



HAL
open science

Cinématique des milieux continus

Jean Garrigues

► **To cite this version:**

Jean Garrigues. Cinématique des milieux continus. Engineering school. Cinématique des milieux continus, 2012, pp.114. cel-00681766v3

HAL Id: cel-00681766

<https://cel.hal.science/cel-00681766v3>

Submitted on 12 May 2014 (v3), last revised 2 Nov 2022 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cinématique des milieux continus

Jean Garrigues

(version du 12 mai 2014)



Avant-propos

L'objectif de ce cours est d'introduire les outils nécessaires à la description du mouvement, de la déformation et de la vitesse de déformation d'un milieu continu déformable au sens le plus général du terme, c'est-à-dire en pratique les solides déformables, les liquides et les gaz. Tous les concepts introduits dans ce cours sont valables pour l'un quelconque de ces milieux continus.

Les développements qui suivent se placent résolument dans le cadre de la physique classique (non relativiste et non quantique). Nous admettons donc que l'espace dans lequel les mouvements de milieux continus se produisent est de dimension trois et d'autre part, que la distance entre deux points et le temps sont des grandeurs scalaires communes à tous les observateurs du mouvement.

Contrairement à la plupart des cours élémentaires, les déformations sont présentées sans aucune concession géométrique ou cinématique. Les déformations ne sont ni « petites » ni « grandes », elles sont tout simplement finies, et les mouvements envisageables ne sont pas restreints. Les « petites déformations » classiques n'apparaissent donc que comme un cas particulier.

La lecture de ce cours suppose une maîtrise suffisante de l'algèbre et de l'analyse tensorielles⁽¹⁾ : en effet, toutes les grandeurs physiques relatives aux milieux continus déformables sont représentées par des champs de tenseurs d'ordre 0 ou plus.

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :

- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple : a, μ) ;
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple : \mathbf{v}) ;
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple : \mathbf{T}) ;
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = [m_{ij}]$$

- la transposition est notée avec un \top en exposant (exemple : \mathbf{T}^\top) ;
- les ensembles d'entités mathématiques sont en majuscules doublées, en particulier :
 - \mathbb{R} est l'espace des réels,
 - \mathbb{V}_3 est un espace vectoriel de dimension 3,
 - $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$ est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p construits sur \mathbb{V}_3 (de dimension 3^p),
 - \mathbb{Q}_{3+} est le groupe des rotations ($\mathbb{Q}_{3+} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$) ;
- le produit vectoriel de deux vecteurs de \mathbb{V}_3 est noté « \wedge » ;
- Le tenseur métrique est noté \mathbf{G} ;
- Le tenseur d'orientation est noté \mathbf{H} .

⁽¹⁾ L'auteur propose un autre cours intitulé *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* : <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00679923>, ou bien <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tenseurs.html>.

Remerciement

Je tiens à remercier très vivement Mathias LEGRAND⁽²⁾, ce grand magicien de L^AT_EX, sans qui la mise en page de ce texte ne serait que celle par défaut de la classe book⁽³⁾ et qui m'a aussi donné de précieux conseils sur la typographie française.

Bonne lecture.

Information – Ce texte est rédigé en vue d'une lecture dynamique à l'écran : toutes les références internes et externes sont actives et conduisent à la cible référencée (dans la plupart des visualisateurs de fichiers au format pdf, on revient à l'état précédent avec la combinaison de touches <alt><page arrière>). Néanmoins, les références de pages ont été conservées pour la lecture du document imprimé.

⁽²⁾ De l'université McGill, de Montréal.

⁽³⁾ Ceux qui écrivent en L^AT_EX me comprendront.

Table des matières

1	Concepts fondamentaux	9
1.1	Modèle continu de la matière	9
	Milieu matériel continu, 9 • Particule, 10 • Champ matériel, 10.	
1.2	Mouvement par rapport à un observateur	11
	Observateur, 11 • Espace de calcul, 12 • Vecteur position, 12 • Mouvement, 13.	
1.3	Universalité et objectivité	14
1.4	Tenseur de changement d'observateur	15
	Biparticule, 15 • Tenseur de changement d'observateur, 16 • Relations avec la cinématique, 18.	
1.5	En bref...	19
2	Description des champs et du mouvement	21
2.1	Descriptions des champs matériels	21
	Description de Lagrange, 21 • Description d'Euler, 21.	
2.2	Descriptions du mouvement	22
	Transformation entre deux instants, 22 • Description de Lagrange, 23 • Description d'Euler, 23.	
2.3	Équivalence des descriptions	23
	Équivalence des descriptions de champs matériels, 23 • Équivalence des descriptions du mouvement, 24 • Comparaison des descriptions, 25.	
2.4	Champ des déplacements	26
2.5	Opérateurs différentiels lagrangiens et eulériens	26
	Rappels d'analyse tensorielle, 26 • Gradients lagrangien et eulérien, 27 • Gradient de la transformation, 28 • Relation entre gradient lagrangien et gradient eulérien, 29 • Autres opérateurs lagrangiens et eulériens, 29.	
2.6	Dérivée particulière d'un champ matériel	30
	Description de Lagrange, 30 • Description d'Euler, 31.	
2.7	Champ des accélérations	31
2.8	Outils d'analyse du mouvement	32
	Trajectoire, 32 • Ligne de courant, 33 • Ligne d'émission, 34 • Débits, 35.	
2.9	Mouvement stationnaire	36
2.10	Changements d'observateur	36
2.11	En bref...	37
3	Objectivité	39
3.1	Objectivité des grandeurs scalaires	40

3.2	Objectivité des grandeurs vectorielles	40
3.3	Objectivité des grandeurs tensorielles du second ordre	41
3.4	Objectivité des grandeurs tensorielles d'ordre p	42
3.5	Exemples de changements d'observateur	43
	Gradient de la transformation, 43 • Opérateurs différentiels eulériens sur des champs objectifs, 44 • Opérateurs différentiels eulériens sur des champs non objectifs, 46 • Opérateurs différentiels lagrangiens, 46 • Dérivée particulaire d'un champ objectif, 48.	
3.6	En bref ...	48
4	Déformation	51
4.1	Introduction	51
4.2	Direction matérielle	52
	Chemin matériel, 52 • Direction matérielle, 52.	
4.3	Voisinages d'une particule	53
4.4	Tenseurs de déformation lagrangiens	54
	Dilatation linéique, 54 • Tenseurs de déformation lagrangiens, 55.	
4.5	Tenseurs de déformation eulériens	57
	Dilatation linéique, 57 • Tenseurs de déformation eulériens, 58.	
4.6	Comparaisons	58
4.7	Spectre matériel de la déformation	59
	Directions matérielles propres, 60 • Dilatations linéiques principales, 61.	
4.8	Dilatation volumique	61
4.9	Distorsion stérique	62
4.10	Dilatation surfacique	63
	Facette matérielle, 63 • Dilatation surfacique, 64.	
4.11	Distorsion angulaire	66
4.12	Déviations d'une direction matérielle	67
4.13	Décomposition des déformations	67
	Déformation sphérique, 67 • Déformation isovolume, 68 • Décomposition des déformations, 68.	
4.14	Petites perturbations	70
	Tenseur des petites perturbations, 70 • Petites déformations sans restrictions sur le mouvement, 73.	
4.15	Changements d'observateur	74
	Directions matérielles, 75 • Facette matérielle, 75 • Tenseurs de déformation, 76 • Dilatation linéique, 77 • Dilatation volumique, 78 • Distorsion stérique, 78 • Dilatation surfacique, 78 • Distorsion angulaire, 78 • Déviation, 79 • Tenseur des petites perturbations, 79.	
4.16	En bref...	80
5	Vitesse de déformation	81
5.1	Introduction	81

5.2	Taux de dilatation linéique	81
	Point de vue eulérien, 81 • Point de vue lagrangien, 82.	
5.3	Taux de dilatation volumique	83
	Point de vue eulérien, 83 • Point de vue lagrangien, 84.	
5.4	Taux de dilatation surfacique	84
	Point de vue eulérien, 84 • Point de vue lagrangien, 85.	
5.5	Vitesse de rotation d'une direction matérielle	86
	Point de vue eulérien, 86 • Point de vue lagrangien, 87.	
5.6	Taux de distorsion angulaire	87
	Point de vue lagrangien, 87 • Point de vue eulérien, 88.	
5.7	Taux de distorsion stérique	89
	Point de vue lagrangien, 89 • Point de vue eulérien, 90.	
5.8	Tenseur tourbillon	90
5.9	Compatibilité des taux de déformation	91
5.10	Changements d'observateur	91
	Opérateurs eulériens, 91 • Taux de déformation, 94 • Tenseur tourbillon, 94 • Taux de dilatation linéique, 95 • Vitesse de rotation d'une direction matérielle, 95 • Taux de dilatation volumique, 96 • Taux de dilatation surfacique, 96 • Taux de distorsion angulaire, 96 • Dérivée de l'angle de deux directions matérielles, 96 • Taux de distorsion stérique, 97 • Dérivée du produit mixte de trois directions matérielles, 97.	
5.11	En bref...	97
6	Synthèse	99
A	Distorsions maximales	101
A.1	Distorsion angulaire maximale	101
	Recherche de la distorsion angulaire maximale, 102 • Recherche des couples de directions de distorsion angulaire maximale, 104.	
A.2	Distorsion stérique maximale	105
	Recherche de la distorsion stérique maximale, 105 • Recherche des trièdres des directions de distorsion stérique maximale, 107.	
B	Dérivées particulières utiles	109
B.1	Rappels	109
B.2	Tenseur de déformation eulérien B	110
B.3	Tenseur de déformation eulérien $V = \sqrt{B}$	111
B.4	Tenseur de déformation eulérien $M = \ln V$	111
B.5	Tenseurs de déformation lagrangiens	113

Concepts fondamentaux

Avant d'aborder les chapitres traitant de la cinématique des milieux continus proprement dite, on définit dans ce chapitre le concept de *milieu continu* puis on précise un certain nombre de concepts fondamentaux sur lesquels s'appuie la cinématique dans le cadre de la *physique classique*. On supposera donc que l'espace dans lequel les milieux matériels se déplacent, est mathématiquement représentable par un espace affine de points, de dimension 3, noté \mathcal{E}_3 , muni de la distance euclidienne.

1.1 Modèle continu de la matière

1.1.1 Milieu matériel continu

- **Définition 1.1 – Milieu continu.** Soit \mathcal{D} un domaine volumique de \mathcal{E}_3 . On dit que le domaine \mathcal{D} est rempli d'un milieu matériel continu si, à tout instant t et en chaque point M du domaine, on peut définir des grandeurs physiques relatives à ce milieu matériel.

Les grandeurs physiques d'un milieu continu sont donc décrites par des *champs* (distribution spatiale) variables avec le temps. En mécanique des milieux continus, les grandeurs physiques peuvent être mathématiquement représentées par :

- des champs scalaires (masse volumique, température, etc) ;
- des champs vectoriels (vitesse, accélération, etc) ;
- des champs tensoriels (déformations, contraintes, etc).

Remarque 1.1 – Les lecteurs qui connaissent la mécanique des solides indéformables ont déjà pratiqué la mécanique sur des milieux continus : ils ont considéré des champs scalaires (masse volumique, énergie cinétique massique) et des champs vectoriels (vitesses, accélérations) définis en tout point du domaine \mathcal{D} occupé par le solide. Les solides indéformables sont des cas particuliers de milieux continus.

Une vision continue de la matière (il existe quelque chose de matériel en tout point géométrique M du domaine \mathcal{D}) est assurément une *idéalisations*. Nos connaissances en physique atomique sont en flagrante contradiction avec cette affirmation : en un point géométrique M et à un instant t choisis arbitrairement, il n'y a qu'une très faible probabilité d'y trouver un corpuscule (atome, noyau, électron, ...) et bon nombre de grandeurs physiques macroscopiques perdent leur sens à cette échelle d'observation.

Exemple 1.2 – Des grandeurs macroscopiques telles que la pression, la température ou la vitesse, qui semblent naturellement descriptibles par des champs mathématiques $p(M, t)$, $T(M, t)$ ou $\mathbf{v}(M, t)$, perdent de leur sens au niveau microscopique : la probabilité est grande pour qu'il n'y ait que du vide au point M et à l'instant t , auquel on ne peut associer aucune de ces grandeurs physiques.

Le modèle continu de la matière présente néanmoins une grande utilité pratique car les vérifications expérimentales des prédictions de ce modèle se font macroscopiquement : lorsque l'on veut vérifier une pression, une température ou une vitesse prédite par la théorie en un point et à un instant donnés, on effectue une mesure avec un *appareil macroscopique* dont le « point de mesure » est en fait un petit volume contenant un très grand nombre de corpuscules. La mesure effectuée est donc une moyenne statistique, sur un petit volume de mesure et sur un petit intervalle de temps, des interactions des corpuscules microscopiques avec la zone sensible de l'appareil de mesure ⁽¹⁾.

La mécanique des milieux continus, ignorant délibérément la structure corpusculaire de la matière, ne peut fournir aucun renseignement sur les mouvements individuels des corpuscules microscopiques qui la constituent.

Remarque 1.2 – Les prédictions d'un modèle continu de la matière ne sont pas fiables si le volume du « point de mesure » ne contient pas suffisamment de corpuscules pour que la moyenne soit statistiquement significative. Par exemple, dans les hautes couches de l'atmosphère terrestre, le libre parcours moyen des corpuscules est de l'ordre du mètre. Si l'on veut que les prédictions d'un modèle continu de la matière dans cette région corroborent correctement des mesures, il faudrait un instrument dont le « point de mesure » ait un volume d'au moins 1 km^3 !

1.1.2 Particule en mécanique des milieux continus

- **Définition 1.3 – Point et particule.** L'espace \mathcal{E}_3 est constitué de *points géométriques* (concept mathématique). Un milieu matériel continu est constitué de *points matériels* que l'on appellera particules. À un instant t , chaque particule du milieu continu coïncide avec un point géométrique de \mathcal{E}_3 .

Par définition, *les particules sont donc des entités matérielles de volume nul.*

Vocabulaire – Dans des contextes autres que la mécanique des milieux continus, le mot « particule » est employé pour désigner des objets de volume non nul, comme des grains de poussière, des molécules, des atomes, etc. Dans ce cours, pour éviter toute ambiguïté, on désignera ces objets de petit volume par le mot « corpuscule ».

Remarque 1.3 – Beaucoup d'auteurs tiennent à attribuer aux particules de la mécanique des milieux continus un « petit volume » quelquefois aussi appelé « volume élémentaire représentatif », dont la taille n'est jamais clairement définie et à l'intérieur desquels on suppose parfois de plus que les grandeurs physiques sont uniformes. Ces considérations, censées être une aide pédagogique, paraissent nuisibles à l'auteur : elles empêchent de définir correctement des concepts mathématiques tels que des gradients ou des limites par exemple. La suite du cours montre qu'il n'est pas nécessaire de considérer des « petits volumes » pour développer la théorie des milieux continus.

1.1.3 Champ matériel

- **Définition 1.4 – Champ matériel.** Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$ un domaine contenant un milieu continu, de particule générique P , et soit Ψ une grandeur physique macroscopique (scalaire, vectorielle ou tensorielle). On appelle champ matériel toute application définie par :

$$\{P, t\} \in \mathcal{D} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\Psi} \Psi(P, t) \in \mathbb{V}^{\otimes p} \quad \text{où } \mathbb{V}^{\otimes p} \text{ est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre } p.$$

⁽¹⁾ On rappelle qu'une mole de gaz parfait (22,4 litres dans les conditions normales de pression et de température) contient $6,02 \cdot 10^{23}$ molécules. Combien y a-t-il de molécules dans un « point de mesure » de 1 mm^3 ?

(1.1)

Un champ matériel est la description de la grandeur Ψ pour toute particule et à tout instant.

- **Hypothèse 1.5 – Différentiabilité des champs.** En mécanique des milieux continus, on suppose que les champs matériels sont à tout instant t différentiables presque partout sur \mathcal{D} .

Précision 1.4 – Le sens de la locution « presque partout » est celui que l'on définit dans la théorie de la mesure : une propriété est vraie presque partout dans un domaine \mathcal{D} si l'ensemble des points de \mathcal{D} où la propriété est fautive est de volume nul. On admet donc la possibilité d'existence de points isolés, de lignes et de surfaces où les champs ne sont pas différentiables. On n'exclut donc pas *a priori* l'existence de phénomènes physiques tels que la cavitation, la fissuration ou les ondes de choc. À strictement parler, les champs matériels sont donc des distributions, et les intégrales qui seront écrites dans la suite sont à prendre au sens de Lebesgue.

Dans une première lecture, on peut ignorer cette extension en supposant que les champs sont partout différentiables et que les intégrales sont au sens classique de Riemann. En mécanique des milieux continus, on peut traiter la plupart des discontinuités simples en considérant des domaines différentiables par morceaux, avec des conditions de raccord aux frontières entre les morceaux.

On peut considérer l'hypothèse 1.5 comme un axiome de la mécanique des milieux continus. Elle permet l'existence d'un gradient de la grandeur physique Ψ , ainsi que celle de tous les opérateurs différentiels qui en découlent (divergence, rotationnel, laplacien), à chaque instant et en (presque) tout point de \mathcal{D} .

1.2 Mouvement par rapport à un observateur

1.2.1 Observateurs en physique classique

La notion d'*observateur*, appelé aussi *référentiel* ou encore *solide de référence* ⁽²⁾, est normalement définie dans les cours de mécanique générale. On en rappelle ici la définition :

- **Définition 1.6 – Observateur.** On appelle observateur (ou référentiel ou solide de référence) un ensemble de trois points (A, B, C) non colinéaires dont les distances sont constantes dans le temps, sur lesquels on a construit, par un procédé quelconque, un repère cartésien orthonormé direct.

Remarques 1.5 – Les trois points à distance constante (A, B, C) forment un « solide de référence » ; le repère cartésien orthonormé construit sur ces trois points est un « référentiel » ; le tout est un « observateur ». Il existe une infinité de manières pour contruire un repère orthonormé direct $(O, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ à partir de 3 points (A, B, C) ; on en donne quelques exemples :

1. Les trois vecteurs liés ⁽³⁾ $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ unitaires, orthogonaux et d'origine A définis par :

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|} \quad ; \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{AC}}{\|\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{AC}\|} \quad ; \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2$$

définissent un repère orthonormé direct $(A, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$.

⁽²⁾ Il n'y a aucune différence conceptuelle entre ces trois dénominations. Les termes *référentiel* et *solide de référence* sont plutôt employés dans les cours français de mécanique générale. Le mot *observateur* a été remis à la mode dans la seconde moitié du XX^e siècle par des mécaniciens américains (TRUESDEL, NOLL, COLEMAN et autres), se revendiquant de la « mécanique rationnelle ». L'auteur a choisi d'utiliser le mot « observateur » en raison de sa connotation anthropomorphe : il lui semble que l'on imagine mieux les différences dans l'observation d'un mouvement lorsque l'on parle d'un changement d'observateur plutôt que d'un changement de référentiel.

⁽³⁾ C'est à dire des bipoints ordonnés. Plus loin, on les notera $\{A, B\}$.

2. Les trois vecteurs liés $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ unitaires, orthogonaux et d'origine A définis par :

$$\mathbf{u}_{AB} = \frac{\mathbf{AB}}{\|\mathbf{AB}\|} ; \quad \mathbf{u}_{AC} = \frac{\mathbf{AC}}{\|\mathbf{AC}\|} ; \quad \mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{u}_{AB} + \mathbf{u}_{AC}}{\|\mathbf{u}_{AB} + \mathbf{u}_{AC}\|} ; \quad \mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{u}_{AB} - \mathbf{u}_{AC}}{\|\mathbf{u}_{AB} - \mathbf{u}_{AC}\|} ; \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2$$

définissent un repère orthonormé direct $(A, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$.

3. On prend comme origine le centre de gravité du triangle ABC et on construit un repère orthonormé direct $(G, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ sur les directions principales d'inertie du triangle ABC (on sait de la géométrie que l'on peut toujours trouver trois directions principales d'inertie orthogonales).

Un observateur \mathcal{R} étant choisi, on peut associer à tout point M de \mathcal{E}_3 , par projection orthogonale sur son repère cartésien orthonormé direct $(O, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$, le triplet de coordonnées cartésiennes orthonormées $\{\alpha_M^1, \alpha_M^2, \alpha_M^3\} \in \mathbb{R}^3$. Cette association est une bijection :

$$\{M \in \mathcal{E}_3, \mathcal{R}\} \leftrightarrow \{\alpha_M^1, \alpha_M^2, \alpha_M^3\} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.2)$$

Soit un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ défini par les trois points à distance constante $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ sur lesquels on a construit, par un procédé quelconque, son repère orthonormé direct $(\tilde{O}, \tilde{\mathbf{w}}_1, \tilde{\mathbf{w}}_2, \tilde{\mathbf{w}}_3)$ qui permet d'associer bijectivement à tout point M de \mathcal{E}_3 le triplet de coordonnées $\{\tilde{\alpha}_M^1, \tilde{\alpha}_M^2, \tilde{\alpha}_M^3\}$:

$$\{M \in \mathcal{E}_3, \tilde{\mathcal{R}}\} \leftrightarrow \{\tilde{\alpha}_M^1, \tilde{\alpha}_M^2, \tilde{\alpha}_M^3\} \in \mathbb{R}^3 \quad (1.3)$$

Chaque observateur associe donc à un même point M son propre triplet de réels :

$$\{\alpha_M^1, \alpha_M^2, \alpha_M^3\} \neq \{\tilde{\alpha}_M^1, \tilde{\alpha}_M^2, \tilde{\alpha}_M^3\}$$

1.2.2 Espace vectoriel de calcul

La représentation des points M de \mathcal{E}_3 par un triplet de réels propre à chaque observateur n'est pas la représentation la plus commode. En effet, il est difficile d'établir des comparaisons ou des relations entre les représentations d'objets (géométriques ou autres) issues de deux observateurs différents. Pour pallier cet inconvénient, on définit une autre bijection :

- **Définition 1.7 – Espace de calcul.** On appelle espace vectoriel de calcul, noté \mathbb{V}_3 un espace vectoriel mathématique de dimension 3 dans lequel on se donne une base orthonormée $\{\mathbf{e}_i\}$.

