant formellement :

$$\mathrm{d}\widetilde{f} = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3 + \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial x_4}\mathrm{d}x_4$$

puis remplacer x_1 par $h_1(x_2, x_3)$ et remplacer $\mathrm{d}x_1$ par $\dfrac{\partial h_1}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \dfrac{\partial h_1}{\partial x_3}\mathrm{d}x_3$.

Il faut bien noter que la méthode de calcul des composantes de $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{T})$ avec des contraintes sur $\boldsymbol{T}$ qui vient d'être donnée, n'est valable que si les contraintes sur les composantes peuvent s'exprimer strictement sous la forme donnée dans le théorème 2.5 [p.55]. Ce n'est notamment pas le cas pour une contrainte du type « $\boldsymbol{T}$ orthogonal » ou « $\boldsymbol{T}$ uniaxial » ou encore $\|\boldsymbol{T}\| = 1$. Les ensembles de tenseurs soumis à ces contraintes ne sont pas des espaces vectoriels et le tenseur $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ n'appartient pas à ces ensembles. Dans ces cas, la contrainte sur les composantes de $\boldsymbol{T}$ ne se traduit pas par l'expression de certaines composantes en fonction d'autres (les fonctions h_k n'existent pas).

Exemple 2.6 – La fonction $f : \mathbb{V}_3^{\otimes 2} \to \mathbb{R}$ définie par $f(\boldsymbol{Q}) = \boldsymbol{Q} : \boldsymbol{Q}$ avec la contrainte « $\boldsymbol{Q}$ orthogonal » est une fonction qui vaut 3 $\forall \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_3$. L'opérateur linéaire tangent $\boldsymbol{\nabla} f$ est donc évidemment nul. Or, la formule de dérivation sans contraintes est : $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{T} : \boldsymbol{T}) = 2\boldsymbol{T}$ [éq. (2.34) p. 57]. On voit bien que la contrainte « $\boldsymbol{Q}$ orthogonal » appliquée après dérivation ne donne pas $\mathbf{0}$ mais $2\boldsymbol{Q}$. De fait, la contrainte « $\boldsymbol{Q}$ orthogonal » ne peut pas se réduire à des relations de certaines composantes de $\boldsymbol{Q}$ en fonction des autres telles que celles précisées dans le théorème 2.5 [p. 55]. Le théorème n'est donc pas applicable.

En pratique, le théorème est utilisable pour des contraintes de symétrie ou d'antisymétrie (avec des relations portant sur des composantes non mixtes) ou des contraintes de sphéricité ou de trace nulle (avec des relations portant sur des composantes mixtes).

2.3 Fonctions scalaires de plusieurs tenseurs

En mécanique des milieux continus, il arrive souvent que des fonctions à valeur scalaire soient à plusieurs arguments tensoriels $\boldsymbol{T}_i$, d'ordre respectif p_i.

■ **Définition 2.7 – Opérateur tangent partiel.** Soit $f(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_m)$ une fonction scalaire de m tenseurs où les tenseurs $\boldsymbol{T}_i$ sont d'ordre p_i. On appelle opérateur tangent partiel (ou « dérivée partielle » de f), noté $\boldsymbol{\partial}_i f$, l'opérateur linéaire tangent de f quand l'argument tensoriel $\boldsymbol{T}_i$ varie, les autres étant constants.

Les règles de l'algèbre tensorielle impliquent que le tenseur $\boldsymbol{\partial}_i f$ est un tenseur d'ordre p_i. La différentielle de f s'écrit :

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\partial}\boldsymbol{T}_i \overline{\otimes}^{p_i} \mathbf{d}\boldsymbol{T}_i$$

Exemple 2.8 – Soit $f(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}) \in \mathbb{R}$ où $\boldsymbol{P}$ et $\boldsymbol{Q}$ sont des tenseurs d'ordre respectifs p et q. Le tenseur $\boldsymbol{\partial}_1 f$ est l'opérateur linéaire tangent de f quand le tenseur $\boldsymbol{P}$ varie à $\boldsymbol{Q}$ constant ; il est donc d'ordre p . De même le tenseur $\boldsymbol{\partial}_2 f$ est d'ordre q. Pour toute variation arbitraire des arguments tensoriels (liés ou non par une contrainte), la différentielle est :

$$\mathrm{d}f = \boldsymbol{\partial}_1 f \overline{\otimes}^{p} \mathbf{d}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{\partial}_2 f \overline{\otimes}^{q} \mathbf{d}\boldsymbol{Q}$$

2.3.1 Quelques identités utiles

On laisse le soin au lecteur de vérifier les identités suivantes dans lesquelles $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ sont des vecteurs et $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}$ sont des tenseurs du second ordre :

– Fonctions scalaires à variables vectorielles :

$$\boldsymbol{\partial}_1(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y} \qquad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x} \qquad \boldsymbol{\nabla}\|\boldsymbol{x}\| = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|} \tag{2.33}$$

– Fonctions scalaires à variables tensorielles d'ordre 2 :

$$\boldsymbol{\partial}_1(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U} \qquad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{T}:\boldsymbol{T}) = 2\boldsymbol{T} \qquad \boldsymbol{\nabla}\|\boldsymbol{T}\| = \frac{\boldsymbol{T}}{\|\boldsymbol{T}\|} \tag{2.34}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\operatorname{tr}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{G} \qquad \boldsymbol{\nabla}\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}^2) = 2\boldsymbol{T}^\top \qquad \boldsymbol{\nabla}\operatorname{tr}(\boldsymbol{T}^n) = n(\boldsymbol{T}^{n-1})^\top \tag{2.35}$$

$$\boldsymbol{\nabla}(T_{\mathrm{I}}) = \boldsymbol{G} \qquad \boldsymbol{\nabla}(T_{\mathrm{II}}) = T_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{T}^\top \qquad \boldsymbol{\nabla}(T_{\mathrm{III}}) = T_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - T_{\mathrm{I}}\boldsymbol{T}^\top + \boldsymbol{T}^{2\top} \tag{2.36}$$

$$= T_{\mathrm{III}}\boldsymbol{T}^{-\top} \text{ (si } \boldsymbol{T} \text{ inversible)} \tag{2.37}$$

– Dérivées temporelles de fonction scalaires :

$$\frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{x}\|}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}\cdot\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{T}\|}{\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{T}}{\|\boldsymbol{T}\|} : \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}(\operatorname{tr}\boldsymbol{T}^n)}{\mathrm{d}t} = n(\boldsymbol{T}^{n-1})^\top : \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \tag{2.38}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}t} = \operatorname{tr}\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}t} = (T_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{T}^\top) : \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \qquad \frac{\mathrm{d}T_{\mathrm{III}}}{\mathrm{d}t} = (T_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - T_{\mathrm{I}}\boldsymbol{T}^\top + \boldsymbol{T}^{2\top}) : \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \tag{2.39}$$

$$= T_{\mathrm{III}}\boldsymbol{T}^{-\top} : \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \text{ (si } \boldsymbol{T} \text{ inversible)} \tag{2.40}$$

2.3.2 Fonctions scalaires isotropes d'arguments tensoriels

■ **Définition 2.9 – Rotation d'un vecteur.** La rotation par $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_3$ d'un vecteur $\boldsymbol{v}$ est le vecteur :

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}$$

- **Définition 2.10 – Rotation d'un tenseur d'ordre 2.** La rotation par $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_3$ d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}$ est le tenseur du second ordre :

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Q}^{\top}$$

- **Propriété 2.11 – Rotation des tenseurs du second ordre.** Les propriétés algébriques des tenseurs orthogonaux [éq. (1.82) et suivantes p. 41] montrent que les tenseurs du second ordre $\boldsymbol{T}$ et $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T})$ ont les mêmes valeurs propres et que leurs vecteurs propres se transforment par $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$. En outre, si $\boldsymbol{T}$ est symétrique ou antisymétrique ou sphérique ou déviatorique ou orthogonal ou symétrique défini positf, $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T})$ a les mêmes propriétés. Une base propre de $\boldsymbol{T}$ se transforme par $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ en une base propre de $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T})$.

On sait écrire tensoriellement la rotation de tenseurs d'ordres supérieurs [éq. (B.1) p. 104].

- **Définition 2.12 – Fonction scalaire isotrope.** Une fonction à valeur scalaire est isotrope si elle est invariante par rotation de ses arguments :

$$f(\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_n) = f(\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}_1), \cdots, \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}_n)), \quad \forall \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_3$$

En mécanique des milieux continus, il arrive souvent que l'on impose cette propriété d'isotropie à certaines fonctions réelles d'arguments tensoriels, c'est-à-dire que leur valeur doit être insensible à toute rotation de ses arguments tensoriels [(7)].

- **Théorème 2.13 – Fonctions isotropes.** Soit $f(\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_n)$ une fonction scalaire isotrope. Il existe une fonction $\bar{f}$ de m arguments scalaires telle que :

$$f(\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_n) = \bar{f}(I_1, \ldots, I_m)$$

Les m arguments $\{I_1 \ldots, I_m\}$ de $\bar{f}$ sont des scalaires (des invariants) calculés à partir d'un ou plusieurs des arguments tensoriels de f. Cette liste dépend à la fois de l'ordre de tensorialité et du nombre d'arguments tensoriels de f. Le nombre m de ces scalaires est toujours inférieur au nombre total de composantes des arguments tensoriels.

Le grand intérêt de ce théorème est de pouvoir remplacer des fonctions scalaires isotropes d'arguments tensoriels par des fonctions scalaires d'arguments scalaires, dont le maniement est plus aisé [(8)]. La démonstration de ce théorème pour des arguments tensoriels appartenant à $\mathbb{V}_3$ ou à $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ est donnée dans l'annexe B [p. 103]. On ne présente ici que quelques résultats. Dans ce qui suit, $\boldsymbol{v}$ est un vecteur et $\boldsymbol{S}$ est un tenseur du second ordre symétrique [(9)], d'invariants S_{I}, S_{II}, S_{III} et

[(7)] La justification physique de cette condition apparaîtra en mécanique des milieux continus : elle signifie que la grandeur scalaire $f(\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_n)$ doit avoir la même valeur pour tous les observateurs (objectivité de f).

[(8)] Notamment, lorsque les arguments tensoriels varient, on n'a plus à « dériver par rapport à des tenseurs » éventuellement contraints [théorème 2.5 p. 55].

[(9)] Tout tenseur du second ordre pouvant être décomposé en parties symétrique et antisymétrique, et les tenseurs antisymétriques étant isomorphes à leur vecteur adjoint, un argument tensoriel du second ordre quelconque peut donc être vu comme un couple d'arguments indépendants, l'un symétrique du second ordre et l'autre vectoriel.

de valeurs propres s_1, s_2 et s_3 :

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{v}) \text{ isotrope} \quad &\Rightarrow \quad \exists \bar{f} \text{ tel que } f(\boldsymbol{v}) = \bar{f}(\|\boldsymbol{v}\|) \\
f(\boldsymbol{S}) \text{ isotrope} \quad &\Rightarrow \quad \exists \bar{f} \text{ tel que } f(\boldsymbol{S}) = \bar{f}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \bar{f}'(\mathrm{tr}\boldsymbol{S}, \mathrm{tr}(\boldsymbol{S}^2), \mathrm{tr}(\boldsymbol{S}^3)) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = \bar{f}''(s_1, s_2, s_3) \\
f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') \text{ isotrope} \quad &\Rightarrow \quad \exists \bar{f} \text{ tel que } f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}') = \bar{f}(\|\boldsymbol{v}\|, \|\boldsymbol{v}'\|, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}') \\
f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}) \text{ isotrope} \quad &\Rightarrow \quad \exists \bar{f} \text{ tel que } f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S}) = \bar{f}(\|\boldsymbol{v}\|, S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}^2\cdot\boldsymbol{v})
\end{aligned}$$

On trouvera en annexe, section B.7 [p. 115] des résultats plus complets. Comme on peut le constater, par exemple dans le cas $f(\boldsymbol{S})$ où on a donné plusieurs listes possibles, les listes d'invariants $\{I_1, I_2, \cdots, I_m\}$ ne sont pas uniques, mais leur longueur est toujours la même et le jacobien de la transformation $\{I_1, I_2, \cdots, I_m\} \leftrightarrow \{I'_1, I'_2, \cdots, I'_m\}$ est non nul.

Remarques 2.5 – On peut interpréter géométriquement la présence des invariants dits « croisés » (ceux qui sont calculés à partir de plusieurs arguments tensoriels de f) : ils traduisent le fait que dans toute rotation $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$, les orientations relatives des différents arguments tensoriels de f restent invariantes.

Par exemple, l'invariant $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}'$ du cas $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}')$ traduit l'angle non orienté entre les deux arguments vectoriels. De même, on montre dans l'annexe [remarque B.4 p. 111] que les deux invariants $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}^2\cdot\boldsymbol{v}$ du cas $f(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{S})$ sont deux scalaires nécessaires et suffisants pour préciser l'orientation relative de la direction non orientée $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}$ par rapport aux directions propres du tenseur symétrique du second ordre $\boldsymbol{S}$. On peut trouver d'autres invariants croisés physiquement plus significatifs pour représenter la même information.

Enfin, si certains arguments tensoriels de f présentent des particularités permanentes (norme unité, trace nulle etc.), le nombre de variables de $\bar{f}$ s'en trouve diminué. Par exemple, si $\boldsymbol{v}$ est par définition un vecteur unitaire, $\|\boldsymbol{v}\| = 1$ n'est plus une variable de la fonction $\bar{f}$.

2.4 Fonctions tensorielles d'arguments tensoriels

2.4.1 Fonctions d'un argument tensoriel

On considère maintenant des applications $\boldsymbol{f} : \mathbb{V}_3^{\otimes p} \to \mathbb{V}_3^{\otimes q}$. Si l'application $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{T})$ est différentiable en $\boldsymbol{T}$, l'opérateur linéaire tangent est défini par :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{f}\bar{\otimes}^p\mathbf{d}\boldsymbol{T} \tag{2.41}$$

où $\mathbf{d}\boldsymbol{f} \in \mathbb{V}_3^{\otimes q}$ et $\mathbf{d}\boldsymbol{T} \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$. L'opérateur linéaire tangent $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{f}$ est donc un tenseur d'ordre $p+q$. Ses composantes dans une base fixe se calculent suivant les mêmes règles que précédemment.

Exemple 2.14 – Si $p = 2$ et $q = 2$, l'opérateur linéaire tangent $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{f}$ de l'application $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{U})$ est d'ordre 4, et ses composantes dans une base sont par exemple :

$$(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{f})^i{}_j{}^k{}_m = \frac{\partial T^i{}_j(U_1{}^1, \cdots, U_3{}^3)}{\partial U_k{}^m} \tag{2.42}$$

Noter qu'ici encore, la dérivation par rapport à une composante de certaines variances donne une composante de $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{f}$ de variances inverses.

Cas particulier des endomorphismes inversibles $\mathbb{V} \leftrightarrow \mathbb{V}$

Soit $\boldsymbol{f}$ un endomorphisme (*a priori* non linéaire) inversible $\mathbb{V} \leftrightarrow \mathbb{V}$: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})$. L'inversibilité de $\boldsymbol{f}$ implique qu'il existe $\boldsymbol{f}^{-1}$ tel que $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{v})$.

Les opérateurs linéaires tangents des deux applications $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{f}^{-1}$ sont définis par :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{f} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{d}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{f}^{-1}) \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{v}$$

Les opérateurs linéaires tangents $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{f}^{-1})$ sont donc tous les deux des tenseurs d'ordre 2, c'est-à-dire des endomorphismes *linéaires* $\mathbb{V} \to \mathbb{V}$. Les deux égalités ci-dessus montrent qu'ils sont inverses. On a donc :

$$f : \mathbb{V} \to \mathbb{V} \text{ inversible} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{f}^{-1}) = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{f})^{-1} \tag{2.43}$$

2.4.2 Fonctions tensorielles de plusieurs arguments tensoriels

On définit sans difficulté les opérateurs linéaires tangents partiels comme étant les opérateurs linéaires tangents de l'application $\boldsymbol{f}$, à valeur tensorielle d'ordre p, quand l'un de ses arguments tensoriel $\boldsymbol{T}_i$ varie, les autres étant constants. La différentielle de l'application $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{T}_1, \ldots, \boldsymbol{T}_m)$ s'écrit :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{\partial}_i \boldsymbol{f} \,\overline{\otimes}^{p_i}\, \mathbf{d}\boldsymbol{T}_i \in \mathbb{V}^{\otimes p}$$

où p_i est l'ordre du tenseur $\boldsymbol{T}_i$ et où $\boldsymbol{\partial}_i \boldsymbol{f}$ est un tenseur d'ordre $p + p_i$. Si les tenseurs $\boldsymbol{T}_i$ sont fonctions d'un paramètre réel t, on montre facilement que :

$$\boldsymbol{f}' = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\partial}_i \boldsymbol{f} \,\overline{\otimes}^{p_i}\, \boldsymbol{T}_i' \quad \text{que l'on peut encore écrire :} \quad \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{f}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\partial}_i \boldsymbol{f} \,\overline{\otimes}^{p_i}\, \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}_i}{\mathrm{d}t}$$

2.4.3 Fonctions tensorielles isotropes

- **Définition 2.15 –** Une fonction tensorielle $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_n) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$ est dite isotrope si :

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{f}(T_1, \cdots, \boldsymbol{T}_n)) = \boldsymbol{f}(\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}_1), \cdots, \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}_n)) \tag{2.44}$$

Remarque 2.6 – C'est notamment le cas des lois de comportement mécanique des milieux continus qui sont de la forme $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}(T, \boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots)$ où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes, T est la température et les $\boldsymbol{X}_i$ sont des vecteurs ou des tenseurs. Elles doivent être isotropes pour garantir l'invariance de la loi dans tout changement d'observateur [10].

2.5 En bref...

La dérivation temporelle d'un tenseur conserve la symétrie, l'antisymétrie, la sphéricité et la trace nulle, mais pas l'orthogonalité ni la norme ni l'uniaxialité.

On définit des opérateurs linéaires tangents (« dérivée par rapport à un tenseur »), éventuellement partiels, de fonctions scalaires ou tensorielles d'arguments tensoriels.

Les fonctions scalaires *isotropes* d'arguments tensoriels peuvent être remplacées par des fonctions scalaires d'arguments scalaires.

[10] L'invariance d'une loi dans tout changement d'observateur sera appelée *universalité* de la loi.

3

Champs tensoriels

En mécanique des milieux continus, certaines grandeurs physiques, comme par exemple les efforts intérieurs, les déformations et les vitesses de déformation, sont mathématiquement représentées par des tenseurs du second ordre. D'autres grandeurs sont représentées par des tenseurs d'ordre inférieur (vecteurs ou scalaires). Quelque soit leur ordre, ces tenseurs ont en général une valeur différente en chaque point M d'un domaine $\mathscr{D}$ de l'espace occupé par un milieu continu. Les grandeurs physiques sont donc décrites par des *champs de tenseurs* :

$$\forall M \in \mathscr{D} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{T}(M) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$$

On suppose que l'espace physique qui nous entoure est représentable par un espace affine tridimensionnel [1] de points, qui sera noté $\mathscr{E}_3$. On aura donc à envisager des champs scalaires (tenseurs d'ordre 0), des champs vectoriels (tenseurs d'ordre 1) et des champs tensoriels (tenseurs d'ordre supérieur à 1).

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'analyse des champs quel que soit le système de coordonnées utilisé. La définition des opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien sera donnée sous forme tensorielle, donc valable indépendamment de tout système de coordonnées et de toute base. Accessoirement, la démarche permettra de construire de manière systématique des formulaires donnant les composantes de ces opérateurs différentiels sur les bases locales de ces systèmes de coordonnées.

Notation pour les dérivées partielles par rapport aux coordonnées

Soit $\boldsymbol{f}(x^1, x^2, x^3)$ une fonction tensorielle quelconque des trois coordonnées réelles (x^1, x^2, x^3) et à valeur dans $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$, $p \geqslant 0$. Dans ce chapitre, on fait grand usage de dérivées partielles par rapport aux coordonnées. En calcul tensoriel, il est d'usage d'employer des notations plus concises que les notations habituelles ; dans la littérature spécialisée, on trouve deux notations pour la dérivée partielle d'une fonction $\boldsymbol{f}$ par rapport à la i^{e} coordonnée :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x^i} = \boldsymbol{\partial}_i \boldsymbol{f} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial x^i} = \boldsymbol{f}_{,i}$$

Dans la seconde notation, les indices qui suivent la virgule sont des indices de dérivation (leur ordre est donc indifférent). Cette notation est la plus concise et présente des avantages d'ordre d'indices qui apparaitront plus loin. On l'utilisera systématiquement dans la suite.

[1] Certaines des notions qui suivent sont généralisables à des dimensions supérieures, mais puisque dans ce cours, on ne se préoccupe que de mécanique non relativiste, on se limite à $\mathscr{E}_3$.

3.1 Systèmes de coordonnées

Pour repérer les points $M \in \mathscr{E}_3$, on choisit arbitrairement un point $O \in \mathscr{E}_3$, que l'on appelle *origine*, et deux autres points A et B non alignés avec O. On sait alors associer de manière biunivoque à chaque point M de $\mathscr{E}_3$ le bipoint $(O,M) \in \mathscr{E}_3 \times \mathscr{E}_3$ et un vecteur, dit « libre », $\boldsymbol{x}_M \in \mathbb{V}_3$ déterminé par ses « composantes » sur la « base de points » $\{OA, OB, OC = OA \wedge OB\}$. Le choix des trois points (O,A,B) permet donc de confondre par isomorphisme les points de $\mathscr{E}_3$ et les vecteurs de $\mathbb{V}_3$:

$$M \in \mathscr{E}_3 \quad \leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}_M \in \mathbb{V}_3$$

On peut alors définir la différence entre deux points comme étant la différence entre les vecteurs de $\mathbb{V}_3$ qui lui sont associés :

$$M' - M = \boldsymbol{x}_{M'} - \boldsymbol{x}_M$$

La différence entre deux points est un vecteur indépendant du choix de l'origine.

Choisir un système de coordonnées c'est choisir une méthode pour associer de manière biunivoque un triplet réels appelés *coordonnées*, que l'on notera (x^1,x^2,x^3), à chaque point $M \in \mathscr{E}_3$. Chaque méthode définit un système de coordonnées particulier. Si la méthode est correcte, on a les bijections suivantes (au moins dans une certaine portion de l'espace) :

$$(x^1,x^2,x^3) \in \mathbb{R}^3 \quad \underset{\text{coordonnées}}{\overset{\text{système de}}{\longleftrightarrow}} \quad \begin{matrix} O,A,B \in \mathscr{E}_3 \text{ choisis} \\ M \in \mathscr{E}_3 \end{matrix} \quad \longleftrightarrow \quad \boldsymbol{x}_M \in \mathbb{V}_3 \tag{3.1}$$

Quand on a choisi un système de coordonnées, on dispose donc d'une application $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}_3$ telle que :

$$\boldsymbol{g}(x^1,x^2,x^3) = \boldsymbol{x}_M$$

On peut construire une infinité de systèmes de coordonnées.

Exemple 3.1 – Exemples de systèmes de coordonnées.

Coordonnées cartésiennes Les coordonnées cartésiennes $\{x^i\}$ d'un point M sont les composantes du vecteur $\boldsymbol{x}_M$ dans la « base de points » initialement choisie :

$$\{\boldsymbol{E}_i\} = \{\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{OA}, \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{OB}, \boldsymbol{E}_3 = \boldsymbol{OC}\}$$

La fonction $\boldsymbol{g}$ est :

$$\boldsymbol{g}(x^1,x^2,x^3) = x^i \boldsymbol{E}_i$$

Coordonnées cylindriques On choisit $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{OC}/\|\boldsymbol{OC}\|$ et $\boldsymbol{u}_0$ unitaire perpendiculaire à $\boldsymbol{k}$ dans le plan AOC. Le demi-plan $\mathscr{P}_0 = (O,\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{k})$ est appelé demi-plan méridien de référence. Soit M le point à repérer. On appelle demi-plan méridien de M le demi-plan $\mathscr{P}_\theta = (O,\boldsymbol{x}_M,\boldsymbol{k})$. On appelle angle polaire $0 \leqslant \theta < 2\pi$ l'angle orienté autour de $\boldsymbol{k}$ de $\mathscr{P}_0$ à $\mathscr{P}_\theta$. On note $\boldsymbol{u}$ le vecteur unitaire de $\mathscr{P}_\theta$ perpendiculaire à $\boldsymbol{k}$. Dans le demi-plan $\mathscr{P}_\theta$, le point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes $r > 0$ et z sur le repère orthonormé $\{O,\boldsymbol{u},\boldsymbol{k}\}$. La fonction $\boldsymbol{g}$ est :

$$\boldsymbol{g}(r,\theta,z) = r\boldsymbol{u}(\theta) + z\boldsymbol{k}$$

Pour pouvoir écrire des sommations, on pose $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ et $x^3 = z$.

Coordonnées sphériques Les choix arbitraires O, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}_0$ sont les mêmes qu'en coordonnées cylindriques mais le point M est repéré dans le demi-plan méridien $\mathscr{P}_\theta$ par ses coordonnées polaires : $r = \|\boldsymbol{OM}\| > 0$ et l'angle $\Phi = (\boldsymbol{k},\boldsymbol{x}_M)$ $(0 \leqslant \Phi \leqslant \pi)$. On note $\boldsymbol{w}$ le vecteur unitaire $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{OM}/\|\boldsymbol{OM}\|$. La fonction $\boldsymbol{g}$ est :

$$\boldsymbol{g}(r,\Phi,\theta) = r\boldsymbol{w}(\theta,\Phi)$$

Pour pouvoir écrire des sommations, on pose $x^1 = r$, $x^2 = \Phi$ et $x^3 = \theta$.

Coordonnées géographiques Elles sont semblables aux coordonnées sphériques, mais l'angle φ est défini différemment : $\varphi = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}_M)$ $(-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. L'angle θ est la longitude, et l'angle φ la latitude. La fonction $\boldsymbol{g}$ est :

$$\boldsymbol{g}(r,\varphi,\theta) = r\boldsymbol{w}(\theta,\varphi)$$

Pour pouvoir écrire des sommations, on pose $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ et $x^3 = \varphi$.

On peut en inventer bien d'autres : par exemple, on peut choisir une surface $\mathscr{S}$ particulière de $\mathscr{E}_3$, repérer la projection m de M sur la surface $\mathscr{S}$ par deux coordonnées surfaciques, la troisième coordonnée étant la distance mM suivant la normale à la surface. Un tel système de coordonnées est commode à utiliser en théorie des coques (mécanique des milieux continus minces). Autre exemple : un système de coordonnées toriques est commode pour repérer les points dans un coude de conduite.

En mécanique des milieux continus, le choix d'un système de coordonnées est généralement suggéré par la forme du domaine $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}_3$ dans lequel on travaille : on choisit un système de coordonnées qui rend facile l'identification des points du domaine et de sa frontière.

Dans ce chapitre, on se propose de faire de l'analyse des champs *en utilisant un système de coordonnées quelconque* : un point M de l'espace est repéré par trois réels $\{x^1,x^2,x^3\}$ sous la forme d'une application biunivoque $\boldsymbol{g} : \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathbb{V}_3$ *non précisée*. Aucune hypothèse n'est faite sur la signification géométrique des trois coordonnées (composante, produit scalaire, distance, angle, etc.). La seule condition est que l'application $\boldsymbol{g}$ soit bien une bijection entre $\mathbb{R}^3$ et les points M de $\mathscr{E}_3$ représentés par leur vecteur $\boldsymbol{x}_M \in \mathbb{V}_3$, au moins dans une certaine région de l'espace [(2)].

3.2 Base naturelle d'un système de coordonnées

Soit un système de coordonnées quelconque défini par $\boldsymbol{x}_M = \boldsymbol{g}(x^1,x^2,x^3)$. Les dérivées partielles de la fonction $\boldsymbol{g}$ sont des vecteurs :

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x^i} = \lim_{\substack{h\to 0\\ x^k \text{ constant}\\ k\neq i}} \frac{\boldsymbol{g}(\dots,x^i+h,\dots) - \boldsymbol{g}(x^1,x^2,x^2)}{h}$$

■ **Définition 3.2 – Base naturelle.** On appelle base naturelle en M du système de coordonnées $\boldsymbol{x}_M = \boldsymbol{g}(x^1,x^2,x^3)$, le système de vecteurs $\{\boldsymbol{e}_i\}$ défini par :

$$\boldsymbol{e}_i = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x^i} = \boldsymbol{g}_{,i} \tag{3.2}$$

(2) Certains systèmes de coordonnées ne sont pas des bijections en tout point de $\mathscr{E}_3$. C'est notamment le cas des coordonnées cylindriques pour les points $r = 0$ et des coordonnées sphériques ou géographiques en $r = 0$ et aux pôles.

L'inversibilité de la fonction $\boldsymbol{g}$ garantit que ces trois vecteurs forment une base de $\mathbb{V}_3$ car le jacobien $\det[(\boldsymbol{g}_{,i})^j] = \det[(\boldsymbol{e}_i)^j]$ est non nul. L'ordre des vecteurs de la base naturelle est induit par l'ordre dans lequel on a classé les trois coordonnées $\{x^i\}$. On peut toujours choisir un ordre des coordonnées tel que la base naturelle soit directe. La base naturelle d'un système de coordonnées n'est, en général, ni orthogonale ni normée. En outre, elle est généralement variable avec le point M.

Exemple 3.3 – Bases naturelles de systèmes de coordonnées usuels.
- en coordonnées cartésiennes, $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{E}_i$, la base naturelle est donc la même en tout point M ;
- en coordonnées cylindriques :

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{u} \quad ; \quad \boldsymbol{e}_\theta = r\boldsymbol{v} \quad ; \quad \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \theta}$$

  La base naturelle est orthogonale non normée et elle change avec le point M ;
- en coordonnées sphériques :

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{w} \quad ; \quad \boldsymbol{e}_\varphi = r\boldsymbol{t} \quad ; \quad \boldsymbol{e}_\theta = r\sin\varphi\,\boldsymbol{v} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{t} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \varphi}$$

  La base naturelle est orthogonale non normée et elle change avec le point M ;
- en coordonnées géographiques :

$$\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{w} \quad ; \quad \boldsymbol{e}_\theta = r\cos\varphi\,\boldsymbol{v} \quad ; \quad \boldsymbol{e}_\varphi = r\boldsymbol{s} \quad \text{où} \quad \boldsymbol{s} = \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial \varphi}$$

  La base naturelle est orthogonale non normée et elle change avec le point M.

3.2.1 Base physique

Comme on le verra dans la suite, le principal avantage de la base naturelle est que les expressions des composantes des opérateurs différentiels dans la base naturelle sont les mêmes quel que soit le système de coordonnées utilisé. En revanche, puisque les coordonnées ne sont généralement pas toutes de même nature géométrique (longueurs, produits scalaires, angles, etc), la base naturelle n'est généralement pas adimensionnelle.