À tout triplet de réels $\{x^1, x^2, x^3\}$ on peut alors associer bijectivement un vecteur \mathbf{v} de \mathbb{V}_3 :

$$\{x^1, x^2, x^3\} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathbf{v} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{V}_3 \quad (1.4)$$

L'espace vectoriel de calcul \mathbb{V}_3 est un espace de vecteurs dits « libres » (aucune origine n'est associée aux éléments de \mathbb{V}_3).

1.2.3 Vecteur position d'un point pour un observateur

Soit un observateur \mathcal{R} . En combinant les bijections (1.2) et (1.4), on construit la bijection suivante :

$$\{M \in \mathcal{E}_3, \mathcal{R}\} \leftrightarrow \{\alpha_M^1, \alpha_M^2, \alpha_M^3\} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \mathbf{x}_M = \alpha_M^1 \mathbf{e}_1 + \alpha_M^2 \mathbf{e}_2 + \alpha_M^3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{V}_3$$

On peut alors poser la définition suivante :

- **Définition 1.8 – Vecteur position.** On appelle vecteur position du point M pour l'observateur \mathcal{R} le vecteur $\mathbf{x}_M \in \mathbb{V}_3$ défini par la bijection :

$$\{M \in \mathcal{E}_3, \mathcal{R}\} \leftrightarrow \mathbf{x}_M = \alpha_M^1 \mathbf{e}_1 + \alpha_M^2 \mathbf{e}_2 + \alpha_M^3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{V}_3$$

En appliquant cette définition avec un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, le vecteur position du même point M pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est un autre vecteur $\tilde{\mathbf{x}}_M$ de \mathbb{V}_3 :

$$\{M \in \mathcal{E}_3, \tilde{\mathcal{R}}\} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}_M = \tilde{\alpha}_M^1 \mathbf{e}_1 + \tilde{\alpha}_M^2 \mathbf{e}_2 + \tilde{\alpha}_M^3 \mathbf{e}_3 \in \mathbb{V}_3 \quad (1.5)$$

Les vecteurs position \mathbf{x}_M et $\tilde{\mathbf{x}}_M$, attribués *au même point* M respectivement par deux observateurs \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$, sont des *vecteurs différents* de \mathbb{V}_3 car leur triplet de composantes sur la base orthonormée $\{\mathbf{e}_i\}$ de \mathbb{V}_3 sont différents.

Cette méthode d'identification d'un point de \mathcal{E}_3 par son vecteur position *pour un observateur* \mathcal{R} , présente l'avantage de ne pas avoir à se soucier de systèmes de coordonnées. Quel que soit le point et quel que soit l'observateur, les vecteurs position sont des éléments de l'espace vectoriel de calcul \mathbb{V}_3 , dans lequel on dispose de tous les outils de l'algèbre et de l'analyse.

Pour alléger le langage, le vecteur position d'un point M (ou de la particule P qui s'y trouve) pour un observateur \mathcal{R} sera simplement appelé « position de M (ou de P) pour l'observateur \mathcal{R} » (il est sous-entendu que les positions de particules sont des vecteurs de \mathbb{V}_3).

1.2.4 Mouvement par rapport à un observateur

- **Définition 1.9 – Mouvement d'une particule.** On dit qu'une particule P est en mouvement *par rapport à un observateur* \mathcal{R} si sa position pour cet observateur est fonction du temps.

En particulier, un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est dit en mouvement par rapport à l'observateur \mathcal{R} si au moins l'un des points $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ définissant l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, est en mouvement pour l'observateur \mathcal{R} . Dans ce cas, on dit que l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est en mouvement par rapport à l'observateur \mathcal{R} (on dit aussi que les deux observateurs sont en mouvement relatif).

- **Définition 1.10 – Position actuelle.** La position d'une particule P pour un observateur \mathcal{R} à un instant t est appelée position actuelle de la particule P pour l'observateur \mathcal{R} .

Dans la suite, on aura parfois besoin de choisir ⁽⁴⁾ un instant particulier t_0 qui sera appelé *instant de référence*. On pose donc la définition suivante :

- **Définition 1.11 – Position de référence.** La position d'une particule P pour un observateur \mathcal{R} à l'instant de référence t_0 est appelée position de référence de la particule P pour l'observateur \mathcal{R} .

- **Notations 1.12 –** Dans la suite du cours, on utilisera les notations suivantes :

- la position actuelle d'une particule P pour un observateur \mathcal{R} est notée \mathbf{x}_t^P ,
- la position de référence d'une particule P pour un observateur \mathcal{R} est notée \mathbf{x}_0^P ,
- la position actuelle d'une particule P pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est notée $\tilde{\mathbf{x}}_t^P$,
- la position de référence d'une particule P pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est notée $\tilde{\mathbf{x}}_0^P$

⁽⁴⁾ Les motivations de ce choix seront précisées plus loin.

L'indice t rappelle que, contrairement aux positions de référence, les positions actuelles sont *a priori* fonction du temps. D'autre part, lorsque la particule P est générique, l'indice supérieur P pourra être omis.

- **Définition 1.13 – Vitesse actuelle d'une particule.** On appelle vitesse actuelle d'une particule P pour un observateur \mathcal{R} , la dérivée temporelle de sa position actuelle pour cet observateur.

Avec les notations 1.12 [p. 13], les vitesses d'une particule P s'écrivent :

- pour un observateur \mathcal{R} : $\mathbf{v}(P, t) = \frac{d\mathbf{x}_t^P}{dt} \in \mathbb{V}_3$
- pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$: $\tilde{\mathbf{v}}(P, t) = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_t^P}{dt} \in \mathbb{V}_3$

Les vitesses $\mathbf{v}(P, t)$ et $\tilde{\mathbf{v}}(P, t)$ d'une même particule P pour deux observateurs \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$ sont généralement des vecteurs de \mathbb{V}_3 différents.

Lors de l'étude du mouvement d'un milieu matériel, toute liberté est laissée au scientifique ou à l'ingénieur qui fait cette étude, dans le choix d'un observateur. *Le choix d'un observateur est arbitraire.* En cinématique, il n'y a aucune raison de privilégier un observateur plutôt qu'un autre ⁽⁵⁾.

Dire qu'une particule est en mouvement (ou fixe) sans préciser l'observateur utilisé pour observer ce mouvement, n'a aucun sens.

1.3 Universalité et objectivité

- **Définition 1.14 – Universalité d'une relation.** On dit qu'une relation est universelle si elle est identique pour tous les observateurs.

L'universalité est une propriété attribuable à une relation. En particulier, toute définition d'une grandeur physique se doit d'être une relation universelle.

Exemple 1.15 – Quelques définitions qui sont donc des relations universelles :

- La définition de la distance actuelle entre deux particules P et P' est : $d(P, P', t) = \|\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P\|$. Cette relation est universelle ; pour un autre observateur, la définition s'écrit : $\tilde{d}(P, P', t) = \|\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P\|$.
 - La définition de la vitesse actuelle d'une particule est : $\mathbf{v}(P, t) = \frac{d\mathbf{x}_t^P}{dt}$. Cette relation est universelle ; pour un autre observateur, la définition s'écrit : $\tilde{\mathbf{v}}(P, t) = \frac{d\tilde{\mathbf{x}}_t^P}{dt}$.
 - La définition de l'énergie cinétique actuelle d'un point matériel P de masse m est : $e_c = \frac{1}{2} m \mathbf{v}(P, t)^2$. Cette relation est universelle ; pour un autre observateur, la définition s'écrit : $\tilde{e}_c = \frac{1}{2} m \tilde{\mathbf{v}}(P, t)^2$.
 - Les lois de comportement d'un matériau doivent être des relations universelles : on ne conçoit pas que le comportement d'un matériau puisse être fonction de l'observateur utilisé pour l'observer ⁽⁶⁾.
- **Définition 1.16 – Objectivité d'une grandeur scalaire.** On dit qu'une grandeur scalaire est objective si, elle a la même valeur actuelle pour tous les observateurs.

L'objectivité est une propriété attribuable à une grandeur physique scalaire (l'objectivité de grandeurs physiques non scalaires sera définie au chapitre 3 [p. 39]). Certaines grandeurs physiques scalaires sont objectives, d'autres ne le sont pas.

⁽⁵⁾ Mais on peut être motivé, afin de simplifier des calculs, de choisir un observateur pour lequel un maximum d'entités sont fixes (par exemple une frontière ou une partie de frontière du domaine d'étude $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$).

⁽⁶⁾ L'universalité des lois de comportement est souvent appelée « principe de l'indifférence matérielle ».

Exemple 1.17 – En physique classique,

- le temps est une grandeur scalaire objective par principe ; il est supposé identique pour tous les observateurs ⁽⁷⁾ : $\tilde{t} = t$;
- la masse d'un objet matériel est une grandeur scalaire objective par principe ; elle est supposée identique pour tous les observateurs : $\tilde{m} = m$;
- la distance actuelle entre deux particules est une grandeur scalaire objective par principe ; elle est supposée identique pour tous les observateurs : $d(P, P', t) = \tilde{d}(P, P', t)$ (ici, on a utilisé $\tilde{t} = t$).

En revanche, l'énergie cinétique actuelle d'un point matériel P de masse m n'est pas une grandeur scalaire objective. Sa définition universelle est le scalaire :

$$e_c(P, t) = \frac{1}{2} m(P) \mathbf{v}(P, t)^2$$

L'application de cette définition universelle pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit au scalaire :

$$\tilde{e}_c(P, \tilde{t}) = \frac{1}{2} \tilde{m}(P) \tilde{\mathbf{v}}(P, \tilde{t})^2 = \frac{1}{2} m(P) \tilde{\mathbf{v}}(P, t)^2 \quad (\text{car } \tilde{m}(P) = m(P) \text{ et } \tilde{t} = t)$$

On a donc $e_c(P, t) \neq \tilde{e}_c(P, \tilde{t})$ car $\mathbf{v}(P, t)^2 \neq \tilde{\mathbf{v}}(P, t)^2$. Pour deux observateurs quelconques, les valeurs actuelles de l'énergie cinétique d'un point matériel sont des scalaires différents. Parler de l'énergie cinétique d'un objet matériel sans préciser l'observateur utilisé n'a donc aucun sens.

Remarque 1.6 – Dans la littérature spécialisée, on constate souvent un certain flou dans l'emploi du qualificatif « objectif » : ou bien il n'est tout simplement pas défini ⁽⁸⁾, ou bien il qualifie des grandeurs physiques, ou bien il qualifie des relations. La confusion entre l'universalité de relations et l'objectivité de grandeurs physiques est à l'origine de bien des incompréhensions et des malentendus.

1.4 Tenseur de changement d'observateur

Puisque l'on peut utiliser des observateurs arbitrairement choisis pour décrire les mouvements de milieux continus, il est utile de se demander si des relations existent entre les propriétés attribuées par chaque observateur à un même objet matériel. Le choix des observateurs étant arbitraire, il n'existe *a priori* aucune relation intéressante entre les positions \mathbf{x}_i^P et $\tilde{\mathbf{x}}_i^P$ d'une même particule P pour deux observateurs \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$: la différence entre ces deux vecteurs position dépend du choix arbitraire des observateurs [déf. 1.8 p. 13]. Toutefois, on va montrer qu'une relation existe entre les positions attribuées par des observateurs différents à des objets matériels appelés biparticules. Cette relation est une conséquence de l'objectivité de la distance actuelle entre deux particules ; elle permettra d'affirmer l'existence d'un tenseur orthogonal appelé tenseur de changement d'observateur.

1.4.1 Biparticule

- **Définition 1.18 – Biparticule.** On appelle biparticule, un ensemble ordonné de deux particules, noté $\{P, P'\}$. La particule P est appelée origine de la biparticule, la particule P' est appelée extrémité de la biparticule.
- **Définition 1.19 – Position actuelle d'une biparticule.** On appelle position actuelle d'une biparticule pour un observateur \mathcal{R} , la différence entre la position actuelle de l'extrémité et la position actuelle de l'origine pour cet observateur.

⁽⁷⁾ Autrement dit : « tous les observateurs utilisent la même horloge ».

⁽⁸⁾ Et on lui fait alors dire ce que l'on veut suivant les circonstances.

En utilisant les notations 1.12 [p. 13], les positions d'une biparticule $\{P, P'\}$ sont :

- pour un observateur \mathcal{R} , la position actuelle de la biparticule est le vecteur : $\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P \in \mathbb{V}_3$,
- pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, la position actuelle de la biparticule est le vecteur : $\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P \in \mathbb{V}_3$.

Vocabulaire – Une biparticule est parfois appelée « vecteur matériel ». Cette appellation est dangereuse car une biparticule n'est pas un élément d'espace vectoriel. Seul le vecteur position de la biparticule pour un certain observateur est un élément de \mathbb{V}_3 . La locution « considérons le vecteur \mathbf{PP}' » n'a pas de sens vectoriel si l'on omet de préciser l'observateur utilisé car chaque observateur associe à la biparticule $\{P, P'\}$ un vecteur position de \mathbb{V}_3 différent⁽⁹⁾. Ce malencontreux raccourci de langage est à l'origine de bien des malentendus voire des erreurs.

- **Définition 1.20 – Longueur actuelle d'une biparticule.** On appelle longueur actuelle d'une biparticule la norme de son vecteur position actuelle :

$$\ell(\{P, P'\}, t) = \|\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P\|$$

Le lecteur vérifiera aisément que $\ell(\{P, P'\}, t) = \ell(\{P', P\}, t)$. On peut donc poser la définition suivante :

- **Définition 1.21 – Distance actuelle entre particules.** On appelle distance actuelle entre deux particules la longueur actuelle de la biparticule $\{P, P'\}$ (ou celle de $\{P', P\}$) :

$$d(P, P', t) = d(P', P, t) = \|\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P\|$$

1.4.2 Existence du tenseur de changement d'observateur

Bien que ce soit non exprimé explicitement dans la définition 1.21, la distance actuelle entre deux particules est apparemment différente d'un observateur à l'autre puisqu'elle est définie à partir de positions qui sont propres à chaque observateur. Un principe de la physique classique permet d'affirmer qu'elles ne le sont pas :

- **Principe 1.22 – Objectivité des distances actuelles.** La distance actuelle entre deux particules est une grandeur scalaire objective (elle est la même pour tous les observateurs) :

$$d(P, P', t) = \tilde{d}(P, P', t), \quad \forall t, \forall P, \forall P', \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}}$$

On en déduit que si \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$ sont deux observateurs quelconques, alors :

$$\|\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P\| = \|\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P\|, \quad \forall t, \forall P, \forall P', \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \quad (1.6)$$

Remarque 1.7 – Le principe de l'objectivité des distances n'est valable que dans le cadre de ce qu'il est convenu d'appeler la « physique classique ». Ce principe est contredit en mécanique relativiste : un observateur constate une contraction de certaines dimensions d'un objet en mouvement par rapport lui. En mécanique relativiste, on remet aussi en question l'objectivité du temps et celle de la masse [exemples 1.17 p. 15]. Tant que les vitesses envisagées en mécanique des milieux continus restent négligeables devant la célérité de la lumière, le principe de l'objectivité des distances reste valable.

⁽⁹⁾ On verra dans suite que ces deux vecteurs différents ont néanmoins le même module.

- **Théorème 1.23 – Tenseur de changement d'observateur.** Soient deux observateurs \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$ *a priori* en mouvement relatif. Si la distance actuelle entre deux particules est une grandeur objective, alors il existe un tenseur orthogonal appelé tenseur actuel de changement d'observateur de \mathcal{R} à $\tilde{\mathcal{R}}$, noté $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}(t)$, tel que :

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_i^P = \mathbf{Q}_{\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}(t) \cdot (\mathbf{x}_i^{P'} - \mathbf{x}_i^P) \quad \forall t, \forall P, \forall P', \quad (1.7)$$

Démonstration – Considérons quatre particules A, B, C et D non coplanaires. On note :

- $\mathbf{p}^{AB} = \mathbf{x}_i^B - \mathbf{x}_i^A$ la position actuelle de la biparticule $\{A, B\}$ pour l'observateur \mathcal{R} ,
- $\tilde{\mathbf{p}}^{AB} = \tilde{\mathbf{x}}_i^B - \tilde{\mathbf{x}}_i^A$ la position actuelle de la même biparticule $\{A, B\}$ pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$.

L'image dans \mathbb{V}_3 des quatre particules pour chaque observateur permet de former un trièdre de vecteurs de \mathbb{V}_3 . On note :

- $\mathcal{T} = \{\mathbf{p}^{AB}, \mathbf{p}^{AC}, \mathbf{p}^{AD}\}$ le trièdre image actuel pour l'observateur \mathcal{R}
- $\tilde{\mathcal{T}} = \{\tilde{\mathbf{p}}^{AB}, \tilde{\mathbf{p}}^{AC}, \tilde{\mathbf{p}}^{AD}\}$ le trièdre image actuel pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$

Les distances actuelles entre particules étant objectives, les deux trièdres ont les mêmes longueurs, les mêmes angles et les deux trièdres constituent des bases de \mathbb{V}_3 de même orientation⁽¹⁰⁾. Autrement dit, les deux trièdres \mathcal{T} et $\tilde{\mathcal{T}}$ sont superposables.

On sait de la géométrie algébrique dans \mathbb{V}_3 qu'il existe une rotation unique $\mathbf{Q} \in \mathbb{Q}_{3+}$ telle que :

$$\tilde{\mathbf{p}}^{AB} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}^{AB} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{p}}^{AC} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}^{AC} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{p}}^{AD} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}^{AD} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{p}}^{BC} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}^{BC} \quad ; \quad \dots$$

En considérant les trièdres construits avec les particules (A, B, C, M) et (A, B, C, N) , le lecteur vérifiera aisément que l'objectivité des distances actuelles entre particules implique que, quelle que soit la biparticule $\{M, N\}$, la rotation \mathbf{Q} qui a été définie avec les quatre particules $\{A, B, C, D\}$, permet de passer de la position actuelle de toute biparticule $\{M, N\}$ pour l'observateur \mathcal{R} à celle pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ par la relation :

$$\tilde{\mathbf{p}}^{MN} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{p}^{MN}, \forall \{MN\} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}}_i^N - \tilde{\mathbf{x}}_i^M = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{x}_i^N - \mathbf{x}_i^M), \forall \{M, N\}$$

La rotation actuelle \mathbf{Q} qui permet de passer de la position actuelle de toute biparticule pour un observateur \mathcal{R} à celle de la même biparticule pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est notée $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}(t)$.

Le tenseur de changement d'observateur $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}(t)$ est donc un endomorphisme orthogonal de \mathbb{V}_3 qui permet d'écrire la relation entre la position actuelle de toute biparticule $\{P, P'\}$ pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ et la position actuelle de cette même biparticule pour l'observateur \mathcal{R} .

Commentaire 1.8 – On ne peut *a priori* écrire aucune relation en les positions actuelles \mathbf{x}_i^P et $\tilde{\mathbf{x}}_i^P$ d'une particule P attribuées par deux observateurs \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$ quelconques sans connaître leur position relative actuelle. Néanmoins, l'objectivité des distances actuelles entre particules permet d'affirmer l'existence de la rotation $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}(t)$ reliant les positions actuelles des *biparticules* pour deux observateurs quelconques. Si l'on ne connaît pas le mouvement relatif des deux observateurs, la valeur actuelle du tenseur orthogonal $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}(t)$ est certes inconnue, mais son orthogonalité est certaine ; c'est cette seule qualité qui sera utilisée dans les démonstrations qui évoquent des changements d'observateur.

- **Notation 1.24** – Dans la suite, les deux observateurs \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$ seront *a priori* quelconques et en mouvement relatif quelconque, le tenseur de changement d'observateur actuel $\mathbf{Q}_{\mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}}}(t)$ sera noté plus simplement \mathbf{Q}_t (on conserve l'indice t pour rappeler qu'il s'agit d'une valeur actuelle).
- **Propriété 1.25** – Les propriétés algébriques des rotations impliquent que :
 - les angles non orientés formés par les positions actuelles de trois particules sont les mêmes pour tous les observateurs : les angles actuels sont des grandeurs scalaires objectives ;
 - l'aire du triangle formé par les positions actuelles de trois particules est la même pour tous les observateurs : les aires actuelles sont des grandeurs scalaires objectives ;

⁽¹⁰⁾ Car tous les observateurs construisent une base orthonormée directe [déf. 1.6 p. 11].

- le produit mixte formé par les positions actuelles de quatre particules est le même pour tous les observateurs : les volumes actuels sont des grandeurs scalaires objectives.

1.4.3 Relations avec les concepts introduits en cinématique élémentaire

Rappels d'algèbre sur les rotations – L'angle θ_t et l'axe \mathbf{w}_t d'une rotation \mathbf{Q}_t sont :

$$\cos \theta_t = \frac{\text{tr} \mathbf{Q}_t - 1}{2} \quad \text{où } \theta_t \in [0, \pi] \quad \text{et} \quad \mathbf{w}_t = -\frac{\mathbf{H} : \mathbf{Q}_t}{\sin \theta_t} = -\frac{\mathbf{H} : \mathbf{Q}_t}{\|\mathbf{H} : \mathbf{Q}_t\|} \quad (1.8)$$

La relation inverse $(\theta_t, \mathbf{w}_t) \rightarrow \mathbf{Q}_t$ est :

$$\mathbf{Q}_t = \cos \theta_t \mathbf{G} + (1 - \cos \theta_t) \mathbf{w}_t \otimes \mathbf{w}_t - \sin \theta_t \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}_t \quad (1.9)$$

En dérivant temporellement l'identité $\mathbf{Q}_t^\top \cdot \mathbf{Q}_t = \mathbf{G}$ on trouve :

$$\frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t = -\mathbf{Q}_t^\top \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} = -\left(\frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t\right)^\top \quad (1.10)$$

Les tenseurs $\frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t$ et $\mathbf{Q}_t^\top \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt}$ sont donc opposés et antisymétriques.

On note $\boldsymbol{\omega}_t$ le vecteur adjoint au tenseur antisymétrique $\frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t$:

$$\boldsymbol{\omega}_t = \frac{1}{2} \mathbf{H} : \left(\frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\omega}_t$$

Il découle des propriétés des tenseurs antisymétriques que :

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t\right) \cdot \mathbf{x} = -\boldsymbol{\omega}_t \wedge \mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{V}_3 \quad (1.11)$$

Dans les cours de cinématique élémentaire, on n'introduit pas le tenseur de changement d'observateur, car la bijection entre tenseurs orthogonaux de déterminant +1 et les rotations géométriques n'est pas supposée connue. La rotation tensorielle \mathbf{Q}_t y est donc définie comme une rotation géométrique d'axe unitaire \mathbf{w}_t et d'angle $\theta_t \in [0; \pi]$. Le vecteur $\theta_t \mathbf{w}_t$, souvent noté $\boldsymbol{\Omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}}$, est appelé *vecteur rotation de $\tilde{\mathcal{R}}$ par rapport à \mathcal{R}* (valeur actuelle). La seule nouveauté ici est donc de représenter la rotation géométrique actuelle (θ_t, \mathbf{w}_t) par un tenseur de changement d'observateur orthogonal \mathbf{Q}_t de déterminant +1, qui se prête mieux au calcul tensoriel : le tourné \mathbf{y} d'un vecteur \mathbf{x} par la rotation (θ_t, \mathbf{w}_t) s'écrit simplement : $\mathbf{y} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{x}$. Les relations d'équivalence entre le couple (θ_t, \mathbf{w}_t) et le tenseur \mathbf{Q}_t ont été rappelées dans les équations (1.8) et (1.9).

En appliquant la définition du tenseur de changement d'observateur, donnée en (1.7) [p. 17], à deux points \tilde{A} et \tilde{B} choisis parmi ceux qui définissent un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, il vient :

$$\tilde{\mathbf{x}}_t^{\tilde{B}} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{\tilde{A}} = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{x}_t^{\tilde{A}}) \quad (1.12)$$

Par définition, les points \tilde{A} et \tilde{B} sont fixes pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, c'est-à-dire que leur vecteur position $\tilde{\mathbf{x}}_t^{\tilde{A}}$ et $\tilde{\mathbf{x}}_t^{\tilde{B}}$ sont des vecteurs de \mathbb{V}_3 temporellement constants :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}_t^{\tilde{B}} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{x}}_t^{\tilde{A}} = \mathbf{0}$$

En dérivant par rapport au temps l'égalité (1.12), on obtient donc :

$$\mathbf{0} = \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot (\mathbf{x}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{x}_t^{\tilde{A}}) + \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{v}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{v}_t^{\tilde{A}}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{v}_t^{\tilde{A}} = -\left(\mathbf{Q}_t^\top \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt}\right) \cdot (\mathbf{x}_t^{\tilde{B}} - \mathbf{x}_t^{\tilde{A}}) \quad (1.13)$$

où le tenseur du second ordre $\mathbf{Q}_t^\top \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt}$ est antisymétrique [éq. (1.10) p. 18].

Si on note $\boldsymbol{\omega}_t = \frac{1}{2}\mathbf{H} : (\mathbf{Q}_t^\top \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt})$ le vecteur adjoint au tenseur antisymétrique $\mathbf{Q}_t^\top \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt}$, alors, en vertu de la relation (1.11) [p. 18], on a l'égalité :

$$\left(\mathbf{Q}_t^\top \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt}\right) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A) = -\boldsymbol{\omega}_t \wedge (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A)$$

L'équation (1.13) s'écrit alors :

$$\mathbf{v}^{\tilde{B}} - \mathbf{v}^{\tilde{A}} = \boldsymbol{\omega}_t \wedge (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v}^{\tilde{B}} = \mathbf{v}^{\tilde{A}} + \boldsymbol{\omega}_t \wedge (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A)$$

On reconnaît la formule habituellement donnée dans les cours de cinématique élémentaire pour décrire le champ des vitesses d'un solide (ici le solide est constitué des points à distance constante $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C})$ définissant l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$) où le vecteur $\boldsymbol{\omega}_t$, généralement noté $\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}}$, est le vecteur *vitesse de rotation actuelle de l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ pour l'observateur \mathcal{R}* habituellement introduit en cinématique élémentaire. La relation entre $\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}}$ et \mathbf{Q}_t est donc :

$$\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} = \boldsymbol{\omega}_t = \frac{1}{2}\mathbf{H} : \left(\mathbf{Q}_t^\top \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt}\right) = \text{adj} \left(\mathbf{Q}_t^\top \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt}\right) = -\text{adj} \left(\frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t\right) \quad (1.14)$$

La connaissance des valeurs actuelles du tenseur de changement d'observateur \mathbf{Q}_t permet donc de retrouver la vitesse de rotation de $\tilde{\mathcal{R}}$ par rapport à \mathcal{R} introduite en cinématique élémentaire.

Changement d'observateur inverse – De l'équation (1.7) p. 17] il vient :

$$\mathbf{x}_t^B - \mathbf{x}_t^A = \mathbf{Q}_t^\top \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A) \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont deux des points définissant l'observateur } \mathcal{R}.$$

En dérivant temporellement (les points A et B sont fixes pour l'observateur \mathcal{R}), il vient :

$$\mathbf{0} = \frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt} \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A) + \mathbf{Q}_t^\top \cdot (\tilde{\mathbf{v}}_t^B - \tilde{\mathbf{v}}_t^A) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{v}}_t^B - \tilde{\mathbf{v}}_t^A = -\left(\mathbf{Q}_t \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt}\right) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A)$$

où le tenseur $\mathbf{Q}_t \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt}$ est antisymétrique de vecteur adjoint $\boldsymbol{\omega}'$. On a alors :

$$\tilde{\mathbf{v}}_t^B - \tilde{\mathbf{v}}_t^A = \boldsymbol{\omega}' \wedge (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{v}}_t^B = \tilde{\mathbf{v}}_t^A + \boldsymbol{\omega}' \wedge (\tilde{\mathbf{x}}_t^B - \tilde{\mathbf{x}}_t^A)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\omega}'$ est donc le vecteur vitesse de rotation de \mathcal{R} pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$:

$$\boldsymbol{\omega}' = \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} = \text{adj} \left(\mathbf{Q}_t \cdot \frac{d\mathbf{Q}_t^\top}{dt}\right) = -\text{adj} \left(\frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^\top\right) \quad (1.15)$$

Noter que les deux vecteurs $\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} \in \mathbb{V}_3$ et $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} \in \mathbb{V}_3$ ne sont pas opposés, le premier étant évalué par ses composantes dans le repère de l'observateur \mathcal{R} et le second dans le repère de l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$. En utilisant l'identité $(\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) \otimes^3 \mathbf{H} = \mathbf{H}$, on montre la relation entre $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}}$ et $\boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathcal{R}|\tilde{\mathcal{R}}} = -\mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} \quad (1.16)$$

1.5 En bref...

Le modèle milieu continu est une idéalisation de la matière. Ses prévisions ne peuvent corroborer que des vérifications macroscopiques.

Pour décrire le mouvement d'un milieu continu, il faut choisir un observateur.

Pour décrire des grandeurs associées à des particules à tout instant, on utilise des champs matériels scalaires, vectoriels ou tensoriels, (presque partout) différentiables et dérivables par rapport au temps.

Une relation est universelle si elle est la même pour tous les observateurs.

Une grandeur scalaire est objective si sa valeur est la même pour tous les observateurs.

L'universalité de la définition des distances, ainsi que les principes d'objectivité du temps et de la distance entre deux particules, impliquent l'existence d'un tenseur de changement d'observateur qui est une rotation (tenseur orthogonal de déterminant $+1$). Le tenseur de changement d'observateur est la représentation tensorielle équivalente au classique vecteur rotation d'un observateur par rapport à un autre défini en cinématique élémentaire.

Description des champs et du mouvement

Dans ce chapitre, on présente les deux méthodes couramment utilisées en mécanique des milieux continus pour identifier les particules : la méthode de Lagrange et la méthode d'Euler. Chacune de ces deux méthodes conduit à sa propre manière de décrire les champs matériels et le mouvement pour un certain observateur. On présente ensuite quelques outils (trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission, dérivée particulaire) qui aident à visualiser les mouvements d'un milieu continu et à appréhender les évolutions des grandeurs physiques liées aux particules.

2.1 Descriptions des champs matériels

2.1.1 Description de Lagrange d'un champ matériel

Soit t_0 un instant de référence un instant arbitrairement choisi.

Dans la description de Lagrange, les particules sont identifiées par leur position de référence, c'est-à-dire qu'on les désigne par la position \mathbf{x}_0 (pour un observateur \mathcal{R}) qu'elles occupent à l'instant de référence t_0 .

- **Définition 2.1 – Description de Lagrange d'un champ matériel.** Soit un champ matériel $\Psi(P, t)$ (scalaire, vectoriel ou tensoriel). Sa description de Lagrange est la fonction Ψ_L définie par :

$$(\mathbf{x}_0, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\Psi_L} \Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi(P, t) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$$

où \mathbf{x}_0 est la position de référence de la particule P pour un observateur \mathcal{R} .

Le domaine de définition de la fonction Ψ_L est donc le domaine occupé par les particules à l'instant de référence t_0 , mais la valeur du champ est sa valeur actuelle.

Vocabulaire – Quand on a choisi un quelconque système de coordonnées, l'argument vectoriel \mathbf{x}_0 de la fonction Ψ_L , peut être remplacé par 3 réels (x_0^1, x_0^2, x_0^3) qui sont les coordonnées des points occupés par les particules à l'instant t_0 . Dans ce cas les quatre arguments réels (x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) de la fonction Ψ_L sont appelés *variables de Lagrange*.

2.1.2 Description d'Euler d'un champ matériel

Dans la description d'Euler, les particules sont identifiées par leur position actuelle, c'est-à-dire qu'on les désigne par la position \mathbf{x}_t (pour un observateur \mathcal{R}) qu'elles occupent à l'instant actuel t .

- **Définition 2.2 – Description d'Euler d'un champ matériel.** Soit un champ matériel $\Psi(P, t)$ (scalaire, vectoriel ou tensoriel). Sa description d'Euler est la fonction Ψ_E définie par :

$$(\mathbf{x}_t, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\Psi_E} \Psi_E(\mathbf{x}_t, t) = \Psi(P, t) \in \mathbb{V}_3^{\otimes P}$$

où \mathbf{x}_t est la position actuelle de la particule P pour l'observateur \mathcal{R} .

Le domaine de définition de la fonction Ψ_E est donc le domaine actuellement occupé par les particules et la valeur du champ est la valeur actuelle.

Vocabulaire – Quand on a choisi un quelconque système de coordonnées, l'argument vectoriel \mathbf{x}_t de la fonction Ψ_E peut être remplacé par 3 réels (x_t^1, x_t^2, x_t^3) qui sont les coordonnées actuelles des points occupés par les particules. Dans ce cas les quatre arguments réels (x_t^1, x_t^2, x_t^3, t) de la fonction Ψ_E sont appelés *variables d'Euler*.

2.2 Descriptions du mouvement

2.2.1 Transformation entre deux instants

- **Définition 2.3 – Transformation.** Soit un milieu continu en mouvement pour un certain observateur \mathcal{R} , et soit P l'une quelconque de ses particules. On note \mathbf{x}_t et $\mathbf{x}_{t'}$ les positions, pour un observateur \mathcal{R} , de la particule P aux instants t et t' . On appelle transformation entre les instants t et t' l'application $\mathbf{f}_{t't} : \mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3$ qui à toute position d'une particule à l'instant t fait correspondre sa position à l'instant t' :

$$\mathbf{x}_t \in \mathbb{V}_3 \xrightarrow{\mathbf{f}_{t't}} \mathbf{x}_{t'} = \mathbf{f}_{t't}(\mathbf{x}_t) \in \mathbb{V}_3 \quad (\text{pour un observateur } \mathcal{R}) \quad (2.1)$$

- **Hypothèse 2.4** – Dans un mouvement de milieu continu, on fait les hypothèses suivantes :
 1. toute particule dont la position à l'instant t est \mathbf{x}_t a une position $\mathbf{x}_{t'}$ à l'instant t' ;
 2. deux particules distinctes P et Q dont les positions à l'instant t sont $\mathbf{x}_t^P \neq \mathbf{x}_t^Q$, ne peuvent occuper la même position à un autre instant t' (autrement dit, les $\mathbf{x}_{t'}$ n'ont qu'un seul antécédent dans la transformation $\mathbf{f}_{t't}$).

Dans ces conditions, la fonction $\mathbf{f}_{t't}$ est à la fois surjective et injective, donc bijective. La transformation inverse existe donc :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}_{t't}^{-1}(\mathbf{x}_{t'}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{f}_{t't}^{-1} = \mathbf{f}_{t't} \quad (2.2)$$

Remarque 2.1 – Dans un mouvement de milieu continu, il est envisageable que l'inversibilité de la transformation $\mathbf{f}_{t't}$ ne soit vraie que presque partout [précision 1.4 p. 11]. Par exemple, si une cavitation se produit dans le mouvement entre les instants t et t' , il existe une particule de position \mathbf{x}_t (le « germe » de la cavitation) qui a une infinité de positions à l'instant t' : ce sont tous les points de la surface délimitant la bulle de cavitation qui existe à l'instant t' . Dans le cas d'une fissuration, il existe toute une surface de positions \mathbf{x}_t qui ont deux positions $\mathbf{x}_{t'}$: une sur chaque lèvres de la fissure ouverte.

Le lecteur établira aisément les deux propriétés :

$$\mathbf{f}_{tt} = I \text{ (identité)} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_{tt''} = \mathbf{f}_{t't''} \circ \mathbf{f}_{t't} \text{ (transitivité)}$$

2.2.2 Description de Lagrange du mouvement

- **Définition 2.5 – Description de Lagrange du mouvement.** On appelle description de Lagrange du mouvement pour un observateur \mathcal{R} , la description de Lagrange du champ matériel des positions actuelles $\mathbf{x}_t(P, t)$ pour cet observateur :

$$(\mathbf{x}_0, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_t(P, t) \in \mathbb{V}_3 \quad (2.3)$$

Décrire le mouvement par la méthode de Lagrange est donc équivalent à donner la transformation entre les instants t_0 et t [déf. 2.3 p. 22].

Remarque 2.2 – La transformation \mathbf{f} , qui devrait être notée $\mathbf{f}_{t_0 t}$ pourrait aussi bien être notée : \mathbf{x}_{tL} (description de Lagrange des positions actuelles).

Équations développées – Quand on a choisi un système de coordonnées, la fonction vectorielle $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$ est à remplacer par la fonction vectorielle $\mathbf{f}(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t)$ où x_0^1, x_0^2 et x_0^3 sont les coordonnées d'une particule à l'instant de référence t_0 . Quand on a choisi une base $\{\mathbf{e}_i\}$, la fonction vectorielle \mathbf{f} est décrite par les trois fonctions réelles f^1, f^2 et f^3 suivantes :

$$\mathbf{f}(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) = f^1(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) \mathbf{e}_1 + f^2(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) \mathbf{e}_2 + f^3(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) \mathbf{e}_3 \quad (2.4)$$

2.2.3 Description d'Euler du mouvement

- **Définition 2.6 – Description d'Euler du mouvement.** On appelle description d'Euler du mouvement pour l'observateur \mathcal{R} , la description d'Euler du champ matériel des vitesses actuelles $\mathbf{v}(P, t)$ pour cet observateur :

$$(\mathbf{x}_t, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\mathbf{v}_E} \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{v}(P, t) \in \mathbb{V}_3 \quad (2.5)$$

Illustration – On peut considérer la description d'Euler du mouvement comme la donnée de la collection des « photographies » du champ des vitesses à tous les instants.

Équations développées – Quand on a choisi un système de coordonnées, la fonction vectorielle $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)$ est à remplacer par la fonction vectorielle $\mathbf{v}_E(x_t^1, x_t^2, x_t^3, t)$ où x_t^1, x_t^2 et x_t^3 sont les coordonnées actuelles d'une particule. Quand on a choisi une base $\{\mathbf{e}_i\}$, le champ vectoriel \mathbf{v}_E est décrit par les trois fonctions réelles v_E^1, v_E^2 et v_E^3 suivantes :

$$\mathbf{v}_E(x_t^1, x_t^2, x_t^3, t) = v_E^1(x_t^1, x_t^2, x_t^3, t) \mathbf{e}_1 + v_E^2(x_t^1, x_t^2, x_t^3, t) \mathbf{e}_2 + v_E^3(x_t^1, x_t^2, x_t^3, t) \mathbf{e}_3$$

2.3 Équivalence des descriptions

2.3.1 Équivalence des descriptions de champs matériels

Tout champ matériel $\Psi(P, t)$ peut donc être décrit aussi bien par la méthode de Lagrange que par la méthode d'Euler. Pour une particule P , de position de référence \mathbf{x}_0 et de position actuelle \mathbf{x}_t , on a les égalités :

$$\Psi(P, t) = \Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t) \quad (2.6)$$

Les deux fonctions Ψ_L et Ψ_E sont deux applications différentes (leur domaine de définition est différent), mais leur valeur actuelle pour une particule est la même. La transformation \mathbf{f} étant inversible, on passe d'une description à l'autre de la manière suivante :

- si le champ matériel $\Psi(P,t)$ est connu par sa description de Lagrange $\Psi_L(\mathbf{x}_0,t)$, alors sa description d'Euler est :

$$\Psi_E(\mathbf{x}_t,t) = \Psi_L(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t,t),t) \quad (2.7)$$

- si le champ matériel $\Psi(P,t)$ est connu par sa description d'Euler $\Psi_E(\mathbf{x}_t,t)$, alors sa description de Lagrange est :

$$\Psi_L(\mathbf{x}_0,t) = \Psi_E(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0,t),t) \quad (2.8)$$

On voit donc qu'il suffit de connaître la description de Lagrange du mouvement \mathbf{f} pour passer d'une description à l'autre d'un champ matériel Ψ .

2.3.2 Équivalence des descriptions du mouvement

La description de Lagrange du mouvement [déf. 2.5 p. 23] donne les *positions actuelles* des particules alors que la description d'Euler du mouvement [déf. 2.6 p. 23] donne les *vitesse actuelles* des particules. La question se pose de savoir si elles sont équivalentes.

Passage de la description de Lagrange du mouvement à celle d'Euler

Supposons que l'on connaisse la description de Lagrange du mouvement \mathbf{f} d'un milieu matériel continu. La position actuelle des particules est donnée par :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0,t)$$

La vitesse d'une particule, identifiée ici par sa position de référence \mathbf{x}_0 , est par définition la dérivée par rapport au temps de sa position actuelle :

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0,t) = \frac{d\mathbf{x}_t}{dt} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0,t)}{\partial t} \quad (\text{dérivée à particule constante, c'est-à-dire à } \mathbf{x}_0 \text{ constant}) \quad (2.9)$$

Le champ vectoriel $\mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0,t)$ défini dans l'équation (2.9) est la description de Lagrange du champ des vitesses. On obtient la description d'Euler des vitesses, c'est-à-dire la description d'Euler du mouvement [déf. 2.6 p. 23], en utilisant l'équation (2.7) :

$$\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t,t) = \mathbf{v}_L(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t,t),t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t,t),t)}{\partial t} \quad (2.10)$$

Équations développées – La traduction de l'équation vectorielle (2.10) en un système de trois équations réelles portant sur des coordonnées dépend à la fois du système de coordonnées utilisé (signification géométrique des trois variables réelles de position actuelle) et de la base sur laquelle on projette cette égalité vectorielle en trois équations réelles.

Passage de la description d'Euler du mouvement à celle de Lagrange

Inversement, supposons que l'on connaisse la description d'Euler du mouvement \mathbf{v}_E d'un milieu matériel continu :

$$\mathbf{v}(P,t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t,t) \quad [\text{éq. (2.5) p. 23}]$$

Trouver la description de Lagrange du mouvement, c'est trouver la description de Lagrange des positions actuelles \mathbf{x}_t des particules, c'est-à-dire trouver la fonction \mathbf{f} telle que $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$. La description de Lagrange des vitesses est la vitesse de la particule (identifiée par \mathbf{x}_0) :

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \quad [\text{éq. (2.9) p. 24}] \quad (2.11)$$

D'après l'équation (2.8) [p. 24, elle est aussi :

$$\mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{v}_E(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t) \quad (2.12)$$

Des équations (2.11) et (2.12), on déduit que la fonction inconnue \mathbf{f} est solution de l'équation différentielle vectorielle :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \mathbf{v}_E(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t) \quad \text{avec les conditions initiales : } \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.13)$$

La solution de cette équation différentielle vectorielle en \mathbf{f} , satisfaisant les trois ⁽¹⁾ conditions initiales est la description de Lagrange du mouvement.

Équations développées – La traduction de l'équation différentielle vectorielle (2.13) en un système de trois équations différentielles portant sur des coordonnées dépend à la fois du système de coordonnées utilisé (signification géométrique des trois variables réelles de position de référence) et de la base sur laquelle on projette cette équation vectorielle en trois équations réelles. Ces choix peuvent rendre la résolution de l'équation différentielle vectorielle en \mathbf{f} plus ou moins aisée.

Les deux descriptions du mouvement sont donc équivalentes : à partir de l'une on peut trouver l'autre, et inversement.

2.3.3 Comparaison des deux méthodes de description

Les deux méthodes de description présentent chacune leurs commodités suivant le type de milieux continus que l'on étudie :

- Les mécaniciens spécialisés dans les solides déformables préfèrent souvent la description de Lagrange, car ils peuvent donner un sens physique à l'instant de référence t_0 (par exemple, un instant où le solide déformable n'a jamais été soumis à aucun effort). En outre, ils peuvent aisément matérialiser des particules en marquant des points sur le solide déformable dans sa position de référence. La description de Lagrange leur semble la plus naturelle pour suivre l'évolution des champs matériels dans un solide déformable au cours de sa déformation.
- Les mécaniciens spécialisés dans les fluides (liquides ou gaz) préfèrent généralement employer la description d'Euler car la position individuelle des particules à un instant arbitraire t_0 leur est de peu d'intérêt. Ils préfèrent donc la description d'Euler qui n'utilise pas de concept de position de référence. En outre, la description d'Euler donne directement les indications d'un instrument de mesure placé en un certain point d'observation de l'écoulement.