Exemple 3.4 – En coordonnées cylindriques, on vérifie aisément que les normes des vecteurs de la base naturelle sont $\|\boldsymbol{e}_r\| = 1$ (adimensionnel), $\|\boldsymbol{e}_\theta\| = r$ (longueur) et $\|\boldsymbol{e}_z\| = 1$ (adimensionnel). Si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur vitesse et que l'on écrit ses composantes contravariantes sur la base naturelle :

$$\boldsymbol{v} = v^i\boldsymbol{e}_i = v^r\boldsymbol{e}_r + v^\theta\boldsymbol{e}_\theta + v^z\boldsymbol{e}_z$$

L'analyse dimensionnelle de cette égalité indique que les composantes v^r et v^z ont la dimension d'une vitesse, alors que la composante v^θ a la dimension d'une fréquence.

Pour éviter cet inconvénient, on définit la base physique :

- **Définition 3.5 – Base physique.** On appelle base physique (ou base locale), notée $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\}$, la base naturelle normée :

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_i = \frac{\boldsymbol{e}_i}{\|\boldsymbol{e}_i\|}$$

Par construction, la base $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\}$ est adimensionnelle et normée. En général, elle n'est pas orthonormée sauf si la base naturelle est orthogonale. Même si l'on effectue des calculs avec des composantes de tenseurs sur la base naturelle [3], il est préférable de présenter les résultats par des composantes de ces tenseurs sur la base physique, afin que la dimension des composantes soit la même que celle de la grandeur physique qu'elles représentent. Le changement de base est toujours très simple car la matrice de passage de la base naturelle $\{\boldsymbol{e}_i\}$ à la base physique $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\}$ est diagonale :

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_i = A^j{}_i \boldsymbol{e}_j \quad \text{avec} \quad [A^\bullet{}_\bullet] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_1\|} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_2\|} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\|\boldsymbol{e}_3\|} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

3.2.2 Variations de la base naturelle

Une fois fait le choix d'un système de coordonnées, il définit la base naturelle $\{\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{g}_{,i}\}$ en chaque point M [éq. (3.2) p. 63]. Cette base varie en général avec M, c'est-à-dire avec les coordonnées (x^1, x^2, x^3) de M. On en étudie ici les variations.

Les dérivées des vecteurs de la base naturelle par rapport aux coordonnées sont des vecteurs. On désigne leurs 27 composantes contravariantes sur la base naturelle comme suit :

$$\boldsymbol{e}_{i,j} = \Gamma^k_{ij} \boldsymbol{e}_k \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma^k_{ij} = \boldsymbol{e}_{i,j} \cdot \boldsymbol{e}^k \quad \text{[éq. (1.12) p. 14]} \tag{3.4}$$

Le nombre Γ^k_{ij} est la k^{e} composante contravariante du vecteur $\boldsymbol{e}_{i,j}$ sur la base naturelle $\{\boldsymbol{e}_k\}$. Ces 27 nombres sont appelés *coefficients de Christoffel*.

Pour les calculer, la méthode la plus simple est souvent de calculer directement la dérivée des vecteurs de la base naturelle à partir de leur définition [4] et d'en donner les composantes contravariantes sur la base naturelle. Néanmoins, on va montrer que les coefficients de Christoffel peuvent se calculer de façon systématique en fonction des dérivées des composantes sur la base naturelle du tenseur métrique [5].

La définition du système de coordonnées $M = g(x^1, x^2, x^3)$ et ses dérivées étant des fonctions suffisamment régulières des coordonnées, on peut écrire :

$$\boldsymbol{e}_{i,j} = (\boldsymbol{g}_{,i})_{,j} = \boldsymbol{g}_{,ij} = \boldsymbol{g}_{,ji} = (\boldsymbol{g}_{,j})_{,i} = \boldsymbol{e}_{j,i} \quad \Rightarrow \quad \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} \tag{3.5}$$

Les 27 coefficients de Christoffel Γ^k_{ij} sont donc symétriques par rapport aux indices inférieurs. Il suffit donc de n'en calculer que 18. Compte tenu de cette symétrie, la dérivée d'un vecteur de base peut s'écrire :

$$\boldsymbol{e}_{i,j} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{e}_{i,j} + \boldsymbol{e}_{j,i})$$

[3] Les calculs y sont généralement plus simples, notamment les intégrations d'équations différentielles.
[4] Cette définition dépend du système de coordonnées choisi.
[5] Cette méthode de calcul systématique est plus facilement programmable dans un logiciel de calcul formel.

Calculons maintenant les Γ_{ij}^k :

$$\begin{aligned}
2\Gamma_{ij}^k &= (\boldsymbol{e}_{j,i}+\boldsymbol{e}_{i,j})\cdot\boldsymbol{e}^k \\
&= g^{k\mu}(\boldsymbol{e}_{j,i}+\boldsymbol{e}_{i,j})\cdot\boldsymbol{e}_\mu \\
&= g^{k\mu}((\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_\mu)_{,i}+(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_\mu)_{,j}-\boldsymbol{e}_{\mu,i}\cdot\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_{\mu,j}\cdot\boldsymbol{e}_i) \\
&= g^{k\mu}((\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_\mu)_{,i}+(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_\mu)_{,j}-\boldsymbol{e}_{i,\mu}\cdot\boldsymbol{e}_j-\boldsymbol{e}_{j,\mu}\cdot\boldsymbol{e}_i) \\
&= g^{k\mu}((\boldsymbol{e}_j\cdot\boldsymbol{e}_\mu)_{,i}+(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_\mu)_{,j}-(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j)_{,\mu}) \\
2\Gamma_{ij}^k &= g^{k\mu}(g_{j\mu,i}+g_{i\mu,j}-g_{ij,\mu})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

où les $g_{\bullet\bullet}$ sont les composantes covariantes du tenseur métrique sur la base naturelle, $g_{ij}=\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$ [éq. (1.21) p. 24].

On calcule maintenant les dérivées des vecteurs de la base duale $\{\boldsymbol{e}^j\}$. On pose comme précédemment 27 nouveaux coefficients Γ'^{j}_{ik} à déterminer :

$$\boldsymbol{e}^j_{,i}=\Gamma'^{j}_{ik}\boldsymbol{e}^k$$

En remarquant que :

$$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j=\delta_i^j \quad\Rightarrow\quad (\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j)_{,k}=0 \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}^j{}_{,k}+\boldsymbol{e}^j\cdot\boldsymbol{e}_{i,k}=0$$

on en déduit que :

$$\Gamma'^{j}_{ik}=\boldsymbol{e}^j_{,k}\cdot\boldsymbol{e}_i=-\boldsymbol{e}^j\cdot\boldsymbol{e}_{i,k}=-\Gamma_{ik}^j$$

Les dérivées des vecteurs de la base duale s'expriment donc aussi avec les coefficients de Christoffel Γ_{ik}^j :

$$\boldsymbol{e}^j_{,i}=-\Gamma_{ik}^j\boldsymbol{e}^k \tag{3.7}$$

Chaque système de coordonnées a donc sa propre collection de coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k, que l'on peut calculer une fois pour toutes.

Les coefficients de Christoffel Γ_{ij}^k ne sont pas les composantes d'un tenseur d'ordre 3. Pour s'en convaincre, il suffit de vérifier que les formules de changement de base des Γ_{ij}^k ne sont pas celles d'un tenseur. On ne peut donc pas utiliser la règle de « l'ascenseur d'indices » [règle 1.50 p. 26] pour faire monter ou descendre les indices de ces coefficients.

3.3 Gradient d'un champ tensoriel

Un champ tensoriel $\boldsymbol{T}$ est une application qui associe à tout point $M\in\mathscr{D}\subset\mathscr{E}_3$ un tenseur d'ordre p :

$$M\in\mathscr{D} \xrightarrow{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{T}(M)\in\mathbb{V}^{\otimes p}$$

- **Définition 3.6 – Gradient.** On dit que le champ tensoriel $\boldsymbol{T}(M)$ d'ordre p est différentiable en M s'il existe un opérateur linéaire, noté $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$, et appelé gradient du champ $\boldsymbol{T}$ au point M tel que :

$$\boldsymbol{T}\left(M'\right)-\boldsymbol{T}\left(M\right)=\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{MM'}+\|\boldsymbol{MM'}\|\,\boldsymbol{\mathscr{O}}(\boldsymbol{MM'}) \quad \forall\boldsymbol{MM'} \tag{3.8}$$

où $\boldsymbol{\mathscr{O}}(\boldsymbol{MM'})$ est une fonction quelconque à valeur dans $\mathbb{V}^{\otimes p}$ et qui tend vers le tenseur nul d'ordre p quand $M'\to M$.

Si le champ $\boldsymbol{T}(M)$ est partout différentiable dans un domaine $\mathscr{D}$, on définit ainsi sur $\mathscr{D}$ un *champ de tenseurs* $(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})(M)$.

- **Théorème 3.7 –** Le champ gradient d'un champ tensoriel d'ordre p est un champ tensoriel d'ordre $p+1$.

  Démonstration – La différence $\boldsymbol{T}(M') - \boldsymbol{T}(M)$ est un tenseur d'ordre p et le vecteur $\boldsymbol{MM'}$ est un tenseur d'ordre 1. Les règles du produit contracté simple dans l'équation (3.8) impliquent que l'opérateur linéaire $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ est un tenseur d'ordre $p+1$.

- **Définition 3.8 – Différentielle d'un champ.** Soit $\boldsymbol{T}(M)$ un champ tensoriel d'ordre p différentiable en M et soit $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ son gradient (d'ordre $p+1$) en M. Soit $\mathbf{d}\boldsymbol{M}$ une variation arbitraire du point M. On appelle différentielle en M du champ $\boldsymbol{T}(M)$ la quantité tensorielle d'ordre p définie par :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{M} \quad \text{[éq. (2.41) p. 59]} \tag{3.9}$$

  Remarque 3.1 – La différentiabilité en M du champ $\boldsymbol{T}(M)$ [éq. (3.8) p. 66] signifie que localement autour de M, la variation exacte $\boldsymbol{T}(M') - \boldsymbol{T}(M)$ peut être approximée par $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{MM'}$, avec une erreur d'autant plus petite que M' est proche de M et ceci quelle que soit la direction du vecteur $\boldsymbol{MM'}$. La différentielle $\mathbf{d}\boldsymbol{T}$ n'est pas la variation de $\boldsymbol{T}$ quand on passe du point M au point M', la variation exacte de $\boldsymbol{T}$ est :

$$\boldsymbol{T}(M + \mathbf{d}\boldsymbol{M}) - \boldsymbol{T}(M) = \mathbf{d}\boldsymbol{T} + \|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|\,\mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{M})$$

  Remarque 3.2 – Il découle de l'équation (3.8) [p. 66] que $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ est un opérateur linéaire $\mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3^{\otimes p}$ qui est l'opérateur linéaire tangent d'une application, *a priori* non linéaire, $\boldsymbol{T}(M) : \mathscr{E}_3 \to \mathbb{V}_3^{\otimes p}$. Ce n'est que si l'on a choisi trois points (O, A, B) dans $\mathscr{E}_3$, pour construire un isomorphisme entre les points de $\mathscr{E}_3$ et les vecteurs de $\mathbb{V}_3$, que l'on peut considérer le champ $\boldsymbol{T}(M)$ comme une application $\mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3^{\otimes p}$. Il faut avoir fait ces choix pour écrire $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\nabla T}$ [section 2.4 p. 59]. Tant que l'on n'a pas choisi de système de coordonnées, on réserve le nom de *gradient* à l'application linéaire tangente d'une application $\mathscr{E}_3 \to \mathbb{V}_3^{\otimes p}$.

L'opérateur linéaire $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ va permettre de définir une *dérivée directionnelle en M* de la fonction $\boldsymbol{T}(M)$ quand le point M varie dans une direction unitaire donnée $\boldsymbol{u}_0$. Soit M un point de $\mathscr{E}_3$ et soit un autre point M' dans la direction $\boldsymbol{u}_0$ défini par :

$$M' = M + \|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|\,\boldsymbol{u}_0$$

En utilisant la définition du gradient [éq. (3.8) p. 66], il vient :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{T}(M + \|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|\,\boldsymbol{u}_0) - \boldsymbol{T}(M) = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \cdot (\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|\,\boldsymbol{u}_0) + \|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|\,\mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{M}) \\
&\frac{\boldsymbol{T}(M + \|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|\,\boldsymbol{u}_0) - \boldsymbol{T}(M)}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}_0 + \mathscr{O}(\mathbf{d}\boldsymbol{M})
\end{aligned}$$

En faisant tendre $\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|$ vers 0 avec la direction $\boldsymbol{u}_0$ constante, il vient :

$$\lim_{\substack{\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\| \to 0 \\ \boldsymbol{u}_0 \text{ constant}}} \frac{\boldsymbol{T}(M + \|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|\,\boldsymbol{u}_0) - \boldsymbol{T}(M)}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}_0$$

Le terme de gauche est la dérivée en M de la fonction $\boldsymbol{T}(M)$ quand M varie dans la direction unitaire $\boldsymbol{u}_0$. La valeur de cette dérivée dépend de la direction unitaire $\boldsymbol{u}_0$. On peut donc poser la définition suivante :

- **Définition 3.9 – Dérivée directionnelle d'un champ.** La dérivée du champ tensoriel $\boldsymbol{T}(M)$, d'ordre p, dans la direction $\boldsymbol{u}_0$ est le tenseur d'ordre p défini par :

$$\boldsymbol{T}'_{\boldsymbol{u}_0} = \lim_{\substack{\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|\to 0 \\ \boldsymbol{u}_0 \text{ constant}}} \frac{\boldsymbol{T}(M+\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|\boldsymbol{u}_0)-\boldsymbol{T}(M)}{\|\mathbf{d}\boldsymbol{M}\|} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u}_0 \tag{3.10}$$

Le tenseur $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ (d'ordre $p+1$) permet donc de calculer toutes les dérivées directionnelles de $\boldsymbol{T}(M)$ (d'ordre p), quand M varie dans toutes les directions unitaires $\boldsymbol{u}_0$ autour de M. Le champ tensoriel $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}(M)$ est l'outil permettant de donner une description locale des variations du champ $\boldsymbol{T}(M)$ au voisinage du point M.

3.4 Éléments différentiels pour les intégrales

En mécanique des milieux continus, on aura à calculer des intégrales sur des volumes, des surfaces, des courbes. On précise ici les éléments différentiels utiles pour ces intégrales.

3.4.1 Variations d'un point

Soit un système de coordonnées défini par sa fonction $\boldsymbol{g}(x^1,x^2,x^3)$. On fait varier le point M en donnant des variations arbitraires $\mathrm{d}x^1$, $\mathrm{d}x^2$ et $\mathrm{d}x^3$ aux trois coordonnées (x^1,x^2,x^3). Le vecteur $\mathbf{d}\boldsymbol{M}$ s'écrit donc :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{M} = \mathbf{d}\boldsymbol{g} = \frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i = \mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_i \quad \text{[déf. 3.2 p. 63]}$$

Les composantes contravariantes du vecteur $\mathbf{d}\boldsymbol{M}$ sur la base naturelle du système de coordonnées sont donc les variations arbitraires $\mathrm{d}x^i$, *quel que soit le système de coordonnées utilisé*.

Remarque 3.3 – C'est là le grand avantage de l'utilisation de la base naturelle. Il en est différemment sur la base physique. Par exemple, en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\mathbf{d}\boldsymbol{M} &= \mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_i = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r + \mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\boldsymbol{e}_z && \text{(sur la base naturelle)}\\ &= \mathrm{d}r\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_r + (r\,\mathrm{d}\theta)\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_\theta + \mathrm{d}z\,\widetilde{\boldsymbol{e}}_z && \text{(sur la base physique)}\end{aligned}$$

En coordonnées cylindriques, les composantes du vecteur $\mathbf{d}\boldsymbol{M}$ sur la base physique sont $\{\mathrm{d}r, r\,\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z\}$.

Pour des variations arbitraires $\mathrm{d}x^i$ des coordonnées, le carré de l'élément de longueur est :

$$\mathbf{d}\ell^2 = \mathbf{d}\boldsymbol{M}^2 = \mathbf{d}\boldsymbol{M}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{M} = \boldsymbol{G}(\mathbf{d}\boldsymbol{M},\mathbf{d}\boldsymbol{M}) = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \quad \text{[déf. 1.48 p. 24]}$$

où les $g_{\bullet\bullet}$ sont les composantes covariantes sur la base naturelle du tenseur métrique : $g_{ij} = \boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j$.

3.4.2 Élément de volume pour les intégrales de volume

Considérons les trois variations individuelles du point M en ne faisant varier qu'une seule de ses coordonnées :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{M}_1 = \mathrm{d}x^1\,\boldsymbol{e}_1 \quad ; \quad \mathbf{d}\boldsymbol{M}_2 = \mathrm{d}x^2\,\boldsymbol{e}_2 \quad ; \quad \mathbf{d}\boldsymbol{M}_3 = \mathrm{d}x^3\,\boldsymbol{e}_3$$

L'élément de volume est la valeur absolue de leur produit mixte :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}v &= |\boldsymbol{H}(\mathbf{d}\boldsymbol{M}_1,\mathbf{d}\boldsymbol{M}_2,\mathbf{d}\boldsymbol{M}_3)| = |\boldsymbol{H}(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3)\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3| \quad \text{[section 1.5 p. 26]}\\ &= |h_{123}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3| = |\sqrt{g}\,\mathrm{d}x^1\,\mathrm{d}x^2\,\mathrm{d}x^3| \quad \text{[éq. (1.27) p. 27]}\end{aligned} \tag{3.11}$$

où $g = \det[g_{\bullet\bullet}]$ [éq. (1.25) p. 25].

3.4.3 Élément de surface pour les intégrales de surface

Une surface $\mathscr{S}$ est une variété de dimension 2 plongée dans $\mathscr{E}_3$. Soit N un point courant de $\mathscr{S}$. Une surface est définie par l'application f_S :

$$f_S : (u^1, u^2) \in \mathscr{D}' \subset \mathbb{R}^2 \quad \rightarrow \quad N = f_S(u^1, u^2) \in \mathscr{E}_3$$

On dit que la surface $\mathscr{S}$ est paramétrée par les deux réels u^1 et u^2.

Équations paramétriques d'une surface – Quand on a choisi un système de coordonnées, la fonction $f_S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathscr{E}_3$ se traduit par trois fonctions f_S^1, f_S^2 et f_S^3 qui donnent l'expression des trois coordonnées du point courant N en fonction des deux paramètres u_1 et u_2. Les équations paramétriques d'une surface $\mathscr{S}$ de $\mathscr{E}_3$ sont :

$$x^1 = f_S^1(u^1, u^2) \quad ; \quad x^2 = f_S^2(u^1, u^2) \quad ; \quad x^3 = f_S^3(u^1, u^2) \tag{3.12}$$

La définition paramétrique d'une surface est la définition la plus générale. Pour certaines surfaces, il est possible de paramétrer le point courant N de la surface $\mathscr{S}$ avec deux de ses coordonnées spatiales. Par exemple, pour certaines surfaces, il est possible de prendre comme paramètres $u^1 = x^1$ et $u^2 = x^2$. La définition de la surface se réduit alors à l'équation $x^3 = f^3(x^1, x^2)$. Toutefois cette réduction n'est pas toujours possible [(6)].

Considérons deux variations arbitraires $\mathrm{d}u^1$ et $\mathrm{d}u^2$ des paramètres u^1 et u^2. Les variations correspondantes du point N sont :

$$(\mathbf{d}\boldsymbol{N})_1 = \frac{\partial N}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 = \frac{\partial f_S}{\partial u^1}\,\mathrm{d}u^1 = \boldsymbol{a}_1\,\mathrm{d}u^1 \quad ; \quad (\mathbf{d}\boldsymbol{N})_2 = \frac{\partial N}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 = \frac{\partial f_S}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 = \boldsymbol{a}_2\,\mathrm{d}u^2$$

Les deux vecteurs

$$\boldsymbol{a}_1 = \frac{\partial f_S}{\partial u^1} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{a}_2 = \frac{\partial f_S}{\partial u^2}$$

sont tangents en N à $\mathscr{S}$ et constituent une base naturelle du plan tangent en N à $\mathscr{S}$. L'élément de surface de $\mathscr{S}$ est défini par :

$$\mathrm{d}s = \|(\mathbf{d}\boldsymbol{N})_1 \wedge (\mathbf{d}\boldsymbol{N})_2\| = \|\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2\|\,|\mathrm{d}u^1|\,|\mathrm{d}u^2|$$

Normales unitaires à une surface – Les vecteurs $\boldsymbol{a}_1$ et $\boldsymbol{a}_2$ étant tangents en N à la surface $\mathscr{S}$, le vecteur $\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2$ est donc normal à la surface. On définit une normale unitaire $\boldsymbol{n}$ en un point N de $\mathscr{S}$ par :

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2}{\|\boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2\|} \tag{3.13}$$

Le sens de cette normale dépend de l'ordre des paramètres u^1 et u^2. Il n'y a aucune raison de privilégier l'un des sens sauf si la surface est fermée : on peut alors définir un intérieur et un extérieur et choisir l'ordre des paramètres (u^1, u^2) pour que la normale à la surface soit sortante.

3.4.4 Élément de longueur pour les intégrales curvilignes

Une courbe $\mathscr{C}$ est une variété de dimension 1 plongée dans $\mathscr{E}_3$. Soit N le point courant de $\mathscr{C}$. La courbe est définie par l'application :

$$f_{\mathscr{C}} \;:\; u \in \mathscr{D}'' \subset \mathbb{R} \;\rightarrow\; N = f_{\mathscr{C}}(u) \in \mathscr{E}_3$$

On dit que la courbe $\mathscr{C}$ est paramétrée par le réel u.

(6) Par exemple si la surface $\mathscr{S}$ est la frontière d'un domaine fermé (la surface d'une sphère par exemple).

Équations paramétriques d'une courbe – Si on a choisi un système de coordonnées, la fonction $f_{\mathscr{C}} : \mathbb{R} \to \mathscr{E}_3$ se traduit par trois fonctions $f^1_{\mathscr{C}}$, $f^2_{\mathscr{C}}$ et $f^3_{\mathscr{C}}$ qui donnent les expressions des trois coordonnées du point courant N en fonction du paramètre u. Les équations paramétriques d'une courbe $\mathscr{C}$ de $\mathscr{E}_3$ sont :

$$x^1 = f^1_{\mathscr{C}}(u) \quad ; \quad x^2 = f^2_{\mathscr{C}}(u) \quad ; \quad x^3 = f^3_{\mathscr{C}}(u) \tag{3.14}$$

La définition paramétrique d'une courbe est la définition plus générale. Pour certaines courbes, il est possible de paramétrer le point courant N de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'une de ses coordonnées spatiales. Par exemple, pour certaines courbes, il est possible de prendre comme paramètre $u = x^1$. La définition de la courbe se réduit alors à deux équations $x^2 = f^2(x^1)$ et $x^3 = f^3(x^1)$. Toutefois cette réduction n'est pas toujours possible [7].

Considérons la variation arbitraire du du paramètre u. La variation du point N est :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{N} = \frac{\mathbf{d} f_{\mathscr{C}}}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u = \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}u$$

Le vecteur $\boldsymbol{a}$ est tangent à la courbe $\mathscr{C}$ et constitue une base naturelle de la droite tangente en N à $\mathscr{C}$. L'élément de longueur de $\mathscr{C}$ est défini par :

$$\mathrm{d}\ell = \|\mathbf{d}\boldsymbol{N}\| = \|\boldsymbol{a}\|\,|\mathrm{d}u|$$

Remarque 3.4 – Si le paramètre u est l'abscisse curviligne sur la courbe $\mathscr{C}$, le vecteur tangent $\boldsymbol{a}$ est unitaire, c'est le premier vecteur du trièdre de Fresnet. Les autres autres vecteurs de ce trièdre orthonormé sont la normale principale, dans le plan osculateur et la binormale.

3.5 Gradient d'un champ scalaire

Les champs scalaires sont des champs de tenseurs d'ordre 0. Soit un champ scalaire $f(M)$ différentiable ; il existe donc un champ d'ordre 1 (donc vectoriel), noté $\mathbf{grad}\, f$ [déf. 3.6 p. 66]. Sa différentielle s'écrit :

$$\mathrm{d}f = \mathbf{grad}\, f \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{M} \qquad \text{[éq. (3.9) p. 67]} \tag{3.15}$$

Interprétations – La dérivée directionnelle de f dans une direction unitaire $\boldsymbol{u}_0$ est

$$f'_{\boldsymbol{u}_0} = \mathbf{grad}\, f \cdot \boldsymbol{u}_0 \qquad \text{[éq. (3.10) p. 68]}$$

Cette dérivée est maximale quand la direction unitaire $\boldsymbol{u}_0$ est colinéaire à $\mathbf{grad}\, f$. La direction du vecteur $\mathbf{grad}\, f$ indique donc la direction dans laquelle la dérivée de f est maximale. La dérivée de f dans cette direction est $\|\mathbf{grad}\, f\|$. La dérivée de f dans les directions $\boldsymbol{u}_0$ orthogonales à $\mathbf{grad}\, f$ est nulle. Ces directions sont tangentes aux surfaces isovaleurs de f.

Soit un système de coordonnées défini par sa fonction $\boldsymbol{g}(x^1, x^2, x^3)$. On définit la fonction $\overline{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f(M) = f(\boldsymbol{g}(x^1, x^2, x^3)) = \overline{f}(x^1, x^2, x^3)$$

[7] Par exemple si la courbe $\mathscr{C}$ est une courbe fermée.

La fonction $\overline{f} = f \circ \boldsymbol{g}$ est celle que l'on donne pour décrire le champ $f(M)$ quand on a choisi le système de coordonnées. Pour des variations arbitraires $\mathrm{d}x^i$ des trois coordonnées de M, l'égalité précédente permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \mathrm{d}\overline{f} && \forall\, \mathbf{d}\boldsymbol{M} = \mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_i \\ \mathbf{grad}\, f \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{M} &= \overline{f}_{,i}\,\mathrm{d}x^i && \forall\, \mathbf{d}\boldsymbol{M} = \mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_i \\ (\mathbf{grad}\, f)_i\,\mathrm{d}x^i &= \overline{f}_{,i}\,\mathrm{d}x^i && \forall\, \mathrm{d}x^i \end{aligned}$$

On en déduit les composantes covariantes de $\mathbf{grad}\, f$ dans la base naturelle du système de coordonnées :

$$(\mathbf{grad}\, f)_i = \overline{f}_{,i} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{grad}\, f = \overline{f}_{,i}\,\boldsymbol{e}^i \tag{3.16}$$

L'expression des composantes covariantes de $\mathbf{grad}\, f$ dans la base naturelle du système de coordonnées est la même quel que soit le système de coordonnées utilisé.

Remarque 3.5 – Dans les formulaires classiques, les composantes du vecteur $\mathbf{grad}\, f$ sont données dans la base physique et non dans la base naturelle. Le changement de base fait intervenir les normes des vecteurs de la base naturelle [éq. (3.3) p. 65], qui sont spécifiques à chaque système de coordonnées. L'expression des composantes du vecteur $\mathbf{grad}\, f$ dans la base physique est donc spécifique à chaque système de coordonnées. L'habitude de donner les composantes des opérateurs différentiels dans la base physique explique l'existence de formulaires spécifiques à chaque système de coordonnées. L'équation (3.16) montre que l'écriture des composantes du gradient d'un champ scalaire dans la base naturelle (non normée), ne nécessite aucun formulaire.

Autres notations 3.6 – On trouve dans la littérature scientifique la notation $\boldsymbol{\nabla} f$ pour le vecteur $\mathbf{grad}\, f$ [remarque 3.2 p. 67], ou encore la notation $\frac{\mathrm{d}f}{\mathbf{d}\boldsymbol{M}}$.

On laisse le soin au lecteur de vérifier les identités suivantes, où f_1 et f_2 sont des champs scalaires et où λ est un scalaire constant dans l'espace :

$$\begin{aligned} &\mathbf{grad}(f_1 + f_2) = \mathbf{grad}\, f_1 + \mathbf{grad}\, f_2 \\ &\mathbf{grad}(\lambda\, f) = \lambda\, \mathbf{grad}\, f \\ &\mathbf{grad}(f_1\, f_2) = f_2\, \mathbf{grad}\, f_1 + f_1\, \mathbf{grad}\, f_2 \end{aligned}$$

3.6 Champs vectoriels

3.6.1 Gradient d'un champ vectoriel

Les champs vectoriels sont des champs de tenseurs d'ordre 1. Soit $\boldsymbol{v}(M)$ un champ vectoriel différentiable ; il existe donc un champ de gradient d'ordre 2, noté $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ [déf. 3.6 p. 66]. La différentielle du champ s'écrit :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{M} \qquad \text{[éq. (3.9) p. 67]} \tag{3.17}$$

On se propose de calculer les composantes du tenseur du second ordre $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ dans la base naturelle d'un système de coordonnées défini par la fonction $\boldsymbol{g}(x^1, x^2, x^3)$. Dans ce système de coordonnées, le champ est décrit par la fonction $\overline{\boldsymbol{v}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}$ définie par :

$$\boldsymbol{v}(M) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{g}(x^1, x^2, x^3)) = \overline{\boldsymbol{v}}(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{V}_3 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{d}\boldsymbol{v} = \mathbf{d}\overline{\boldsymbol{v}}, \quad \forall\, \mathbf{d}\boldsymbol{M} \tag{3.18}$$

Pour définir le champ de vecteurs $\boldsymbol{v}(M)$, on choisit, dans un premier temps, de donner les trois fonctions $\overline{v}^i(x^1,x^2,x^3)$ de ses composantes contravariantes sur la base naturelle du système de coordonnées :

$$\boldsymbol{v}(M) = \overline{v}^i(x^1,x^2,x^3)\,\boldsymbol{e}_i$$

L'égalité (3.18) implique :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{M} &= \overline{\boldsymbol{v}}_{,i}\,\mathrm{d}x^i && \forall\,\mathbf{d}\boldsymbol{M} = \mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_i\\
&= (\overline{v}^j\,\boldsymbol{e}_j)_{,i}\,\mathrm{d}x^i\\
&= (\overline{v}^j_{,i}\,\boldsymbol{e}_j + \overline{v}^j\,\boldsymbol{e}_{j,i})\,\mathrm{d}x^i\\
&= (\overline{v}^j_{,i}\,\boldsymbol{e}_j + \overline{v}^j\,\Gamma^k_{ij}\,\boldsymbol{e}_k)\,\mathrm{d}x^i && \text{[éq. (3.4) p. 65]}\\
&= (\overline{v}^j_{,i}\,\boldsymbol{e}_j + \overline{v}^k\,\Gamma^j_{ik}\,\boldsymbol{e}_j)\,\mathrm{d}x^i && \text{(changement d'indices muets)}\\
(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^j{}_i\,\mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_j &= (\overline{v}^j_{,i} + \overline{v}^k\,\Gamma^j_{ik})\,\mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_j && \forall\,\mathbf{d}\boldsymbol{M} = \mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_i
\end{aligned}$$

On en déduit par identification les composantes mixtes $(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^{\bullet}{}_{\bullet}$ du tenseur $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$:

$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^j{}_i = \overline{v}^j_{,i} + \overline{v}^k\,\Gamma^j_{ik} \tag{3.19}$$

La formule est la même pour tous les systèmes de coordonnées ; quand on a choisi un système de coordonnées, il suffit de remplacer les Γ^j_{ik} par leur valeur.

Remarque 3.7 – *Attention à l'ordre des indices.* Le dernier indice de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ est l'indice de dérivation. On voit ici l'avantage de la notation des dérivées partielles avec une virgule. Avec la notation ∂ on aurait :

$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^j{}_i = \partial_i\overline{v}^j + \overline{v}^k\,\Gamma^j_{ik}$$

où dans le terme $\partial_i\overline{v}^j$ l'ordre des indices réels est inversé. En revanche, l'ordre des indices des coefficients de Christoffel est sans importance, ce ne sont pas les composantes d'un tenseur et on sait qu'ils sont symétriques pour les deux indices inférieurs [éq. (3.5) p. 65].

Si le champ de vecteurs $\boldsymbol{v}(M)$ est défini par ses composantes *covariantes* sur la base naturelle, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{v}(M) = \overline{v}_i(x^1,x^2,x^3)\,\boldsymbol{e}^i$$

le lecteur trouvera sans difficulté par un calcul analogue que les composantes complètement covariantes $(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{\bullet\bullet}$ sont :

$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{ij} = \overline{v}_{i,j} - \overline{v}_k\,\Gamma^k_{ij} \tag{3.20}$$

où le signe $-$ apparaît car, dans ce calcul, on dérive la base duale [éq. (3.7) p. 66]. Finalement, selon que le champ $\boldsymbol{v}(M)$ est donné par ses composantes contravariantes ou covariantes, on obtient deux expressions des composantes de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ sur la base naturelle :

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} = \underbrace{(\overline{v}^i_{,j} + \overline{v}^k\,\Gamma^i_{jk})}_{(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^i{}_j}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}^j = \underbrace{(\overline{v}_{i,j} - \overline{v}_k\,\Gamma^k_{ij})}_{(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{ij}}\,\boldsymbol{e}^i\otimes\boldsymbol{e}^j$$

Le tenseur du second ordre $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ n'est pas symétrique en général : $(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{ij} \neq (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{ji}$.

Autres notations – On trouve dans la littérature d'autres notations :
- $\boldsymbol{\nabla v}$ ou $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{v}}{\mathbf{d}\boldsymbol{M}}$ pour $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ [remarque 3.2 p. 67] ;
- certains auteurs écrivent les composantes de $\boldsymbol{\nabla v}$ sous la forme $\nabla_i v^j = \partial_i \overline{v}^j + \overline{v}^k \Gamma^j_{ik}$; dans cette écriture, l'indice de dérivation est à gauche et non à droite. Le symbole $\boldsymbol{\nabla v}$ désigne alors le transposé de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ et on devrait écrire $\mathbf{d}\boldsymbol{v} = \mathbf{d}\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{\nabla v}$ ce qui est une autre définition (inhabituelle) de la différentielle d'un champ vectoriel ;
- $\overline{v}^j{}_{;i} = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^j{}_i = \overline{v}^j_{,i} + \overline{v}^k \Gamma^j_{ik}$; ce terme est appelé « dérivée covariante » de $\overline{v}^j$ par rapport à x^i ;
- $\overline{v}_{j;i} = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{ji} = \overline{v}_{j,i} - \overline{v}_k \Gamma^k_{ji}$; ce terme est appelé « dérivée covariante » de $\overline{v}_j$ par rapport à x^i ;
- puisque $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ est un tenseur, on peut aussi donner ses composantes avec son second indice (l'indice de dérivation) contravariant en utilisant la règle de « l'ascenseur d'indices » [règle 1.50 p. 26] :

$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_i{}^j = g^{j\mu}(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{i\mu} = g^{j\mu}\overline{v}_{i,\mu} - \overline{v}_k \Gamma^k_{i\mu}\, g^{j\mu}$$
$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^{ij} = g^{j\mu}(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^i{}_\mu = g^{j\mu}\overline{v}^i{}_{,\mu} + \overline{v}^k \Gamma^i_{k\mu}\, g^{j\mu}$$

  ces composantes sont parfois appelées « dérivées contravariantes » [8], bien qu'elles ne reflètent pas des dérivées par rapport aux coordonnées de M ;
- la matrice des composantes de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ dans la base naturelle d'un *système de coordonnées cartésiennes orthonormé* [9] est aussi appelée *matrice jacobienne* du champ vectoriel $\boldsymbol{v}$.

On laisse le soin au lecteur de vérifier les identités suivantes, où f est un champ scalaire et $\boldsymbol{v}$ un champ vectoriel :

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{OM} = \boldsymbol{G} \quad \text{(avec la notation en « fraction », on écrirait : } \tfrac{\boldsymbol{dM}}{\boldsymbol{dM}} = \boldsymbol{G}\text{)} \tag{3.21}$$
$$\mathbf{grad}(f\boldsymbol{v}) = f\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \otimes \mathbf{grad}\,f \tag{3.22}$$
$$\mathbf{grad}\,\mathbf{grad}\,f = \mathbf{grad}^\top\,\mathbf{grad}\,f \quad \text{(c'est-à-dire : } \mathbf{grad}\,\mathbf{grad}\,f \text{ est symétrique)} \tag{3.23}$$

Remarques 3.8 – Un champ de vecteurs peut être défini par ses composantes covariantes $\overline{v}_i(x^1,x^2,x^3)$ ou contravariantes $\overline{v}^i(x^1,x^2,x^3)$ dans la base naturelle ou par ses composantes covariantes $\widetilde{v}_i(x^1,x^2,x^3)$ ou contravariantes $\widetilde{v}^i(x^1,x^2,x^3)$ dans la base physique. De même, le tenseur $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ peut être exprimé par ses composantes de toutes variances dans la base naturelle ou dans la base physique. Il convient donc de bien comprendre la signification des symboles utilisés.

Dans les formulaires classiques, les composantes de $\boldsymbol{v}$ et $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ sont généralement données dans la base physique. Pour retrouver les formules classiques données dans les formulaires, il faut donc faire les changements de base (toujours très simples) entre la base naturelle $\{\boldsymbol{e}_i\}$ et la base physique $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\}$. Les formules des composantes de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ dans la base naturelle sont les mêmes pour tout système de coordonnées. En revanche, le passage à la base physique fait intervenir la norme des vecteurs de la base naturelle, qui est différente pour chaque système de coordonnées. C'est pourquoi les formulaires classiques sont spécifiques à un système de coordonnées particulier.

3.6.2 Divergence d'un champ vectoriel

■ **Définition 3.10 – Divergence d'un champ vectoriel.** La divergence d'un champ vectoriel est le champ scalaire défini par :

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} : \boldsymbol{G} = \mathrm{tr}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} \tag{3.24}$$

[8] Bien noter que les termes $\overline{v}^i_{,j}$ et Γ^k_{ij} ne sont pas les composantes d'un tenseur. On ne peut donc pas « faire monter » les indices de dérivation : les écritures « $v^{i,j}$ » et « $v_i{}^{,j}$ » n'ont aucun sens.

[9] La variance des composantes est donc indifférente.

L'expression de $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ avec les composantes contravariantes de $\boldsymbol{v}$ sur la base naturelle d'un système de coordonnées est donc :

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^i{}_j\,\delta_i{}^j = (\overline{v}^i{}_{,j} + \overline{v}^k\,\Gamma^i_{jk})\,\delta_i{}^j = \overline{v}^i{}_{,i} + \overline{v}^k\,\Gamma^i_{ki}$$

Remarques 3.9 – Si le champ de vecteurs n'est pas défini par ses composantes contravariantes, on peut les calculer avec la règle de « l'ascenseur d'indice » [p. 26] : $v^i = g^{i\mu}\,v_\mu$.

Dans un système de coordonnées cartésiennes (orthonormées ou non), tous les coefficients de Christoffel sont nuls et on retrouve la formule classique $\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \overline{v}^i{}_{,i}$.

3.6.3 Rotationnel d'un champ vectoriel

- **Définition 3.11 – Rotationnel d'un champ vectoriel.** Le rotationnel d'un champ vectoriel est le champ vectoriel défini par :

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = -\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} : \boldsymbol{H} \tag{3.25}$$

Les composantes contravariantes de $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}$ sur la base naturelle sont :

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})^k = -(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{ij}\,h^{ijk} = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{ij}\,h^{jik} = \overline{v}_{i,j}\,h^{jik} - \overline{v}_m\,\Gamma^m_{ij}\,h^{jik}\\
&(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})^k = -\overline{v}_{i,j}\,h^{ijk} \quad (\text{car } \Gamma^m_{ij}\,h^{jik} = 0)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Remarque 3.10 – On constate que dans l'expression des composantes sur la base naturelle du rotationnel d'un champ vectoriel, les coefficients de Christoffel disparaissent. On verra que cette particularité n'est plus vraie pour le rotationnel de tenseurs d'ordre supérieur.

En développant la sommation dans l'équation (3.26), on trouve :

$$(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})^1 = h^{123}\,(v_{3,2} - v_{2,3}) \quad ; \quad (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})^2 = h^{123}\,(v_{1,3} - v_{3,1}) \quad ; \quad (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v})^3 = h^{123}\,(v_{2,1} - v_{1,2})$$

où $h^{123} = 1/\sqrt{g}$ [éq. (1.28) p. 27].

Si les composantes sont dans une base orthonormée, alors $g = 1$ et on retrouve les formules classiques.

3.6.4 Laplacien d'un champ scalaire

- **Définition 3.12 – Laplacien d'un champ scalaire.** Soit $f(M)$ un champ scalaire. Le laplacien d'un champ scalaire est le champ scalaire défini par :

$$\Delta f = \operatorname{div}\mathbf{grad}\,f \tag{3.27}$$

Le laplacien d'un champ scalaire est donc :

$$\begin{aligned}
&\Delta f = \mathbf{grad}(\mathbf{grad}\,f) : \boldsymbol{G} = \big((f_{,i})_{,j} - f_{,k}\,\Gamma^k_{ij}\big)\,g^{ij} \qquad [\text{éq. (3.20) p. 72}]\\
&\Delta f = f_{,ij}\,g^{ij} - f_{,k}\,\Gamma^k_{ij}\,g^{ij}
\end{aligned}$$

Remarque 3.11 – Si on utilise un système de coordonnées cartésiennes, les coefficients de Christoffel sont tous nuls. Si de plus le système de coordonnées cartésiennes est orthonormé, alors $[g^{\bullet\bullet}]$ est la matrice unité et on retrouve la formule classique $\Delta f = f_{,11} + f_{,22} + f_{,33}$.

3.6.5 Propriétés des champs vectoriels

On laisse le soin au lecteur de vérifier les identités suivantes, où f est un champ scalaire et où $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{w}$ sont des champs vectoriels :

$$\operatorname{div}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = 0$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,f = \mathbf{0} \tag{3.28}$$

$$\operatorname{div}(f\boldsymbol{v}) = f\operatorname{div}\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}\,f\cdot\boldsymbol{v} \tag{3.29}$$

$$\mathbf{rot}(f\boldsymbol{v}) = f\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}\,f\wedge\boldsymbol{v} \tag{3.30}$$

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{w} \tag{3.31}$$

$$\mathbf{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \operatorname{div}\mathbf{grad}^{\top}\boldsymbol{v} \tag{3.32}$$

On rappelle, sans démonstration, des résultats classiques d'analyse vectorielle utiles en mécanique des milieux continus :

- **Définition 3.13 – Champ irrotationnel.** On dit qu'un champ vectoriel $\boldsymbol{v}(M)$ est irrotationnel dans un domaine $\mathscr{D}\subset\mathscr{E}_3$ si $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(M) = \mathbf{0}$, $\forall M\in\mathscr{D}$.

On rappelle le résultat suivant :

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(M) = \mathbf{0},\quad \forall M\in\mathscr{D}\quad\Leftrightarrow\quad \exists\,\varphi(M)\ \text{ tel que }\ \boldsymbol{v}(M) = \mathbf{grad}\,\varphi(M) \tag{3.33}$$

Le champ scalaire $\varphi(M)$ est appelé *potentiel scalaire* du champ irrotationnel $\boldsymbol{v}(M)$. Le potentiel scalaire φ est évidemment défini à un champ uniforme φ_0 près.

- **Définition 3.14 – Champ conservatif.** On dit qu'un champ vectoriel $\boldsymbol{v}(M)$ est conservatif dans un domaine $\mathscr{D}\subset\mathscr{E}_3$ si $\operatorname{div}\boldsymbol{v}(M) = 0$, $\forall M\in\mathscr{D}$.

On rappelle le résultat suivant :

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}(M) = 0,\quad \forall M\in\mathscr{D}\quad\Leftrightarrow\quad \exists\,\boldsymbol{a}(M)\ \text{ tel que }\ \boldsymbol{v}(M) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{a}(M) \tag{3.34}$$

Le champ vectoriel $\boldsymbol{a}(M)$ est appelé *potentiel vecteur* du champ conservatif $\boldsymbol{v}(M)$. Le potentiel vecteur est évidemment défini à un champ de gradient près [éq. (3.28) p. 75].

- **Théorème 3.15 – Théorème de Stokes.** Soit $\boldsymbol{v}(M)$ un champ vectoriel défini dans un domaine $\mathscr{D}\subset\mathscr{E}_3$, et soit $\mathscr{S}\subset\mathscr{D}$ une surface bornée de point courant N et de normale unitaire $\boldsymbol{n}(N)$. On note $\partial\mathscr{S}$ le(s) contour(s) [10] frontière(s) de $\mathscr{S}$, de point courant P et on note $\boldsymbol{u}(P)$ la normale unitaire extérieure au contour $\partial\mathscr{S}$ et tangente à $\mathscr{S}$. Le vecteur $\boldsymbol{t}(P) = \boldsymbol{n}(P)\wedge\boldsymbol{u}(P)$ est unitaire et tangent au contour $\partial\mathscr{S}$; il définit son orientation [11]. Si $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}$ est défini en tout point de $\mathscr{S}$ et de sa frontière $\partial\mathscr{S}$, on a l'identité scalaire suivante :

$$\int_S \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}(N)\cdot\boldsymbol{n}(N)\,\mathrm{d}s = \int_{\partial\mathscr{S}} \boldsymbol{v}(P)\cdot\boldsymbol{t}(P)\,\mathrm{d}\ell \tag{3.35}$$

Le flux du rotationnel d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ à travers une surface $\mathscr{S}$ est égal à la circulation du vecteur $\boldsymbol{v}$ le long du contour $\partial\mathscr{S}$ de $\mathscr{S}$.

[10] La surface $\mathscr{S}$ peut ne pas être simplement connexe (elle peut avoir des « trous » *finis*). Dans ce cas, elle a un contour extérieur et un ou plusieurs contours intérieurs (qui ne se coupent pas). Toutefois, un « trou » ne peut se réduire à un point car dans ce cas la tangente au contour n'est pas définie. Le théorème de Stokes est inapplicable dans ce cas.

[11] Si la surface n'est pas simplement connexe, $\boldsymbol{t}$ définit une orientation sur chaque contour (extérieur et intérieurs). Le trièdre orthonormé direct $(\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{u})$, défini en chaque point des contours d'une surface, est appelé *trièdre de Darboux-Ribeaucourt*.

- **Théorème 3.16 – Théorème de la divergence (ou d'Ostrogradski).** Soit $\boldsymbol{v}(M)$ un champ vectoriel défini sur un domaine volumique fermé $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}_3$ et sur sa frontière. On note $\partial\mathscr{D}$ sa (ses) surface(s) frontière(s) [12], de point courant N et de normale unitaire sortante $\boldsymbol{n}(N)$. Si $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ est défini en tout point de $\mathscr{D}$ et de sa frontière $\partial\mathscr{S}$, on a l'identité scalaire suivante :

$$\int_{\mathscr{D}} \operatorname{div}\boldsymbol{v}(M)\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{v}(N)\cdot\boldsymbol{n}(N)\,\mathrm{d}s \tag{3.36}$$

L'intégrale de la divergence d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{v}$ dans un volume fermé $\mathscr{D}$ est égale au flux du vecteur $\boldsymbol{v}$ à travers la frontière $\partial\mathscr{D}$ de $\mathscr{D}$.

3.7 Champs tensoriels du second ordre

3.7.1 Gradient d'un champ tensoriel du second ordre

Soit $\boldsymbol{T}(M)$ un champ différentiable de tenseurs du second ordre ; il existe donc un champ de gradient, noté $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$, d'ordre 3 [déf. 3.6 p. 66]. La différentielle du champ est :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{M} \qquad \text{[éq. (3.8) p. 67]} \tag{3.37}$$

Comme précédemment, dans un certain système de coordonnées, le champ $\boldsymbol{T}(M)$ est donné par une fonction $\overline{\boldsymbol{T}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{V}^{\otimes 2}$ telle que $\overline{\boldsymbol{T}}(x^1,x^2,x^3) = \boldsymbol{T}(M)$. Si la fonction $\overline{\boldsymbol{T}}$ définit le tenseur $\boldsymbol{T}$ par ses composantes contravariantes sur la base naturelle, on donne les neuf fonctions $\overline{T}^{ij} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\boldsymbol{T}(M) = \overline{T}^{ij}(x^1,x^2,x^3)\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j$$

L'égalité tensorielle $\mathbf{d}\boldsymbol{T} = \mathbf{d}\overline{\boldsymbol{T}}$, $\forall\,\mathbf{d}\boldsymbol{M} = \mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_i$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{d}\boldsymbol{M} &= \mathrm{d}\overline{T}^{ij}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j + \overline{T}^{ij}\,\mathbf{d}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j + \overline{T}^{ij}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\mathbf{d}\boldsymbol{e}_j \\
&= \overline{T}^{ij}{}_{,k}\,\mathrm{d}x^k\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j + \overline{T}^{ij}\,\boldsymbol{e}_{i,k}\otimes\boldsymbol{e}_j\,\mathrm{d}x^k + \overline{T}^{ij}\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_{j,k}\,\mathrm{d}x^k \\
&= (\overline{T}^{ij}{}_{,k}\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j + \overline{T}^{ij}\,(\Gamma^m_{ki}\,\boldsymbol{e}_m)\otimes\boldsymbol{e}_j + \overline{T}^{ij}\,\boldsymbol{e}_i\otimes(\Gamma^m_{kj}\,\boldsymbol{e}_m)\,)\mathrm{d}x^k \\
&= (\overline{T}^{ij}{}_{,k} + \overline{T}^{mj}\,\Gamma^i_{km} + \overline{T}^{im}\,\Gamma^j_{km})\,\mathrm{d}x^k\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j, \quad \forall\,\mathbf{d}\boldsymbol{M} = \mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_i
\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité tensorielle :

$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^{ij}{}_k\,\mathrm{d}x^k\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j = (\overline{T}^{ij}{}_{,k} + \overline{T}^{mj}\,\Gamma^i_{km} + \overline{T}^{im}\,\Gamma^j_{km})\,\mathrm{d}x^k\,\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{e}_j, \quad \forall\,\mathbf{d}\boldsymbol{M} = \mathrm{d}x^i\,\boldsymbol{e}_i$$

Les composantes $(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^{ij}{}_k$ du tenseur $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ sont donc [13] :

$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^{ij}{}_k = \overline{T}^{ij}{}_{,k} + \overline{T}^{mj}\,\Gamma^i_{km} + \overline{T}^{im}\,\Gamma^j_{km}$$

En définissant le champ $\boldsymbol{T}$ par ses composantes de différentes variances, le lecteur vérifiera avec des calculs analogues que les composantes d'autres variances de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ sont :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})_{ijk} &= \overline{T}_{ij,k} - \overline{T}_{mj}\,\Gamma^m_{ki} - \overline{T}_{im}\,\Gamma^m_{kj} \\
(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})_i{}^j{}_k &= \overline{T}_i{}^j{}_{,k} - \overline{T}_m{}^j\,\Gamma^m_{ki} + \overline{T}_i{}^m\,\Gamma^j_{km} \\
(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^i{}_{jk} &= \overline{T}^i{}_{j,k} + \overline{T}^m{}_j\,\Gamma^i_{km} - \overline{T}^i{}_m\,\Gamma^m_{kj}
\end{aligned}$$

(les signes $-$ apparaissent quand on dérive des vecteurs de la base duale).

[12] Le volume $\mathscr{D}$ peut avoir des « trous » finis (la normale à la frontière $\boldsymbol{n}(N)$ doit être partout définie).

[13] Il convient de bien faire attention à l'ordre des indices : le dernier indice de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$ est l'indice de dérivation, les deux premiers sont les indices de $\overline{\boldsymbol{T}}$.

- **Règle 3.17 – Construction des composantes du gradient sur la base naturelle.** On ajoute au terme dérivée de la composante les sommations « $+\overline{T}\,\Gamma$ » pour chaque indice contravariant de $\boldsymbol{T}$ et « $-\overline{T}\,\Gamma$ » pour chaque indice covariant de $\boldsymbol{T}$. On complète ensuite les indices réels en respectant les règles de la convention d'Einstein [section 1.4 p. 10]. Ce procédé est encore valable pour la construction des formules des composantes du gradient de tenseurs d'ordre p : il y a alors p termes de la forme « $\pm\overline{T}\,\Gamma$ ».

  Autres notations – Comme pour les champs vectoriels, on trouve dans la littérature d'autres notations pour $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}$:
  - $\boldsymbol{\nabla T}$ ou $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}}{\mathbf{d}\boldsymbol{M}}$; comme pour les vecteurs, il vaut mieux éviter d'écrire $(\boldsymbol{\nabla T})_{ijk} = \nabla_i \overline{T}_{jk}$ car la différentielle s'écrirait $\mathbf{d}\boldsymbol{T} = \mathbf{d}\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\nabla T}$.
  - $\overline{T}^{ij}{}_{;k} = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{V})^{ij}{}_k = \overline{T}^{ij}_{\ ,k} + \overline{T}^{mj}\Gamma^i_{mk} + \overline{T}^{im}\Gamma^j_{mk}$ (« dérivée covariante » de $\overline{T}^{ij}$ par rapport à x^k) ;
  - de même pour $\overline{T}_{ij;k}$, $\overline{T}_i{}^j{}_{;k}$ et $\overline{T}^i{}_{j;k}$.

  On vérifie aisément la propriété importante suivante :

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{G} = \mathbf{0} \tag{3.38}$$

3.7.2 Divergence d'un champ tensoriel du second ordre

- **Définition 3.18 – Divergence d'un champ tensoriel du second ordre.** La divergence d'un champ tensoriel du second ordre $\boldsymbol{T}(M)$ est le champ vectoriel défini par :

$$\mathbf{div}\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} : \boldsymbol{G} = \mathrm{tr}^{(23)}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \qquad \text{[déf. 1.40 p. 22]} \tag{3.39}$$

  Les composantes de ce vecteur dans la base naturelle sont donc :

$$(\mathbf{div}\boldsymbol{T})^i = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^{ik}{}_k = \overline{T}^{ik}_{\ ,k} + \overline{T}^{mk}\Gamma^i_{mk} + \overline{T}^{im}\Gamma^k_{mk}$$
$$(\mathbf{div}\boldsymbol{T})_i = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})_i{}^k{}_k = \overline{T}_i{}^k_{\ ,k} - \overline{T}_m{}^k\Gamma^m_{ik} + \overline{T}_i{}^m\Gamma^k_{mk}$$

  On laisse le soin au lecteur de vérifier les identités vectorielles suivantes, dans lesquelles $\boldsymbol{T}$ est un champ tensoriel d'ordre 2 et $\boldsymbol{v}$ est un champ vectoriel :

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T} : \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} \tag{3.40}$$
$$\mathrm{div}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{T}^\top) + \boldsymbol{T}^\top : \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} \tag{3.41}$$

3.7.3 Rotationnel d'un champ tensoriel du second ordre

- **Définition 3.19 – Rotationnel d'un champ tensoriel du second ordre.** Le rotationnel d'un tenseur du second ordre $\boldsymbol{T}(M)$ est le champ tensoriel du second ordre défini par :

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{T} = -\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} : \boldsymbol{H} \tag{3.42}$$

  Les composantes de ce tenseur du second ordre dans la base naturelle d'un système de coordonnées sont :

$$\begin{aligned}(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})^{ij} &= (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})^i{}_{pq}\,h^{qpj} = \overline{T}^i{}_{p,q}\,h^{qpj} + \overline{T}^m{}_p\Gamma^i_{mq}\,h^{qpj} - \overline{T}^i{}_m\Gamma^m_{pq}\,h^{qpj}\\ &= (\overline{T}^i{}_{p,q} + \overline{T}^m{}_p\Gamma^i_{mq})\,h^{qpj} \qquad (\text{car } \Gamma^m_{pq}h^{qpj} = 0)\\ (\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_i{}^j &= (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T})_{ipq}\,h^{qpj} = \overline{T}_{ip,q}\,h^{qpj} - \overline{T}_{mp}\Gamma^m_{iq}\,h^{qpj} - \overline{T}_{im}\Gamma^m_{pq}\,h^{qpj}\\ &= (\overline{T}_{ip,q} - \overline{T}_{mp}\Gamma^m_{iq})\,h^{qpj} \qquad (\text{car } \Gamma^m_{pq}h^{qpj} = 0)\end{aligned}$$

Remarque 3.12 – Contrairement au rotationnel d'un champ vectoriel, tous les coefficients de Christoffel ne disparaissent pas.

On peut calculer les composantes d'autres variances en utlisant la règle de « l'ascenseur d'indices » [règle 1.50 p. 26]. Par exemple [14] :

$$\begin{aligned}(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_{ik} &= (\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_i{}^j\, g_{jk} = (\overline{T}_{ip,q} - \overline{T}_{mp}\Gamma^m_{iq})\, h^{qpj}\, g_{jk}\\ &= (\overline{T}_{ip,q} - \overline{T}_{mp}\Gamma^m_{iq})\, h^{qp}{}_k\end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier les identités suivantes, dans lesquelles $\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{A}$ sont des champs tensoriels d'ordre 2, $\boldsymbol{S}$ est symétrique, $\boldsymbol{A}$ est antisymétrique et $\boldsymbol{v}$ est un champ vectoriel :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0} \tag{3.43}$$

$$\mathbf{grad}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}^\top\,\mathbf{grad}^\top\,\boldsymbol{v} \tag{3.44}$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}^\top\boldsymbol{v} - (\operatorname{div}\boldsymbol{v})\boldsymbol{G} \tag{3.45}$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{rot}\boldsymbol{T} - (\boldsymbol{T}^\top\cdot\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{H} \tag{3.46}$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot\mathbf{rot}(\boldsymbol{T}^\top) - (\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{H}$$

$$(\mathbf{rot}\boldsymbol{S}) : \boldsymbol{G} = 0 \tag{3.47}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}^\top\boldsymbol{T} = \mathbf{rot}^\top\,\mathbf{rot}^\top\boldsymbol{T}^\top \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}^\top\boldsymbol{S} & \text{symétrique}\\ \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}^\top\boldsymbol{A} & \text{antisymétrique}\end{cases} \tag{3.48}$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{T}\cdot\mathbf{rot}\boldsymbol{U} - \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} : (\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{H}) \tag{3.49}$$

3.7.4 Laplacien d'un champ vectoriel

- **Définition 3.20 – Laplacien d'un champ vectoriel.** Le laplacien d'un champ de vecteurs $\boldsymbol{v}(M)$ est le champ vectoriel défini par :

$$\boldsymbol{\Delta v} = \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} \tag{3.50}$$

dont les composantes dans la base naturelle d'un système de coordonnées sont :

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Delta v})^i &= (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^i{}_{p,q}\, g^{pq} + (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^m{}_p\,\Gamma^i_{mq}\, g^{pq} - (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^i{}_m\,\Gamma^m_{pq}\, g^{pq}\\ (\boldsymbol{\Delta v})_i &= (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{ip,q}\, g^{pq} - (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{mp}\,\Gamma^m_{iq}\, g^{pq} - (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{im}\,\Gamma^m_{pq}\, g^{pq}\end{aligned}$$

Remarque 3.13 – L'expression détaillée des composantes de $\boldsymbol{\Delta v}$ dans la base naturelle d'un système de coordonnées quelconque est donc compliquée. Notamment, la dérivée $(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^i{}_{p,q}$ fait apparaître des dérivées de coefficients de Christoffel. Pour trouver son expression dans un système de coordonnées non standard, il vaut mieux s'aider d'un logiciel de calcul formel [note 17 p. 81].

On laisse le soin au lecteur de vérifier l'identité vectorielle suivante [15] :

$$\boldsymbol{\Delta v} = \mathbf{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{v} - \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} \tag{3.51}$$

[14] Voir la note 8 [p. 73].

[15] Pour vérifier une identité tensorielle par des calculs sur les composantes, peu importe le système de coordonnées utilisé. En effet, pour prouver qu'un tenseur est nul, il suffit de montrer que ses composantes sont nulles dans n'importe quelle base. On a évidemment intérêt à utiliser un système de coordonnées cartésiennes, dans lequel tous les Γ^i_{jk} sont nuls.

3.7.5 Propriétés des champs tensoriels du second ordre

On démontre sans difficulté les généralisations des propriétés des champs vectoriels suivantes :

- **Définition 3.21 – Champs tensoriels d'ordre 2 irrotationnels.** On dit qu'un champ tensoriel $\boldsymbol{T}(M)$ d'ordre 2 est irrotationnel dans un domaine $\mathscr{D}$ si $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{T}(M) = \mathbf{0}$, $\forall M \in \mathscr{D}$.

  On a le résultat suivant :

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{T}(M) = \mathbf{0}, \quad \forall M \in \mathscr{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{v}(M) \text{ tel que } \boldsymbol{T}(M) = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}(M) \tag{3.52}$$

- **Définition 3.22 – Champs tensoriels d'ordre 2 conservatifs.** On dit qu'un champ tensoriel $\boldsymbol{T}(M)$ d'ordre 2 est conservatif dans un domaine $\mathscr{D}$ si $\mathbf{div}\,\boldsymbol{T}(M) = \mathbf{0}$, $\forall M \in \mathscr{D}$.

  On a le résultat suivant :

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{T}(M) = \mathbf{0}, \quad \forall M \in \mathscr{D} \quad \Leftrightarrow \quad \exists \boldsymbol{U}(M) \text{ tel que } \boldsymbol{T}(M) = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{U}(M) \tag{3.53}$$

- **Théorème 3.23 – Théorème de Stokes pour les tenseurs d'ordre 2.** Avec les notations et les conditions du théorème 3.15 [p. 75], on a l'identité *vectorielle* suivante :

$$\int_S (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{T}) \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s = \int_{\partial \mathscr{S}} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{t}\, \mathrm{d}\ell \tag{3.54}$$

- **Théorème 3.24 – Théorème de la divergence pour les tenseurs d'ordre 2.** Avec les notations et les conditions du théorème 3.16 [p. 76], on a l'identité *vectorielle* suivante :

$$\int_{\mathscr{D}} \mathbf{div}\,\boldsymbol{T}\, \mathrm{d}v = \int_{\partial \mathscr{D}} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s \tag{3.55}$$

  Démonstration – *Indications pour les démonstrations.* Soit une base orthonormée fixe $\{\boldsymbol{e}_k\}$. En projetant sur cette base chaque membre des égalités ci-dessus, on obtient des égalités tensorielles d'ordre diminué de 1. On peut alors utiliser pour chacune d'elles les propriétés de la section 3.6.5 [p. 75]. Ces trois traitements permettent d'aboutir à la reconstruction du résultat tensoriel.