Exemple 2.7 – Si l'on observe l'écoulement d'une rivière avec un capteur de vitesse situé en un point géométrique M fixe ⁽²⁾, la fonction $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_M, t)$ pour \mathbf{x}_M fixé, est la vitesse à l'instant t de la particule dont la position actuelle est le point M . Si l'on regarde l'évolution de cette mesure au cours du temps, la fonction $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_M, t)$ donne les vitesses des différentes particules qui passent au point d'observation fixe M .

⁽¹⁾ Les conditions initiales de l'équation (2.13) sont une égalité vectorielle.

⁽²⁾ Pour un certain observateur.

La différence essentielle entre les deux descriptions est que la description de Lagrange d'un champ matériel $\Psi(P, t)$ décrit la distribution des valeurs actuelles de la grandeur physique Ψ sur des positions à un instant différent : l'instant de référence t_0 ; alors que la description d'Euler du même champ matériel décrit la distribution des valeurs actuelles de la grandeur physique Ψ sur les positions actuelles. On prête généralement une plus grande signification physique à cette dernière. Quoiqu'il en soit, les deux descriptions étant mathématiquement équivalentes, toute discussion supplémentaire ne serait qu'affaire de traditions ou d'habitudes.

2.4 Champ des déplacements

Cette méthode de description du mouvement n'est traditionnellement employée que par les mécaniciens des solides déformables. Dans la suite, elle ne sera évoquée qu'occasionnellement.

- **Définition 2.8 – Déplacement.** On appelle vecteur déplacement d'une particule P pour un observateur \mathcal{R} , la différence entre sa position actuelle et sa position de référence :

$$\mathbf{u}(P, t) = \mathbf{x}_t^P - \mathbf{x}_0^P \quad (2.14)$$

Comme tout champ matériel, le champ matériel $\mathbf{u}(P, t)$ peut être décrit par la méthode de Lagrange ou la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_0, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} &\xrightarrow{\mathbf{u}_L} \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0 \in \mathbb{V}_3 \\ (\mathbf{x}_t, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} &\xrightarrow{\mathbf{u}_E} \mathbf{u}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_t - \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t) \in \mathbb{V}_3 \end{aligned}$$

La description du mouvement au moyen de la description de Lagrange du champ des déplacements \mathbf{u}_L est évidemment équivalente à la description de Lagrange du mouvement \mathbf{f} . On passe de l'une à l'autre par :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) - \mathbf{x}_0$$

2.5 Opérateurs différentiels lagrangiens et eulériens

2.5.1 Rappels d'analyse tensorielle

On sait de l'analyse des champs dans \mathcal{E}_3 que les dérivées directionnelles locales d'un champ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) $\Psi(M)$ différentiable, sont décrites par un champ d'opérateurs linéaires tangents appelé *gradient du champ* Ψ et noté $\mathbf{grad} \Psi$, tel que :

$$\Psi(M') - \Psi(M) = (\mathbf{grad} \Psi)(M) \cdot \mathbf{MM}' + \|\mathbf{MM}'\| \mathcal{O}(\mathbf{MM}')$$

où \mathbf{MM}' est un vecteur arbitraire et $\mathcal{O}(\mathbf{MM}')$ est une fonction qui tend vers $\mathbf{0}$ quand $M' \rightarrow M$.

Si l'on choisit de représenter les points M de \mathcal{E}_3 par un vecteur position \mathbf{x} (ce qui suppose le choix d'un observateur [déf. 1.8 p. 13]), l'opérateur $\mathbf{grad} \Psi$ est redéfini ainsi :

$$\Psi(\mathbf{x}') - \Psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{grad} \Psi)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \mathcal{O}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (2.15)$$

L'opérateur linéaire tangent $\mathbf{grad} \Psi$ est alors une application linéaire $\mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes p}$ définie en chaque point \mathbf{x} où la fonction $\Psi(\mathbf{x})$ est différentiable. Les règles de l'algèbre tensorielle impliquent que si la grandeur Ψ est un tenseur d'ordre p , alors $\mathbf{grad} \Psi$ est un champ de tenseurs d'ordre $p + 1$.

- **Définition 2.9 – Différentielle.** Si on note \mathbf{dx} l'écart arbitraire $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$, on appelle différentielle de Ψ , notée $\mathbf{d}\Psi$, le produit scalaire défini par :

$$\mathbf{d}\Psi = \mathbf{grad} \Psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{dx}$$

On a donc : $\Psi(\mathbf{x}') - \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{d}\Psi + \|\mathbf{dx}\| \mathcal{O}(\mathbf{dx})$.

Remarque 2.3 – Les notations \mathbf{dx} et $\mathbf{d}\Psi$ sont courantes chez les physiciens et les mécaniciens, bien qu'elles ne distinguent pas clairement la notion d'écart et la notion de différentielle. L'écart $\Psi(\mathbf{x}') - \Psi(\mathbf{x})$ tend vers la différentielle $\mathbf{d}\Psi$ quand l'écart $\mathbf{dx} \rightarrow 0$. Cette confusion n'est pas trop grave si l'on garde à l'esprit que la différentielle $\mathbf{d}\Psi$ et l'écart \mathbf{dx} se rapprochent tous les deux de 0 quand l'écart $\mathbf{dx} \rightarrow 0$ d'une certaine manière. Il convient de garder à l'esprit que la manière dont \mathbf{dx} tend vers 0 influe sur les valeurs des limites, comme le montre ce qui suit.

Si l'on pose $\mathbf{dx} = \mathbf{x}' - \mathbf{x} = \|\mathbf{dx}\| \bar{\mathbf{u}}$ où $\bar{\mathbf{u}}$ est un vecteur unitaire constant, alors

$$\lim_{\|\mathbf{dx}\| \rightarrow 0} \left(\frac{\mathbf{d}\Psi}{\|\mathbf{dx}\|} \right) = \lim_{\|\mathbf{dx}\| \rightarrow 0} \left(\mathbf{grad} \Psi \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(\mathbf{dx}) \right) = \mathbf{grad} \Psi \cdot \bar{\mathbf{u}}$$

Cette limite est appelée *dérivée de $\Psi(\mathbf{x})$ dans la direction unitaire $\bar{\mathbf{u}}$* . L'opérateur linéaire tangent $\mathbf{grad} \Psi$ permet donc de connaître les dérivées directionnelles de $\Psi(\mathbf{x})$ dans toutes les directions unitaires $\bar{\mathbf{u}}$ issues du point \mathbf{x} :

$$\Psi'_{\bar{\mathbf{u}}} = \mathbf{grad} \Psi \cdot \bar{\mathbf{u}}$$

2.5.2 Gradients lagrangien et eulérien

On considère un milieu continu (*a priori* en mouvement pour un observateur \mathcal{R}), sur lequel est défini un champ matériel tensoriel d'ordre $p \geq 0$: $\Psi(P, t) \in \mathbb{V}^{\otimes p}$. Les deux modes de description de ce champ matériel, celui de Lagrange comme celui d'Euler, sont tous les deux des applications (différentes) $\mathbb{V}_3 \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes p}$.

$$\Psi(P, t) = \Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t) \quad [\text{éq. (2.6) p. 23}]$$

- **Définition 2.10 – Gradient lagrangien.** On appelle gradient lagrangien du champ matériel Ψ , noté $\mathbf{grad}_L \Psi$, le gradient de sa description de Lagrange :

$$\mathbf{grad}_L \Psi = \mathbf{grad}(\Psi_L)$$

- **Définition 2.11 – Gradient eulérien.** On appelle gradient eulérien du champ matériel Ψ , noté $\mathbf{grad}_E \Psi$, le gradient de sa description d'Euler :

$$\mathbf{grad}_E \Psi = \mathbf{grad}(\Psi_E)$$

Les deux gradients $\mathbf{grad}_L \Psi$ et $\mathbf{grad}_E \Psi$ sont des champs tensoriels d'ordre $p + 1$ et les différentielles s'écrivent :

$$\mathbf{d}\Psi = \mathbf{d}\Psi_L = \mathbf{d}\Psi_E = \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{dx}_0 = \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{dx}_t \quad (2.16)$$

Interprétations – Le gradient eulérien $(\mathbf{grad}_E \Psi)(\mathbf{x}_t, t)$ décrit les variations des valeurs actuelles du champ Ψ au voisinage des positions actuelles \mathbf{x}_t (c'est une description d'Euler) ; alors que le gradient lagrangien $(\mathbf{grad}_L \Psi)(\mathbf{x}_0, t)$ décrit les variations des mêmes valeurs actuelles du champ Ψ , mais rapportées aux positions de référence, c'est-à-dire à des positions à un instant t_0 différent de t (c'est une description de Lagrange). On prête généralement plus de sens physique au gradient eulérien d'un champ matériel. Le seul gradient lagrangien intéressant est le gradient lagrangien des positions actuelles [section 2.5.3] en raison de son interprétation en termes de déformation entre les instants t_0 et t .

2.5.3 Gradient de la transformation

Considérons le champ matériel des positions actuelles $\mathbf{x}_t(P, t)$. Sa description de Lagrange est la description de Lagrange du mouvement [déf. 2.5 p. 23] :

$$\mathbf{x}_t(P, t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(P), t) \quad (2.17)$$

- **Définition 2.12 – Gradient de la transformation.** On appelle gradient de la transformation entre l'instant de référence t_0 et l'instant actuel t , le gradient *lagrangien* du champ des positions actuelles.

Vocabulaire – Puisque le champ des positions actuelles $\mathbf{x}_t(P, t)$ est donné par la description de Lagrange du mouvement \mathbf{f} [éq. (2.17)], qui n'est autre que la transformation entre les instants t_0 et t , ce gradient porte le nom traditionnel de *gradient de la transformation* bien que la notion de gradient ne soit définie que pour des champs. On devrait l'appeler gradient lagrangien du champ des positions actuelles.

- **Notation 2.13** – Le gradient de la transformation, qui devrait être naturellement noté $\mathbf{grad}_L \mathbf{x}_t$ ou $\mathbf{grad}_L \mathbf{f}$, est traditionnellement⁽³⁾ noté \mathbf{F} .

La différentielle des positions actuelles s'écrit donc :

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{grad}_L \mathbf{x}_t \cdot d\mathbf{x}_0 = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x}_0 \quad (2.18)$$

Les règles de l'algèbre tensorielle impliquent que le champ tensoriel \mathbf{F} est du second ordre. Ce gradient est défini pour toute particule et à tout instant, c'est-à-dire que c'est un champ matériel [déf. 1.4 p. 10] tensoriel du second ordre, dont $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t)$ est la description de Lagrange.

Interprétation cinématique – Comme tout gradient lagrangien, le gradient lagrangien des positions actuelles \mathbf{F} décrit les différentielles des positions actuelles rapportées à des écarts de positions de référence. C'est en analysant les changements de longueur entre les vecteurs $d\mathbf{x}_0$ et $d\mathbf{x}_t$ de l'équation (2.18) que l'on pourra définir au chapitre 4 [p. 51] ce qu'est une déformation entre les instants t_0 et t .

Remarque 2.4 – Le gradient *eulérien* des positions actuelles \mathbf{x}_t est à tout instant le tenseur métrique \mathbf{G} . En effet, par définition du gradient eulérien d'un champ, on a la relation :

$$d\mathbf{x}_t = \mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t \cdot d\mathbf{x}_t, \forall d\mathbf{x}_t \Rightarrow \mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t = \mathbf{G} \quad (2.19)$$

- **Propriété 2.14** – À l'instant $t = t_0$, la valeur du gradient de la transformation \mathbf{F} est le tenseur métrique \mathbf{G} .

⁽³⁾ Bien que ne lui paraissant pas vraiment nécessaire, l'auteur se conforme à cette tradition universellement adoptée. Le lecteur devra garder à l'esprit que \mathbf{F} est le gradient lagrangien des positions actuelles.

Démonstration – À l’instant de référence $t = t_0$, les positions des particules sont les positions de référence. On déduit de l’équation (2.18) [p. 28] qu’à l’instant t_0 on a l’égalité :

$$\mathbf{dx}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t_0) \cdot \mathbf{dx}_0 \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{G}$$

- **Propriété 2.15** – Dans tout mouvement de milieu continu, en toute particule et à tout instant le déterminant du gradient de la transformation est strictement positif :

$$\det \mathbf{F}(\mathbf{x}_0, t) > 0, \quad \forall P, \forall t \quad (2.20)$$

Démonstration – La transformation \mathbf{f} étant inversible [éq. (2.2) p. 22], le déterminant de son gradient (appelé aussi jacobien) n’est jamais nul : $\det \mathbf{F} \neq 0, \quad \forall P, \forall t$, c’est-à-dire qu’il est de signe constant. Puisqu’à l’instant de référence t_0 , ce gradient prend pour valeur le tenseur métrique \mathbf{G} dont le déterminant est $+1$, $\det \mathbf{F}$ reste donc toujours positif.

On peut donc écrire :

$$\mathbf{dx}_t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0 \Leftrightarrow \mathbf{dx}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{dx}_t \quad (2.21)$$

2.5.4 Relation entre gradient lagrangien et gradient eulérien

Pour tout champ matériel $\Psi(P, t)$, l’égalité (2.16) [p. 27] conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{dx}_0 &= d\Psi \\ &= \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{dx}_t && \text{[éq. (2.16) p. 27]} \\ \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{dx}_0 &= \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}_0 && \text{[éq. (2.18) p. 28]} \end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie $\forall \mathbf{dx}_0$, on en déduit la relation entre les gradients lagrangien et eulérien de tout champ matériel tensoriel Ψ :

$$\mathbf{grad}_L \Psi = \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{grad}_E \Psi = \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.22)$$

En particulier, si le champ matériel $\Psi(P, t)$ est le champ des vitesses $\mathbf{v}(P, t)$, il vient :

$$\mathbf{grad}_L \mathbf{v} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \mathbf{grad}_L \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.23)$$

2.5.5 Autres opérateurs différentiels lagrangiens et eulériens

Puisque l’on a défini un gradient lagrangien et un gradient eulérien pour décrire les variations locales d’un champ matériel, on définit par conséquent une version lagrangienne et une version eulérienne des opérateurs différentiels déduits du gradient⁽⁴⁾ :

$$\mathbf{div}_L \Psi = \mathbf{grad}_L \Psi : \mathbf{G} \quad \Delta_L \Psi = \mathbf{div}_L \mathbf{grad}_L \Psi \quad \mathbf{rot}_L \Psi = -\mathbf{grad}_L \Psi : \mathbf{H} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{div}_E \Psi = \mathbf{grad}_E \Psi : \mathbf{G} \quad \Delta_E \Psi = \mathbf{div}_E \mathbf{grad}_E \Psi \quad \mathbf{rot}_E \Psi = -\mathbf{grad}_E \Psi : \mathbf{H} \quad (2.25)$$

où \mathbf{G} est le tenseur métrique et \mathbf{H} le tenseur d’orientation.

On déduit de l’équation (2.22) des relations utiles entre opérateurs lagrangiens et eulériens :

$$\mathbf{div}_L \Psi = \mathbf{grad}_L \Psi : \mathbf{G} = (\mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{G} = \mathbf{grad}_E \Psi : \mathbf{F}^\top \quad (2.26)$$

$$\mathbf{div}_E \Psi = \mathbf{grad}_E \Psi : \mathbf{G} = (\mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{F}^{-1}) : \mathbf{G} = \mathbf{grad}_L \Psi : \mathbf{F}^{-\top} \quad (2.27)$$

$$\mathbf{rot}_L \Psi = -\mathbf{grad}_L \Psi : \mathbf{H} = -(\mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{H} = -\text{asym}(\mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{H} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{rot}_E \Psi = -\mathbf{grad}_E \Psi : \mathbf{H} = -(\mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{F}^{-1}) : \mathbf{H} = -\text{asym}(\mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{F}^{-1}) : \mathbf{H} \quad (2.29)$$

⁽⁴⁾ On rappelle que $\mathbf{div} \mathbf{T} = \mathbf{grad} \mathbf{T} : \mathbf{G}$, $\mathbf{rot} \mathbf{T} = -\mathbf{grad} \mathbf{T} : \mathbf{H}$ et $\Delta \mathbf{T} = \mathbf{div} \mathbf{grad} \mathbf{T}$.

2.6 Dérivée particulière d'un champ matériel

- **Définition 2.16 – Dérivée particulière.** Soit un champ matériel $\Psi(P,t)$ défini sur un milieu continu en mouvement pour un observateur \mathcal{R} . On appelle dérivée particulière du champ matériel Ψ , notée $\dot{\Psi}$, la dérivée temporelle de la grandeur Ψ à particule constante :

$$\dot{\Psi}(P,t) = \frac{\partial \Psi(P,t)}{\partial t} = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Psi(P,t') - \Psi(P,t)}{t' - t} \quad (2.30)$$

La dérivée particulière d'un champ matériel tensoriel d'ordre p est donc un champ matériel tensoriel du même ordre. Comme tout champ matériel, la dérivée particulière peut être décrite par la méthode de Lagrange, aussi bien que par celle d'Euler.

Vocabulaire – Dans certains ouvrages, la dérivée particulière est appelée « dérivée temporelle en suivant la particule dans son mouvement ».

2.6.1 Description de Lagrange de la dérivée particulière d'un champ matériel

Soit Ψ_L la description de Lagrange d'un champ matériel. La dérivée temporelle à particule constante, est donc la dérivée de $\Psi_L(\mathbf{x}_0, t)$ à \mathbf{x}_0 constant. La description de Lagrange de la dérivée particulière est donc :

$$\dot{\Psi}_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \Psi(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \quad (\text{dérivée à } \mathbf{x}_0 \text{ constant}) \quad (2.31)$$

- **Théorème 2.17 –** La dérivée particulière du gradient de la transformation \mathbf{F} est le gradient lagrangien du champ des vitesses actuelles :

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{grad}_L \mathbf{v}$$

Démonstration – En prenant $\Psi_L = \mathbf{F}$ (gradient lagrangien des positions actuelles), alors sa dérivée particulière est :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} && [\text{éq. (2.31) avec } \Psi_L = \mathbf{F}] \\ &= \frac{\partial (\mathbf{grad}_L \mathbf{x}_t)}{\partial t} && [\text{déf. 2.13 p. 28}] \\ &= \frac{\partial (\mathbf{grad}_L (f(\mathbf{x}_0, t)))}{\partial t} && [\text{déf. 2.5 p. 23}] \\ &= \mathbf{grad}_L \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right) \\ \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{grad}_L \mathbf{v} && [\text{déf. 2.9 p. 24}] \end{aligned}$$

On peut donc récrire la relation entre le gradient lagrangien et le gradient eulérien du champ des vitesses [éq.(2.23) p. 29] de la manière suivante :

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.32)$$

2.6.2 Description d'Euler de la dérivée particulière d'un champ matériel

Soit Ψ_E la description d'Euler d'un champ matériel. Soit P une particule dont la position actuelle est \mathbf{x}_t . On note $\mathbf{x}_{t'}$ la position de cette particule à un instant t' ; la valeur de la grandeur Ψ pour cette particule à l'instant t' est : $\Psi_E(\mathbf{x}_{t'}, t')$. La variation de la grandeur Ψ pour cette particule P entre les instants t et t' s'écrit donc :

$$\Psi(P, t') - \Psi(P, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_{t'}, t') - \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)$$

Par définition, la dérivée particulière du champ Ψ est :

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_E &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Psi_E(\mathbf{x}_{t'}, t') - \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)}{t' - t} \quad [\text{éq. (2.16) p. 30}] \\ &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Psi_E(\mathbf{x}_{t'}, t') - \Psi_E(\mathbf{x}_t, t') + \Psi_E(\mathbf{x}_t, t') - \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)}{t' - t} \\ &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Psi_E(\mathbf{x}_{t'}, t') - \Psi_E(\mathbf{x}_t, t')}{t' - t} + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Psi_E(\mathbf{x}_t, t') - \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)}{t' - t} \\ &= \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\mathbf{grad} \Psi_E \cdot (\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t) + \|\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t)}{t' - t} + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Psi_E(\mathbf{x}_t, t') - \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)}{t' - t} \\ &= \mathbf{grad} \Psi_E \cdot \lim_{t' \rightarrow t} \frac{(\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t)}{t' - t} + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\|\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t\| \mathcal{O}(\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t)}{t' - t} + \lim_{t' \rightarrow t} \frac{\Psi_E(\mathbf{x}_t, t') - \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)}{t' - t} \\ \dot{\Psi}_E &= \mathbf{grad} \Psi_E \cdot \mathbf{v}_E + \underbrace{\|\mathbf{v}_E\| \lim_{t' \rightarrow t} \mathcal{O}(\mathbf{x}_{t'} - \mathbf{x}_t)}_0 + \frac{\partial \Psi_E}{\partial t} \end{aligned}$$

La description d'Euler de la dérivée particulière du champ $\Psi(P, t)$ est donc :

$$\dot{\Psi}_E = \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{v}_E + \frac{\partial \Psi_E}{\partial t} \quad (2.33)$$

Vocabulaire – Dans certains ouvrages de mécanique des fluides, la description d'Euler de la dérivée particulière $\dot{\Psi}_E$ est appelée « dérivée totale » de la fonction $\Psi_E(\mathbf{x}_t, t)$ (on considère son argument \mathbf{x}_t , comme une fonction du temps). Le terme $\frac{\partial \Psi_E}{\partial t}$ est appelé « dérivée propre » et le terme $\mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{v}_E$ est appelé « dérivée convective ».

Remarque 2.5 – Si Ψ est le champ des positions actuelles ($\Psi = \mathbf{x}_t$), sa description d'Euler est évidemment $\mathbf{x}_{tE}(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{x}_t$. On a donc $\frac{\partial \mathbf{x}_{tE}}{\partial t} = \mathbf{0}$. D'autre part, $\mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t = \mathbf{G}$ [éq. (2.19) p. 28]. L'équation (2.33) conduit à $\dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{v}_E$. On retrouve bien que la vitesse d'une particule est la dérivée particulière de sa position actuelle.