  Par exemple, pour montrer (3.52) : $\boldsymbol{e}_1 \cdot \mathbf{rot}(\boldsymbol{T}) = \mathbf{rot}(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{T})$ [identité (3.46) p. 78] $\Leftrightarrow \exists\, \varphi^1$ tel que $\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\,\varphi^1 = \boldsymbol{e}_1 \cdot \mathbf{grad}(\varphi^1 \boldsymbol{e}_1)$ [identité (3.22) p. 73]. De même pour les projections sur $\boldsymbol{e}_2$ et $\boldsymbol{e}_3$. Le vecteur $\boldsymbol{v} = \varphi^i \boldsymbol{e}_i$ existe donc.

3.8 Champs tensoriels d'ordre p

- **Définition 3.25 – Gradient d'un champ tensoriel.** Le gradient d'un champ tensoriel $\boldsymbol{U}(M)$ différentiable d'ordre $p \geqslant 0$ est le champ tensoriel d'ordre $p+1$ défini par :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{U} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{U} \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{M}$$

  Comme précédemment, ses composantes dans la base naturelle d'un système de coordonnées se déduisent de l'égalité :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{U}(M) = \mathbf{d}\overline{\boldsymbol{U}}(x^1, x^2, x^3), \quad \forall\, \mathbf{d}\boldsymbol{M}$$

Par exemple, les composantes complètement covariantes du gradient d'un tenseur d'ordre 3 sur la base naturelle sont [règle 3.17 p. 77] :

$$(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{U})_{ijkl} = \overline{U}_{ijk,l} - \overline{U}_{mjk}\Gamma^m_{il} - \overline{U}_{imk}\Gamma^m_{jl} - \overline{U}_{ijm}\Gamma^m_{kl}$$

On vérifie aisément la propriété importante suivante :

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{H} = \mathbf{0} \tag{3.56}$$

- **Définition 3.26 – Divergence d'un champ tensoriel.** La divergence d'un champ tensoriel $\boldsymbol{U}$ différentiable d'ordre $p \geqslant 1$ est le champ tensoriel d'ordre $p-1$ défini par :

$$\mathbf{div}\,\boldsymbol{U} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{U} : \boldsymbol{G} \tag{3.57}$$

- **Définition 3.27 – Rotationnel d'un champ tensoriel.** Le rotationnel d'un champ tensoriel $\boldsymbol{U}$ différentiable d'ordre $p \geqslant 1$ est le champ tensoriel d'ordre p défini par :

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{U} = -\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{U} : \boldsymbol{H} \tag{3.58}$$

- **Définition 3.28 – Laplacien d'un champ tensoriel.** Le laplacien d'un champ tensoriel $\boldsymbol{U}$ différentiable d'ordre $p \geqslant 0$ est le champ de tenseurs d'ordre p défini par :

$$\boldsymbol{\Delta} U = \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \tag{3.59}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier les identités suivantes [16], dans lequelles $\boldsymbol{T}$ est un champ tensoriel d'ordre 2 et $\boldsymbol{v}$ un vecteur :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{T} - \Delta\boldsymbol{T}, \qquad \forall T \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2} \tag{3.60}$$

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{v}) = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{T}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}, \qquad \forall \boldsymbol{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p} \tag{3.61}$$

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{T}) = \boldsymbol{v} \otimes \mathbf{div}\,\boldsymbol{T} + \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{T}^\top, \qquad \forall \boldsymbol{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p} \tag{3.62}$$

On généralise sans difficulté le théorème de la divergence pour les tenseurs d'ordre p en utilisant par récurrence le procédé de démonstration donné page 79 :

$$\int_{\mathscr{D}} \mathbf{div}\,\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}v = \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s, \quad \forall \boldsymbol{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p} \qquad \text{(égalité tensorielle d'ordre } p-1) \tag{3.63}$$

3.9 En bref...

En mécanique des milieux continus, on doit envisager des champs de tenseurs définis sur les points d'un domaine de l'espace. Pour repérer les points du domaine, on choisit un système de coordonnées commode pour parcourir le domaine. Chaque système de coordonnées a sa propre base naturelle (en général non orthonormée) et ses propres coefficients de Christoffel.

Le gradient, la divergence, le rotationnel et le laplacien de *champs tensoriels de tout ordre* ont été définis intrinsèquement par des opérations tensorielles, qui peuvent être évaluées avec des composantes dans n'importe quelle base.
– le gradient d'un champ tensoriel d'ordre p est d'ordre $p+1$;
– la divergence d'un champ tensoriel d'ordre p est d'ordre $p-1$;

[16] Voir la note 15 [p. 78]

– le rotationnel d'un champ tensoriel d'ordre p est d'ordre p ;
– le laplacien d'un champ tensoriel d'ordre p est d'ordre p.

L'expression des composantes de ces opérateurs sur la base naturelle d'un système de coordonnées est la même pour tous les systèmes de coordonnées. Seuls les coefficients de Christoffel (calculés une fois pour toutes) sont caractéristiques de chaque système de coordonnées. Dans un système de coordonnées non cartésiennes, bien que systématiques, les calculs peuvent être fastidieux. Pour les effectuer, on peut s'aider d'un logiciel de calcul formel [17].

Le formulaire en annexe C [p. 117] détaille les composantes sur la base physique des systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique, des opérateurs différentiels utiles en mécanique des milieux continus.

[17] L'auteur met à la disposition des utilisateurs des logiciels de calcul formel MATHEMATICA® et MAPLE®, deux « packages » destinés à faciliter la pratique de l'algèbre tensorielle dans une base quelconque et de l'analyse tensorielle dans un système de coordonnées quelconque. Ils sont téléchargeables actuellement (22 avril 2014) à l'adresse : `http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html`.

4

Quelques applications

4.1 Opérateurs différentiels en coordonnées cylindriques

Pour illustrer la méthode générale d'obtention des composantes des opérateurs différentiels dans un système de coordonnées quelconque, on va retrouver ici quelques formules classiques données dans les formulaires pour le système de coordonnées cylindriques et les étendre aux champs tensoriels [(1)].

En coordonnées cylindriques, le point courant est donné par : $\boldsymbol{x}_M = r\,\boldsymbol{u}(\theta) + z\boldsymbol{k}$.
On en déduit la base naturelle de ce système de coordonnées [éq. (3.2) page 63] :

$$\boldsymbol{e}_r = (\boldsymbol{x}_M)_{,r} = \boldsymbol{u} \quad ; \quad \boldsymbol{e}_\theta = (\boldsymbol{x}_M)_{,\theta} = r\boldsymbol{v} \quad ; \quad \boldsymbol{e}_z = (\boldsymbol{x}_M)_{,z} = \boldsymbol{k}$$

Cette base naturelle est orthogonale mais non normée car $\|\boldsymbol{e}_\theta\| = r \neq 1$.

Les coefficients de Christoffel [éq. (3.4) page 65] de ce système de coordonnées se calculent soit par dérivation directe des vecteurs de la base naturelle, soit en utilisant les formules systématiques [éq. (3.6) p. 66]. Les coefficients de Christoffel non nuls sont :

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \quad ; \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r$$

La base physique $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\}$ est la base naturelle normée :

$$\widetilde{\boldsymbol{e}}_r = \boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{u} \quad ; \quad \widetilde{\boldsymbol{e}}_\theta = \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r} = \boldsymbol{v} \quad ; \quad \widetilde{\boldsymbol{e}}_z = \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k} \qquad \Rightarrow \qquad [\widetilde{A}^\bullet{}_\bullet] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En coordonnées cylindriques, il se trouve que la base physique est orthonormée car la base naturelle est orthogonale.

4.1.1 Gradient d'un champ scalaire

Soit $f(M) = \overline{f}(r,\theta,z)$ un champ scalaire. En utilisant l'équation (3.16) [p. 71] on trouve les composantes covariantes du vecteur **grad** f sur la base naturelle :

$$\mathbf{grad}\, f = \overline{f}_{,r}\,\boldsymbol{e}^r + \overline{f}_{,\theta}\,\boldsymbol{e}^\theta + \overline{f}_{,z}\,\boldsymbol{e}^z$$

Par changement de base des composantes covariantes de vecteurs [règle 1.36 p. 20], on trouve les composantes covariantes de **grad** f sur la base physique :

$$\mathbf{grad}\, f = \overline{f}_{,r}\,\widetilde{\boldsymbol{e}}^r + \frac{\overline{f}_{,\theta}}{r}\widetilde{\boldsymbol{e}}^\theta + \overline{f}_{,z}\,\widetilde{\boldsymbol{e}}^z \qquad \text{(formule classique)} \tag{4.1}$$

Remarque 4.1 – Puisque la base physique est orthonormée, les composantes covariantes et contravariantes de **grad** f sont identiques.

(1) Un formulaire complet est donné en annexe C page 117.

4.1.2 Champs vectoriels

Soit $\boldsymbol{v}(M)$ un champ vectoriel dont on donne les composantes *sur la base physique* :

$$\boldsymbol{v} = \widetilde{v}^r(r,\theta,z)\widetilde{\boldsymbol{e}}_r + \widetilde{v}^\theta(r,\theta,z)\widetilde{\boldsymbol{e}}_\theta + \widetilde{v}^z(r,\theta,z)\widetilde{\boldsymbol{e}}_z$$

Par changement de base des composantes contravariantes de vecteurs [règle 1.36 p. 20], on en déduit ses composantes contravariantes sur la base naturelle :

$$\overline{v}^r = \widetilde{v}^r \quad ; \quad \overline{v}^\theta = \frac{\widetilde{v}^\theta}{r} \quad ; \quad \overline{v}^z = \widetilde{v}^z \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v} = \widetilde{v}^r\boldsymbol{e}_r + \frac{\widetilde{v}^\theta}{r}\boldsymbol{e}_\theta + \widetilde{v}^z\boldsymbol{e}_z$$

On peut alors utiliser les formules (3.19) [p. 72] pour trouver les composantes mixtes $[(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^\bullet{}_\bullet]_{\boldsymbol{e}_i}$ sur la base naturelle :

$$[(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^\bullet{}_\bullet]_{\boldsymbol{e}_i} = \begin{bmatrix} \widetilde{v}^r{}_{,r} & \widetilde{v}^r{}_{,\theta} - \widetilde{v}^\theta & \widetilde{v}^r{}_{,z} \\ \dfrac{\widetilde{v}^\theta{}_{,r}}{r} & \dfrac{\widetilde{v}^\theta{}_{,\theta}}{r} + \dfrac{\widetilde{v}^r}{r} & \dfrac{\widetilde{v}^\theta{}_{,z}}{r} \\ \widetilde{v}^z{}_{,r} & \widetilde{v}^z{}_{,\theta} & \widetilde{v}^z{}_{,z} \end{bmatrix}$$

Par changement de base pour les tenseurs du second ordre [règle 1.36 p. 20], on en déduit les composantes $[(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^\bullet{}_\bullet]_{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i}$ sur la base physique (la base $\{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i\}$ étant orthonormée, on peut ignorer les variances) :

$$[(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})^\bullet{}_\bullet]_{\widetilde{\boldsymbol{e}}_i} = \begin{bmatrix} \widetilde{v}^r{}_{,r} & \dfrac{\widetilde{v}^r{}_{,\theta}}{r} - \dfrac{\widetilde{v}^\theta}{r} & \widetilde{v}^r{}_{,z} \\ \widetilde{v}^\theta{}_{,r} & \dfrac{\widetilde{v}^\theta{}_{,\theta}}{r} + \dfrac{\widetilde{v}^r}{r} & \widetilde{v}^\theta{}_{,z} \\ \widetilde{v}^z{}_{,r} & \dfrac{\widetilde{v}^z{}_{,\theta}}{r} & \widetilde{v}^z{}_{,z} \end{bmatrix}$$

Le scalaire $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}$ se calcule avec la définition (3.24) [p. 73] :

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} : \boldsymbol{G} = \widetilde{v}^r{}_{,r} + \frac{\widetilde{v}^\theta{}_{,\theta}}{r} + \frac{\widetilde{v}^r}{r} + \widetilde{v}^z{}_{,z} \qquad \text{(formule classique)}$$

Remarque 4.2 – Par définition, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} : \boldsymbol{G} = \mathrm{tr}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{\mathrm{I}}$. C'est la trace d'une matrice de *composantes mixtes* dans n'importe quelle base. En particulier on peut calculer cette trace avec les composantes mixtes de $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}$ dans la base naturelle comme dans la base physique.

En prenant $\boldsymbol{v} = \mathbf{grad}\,f = \overline{f}_{,r}\,\widetilde{\boldsymbol{e}}^r + \frac{\overline{f}_{,\theta}}{r}\widetilde{\boldsymbol{e}}^\theta + \overline{f}_{,z}\,\widetilde{\boldsymbol{e}}^z$ [éq. (4.1) page 83], on en déduit le laplacien d'un champ scalaire (définition en (3.27) page 74) :

$$\Delta f = \mathrm{div}\,\mathbf{grad}\,f = \overline{f}_{,rr} + \frac{\overline{f}_{,\theta\theta}}{r^2} + \frac{\overline{f}_{,r}}{r} + \overline{f}_{,zz} \qquad \text{(formule classique)}$$

Le vecteur $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}$ se calcule avec la définition (3.25) [p. 74]. Ses composantes dans la base physique sont [(2)] :

$$\begin{aligned} \mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} &= -\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} : \boldsymbol{H} \\ &= \left(\frac{\widetilde{v}^z{}_{,\theta}}{r} - \widetilde{v}^\theta{}_{,z}\right)\widetilde{\boldsymbol{e}}_r + \left(\widetilde{v}^r{}_{,z} - \widetilde{v}^z{}_{,r}\right)\widetilde{\boldsymbol{e}}_\theta + \left(\widetilde{v}^\theta{}_{,r} - \frac{\widetilde{v}^r{}_{,\theta}}{r} + \frac{\widetilde{v}^\theta}{r}\right)\widetilde{\boldsymbol{e}}_z \qquad \text{(formule classique)} \end{aligned}$$

On peut sans difficulté majeure [(3)], trouver par la même démarche les formules des composantes d'opérateurs différentiels de champs de tenseurs d'ordre supérieur.

[(2)] Cette base est orthonormée. Les composantes du tenseur d'orientation $\boldsymbol{H}$ dans cette base sont donc 1, -1 ou 0. Il est plus simple de faire le double produit contracté $-\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} : \boldsymbol{H}$ avec les composantes des tenseurs dans cette base.

[(3)] Voir note 17 page 81.

4.2 Applications des théorèmes de la divergence

Dans les formules qui suivent, $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}_3$ est un volume fermé de frontière $\partial\mathscr{D}$ et de volume $\mathrm{vol}(\mathscr{D})$, N est un point courant de la frontière $\partial\mathscr{D}$, de normale unitaire sortante $\boldsymbol{n}(N)$ et $\boldsymbol{u}_0$ est un vecteur fixe. En utilisant les théorèmes de la divergence, on vérifie aisément les identités suivantes, valables pour tout domaine $\mathscr{D}$:

$$\int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{n}(N)\, ds = \mathbf{0} \qquad \int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{ON} \wedge \boldsymbol{n}(N)\, ds = \mathbf{0}$$

$$\int_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{ON} \cdot \boldsymbol{n}(N)\, ds = 3\,\mathrm{vol}(\mathscr{D}) \qquad \int_{\partial\mathscr{D}} (\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{ON})\boldsymbol{n}(N)\, ds = \mathrm{vol}(\mathscr{D})\boldsymbol{u}_0$$

Les deux dernières identités donnent différentes manières d'évaluer le volume d'un domaine avec des intégrales de surface sur la frontière.

4.3 Dérivées d'intégrales de volume sur des domaines variables

En mécanique des milieux continus, on aura à considérer des intégrales sur des *domaines volumiques variables* en fonction d'un paramètre t.

On choisit arbitrairement une valeur particulière t_0 du paramètre t. Le domaine pour $t = t_0$ est noté $\mathscr{D}_0$ et son point courant est noté M_0. Pour décrire le domaine pour toute valeur de t, on se donne l'application f qui donne les points M_t de $\mathscr{D}_t$ en fonction de M_0 et de t :

$$f \;:\; M_0 \in \mathscr{D}_0 \;\leftrightarrow\; f(M_0, t) = M_t$$

On suppose que l'application f à t constant est différentiable en tout point M_0 de $\mathscr{D}_0$ et qu'elle est inversible. D'autre part on suppose qu'elle est dérivable par rapport à t. Autrement dit, les variations du domaine $\mathscr{D}_t$ sont suffisamment régulières.

L'application f est un endomorphisme $\mathscr{E}_3 \to \mathscr{E}_3$. Son gradient en M_0 est l'application linéaire tangente :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{M}_t = \mathbf{grad}\, f \cdot \mathbf{d}\boldsymbol{M}_0$$

L'opérateur linéaire $\mathbf{grad}\, f$ est donc un tenseur du second ordre [th. 1.62 page 32].

Soit un champ tensoriel $\boldsymbol{T}$ d'ordre p, fonction aussi du paramètre t, différentiable en tout $M \in \mathscr{E}_3$ et dérivable par rapport à t :

$$\boldsymbol{T} \;:\; (M,t) \in \mathscr{E}_3 \times \mathbb{R} \;\to\; \boldsymbol{T}(M,t) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$$

On considère l'intégrale :

$$\boldsymbol{I}(t) = \int_{\mathscr{D}_t} \boldsymbol{T}(M_t, t)\, \mathrm{d}v_t$$

Cette intégrale est un tenseur d'ordre p, qui est fonction de t pour deux raisons : d'une part le champ $\boldsymbol{T}$ varie avec t, d'autre part le domaine d'intégration varie aussi avec t.

On se propose de calculer la dérivée par rapport à t de cette intégrale. Pour ce faire, on va effectuer un changement de variable qui ramène l'intégrale sur le domaine variable $\mathscr{D}_t$ à une intégrale sur le domaine fixe $\mathscr{D}_0$.

Changement de variable sur l'élément de volume

Soit $\mathscr{S}_g$ un système de coordonnées. À l'application f on peut associer les trois applications bijectives $f^i_{\mathscr{S}_g}$:

$$(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) \in \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f^i_{\mathscr{S}_g}} f^i_{\mathscr{S}_g}(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) = x_t^i$$

où les x_0^i sont les coordonnées de $M_0 \in \mathscr{D}_0$ et les x_t^i sont les coordonnées de $M_t \in \mathscr{D}_t$. L'élément de volume dans $\mathscr{D}_0$ est :

$$\mathrm{d}v_0 = \sqrt{g}\,\mathrm{d}x_0^1\,\mathrm{d}x_0^2\,\mathrm{d}x_0^3 \qquad \text{[éq. (3.11) p. 68]}$$

De même, l'élément de volume dans $\mathscr{D}_t$ est :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}v_t &= \sqrt{g}\,\mathrm{d}x_t^1\,\mathrm{d}x_t^2\,\mathrm{d}x_t^2 = \sqrt{g}\left(\frac{\partial f^1_{\mathscr{S}_g}}{\partial x_0^i}\,\mathrm{d}x_0^i\right)\left(\frac{\partial f^2_{\mathscr{S}_g}}{\partial x_0^j}\,\mathrm{d}x_0^j\right)\left(\frac{\partial f^3_{\mathscr{S}_g}}{\partial x_0^k}\,\mathrm{d}x_0^k\right)\\
&= \sqrt{g}\,\det\left[f^i_{\mathscr{S}_g},{}_j\right]\,\mathrm{d}x_0^1\,\mathrm{d}x_0^2\,\mathrm{d}x_0^3\\
dv_t &= \det\mathbf{grad}\,f\;\mathrm{d}v_0 \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Remarquer que le rapport des éléments de volume est indépendant du système de coordonnées $\mathscr{S}_g$. Il ne dépend que de l'application f qui définit le volume $\mathscr{D}_t$ à tout instant.

Dans la suite du calcul, on aura besoin de connaître la dérivée par rapport à t de $\det\mathbf{grad}\,f(M_0,t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{grad}\,f &= \boldsymbol{\nabla}\det\mathbf{grad}\,f : \frac{\mathrm{d}(\mathbf{grad}\,f)}{\mathrm{d}t} && \text{[éq. (2.28) p. 54]}\\
&= \det\mathbf{grad}\,f\;\;\mathbf{grad}^{-\top}f : \frac{\mathrm{d}(\mathbf{grad}\,f)}{\mathrm{d}t} && \text{[éq. (2.37) p. 57]}\\
&= \det\mathbf{grad}\,f\;\;\mathrm{tr}\left(\frac{\mathrm{d}(\mathbf{grad}\,f)}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{grad}^{-1}f\right) && \text{[éq. (1.35) p. 29]}\\
&= \det\mathbf{grad}\,f\;\;\mathrm{tr}\left(\mathbf{grad}\,\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\cdot\mathbf{grad}\,f^{-1}\right)\\
&= \det\mathbf{grad}\,f\;\;\mathrm{tr}\,\mathbf{grad}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\circ f^{-1}\right)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\det\mathbf{grad}\,f &= \det\mathbf{grad}\,f\;\;\mathrm{tr}\,\mathbf{grad}\,\frac{\mathbf{d}M_t}{\mathrm{d}t} = \det\mathbf{grad}\,f\;\;\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{d}M_t}{\mathrm{d}t} && (4.3)
\end{aligned}$$

Dérivation de l'intégrale

En faisant le changement de variable $M_t = f(M_0,t)$ et $dv_t = \det\mathbf{grad}\,f\;dv_0$, l'intégrale sur le domaine $\mathscr{D}_t$ se ramène à une intégrale sur le domaine $\mathscr{D}_0$:

$$\boldsymbol{I}(t) = \int_{\mathscr{D}_t}\boldsymbol{T}(M_t,t)\;dv_t = \int_{\mathscr{D}_0}\boldsymbol{T}\big(f(M_0,t),t\big)\;\det\mathbf{grad}\,f(M_0,t)\;dv_0$$

Le domaine d'intégration $\mathscr{D}_0$ n'est pas fonction de t. La variation de l'intégrale $\boldsymbol{I}(t)$ en fonction de t n'est due qu'aux variations de l'intégrande. La dérivée par rapport à t de cette intégrale

s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}t} &= \int_{\mathscr{D}_0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\boldsymbol{T}\big(f(M_0,t),t\big)\,\det\mathbf{grad}\,f(M_0,t)\Big)\,\mathrm{d}v_0 \\
&= \int_{\mathscr{D}_0} \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{T}\big(f(M_0,t),t\big)}{\mathrm{d}t}\,\det\mathbf{grad}\,f(M_0,t)\,\mathrm{d}v_0 + \int_{\mathscr{D}_0} \boldsymbol{T}\big(f(M_0,t),t\big)\,\frac{\mathrm{d}(\det\mathbf{grad}\,f)}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}v_0 \\
&= \int_{\mathscr{D}_0} \Big(\frac{\partial\boldsymbol{T}\big(f(M_0,t),t\big)}{\partial t} + \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{M}_t}{\mathrm{d}t}\Big)\,\det\mathbf{grad}\,f\,\mathrm{d}v_0 + \\
&\qquad\qquad \int_{\mathscr{D}_0} \boldsymbol{T}\big(f(M_0,t),t\big)\,\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{M}_t}{\mathrm{d}t}\,\det\mathbf{grad}\,f\,\mathrm{d}v_0
\end{aligned}$$

On peut alors faire le changement de variables inverse : $M_0 = f^{-1}(M_t)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}t} &= \int_{\mathscr{D}_t} \Big(\frac{\partial\boldsymbol{T}\big(M_t,t\big)}{\partial t} + \mathbf{grad}\,\boldsymbol{T}\cdot\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{M}_t}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{T}\big(M_t,t\big)\,\mathrm{div}\,\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{M}_t}{\mathrm{d}t}\Big)\,\mathrm{d}v_t \\
&= \int_{\mathscr{D}_t} \Big(\frac{\partial\boldsymbol{T}\big(M_t,t\big)}{\partial t} + \mathbf{div}\,\big(\boldsymbol{T}\otimes\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{M}_t}{\mathrm{d}t}\big)\Big)\,\mathrm{d}v_t \qquad \text{[éq. (3.61) p. 80]} \\
&= \int_{\mathscr{D}_t} \frac{\partial\boldsymbol{T}\big(M_t,t\big)}{\partial t}\,\mathrm{d}v + \int_{\partial\mathscr{D}_t} \Big(\boldsymbol{T}\otimes\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{M}_t}{\mathrm{d}t}\Big)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s_t \qquad \text{(théorème de la divergence)} \\
\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{I}}{\mathrm{d}t} &= \int_{\mathscr{D}_t} \frac{\partial\boldsymbol{T}\big(M_t,t\big)}{\partial t}\,\mathrm{d}v + \int_{\partial\mathscr{D}_t} \boldsymbol{T}\Big(\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{M}_t}{dt}\cdot\boldsymbol{n}\Big)\,\mathrm{d}s_t \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Si le paramètre t est le temps, le vecteur $\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{M}_t}{\mathrm{d}t}$ est la vitesse $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ du point M_t dans le mouvement du domaine. Finalement,

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{I}}{dt} = \int_{\mathscr{D}_t} \frac{\partial\boldsymbol{T}(M_t,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}v_t + \int_{\partial\mathscr{D}_t} \boldsymbol{T}(M_t,t)\,\big(\widetilde{\boldsymbol{v}}(M_t,t)\cdot\boldsymbol{n}\big)\,\mathrm{d}s_t \qquad (4.5)$$

Cette formule de dérivation temporelle des intégrales de volume sur des domaines variables avec le temps est très utilisée en mécanique des milieux continus. Il remarquable de constater que dans la formule (4.5), dans l'intégrale de frontière, seule intervient *la vitesse des points de la frontière* du domaine $\mathscr{D}_t$.

4.4 Conditions de compatibilité

Dans certains problèmes de mécanique des milieux continus, on est amené à résoudre le problème suivant :
Soit $\boldsymbol{S}(M)$ un champ de tenseurs symétriques du second ordre. Trouver le champ vectoriel $\boldsymbol{v}$ tel que $\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S}$.

Dans cette section, on montre que ce problème n'a de solution que si et seulement si le champ symétrique $\boldsymbol{S}(M)$ satisfait à certaines condition appelées *conditions de compatibilité*.

Écriture d'une condition nécessaire

Soit $\boldsymbol{v}(M)$ un champ vectoriel et soit $\boldsymbol{S}(M)$ la partie symétrique de son gradient :

$$\boldsymbol{S} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} + \mathbf{grad}^\top\,\boldsymbol{v})$$

On en déduit : $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\underbrace{\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} + \frac{1}{2}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{grad}^\top\,\boldsymbol{v}$ [identité (3.43) p. 78]

En transposant cette égalité, il vient :

$$\mathbf{rot}^\top\,\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\,\mathbf{rot}^\top\,\mathbf{grad}^\top\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\,\mathbf{grad}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} \qquad \text{[identité (3.44) p. 78]} \tag{4.6}$$

En prenant le rotationnel de (4.6) et utilisant à nouveau l'identité (3.43) page 78, on en déduit une condition nécessaire sur le champ $\boldsymbol{S}(M)$:

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}^\top\,\boldsymbol{S} = \mathbf{0} \qquad \text{(6 équations, [éq. (3.48) p. 78])} \tag{4.7}$$

La condition (4.7) est une condition suffisante :

Soit maintenant un champ de tenseurs symétriques $\boldsymbol{S}(M)$ respectant la condition nécessaire (4.7) $\forall M$. Cherchons le champ $\boldsymbol{v}(M)$ tel que $\boldsymbol{S}(M) = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}(M)$.

Le champ $\boldsymbol{v}(M)$ est solution de l'équation différentielle tensorielle :

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} = \underbrace{\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{S}} + \underbrace{\mathbf{asym}\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{A} \qquad \text{(9 équations aux dérivées partielles)} \tag{4.8}$$

où $\boldsymbol{A}(M)$ est un champ de tenseurs antisymétriques inconnu à déterminer.

Si le champ $\boldsymbol{S}$ satisfait à la condition nécessaire (4.7), alors l'équation (4.6) a une solution en vertu de la propriété (3.52) [p. 79]. L'équation (4.6) est une équation d'inconnue $\boldsymbol{A}$. En effet :

$$\begin{aligned}
\mathbf{rot}^\top\,\boldsymbol{S} &= \frac{1}{2}\,\mathbf{grad}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\,\mathbf{grad}(-\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} : \boldsymbol{H}) \qquad \text{[éq. (3.25) p. 74]}\\
&= -\frac{1}{2}\,\mathbf{grad}\,\big((\boldsymbol{S}+\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{H}\big)\\
&= -\,\mathbf{grad}\,\big(\frac{1}{2}\boldsymbol{A} : \boldsymbol{H}\big) \qquad (\boldsymbol{S} : \boldsymbol{H} = \mathbf{0} \text{ car } \boldsymbol{S} \text{ symétrique})\\
\mathbf{rot}^\top\,\boldsymbol{S} &= -\,\mathbf{grad}\,\boldsymbol{a} \qquad (\boldsymbol{a} \text{ est le vecteur adjoint de } \boldsymbol{A}, \text{ éq. (1.38) p. 31})
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Le vecteur $\boldsymbol{a}$ (et donc le tenseur antisymétrique $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{a}$) est donc la solution du système (4.9) :

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{a} = -\,\mathbf{rot}^\top\,\boldsymbol{S} \qquad \text{(9 équations aux dérivées partielles)} \tag{4.10}$$

La solution de l'équation différentielle tensorielle (4.10), d'inconnue $\boldsymbol{a}(M)$, dont on sait qu'elle a une solution grâce à la condition (4.7), permet de constuire le champ antisymétrique $\boldsymbol{A}(M)$:

$$\boldsymbol{A}(M) = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{a}(M) \qquad \text{[éq. (1.39) p. 31]}$$

L'équation (4.8) [p. 88], d'inconnue $\boldsymbol{v}(M)$, peut alors être complétée :

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{a} \tag{4.11}$$

Cette équation n'a de solution que si et seulement si $\mathbf{rot}(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= \mathbf{rot}\,\boldsymbol{S} + \frac{1}{2}\,\mathbf{rot}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{a})\\
&= \mathbf{rot}\,\boldsymbol{S} + \mathbf{grad}^\top\,\boldsymbol{a} - \mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{G} \qquad \text{[identité (3.45) p. 78]}\\
&= -\,\mathbf{grad}^\top\,\boldsymbol{a} + \mathbf{grad}^\top\,\boldsymbol{a} - \mathrm{div}\,\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{G} \qquad \text{[éq. (4.9) p. 88]}\\
&\Rightarrow\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{a} = 0
\end{aligned}$$

Cette condition sur le champ $\boldsymbol{a}(M)$ est toujours satisfaite car $\boldsymbol{S}$ est symétrique. En effet :

$$\operatorname{div}\boldsymbol{a} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{a} : \boldsymbol{G} = -(\mathbf{rot}^\top \boldsymbol{S}) : \boldsymbol{G} = 0 \qquad \text{[identité (3.47) p. 78]}$$

En conclusion, on est assuré de l'existence d'un champ $\boldsymbol{v}(M)$ solution du problème posé sous réserve que le champ tensoriel symétrique $\boldsymbol{S}(M)$ satisfasse les conditions de compatibilité :

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}^\top \boldsymbol{S} = \mathbf{0} \qquad \text{(6 équations)} \tag{4.12}$$

4.4.1 Autre forme des équations de compatibilité

Dans beaucoup de cours de mécanique des milieux continus, les conditions de compatibilité (4.12) sont présentées sous la forme suivante [(4)] :

$$\mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{S} + \mathbf{grad}^\top\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{S} - \mathbf{grad}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{S} = \mathbf{0} \tag{4.13}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que le système des six équations différentielles (4.12) est équivalent au système des six équations différentielles (4.13).

Indications pour la démonstration – Si l'on pose :

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}^\top \boldsymbol{S} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{T}' = \mathbf{grad}\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{S} + \mathbf{grad}^\top\,\mathbf{div}\,\boldsymbol{S} - \mathbf{grad}\,\mathbf{grad}\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{S} - \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{S}$$

on vérifie aisément que l'identité $\boldsymbol{T}' = \boldsymbol{T} - (\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T})\boldsymbol{G}$ est vraie $\forall \boldsymbol{S}$. Il est facile de montrer ensuite que $\boldsymbol{T} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{T}' = \mathbf{0}$.

4.4.2 Méthode d'intégration

La démonstration qui précède donne la méthode générale pour trouver le champ $\boldsymbol{v}(M)$. Soit un champ de tenseurs du second ordre symétrique $\boldsymbol{S}(M)$ satisfaisant aux conditions de compatibilité (4.12).

1. On cherche d'abord le champ vectoriel $\boldsymbol{a}(M)$ solution de l'équation (4.10) :

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{a} = -\,\mathbf{rot}^\top \boldsymbol{S} \qquad \text{(9 équations aux dérivées partielles)} \tag{4.14}$$

2. On cherche ensuite le champ vectoriel $\boldsymbol{v}(M)$ solution de l'équation (4.8) :

$$\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{S} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{a} \qquad \text{(9 équations aux dérivées partielles)} \tag{4.15}$$

Il faut bien noter que les champs vectoriels $\boldsymbol{v}(M)$ solutions ne sont pas uniques. En effet :
– les solutions $\boldsymbol{a}(M)$ de (4.14) sont définies à un champ vectoriel uniforme $\boldsymbol{a}_0$ près,
– les solutions $\boldsymbol{v}(M)$ de (4.15) sont définies à un champ vectoriel uniforme $\boldsymbol{v}_0$ près.

4.5 Représentation de Mohr pour les tenseurs symétriques

Soit $\boldsymbol{S}$ un tenseur du second ordre symétrique. Il a donc trois valeurs propres réelles $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ et il existe une base propre orthonormée $\{\boldsymbol{u}_i\}$. On peut donc écrire :

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{u}_i \otimes \boldsymbol{u}_i$$

On considère ce tenseur comme un endomorphisme linéaire de $\mathbb{V}_3$: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}$ et on observe géométriquement comment le tenseur $\boldsymbol{S}$ transforme le vecteur $\boldsymbol{v}$. On constate :

(4) Cette forme, d'expression plus compliquée, évite l'introduction du rotationnel d'un tenseur du second ordre.

1. une dilatation $d = \frac{\|\boldsymbol{w}\|}{\|\boldsymbol{v}\|}$ (le tenseur $\boldsymbol{S}$ change la norme de $\boldsymbol{v}$) ;
2. une déviation $\alpha = \text{angle}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$; $\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|}$ (le tenseur $\boldsymbol{S}$ change la direction de $\boldsymbol{v}$).

La transformation $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{w}$ étant linéaire, on a $\boldsymbol{S}\cdot(k\widetilde{\boldsymbol{v}}) = k\boldsymbol{w}$. On vérifie aisément que la dilatation d et la déviation α sont invariantes avec k. Il suffit donc de n'envisager que les transformations de vecteurs $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ unitaires.

La dilatation du vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ est donc : $d = \|\boldsymbol{w}\|$ et sa déviation est : $\alpha = \text{Arccos}\,\frac{\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{w}}{d}$.

Pour appréhender les évolutions de la dilatation d et de la déviation α quand le vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ varie, on choisit la méthode suivante :

1. on appelle *partie normale de* $\boldsymbol{w}$ le vecteur : $\boldsymbol{w}_n = (\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{w})\widetilde{\boldsymbol{v}}$
2. on appelle *partie tangentielle de* $\boldsymbol{w}$ le reste : $\boldsymbol{w}_t = \boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_n$

Justification du vocabulaire – Le vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ définit un plan dont il est la normale unitaire. La partie normale $\boldsymbol{w}_n$ est sa partie hors plan, la partie tangentielle $\boldsymbol{w}_t$ est sa projection dans le plan.

La connaissance des deux scalaires $w_n = \widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}$ et $w_t = \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{w}_n\| \geqslant 0$ suffit pour reconstituer la dilatation d et la déviation α. En effet :

$$d = \|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{w_n^2 + w_t^2} \qquad \text{et} \qquad \tan\alpha = \frac{w_t}{w_n} \tag{4.16}$$

Afin de comprendre géométriquement comment évoluent la dilatation d et la déviation α quand le vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ varie, on va tracer les vecteurs $\boldsymbol{w}$ dans un plan $(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_t)$, avec en abscisse les w_n et en ordonnées les w_t (non négatifs). D'après les égalités (4.16), un vecteur $OM = w_n\boldsymbol{e}_n + w_t\boldsymbol{e}_t$ de ce plan a pour module la dilatation d et pour angle polaire la déviation α [fig. 4.1 p. 91].

Si on note v_i les composantes du vecteur $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ dans la base propre orthonormée $\{\boldsymbol{u}_i\}$ du tenseur symétrique $\boldsymbol{S}$, il vient :

$$1 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \tag{4.17}$$

$$w_n = \widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{w} = \widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}} = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \lambda_3 v_3^2 \tag{4.18}$$

$$\boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{w}_n = \boldsymbol{w} = \lambda_1 v_1 \boldsymbol{e}_1 + \lambda_2 v_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 v_3 \boldsymbol{e}_3$$

$$w_n^2 + w_t^2 = \lambda_1^2 v_1^2 + \lambda_2^2 v_2^2 + \lambda_3^2 v_3^2 \tag{4.19}$$

Si on se donne un point (w_n, w_t) du plan $(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_t)$, les vecteurs $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ (de composantes v_i dans la base propre de $\boldsymbol{S}$) qui correspondent à ce point du plan $(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_t)$, sont solutions du système de trois équations (4.17), (4.18), (4.19).

La solution est :

$$v_1^2 = \frac{w_t^2 + (w_n - \lambda_2)(w_n - \lambda_3)}{\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}_{\geqslant 0}} \quad v_2^2 = \frac{w_t^2 + (w_n - \lambda_3)(w_n - \lambda_1)}{\underbrace{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\leqslant 0}} \quad v_3^2 = \frac{w_t^2 + (w_n - \lambda_1)(w_n - \lambda_2)}{\underbrace{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}_{\geqslant 0}}$$

Puisque les termes de gauche sont nécessairement non négatifs, des solutions réelles n'existent que si :

$$w_t^2 + (w_n - \lambda_2)(w_n - \lambda_3) \geqslant 0 \quad ; \quad w_t^2 + (w_n - \lambda_3)(w_n - \lambda_1) \leqslant 0 \quad ; \quad w_t^2 + (w_n - \lambda_1)(w_n - \lambda_2) \geqslant 0$$

Remarque 4.3 – Si deux valeurs propres sont égales, certaines composantes de $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ sont indéterminées.

On constate donc que tous les points du plan $(\boldsymbol{e}_n, \boldsymbol{e}_t)$ ne peuvent pas correspondre à un vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ donné : pour un tenseur $\boldsymbol{S}$ symétrique donné, de valeurs propres $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$, les coordonnées w_n et w_t (ou bien la dilatation d et la déviation α) ne peuvent prendre des valeurs quelconques, il faut qu'elles satisfassent les trois inégalités précédentes. Dans le cas où les valeurs propres sont distinctes, ces trois inégalités impliquent que les points les points (w_n, w_t) doivent se trouver dans la zone délimitée par les trois cercles de la figure ci-dessous :

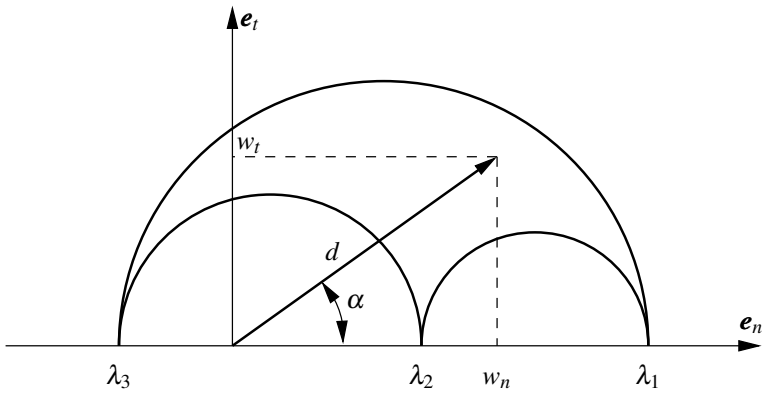

FIGURE 4.1 – Tricercle de Mohr

On constate que $\lambda_3 \leqslant w_n \leqslant \lambda_1$ et que $0 \leqslant w_t \leqslant \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{2}$.

Si deux valeurs propres sont égales, le domaine admissible se réduit à un demi cercle.
Si les trois valeurs propres sont égales (le tenseur $\boldsymbol{S}$ est sphérique), le domaine admissible se réduit au point $(\lambda, 0)$.

5

Conclusion

L'algèbre et l'analyse tensorielle sont nécessaires pour la description et la manipulation des grandeurs physiques qui sont introduites en mécanique des milieux continus. Ce cours n'a présenté que les concepts qui sont strictement nécessaires à mécanique des milieux continus. Il ne peut en aucun cas être considéré comme un cours complet sur les tenseurs. En particulier, bon nombre de résultats (soigneusement signalés) ne sont valables que pour les tenseurs construits sur un espace vectoriel de dimension 3.

Ces développements permettent de simplifier la présentation de la mécanique des milieux continus. En effet, les équations de la mécanique peuvent s'écrire uniquement avec des opérations tensorielles algébriques et des opérateurs différentiels tensoriels (gradient, divergence, rotationnel et laplacien). Sous cette forme condensée, on peut alors se concentrer sur l'essentiel : les concepts de la mécanique, sans s'encombrer des choix (accessoires car non physiques) d'un quelconque système de coordonnées ou d'une quelconque base pour donner des composantes aux tenseurs. Les équations tensorielles sont par essence valables quels que soient ces choix.

Il n'en reste pas moins que pour résoudre effectivement un problème particulier, il faut choisir un système de coordonnées commode pour repérer les points du domaine étudié, et il faut choisir une (des) base(s) pour exprimer les composantes des tenseurs. Les équations tensorielles (algébriques ou différentielles) se traduisent alors par des équations ordinaires (algébriques ou différentielles) portant sur des composantes et qu'il faut résoudre soit analytiquement (quand on peut) par les méthodes mathématiques standard (ou à l'aide d'un logiciel de calcul formel), soit numériquement par des méthodes numériques approchées (généralement à l'aide d'un ordinateur).

C'est pour expliquer clairement le passage des équations tensorielles aux équations ordinaires que les chapitres précédents ont été soigneusement détaillés.

A

Invariants et valeurs propres d'un tenseur symétrique réel

Tout tenseur réel symétrique du second ordre $\boldsymbol{S}$ construit sur $\mathbb{V}_3$ possède trois valeurs propres réelles λ_1, λ_2 et λ_3 et un système de trois invariants fondamentaux réels $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\}$ qui sont les coefficients du polynôme caractéristique. L'expression de ces invariants fondamentaux en fonction des valeurs propres est triviale :

$$S_{\mathrm{I}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \quad ; \quad S_{\mathrm{II}} = \lambda_1\,\lambda_2 + \lambda_2\,\lambda_3 + \lambda_3\,\lambda_1 \quad ; \quad S_{\mathrm{III}} = \lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3$$

En revanche, le problème inverse l'est moins. En le résolvant, on va notamment montrer au passage que le triplet d'invariants $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\}$ ne peut prendre pas des valeurs quelconques : pour qu'ils puissent être les invariants d'un tenseur réel symétrique, ces trois invariants sont soumis à certaines inégalités entre eux.

A.1 Condition d'existence de valeurs propres réelles

Les trois invariants $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\}$ étant considérés comme connus, les trois valeurs propres sont, par définition, les solutions du polynôme caractéristique de la matrice $[S^{\bullet}{}_{\bullet}]$ des composantes mixtes [1] de $\boldsymbol{S}$:

$$\lambda^3 - S_{\mathrm{I}}\,\lambda^2 + S_{\mathrm{II}}\,\lambda - S_{\mathrm{III}} = 0 \tag{A.1}$$

Au lieu de chercher les solutions λ de l'équation (A.1), on effectue un changement d'inconnues :

$$\lambda = x + \frac{S_{\mathrm{I}}}{3}$$

ce qui revient à chercher les valeurs propres x du déviateur de $\boldsymbol{S}$. L'équation (A.1) devient :

$$x^3 + \left(S_{\mathrm{II}} - \frac{{S_{\mathrm{I}}}^2}{3}\right)x + \frac{S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}}}{3} - \frac{2\,{S_{\mathrm{I}}}^3}{27} - S_{\mathrm{III}} = x^3 + p\,x + q = 0 \tag{A.2}$$

dont on sait qu'elle n'a trois racines réelles que si :

$$R = 4\,p^3 + 27\,q^2 = 27\,{S_{\mathrm{III}}}^2 + (4\,{S_{\mathrm{I}}}^3 - 18\,S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}})\,S_{\mathrm{III}} + 4\,{S_{\mathrm{II}}}^3 - {S_{\mathrm{I}}}^2\,{S_{\mathrm{II}}}^2 < 0$$

[1] On peut aussi bien prendre les composantes mixtes $[S_{\bullet}{}^{\bullet}]$. On obtient les mêmes valeurs propres, mais les vecteurs propres sont obtenus par leurs composantes covariantes. Ici, on ne s'intéresse qu'aux valeurs propres.

Ce polynôme de degré 2 en S_{III}, de coefficient en ${S_{\mathrm{III}}}^2$ positif, ne peut être négatif qu'entre des racines réelles éventuelles. Pour qu'il ait des racines réelles en S_{III}, il faut que son discriminant soit positif :

$$\Delta = 16({S_{\mathrm{I}}}^2 - 3\,S_{\mathrm{II}})^3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad {S_{\mathrm{I}}}^2 - 3\,S_{\mathrm{II}} > 0 \tag{A.3}$$

Les racines en S_{III} sont alors :

$$\frac{S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}}}{3} - \frac{2\,{S_{\mathrm{I}}}^3}{27} \pm \frac{2}{27}({S_{\mathrm{I}}}^2 - 3\,S_{\mathrm{II}})^{\frac{3}{2}}$$

Dans ces conditions, $R < 0$ si S_{III} est compris entre les racines :

$$\begin{aligned}\frac{S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}}}{3} - \frac{2\,{S_{\mathrm{I}}}^3}{27} - \frac{2}{27}({S_{\mathrm{I}}}^2 - 3\,S_{\mathrm{II}})^{\frac{3}{2}} < S_{\mathrm{III}} < \frac{S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}}}{3} - \frac{2\,{S_{\mathrm{I}}}^3}{27} + \frac{2}{27}({S_{\mathrm{I}}}^2 - 3\,S_{\mathrm{II}})^{\frac{3}{2}}\\ -\frac{2}{27}({S_{\mathrm{I}}}^2 - 3\,S_{\mathrm{II}})^{\frac{3}{2}} < S_{\mathrm{III}} - \frac{S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}}}{3} + \frac{2\,{S_{\mathrm{I}}}^3}{27} < +\frac{2}{27}({S_{\mathrm{I}}}^2 - 3\,S_{\mathrm{II}})^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

soit encore :

$$-1 < \frac{27\,S_{\mathrm{III}} - 9\,S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}} + 2\,{S_{\mathrm{I}}}^3}{2\,({S_{\mathrm{I}}}^2 - 3\,S_{\mathrm{II}})^{\frac{3}{2}}} < 1 \qquad \text{(car } S_{\mathrm{I}}^2 - 3S_{\mathrm{II}} > 0\text{, d'après la condition (A.3))} \tag{A.4}$$

Les valeurs propres d'un tenseur réel symétrique étant nécessairement réelles, *les invariants fondamentaux de ce tenseur vérifient nécessairement les inégalités* (A.3) *et* (A.4).

A.2 Définition de nouveaux invariants

On peut donc définir deux nouveaux invariants J et ϕ pour les tenseurs réels symétriques :

$$J = \sqrt{{S_{\mathrm{I}}}^2 - 3\,S_{\mathrm{II}}} > 0 \tag{A.5}$$

$$\phi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27\,S_{\mathrm{III}} - 9\,S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}} + 2\,{S_{\mathrm{I}}}^3}{2\,({S_{\mathrm{I}}}^2 - 3\,S_{\mathrm{II}})^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{Arccos}\,\frac{27\,S_{\mathrm{III}} - 9\,S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}} + 2\,{S_{\mathrm{I}}}^3}{2\,J^3} \tag{A.6}$$

où $\phi \in [0\,;\pi]$ et $\cos\phi \in [-1\,;1]$.

On peut interpréter ces nouveaux invariants en remarquant que :

$$J = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\|\,\mathbf{dev}\,\boldsymbol{S}\| = \sqrt{\frac{3}{2}\,\mathbf{dev}\,\boldsymbol{S} : \mathbf{dev}\,\boldsymbol{S}}$$

et :

$$27\,S_{\mathrm{III}} - 9\,S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}} + 2\,{S_{\mathrm{I}}}^3 = 27\,\det \mathbf{dev}\,\boldsymbol{S} \quad \Rightarrow \quad \cos\phi = 3\,\sqrt{6}\,\det\left(\frac{\mathbf{dev}\,\boldsymbol{S}}{\|\,\mathbf{dev}\,\boldsymbol{S}\|}\right)$$

À des constantes près, l'invariant J reflète la norme du déviateur de $\boldsymbol{S}$ et l'invariant $\cos\phi$ reflète le déterminant du déviateur normé.

Remarques A.1 – En mécanique des milieux continus, si $\boldsymbol{S}$ est un tenseur des contraintes, l'invariant J est appelé : contrainte équivalente de Von Mises.

D'autre part, on constate que le déterminant du déviateur normé d'un tenseur du second ordre symétrique réel est toujours compris entre $-1/(3\sqrt{6})$ et $1/(3\sqrt{6}) \simeq 0{,}136$. Il est nul pour $\phi = \pi/2$.

Les relations inverses sont :

$$S_{\mathrm{II}} = \frac{{S_{\mathrm{I}}}^2 - J^2}{3} \quad ; \quad S_{\mathrm{III}} = \frac{2J^3\cos\phi - 3J^2 S_{\mathrm{I}} + {S_{\mathrm{I}}}^3}{27} \tag{A.7}$$

Les triplets d'invariants $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\}$ et $\{S_{\mathrm{I}}, J, \cos\phi$ ou $\phi\}$ sont donc équivalents en ce sens que si on connaît l'un des triplets on peut calculer l'autre et inversement. Néanmoins, contrairement au triplet $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\}$, le nouveau triplet $\{S_{\mathrm{I}}, J, \cos\phi$ ou $\phi\}$ présente un avantage : chacun des trois réels peut prendre une valeur arbitraire dans son domaine de définition indépendamment des autres : $S_{\mathrm{I}} \in \mathbb{R}$, $J \geqslant 0$ et $\phi \in [0;\pi]$.

A.3 Expression des valeurs propres en fonction des invariants

En effectuant les substitutions (A.7) dans l'équation (A.2) [p. 95], l'équation devient :

$$x^3 - \frac{J^2}{3}x - \frac{2J^3\cos\phi}{27} = 0$$

En utilisant l'identité : $\cos\phi = 4\cos^3\frac{\phi}{3} - 3\cos\frac{\phi}{3}$, cette équation se factorise :

$$(3x - 2J\cos\frac{\phi}{3})\,(9x^2 + 6Jx\cos\frac{\phi}{3} - 3J^2 + 4J^2\cos^2\frac{\phi}{3}) = 0$$

Une première solution est donnée par le facteur de gauche :

$$x_1 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\phi}{3}$$

Le discriminant du second facteur est :

$$108J^2(1 - \cos^2\frac{\phi}{3}) = \left(6\sqrt{3}J\sin\frac{\phi}{3}\right)^2 > 0$$

Le second facteur a donc deux solutions réelles qui sont :

$$x_2 = \frac{J}{3}(-\cos\frac{\phi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\phi}{3}) \quad ; \quad x_3 = \frac{J}{3}(-\cos\frac{\phi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\phi}{3})$$

Les valeurs propres de $\boldsymbol{S}$ sont donc :

$$\lambda_1 = \frac{2J}{3}\cos\frac{\phi}{3} + \frac{S_{\mathrm{I}}}{3} \tag{A.8}$$

$$\lambda_2 = \frac{J}{3}(-\cos\frac{\phi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{\phi}{3}) + \frac{S_{\mathrm{I}}}{3} = \frac{2J}{3}\cos(\frac{\phi}{3} - \frac{2\pi}{3}) + \frac{S_{\mathrm{I}}}{3} \tag{A.9}$$

$$\lambda_3 = \frac{J}{3}(-\cos\frac{\phi}{3} - \sqrt{3}\sin\frac{\phi}{3}) + \frac{S_{\mathrm{I}}}{3} = \frac{2J}{3}\cos(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3}) + \frac{S_{\mathrm{I}}}{3} \tag{A.10}$$

où :

$$J = \sqrt{{S_{\mathrm{I}}}^2 - 3S_{\mathrm{II}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\|\mathbf{dev}\boldsymbol{S}\| = \sqrt{\frac{3}{2}\,\mathbf{dev}\boldsymbol{S} : \mathbf{dev}\boldsymbol{S}} \geqslant 0$$

$$\phi = \mathrm{Arccos}\,\frac{27S_{\mathrm{III}} - 9S_{\mathrm{I}}S_{\mathrm{II}} + 2S_{\mathrm{I}}^3}{2\,(S_{\mathrm{I}}^2 - 3S_{\mathrm{II}})^{\frac{3}{2}}} = \mathrm{Arccos}\left[3\sqrt{6}\det\left(\frac{\mathbf{dev}\boldsymbol{S}}{\|\mathbf{dev}\boldsymbol{S}\|}\right)\right] \;;\; \phi \in [0,\pi]$$

On propose dans la figure A.1 [p. 98] une représentation géométrique des résultats (A.8), (A.9) et (A.10) qui illustre comment évoluent les valeurs propres d'un tenseur réel symétrique en fonction des invariants $\frac{S_{\mathrm{I}}}{3} \in \mathbb{R}$, $\frac{2J}{3} \geqslant 0$ et $\frac{\phi}{3} \in [0;\frac{\pi}{3}]$.

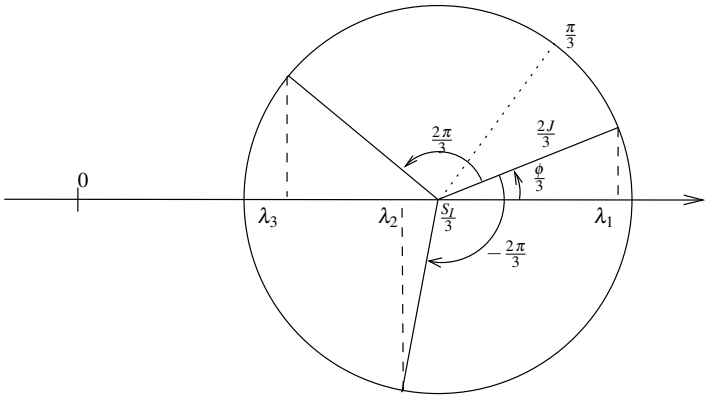

FIGURE A.1 – Représentation géométrique des valeurs propres d'un tenseur réel symétrique

A.4 Classement des valeurs propres

L'angle ϕ étant dans $[0;\pi]$, on a donc $\frac{1}{2} \leqslant \cos\frac{\phi}{3} \leqslant 1$ et $0 \leqslant \sin\frac{\phi}{3} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui permet de classer les valeurs propres :

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \underbrace{J\cos\frac{\phi}{3}}_{\geqslant \frac{1}{2}J} - \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}J\sin\frac{\phi}{3}}_{\leqslant \frac{1}{2}J} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \lambda_2 - \lambda_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}J\sin\frac{\phi}{3} \geqslant 0$$

On a donc $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$.

En analysant les valeurs des invariants J et ϕ, on peut statuer sur la multiplicité des valeurs propres :
- si $J = 0$, c'est-à-dire ${S_\mathrm{I}}^2 - 3\,S_\mathrm{II} = 0$, la norme du déviateur de $\boldsymbol{S}$ est nulle, le tenseur $\boldsymbol{S}$ est donc sphérique, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{S_\mathrm{I}}{3}$ et l'angle ϕ est indifférent ;
- si $J \neq 0$ et $\phi = 0$, alors $\lambda_2 = \lambda_3$;
- si $J \neq 0$ et $\phi = \pi$, alors $\lambda_1 = \lambda_2$;
- si $J \neq 0$, $\phi \neq 0$ et $\phi \neq \pi$, alors les valeurs propres sont distinctes.

A.5 Écart des valeurs propres extrêmes

En utilisant (A.8) et (A.10) [p. 97], il vient :

$$\lambda_1 - \lambda_3 = \frac{2J}{3}\left(\cos\frac{\phi}{3} - \cos(\frac{\phi}{3} + \frac{2\pi}{3})\right) = \frac{2J}{3}\sqrt{3}\cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\phi}{3})$$

où $\cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\phi}{3})$ varie entre $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et 1, lorsque ϕ varie entre 0 et π, soit une variation de 13,4%. On a donc :

$$J \leqslant \lambda_1 - \lambda_3 \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{3}J \simeq 1{,}155\,J$$

On peut donc faire une estimation de l'écart $\lambda_1 - \lambda_3$ à 6,7% près en prenant comme estimation la valeur médiane :

$$\lambda_1 - \lambda_3 \simeq \frac{J}{3}\sqrt{3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \simeq 1{,}077\,J$$

Remarque A.2 – Si $\boldsymbol{S}$ est un déviateur ($S_{\mathrm{I}} = 0$), de valeurs propres $\{\lambda_1' \geqslant \lambda_2' \geqslant \lambda_3'\}$, on peut donner le rapport entre les valeurs propres extrêmes (conditionnement de la matrice des composantes de $\mathbf{dev}\boldsymbol{S}$) :

$$\frac{\lambda_3'}{\lambda_1'} = \frac{\cos(\frac{\phi}{3} + \frac{\pi}{3})}{\cos\frac{\phi}{3}} = -\frac{1}{2}\,(1 + \sqrt{3}\tan\frac{\phi}{3}) \quad \Rightarrow \quad -2 \leqslant \frac{\lambda_3'}{\lambda_1'} \leqslant -\frac{1}{2}$$

A.6 Systèmes d'invariants d'un tenseur d'ordre 2 réel symétrique

Pour un tenseur réel symétrique $\boldsymbol{S}$, il y a donc complète équivalence entre la connaissance des trois invariants fondamentaux (coefficients du polynôme caractéristique) $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\}$, la connaissance des trois invariants

$$\Big\{S_{\mathrm{I}},\, J \text{ ou } \|\,\mathbf{dev}\boldsymbol{S}\|,\, \phi \text{ ou } \det\Big(\frac{\mathbf{dev}\boldsymbol{S}}{\|\,\mathbf{dev}\boldsymbol{S}\|}\Big)\Big\},$$

et la connaissance de ses trois valeurs propres classées $\{\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3\}$, car connaissant un triplet, on peut déterminer les deux autres.

Il est à noter que certains auteurs utilisent aussi le triplet d'invariants $\{S_1, S_2, S_3\}$ défini par :

$$\begin{aligned}
S_1 &= S_{\mathrm{I}} = \mathrm{tr}\boldsymbol{S} \\
S_2 &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{S}^2) = {S_{\mathrm{I}}}^2 - 2\,S_{\mathrm{II}} \\
S_3 &= \mathrm{tr}(\boldsymbol{S}^3) = 3\,S_{\mathrm{III}} - 3\,S_{\mathrm{I}}\,S_{\mathrm{II}} + {S_{\mathrm{I}}}^3
\end{aligned}$$

On montre facilement que les formules inverses sont :

$$S_1 = S_{\mathrm{I}} \quad ; \quad S_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\,({S_1}^2 - S_2) \quad ; \quad S_{\mathrm{III}} = \frac{1}{3}\Big(S_3 - \frac{3}{2}\,S_1\,S_2 + \frac{1}{2}\,{S_1}^3\Big)$$

Le triplet $\{S_1, S_2, S_3\}$ est donc aussi un triplet d'invariants équivalent.

Il est même possible d'en définir une infinité d'autres car toute fonction scalaire d'invariants est un invariant. Plus précisément, soient $\{f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}\}$ trois fonctions des invariants fondamentaux $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\}$ et à valeur scalaire ; elles définissent un triplet d'invariants valide

$$\big\{S^{(1)} = f^{(1)}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}})\,,\, S^{(2)} = f^{(2)}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}})\,,\, S^{(3)} = f^{(3)}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}})\big\}$$

si la tranformation $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\} \leftrightarrow \{S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}\}$ est inversible, c'est-à-dire si la matrice jacobienne de la transformation est régulière : $\det({f^{(i)}}_{,j}) \neq 0$.

Remarque A.3 – Le choix d'un triplet d'invariants $\{S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}\}$ comme arguments d'une fonction réelle isotrope devrait être donc guidé par l'interprétation physique des termes du triplet choisi. Cette fonction peut toujours être ramenée à une fonction des trois invariants fondamentaux. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\psi &= f_\psi(S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}) \\
&= f_\psi\big(f^{(1)}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}), f^{(2)}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}), f^{(3)}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}})\big) \\
&= g_\psi(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}})
\end{aligned}$$

pourvu que la matrice 3×3 de terme général ${f^{(i)}}_{,j}$ soit de déterminant non nul. Cette possibilité s'avère d'une grande utilité dans la construction de modèles de comportement.