2.7 Champ des accélérations

- **Définition 2.18 – Accélération.** Le champ des accélérations actuelles d'un milieu continu en mouvement pour un observateur \mathcal{R} est la dérivée particulière du champ des vitesses actuelles pour cet observateur.

Si le champ des vitesses actuelles est décrit par la méthode de Lagrange, en utilisant (2.31) [p. 30], on trouve la description de Lagrange du champ des accélérations actuelles :

$$\gamma_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_L(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} \quad (2.34)$$

Si le champ des vitesses actuelles est décrit par la méthode d'Euler, en utilisant (2.33) [p. 31], on trouve la description d'Euler du champ des accélérations actuelles :

$$\boldsymbol{\gamma}_E(\mathbf{x}_t, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_E \quad (2.35)$$

Remarque 2.6 – En utilisant l'identité $\mathbf{grad} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \mathbf{grad}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) + (\mathbf{rot} \mathbf{u}) \wedge \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{V}_3$, on obtient une autre forme de la description d'Euler des accélérations :

$$\boldsymbol{\gamma}_E(\mathbf{x}_t, t) = \frac{\partial \mathbf{v}_E}{\partial t} + \frac{1}{2} \mathbf{grad}_E(\mathbf{v}^2) + (\mathbf{rot}_E \mathbf{v}) \wedge \mathbf{v}_E \quad (2.36)$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que pour le champ des accélérations, on a bien les changements de description suivants [éq. 2.7 et 2.8 p. 24] :

$$\boldsymbol{\gamma}_E(\mathbf{x}_t, t) = \boldsymbol{\gamma}_L(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t), t) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\gamma}_L(\mathbf{x}_0, t) = \boldsymbol{\gamma}_E(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t)$$

2.8 Outils d'analyse du mouvement

2.8.1 Trajectoire d'une particule

- **Définition 2.19 – Trajectoire d'une particule.** La trajectoire de la particule P pour un observateur \mathcal{R} est l'ensemble des positions (pour cet observateur) occupées par cette particule au cours du temps.

Rappel – On sait de la cinématique élémentaire, qu'à chaque instant, le vecteur vitesse actuelle d'une particule pour un observateur \mathcal{R} est tangent à la trajectoire (pour cet observateur) au point de sa position actuelle \mathbf{x}_t .

Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange, la description de Lagrange du mouvement donne directement la trajectoire. En effet, l'équation vectorielle $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$ pour \mathbf{x}_0 donné et pour $t \in]-\infty; +\infty[$ définit l'ensemble des positions de la particule identifiée par \mathbf{x}_0 , c'est-à-dire la trajectoire de la particule \mathbf{x}_0 .

Équations développées – Lorsque l'on a choisi un système de coordonnées, l'équation vectorielle des trajectoires se traduit par 3 équations réelles qui sont les équations paramétriques des trajectoires [éq. (2.4) p. 23] :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_t^1 = f^1(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) \\ x_t^2 = f^2(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) \\ x_t^3 = f^3(x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) \end{cases}$$

où t est le paramètre et où x_0^1, x_0^2 et x_0^3 identifient la particule.

Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler, puisque la recherche des trajectoires revient à rechercher la description de Lagrange du mouvement, il suffit d'intégrer l'équation différentielle vectorielle (2.13) [p. 25].

2.8.2 Lignes de courant actuelles

- **Définition 2.20 – Lignes de courant actuelles.** On appelle lignes de courant actuelles pour un observateur \mathcal{R} , les *lignes de champ* du champ des vitesses actuelles pour cet observateur, c'est-à-dire les courbes \mathcal{L} qui sont tangentes aux vitesses actuelles, en chacun de leur point.

Les lignes de courant visualisent donc, par leur tangente, la direction des vitesses actuelles. À un autre instant t' , elles sont généralement de forme différente car le champ des vitesses à un instant t' est généralement différent.

Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler, on connaît le champ des vitesses actuelles $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t)$ et on en cherche les lignes de champ \mathcal{L} . La manière la plus générale de décrire toute courbe \mathcal{L} de l'espace \mathcal{E}_3 est d'en donner des équations paramétriques, c'est-à-dire de donner une fonction vectorielle $\mathbf{g}(\mu)$ qui définit le point courant \mathbf{x} de la courbe \mathcal{L} par l'équation vectorielle $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mu)$ (μ est le paramètre).

Rappel – Équations paramétriques : Lorsqu'on a choisi un système de coordonnées, la définition paramétrique de la courbe \mathcal{L} est donnée par trois équations réelles :

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mu) \Leftrightarrow \begin{cases} x^1 = g^1(\mu) \\ x^2 = g^2(\mu) \\ x^3 = g^3(\mu) \end{cases}$$

où μ est le paramètre et où x^1, x^2 et x^3 sont les coordonnées du point courant de \mathcal{L} . La recherche de la fonction vectorielle $\mathbf{g}(\mu)$ se ramène donc à la recherche des trois fonctions réelles g^1, g^2 et g^3 .

Pour certaines courbes, il est possible de prendre comme paramètre l'une des coordonnées (par exemple $\mu = x^1$), la définition d'une courbe se ramène alors à deux équations. Cependant, puisque l'on ne connaît pas *a priori* les particularités des lignes de courant recherchées, il est prudent d'utiliser un paramétrage général.

On sait de l'étude des courbes paramétriques, que le vecteur $\mathbf{g}'(\mu)$ est tangent à la courbe \mathcal{L} au point $\mathbf{g}(\mu)$. Il découle de la définition des lignes de courant que l'on recherche des courbes \mathcal{L} de point courant $\mathbf{x} = \mathbf{g}(\mu)$ telles que la tangente en \mathbf{x} à \mathcal{L} soit colinéaire à la vitesse actuelle $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}, t)$. On cherche donc la fonction vectorielle $\mathbf{g}(\mu)$ telle que :

$$\mathbf{v}_E(\mathbf{g}(\mu), t) \parallel \mathbf{g}'(\mu) \Leftrightarrow \mathbf{v}_E(\mathbf{g}(\mu), t) \wedge \mathbf{g}'(\mu) = \mathbf{0} \quad (2.37)$$

La résolution de l'équation différentielle vectorielle (2.37), d'inconnue $\mathbf{g}(\mu)$ et où t est l'instant actuel, donne les lignes de courant à l'instant t .

Remarque 2.7 – L'écriture du parallélisme de deux vecteurs \mathbf{a} et \mathbf{b} sous la forme vectorielle $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}$ est une écriture redondante. Si l'on projette cette équation vectorielle sur une base, on obtient un système de seulement 2 équations réelles indépendantes⁽⁵⁾. L'équation (2.37) est donc équivalente à un système de 2 équations différentielles réelles (et non 3). Il n'y a donc que deux constantes d'intégration C_1 et C_2 . Les lignes de courant actuelles sont donc une famille de courbes à deux paramètres C_1 et C_2 .

⁽⁵⁾ L'une d'entre elles est une combinaison linéaire des deux autres.

Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange, on cherche la description d'Euler du mouvement suivant la méthode donnée en section 2.3 [p. 23] et on est ramené au problème précédent.

- **Définition 2.21 – Nappe de courant, tube de courant.** L'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe \mathcal{C} donnée engendre une surface appelée nappe de courant. Si la courbe \mathcal{C} est fermée la surface engendrée est appelée tube de courant.

2.8.3 Ligne d'émission actuelle d'un point fixe

- **Définition 2.22 – Ligne d'émission.** Soit N un point géométrique fixe pour un observateur \mathcal{R} . On appelle ligne d'émission actuelle du point N , l'ensemble des positions actuelles des particules dont la trajectoire passe par N .

Les particules P dont la trajectoire passe par N sont celles qui sont passées ou qui vont passer par le point fixe choisi N . Puisqu'à tout instant actuel t , il existe toujours une particule qui se trouve en N , la ligne d'émission actuelle du point N contient toujours le point fixe N .

Illustration – Imaginons que dans un mouvement de milieu continu, il existe au point N « pinceau ponctuel » qui colore les particules qui y passent. Si l'on photographie le milieu continu à l'instant t , les particules colorées de la photographie dessinent la ligne d'émission actuelle de N .

Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange, on connaît la fonction \mathbf{f} . On note \mathbf{x}_N la position (pour un observateur \mathcal{R}) du point d'émission fixe N . Les particules dont la trajectoire passe par N sont les particules (c'est-à-dire les \mathbf{x}_0) qui sont solutions de :

$$\mathbf{x}_N = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t_1) \quad (t_1 \text{ est l'instant où la particule } \mathbf{x}_0 \text{ passe au point } N) \quad (2.38)$$

En résolvant en \mathbf{x}_0 l'équation vectorielle (2.38), on trouve : $\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_N, t_1)$. Les \mathbf{x}_0 trouvés identifient les particules qui sont au point N à un instant t_1 . On sélectionne donc l'ensemble des particules dont la trajectoire passe par N en faisant varier le paramètre t_1 dans l'intervalle $]-\infty; +\infty[$.

Par définition [déf. 2.22 p. 34], l'équation de la ligne d'émission actuelle est la position actuelle de toutes ces particules. C'est donc la courbe définie par l'équation vectorielle paramétrique de paramètre t_1 :

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_N, t_1), t)}_{\mathbf{g}(t_1, \mathbf{x}_N, t)} \quad \text{où } t_1 \in]-\infty; +\infty[\text{ et où } t \text{ est l'instant actuel.}$$

La fonction $\mathbf{g}(t_1, \mathbf{x}_N, t) = \mathbf{f}(\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_N, t_1), t)$ est l'équation paramétrique, de paramètre t_1 , de la ligne d'émission actuelle du point fixe N .

Équations développées – Lorsque l'on a choisi un système de coordonnées, l'équation paramétrique vectorielle (de paramètre t_1) $\mathbf{x} = \mathbf{g}(t_1, \mathbf{x}_N, t)$ de la ligne d'émission actuelle (c'est-à-dire à l'instant t) de N , se traduit par trois équations réelles :

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(t_1, \mathbf{x}_N, t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^1 = g^1(t_1, x_N^1, x_N^2, x_N^3, t) \\ x^2 = g^2(t_1, x_N^1, x_N^2, x_N^3, t) \\ x^3 = g^3(t_1, x_N^1, x_N^2, x_N^3, t) \end{cases}$$

où (x^1, x^2, x^3) sont les coordonnées du point courant de la ligne d'émission, où (x_N^1, x_N^2, x_N^3) sont les coordonnées du point d'émission fixe N , où t est l'instant actuel et où t_1 est le paramètre de la courbe.

Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler, on cherche la description de Lagrange du mouvement et on est ramené au cas précédent.

2.8.4 Débits à travers une surface

- **Définition 2.23 – Débit volumique.** Soit \mathcal{S} une surface immatérielle⁽⁶⁾, fixe pour un observateur \mathcal{R} , bornée, orientable⁽⁷⁾, orientée⁽⁸⁾ et traversée par un milieu continu en mouvement. On note \mathbf{n} la normale unitaire en un point courant N de \mathcal{S} . On appelle débit volumique actuel à travers la surface fixe \mathcal{S} , le flux du champ des vitesses actuelles à travers la surface \mathcal{S} :

$$q_v(t) = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{v}_E(N,t) \cdot \mathbf{n}(N) ds \quad (2.39)$$

L'unité légale de débit volumique est le $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$.

- **Définition 2.24 – Débit massique.** Soit \mathcal{S} une surface immatérielle, fixe pour un observateur \mathcal{R} , bornée, orientée, et traversée par un milieu continu en mouvement. On note \mathbf{n} la normale unitaire en un point courant N de \mathcal{S} . On appelle débit massique actuel à travers la surface fixe \mathcal{S} le flux de la quantité de mouvement par unité de volume $\rho \mathbf{v}$ à travers la surface \mathcal{S} :

$$q_m(t) = \int_{\mathcal{S}} \rho_E(N,t) \mathbf{v}_E(N,t) \cdot \mathbf{n}(N) dS \quad (2.40)$$

où ρ_E est la description d'Euler de la masse volumique du milieu continu.

L'unité légale de débit massique est le $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Le signe d'un débit (massique ou volumique) dépend du sens de \mathbf{n} choisi pour la surface \mathcal{S} .

Remarques 2.8 – La définition du débit massique est prématurée, la masse volumique n'étant pas encore définie. Elle est néanmoins présentée ici pour bien souligner la distinction entre les deux concepts.

Dans les intégrandes des équations (2.39) et (2.40), les champs de vitesse et de masse volumique sont nécessairement décrits par la méthode d'Euler : il faut intégrer les valeurs actuelles de ces champs pour les particules qui se trouvent actuellement au point courant N de \mathcal{S} .

Si la surface \mathcal{S} n'est pas fixe (mais reste indéformable), on définit le débit qui la traverse de la même manière, mais en prenant le flux de la *vitesse relative* du milieu continu par rapport à \mathcal{S} ; ce qui revient à calculer le débit à travers une surface fixe mais avec les vitesses vues par un observateur $\mathcal{R}_{\mathcal{S}}$ lié à la surface indéformable \mathcal{S} . On peut définir de la même manière des débits à travers des surfaces déformables si on connaît la vitesse des points N de la surface \mathcal{S} .

Vocabulaire – Le scalaire $\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}$ est parfois appelé *vitesse débitante* à travers la surface. Par ailleurs, dans la littérature scientifique, il règne un certain flou dans l'emploi du mot « flux » : en mathématiques, le flux d'un vecteur \mathbf{w} à travers une surface \mathcal{S} est le *scalaire* défini par l'intégrale : $\Phi = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} ds$; c'est la définition qui sera utilisée dans ce cours. Toutefois, chez certains auteurs, notamment les thermodynamiciens, le mot « flux » désigne parfois l'intégrande $\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}$ (un scalaire) ou parfois encore le vecteur \mathbf{w} lui-même.

⁽⁶⁾ C'est-à-dire géométrique.

⁽⁷⁾ C'est-à-dire que l'on peut y définir une normale. Toutes les surfaces ne sont pas orientables ; par exemple, une bande de Möbius n'est pas orientable car elle n'a qu'une face.

⁽⁸⁾ On a choisi une face positive et une face négative parmi les deux choix possibles.

2.9 Mouvement stationnaire

- **Définition 2.25 – Mouvement stationnaire.** On dit qu'un mouvement est stationnaire (ou permanent) pour un observateur \mathcal{R} , si les descriptions d'Euler de tous les champs matériels sont, pour l'observateur \mathcal{R} , indépendantes du temps :

$$\frac{\partial \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)}{\partial t} = \mathbf{0}, \quad \forall \text{ la grandeur physique } \Psi \text{ observée et } \forall \mathbf{x}_t \quad (2.41)$$

Illustration – Soit M un point fixe pour un observateur \mathcal{R} . La description d'Euler du champ $\Psi_E(\mathbf{x}_M, t)$ donne la valeur actuelle de la grandeur Ψ (par exemple une vitesse) pour la particule dont la position actuelle est M . Dans un écoulement stationnaire, cette valeur est indépendante du temps, c'est-à-dire que toutes les particules qui passent par M ont la même valeur de la grandeur Ψ . En un autre point d'observation fixe M' , la mesure de la grandeur physique $\Psi(\mathbf{x}_{M'}, t)$ est différente, mais toujours constante dans le temps.

- **Propriété 2.26** – Dans un mouvement stationnaire pour un observateur \mathcal{R} , les trajectoires, les lignes de courant et les lignes d'émission sont des courbes qui se superposent.

Démonstration – Dans un mouvement stationnaire, le champ des vitesses est un champ vectoriel *indépendant du temps*. Les lignes de courant sont par définition les lignes de champ de ce champ vectoriel permanent. Ce sont donc des courbes identiques à tout instant. Par ailleurs, les trajectoires sont tangentes en chaque point à la vitesse de la particule qui s'y trouve. Dans un mouvement stationnaire, ces deux familles de courbes ont donc la même définition géométrique : ce sont les lignes de champ d'un champ vectoriel fixe. Bien que leur signification physique soit complètement différente, dans un mouvement stationnaire, les courbes trajectoires et courbes lignes de courant sont des courbes confondues. Ainsi, contrairement à un mouvement général, dans un mouvement stationnaire, en un point géométrique fixe M , il ne passe donc qu'une seule trajectoire. On en déduit que la ligne d'émission de M est confondue avec la trajectoire qui passe par M .

Vocabulaire – En mécanique des milieux continus fluides (liquides et gaz), l'étude des mouvements stationnaires est un cas particulier important : elle consiste à étudier les écoulements en *régime établi* (s'il existe). Les écoulements non stationnaires sont aussi appelés *écoulements transitoires* ou *régimes transitoires* (par exemple, les phases de démarrage ou d'arrêt d'un écoulement).

En présence d'écoulements fluides turbulents, le sens du mot « stationnaire » est réduit à la stationnarité de la seule vitesse moyenne. Les fluctuations autour de la vitesse moyenne ne sont pas stationnaires.

En dynamique des solides déformables (vibrations) et en acoustique, on donne un sens différent à l'adjectif « stationnaire » : on parle de « vibrations stationnaires ». Dans un tel mouvement, la description d'Euler des vitesses n'est pas indépendante du temps, ce sont seulement l'amplitude et la fréquence de vibration des grandeurs qui sont constantes dans le temps.

Le sens du mot « stationnaire » peut donc varier donc suivant le contexte.

2.10 Changements d'observateur

- **Notation 2.27** – Dans les changements d'observateurs, on considère deux observateurs quelconques \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$, *a priori* en mouvement relatif quelconque. On convient de surmonter d'un \sim les grandeurs physiques observées par l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$.

Toutes les définitions des concepts développés dans ce chapitre reposent sur la représentation des positions des particules P par un vecteur position $\mathbf{x} \in \mathbb{V}_3$. Or, le vecteur position (de référence ou

actuelle) d'une particule P est un vecteur différent pour chaque observateur :

$$\mathbf{x}_0^P \neq \tilde{\mathbf{x}}_0^P \quad \text{et} \quad \mathbf{x}_t^P \neq \tilde{\mathbf{x}}_t^P$$

Il s'ensuit que les dérivées temporelles des vecteurs positions sont généralement différentes. Les vitesses et les accélérations mesurées par deux observateurs différents ne sont en général pas les mêmes, ni en direction, ni en module :

$$\mathbf{v}(P,t) \neq \tilde{\mathbf{v}}(P,t) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\gamma}(P,t) \neq \tilde{\boldsymbol{\gamma}}(P,t)$$

Remarque 2.9 – En mécanique générale, on sait écrire les relations de changement d'observateur pour les vitesses et les accélérations, à condition de connaître le mouvement relatif des deux observateurs. Ce sont des relations compliquées faisant intervenir à la fois la vitesse relative des origines, la vitesse de rotation relative des observateurs ainsi que leurs dérivées temporelles. Il est inutile de les détailler ici (voir n'importe quel cours de cinématique du point), ces relations ne seront pas utiles dans la suite.

La description de Lagrange du mouvement est une fonction différente pour les deux observateurs : $\mathbf{f} \neq \tilde{\mathbf{f}}$ car ces deux fonctions n'ont pas le même domaine de définition ($\mathbf{x}_0^P \neq \tilde{\mathbf{x}}_0^P$) et leur valeur actuelle pour une particule est un vecteur différent : ($\mathbf{x}_t^P \neq \tilde{\mathbf{x}}_t^P$). De même, le champ des vitesses actuelles utilisé dans la description d'Euler du mouvement est différent pour les deux observateurs ($\mathbf{v}_E \neq \tilde{\mathbf{v}}_E$). Les trajectoires et les lignes de courant sont donc en général des courbes de formes différentes pour des observateurs différents.

Exemple 2.28 – Soit une particule P en mouvement pour un observateur \mathcal{R} . Si l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est choisi tel que son origine est toujours confondue avec la particule P (on peut dire que « l'origine de l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est liée à la particule P »⁽⁹⁾), la trajectoire de la particule P pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ se réduit à un point alors que la trajectoire de la même particule pour l'observateur \mathcal{R} est une courbe.

Par ailleurs, si un mouvement est stationnaire pour un observateur, il ne l'est généralement pas pour un autre observateur.

2.11 En bref...

La mécanique des milieux continus se consacre à l'étude de champs matériels, c'est-à-dire des fonctions $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ qui associent une valeur de la grandeur physique $\boldsymbol{\Psi}$ (scalaire, vectorielle ou tensorielle) à toute particule et à tout instant. L'application de la définition (universelle) de la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ par deux observateurs peut conduire ou non à des valeurs différentes. L'étude de ces changements de valeur est l'objet du chapitre suivant.

Les descriptions de Lagrange $\boldsymbol{\Psi}_L(\mathbf{x}_0,t)$ et d'Euler $\boldsymbol{\Psi}_E(\mathbf{x}_t,t)$ d'un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ sont équivalentes. Le gradient de chacune de ces descriptions conduit à une version lagrangienne et à une version eulérienne des opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien.

Le champ matériel des dérivées particulières $\dot{\boldsymbol{\Psi}}(P,t)$ d'une grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ peut, comme tout champ matériel, être décrit par la méthode de Lagrange ou celle d'Euler. On en a donné les expressions.

⁽⁹⁾ Pour préciser complètement le mouvement relatif des deux observateurs, il faudrait aussi préciser la vitesse de rotation relative entre $\tilde{\mathcal{R}}$ et \mathcal{R}

Pour visualiser le mouvement d'un milieu continu pour un observateur \mathcal{R} , on peut observer les trajectoires des particules, les lignes de courant actuelles, les lignes d'émission actuelles issues d'un point fixe.

Les mouvements stationnaires pour un certain observateur ont la même apparence à chaque instant pour cet observateur. Dans le cas d'une définition stricte de la stationnarité, les trajectoires, les lignes de courant et les lignes d'émission sont des courbes confondues pour cet observateur. Un mouvement stationnaire pour un observateur ne l'est généralement pas pour un autre observateur.

Objectivité

L'objectivité est une propriété de certaines grandeurs physiques. Après un rappel de la définition de l'objectivité pour des grandeurs scalaires, on définit dans ce chapitre l'objectivité pour des grandeurs vectorielles ou tensorielles. On termine le chapitre avec des exemples de grandeurs physiques non scalaires qui sont objectives ou non.