A.7 Détermination tensorielle des directions propres

On sait que pour tout tenseur réel symétrique du second ordre $\boldsymbol{S}$ construit sur $\mathbb{V}_3$, on peut toujours trouver au moins une base orthonormée $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \widetilde{\boldsymbol{u}}_2, \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\}$ de $\mathbb{V}_3$ telle que le tenseur $\boldsymbol{S}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \, \widetilde{\boldsymbol{u}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}_i = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \widetilde{\boldsymbol{U}}_i$$

où $\widetilde{\boldsymbol{U}}_i = \widetilde{\boldsymbol{u}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}_i$ est un tenseur uniaxial unitaire représentant une direction propre non orientée associée à la valeur propre λ_i [th. 1.98 p. 45]. On vérifie aisément que

$$\boldsymbol{S} \cdot \widetilde{\boldsymbol{U}}_i = \lambda_i \widetilde{\boldsymbol{U}}_i$$

ce qui justifie la définition suivante :

- **Définition A.1 – Tenseurs uniaxiaux propres.** Si $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_i\}$ est une base propre orthonormée d'un tenseur réel symétrique $\boldsymbol{S}$, on appelle tenseurs uniaxiaux propres de $\boldsymbol{S}$ les tenseurs du second ordre uniaxiaux unitaires définis par :

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_i = \widetilde{\boldsymbol{u}}_i \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}_i$$

Remarque A.4 – Les vecteurs $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_i\}$ formant une base orthonormée, les tenseurs propres sont aussi orthonormés [propriété 1.103 p. 45].

Connaissant le tenseur du second ordre symétrique $\boldsymbol{S}$ par ses composantes dans une base quelconque, on sait calculer les invariants fondamentaux $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\}$ par les définitions (1.56), (1.57) et (1.58) [p. 36], puis les invariants $\{S_{\mathrm{I}}, J, \phi\}$ par leur définitions (A.5) et (A.6) [p. 96], et enfin le triplet des valeurs propres classées $\{\lambda_i\}$ par les formules (A.8), (A.9) et (A.10) [p. 97].

En se plaçant dans la base propre du tenseur symétrique $\boldsymbol{S}$, on vérifie aisément que les tenseurs uniaxiaux unitaires propres $\widetilde{\boldsymbol{U}}_i$ sont les solutions des trois équations tensorielles suivantes :

$$\boldsymbol{S}^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)\boldsymbol{S} + \lambda_2 \lambda_3 \boldsymbol{G} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\widetilde{\boldsymbol{U}}_1 \tag{A.11}$$

$$\boldsymbol{S}^2 - (\lambda_3 + \lambda_1)\boldsymbol{S} + \lambda_3 \lambda_1 \boldsymbol{G} = (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_1)\widetilde{\boldsymbol{U}}_2 \tag{A.12}$$

$$\boldsymbol{S}^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\boldsymbol{S} + \lambda_1 \lambda_2 \boldsymbol{G} = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)\widetilde{\boldsymbol{U}}_3 \tag{A.13}$$

Si les valeurs propres $\{\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3\}$ sont distinctes ($J \neq 0$ et $\phi \neq 0$ et $\phi \neq \pi$) la solution $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_3\}$ est unique. En revanche,

- si $J = 0$, le tenseur $\boldsymbol{S}$ est sphérique ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$), les trois équations (A.11), (A.12) et (A.13) sont identiquement vérifiées $\forall \widetilde{\boldsymbol{U}}_i$ et tout triplet orthonormé $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_3\}$ est solution ;
- si $J \neq 0$ et $\phi = 0$, alors $\lambda_2 = \lambda_3 \neq \lambda_1$; l'équation en $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1$ a une solution unique et les deux autres sont identiquement vérifiées $\forall \widetilde{\boldsymbol{U}}_2$, $\forall \widetilde{\boldsymbol{U}}_3$; le tenseur $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1$ peut être complété par tout couple de tenseurs uniaxiaux $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_3\}$ tel que le triplet $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_3\}$ soit orthonormé ;
- si $J \neq 0$ et $\phi = \pi$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$; l'équation en $\widetilde{\boldsymbol{U}}_3$ a une solution unique et les deux autres sont identiquement vérifiées $\forall \widetilde{\boldsymbol{U}}_1$, $\forall \widetilde{\boldsymbol{U}}_2$; le tenseur $\widetilde{\boldsymbol{U}}_3$ peut être complété par tout couple de tenseurs uniaxiaux $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2\}$ tel que le triplet $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_3\}$ soit orthonormé.

A.8 En bref...

Pour les tenseurs du second ordre symétriques réels construits sur $\mathbb{V}_3$:

- on connaît l'expression des trois valeurs propres classées en fonction des composantes dans une base quelconque ;
- les valeurs propres étant connues on sait trouver les tenseurs uniaxiaux unitaires propres avec des formules tensorielles, donc valables dans tout base ;
- on peut construire une infinité de triplets d'invariants équivalents.

B

Fonctions isotropes

L'objectif de cette annexe est de trouver des listes d'invariants scalaires nécessaires et suffisantes pour représenter la liste des arguments tensoriels de fonctions réelles isotropes utiles en mécanique des milieux continus. Les tenseurs évoqués dans cette annexe se limitent donc à ceux de l'espace $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$ ($n = 3$). De nombreux auteurs (SMITH, SPENCER, WANG, BOEHLER et d'autres) ont publié des listes d'invariants pour les fonctions isotropes d'arguments tensoriels [(1)]. La plupart se sont focalisés sur la recherche d'invariants qu'ils qualifient « d'algébriques », c'est-à-dire dont l'expression en fonction des composantes sur une base (le plus souvent orthonormée) est un polynôme de composantes [(2)]. Les démonstrations publiées sont le plus souvent très laborieuses et compliquées à lire.

Dans cette annexe, on va trouver des listes d'invariants pour les fonctions réelles isotropes d'arguments tensoriels dans les cas utiles en mécanique des milieux continus, sans se préoccuper si ces invariants sont des polynômes de composantes ou non. On montrera au passage que ces listes ne sont pas uniques. Les démonstrations étant rédigées sur la base de raisonnements géométriques, elles fournissent de plus une interprétation géométrique des invariants de ces listes. On pourra noter au passage que ces démonstrations ne requièrent aucune propriété de continuité ou de dérivabilité de la fonction isotrope, on ne lui demande que la qualité d'être une fonction, c'est-à-dire une application $\mathbb{E} \to \mathbb{R}$ où $\mathbb{E}$ est un produit cartésien d'espaces de tenseurs.

B.1 Rotation d'un tenseur

Les fonctions scalaires isotropes ont des propriétés d'invariance par rotation de leurs arguments [définition (2.12) p. 58]. Dans cette section, on rappelle la signification de la rotation d'un tenseur d'ordre p par une rotation $\boldsymbol{Q}$.

Rappels – Une rotation $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_{3+}$ est un tenseur du second ordre orthogonal, c'est-à-dire tel que $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^\top = \boldsymbol{G}$ et de déterminant $+1$. *Dans un espace de dimension 3*, on sait identifier une rotation par un vecteur rotation $\boldsymbol{\omega} = \theta\, \widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ où $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ est un vecteur unitaire et où $\theta \in [0\,;\pi]$ est l'angle de la rotation [éq. (1.97), (1.98) et (1.99) p. 42].

(1) Un désaccord est apparu dans le cas de deux arguments tensoriels du second ordre symétriques : BOEHLER donne une liste de quatre invariants, d'autres auteurs soutenant (avec raison) que trois suffisent. Cette question est abordée en section B.5.3 [p. 112].

(2) La définition mathématiquement correcte des nombres algébriques est qu'ils sont des racines de polynômes à coefficients rationnels. La notion d'« algébricité » utilisée par ces auteurs n'est pas consistante : par exemple, dans une base quelconque, il est rare de pouvoir exprimer les valeurs propres par un polynôme de composantes, toutefois, il existe des bases (par exemple les bases propres) où les valeurs propres s'expriment comme des polynômes de composantes ; l'« algébricité » des valeurs propres dépendrait de la base !

La rotation par $\boldsymbol{Q}$ d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre p est un tenseur d'ordre p noté $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T})$. Son calcul dépend de l'ordre de tensorialité p :
- pour $p = 0$ (le tenseur est un scalaire x) : $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(x) = x$;
- pour $p = 1$ (le tenseur est un vecteur $\boldsymbol{v}$) : $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{v}$;
  il s'agit de la rotation classique du vecteur $\boldsymbol{v}$ autour de l'axe unitaire orienté $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ et d'angle $\theta[0;\pi]$;
- pour $p = 2$ (le tenseur $\boldsymbol{T}$ est d'ordre 2) : $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Q}^\top$;
  les tenseurs $\boldsymbol{T}$ et $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T})$ ont les mêmes valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T})$ sont les transformés par $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ des vecteurs propres de $\boldsymbol{T}$ [propriétés 1.86 p. 40].

Pour généraliser commodément aux rotations par $\boldsymbol{Q}$ de tenseurs d'ordres supérieurs à 2, on définit un nouveau produit tensoriel, noté $\boxtimes$, souvent appelé *produit tensoriel de Kronecker*. Ce produit n'opère que sur des tenseurs d'ordre 2 :

■ **Définition B.1 – Produit tensoriel de Kronecker.** Considérons deux tenseurs $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}$ d'ordre 2, le tenseur $\boldsymbol{T} \boxtimes \boldsymbol{U}$ est un tenseur d'ordre 4 défini par :

$$\boldsymbol{T} \boxtimes \boldsymbol{U} = T^i{}_m U^j{}_n \, (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes e^m \otimes e^n) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\boldsymbol{T} \boxtimes \boldsymbol{U})^{ij}{}_{mn} = T^i{}_m U^j{}_n$$

Cette définition montre que le produit tensoriel $\boldsymbol{T} \boxtimes \boldsymbol{U}$ n'est qu'une certaine transposition du produit tensoriel habituel $\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{U}$ de deux tenseurs du second ordre [section 1.3.5 p. 21] :

$$(\boldsymbol{T} \boxtimes \boldsymbol{U})^{ij}{}_{mn} = (\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{U})^i{}_m{}^j{}_n$$

On généralise sans difficulté au produit par $\boxtimes$ de plusieurs tenseurs du second ordre. Par exemple, le produit par $\boxtimes$ de trois tenseurs d'ordre 2 est un tenseur d'ordre 6 :

$$\boldsymbol{T} \boxtimes \boldsymbol{U} \boxtimes \boldsymbol{S} = T^i{}_m U^j{}_n S^k{}_p \, (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes e^m \otimes e^n \otimes \boldsymbol{e}^p)$$

dont les composantes sont :

$$(\boldsymbol{T} \boxtimes \boldsymbol{U} \boxtimes \boldsymbol{S})^{ijk}{}_{mnp} = T^i{}_m U^j{}_n S^k{}_p = (\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{U} \otimes \boldsymbol{S})^i{}_m{}^j{}_n{}^k{}_p$$

En utilisant le produit $\boxtimes$, on peut récrire la rotation d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre 2 sous la forme :

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{Q} \boxtimes \boldsymbol{Q}) : \boldsymbol{T} = Q^i{}_m Q^j{}_n T^{mn} \, (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$$

Démonstration – $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Q}^\top = Q^i{}_m T^{mn} Q^\top{}_n{}^j \, (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j) = Q^i{}_m T^{mn} Q^j{}_n \, (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j)$

La rotation par $\boldsymbol{Q}$ d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre 3 s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{Q} \boxtimes \boldsymbol{Q} \boxtimes \boldsymbol{Q}) \overline{\otimes}^3 \boldsymbol{T} &= (\boldsymbol{Q} \boxtimes \boldsymbol{Q} \boxtimes \boldsymbol{Q})^{ijk}{}_{mnp} T^{mnp} \, (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k) \\ &= Q^i{}_m Q^j{}_n Q^k{}_p T^{mnp} \, (\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k)\end{aligned}$$

et d'une manière générale, la rotation par $\boldsymbol{Q}$ d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre p s'écrit :

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}) = (\underbrace{\boldsymbol{Q} \boxtimes \cdots \boxtimes \boldsymbol{Q}}_{p\,\text{fois}}) \overline{\otimes}^p \boldsymbol{T} = \underbrace{Q^{i_1}{}_{j_1} \ldots Q^{i_p}{}_{j_p}}_{p\ \text{termes}} \, T^{j_1 \ldots j_p} \, (\boldsymbol{e}_{i_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{e}_{i_p}) \tag{B.1}$$

où $\overline{\otimes}^p$ est le produit contracté p fois.

■ **Règle B.2 – Construction des composantes d'un tenseur tourné par $\boldsymbol{Q}$.** Chaque indice de T est contracté avec le second indice d'un terme $Q^\bullet{}_\bullet$ pour les indices contravariants ou $Q_\bullet{}^\bullet$ pour les indices covariants, tout en respectant les règles de la convention d'Einstein.

Exemple B.3 – Les composantes d'un tenseur d'ordre quatre tourné par la rotation $\boldsymbol{Q}$ sont :

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T})^{pqrm} = Q^p{}_i\, Q^q{}_j\, Q^r{}_k\, Q^s{}_l\, T^{ijkl}$$
$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T})^{pq}{}_{rm} = Q^p{}_i\, Q^q{}_j\, Q_r{}^k\, Q_s{}^l\, T^{ij}{}_{kl}$$
$$\dots$$

B.2 Représentation des éléments d'un ensemble

- **Définition B.4 – Surjection.** On dit qu'une application $\mathbb{E} \to \mathbb{F}$ est une surjection si tous les éléments de $\mathbb{F}$ ont au moins un antécédent dans $\mathbb{E}$.

  Autrement dit, l'image de l'ensemble $\mathbb{E}$ par la surjection s est exactement l'ensemble $\mathbb{F}$.

  Remarque – Il est possible que des éléments de $\mathbb{F}$ aient plusieurs antécédents. Si tous les éléments de $\mathbb{F}$ n'ont qu'un seul antécédent, la surjection est une bijection.

- **Définition B.5 – Représentation d'un ensemble.** On dit que les éléments d'un ensemble $\mathbb{E}$ sont représentés par les éléments d'un ensemble $\mathbb{E}'$ s'il existe une surjection $s : \mathbb{E}' \to \mathbb{E}$.
  Soient $e \in \mathbb{E}$ et $e' \in \mathbb{E}'$. L'élément e' est appelé représentant de e si $e = s(e')$. L'ensemble $\{\mathbb{E}', s\}$ est appelé représentation de $\mathbb{E}$.

  Il existe en général beaucoup de représentations de $\mathbb{E}$, c'est-à-dire que l'on peut trouver un grand nombre de couples $\{\mathbb{E}', s\}$ où s est une surjection $\mathbb{E}' \to \mathbb{E}$.

  Dans la suite, l'ensemble $\mathbb{E}$ sera un produit cartésien de tenseurs :

  $$\mathbb{E} = \mathbb{V}_3^{\otimes p_1} \times \cdots \times \mathbb{V}_3^{\otimes p_n}$$

  avec $p_i \in \mathbb{N}$ et on cherchera des représentations de $\mathbb{E}$ telles que l'ensemble $\mathbb{E}'$ des représentants soit de la forme $\mathbb{E}' = \mathbb{R}^m \times \mathbb{Q}_{3+}$ où les éléments de $\mathbb{R}^m$ sont des scalaires invariants dans toute rotation des éléments de $\mathbb{E}$. L'intérêt d'une telle représentation des éléments de $\mathbb{E}$ apparaîtra lorsque la fonction $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ est une fonction isotrope [section B.6 p. 113].

- **Théorème B.6 – Composition des fonctions.** Soit une fonction $f : \mathbb{E} \to \mathbb{F}$. S'il existe une représentation $\{\mathbb{E}', s\}$ de $\mathbb{E}$, alors il existe une fonction $g = f \circ s : \mathbb{E}' \to \mathbb{F}$ telle que $g(e') = f(e)$ où $e' \in \mathbb{E}'$ et $e \in \mathbb{E}$.

  Démonstration – Pour que la fonction g existe, il suffit que s soit une surjection, c'est-à-dire que tous les éléments de $\mathbb{E}$ aient un antécédent dans l'application s.

  Dans cette annexe, on se limitera au cas particulier $\mathbb{F} = \mathbb{R}$:

  $$\mathbb{E}' \xrightarrow{s} \mathbb{E} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \text{ et } s \text{ surjective} \qquad \Rightarrow \qquad \exists\, g \text{ tel que } \mathbb{E}' \xrightarrow{g=f\circ s} \mathbb{R} \tag{B.2}$$

B.3 Représentation d'ensembles de vecteurs

B.3.1 Représentation de $\mathbb{V}_3$

Un vecteur $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_3$ peut être défini par sa norme ($r = \|\boldsymbol{v}\| \geqslant 0$) et un vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{v}}$. On a alors $\boldsymbol{v} = r\widetilde{\boldsymbol{v}}$ où $r \geqslant 0$ (pour les vecteurs nuls, $r = 0$ et $\widetilde{\boldsymbol{v}}$ est quelconque).

On note $\widetilde{\mathbb{V}}_3$ l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{V}_3$ et on note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels non négatifs.

- **Proposition B.7 –** L'application s' définie par :

$$(r,\widetilde{\boldsymbol{v}}) \in \mathbb{R}_+ \times \widetilde{\mathbb{V}}_3 \xrightarrow{s'} s'(r,\widetilde{\boldsymbol{v}}) = r\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_3$$

est une surjection.

Démonstration – Tout vecteur $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ a un module et une direction. Pour les vecteurs nuls, $r = 0$ et la direction unitaire est quelconque.

On définit ainsi une représentation (provisoire) $\{\mathbb{R}_+ \times \widetilde{\mathbb{V}}_3, s'\}$ de l'ensemble des vecteurs $\mathbb{V}_3$.

Une représentation de $\widetilde{\mathbb{V}}_3$

- **Proposition B.8 –** Soit $\widetilde{\boldsymbol{v}}_0$ un vecteur unitaire arbitraire. L'application s'' définie par :

$$\boldsymbol{R} \in \mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{s''} \widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_0$$

est une surjection.

Démonstration – $\forall \widetilde{\boldsymbol{v}} \in \widetilde{\mathbb{V}}_3$ il existe une infinité de rotations $\boldsymbol{R} \in \mathbb{Q}_{3+}$ qui font passer de $\widetilde{\boldsymbol{v}}_0$ à $\widetilde{\boldsymbol{v}}$. Toutes ces rotations ont leur axe dans le plan bissecteur de $(\widetilde{\boldsymbol{v}}_0, \widetilde{\boldsymbol{v}})$ et sont d'angles différents. Par exemple, il existe une rotation d'angle π dont l'axe $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}$ est la bissectrice unitaire : $\widetilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{v}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}}{\|\widetilde{\boldsymbol{v}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}\|}$. Quoiqu'il en soit, une unicité n'est pas nécessaire : quel que soit le vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{v}}_0$ choisi, l'ensemble $\mathbb{Q}_{3+}$ engendre bien l'ensemble des vecteurs unitaires.

Une représentation de $\widetilde{\mathbb{V}}_3$ est donc l'ensemble $\{\mathbb{Q}_{3+}, s''\}$ où la surjection s'' est définie par :

$$\boldsymbol{R} \in \mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{s''} s''(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_0 = \widetilde{\boldsymbol{v}} \in \widetilde{\mathbb{V}}_3 \tag{B.3}$$

où $\boldsymbol{v}_0$ est un vecteur unitaire quelconque.

Les deux surjections s' et s'' précédentes permettent de construire une nouvelle représentation $\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Q}_{3+}, s\}$ de $\mathbb{V}_3$ où la surjection s est définie par :

$$(r,\boldsymbol{R}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{s} s(r,\boldsymbol{R}) = s'(r, s''(\boldsymbol{R})) = s'(r, \boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_0) = r\,\boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{v}}_0 = r\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_3$$

où le réel $r = \|\boldsymbol{v}\|$ est invariant par toute rotation $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ du vecteur $\boldsymbol{v}$ car $\|\boldsymbol{v}\| = \|\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{v})\|, \forall \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_{3+}$.

Application aux fonctions isotropes $\mathbb{V}_3 \to \mathbb{R}$

Afin d'illustrer l'intérêt de la représentation $\{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{Q}_{3+}, s\}$ de l'ensemble des vecteurs $\mathbb{V}_3$ construite précédemment, on considère une fonction f définie par :

$$\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}_3 \xrightarrow{f} f(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$$

Le théorème (B.6) [p. 105], permet d'affirmer l'existence d'une fonction $g = f \circ s$ telle que :

$$(r,\boldsymbol{R}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{g} g(r,\boldsymbol{R}) = f(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}$$

Si la fonction f est isotrope, c'est-à-dire si $f(\boldsymbol{v}) = f(\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{v}))$, $\forall \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_{3+}$, alors on peut écrire :

$$g(r,\boldsymbol{R}) = f(\boldsymbol{v}) = f(\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{v})) = g(\|\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{v})\|, \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{R})) = g(r, \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q}^\top), \quad \forall \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_{3+} \tag{B.4}$$

Or le tenseur $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{Q}^\top$ est une rotation. La condition $\forall\boldsymbol{Q}$ implique que la rotation $\boldsymbol{R}'$ est quelconque. L'égalité B.4 s'écrit donc encore :

$$g(r,\boldsymbol{R}) = g(r,\boldsymbol{R}'), \quad \forall\boldsymbol{R}'$$

ce qui signifie que la fonction g est insensible à son second argument. On en déduit le résultat suivant :

$$f : \mathbb{V}_3 \to \mathbb{R} \text{ isotrope} \qquad \Rightarrow \qquad \exists g \text{ tel que } f(\boldsymbol{v}) = g(\|\boldsymbol{v}\|)$$

Autrement dit, si une fonction $f : \mathbb{V}_3 \to \mathbb{R}$ est isotrope, alors elle n'est fonction que de $\|\boldsymbol{v}\|$.

Remarque B.1 – Il est possible de démontrer ce résultat par d'autres voies, mais qui demandent en général à l'application f de posséder des propriétés supplémentaires de continuité ou de différentiabilité. La démonstration proposée ici est particulièrement économique : elle ne demande à f que d'être une application et il n'est nullement nécessaire d'invoquer une base pour donner des composantes à l'argument $\boldsymbol{v}$ de f.

Le raisonnement qui a abouti à ce résultat va servir de modèle pour tous les résultats qui suivent. Pour chaque ensemble d'arguments de la fonction f il suffira de trouver une représentation de la forme $\{\mathbb{R}^m \times \mathbb{Q}_{3+}, s\}$ telle que les m réels de $\mathbb{R}^m$ soient invariants dans toute rotation $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ des arguments de f.

B.3.2 Représentation de $\widetilde{\mathbb{V}}_3 \times \widetilde{\mathbb{V}}_3$

Soit un couple de vecteurs unitaires $\{\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}}\}$. On note $\alpha = \mathrm{Arccos}(\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}) \in [0;\pi]$ leur angle non orienté [(3)].

Soit $\mathscr{P}_0$ un plan arbitraire dans lequel on choisit un vecteur unitaire arbitraire $\widetilde{\boldsymbol{u}}_0$. Dans ce plan on construit tous les vecteurs $\widetilde{\boldsymbol{v}}_0^\alpha$ qui font un angle $\alpha \in [0;\pi]$ avec $\widetilde{\boldsymbol{u}}_0$.

- **Proposition B.9 –** Il existe une rotation $\boldsymbol{R} \in \mathbb{Q}_{3+}$ telle que $\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{R}\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}_0$ et $\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{R}\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}_0^\alpha$.

Démonstration – Soit un couple quelconque de vecteurs unitaires $\{\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}}\}$ d'angle $\alpha \in [0;\pi]$. On construit la rotation $\boldsymbol{R}$ en deux étapes :

1. Il existe une rotation $\boldsymbol{R}_1$, d'angle π, telle que $\widetilde{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{R}_1\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}_0$. Son axe $\boldsymbol{w}_1$ est la bissectrice unitaire de $(\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{\boldsymbol{u}})$: $\widetilde{\boldsymbol{w}}_1 = \frac{\widetilde{\boldsymbol{u}}_0+\widetilde{\boldsymbol{u}}}{\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_0+\widetilde{\boldsymbol{u}}\|}$. Cette rotation transforme le vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{v}}_0^\alpha$ en le vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{v}}_{01}^\alpha = \boldsymbol{R}_1\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}_0^\alpha$. Les rotations conservant les angles, on a les égalités d'angles :
$$\alpha = (\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{\boldsymbol{v}}_0^\alpha) = (\boldsymbol{R}_1\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}_0\,,\boldsymbol{R}_1\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}_0^\alpha) = (\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}}_{01}^\alpha)$$
2. Il existe une rotation $\boldsymbol{R}_2$ d'axe $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ qui laisse $\widetilde{\boldsymbol{u}}$ invariant et telle que $\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{R}_2\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}_{01}^\alpha$ car $\alpha = (\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}}_{01}^\alpha) = (\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}})$.

La rotation $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_2\cdot\boldsymbol{R}_1$ transforme donc le couple $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\widetilde{\boldsymbol{v}}_0^\alpha\}$ en le couple $\{\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}}\}$.

On a ainsi construit une surjection s telle que :

$$(\alpha,\boldsymbol{R}) \in [0;\pi]\times\mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{s} s(\alpha,\boldsymbol{R}) = \{\boldsymbol{R}\cdot\widetilde{\boldsymbol{u}}_0,\boldsymbol{R}\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}_0^\alpha\} = \{\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}}\} \in \widetilde{\mathbb{V}}_3\times\widetilde{\mathbb{V}}_3 \tag{B.5}$$

L'ensemble $\{[0;\pi]\times\mathbb{Q}_{3+},s\}$ est donc une représentation de $\widetilde{\mathbb{V}}_3\times\widetilde{\mathbb{V}}_3$, où le réel $\alpha \in [0;\pi]$ est bien invariant dans toute rotation $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ du couple de vecteurs unitaires $\{\widetilde{\boldsymbol{u}},\widetilde{\boldsymbol{v}}\}$, car

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\widetilde{\boldsymbol{u}})\cdot\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\widetilde{\boldsymbol{v}}), \quad \forall\boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_{3+} \qquad \text{[éq. (1.79) p. 41]}$$

(3) Il n'est pas possible de donner un signe à l'angle entre deux vecteurs de $\mathbb{V}_3$; $\alpha \in [0;\pi]$ est entièrement défini par son cosinus.

B.3.3 Représentation de $\widetilde{\mathbb{V}}_3 \times \widetilde{\mathbb{V}}_3 \times \widetilde{\mathbb{V}}_3$

Soit un triplet de vecteurs unitaires $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \widetilde{\boldsymbol{u}}_2, \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\}$. On définit les quatre réels :

$$\begin{aligned} &\alpha_{12} = \mathrm{Arccos}(\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_2) \quad ; \quad \alpha_{23} = \mathrm{Arccos}(\widetilde{\boldsymbol{u}}_2 \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_3) \quad ; \quad \alpha_{31} = \mathrm{Arccos}(\widetilde{\boldsymbol{u}}_3 \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_1) \\ &\varepsilon = \mathrm{sgn}[\widetilde{\boldsymbol{u}}_2, \widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \widetilde{\boldsymbol{u}}_3] \quad \text{(signe du produit mixte)} \end{aligned} \tag{B.6}$$

Les trois angles α_{12}, α_{23} et α_{31} sont dans l'intervalle $[0;\pi]$, et $\varepsilon = \pm 1$. On construit trois vecteurs unitaires $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_{01}, \widetilde{\boldsymbol{u}}_{02}, \widetilde{\boldsymbol{u}}_{03}\}$ de la manière suivante :
- on choisit arbitrairement un vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{01}$;
- on choisit arbitrairement un vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{02}$ qui fait un angle α_{12} avec $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{01}$ (il en existe une infinité) ;
- on construit un vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{03}$ qui fait un angle α_{31} avec $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{01}$ et un angle α_{23} avec $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{02}$ (il en existe deux, symétriques par rapport au plan $(\widetilde{\boldsymbol{u}}_{01}, \widetilde{\boldsymbol{u}}_{02})$) ;
- le signe ε du produit mixte permet de choisir $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{03}$ unique.

■ **Proposition B.10 –** Il existe une rotation $\boldsymbol{R} \in \mathbb{Q}_{3+}$ telle que $\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 = \boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_{01}$, $\widetilde{\boldsymbol{u}}_2 = \boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_{02}$ et $\widetilde{\boldsymbol{u}}_3 = \boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_{03}$.

Démonstration – On sait de la démonstration précédente qu'il existe une rotation $\boldsymbol{R}$ qui transforme le couple $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_{01}, \widetilde{\boldsymbol{u}}_{02}\}$ en le couple $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \widetilde{\boldsymbol{u}}_2\}$. Cette rotation transforme aussi le vecteur $\widetilde{\boldsymbol{u}}_{03}$ en le vecteur $\widetilde{\boldsymbol{u}}_3$, car toute rotation conserve les angles α_{31} et α_{23} ainsi que le signe du produit mixte ε [éq. 1.81 p. 41].

On a ainsi construit une surjection s telle que :

$$\begin{aligned} (\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \varepsilon, \boldsymbol{R}) \in [0;\pi]^3 \times [\pm 1] \times \mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{s} s(\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \varepsilon, \boldsymbol{R}) &= \{\boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_{01}, \boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_{02}, \boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_{03}\} \\ &= \{\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \widetilde{\boldsymbol{u}}_2, \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\} \in \widetilde{\mathbb{V}}_3^3 \end{aligned}$$

L'ensemble $\{[0;\pi]^3 \times [\pm 1] \times \mathbb{Q}_{3+}, s\}$ est donc une représentation de $\widetilde{\mathbb{V}}_3 \times \widetilde{\mathbb{V}}_3 \times \widetilde{\mathbb{V}}_3$ où les quatre réels α_{12}, α_{23}, α_{31} et ε définis en (B.6) sont invariants dans toute rotation $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ du triplet de vecteurs unitaires $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \widetilde{\boldsymbol{u}}_2, \widetilde{\boldsymbol{u}}_3\}$.

B.3.4 Représentation de $\widetilde{\mathbb{V}}_3{}^n$

Comme on l'aura compris avec les exemples précédents, les réels invariants par $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ nécessaires et suffisants pour représenter un n-uplet de vecteurs unitaires sont les angles et les signes des produits mixtes permettant de reconstruire sans ambiguïté la position relative des n vecteurs et on complète la représentation par une rotation. Pour chaque vecteur unitaire $\widetilde{\boldsymbol{u}}_i$ de numéro $i > 3$, il faut donc ajouter, par exemple, les deux angles $\alpha_{1i} = \mathrm{Arccos}(\widetilde{\boldsymbol{u}}_1 \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_i)$ et $\alpha_{2i} = \mathrm{Arccos}(\widetilde{\boldsymbol{u}}_2 \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_i)$, ainsi que le signe du produit mixte $\varepsilon_{12i} = \mathrm{sgn}[\widetilde{\boldsymbol{u}}_1, \widetilde{\boldsymbol{u}}_2, \widetilde{\boldsymbol{u}}_i]$. Une représentation de n vecteurs unitaires est donc :

$$\{\alpha_{12}, \alpha_{23}, \alpha_{31}, \varepsilon_{123}, \cdots, (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \varepsilon_{12j}), \cdots, \boldsymbol{R}\}, \quad 3 < j \leqslant n$$

où $\alpha_{pq} = \mathrm{Arccos}(\widetilde{\boldsymbol{u}}_p \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_q \in [0;\pi]$ et $\varepsilon_{pqr} = \mathrm{sgn}[\widetilde{\boldsymbol{u}}_p, \widetilde{\boldsymbol{u}}_q, \widetilde{\boldsymbol{u}}_r] = \pm 1$.