- **Notations 3.1** – Dans la suite, on considère deux observateurs quelconques \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$, en mouvement relatif quelconque. Soit une grandeur physique (scalaire, vectorielle ou tensorielle, c'est-à-dire à valeur dans $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$, $p \geq 0$); l'application de sa définition (universelle) par un observateur \mathcal{R} conduit à une valeur actuelle qui sera notée $\Psi(t)$; l'application de cette même définition par un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit à une valeur actuelle qui sera notée $\tilde{\Psi}(t)$.

Dans les sections 3.1 à 3.4 qui définissent l'objectivité pour des grandeurs physiques scalaires, vectorielles ou tensorielles, on ne se préoccupe pas de savoir si cette grandeur physique est un champ matériel ou une valeur globale pour un domaine. Le seul aspect important est qu'il s'agit de valeurs actuelles. Il se peut que les valeurs actuelles $\Psi(t)$ soient des valeurs en une particule, auquel cas $\Psi(t)$ est à remplacer par $\Psi(P, t)$, ou des valeurs globales pour un domaine, auquel cas $\Psi(t)$ est à remplacer par $\Psi(\mathcal{D}, t)$. Pour les positions de particules, on emploiera les notations 1.12 [p. 13].

En général, $\Psi(t) \neq \tilde{\Psi}(t)$. On passe de l'une à l'autre de ces valeurs actuelles par une formule dite *formule de changement d'observateur*, qui est *a priori* particulière à chaque grandeur physique : on trouve cette formule en appliquant la définition (universelle) de la grandeur pour chaque observateur. Après avoir donné, dans les sections 3.1 à 3.4, une *définition physique* de l'objectivité pour des grandeurs non scalaires, on va montrer que la formule de changement d'observateur est la même pour toutes les grandeurs objectives de même ordre de tensorialité, ce qui constitue une caractérisation des grandeurs objectives.

On rappelle [section 1.4 p. 15] que, quel que soit le mouvement d'un milieu continu, il existe une rotation⁽¹⁾, fonction du temps, appelée *tenseur actuel de changement d'observateur de \mathcal{R} à $\tilde{\mathcal{R}}$* , noté $\mathbf{Q}_{t, \mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}}$ ou plus simplement \mathbf{Q}_t , tel que la relation entre la position actuelle de toute biparticule $\{P^{(1)}, P^{(2)}\}$ [déf. 1.19 p. 15] attribuée par deux observateurs est :

$$\tilde{\mathbf{x}}_i^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_i^{(1)} = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_i^{(2)} - \mathbf{x}_i^{(1)}), \quad \forall t, \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)} \quad [\text{éq. (1.7) p. 17}] \quad (3.1)$$

Cette équation n'est rien d'autre que la formule de changement d'observateur entre les positions attribuées par deux observateurs à une biparticule. Physiquement, elle signifie qu'à un instant actuel quelconque, la position *relative* actuelle des particules d'un milieu continu en mouvement est la même pour tous les observateurs. Ce résultat sera utilisé pour trouver une caractérisation des grandeurs physiques objectives.

⁽¹⁾ C'est-à-dire un tenseur du second ordre orthogonal de déterminant +1.

3.1 Objectivité des grandeurs scalaires

L'objectivité d'une grandeur scalaire a déjà été définie en section 1.3 [p. 14], on la rappelle ici pour mémoire :

- **Définition 3.2 – Grandeur scalaire objective.** On dit qu'une grandeur scalaire est objective si sa valeur actuelle est la même pour tous les observateurs :

$$\Psi(t) = \tilde{\Psi}(t) \quad \forall t, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \quad (3.2)$$

Il existe des grandeurs scalaires qui sont objectives (par principe ou par conséquence de leur définition) et d'autres qui ne le sont pas.

Exemple 3.3 – Le temps, la distance actuelle entre deux particules, la masse actuelle d'un domaine, la température actuelle en une particule sont des grandeurs scalaires objectives par principe. On déduit aisément de leur définition que les grandeurs *volume actuel d'un domaine* et *masse volumique actuelle d'une particule* sont des grandeurs scalaires objectives. En revanche, la norme de la vitesse actuelle d'une particule n'est pas une grandeur scalaire objective car dans un mouvement relatif quelconque entre deux observateurs \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$, on sait de la cinématique élémentaire que $\|\mathbf{v}(P,t)\| \neq \|\tilde{\mathbf{v}}(P,t)\|$. On en déduit que l'énergie cinétique volumique d'une particule n'est pas une grandeur scalaire objective : $\rho \mathbf{v}(P,t)^2 \neq \rho \tilde{\mathbf{v}}(P,t)^2$.

3.2 Objectivité des grandeurs vectorielles

- **Définition 3.4 – Grandeur vectorielle objective.** On dit qu'une grandeur vectorielle est objective si le produit scalaire de sa valeur actuelle avec la position actuelle de toute biparticule d'un milieu continu en mouvement est une grandeur scalaire objective :

$$\tilde{\Psi}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_i^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_i^{(1)}) = \Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_i^{(2)} - \mathbf{x}_i^{(1)}), \quad \forall t, \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)}, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \quad (3.3)$$

Interprétation – L'équation (3.3) exprime le fait que si une grandeur vectorielle Ψ est objective alors, à tout instant t , tous les observateurs s'accordent sur la « position relative » de la valeur vectorielle actuelle $\Psi(t)$ par rapport aux positions actuelles \mathbf{x}_i des particules du milieu continu en mouvement. Les vecteurs $\Psi(t)$ et $\tilde{\Psi}(t)$ sont des vecteurs différents de \mathbb{V}_3 , de même les positions d'une biparticule $\mathbf{x}_i^{(2)} - \mathbf{x}_i^{(1)}$ et $\tilde{\mathbf{x}}_i^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_i^{(1)}$ sont différentes, mais leurs positions relatives sont les mêmes pour les deux observateurs. On peut résumer littérairement cette définition en disant qu'une grandeur vectorielle est objective si, à tout instant, elle a « la même position par rapport à la matière » pour tous les observateurs.

Illustration – Supposons que la grandeur vectorielle objective soit un champ vectoriel $\Psi(P,t)$. Alors, les « photographies » à un instant t du champ vectoriel prises par les observateurs sont superposables.

Exemple 3.5 – La vitesse actuelle d'une particule n'est pas une grandeur vectorielle objective car son module actuel ainsi que son angle actuel avec des biparticules diffèrent d'un observateur à l'autre. Il en est de même pour l'accélération. On donne plus loin [section 3.5.2 p. 44] des exemples de grandeurs vectorielles objectives. On peut en donner un exemple pour les lecteurs déjà initiés : la contrainte actuelle sur une facette matérielle est un grandeur vectorielle objective.

- **Théorème 3.6 – Caractérisation.** Une grandeur vectorielle Ψ est objective si et seulement si la formule de changement d'observateur de sa valeur actuelle est :

$$\tilde{\Psi}(t) = \mathbf{Q}_t \cdot \Psi(t) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi(t)) \quad (\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t} : \text{rotation d'un vecteur par } \mathbf{Q}_t) \quad (3.4)$$

Démonstration – Pour toute grandeur Ψ vectorielle objective, on par définition :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)}) &= \Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) \quad [\text{éq. (3.3) p. 40}] && \forall t, \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)}, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \\ \tilde{\Psi}(t) \cdot \mathcal{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) &= \Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) \quad [\text{éq. (3.1) p. 39}] && \forall t, \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)}, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \\ \tilde{\Psi}(t) \cdot \mathcal{Q}_t &= \Psi(t) && \forall t, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

On en déduit la formule de changement d'observateur de toute grandeur vectorielle objective :

$$\tilde{\Psi}(t) = \Psi(t) \cdot \mathcal{Q}_t^\top = \mathcal{Q}_t \cdot \Psi(t), \quad \forall t, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}}$$

Inversement, si la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle Ψ est :

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}(t) &= \Psi(t) \cdot \mathcal{Q}_t^\top && \forall t, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \\ \tilde{\Psi}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)}) &= \Psi(t) \cdot \mathcal{Q}_t^\top \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)}) && \forall t, \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)}, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \\ \tilde{\Psi}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)}) &= \Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) && \forall t, \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)}, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}}\end{aligned}$$

D'après la définition (3.3), la grandeur Ψ est donc une grandeur objective.

Ainsi, pour savoir si une grandeur vectorielle est objective, il suffit d'écrire sa formule de changement d'observateur. Si la formule est de la forme (3.4) [p. 40], alors la grandeur vectorielle est objective, sinon elle ne l'est pas.

Illustration – La formule (3.4) [p. 40] montre que la formule de changement d'observateur de la grandeur vectorielle actuelle $\Psi(t)$ est une rotation identique à celle du changement d'observateur des positions actuelles de toutes les biparticules [éq. 3.1 p. 39]. Leurs positions relatives sont donc identiques pour les deux observateurs. On peut donc dire que la position d'une grandeur vectorielle objective par rapport à la position actuelle de la matière est la même pour tous les observateurs.

Exemple 3.7 – On sait de la cinématique élémentaire que la formule de changement d'observateur de la vitesse actuelle d'une particule est :

$$\mathbf{v}(P, t) = \tilde{\mathbf{v}}(P, t) + \mathbf{v}(\tilde{\mathcal{O}}, t) + \boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} \cdot (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{\tilde{\mathcal{O}}}) \quad \text{où } \boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}|\mathcal{R}} = \text{adj} \left(\mathcal{Q}_t^\top \cdot \frac{d\mathcal{Q}_t}{dt} \right) \quad [\text{éq. (1.14) p. 19}]$$

La formule de changement d'observateur des vitesses actuelles d'une particule n'est pas conforme à la formule (3.4) [p. 40], ce qui prouve à nouveau, si besoin en était, que la vitesse actuelle d'une particule n'est pas une grandeur vectorielle objective.

Les propriétés des tenseurs orthogonaux montrent que si Ψ est une grandeur vectorielle objective, alors sa norme est une grandeur scalaire objective (c'est-à-dire : $\|\tilde{\Psi}(t)\| = \|\Psi(t)\|$).

3.3 Objectivité des grandeurs tensorielles du second ordre

- **Définition 3.8 – Grandeur tensorielle du second ordre objective** . On dit qu'une grandeur tensorielle du second ordre est objective si sa valeur actuelle appliquée à la position actuelle de tout couple de biparticules d'un milieu continu en mouvement est un scalaire objectif :

$$(\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)}) \cdot \tilde{\Psi}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(3)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(4)}) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}), \quad \forall t, \forall P^{(i)}, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \quad (3.5)$$

Interprétation – Par cette définition, il s'agit d'exprimer, comme pour les grandeurs vectorielles objectives, que la « position relative » de la valeur actuelle (propre à chaque observateur) de la grandeur tensorielle du second ordre par rapport aux positions actuelles (propres à chaque observateur) des particules, est la même pour tous les observateurs. On peut résumer littérairement cette définition en disant qu'une grandeur tensorielle d'ordre 2 est objective si à tout instant elle a « la même position par rapport à la matière » pour tous les observateurs. Les propriétés 3.10 [p. 42] illustrent cette « position par rapport à la matière » de la grandeur tensorielle en observant ses directions propres.

- **Théorème 3.9 – Caractérisation.** Une grandeur tensorielle du second ordre Ψ est objective si et seulement si la formule de changement d'observateur de sa valeur actuelle est :

$$\tilde{\Psi}(t) = \mathbf{Q}_t \cdot \Psi(t) \cdot \mathbf{Q}_t^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi(t)) \quad (\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t} : \text{rotation d'un tenseur du second ordre par } \mathbf{Q}_t) \quad (3.6)$$

Démonstration – Comme pour les vecteurs objectifs, on déduit de l'équation (3.5) [p. 41] la formule de changement d'observateur de toute grandeur tensorielle du second ordre objective par la suite d'équivalences suivantes, toutes valables $\forall t, \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)}, \forall P^{(3)}, \forall P^{(4)}, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}}$:

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)}) \cdot \tilde{\Psi}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(3)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(4)}) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)})) \cdot \tilde{\Psi}(t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)})) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \\ \Leftrightarrow & (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\Psi}(t) \cdot \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) = (\mathbf{x}_t^{(1)} - \mathbf{x}_t^{(2)}) \cdot \Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \quad (3.7) \\ \Leftrightarrow & \mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\Psi}(t) \cdot \mathbf{Q}_t = \Psi(t) \\ \Leftrightarrow & \tilde{\Psi}(t) = \mathbf{Q}_t \cdot \Psi(t) \cdot \mathbf{Q}_t^\top. \end{aligned}$$

- **Propriété 3.10** – On laisse le soin au lecteur de vérifier, en utilisant la caractérisation (3.6) et les propriétés algébriques des tenseurs orthogonaux, que si Ψ est une grandeur tensorielle du second ordre objective, alors on a les propriétés suivantes :

- les valeurs propres actuelles des tenseurs du second ordre $\tilde{\Psi}(t)$ et de $\Psi(t)$ sont les mêmes, ce sont donc des grandeurs scalaires objectives ; il en est de même pour les invariants ;
- les vecteurs propres unitaires des tenseurs du second ordre $\tilde{\Psi}(t)$ et de $\Psi(t)$ sont liés par la relation $\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}(t)$, ce sont donc des grandeurs vectorielles objectives [th. 3.6 p. 40] ;
- si on représente les directions propres (non orientées) par les tenseurs uniaxiaux unitaires ($\mathbf{U} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$ et $\tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{u}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}$), leur relation de changement d'observateur est : $\tilde{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{Q}_t^\top$, ce sont donc des grandeurs tensorielles du second ordre objectives ; notamment, l'angle des directions propres actuelles avec la direction actuelle de toute biparticule est le même pour tous les observateurs.

- **Définition 3.11 – Définition équivalente.** Une grandeur tensorielle du second ordre est objective si et seulement si son application à la position actuelle de toute biparticule est une grandeur vectorielle objective.

Démonstration – De l'équation (3.7), il vient :

$$\begin{aligned} & \mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\Psi}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(3)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(4)}) = \Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}) \quad \forall t, \forall P^{(3)}, \forall P^{(4)}, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \\ \Leftrightarrow & \underbrace{\tilde{\Psi}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(3)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(4)})}_{\tilde{\mathbf{v}}} = \mathbf{Q}_t \cdot \underbrace{(\Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)}))}_{\mathbf{v}} \quad \forall t, \forall P^{(3)}, \forall P^{(4)}, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \end{aligned}$$

La grandeur vectorielle définie par $\mathbf{v}(t) = \Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(3)} - \mathbf{x}_t^{(4)})$ est donc une grandeur vectorielle objective en vertu de la caractérisation (3.6) [p. 40].

3.4 Objectivité des grandeurs tensorielles d'ordre p

La définition équivalente [déf. 3.11] de l'objectivité des grandeurs tensorielles du second ordre permet de généraliser par récurrence la définition de l'objectivité des grandeurs tensorielles de tous ordres :

- **Définition 3.12 – Grandeur tensorielle objective.** Une grandeur tensorielle d'ordre p est une grandeur objective si le produit contracté simple de sa valeur actuelle avec la position actuelle de

toute biparticule est une grandeur tensorielle d'ordre $p - 1$ objective :

$$\Psi \text{ objectif} \quad \Leftrightarrow \quad \Psi \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) \text{ objectif}, \quad \forall t, \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)}, \forall \mathcal{R}, \forall \tilde{\mathcal{R}} \quad (3.8)$$

Le vecteur vérifiera aisément que cette définition généralise les cas particuliers $p = 1$ et $p = 2$ précédemment étudiés.

- **Théorème 3.13 – Caractérisation.** Une grandeur tensorielle d'ordre p est objective si et seulement si sa formule de changement d'observateur est :

$$\tilde{\Psi}(t) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi(t)) \quad (\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t} : \text{rotation par } \mathbf{Q}_t \text{ d'un tenseur d'ordre } p) \quad (3.9)$$

Démonstration – Soit une grandeur tensorielle d'ordre p . D'après la définition 3.8 [p. 43] :

$$\begin{aligned} \Psi \text{ objectif} &\Leftrightarrow \Psi \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) \text{ objectif} \quad \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)} \\ &\Leftrightarrow \tilde{\Psi}(t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_t^{(2)} - \tilde{\mathbf{x}}_t^{(1)}) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi(t) \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)})) \quad \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)} \\ &\Leftrightarrow \tilde{\Psi}(t) \cdot \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi(t)) \cdot \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) \quad \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)} \\ &\Leftrightarrow \tilde{\Psi}(t) \cdot \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi(t)) \cdot \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{(2)} - \mathbf{x}_t^{(1)}) \quad \forall P^{(1)}, \forall P^{(2)} \\ &\Leftrightarrow \tilde{\Psi}(t) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi(t)) \end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que la caractérisation (3.9) est bien valable dans les cas particuliers $p = 0$, $p = 1$ et $p = 2$ envisagés précédemment.

Rappels d'algèbre – La rotation par \mathbf{Q}_t d'un tenseur \mathbf{T} d'ordre p s'écrit avec le produit tensoriel de Kronecker \boxtimes :

$$\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{T}) = \underbrace{(\mathbf{Q}_t \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{Q}_t)}_{p \text{ termes}} \otimes^p \mathbf{T} \quad \text{où} \quad (\mathbf{Q}_t \boxtimes \dots \boxtimes \mathbf{Q}_t)^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_p} = Q_t^{i_1}_{j_1} \dots Q_t^{i_p}_{j_p}$$

Pour $p = 2$, on vérifie aisément que $(\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) : \mathbf{T} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}_t^\top$

3.5 Exemples de changements d'observateur

3.5.1 Changement d'observateur du gradient de la transformation

- **Théorème 3.14** – Le gradient de la transformation est un champ matériel tensoriel du second ordre non objectif.

Démonstration – Considérons une biparticule $\{P, P'\}$ quelconque. La formule de changement d'observateur de sa position actuelle est :

$$\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P) \quad [\text{éq. (1.7) p. 17}] \quad (3.10)$$

En particulier, pour $t = t_0$ il vient :

$$\tilde{\mathbf{x}}_0^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_0^P = \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) \quad (3.11)$$

où \mathbf{Q}_0 est la valeur du tenseur de changement d'observateur à l'instant t_0 .

La définition du gradient de la transformation pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_t^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_t^P &= \tilde{\mathbf{F}} \cdot (\tilde{\mathbf{x}}_0^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_0^P) + \|\tilde{\mathbf{x}}_0^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_0^P\| \boldsymbol{\theta}(\tilde{\mathbf{x}}_0^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_0^P) \\
\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P) &= \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \|\mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P)\| \boldsymbol{\theta}(\mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P)) \quad [\text{éq. (3.10) et (3.11)}] \\
&= \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\| \boldsymbol{\theta}'(\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) \quad (\mathbf{Q}_0 \text{ orthogonal}) \\
\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P &= \mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\| \mathbf{Q}_t^\top \cdot \boldsymbol{\theta}'(\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) \\
\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P &= \mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\| \boldsymbol{\theta}''(\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Or la définition du gradient de la transformation pour l'observateur \mathcal{R} est :

$$\mathbf{x}_t^{P'} - \mathbf{x}_t^P = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) + \|\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P\| \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}_0^{P'} - \mathbf{x}_0^P) \quad (3.13)$$

En comparant les équations (3.12) et (3.13) [p. 44], on trouve la relation :

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top \quad (3.14)$$

qui est la formule de changement d'observateur du gradient de la transformation. Cette formule est différente de la caractérisation d'une grandeur tensorielle du second ordre objective [th. 3.9 p. 42].

3.5.2 Opérateurs différentiels eulériens sur des champs objectifs

Gradient eulérien d'un champ scalaire objectif

- **Théorème 3.15** – Le gradient eulérien d'un champ matériel scalaire objectif est un champ matériel vectoriel objectif.

Démonstration – Soit Ψ un champ matériel scalaire objectif. Sa valeur pour un observateur \mathcal{R} est $\Psi(P, t)$ et celle pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est $\tilde{\Psi}(P, t)$. L'objectivité de ce champ matériel implique que la formule de changement d'observateur des valeurs actuelles est :

$$\tilde{\Psi}(P, t) = \Psi(P, t) \quad [\text{déf. 3.2 page 40}] \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Psi}_E(\tilde{\mathbf{x}}_t, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t) \quad (\text{descriptions d'Euler du champ})$$

Par définition du gradient eulérien du champ scalaire $\Psi(P, t)$ pour l'observateur \mathcal{R} on écrit :

$$\begin{aligned}
d\Psi &= \mathbf{grad}_E \Psi \cdot d\mathbf{x}_t \quad (\text{définition du gradient eulérien pour l'observateur } \mathcal{R}) \\
d\tilde{\Psi} &= \mathbf{grad}_E \Psi \cdot d\mathbf{x}_t \quad (\text{objectivité de } \Psi) \\
d\tilde{\Psi} &= \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t \quad (\text{changement d'observateur d'une biparticule}) \\
\mathbf{grad}_E \tilde{\Psi} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t \quad (\text{définition du gradient eulérien pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}}) \\
\mathbf{grad}_E \tilde{\Psi} &= \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top \quad (\text{l'égalité précédente est vraie } \forall d\tilde{\mathbf{x}}_t) \\
\mathbf{grad}_E \tilde{\Psi} &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \Psi \quad (\mathbf{grad}_E \Psi \text{ est un vecteur})
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathbf{grad}_E \Psi$ est un champ vectoriel objectif [th. 3.6 p. 40].

Gradient eulérien d'un champ vectoriel objectif

- **Théorème 3.16** – Le gradient eulérien d'un champ matériel vectoriel objectif est un champ matériel tensoriel d'ordre 2 objectif.