Remarques – Le groupe $(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \varepsilon_{12j})$ peut être remplacé par $(\alpha_{2j}, \alpha_{3j}, \varepsilon_{23j})$ ou par $(\alpha_{pj}, \alpha_{qj}, \varepsilon_{pqj})$ avec $p < j$ et $q < j$. Par ailleurs, on verra dans la section B.4 [p. 109] que les signes des produits mixtes disparaissent de la liste des représentants si les vecteurs unitaires sont remplacés par des directions non orientées.

B.3.5 Représentation de $\mathbb{V}_3{}^n$

En conséquence de ce qui précède, un n-uplet de vecteurs quelconques est représentable par la liste des n réels non négatifs représentant les normes, complétée par la représentation des n vecteurs unitaires comme précisé dans les deux sections précédentes. En résumé :

– un vecteur :

$$(r,\boldsymbol{R}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Q}_{3+}$$

– deux vecteurs :

$$(r_1, r_2, \alpha_{12}, \boldsymbol{R}) \in \mathbb{R}_+^2 \times [0;\pi] \times \mathbb{Q}_{3+}$$

– trois vecteurs :

$$(r_1, r_2, r_3, \alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \varepsilon_{123}, \boldsymbol{R}) \in \mathbb{R}_+^3 \times [0;\pi]^3 \times [\pm 1] \times \mathbb{Q}_{3+}$$

– quatre vecteurs :

$$(r_1, r_2, r_3, r_4, \alpha_{12}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{41}, \alpha_{42}, \varepsilon_{123}, \varepsilon_{124}, \boldsymbol{R}) \in \mathbb{R}_+^4 \times [0;\pi]^5 \times [\pm 1]^2 \times \mathbb{Q}_{3+} \ ;$$

– $n > 3$ vecteurs :

$$(r_1, \cdots, r_n, \alpha_{12}, ((\alpha_{31}, \alpha_{32}), \cdots, (\alpha_{n1}, \alpha_{n2})), (\varepsilon_{312}, \cdots, \varepsilon_{n12}), \boldsymbol{R})$$
$$\in \mathbb{R}_+{}^n \times [0;\pi]^{1+2(n-2)} \times [\pm 1]^{n-2} \times \mathbb{Q}_{3+} \ ;$$

où $r_i = \|\boldsymbol{u}_i\|$, $\alpha_{ij} = \text{Arccos}\,\frac{\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j}{r_i r_j} \in [0;\pi]$ et $\varepsilon_{ijk} = \text{sgn}[\boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k] = \pm 1$. Comme précédemment, les réels r_i, les angles α_{ij} ainsi que les signes ε_{ijk} sont invariants dans toute rotation $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ du n-uplet de vecteurs.

Remarque B.2 – *Les représentations proposées ne sont pas uniques* ; par exemple, l'orientation relative du vecteur $\boldsymbol{v}_4$ par rapport aux vecteurs précédents peut être précisée avec les angles α_{24} et α_{34} complétés du signe ε_{234}. Par ailleurs, les angles α_{ij} peuvent être remplacés par leur cosinus ou par les produits scalaires $\boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j$, car on a les bijections $\{r_i, r_j, \alpha_{ij}\} \leftrightarrow \{r_i, r_j, \boldsymbol{u}_i \cdot \boldsymbol{u}_j\}$.

B.4 Représentation de directions non orientées

En mécanique des milieux continus, on aura à considérer des fonctions de directions de l'espace non orientées, comme par exemple des directions d'anisotropie de la matière. On a vu en section 1.6.15 [p. 44] que les directions de l'espace sont représentées bijectivement par les tenseurs uniaxiaux unitaires [théorème 1.98 p. 45]. On note $\widetilde{\mathbb{U}}$ l'ensemble des tenseurs uniaxiaux unitaires.

B.4.1 Représentation de $\widetilde{\mathbb{U}}$

Les tenseurs uniaxiaux unitaires $\widetilde{\boldsymbol{U}} \in \widetilde{\mathbb{U}}$ sont représentables par les vecteurs unitaires $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \widetilde{\mathbb{V}}_3$ par la surjection $\widetilde{\boldsymbol{u}} \to \widetilde{\boldsymbol{u}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}$. Les vecteurs unitaires $\widetilde{\boldsymbol{u}} \in \widetilde{\mathbb{V}}$ sont représentables par les rotations $\boldsymbol{R} \in \mathbb{Q}_{3+}$ [éq. (B.3) p. 106]. On en déduit qu'une représentation des directions non orientées de l'espace est donc $\{\mathbb{Q}_{3+}, s\}$ où s est la surjection définie par :

$$\boldsymbol{R} \in \mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{s} s(\boldsymbol{R}) = (\boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_0) \otimes (\boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_0) = (\boldsymbol{R} \boxtimes \boldsymbol{R}) : (\widetilde{\boldsymbol{u}}_0 \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}_0) = (\boldsymbol{R} \boxtimes \boldsymbol{R}) : \widetilde{\boldsymbol{U}}_0 = \widetilde{\boldsymbol{U}} \in \widetilde{\mathbb{U}}$$

L'ensemble $\{\mathbb{Q}_{3+}, s\}$ est donc une représentation des directions de l'espace.

B.4.2 Représentation de $\widetilde{\mathbb{U}}^2$

Un couple de tenseurs uniaxiaux $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1,\widetilde{\boldsymbol{U}}_2\}$ est représenté par un couple de vecteurs unitaires par la surjection $(\widetilde{\boldsymbol{u}}_1,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2) \to (\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}_1,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}_2)$; d'autre part, le couple de vecteurs unitaires $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_1,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2\}$ est représenté par une surjection $(\alpha,\boldsymbol{R}) \to (\widetilde{\boldsymbol{u}}_1,\widetilde{\boldsymbol{u}}_2)$ [éq. (B.5) p. 107]. On construit ainsi une surjection $(\alpha,\boldsymbol{R}) \to (\widetilde{\boldsymbol{U}}_1,\widetilde{\boldsymbol{U}}_2)$. De plus, dans le cas de directions (donc non orientées), on peut réduire l'espace des représentants $\{\alpha,\boldsymbol{R}\}$ à $[0,\frac{\pi}{2}]\times\mathbb{Q}_{3+}$, car l'angle géométrique entre deux directions de l'espace est dans l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$ [remarque 1.6.15 p. 46]. Une représentation d'un couple de directions non orientées est donc $\{[0,\frac{\pi}{2}]\times\mathbb{Q}_{3+},s\}$ où s est la surjection définie par :

$$(\beta,\boldsymbol{R}) \in [0,\tfrac{\pi}{2}]\times\mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{s} (\widetilde{\boldsymbol{U}}_1,\widetilde{\boldsymbol{U}}_2) \in \widetilde{\mathbb{U}}^2$$

où l'angle $\beta = \operatorname{Arccos}\sqrt{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1 : \widetilde{\boldsymbol{U}}_2}$ est invariant par toute rotation $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ du couple $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1,\widetilde{\boldsymbol{U}}_2\}$.

B.4.3 Représentation de $\widetilde{\mathbb{U}}^n$

Un n-uplet de directions non orientées est représenté par un n-uplet de vecteurs unitaires par la surjection $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{u}}_n\} \to \{\widetilde{\boldsymbol{u}}_1\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{u}}_n\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}_n\}$. Cependant, contrairement aux n-uplet de vecteurs unitaires, les produits mixtes ε_{ijk} peuvent prendre un signe quelconque car on peut peut remplacer $\widetilde{\boldsymbol{u}}_i$ par $-\widetilde{\boldsymbol{u}}_i$ sans changer la direction $\boldsymbol{U}_i$. Leur valeur étant indifférente, ils ne font donc plus partie des arguments de la surjection. Une représentation d'un n-uplet de directions non orientées est donc (par exemple) $\{[0,\frac{\pi}{2}]^{3+2(n-3)}\times\mathbb{Q}_{3+},s\}$ où s est la surjection définie par :

$$(\beta_{12},\beta_{23},\beta_{31},(\beta_{41},\beta_{42}),\cdots,(\beta_{n1},\beta_{n2}),\ \boldsymbol{R}) \in [0,\tfrac{\pi}{2}]^{3+2(n-3)}\times\mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{s} \{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{U}}_n\} \in \widetilde{\mathbb{U}}^n \tag{B.7}$$

où les angles $\beta_{ij} = \operatorname{Arccos}\sqrt{\widetilde{\boldsymbol{U}}_i : \widetilde{\boldsymbol{U}}_j} \in [0;\frac{\pi}{2}]$ sont invariants dans toute rotation du n-uplet de directions $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1,\ldots,\widetilde{\boldsymbol{U}}_n\}$. Comme pour les vecteurs, on peut remplacer les angles $\beta_{ij} \in [0;\frac{\pi}{2}]$ par leur cosinus ($\cos\beta_{ij} \in [0;1]$) ou par les produits scalaires $\widetilde{\boldsymbol{U}}_i : \widetilde{\boldsymbol{U}}_j = \cos^2\beta_{ij} \in [0;1]$.

B.5 Représentation de tenseurs réels du second ordre symétriques

Tout tenseur $\boldsymbol{S}$ réel du second ordre symétrique construit sur $\mathbb{V}_3$ peut s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\widetilde{\boldsymbol{u}}_i\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}_i = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\widetilde{\boldsymbol{U}}_i \tag{B.8}$$

où :
- les réels $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3$ sont les valeurs propres classées ;
- les vecteurs $\{\widetilde{\boldsymbol{u}}_i\}$ sont une base propre orthonormée que l'on peut toujours choisir directe ;
- les tenseurs $\widetilde{\boldsymbol{U}}_i = \widetilde{\boldsymbol{u}}_i\otimes\widetilde{\boldsymbol{u}}_i$ sont des tenseurs uniaxiaux unitaires propres qui représentent la direction propre (non orientée) associée à la valeur propre λ_i. Le tenseur $\boldsymbol{S}$ étant symétrique, les tenseurs uniaxiaux $\widetilde{\boldsymbol{U}}_i$ sont orthonormés [propriété 1.99 p. 45].

On notera $\mathbb{S}$ l'ensemble des tenseurs réels symétriques du second ordre.

B.5.1 Représentation de $\mathbb{S}$

On déduit de l'équation (B.8) qu'une représentation (provisoire) de $\mathbb{S}$ est $\{\mathbb{R}^3 \times \widetilde{\mathbb{U}}^3, s'\}$ où s' est la surjection définie par :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \widetilde{\boldsymbol{U}}_1, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_3) \in \mathbb{R}^3 \times \widetilde{\mathbb{U}}^3 \xrightarrow{s'} s'(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \widetilde{\boldsymbol{U}}_1, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_3) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \widetilde{\boldsymbol{U}}_i \in \mathbb{S}$$

où les trois directions $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1$, $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2$ et $\widetilde{\boldsymbol{U}}_3$ sont orthonormées.

On a montré en (B.7) page 110 qu'un représentant d'un triplet de tenseurs uniaxiaux $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_3\}$ est $\{\beta_{12}, \beta_{31}, \beta_{32}, \boldsymbol{R}\}$ où les β_{ij} sont ici des constantes égales à $\frac{\pi}{2}$. Le représentant du triplet de directions orthogonales se réduit donc à une rotation $\boldsymbol{R}$. Une représentation de $\mathbb{S}$ est donc $\{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Q}_{3+}, s\}$ où s est la surjection définie par :

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \boldsymbol{R}\} \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Q} \xrightarrow{s} s(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \boldsymbol{R}) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{R} \cdot \widetilde{\boldsymbol{U}}_{0i} \cdot \boldsymbol{R}^\top = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \widetilde{\boldsymbol{U}}_i \in \mathbb{S} \tag{B.9}$$

où les $\widetilde{\boldsymbol{U}}_{0i}$ sont un triplet de directions orthonormées quelconque, et où les réels λ_1, λ_2 et λ_3 sont invariants dans toute rotation $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ de $\boldsymbol{S}$ [propriété 1.86 p. 40].

Remarques B.3 –

1. La surjection trouvée ici n'est jamais une bijection : quand les valeurs propres sont distinctes, il existe quatre rotations $\boldsymbol{R}$ différentes qui tranforment le triplet $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_{0i}\}$ en le triplet $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_i\}$. Quand les valeurs propres ne sont pas toutes distinctes il en existe une infinité.
2. Le triplet des valeurs propres classées $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ peut être bijectivement représenté par d'autres triplets d'invariants équivalents [section A.6 p. 99].

B.5.2 Représentation de $\mathbb{S} \times \widetilde{\mathbb{U}}$

Soit un tenseur symétrique du second ordre $\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \widetilde{\boldsymbol{U}}_i$ et soit une direction non orientée définie par le tenseur uniaxial unitaire $\widetilde{\boldsymbol{V}} = \widetilde{\boldsymbol{v}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{v}} \in \widetilde{\mathbb{U}}$. Une représentation provisoire de l'ensemble $\mathbb{S} \times \widetilde{\mathbb{U}}$ est $\{\mathbb{R}^3 \times \widetilde{\mathbb{U}}^4, s'\}$ où s' est la surjection définie par :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \widetilde{\boldsymbol{U}}_1, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_3, \widetilde{\boldsymbol{V}}) \in \mathbb{R}^3 \times \widetilde{\mathbb{U}}^4 \xrightarrow{s'} \{\boldsymbol{S}, \widetilde{\boldsymbol{V}}\} \in \mathbb{S} \times \widetilde{\mathbb{U}}$$

Les quatre directions $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_1, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2, \widetilde{\boldsymbol{U}}_3, \widetilde{\boldsymbol{V}}\}$ peuvent être représentées par l'ensemble $\{\beta_{1V}, \beta_{2V}, \boldsymbol{R}\}$ [4] où $\beta_{1V} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ est l'angle $(\widetilde{\boldsymbol{V}}, \widetilde{\boldsymbol{U}}_1)$ et $\beta_{2V} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ est l'angle $(\widetilde{\boldsymbol{V}}, \widetilde{\boldsymbol{U}}_2)$ [éq. (B.7) p. 110]. Une représentation de $\mathbb{S} \times \widetilde{\mathbb{U}}$ est donc $\{\mathbb{R}^3 \times [0, \frac{\pi}{2}]^2 \times \mathbb{Q}_{3+}, s\}$ ou s est la surjection définie par :

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \beta_{1V}, \beta_{2V}, \boldsymbol{R}\} \in \mathbb{R}^3 \times [0, \tfrac{\pi}{2}]^2 \times \mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{s} \{\sum_{i=1}^{3} \lambda_i \widetilde{\boldsymbol{U}}_i, \widetilde{\boldsymbol{V}}\} \in \mathbb{S} \times \widetilde{\mathbb{U}} \tag{B.10}$$

Les deux angles β_{1V} et β_{2V} peuvent être remplacés leur cosinus ou les produits scalaires $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1 : \widetilde{\boldsymbol{V}}$ et $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2 : \widetilde{\boldsymbol{V}}$.

Remarque B.4 – La proposition de J. P. BOELHER [5] pour les invariants propres à $\boldsymbol{S}$ sont les invariants fondamentaux S_{I}, S_{II} et S_{III} alors qu'ici on propose les trois valeurs propres. On a montré en

[4] Les angles β_{12}, β_{13} et β_{23} sont des angles droits.
[5] Voir la référence d'article dans la note 9 [p. 113].

annexe A.6 [p. 99] l'équivalence entre les deux systèmes d'invariants : $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\} \leftrightarrow \{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}}\}$. Pour les invariants « croisés » [(6)], sa proposition est le couple $\{\boldsymbol{S}:\widetilde{\boldsymbol{V}},\boldsymbol{S}^2:\widetilde{\boldsymbol{V}}\}$. En utilisant les expressions tensorielles des directions propres données en (A.11) et suivantes [p. 100], et en faisant le produit scalaire avec $\widetilde{\boldsymbol{V}}$, il vient :

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,(\lambda_1-\lambda_3)\,(\widetilde{\boldsymbol{U}}_1:\widetilde{\boldsymbol{V}}) = (\boldsymbol{S}^2:\widetilde{\boldsymbol{V}}) - (\lambda_2+\lambda_3)\,(\boldsymbol{S}:\widetilde{\boldsymbol{V}}) + \lambda_2\,\lambda_3$$
$$(\lambda_2-\lambda_3)\,(\lambda_2-\lambda_1)\,(\widetilde{\boldsymbol{U}_2}:\widetilde{\boldsymbol{V}}) = (\boldsymbol{S}^2:\widetilde{\boldsymbol{V}}) - (\lambda_3+\lambda_1)\,(\boldsymbol{S}:\widetilde{\boldsymbol{V}}) + \lambda_3\,\lambda_1$$

Ces formules montrent que des combinaisons des deux invariants croisés proposés par BOEHLER avec les invariants de $\boldsymbol{S}$ (ici les valeurs propres) permettent de déterminer le carré des cosinus des angles β_{1V} et β_{2V} de la direction $\widetilde{\boldsymbol{V}}$ avec les directions propres $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1$ et $\widetilde{\boldsymbol{U}}_2$ de $\boldsymbol{S}$. Les deux invariants proposés par BOEHLER traduisent donc d'une certaine manière l'orientation de la direction $\widetilde{\boldsymbol{V}}$ par rapport aux directions propres de $\boldsymbol{S}$. Les deux systèmes d'invariants $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\beta_{1V},\beta_{2V}\}$ et $\{S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}},\boldsymbol{S}:\widetilde{\boldsymbol{V}},\boldsymbol{S}^2:\widetilde{\boldsymbol{V}}\}$ sont donc équivalents.

On montrerait de même qu'une représentation de $\{\mathbb{S}\times\widetilde{\mathbb{V}}^n\}$ [(7)] est donnée par la surjection :

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,(\beta_{1V_1},\beta_{2V_1}),\cdots,(\beta_{1V_n},\beta_{2V_n}),\boldsymbol{R}\} \xrightarrow{s} \{\boldsymbol{S},\widetilde{\boldsymbol{V}}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{V}}_n\} \tag{B.11}$$

B.5.3 Représentation de $\mathbb{S}^2$

Considérons un couple de tenseurs symétriques $\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}'\}\in\mathbb{S}^2$:

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3}\lambda_i\widetilde{\boldsymbol{U}}_i \quad ; \quad \boldsymbol{S}' = \sum_{j=1}^{3}\lambda'_j\widetilde{\boldsymbol{U}}'_j$$

Une représentation provisoire de $\mathbb{S}^2$ est obtenue avec la surjection s' définie par :

$$s'(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda'_1,\lambda'_2,\lambda'_3,\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_i\},\{\widetilde{\boldsymbol{U}}'_i\}) = \{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\widetilde{\boldsymbol{U}}_i\,,\,\sum_{j=1}^{3}\lambda'_j\widetilde{\boldsymbol{U}}'_j\}$$

Pour construire une représentation du couple de triplets orthonormés $\{\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_i\},\{\widetilde{\boldsymbol{U}}'_j\}\}$, on peut procéder de la manière suivante :

1. on choisit un triplet de directions orthonormées arbitraire $\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_{0i}\}$;
2. on construit $\widetilde{\boldsymbol{U}}'_{01}$ déterminé par les deux angles $\beta_{1'1}=(\widetilde{\boldsymbol{U}}'_{01},\widetilde{\boldsymbol{U}}_{01})$ et $\beta_{1'2}=(\widetilde{\boldsymbol{U}}'_{01},\widetilde{\boldsymbol{U}}_{02})$ (deux possibilités) ;
3. on construit $\widetilde{\boldsymbol{U}}'_{03}\perp\widetilde{\boldsymbol{U}}'_{01}$ déterminé par l'angle $\beta_{3'3}=(\widetilde{\boldsymbol{U}}'_{03},\widetilde{\boldsymbol{U}}_{03})$;
4. la direction $\widetilde{\boldsymbol{U}}'_{02}$ est alors déterminée.

Par ce procédé (il en existe d'autres [(8)]), les deux couples de trièdres orthonormés $\{\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_i\},\{\widetilde{\boldsymbol{U}}'_j\}\}$ et $\{\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_{0i}\},\{\widetilde{\boldsymbol{U}}'_{0j}\}\}$ ont les mêmes positions relatives et il existe une rotation $\boldsymbol{R}$ qui passe du couple $\{\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_{0i}\},\{\widetilde{\boldsymbol{U}}'_{0j}\}\}$ au couple $\{\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_i\},\{\widetilde{\boldsymbol{U}}'_j\}\}$ sans changer les positions relatives. On a donc construit une surjection s'' définie par :

$$\{\beta_{1'1},\beta_{1'2},\beta_{3'3},\boldsymbol{R}\} \xrightarrow{s''} \{\{\widetilde{\boldsymbol{U}}_i\},\{\widetilde{\boldsymbol{U}}'_j\}\} \quad \text{où } \widetilde{\boldsymbol{U}}_i=\boldsymbol{R}\cdot\widetilde{\boldsymbol{U}}_{0i}\cdot\boldsymbol{R}^\top \text{ et } \widetilde{\boldsymbol{U}}'_j=\boldsymbol{R}\cdot\widetilde{\boldsymbol{U}}'_{0j}\cdot\boldsymbol{R}^\top$$

(6) C'est-à-dire qui combinent le tenseur $\boldsymbol{S}$ et la direction $\widetilde{\boldsymbol{V}}$.

(7) En mécanique des milieux continus, c'est utile pour des directions d'anisotropie multiples.

(8) En effet, il y a plusieurs manières de situer un trièdre par rapport à un autre avec trois angles ; par exemple, les angles d'Euler (précession, nutation, rotation propre), les angles de navigation (roulis, tangage, lacet), etc. Quelle que soit la méthode, il faut toujours trois paramètres.

Une représentation de $\mathbb{S}^2$ est donc $\{\mathbb{R}^6 \times [0, \frac{\pi}{2}]^3 \times \mathbb{Q}_{3+}, s\}$, où s est la surjection définie par :

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,\ \lambda_1', \lambda_2', \lambda_3',\ \beta_{1'1}, \beta_{1'2}, \beta_{3'3},\ \boldsymbol{R}\} \ \in \mathbb{R}^6 \times [0, \tfrac{\pi}{2}]^3 \times \mathbb{Q}_{3+} \xrightarrow{s} \{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}'\} \in \mathbb{S}^2 \tag{B.12}$$

Les réels $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3,\ \ \lambda_1', \lambda_2', \lambda_3',\ \ \beta_{1'1}, \beta_{1'2}, \beta_{3'3}\}$ sont invariants dans toute rotation $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ du couple $\{\boldsymbol{S}, \boldsymbol{S}'\}$. Les trois angles $\beta_{1'1}$, $\beta_{1'2}$ et $\beta_{3'3}$ peuvent être remplacés par leur cosinus ou des produits scalaires de tenseurs uniaxiaux :

$$\cos^2 \beta_{1'1} = \widetilde{\boldsymbol{U}}_1' : \widetilde{\boldsymbol{U}}_1 \quad ; \quad \cos^2 \beta_{1'2} = \widetilde{\boldsymbol{U}}_1' : \widetilde{\boldsymbol{U}}_2 \quad ; \quad \cos^2 \beta_{3'3} = \widetilde{\boldsymbol{U}}_3' : \widetilde{\boldsymbol{U}}_3 \tag{B.13}$$

Comparaison avec la liste proposée par BOEHLER **–** Les trois produits scalaires de l'équation (B.13) sont strictement nécessaires et suffisants pour définir les positions relatives des directions propres des deux tenseurs $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S}'$. Ils peuvent être exprimés tensoriellement en utilisant les formules tensorielles qui donnent les directions propres [éq. (A.11) et suivantes p. 100]. Par exemple, le produit scalaire $\boldsymbol{U}_1 : \boldsymbol{U}_1'$ est solution de l'équation :

$$\begin{aligned}\big(\boldsymbol{S}^2 - (\lambda_2 + \lambda_3)\boldsymbol{S} + \lambda_2 \lambda_3 \boldsymbol{G}\big) : \big(\boldsymbol{S}'^2 - (\lambda_2' + \lambda_3')\boldsymbol{S}' + \lambda_2' \lambda_3' \boldsymbol{G}\big) \\ = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1' - \lambda_2')(\lambda_1' - \lambda_3')(\boldsymbol{U}_1 : \boldsymbol{U}_1')\end{aligned}$$

soit encore en développant le terme de gauche :

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{S}^2 : \boldsymbol{S}'^2) - (\lambda_2 + \lambda_3)(\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}'^2) - (\lambda_2' + \lambda_3')(\boldsymbol{S}^2 : \boldsymbol{S}') \\ &\quad + (\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_2' + \lambda_3')(\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}') + \lambda_2 \lambda_3 \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}'^2) + \lambda_2' \lambda_3' \operatorname{tr}(\boldsymbol{S}^2) \\ &\qquad - \lambda_2 \lambda_3 (\lambda_2' + \lambda_3') \operatorname{tr}\boldsymbol{S}' - \lambda_2' \lambda_3' (\lambda_2 + \lambda_3) \operatorname{tr}\boldsymbol{S} + 3 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_2' \lambda_3' \\ &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1' - \lambda_2')(\lambda_1' - \lambda_3')(\boldsymbol{U}_1 : \boldsymbol{U}_1')\end{aligned}$$

On obtient des formules similaires pour autres les produits scalaires $\boldsymbol{U}_1' : \boldsymbol{U}_2$ et $\boldsymbol{U}_3' : \boldsymbol{U}_3$ de (B.13).

Dans ces formules, on constate que l'expression des trois produits scalaires de (B.13) font apparaître les quatre invariants croisés $(\boldsymbol{S}^2 : \boldsymbol{S}'^2)$, $(\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}'^2)$, $(\boldsymbol{S}^2 : \boldsymbol{S}')$ et $(\boldsymbol{S} : \boldsymbol{S}')$ qui ont été proposés par J. P. BOELHER comme liste minimale [9] et qui ont été à l'origine de controverses avec d'autres auteurs soutenant, à juste titre, que trois invariants sont suffisants. La liste d'invariants proposée par BOELHER n'est pas minimale, car trois angles suffisent pour donner la position relative d'un trièdre par rapport à un autre ; mais les listes minimales de trois invariants ne sont pas une sous-liste des quatre invariants proposés par BOELHER. Les formules ci-dessus montrent que l'on peut déterminer trois invariants strictement nécessaires et suffisants $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1' : \widetilde{\boldsymbol{U}}_1$, $\widetilde{\boldsymbol{U}}_1' : \widetilde{\boldsymbol{U}}_2$ et $\widetilde{\boldsymbol{U}}_3' : \widetilde{\boldsymbol{U}}_3$ par des combinaisons adéquates des quatre invariants proposés par BOELHER avec les valeurs propres des deux tenseurs.

Tenseurs antisymétriques – Beaucoup d'auteurs qui ont publié des listes d'invariants se sont aussi efforcés de donner des listes d'invariants pour des arguments de f comprenant à la fois des tenseurs symétriques et des tenseurs antisymétriques, négligeant de considérer l'isomorphisme qui existe entre les tenseurs antisymétriques et les vecteurs (voir (1.38) et (1.39) page 31). La représentation des tenseurs antisymétriques est celle des vecteurs. Tout tenseur du second ordre peut donc être représenté par sa partie symétrique et par le vecteur adjoint à sa partie antisymétrique. Il suffit donc de savoir représenter des ensembles de tenseurs symétriques et de vecteurs.

B.6 Fonctions scalaires isotropes d'arguments tensoriels

- **Définition B.11 – Fonction scalaire isotrope.** Une fonction scalaire est dite isotrope si elle est invariante dans toute rotation de ses arguments :

$$f(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_n) = f(\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}_1), \cdots, \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}_n)), \quad \forall \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_{3+}$$

[9] *On Irreductible Representations for Isotropic Scalar Functions*, J. P. BOEHLER, **ZAMM 57**, 323-327 (1977).

Remarque B.5 – En mécanique des milieux continus, cette condition a une interprétation physique : la valeur de la fonction réelle f est invariante par changement d'observateur [10]. C'est notamment ce que l'on exige quand on cherche à écrire des fonctions d'état thermodynamiques (énergie interne, entropie, ...) qui sont fonctions de variables d'état vectorielles ou tensorielles.

Si on a trouvé une représentation de la suite des arguments tensoriels $\{\boldsymbol{T}_1, \dots \boldsymbol{T}_n\}$ de f constituée d'une suite de scalaires $\{I_1, \dots, I_m\}$ complétée par une rotation $\boldsymbol{R}$, alors, en vertu du théorème B.6 [p. 105], il existe une fonction $\overline{f} = f \circ s$ telle que :

$$\overline{f}(I_1, \cdots, I_m, \boldsymbol{R}) = f(\boldsymbol{T}_1, \cdots, \boldsymbol{T}_n)$$

De la définition B.11, on en déduit l'égalité :

$$\overline{f}(I_1, \cdots, I_m, \boldsymbol{R}) = \overline{f}(I'_1, \cdots, I'_m, \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q}^\top), \quad \forall \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_{3+} \tag{B.14}$$

où $\{I'_1, \cdots, I'_m\}$ sont des scalaires de la représentation de $\{\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}_1), \cdots, \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}_n)\}$. Puisque dans les représentations que l'on a construites dans les sections précédentes, ces réels sont invariants dans toute rotation $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}$ des arguments [11], on a les égalités : $I'_j = I_j \ \forall j \in [1, m]$. L'égalité (B.14) s'écrit donc encore :

$$\overline{f}(I_1, \dots, I_m, \boldsymbol{R}) = \overline{f}(I_1, \cdots, I_m, \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q}^\top), \quad \forall \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_{3+}$$

où $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{Q}^\top \ \forall \boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_{3+}$ est une rotation quelconque. On en déduit que la fonction $\overline{f}$ est insensible à son dernier argument :

$$\overline{f}(I_1, \cdots, I_m, \boldsymbol{R}) = \overline{f}(I_1, \cdots, I_m, \boldsymbol{R}') \ \forall \boldsymbol{R}' \qquad \Rightarrow \qquad \overline{f}(I_1, \cdots, I_m, \boldsymbol{R}) = \overline{f}(I_1, \cdots, I_m)$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

- **Théorème B.12 –** Si une fonction $f(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \cdots, \boldsymbol{T}_n)$ est scalaire et isotrope, il existe une fonction $\overline{f}$ telle que :

$$f(\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \cdots, \boldsymbol{T}_n) = \overline{f}(I_1, \cdots, I_m)$$

où l'ensemble $\{I_1, \cdots, I_m\}$ est un représentant à une rotation près de l'ensemble $\{\boldsymbol{T}_1, \boldsymbol{T}_2, \dots, \boldsymbol{T}_n\}$.

En pratique, pour trouver les arguments de $\overline{f}$, il suffit de supprimer le représentant $\boldsymbol{R}$ des listes de représentants qui ont été données dans les sections précédentes.

Ce résultat est important dans la pratique de la mécanique des milieux continus : on peut remplacer les fonctions scalaires isotropes d'arguments tensoriels par des fonctions scalaires d'arguments scalaires, de manipulation beaucoup plus aisée [12] ; sous réserve d'avoir trouvé une représentation adéquate de l'ensemble des arguments tensoriels. De plus, ces représentations n'étant pas uniques, on a la possibilité d'en choisir une dont les réels $\{I_1, \cdots, I_m\}$ ont une interprétation physique.

[10] On dira que la valeur de f est une grandeur scalaire objective.
[11] Car ils ne sont fonction que des orientations relatives entre les arguments.
[12] Il n'y a plus à considérer de « dérivation par rapport à des tenseurs », éventuellement contraints [rem. 2.3 p. 53].