Démonstration – Soit Ψ un champ matériel vectoriel objectif. Sa valeur pour un observateur \mathcal{R} est notée $\Psi(P, t)$ et celle pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est notée $\tilde{\Psi}(P, t)$. L'objectivité de ce champ matériel implique que la formule de changement d'observateur des valeurs actuelles est :

$$\tilde{\Psi}(P, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \Psi(P, t) \quad [\text{th. 3.6 p. 40}] \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Psi}_E(\tilde{\mathbf{x}}_t, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)$$

La définition du gradient eulérien de ce champ vectoriel pour l'observateur \mathcal{R} est :

$$\begin{aligned} d\Psi &= \text{grad}_E \Psi \cdot d\mathbf{x}_t && \text{(définition du gradient eulérien pour l'observateur } \mathcal{R}) \\ \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\Psi} &= \text{grad}_E \Psi \cdot d\mathbf{x}_t && \text{(objectivité de } \Psi) \\ \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\Psi} &= \text{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && \text{(changement d'observateur d'une biparticule)} \\ \mathbf{Q}_t^\top \cdot \text{grad}_E \tilde{\Psi} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= \text{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && \text{(définition du gradient eulérien pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}}) \\ \text{grad}_E \tilde{\Psi} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t \\ \text{grad}_E \tilde{\Psi} &= \mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top && \text{(l'égalité précédente est vraie } \forall d\tilde{\mathbf{x}}_t) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\text{grad}_E \Psi$ est un champ tensoriel d'ordre 2 objectif [th. 3.9 p. 42].

Gradient eulérien d'un champ tensoriel d'ordre p objectif

- **Théorème 3.17** – Le gradient eulérien d'un champ matériel tensoriel d'ordre 2 objectif est un champ matériel tensoriel d'ordre 3 objectif.

Démonstration – Soit Ψ un champ matériel tensoriel du second ordre objectif. Sa valeur pour un observateur \mathcal{R} est notée $\Psi(P, t)$ et celle pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est notée $\tilde{\Psi}(P, t)$. L'objectivité de ce champ matériel implique que la formule de changement d'observateur des valeurs actuelles est :

$$\tilde{\Psi}(P, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \Psi(P, t) \cdot \mathbf{Q}_t^\top \text{ [th. 3.9 p. 42]} \Rightarrow \tilde{\Psi}_E(\tilde{\mathbf{x}}_t, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \Psi_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{Q}_t^\top$$

La définition du gradient eulérien (tenseur d'ordre 3) pour l'observateur \mathcal{R} est :

$$\begin{aligned} d\Psi &= \text{grad}_E \Psi \cdot d\mathbf{x}_t && \text{(définition du gradient eulérien pour l'observateur } \mathcal{R}) \\ \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\Psi} \cdot \mathbf{Q}_t &= \text{grad}_E \Psi \cdot d\mathbf{x}_t && \text{(objectivité de } \Psi) \\ \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\Psi} \cdot \mathbf{Q}_t &= \text{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && \text{(changement d'observateur d'une biparticule)} \\ \mathbf{Q}_t^\top \cdot (\text{grad}_E \tilde{\Psi} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t) \cdot \mathbf{Q}_t &= \text{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && \text{(déf. du gradient eulérien pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}}) \\ \text{grad}_E \tilde{\Psi} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot (\text{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t) \cdot \mathbf{Q}_t^\top \\ \text{grad}_E \tilde{\Psi} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= [(\mathbf{Q}_t \otimes \mathbf{Q}_t \otimes \mathbf{Q}_t) \otimes^3 \text{grad}_E \Psi] \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t && (\otimes : \text{produit de Kronecker}) \\ \text{grad}_E \tilde{\Psi} &= (\mathbf{Q}_t \otimes \mathbf{Q}_t \otimes \mathbf{Q}_t) \otimes^3 \text{grad}_E \Psi && \text{(l'égalité précédente est vraie } \forall d\tilde{\mathbf{x}}_t) \\ \text{grad}_E \tilde{\Psi} &= \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\text{grad}_E \Psi) \end{aligned}$$

ce qui montre que $\text{grad}_E \Psi$ est une grandeur tensorielle d'ordre 3 objective [th. 3.13 p. 43].

On généralise sans difficulté aux champs matériels tensoriels objectifs d'ordre supérieur :

- **Théorème 3.18** – Le gradient eulérien d'un champ matériel tensoriel d'ordre p objectif est un champ matériel tensoriel d'ordre $p + 1$ objectif.

Opérateurs différentiels eulériens sur des champs objectifs

La version eulérienne des opérateurs différentiels divergence, rotationnel et laplacien a été définie dans les équations (2.25) [p. 29]. À partir de l'objectivité du gradient eulérien de tout champ matériel objectif [th. 3.18 p. 45], on en déduit facilement l'objectivité des opérateurs différentiels qui en dérivent :

- **Théorème 3.19** – L'application des opérateurs différentiels eulériens à des champs matériels objectifs engendre des champs matériels objectifs.

Exemple 3.20 – Si Ψ est un champ matériel vectoriel objectif, son gradient est objectif [th. 3.16 p. 44]. Sa formule de changement d'observateur est donc : $\mathbf{grad}_E \tilde{\Psi} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top$ [th. 3.9 p. 42]. La définition de la divergence de ce champ pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est :

$$\operatorname{div}_E \tilde{\Psi} = \mathbf{grad}_E \tilde{\Psi} : \mathbf{G} = (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top) : \mathbf{G} = \mathbf{grad}_E \Psi : \mathbf{G} = \operatorname{div}_E \Psi$$

ce qui est la caractérisation d'une grandeur scalaire objective.

On laisse le soin au lecteur de vérifier que si Ψ est une grandeur vectorielle objective, l'application des définitions (universelles) du rotationnel eulérien et du laplacien eulérien conduisent aussi à leur objectivité :

$$\operatorname{rot}_E \tilde{\Psi} = \mathbf{Q}_t \cdot \operatorname{rot}_E \Psi \quad \text{et} \quad \Delta_E \tilde{\Psi} = \mathbf{Q}_t \cdot \Delta_E \Psi$$

3.5.3 Opérateurs différentiels eulériens sur des champs matériels non objectifs

Contrairement aux grandeurs objectives, la formule de changement d'observateur des valeurs actuelles de grandeurs non objectives n'est pas connue *a priori* : elle est spécifique à chaque grandeur non objective. Il faut donc établir la formule de changement d'observateur au cas par cas en appliquant la définition universelle de la grandeur non objective pour chaque observateur. On peut alors vérifier si la formule de changement d'observateur du gradient eulérien de ces champs est ou non celle d'une grandeur objective. Il se peut que l'application d'opérateurs eulériens à des champs matériels non objectifs conduise à un champ matériel objectif. Par exemple, on verra plus loin [éq. (5.30) p. 92] que la divergence eulérienne du champ des vitesses (champ matériel vectoriel non objectif) est néanmoins un champ matériel scalaire objectif.

3.5.4 Changement d'observateur des opérateurs différentiels lagrangiens

Gradient lagrangien d'un champ scalaire objectif

- **Théorème 3.21** – Le gradient lagrangien d'un champ matériel scalaire objectif est un champ matériel vectoriel non objectif.

Démonstration – Soit Ψ un champ matériel scalaire objectif. Sa valeur actuelle pour un observateur \mathcal{R} est $\Psi(P,t)$ et celle pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est $\tilde{\Psi}(P,t)$. L'objectivité de cette grandeur scalaire implique que la formule de changement d'observateur des valeurs actuelles est [déf. 3.2 p. 40] :

$$\tilde{\Psi}(P,t) = \Psi(P,t) \quad \Rightarrow \quad d\tilde{\Psi} = d\Psi$$

La définition du gradient lagrangien pour l'observateur \mathcal{R} conduit à :

$$\begin{aligned} d\Psi &= \mathbf{grad}_L \Psi \cdot d\mathbf{x}_0 && \text{(définition du gradient lagrangien pour l'observateur } \mathcal{R}) \\ d\tilde{\Psi} &= \mathbf{grad}_L \Psi \cdot d\mathbf{x}_0 && \text{(objectivité de } \Psi) \\ d\tilde{\Psi} &= \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{Q}_0^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 && \text{(éq. (3.11) p. 43)} \\ \mathbf{grad}_L \tilde{\Psi} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{Q}_0^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 && \text{(définition du gradient lagrangien pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}}) \\ \mathbf{grad}_L \tilde{\Psi} &= \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{Q}_0^\top && \text{(l'égalité précédente est vraie } \forall d\tilde{\mathbf{x}}_0) \\ \mathbf{grad}_L \tilde{\Psi} &= \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{grad}_L \Psi && \text{(} \mathbf{grad}_L \Psi \text{ est un vecteur)} \end{aligned} \tag{3.15}$$

L'équation (3.15) est la formule de changement d'observateur des valeurs actuelles de $\mathbf{grad}_L \Psi$. Elle n'est pas celle d'une grandeur vectorielle objective [th. 3.6 [p. 40] car $\mathbf{Q}_0 \neq \mathbf{Q}_t$.

Gradient lagrangien d'un champ vectoriel objectif

- **Théorème 3.22** – Le gradient lagrangien d'un champ matériel vectoriel objectif non uniforme est un champ matériel tensoriel d'ordre 2 non objectif.

Démonstration – Soit Ψ une grandeur vectorielle objective. Sa valeur actuelle pour un observateur \mathcal{R} est $\Psi(P,t)$ et celle pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est $\tilde{\Psi}(P,t)$. L'objectivité de cette grandeur vectorielle implique que la formule de changement d'observateur des valeurs actuelles est :

$$\tilde{\Psi}(P,t) = \mathbf{Q}_t \cdot \Psi(P,t) \quad [\text{th. 3.6 p. 40}] \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Psi}_L(x_0,t) = \mathbf{Q}_t \cdot \Psi_L(x_0,t) \quad \Rightarrow \quad d\tilde{\Psi} = \mathbf{Q}_t \cdot d\Psi$$

La définition du gradient lagrangien pour l'observateur \mathcal{R} conduit à :

$$\begin{aligned} d\Psi &= \mathbf{grad}_L \Psi \cdot d\mathbf{x}_0 \quad (\text{définition du gradient eulérien pour l'observateur } \mathcal{R}) \\ \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\Psi} &= \mathbf{grad}_L \Psi \cdot d\mathbf{x}_0 \quad (\text{objectivité de } \Psi) \\ \mathbf{Q}_t^\top \cdot d\tilde{\Psi} &= \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{Q}_0^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 \quad (\text{éq. (3.11) p. 43}) \\ \mathbf{Q}_t^\top \cdot \mathbf{grad}_L \tilde{\Psi} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{Q}_0^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 \quad (\text{définition du gradient eulérien pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}}) \\ \mathbf{grad}_L \tilde{\Psi} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{Q}_0^\top \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_0 \\ \mathbf{grad}_L \tilde{\Psi} &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{Q}_0^\top \quad (l'égalité précédente est vraie \forall d\tilde{\mathbf{x}}_0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

L'équation (3.16) est la formule de changement d'observateur des valeurs actuelles de $\mathbf{grad}_L \Psi$. Cette formule montre que $\mathbf{grad}_L \Psi$ n'est pas un champ matériel tensoriel du second ordre objectif [th. 3.9 p. 42].

Opérateurs différentiels lagrangiens appliqués à un champ objectif

- **Théorème 3.23** – L'application des opérateurs différentiels lagrangiens à des champs matériels objectifs non uniformes engendre des champs matériels non objectifs.

Démonstration – La démarche dans les deux cas particuliers qui précèdent montre que le gradient lagrangien d'un champ matériel d'ordre p objectif Ψ n'est pas un champ matériel tensoriel d'ordre $p+1$ objectif. C'est la conséquence du fait que la définition du gradient lagrangien fait intervenir la position à l'instant t_0 de la biparticule arbitraire $d\mathbf{x}_0$, dont la formule de changement d'observateur est $d\tilde{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot d\mathbf{x}_0$, alors que le changement d'observateur de la valeur actuelle de la grandeur objective Ψ se fait avec \mathbf{Q}_t . La non objectivité du gradient lagrangien d'un champ objectif entraîne celle des versions lagrangiennes de la divergence, du rotationnel et du laplacien qui en découlent [éq.(2.24) p. 29].

Exemple 3.24 – La divergence lagrangienne d'un champ objectif Ψ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) s'écrit : $\text{div}_L \Psi = \mathbf{grad}_E \Psi : \mathbf{F}^\top$ [éq. (2.26) p. 29]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{div}_L \tilde{\Psi} &= \mathbf{grad}_E \tilde{\Psi} : \tilde{\mathbf{F}}^\top \quad (\text{définition de la divergence lagrangienne pour } \tilde{\mathcal{R}}) \\ &= (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top) : \tilde{\mathbf{F}}^\top \quad (\Psi \text{ objectif} \Rightarrow \mathbf{grad}_E \Psi \text{ objectif}) \\ &= (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top) : (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top)^\top \quad (\text{changement d'observateur de } \mathbf{F}) \\ &= (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \Psi \cdot \mathbf{Q}_t^\top) : (\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{Q}_t^\top) \\ &\neq \mathbf{grad}_E \Psi : \mathbf{F}^\top = \text{div}_L \Psi \quad (\text{à cause de la présence de } \mathbf{Q}_0 \text{ dans la ligne précédente}) \end{aligned}$$

Opérateurs lagrangiens appliqués à des champs non objectifs

On ne peut rien dire de général sur les opérateurs lagrangiens appliqués à des champs (scalaires, vectoriel ou tensoriels) non objectifs, car contrairement aux champs objectifs, la formule de changement d'observateur des champs non objectifs n'est pas connue *a priori*. Il faut donc vérifier au cas par cas.

3.5.5 Changement d'observateur de la dérivée particulière d'un champ objectif

Rappel – La définition de la dérivée particulière d'un champ matériel $\Psi(P,t)$ est [déf. 2.16 p. 30] :

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi(P,t)}{\partial t} \quad (\text{dérivée à } P \text{ constant})$$

Dérivée particulière d'un champ scalaire objectif

- **Théorème 3.25** – La dérivée particulière d'un champ matériel scalaire objectif est un champ matériel scalaire objectif.

Démonstration – Soit $\Psi(P,t)$ un champ matériel scalaire objectif. Sa formule de changement d'observateur est donc : $\tilde{\Psi}(P,t) = \Psi(P,t)$ [éq. (3.2) p. 40]. La dérivée particulière pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ s'écrit :

$$\dot{\tilde{\Psi}}(P,t) = \frac{\partial \tilde{\Psi}(P,t)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi(P,t)}{\partial t} = \dot{\Psi}(P,t) \quad (3.17)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective [déf. 3.2 p. 40].

Dérivée particulière d'un champ non scalaire objectif

- **Théorème 3.26** – La dérivée particulière d'un champ matériel objectif *non scalaire* est un champ matériel non objectif.

Démonstration – La formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective est :

$$\tilde{\Psi}(P,t) = \mathcal{Q}_t \cdot \Psi(P,t)$$

La dérivée particulière du champ $\Psi(P,t)$ pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ s'écrit :

$$\dot{\tilde{\Psi}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}(P,t)}{\partial t} = \frac{\partial (\mathcal{Q}_t \cdot \Psi)}{\partial t} = \frac{d\mathcal{Q}_t}{dt} \cdot \Psi + \mathcal{Q}_t \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{d\mathcal{Q}_t}{dt} \cdot \Psi + \mathcal{Q}_t \cdot \dot{\Psi} \neq \mathcal{Q}_t \cdot \dot{\Psi}$$

La dérivée particulière d'un champ matériel vectoriel objectif est donc un champ vectoriel non objectif.

Il en est de même pour la dérivée particulière de tout champ matériel objectif Ψ *non scalaire*, car la formule de changement d'observateur des champs non scalaires objectifs contient toujours la rotation \mathcal{Q}_t . Il s'ensuit que la relation entre les dérivées particulières du champ non scalaire pour deux observateurs contient nécessairement des dérivées $\frac{d}{dt}\mathcal{Q}_t$ du tenseur de changement d'observateur.

Remarque réservée aux initiés 3.1 – La non objectivité de la dérivée particulière de grandeurs vectorielles ou tensorielles objectives a troublé certains auteurs, qui pensaient (à tort) que cette dérivée particulière devait l'être pour que les lois de comportement incrémentales soient universelles⁽²⁾. Il peut exister des relations universelles entre grandeurs non objectives. Un exemple de loi incrémentale est donné dans le cours *Comportement élastique*⁽³⁾, du même auteur.

3.6 En bref ...

L'objectivité est une propriété de certaines grandeurs physiques scalaires vectorielles ou tensorielles. La valeur actuelle des grandeurs objectives a la même orientation par rapport à la position actuelle de la matière pour tous les observateurs.

⁽²⁾ Ils disent « objectives » [remarque 1.6 p. 15].

⁽³⁾ Disponible à <http://cel.archives-ouvertes.fr/ce1-00827790>, ou bien <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/elas.html>

Si \mathbf{Q}_t est le tenseur de changement d'observateur actuel entre deux observateurs quelconques \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$ en mouvement relatif quelconque, la formule de changement d'observateur des valeurs actuelles de toute grandeur objective est :

$$\tilde{\Psi}(t) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi(t)) \quad \text{où } \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi(t)) \text{ est la rotation par } \mathbf{Q}_t \text{ du tenseur } \Psi(t).$$

Si la grandeur est un tenseur d'ordre zéro (un scalaire) alors $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\Psi(t)) = \Psi(t)$.

On a donné quelques exemples de grandeurs objectives et non objectives : les opérateurs différentiels eulériens appliqués à des champs matériels objectifs engendrent des champs matériels objectifs ; il se peut aussi que des opérateurs eulériens appliqués à certains champs matériels non objectifs engendrent des champs objectifs. En revanche, les opérateurs différentiels lagrangiens appliqués à des champs matériels objectifs non uniformes n'engendrent pas des champs matériels objectifs. Enfin, seules les dérivées particulières de champs matériels *scalaires* sont des champs matériels scalaires objectifs.

Déformation

4.1 Introduction

Un solide, tel qu'il est défini en mécanique générale, est un milieu continu réputé indéformable, c'est-à-dire que la distance entre tout couple de particules est constante dans le temps. Pour analyser la déformation à un instant t dans un mouvement de milieu continu déformable, il faudrait *a priori* comparer pour toutes les biparticules leur longueur actuelle avec leur longueur à un instant de référence t_0 *arbitrairement choisi*. À l'instant de référence t_0 , le milieu continu est donc déclaré non déformé.

Remarques 4.1 – Le choix d'un instant de référence est arbitraire mais important car la valeur de la grandeur tensorielle *déformation actuelle* qui va être définie dans ce chapitre dépend évidemment du choix de cet instant de référence. Le concept de déformation actuelle n'a de sens que lorsque l'on a choisi un instant de référence t_0 , la forme de la matière à cet instant servant de référence pour comparer les longueurs actuelles des biparticules avec leur longueur de référence.

Pour l'étude des mouvements de milieux continus solides déformables, on choisit normalement un instant de référence t_0 physiquement significatif ; le plus souvent, l'instant de référence est un instant où le solide déformable n'a jamais été sollicité par le milieu extérieur : on *décide* donc qu'à cet instant le solide déformable est considéré comme non déformé.

En revanche, en mécanique des milieux continus fluides (liquides ou gaz), le choix d'un instant de référence est plus difficile à motiver physiquement : un milieu continu fluide n'a pas de forme propre particulière à laquelle on ait envie de se référer. Même si la déformation actuelle par rapport à un instant de référence arbitrairement choisi peut parfaitement être définie pour un fluide (il s'agit bien d'un milieu continu), le lecteur comprendra aisément que le concept de déformation par rapport à une forme de référence n'a que très peu d'intérêt pour les mécaniciens des fluides.

Observer les changements de longueur de toutes les biparticules d'un milieu continu en mouvement est redondant. D'un point de vue strictement logique, pour prouver qu'un milieu continu en mouvement se déforme, il suffit de trouver une biparticule dont la longueur varie dans le temps. Cependant, cette information ne donne aucun renseignement sur la variation de longueur des autres biparticules. Pour donner une description plus complète de la déformation, on procède de la manière suivante : pour chaque particule, on n'observe des variations de distance qu'avec les particules voisines. L'idée, pour l'instant floue, de « particule voisine » dans un milieu continu en mouvement sera précisée rigoureusement. Ce n'est qu'après un certain passage à la limite que l'on pourra définir correctement la notion de tenseur de déformation en une particule. La déformation actuelle d'un milieu continu par rapport à sa forme de référence se décrira donc avec un *champ matériel* tensoriel.

Rappel – Tous les vecteurs et tenseurs évoqués dans la suite sont relatives à un certain observateur et leur valeur est dans l'espace vectoriel de calcul \mathbb{V}_3 défini en section 1.2.2 [p. 12]. Le changement d'observateur est abordé en fin de chapitre [section 4.15 p. 74].

4.2 Direction matérielle

4.2.1 Chemin matériel

- **Définition 4.1 – Chemin matériel.** On appelle chemin matériel \mathcal{C} , un ensemble de particules dont les positions actuelles forment une courbe \mathcal{C}_t régulière⁽¹⁾.
- **Proposition 4.2 –** Si les positions actuelles des particules d'un chemin matériel \mathcal{C} forment une courbe régulière \mathcal{C}_t , alors elles forment une courbe régulière $\mathcal{C}_{t'}$ à tout autre instant t' . En particulier, la courbe \mathcal{C}_0 des positions de référence des particules de \mathcal{C} est une courbe régulière.

Démonstration – Soit \mathcal{C} un chemin matériel dont les positions actuelles \mathbf{x}_t forment la courbe \mathcal{C}_t . Soit $\mathbf{x}_t = \mathbf{g}_t(\mu)$ l'équation paramétrique, de paramètre μ , de la courbe \mathcal{C}_t . Le paramètre μ identifie les particules du chemin matériel. La régularité de la courbe \mathcal{C}_t signifie que la fonction $\mathbf{g}_t(\mu)$ est continue et dérivable. La position de référence des particules du chemin matériel \mathcal{C} est donnée par la description de Lagrange du mouvement [déf. 2.5 p. 23] :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{g}_t(\mu), t) = (\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{g}_t)(\mu) = \mathbf{g}_0(\mu) \quad \text{où } \mathbf{g}_0 = (\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{g}_t)$$

La transformation \mathbf{f} étant différentiable en \mathbf{x}_0 , la fonction \mathbf{f}^{-1} l'est aussi en \mathbf{x}_t [éq. (2.21) p. 29]. Puisque \mathbf{g}_t est une fonction continue dérivable, alors la fonction $\mathbf{g}_0 = (\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{g}_t)$ l'est aussi. L'équation paramétrique \mathbf{g}_0 de la courbe \mathcal{C}_0 est donc une fonction continue dérivable, la courbe \mathcal{C}_0 est donc régulière. On en déduit, avec un raisonnement analogue, qu'à tout instant t' les positions des particules d'un chemin matériel \mathcal{C} forment une courbe régulière $\mathcal{C}_{t'}$.