B.7 Synthèse

Les fonctions scalaires isotropes d'arguments tensoriels peuvent être remplacées par des fonctions scalaires d'arguments scalaires, calculés à partir des arguments tensoriels. On rassemble ici les quelques cas étudiés :

arguments de f	arguments de $\overline{f}$
$\boldsymbol{v}_1$	$\|\boldsymbol{v}_1\|$
$\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_n$	$\|\boldsymbol{v}_1\|,\cdots,\|\boldsymbol{v}_n\|,\alpha_{12},(\alpha_{31},\alpha_{32},\varepsilon_{123}),\cdots,(\alpha_{n1},\alpha_{n2},,\varepsilon_{12n})$
$\widetilde{\boldsymbol{V}}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{V}}_n$	$\beta_{12},(\beta_{31},\beta_{32}),\cdots,(\beta_{n1},\beta_{n2})$
$\boldsymbol{V}_1,\cdots,\boldsymbol{V}_n$	$\|\boldsymbol{V}_1\|,\cdots,\|\boldsymbol{V}_n\|,\beta_{12},(\beta_{31},\beta_{32}),\cdots,(\beta_{n1},\beta_{n2})$
$\boldsymbol{S}$	$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$
$\boldsymbol{S},\widetilde{\boldsymbol{V}}_1$	$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\beta_{11},\beta_{21}$
$\boldsymbol{S},\widetilde{\boldsymbol{V}}_1,\cdots,\widetilde{\boldsymbol{V}}_n$	$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,(\beta_{11},\beta_{21}),\cdots,(\beta_{1n},\beta_{2n})$
$\boldsymbol{S},\boldsymbol{S}'$	$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\,,\,(\lambda'_1,\lambda'_2,\lambda'_3)\,,\,\beta_{1'1},\beta_{1'2},\beta_{3'3}$

où :
- les $\boldsymbol{v}_i$ sont des vecteurs ;
- les $\widetilde{\boldsymbol{V}}_i$ sont des directions non orientées (tenseurs uniaxiaux unitaires $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i\otimes\widetilde{\boldsymbol{v}}_i$) ;
- les $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{S}'$ sont des tenseurs du second ordre symétriques ;
- les angles entre vecteurs $\alpha_{ij}\in[0;\pi]$ peuvent être remplacés par les produits scalaires $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i\cdot\widetilde{\boldsymbol{v}}_j$;
- les ε_{ijk} sont les signes des produits mixtes $[\widetilde{\boldsymbol{v}}_i,\widetilde{\boldsymbol{v}}_j,\widetilde{\boldsymbol{v}}_k]$
- les angles entre directions $\beta_{ij}\in[0,\frac{\pi}{2}]$ peuvent être remplacés par les produits scalaires $\widetilde{\boldsymbol{V}}_i:\widetilde{\boldsymbol{V}}_j$;
- les valeurs propres classées $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ peuvent être remplacées par les invariants $S_{\mathrm{I}},S_{\mathrm{II}},S_{\mathrm{III}}$ ou S_{I},J,ϕ ou d'autres (voir A.6 page 99).

On peut construire d'autres listes d'invariants pour des listes plus grandes d'arguments tensoriels. D'une manière générale, les listes d'arguments de la fonction $\overline{f}$ contiennent les invariants propres à chaque argument de f, complétés par des invariants « croisés » qui sont un ensemble de scalaires nécessaires et suffisants pour décrire les orientations relatives entre les arguments vectoriels ou tensoriels de la fonction f.

Enfin, à partir d'une liste $\{I_1,\cdots,I_m\}$, il est possible d'en construire d'autres qui sont équivalentes, mais qui ont une signification physique plus claire : toute liste $\{I'_1,\cdots,I'_m\}$ où $I'_j=f_j(I_1,\cdots,I_m)$ est une liste valide s'il y a une bijection $\{I_1,\cdots,I_m\}\leftrightarrow\{I'_1,\cdots,I'_m\}$ c'est-à-dire que le jacobien $\det(\partial_i f_j)$ est non nul.

C

Formulaire

On donne ici (sans démonstration [1]) les expressions des opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien dans deux systèmes de coordonnées classiques : les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques.

C.1 Système de coordonnées cylindriques

C.1.1 Définition et notations

Un point M de l'espace est repéré par les trois réels r, θ et z définis sur la figure C.1. À chaque

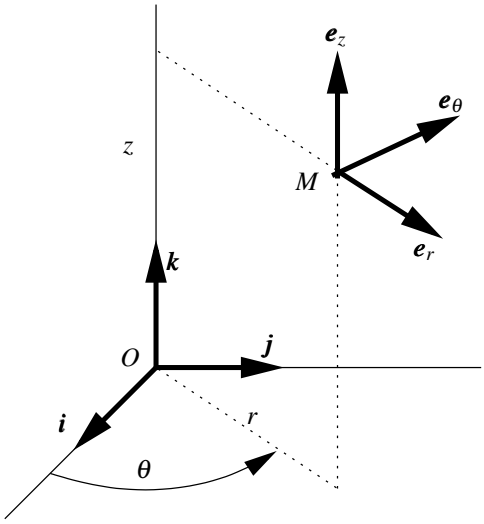

FIGURE C.1 – Système de coordonnées cylindrique

point M on associe une base locale orthonormée $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z\}$ définie par :

$$\boldsymbol{e}_r = \partial_r \boldsymbol{OM} = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{1}{r}\partial_\theta \boldsymbol{OM} = -\sin\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\theta\, \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{e}_r$$
$$\boldsymbol{e}_z = \partial_z \boldsymbol{OM} = \boldsymbol{k}$$

[1] Ces formules ont été établies automatiquement avec un « package » nommé `tens3d`, écrit par l'auteur, destiné faire de l'algèbre tensorielle dans des bases quelconques et de l'analyse tensorielle dans des systèmes de coordonnées quelconques. L'auteur le met à la disposition des utilisateurs des logiciels de calcul formel MAPLE® ou MATHEMATICA®. Ces packcages sont téléchargeables actuellement (22 avril 2014) à l'adresse : `http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html`.

Le point courant M est défini par :

$$\boldsymbol{OM} = r\cos\theta\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\,\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} = r\boldsymbol{e}_r + z\boldsymbol{k}$$

Sur la base locale en M, on a

$$\mathbf{d}\boldsymbol{M} = \mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r + r\,\mathbf{d}\boldsymbol{e}_r + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z + z\,\mathbf{d}\boldsymbol{e}_z = \mathrm{d}r\boldsymbol{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + \mathrm{d}z\boldsymbol{e}_z$$

C.1.2 Champs scalaires

Soit f un champ scalaire :

$$M \in \mathbb{V}_3 \xrightarrow{f} f(M) = f(r,\theta,z) \in \mathbb{R}$$

Le gradient de ce champ est :

$$\mathbf{grad}\, f = \partial_r f\,\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\,\partial_\theta f\,\boldsymbol{e}_\theta + \partial_z f\,\boldsymbol{e}_z$$

et le laplcien de ce champ est :

$$\begin{aligned}\Delta f &= \partial_{rr} f + \frac{1}{r^2}\,\partial_{\theta\theta} f + \frac{1}{r}\,\partial_r f + \partial_{zz} f \\ &= \frac{1}{r}\,\partial_r(r\,\partial_r f) + \frac{1}{r^2}\,\partial_{\theta\theta} f + \partial_{zz} f\end{aligned}$$

C.1.3 Champs vectoriels

Soit $\boldsymbol{v}$ un champ vectoriel :

$$M \in \mathbb{V}_3 \xrightarrow{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}(M) = v_r(r,\theta,z)\boldsymbol{e}_r + v_\theta(r,\theta,z)\boldsymbol{e}_\theta + v_z(r,\theta,z)\boldsymbol{e}_z$$

alors :

$$\left[(\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{\bullet\bullet}\right] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r}\,(\partial_\theta v_r - v_\theta) & \partial_z v_r \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r}\,(\partial_\theta v_\theta + v_r) & \partial_z v_\theta \\ \partial_r v_z & \frac{1}{r}\,\partial_\theta v_z & \partial_z v_z \end{bmatrix}_{\{\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_z\}}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \partial_r v_r + \frac{1}{r}\,(\partial_\theta v_\theta + v_r) + \partial_z v_z$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{r}\partial_\theta v_z - \partial_z v_\theta\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\partial_z v_r - \partial_r v_z\right)\boldsymbol{e}_\theta + \left(\partial_r v_\theta - \frac{1}{r}\,(\partial_\theta v_r - v_\theta)\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{v} &= \left(\partial_{rr} v_r + \frac{1}{r^2}\,(\partial_{\theta\theta} v_r - 2\,\partial_\theta v_\theta - v_r) + \frac{1}{r}\,\partial_r v_r + \partial_{zz} v_r\right)\boldsymbol{e}_r \\ &\quad + \left(\partial_{rr} v_\theta + \frac{1}{r^2}\,(\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2\,\partial_\theta v_r - v_\theta) + \frac{1}{r}\,\partial_r v_\theta + \partial_{zz} v_\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta \\ &\quad + \left(\partial_{rr} v_z + \frac{1}{r^2}\,\partial_{\theta\theta} v_z + \frac{1}{r}\,\partial_r v_z + \partial_{zz} v_z\right)\boldsymbol{e}_z \\ &= \left(\partial_r\left(\frac{1}{r}\,\partial_r(r\,v_r)\right) + \frac{1}{r^2}\,(\partial_{\theta\theta} v_r - 2\,\partial_\theta v_\theta) + \partial_{zz} v_r\right)\boldsymbol{e}_r \\ &\quad + \left(\partial_r\left(\frac{1}{r}\,\partial_r(r\,v_\theta)\right) + \frac{1}{r^2}\,(\partial_{\theta\theta} v_\theta + 2\,\partial_\theta v_r) + \partial_{zz} v_\theta\right)\boldsymbol{e}_\theta \\ &\quad + \left(\frac{1}{r}\,\partial_r\left(r\,\partial_r v_z\right) + \frac{1}{r^2}\,\partial_{\theta\theta} v_z + \partial_{zz} v_z\right)\boldsymbol{e}_z\end{aligned}$$

C.1.4 Champs tensoriels du second ordre symétriques

Soit $\boldsymbol{T}$ un champ tensoriel du second ordre *symétrique* :

$$M \in \mathbb{V}_3 \xrightarrow{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{T}(M) \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2s}$$

Les composantes de $\boldsymbol{T}$ dans la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z\}$ forment la matrice symétrique :

$$\begin{bmatrix} T_{rr}(r,\theta,z) & T_{r\theta}(r,\theta,z) & T_{rz}(r,\theta,z) \\ T_{r\theta}(r,\theta,z) & T_{\theta\theta}(r,\theta,z) & T_{\theta z}(r,\theta,z) \\ T_{rz}(r,\theta,z) & T_{\theta z}(r,\theta,z) & T_{zz}(r,\theta,z) \end{bmatrix}_{\{\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_z\}}$$

Le gradient de ce champ est un tenseur d'ordre 3 dont il n'est pas utile de détailler les 27 composantes sur la base physique. En revanche, les opérateurs qui suivent sont utiles en mécanique des milieux continus.

Le vecteur divergence de ce champ tensoriel est :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,\boldsymbol{T} = & \left(\partial_r T_{rr} + \frac{1}{r}\left(\partial_\theta T_{r\theta} + T_{rr} - T_{\theta\theta}\right) + \partial_z T_{rz}\right)\boldsymbol{e}_r \\ & + \left(\partial_r T_{r\theta} + \frac{1}{r}\left(\partial_\theta T_{\theta\theta} + 2\,T_{r\theta}\right) + \partial_z T_{\theta z}\right)\boldsymbol{e}_\theta \\ & + \left(\partial_r T_{rz} + \frac{1}{r}\left(\partial_\theta T_{\theta z} + T_{rz}\right) + \partial_z T_{zz}\right)\boldsymbol{e}_z \end{aligned}$$

Les composantes du tenseur rotationel dans la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z\}$ forment la matrice (non symétrique) :

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r}\left(\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}\right) - \partial_z T_{r\theta} & \partial_z T_{rr} - \partial_r T_{rz} & \partial_r T_{r\theta} - \frac{1}{r}\left(\partial_\theta T_{rr} - 2\,T_{r\theta}\right) \\ \frac{1}{r}\left(\partial_\theta T_{\theta z} + T_{rz}\right) - \partial_z T_{\theta\theta} & \partial_z T_{r\theta} - \partial_r T_{\theta z} & \partial_r T_{\theta\theta} - \frac{1}{r}\left(\partial_\theta T_{r\theta} + T_{rr} - T_{\theta\theta}\right) \\ \frac{1}{r}\partial_\theta T_{zz} - \partial_z T_{\theta z} & \partial_z T_{rz} - \partial_r T_{zz} & \partial_r T_{\theta z} - \frac{1}{r}\left(\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}\right) \end{bmatrix}$$

Les composantes du tenseur laplacien dans la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_z\}$ forment une matrice symétrique :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\Delta T})_{rr} &= \partial_{rr} T_{rr} + \frac{1}{r^2}\left(\partial_{\theta\theta} T_{rr} - 4\,\partial_\theta T_{r\theta} - 2\,T_{rr} + 2\,T_{\theta\theta}\right) + \frac{1}{r}\,\partial_r T_{rr} + \partial_{zz} T_{rr} \\ (\boldsymbol{\Delta T})_{r\theta} = (\boldsymbol{\Delta T})_{\theta r} &= \partial_{rr} T_{r\theta} + \frac{1}{r^2}\left(\partial_{\theta\theta} T_{r\theta} + 2\,\partial_\theta T_{rr} - 2\,\partial_\theta T_{\theta\theta} - 4\,T_{r\theta}\right) + \frac{1}{r}\,\partial_r T_{r\theta} + \partial_{zz} T_{r\theta} \\ (\boldsymbol{\Delta T})_{rz} = (\boldsymbol{\Delta T})_{zr} &= \partial_{rr} T_{rz} + \frac{1}{r^2}\left(\partial_{\theta\theta} T_{rz} - 2\partial_\theta T_{\theta z} - T_{rz}\right) + \frac{1}{r}\,\partial_r T_{rz} + \partial_{zz} T_{rz} \\ (\boldsymbol{\Delta T})_{\theta\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2}\left(\partial_{\theta\theta} T_{\theta\theta} + 4\,\partial_\theta T_{r\theta} + 2\,T_{rr} - 2\,T_{\theta\theta}\right) + \frac{1}{r}\,\partial_r T_{\theta\theta} + \partial_{zz} T_{\theta\theta} \\ (\boldsymbol{\Delta T})_{\theta z} = (\boldsymbol{\Delta T})_{z\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta z} + \frac{1}{r^2}\left(\partial_{\theta\theta} T_{\theta z} + 2\,\partial_\theta T_{rz} - T_{\theta z}\right) + \frac{1}{r}\,\partial_r T_{\theta z} + \partial_{zz} T_{\theta z} \\ (\boldsymbol{\Delta T})_{zz} &= \partial_{rr} T_{zz} + \frac{1}{r^2}\,\partial_{\theta\theta} T_{zz} + \frac{1}{r}\,\partial_r T_{zz} + \partial_{zz} T_{zz} \end{aligned}$$

C.2 Système de coordonnées sphériques

Note importante Dans la littérature scientifique, il existe deux versions du système de coordonnées sphérique :

- dans la version présentée ici, l'angle φ est mesuré à partir du plan $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$. On pourrait les appeler « coordonnées géographiques » (θ est la longitude, φ est la latitude, le plan $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ est le plan équatorial). Le trièdre $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ est direct ;
- dans l'autre version, l'angle Φ est mesuré sur le méridien de M à partir du pôle Nord. On a donc :

$$\Phi = \frac{\pi}{2} - \varphi \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{e}_\Phi = -\boldsymbol{e}_\varphi$$

On convertit aisément les formules avec les remplacements suivants :

$$\cos\varphi \to \sin\Phi \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi \to \cos\Phi$$

C.2.1 Définition et notations

Un point M de l'espace est repéré par trois réels r, θ et ϕ définis sur la figure C.2. À chaque

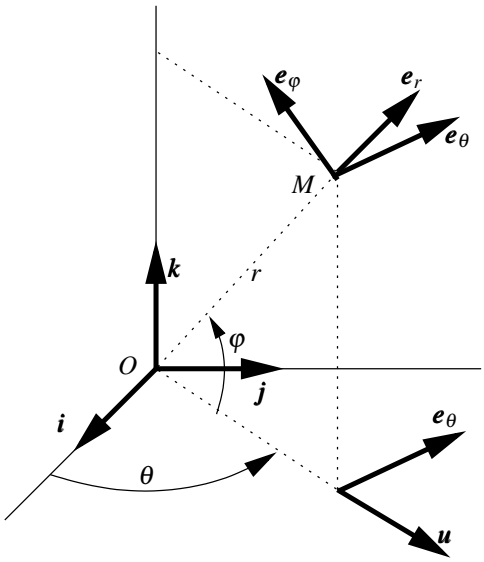

FIGURE C.2 – Système de coordonnées sphériques

point M, on associe une base locale orthonormée $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ définie par :

$$\boldsymbol{e}_r = \partial_r \boldsymbol{OM} = \cos\varphi\,\boldsymbol{u} + \sin\varphi\,\boldsymbol{k} = \cos\theta\,\cos\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + \sin\varphi\,\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{e}_\theta = \frac{\partial_\theta \boldsymbol{OM}}{r\cos\varphi} = -\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\partial_\varphi \boldsymbol{OM}}{r} = -\sin\varphi\,\boldsymbol{u} + \cos\varphi\,\boldsymbol{k} = -\cos\theta\,\sin\varphi\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\cos\varphi\,\boldsymbol{j} + \sin\varphi\,\boldsymbol{k}$$

Le point courant est :

$$\boldsymbol{OM} = r\cos\varphi\,\cos\theta\,\boldsymbol{i} + r\cos\varphi\,\sin\theta\,\boldsymbol{j} + r\sin\varphi\,\boldsymbol{k} = r\boldsymbol{e}_r$$

Sur la base locale en M, on a :

$$\mathbf{d}\boldsymbol{M} = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r + r\,\mathbf{d}\boldsymbol{e}_r = \mathrm{d}r\,\boldsymbol{e}_r + r\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + r\,\mathrm{d}\varphi\,\boldsymbol{e}_\varphi$$

C.2.2 Champs scalaires

Soit f un champ scalaire :

$$M \in \mathbb{V}_3 \xrightarrow{f} f(M) = f(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}$$

Le vecteur gradient s'écrit :

$$\mathbf{grad}\, f = \partial_r f\,\boldsymbol{e}_r + \frac{\partial_\theta f}{r\cos\varphi}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{\partial_\varphi f}{r}\boldsymbol{e}_\varphi$$

et le laplacien s'écrit :

$$\Delta f = \partial_{rr} f + \frac{\partial_{\theta\theta} f - \sin\varphi\,\partial_\varphi f}{r^2\cos^2\varphi} + \frac{2\,\partial_r f}{r} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} f}{r^2}$$

C.2.3 Champs vectoriels

Soit $\boldsymbol{v}$ un champ vectoriel :

$$M \in \mathbb{V}_3 \xrightarrow{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{v}(M) = v_r(r,\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_r + v_\theta(r,\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_\theta + v_\varphi(r,\theta,\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi \in \mathbb{V}_3$$

Les composantes du tenseur gradient dans la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi\}$ forment une matrice non symétrique :

$$\left[\mathbf{grad}\,\boldsymbol{v})_{\bullet\bullet}\right] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & \frac{1}{r\cos\theta}\,\partial_\theta v_r - \frac{1}{r}\,v_\theta & \frac{1}{r}\left(\partial_\varphi v_r - v_\varphi\right) \\ \partial_r v_\theta & \frac{1}{r\cos\varphi}\left(\partial_\theta v_\theta - \sin\varphi\,v_\varphi\right) + \frac{1}{r}\,v_r & \frac{1}{r}\,\partial_\varphi v_\theta \\ \partial_r v_\varphi & \frac{1}{r\cos\varphi}\left(\partial_\theta v_\varphi + \sin\varphi\,v_\theta\right) & \frac{1}{r}\left(\partial_\varphi v_\varphi + v_r\right) \end{bmatrix}_{\{\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi\}}$$

La divergence est le scalaire :

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \partial_r v_r + \frac{\partial_\theta v_\theta - \sin\varphi\,v_\varphi}{r\cos\varphi} + \frac{\partial_\varphi v_\varphi + 2\,v_r}{r}$$

le rotationel est le vecteur :

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial_\theta v_\varphi + \sin\varphi\,v_\theta}{r\cos\varphi} - \frac{\partial_\varphi v_\theta}{r}\right)\boldsymbol{e}_r + \left(\frac{\partial_\varphi v_r - v_\varphi}{r} - \partial_r v_\varphi\right)\boldsymbol{e}_\theta + \left(\partial_r v_\theta - \frac{\partial_\theta v_r}{r\cos\varphi} + \frac{v_\theta}{r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi$$

et le laplacien est le vecteur :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta v} = &\left(\partial_{rr} v_r + \frac{\partial_{\theta\theta} v_r}{r^2\cos^2\varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} v_r - 2\,\partial_\varphi v_\varphi - 2\,v_r}{r^2} + \frac{2\sin\varphi\,v_\varphi - 2\,\partial_\theta v_\theta - \sin\varphi\,\partial_\varphi v_r}{r^2\cos\varphi} + \frac{2\,\partial_r v_r}{r}\right)\boldsymbol{e}_r \\ &+ \left(\partial_{rr} v_\theta + \frac{\partial_{\theta\theta} v_\theta - 2\sin\varphi\,\partial_\theta v_\varphi - v_\theta}{r^2\cos^2\varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} v_\theta}{r^2} + \frac{2\,\partial_\theta v_r - \sin\varphi\,\partial_\varphi v_\theta}{r^2\cos\varphi} + \frac{2\,\partial_r v_\theta}{r}\right)\boldsymbol{e}_\theta \\ &+ \left(\partial_{rr} v_\varphi + \frac{\partial_{\theta\theta} v_\varphi + 2\sin\varphi\,\partial_\theta v_\theta - v_\varphi}{r^2\cos^2\varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} v_\varphi + 2\,\partial_\varphi v_r}{r^2} - \frac{\sin\varphi\,\partial_\varphi v_\varphi}{r^2\cos\varphi} + \frac{2\,\partial_r v_\varphi}{r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi\end{aligned}$$

C.2.4 Champs tensoriels du second ordre symétriques

Soit $\boldsymbol{T}$ un champ tensoriel du second ordre *symétrique* :

$$M \in \mathbb{V}_3 \xrightarrow{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{T}(M) \in \mathbb{S} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$$

dont les composantes dans la base $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ sont :

$$\left[(\boldsymbol{T})_{\bullet\bullet}\right] = \begin{bmatrix} T_{rr}(r,\theta,\varphi) & T_{r\theta}(r,\theta,\varphi) & T_{r\varphi}(r,\theta,\varphi) \\ T_{r\theta}(r,\theta,\varphi) & T_{\theta\theta}(r,\theta,\varphi) & T_{\theta\varphi}(r,\theta,\varphi) \\ T_{r\varphi}(r,\theta,\varphi) & T_{\theta\varphi}(r,\theta,\varphi) & T_{\varphi\varphi}(r,\theta,\varphi) \end{bmatrix}_{\{\boldsymbol{e}_r,\boldsymbol{e}_\theta,\boldsymbol{e}_\varphi\}} \qquad \text{(matrice symétrique)}$$

Le gradient est un tenseur d'ordre 3 dont on ne détaille pas les 27 composantes. En revanche, les opérateurs qui suivent sont utiles en mécanique des milieux continus.

La divergence de ce champ tensoriel symétrique est le vecteur :

$$\begin{aligned}
\mathbf{div}\boldsymbol{T} = &\left(\partial_r T_{rr} + \frac{\partial_\theta T_{r\theta} - \sin\varphi\, T_{r\varphi}}{r\cos\varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{r\varphi} + 2\,T_{rr} - T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi}}{r}\right)\boldsymbol{e}_r \\
&+ \left(\partial_r T_{r\theta} + \frac{\partial_\theta T_{\theta\theta} - 2\sin\varphi\, T_{\theta\varphi}}{r\cos\varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{\theta\varphi} + 3\,T_{r\theta}}{r}\right)\boldsymbol{e}_\theta \\
&+ \left(\partial_r T_{r\varphi} + \frac{\partial_\theta T_{\theta\varphi} + \sin\varphi\, T_{\theta\theta} - \sin\varphi\, T_{\varphi\varphi}}{r\cos\varphi} + \frac{\partial_\varphi T_{\varphi\varphi} + 3\,T_{r\varphi}}{r}\right)\boldsymbol{e}_\varphi
\end{aligned}$$

Les composantes du rotationel sur la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ forment une matrice non symétrique :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_{rr} &= \frac{\partial_\theta T_{r\varphi} + \sin\varphi\, T_{r\theta}}{r\cos\varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{r\theta}}{r} \\
(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_{r\theta} &= \frac{\partial_\varphi T_{rr} - 2\,T_{r\varphi}}{r} - \partial_r T_{r\varphi} \\
(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_{rz} &= \partial_r T_{r\theta} - \frac{\partial_\theta T_{rr}}{r\cos\varphi} + \frac{2\,T_{r\theta}}{r} \\
(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_{\theta r} &= \frac{\partial_\theta T_{\theta\varphi} + \sin\varphi(T_{\theta\theta} - T_{\varphi\varphi})}{r\cos\varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{\theta\theta} - T_{r\varphi}}{r} \\
(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_{\theta\theta} &= \frac{\partial_\varphi T_{r\theta} - T_{\theta\varphi}}{r} - \partial_r T_{\theta\varphi} \\
(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_{\theta z} &= \partial_r T_{\theta\theta} - \frac{\partial_\theta T_{r\theta} - \sin\varphi\, T_{r\varphi}}{r\cos\varphi} + \frac{T_{\theta\theta} - T_{rr}}{r} \\
(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_{zr} &= \frac{\partial_\theta T_{\varphi\varphi} + 2\sin\varphi\, T_{\theta\varphi}}{r\cos\varphi} - \frac{\partial_\varphi T_{\theta\varphi} + T_{r\theta}}{r} \\
(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_{z\theta} &= \frac{\partial_\varphi T_{r\varphi} + T_{rr} - T_{\varphi\varphi}}{r} - \partial_r T_{\varphi\varphi} \\
(\mathbf{rot}\boldsymbol{T})_{zz} &= \partial_r T_{\theta\varphi} - \frac{\partial_\theta T_{r\varphi} + \sin\varphi\, T_{r\theta}}{r\cos\varphi} + \frac{T_{\theta\varphi}}{r}
\end{aligned}$$

Les composantes du laplacien sur la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\varphi\}$ forment une matrice symétrique :

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{\Delta T})_{rr} &= \partial_{rr} T_{rr} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{rr}}{r^2 \cos^2\varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{rr} - 4\,\partial_\varphi T_{r\varphi} - 4\,T_{rr} + 2\,T_{\theta\theta}}{r^2} \\
&\quad + \frac{\sin\varphi\,\partial_\varphi T_{rr} + 4\sin\varphi\,T_{r\varphi} - 4\,\partial_\theta T_{r\theta}}{r^2\cos\varphi} + \frac{2\,\partial_r T_{rr}}{r} \\
(\boldsymbol{\Delta T})_{r\theta} = (\boldsymbol{\Delta T})_{\theta r} &= \partial_{rr} T_{r\theta} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{r\theta} - 2\sin\varphi\,\partial_\theta T_{r\varphi} - T_{r\theta}}{r^2\cos^2\varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{r\theta} - 2\,\partial_\varphi T_{\theta\varphi} - 4\,T_{r\theta}}{r^2} \\
&\quad + \frac{2\,\partial_\theta T_{rr} - 2\,\partial_\theta T_{\theta\theta} - \sin\varphi\,\partial_\varphi T_{r\theta} + 4\sin\varphi\,T_{\theta\varphi}}{r^2\cos\varphi} + \frac{2\,\partial_r T_{r\theta}}{r} \\
(\boldsymbol{\Delta T})_{r\varphi} = (\boldsymbol{\Delta T})_{\varphi r} &= \partial_{rr} T_{r\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{r\varphi} + 2\sin\varphi\,\partial_\theta T_{r\theta} - T_{r\varphi}}{r^2\cos^2\varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{r\varphi} + 2\,\partial_\varphi T_{rr} - 2\,\partial_\varphi T_{\varphi\varphi} - 4\,T_{r\varphi}}{r^2} \\
&\quad + \frac{-2\,\partial_\theta T_{\theta\varphi} - \sin\varphi\,\partial_\varphi T_{r\varphi} - 2\sin\varphi\,T_{\theta\theta} + 2\sin\varphi\,T_{\varphi\varphi}}{r^2\cos\varphi} + \frac{2\,\partial_r T_{r\varphi}}{r} \\
(\boldsymbol{\Delta T})_{\theta\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\theta} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\theta\theta} - 4\sin\varphi\,\partial_\theta T_{\theta\varphi} - 2\,T_{\theta\theta} + 2\,T_{\varphi\varphi}}{r^2\cos^2\varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\theta\theta} + 2\,T_{rr} - 2\,T_{\varphi\varphi}}{r^2} \\
&\quad + \frac{4\,\partial_\theta T_{r\theta} + \sin\varphi\,\partial_\varphi T_{\theta\theta} - 4\sin\varphi T_{r\varphi}}{r^2\cos\varphi} + \frac{2\partial_r T_{\theta\theta}}{r} \\
(\boldsymbol{\Delta T})_{\theta\varphi} = (\boldsymbol{\Delta T})_{\varphi\theta} &= \partial_{rr} T_{\theta\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\theta\varphi} + 2\,\partial_\theta T_{\theta\theta} - 2\,\partial_\theta T_{\varphi\varphi} - 4\,T_{\theta\varphi}}{r^2\cos^2\varphi} + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\theta\varphi} + 2\,\partial_\varphi T_{r\theta} + 2\,T_{\theta\varphi}}{r^2} \\
&\quad + \frac{2\,\partial_\theta T_{r\varphi} - \sin\varphi\,\partial_\varphi T_{\theta\varphi} + 2\sin\varphi\,T_{r\theta}}{r^2\cos\varphi} + \frac{2\,\partial_r T_{\theta\varphi}}{r} \\
(\boldsymbol{\Delta T})_{\varphi\varphi} &= \partial_{rr} T_{\varphi\varphi} + \frac{\partial_{\theta\theta} T_{\varphi\varphi} + 4\sin\varphi\,\partial_\theta T_{\theta\varphi} + 2\,T_{\theta\theta} - 2\,T_{\varphi\varphi}}{r^2\cos^2\varphi} \\
&\quad + \frac{\partial_{\varphi\varphi} T_{\varphi\varphi} + 4\,\partial_\varphi T_{r\varphi} + 2\,T_{rr} - 2\,T_{\theta\theta}}{r^2} - \frac{\sin\varphi\,\partial_\varphi T_{\varphi\varphi}}{r^2\cos\varphi} + \frac{2\,\partial_r T_{\varphi\varphi}}{r}
\end{aligned}
$$