- **Définition 4.3 – Chemin matériel issu d'une particule.** On appelle chemin matériel issu d'une particule P un chemin matériel contenant la particule P .
- **Proposition 4.4 –** Soit \mathcal{C}^P un chemin matériel issu de la particule P . Alors la courbe \mathcal{C}_t^P des positions actuelles contient la position actuelle \mathbf{x}_t de la particule P . De même, la courbe \mathcal{C}_0^P des positions de référence contient la position de référence \mathbf{x}_0 de la particule P . Si P' est une particule de \mathcal{C}^P , de position actuelle \mathbf{x}'_t et de position de référence \mathbf{x}'_0 , on a l'équivalence suivante :

$$\mathbf{x}'_t \in \mathcal{C}_t^P \rightarrow \mathbf{x}_t \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x}'_0 \in \mathcal{C}_0^P \rightarrow \mathbf{x}_0 \quad \text{ce qu'on écrira : } P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P \quad (4.1)$$

Démonstration – Cette propriété est une conséquence directe de la régularité des courbes position d'un chemin matériel [proposition 4.2] et de la différentiabilité de la description de Lagrange du mouvement.

4.2.2 Direction matérielle

- **Définition 4.5 – Direction actuelle d'une direction matérielle.** Soit \mathcal{C}^P un chemin matériel issu d'une particule P et soit \mathcal{C}_t^P l'ensemble des positions actuelles de ses particules. On appelle direction actuelle de la direction matérielle issue de P , la tangente unitaire à la courbe \mathcal{C}_t^P en la position actuelle \mathbf{x}_t de la particule P .
- **Définition 4.6 – Direction de référence d'une direction matérielle .** Soit \mathcal{C}^P un chemin matériel issu d'une particule P et soit \mathcal{C}_0^P l'ensemble des positions de référence de ses particules. On appelle direction de référence de la direction matérielle issue de P , la tangente unitaire à la courbe \mathcal{C}_0^P en la position de référence \mathbf{x}_0 de la particule P .

⁽¹⁾ C'est-à-dire continue et ayant une tangente unique en chaque point.

- **Proposition 4.7** – Soit une direction matérielle issue d'une particule P dont la direction de référence est \mathbf{u}_0 et dont la direction actuelle est \mathbf{u}_t . La relation entre ces deux directions est :

$$\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \Leftrightarrow \mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} \quad (4.2)$$

Démonstration – La définition de la tangente unitaire en \mathbf{x}_t à la courbe \mathcal{C}_t^P est :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \lim_{\mathbf{x}'_t \in \mathcal{C}_t^P \rightarrow \mathbf{x}_t} \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} && \text{(définition de la tangente en } \mathbf{x}_t \text{ à } \mathcal{C}_t^P) \\ &= \lim_{\mathbf{x}'_0 \in \mathcal{C}_0^P \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}'_0, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)}{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}'_0, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)\|} && [\text{déf. 2.5 p. 23, éq. (4.1) p. 52}] \\ &= \lim_{\mathbf{x}'_0 \in \mathcal{C}_0^P \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{grad}_L \mathbf{f} \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\| \mathcal{O}(\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|)}{\|\mathbf{grad}_L \mathbf{f} \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) + \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\| \mathcal{O}(\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|)\|} && \text{(gradient de la transformation)} \\ &= \lim_{\mathbf{x}'_0 \in \mathcal{C}_0^P \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|)}{\|\mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|} + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|)\|} && [\text{notation 2.13 p. 28}] \\ &= \frac{\mathbf{F} \cdot \lim_{\mathbf{x}'_0 \in \mathcal{C}_0^P \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|}}{\|\mathbf{F} \cdot \lim_{\mathbf{x}'_0 \in \mathcal{C}_0^P \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|}\|} \end{aligned}$$

où $\lim_{\mathbf{x}'_0 \in \mathcal{C}_0^P \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|}$ est, par définition, la tangente unitaire \mathbf{u}_0 en \mathbf{x}_0 à la courbe \mathcal{C}_0^P , c'est-à-dire la direction de référence de la direction matérielle en P définie par \mathcal{C}_P . On a donc la relation :

$$\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}$$

On obtient la relation inverse, \mathbf{u}_0 en fonction de \mathbf{u}_t , en multipliant ce résultat à gauche par \mathbf{F}^{-1} :

$$\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_0 = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t \\ \text{et} \\ \|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\| = \frac{1}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{u}_0 = \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|}$$

4.3 Voisinnages d'une particule

Pour définir le voisinage d'une particule P , il faut désigner les particules P' qui appartiennent à ce voisinage. Selon que l'on utilise la méthode de Lagrange ou la méthode d'Euler pour identifier les particules, on définit deux sortes de voisinages :

- **Définition 4.8 – Voisinage de référence.** On appelle voisinage de référence de la particule P , l'ensemble des particules P' dont les positions de référence \mathbf{x}'_0 sont dans un voisinage de la position de référence \mathbf{x}_0 de la particule P . Il sera noté $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$
- **Définition 4.9 – Voisinage actuel.** On appelle voisinage actuel de la particule P , l'ensemble des particules P' dont les positions actuelles \mathbf{x}'_t sont dans un voisinage de la position actuelle \mathbf{x}_t de la particule P . Il sera noté $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$.

Exemple 4.10 – On peut prendre pour voisinage de référence et voisinage actuel les deux boules ouvertes suivantes :

$$\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}'_0 \mid \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\| < R_0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t) = \{\mathbf{x}'_t \mid \|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\| < R_1\}$$

où les rayons R_0 et R_1 sont choisis tels que tous les points de $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$ et de $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ soient des positions respectivement de référence et actuelle de particules du domaine de milieu continu.

Les deux voisinages $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$ et $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ sont *a priori* différents : ils ne contiennent pas les mêmes particules. Selon que l'on raisonne avec un voisinage de référence ou avec un voisinage actuel, on aboutit à différentes manières d'évaluer les déformations actuelles au voisinage d'une particule P .

- **Notation 4.11** – Dans les sections qui suivent on utilise la notion de gradient qui a été rappelée en section 2.5.1 [p. 26] :

$$\Psi(\mathbf{x}') - \Psi(\mathbf{x}) = (\mathbf{grad} \Psi)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \mathcal{O}(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad [\text{éq. (2.15) p. 26}]$$

Pour alléger les écritures, on écrira :

$$\Psi(\mathbf{x}') - \Psi(\mathbf{x}) = \mathbf{grad} \Psi \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) + \dots$$

sans détailler les termes qui disparaissent quand $\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}$. Si l'écart $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$ est noté $d\mathbf{x}$, alors

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{x}') - \Psi(\mathbf{x}) &= (\mathbf{grad} \Psi)(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + \dots \\ &= d\Psi + \dots \end{aligned}$$

où $d\Psi = (\mathbf{grad} \Psi)(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ est la différentielle de Ψ au point \mathbf{x} .

4.4 Tenseurs de déformation lagrangiens

Dans cette section, on observe les déformations actuelles, c'est-à-dire les changements de distance qui se sont produits entre un instant de référence t_0 et l'instant actuel t , au voisinage d'une particule P , en définissant ce voisinage par un voisinage de référence (les particules voisines sont identifiées par leur position de référence).

4.4.1 Dilatation linéique dans une direction matérielle

La différence entre les positions actuelles de deux particules P et P' du voisinage de référence $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$ est :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t &= \mathbf{f}(\mathbf{x}'_0, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t) \quad [\text{déf. 2.5 p. 23}] \\ &= \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) + \dots \quad [\text{notation 2.13 p. 28 et notation 4.11 p. 54}] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Pour savoir s'il y a déformation, il faut comparer la longueur actuelle $l_t = \|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|$ avec la longueur de référence $l_0 = \|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|$ des biparticules $\{P, P'\}$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|^2 &= (\mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) + \dots) \cdot (\mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) + \dots) \quad [\text{éq. (4.3)}] \\ &= (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) + \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|^2}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|^2} &= \frac{\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|} \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \frac{\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|} + \dots \\ \frac{\ell_t^2}{\ell_0^2} &= \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

où le vecteur $\bar{\mathbf{u}}_0 = \frac{\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|}$ est unitaire. Lorsque l'on fait tendre la particule P' vers la particule P en suivant un certain chemin matériel \mathcal{C}^P , les deux longueurs l_t et l_0 tendent vers 0, et le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{u}}_0$ tend vers la direction de référence \mathbf{u}_0 d'une direction matérielle [déf. 4.6 p. 52].

- **Définition 4.12 – Dilatation linéique actuelle.** Soit \mathcal{C}^P un chemin matériel issu d'une particule P , définissant en P une direction matérielle. On appelle dilatation linéique actuelle en P dans cette direction matérielle, la limite suivante :

$$K_l = \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\ell_t}{\ell_0} \quad (4.6)$$

L'équation (4.5) [p. 54] montre que cette limite est :

$$K_l = [\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0]^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| = [(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}) : (\mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0)]^{\frac{1}{2}} = [(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}) : \mathbf{U}_0]^{\frac{1}{2}} \quad (4.7)$$

où le tenseur du second ordre $(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F})$ est symétrique défini positif et où $\mathbf{U}_0 = \mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0$ est un tenseur du second ordre uniaxial unitaire représentant la direction de référence non orientée de la direction matérielle.

La dilatation linéique dans une direction matérielle est un scalaire sans dimension strictement positif. Si $0 < K_l < 1$, il y a contraction dans la direction matérielle ; si $K_l > 1$, il y a élongation dans la direction matérielle. La dilatation linéique K_l change avec la direction matérielle considérée (identifiée ici par sa direction de référence \mathbf{u}_0). On ne peut donc pas parler de dilatation linéique en une particule sans préciser de quelle direction matérielle il s'agit. Au voisinage d'une particule, il peut y avoir élongation dans une certaine direction matérielle et contraction dans une autre. Pour décrire toutes les dilatations linéiques dans toutes les directions matérielles issues d'une particule P , il faut un tenseur du second ordre.

- **Définition 4.13 –** On appelle tenseur de déformation actuelle de Cauchy-Green droit le tenseur du second ordre symétrique défini positif défini par :

$$\mathbf{C}(P, t) = \mathbf{F}(P, t)^\top \cdot \mathbf{F}(P, t)$$

Dans un mouvement de milieu continu, le tenseur de déformation \mathbf{C} est une fonction de la particule P et du temps, c'est-à-dire un champ matériel [déf. 1.4 p. 10] tensoriel du second ordre. L'équation (4.7) montre que le champ de déformation actuelle $\mathbf{C}(P, t)$ permet de calculer les dilatations linéiques actuelles dans toutes les directions matérielles issues de la particule P identifiées par leur direction de référence \mathbf{u}_0 par la formule :

$$K_l = [\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_0]^{\frac{1}{2}} = [\mathbf{C} : \mathbf{U}_0]^{\frac{1}{2}}$$

4.4.2 Tenseurs de déformation lagrangiens

Suivant les habitudes des auteurs, on trouve dans la littérature spécialisée de nombreux tenseurs de déformation qui peuvent tous s'exprimer les uns en fonction des autres. On se contente d'en donner ici quelques uns parmi les plus couramment rencontrés. La liste qui suit n'est donc pas exhaustive.

Terminologie – Dans la littérature spécialisée française et anglaise, les noms propres attribués aux différents tenseurs de déformation sont largement divers et ne paraissent pas faire l'objet d'un consensus. Il semble à l'auteur que les quelques noms propres qu'il ose proposer dans ce texte sont relativement consensuels. Quelle que soit leur dénomination, seule importe leur définition à partir du gradient de la transformation \mathbf{F} . Dans la suite, ils seront simplement désignés par leur symbole.

- Le tenseur $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$ défini précédemment. Il est généralement appelé tenseur de déformation de *Cauchy-Green droit*. Ce tenseur est symétrique défini positif. La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction de référence s'écrit :

$$K_l = \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{u}_0} = \sqrt{\mathbf{C} : \mathbf{U}_0} \quad (4.8)$$

- Le tenseur $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$. Ce tenseur est aussi la partie symétrique définie positive de la décomposition polaire à droite du gradient de la transformation \mathbf{F} (c'est-à-dire $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ où \mathbf{R} est orthogonal). La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction de référence s'écrit :

$$K_l = \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{u}_0} = \sqrt{\mathbf{U}^2 : \mathbf{U}_0} = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0\| \quad (4.9)$$

- Le tenseur $\mathbf{L} = \ln \mathbf{U}$. Le tenseur \mathbf{U} étant symétrique défini positif, son logarithme népérien est réel et symétrique mais non défini positif. La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction de référence s'écrit :

$$K_l = \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e}^{2\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u}_0} = \sqrt{\mathbf{e}^{2\mathbf{L}} : \mathbf{U}_0} = \|\mathbf{e}^{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{u}_0\| \quad (4.10)$$

- Le tenseur $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$ est généralement appelé tenseur de déformation de *Green-Lagrange droit*. Ce tenseur est symétrique non défini positif.

Justification – Ce tenseur est introduit par les auteurs qui décrivent le mouvement au moyen du champ de déplacement [déf. 2.8 p. 26] au lieu d'utiliser la description de Lagrange des positions actuelles. La démarche est exposée en détail dans la section 4.14 [p. 70]. En comparant les longueurs actuelle et de référence des biparticules $\{P, P'\}$ d'un voisinage de référence $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$, on trouve la variation *relative* du carré des distances en fonction de la description de Lagrange des déplacements \mathbf{u}_L :

$$\frac{\ell_t^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2} = \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \underbrace{(\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u})}_{2\mathbf{E}} \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 + \dots \quad \text{où } \bar{\mathbf{u}}_0 = \frac{\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0\|}$$

Après le passage à la limite $P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P$, on trouve :

$$\lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\ell_t^2 - \ell_0^2}{\ell_0^2} = \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\ell_t^2}{\ell_0^2} - 1 = K_t^2 - 1 = 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_0 \Rightarrow K_l = \sqrt{1 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_0} \quad (4.11)$$

Le tenseur \mathbf{E} ainsi défini est bien égal à $\frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$ car

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{grad}_L \mathbf{x}_t = \mathbf{grad}_L(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \quad [\text{déf. 2.8 p. 26}] \\ \mathbf{C} &= \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} = \mathbf{G} + 2\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) \end{aligned}$$

La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction de référence s'écrit :

$$K_l = \sqrt{1 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_0} = \sqrt{1 + 2\mathbf{E} : \mathbf{U}_0} \quad [\text{éq. (4.11)}]$$

On peut en inventer quantité d'autres, comme par exemple $\boldsymbol{\varepsilon}^u = \mathbf{U} - \mathbf{G}$.

- **Propriété 4.14** – Le lecteur vérifiera aisément que les tenseurs de déformation lagrangiens sont tous symétriques et ont tous les mêmes directions propres. Leurs valeurs propres sont donc réelles et les espaces propres associés sont orthogonaux entre eux. Les valeurs propres de \mathbf{C} et \mathbf{U} sont strictement positives.

Remarque 4.2 – Bien que traditionnellement qualifiés de « lagrangiens », les champs de tenseurs de déformation lagrangiens peuvent, comme tout champ matériel [déf. 1.4 p. 10], aussi bien être décrits par la méthode de Lagrange que par celle d'Euler.

4.5 Tenseurs de déformation eulériens

Dans cette section, le voisinage d'une particule est défini par un *voisinage actuel* $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t^P)$ [déf. 4.9 p. 53]. On compare toujours la longueur actuelle et la longueur de référence des biparticules $\{P, P'\}$, mais les particules sont maintenant identifiées par leur position actuelle. La position de référence d'une particule est :

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t)$$

Or, $\mathbf{grad}_E(\mathbf{f}^{-1}) = \mathbf{F}^{-1}$ [éq. (2.21) p. 29]. On peut donc écrire :

$$\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}'_t, t) - \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t) + \dots \quad [\text{notation 4.11 p. 54}] \quad (4.12)$$

où les vecteurs arbitraires $(\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t)$ définissent le voisinage actuel $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$.

4.5.1 Dilatation linéique dans une direction matérielle

On utilise la même démarche que pour les tenseurs de déformation lagrangiens. En comparant l'équation (4.12) à l'équation (4.3) [p. 54], on constate qu'on obtient l'équation (4.12) en échangeant dans l'équation (4.3) le rôle des vecteur $(\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0)$ et $(\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t)$ et le rôle des tenseurs \mathbf{F} et \mathbf{F}^{-1} . Avec ces substitutions, on trouve l'équivalent de l'équation (4.5) [p. 54] :

$$\frac{\ell_0^2}{\ell_t^2} = \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} + \dots = \bar{\mathbf{u}}_t \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top)^{-1} \cdot \bar{\mathbf{u}}_t + \dots \quad (4.13)$$

Quand la particule P' tend vers P en suivant un chemin matériel \mathcal{C}^P , le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{u}}_t = \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|}$ tend vers une direction matérielle de direction actuelle \mathbf{u}_t et les deux longueurs ℓ_t et ℓ_0 tendent vers 0. La dilatation linéique actuelle dans la direction matérielle définie par un chemin matériel \mathcal{C}^P issu d'une particule P est :

$$K_l = \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\ell_t}{\ell_0} \quad [\text{déf. 4.12 p. 55}] \quad (4.14)$$

L'équation (4.13) [p. 57] montre que cette limite est :

$$K_l = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top)^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} \quad (4.15)$$

- **Définition 4.15** – On appelle tenseur de déformation de Cauchy-Green gauche le tenseur du second ordre symétrique défini positif défini par :

$$\mathbf{B}(P, t) = \mathbf{F}(P, t) \cdot \mathbf{F}(P, t)^\top$$

Dans un mouvement de milieu continu, le tenseur de déformation \mathbf{B} est une fonction de la particule P et du temps, c'est-à-dire un champ matériel tensoriel du second ordre. L'équation (4.15) montre que le champ de déformation actuelle $\mathbf{B}(P, t)$ permet de calculer les dilatations linéiques actuelles de toutes les directions matérielles issues de la particule P identifiées par leur direction actuelle \mathbf{u}_t par la formule :

$$K_l = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}^{-1} : (\mathbf{u}_t \otimes \mathbf{u}_t)}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{U}_t}}$$

4.5.2 Tenseurs de déformation eulériens

Comme pour les tenseurs de déformation lagrangiens on trouve dans la littérature spécialisée d'autres tenseurs de déformation définis à partir du tenseur \mathbf{B} . Ces tenseurs de déformation sont dits « eulériens ». On en donne ici quelques exemples non exhaustifs.

- Le tenseur $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top$ précédemment défini. Il est généralement appelé tenseur de déformation de *Cauchy-Green gauche*. Ce tenseur est symétrique défini positif. La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction actuelle s'écrit :

$$K_l = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{U}_t}} \quad (4.16)$$

- Le tenseur $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$. Ce tenseur est la partie symétrique définie positive de la décomposition polaire à gauche du tenseur \mathbf{F} (c'est-à-dire $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ où \mathbf{R} est orthogonal). La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction actuelle s'écrit :

$$K_l = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{V}^{-2} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{V}^{-2} : \mathbf{U}_t}} = \frac{1}{\|\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} \quad (4.17)$$

- Le tenseur $\mathbf{M} = \mathbf{LnV}$. Le tenseur \mathbf{V} étant symétrique défini positif, son logarithme népérien est réel et symétrique mais non défini positif. La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle identifiée par sa direction actuelle s'écrit :

$$K_l = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{e}^{-2\mathbf{M}} \cdot \mathbf{u}_t}} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}^{-2\mathbf{M}} : \mathbf{U}_t}} = \frac{1}{\|\mathbf{e}^{-\mathbf{M}} \cdot \mathbf{u}_t\|} \quad (4.18)$$

On peut en inventer quantité d'autres, comme par exemple $\boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{V} - \mathbf{G}$.

- **Propriété 4.16** – Le lecteur vérifiera aisément que les tenseurs de déformation eulériens sont tous réels symétriques et ont tous les mêmes directions propres. Leurs valeurs propres sont donc réelles et les espaces propres sont orthogonaux entre eux. Les valeurs propres de \mathbf{B} et \mathbf{V} sont strictement positives.

Remarque 4.3 – Bien que traditionnellement qualifiés d'« eulériens », les champs de tenseurs de déformation eulériens peuvent, comme tous les champs matériels, aussi bien être décrits par la méthode de Lagrange que par celle d'Euler.

4.6 Comparaisons entre les différents tenseurs de déformation

Tous les tenseurs de déformation, lagrangiens comme eulériens, sont des tenseurs aptes à représenter la déformation actuelle en une particule P , en ce sens qu'ils permettent tous de calculer, avec des formules différentes, la dilatation linéique actuelle dans toutes les directions matérielles issues de la particule P . Pour les tenseurs lagrangiens, la direction matérielle est identifiée par sa direction de référence, alors que pour les tenseurs eulériens, elle est identifiée par sa direction actuelle. Tous ces tenseurs du second ordre sont donc des représentations possibles de la déformation en une particule $P^{(2)}$.

⁽²⁾ Cette diversité explique la diversité des présentations des textes sur les « grandes déformations » qu'on peut trouver dans la littérature, selon que les auteurs choisissent d'utiliser tel tenseur de déformation plutôt qu'un autre.

Vérification – La dilatation linéique dans une direction matérielle de direction actuelle \mathbf{u}_t et de direction de référence \mathbf{u}_0 est :

$$\begin{aligned} K_l(\mathbf{u}_t) &= \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} && \text{[éq. (4.15) p. 57]} \\ &= \frac{1}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}\|} && \text{[éq. (4.2) p. 53]} \\ &= \frac{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0)\|} = \frac{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{u}_0\|} \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| = K_l(\mathbf{u}_0) && \text{[éq. (4.7) p. 55]} \end{aligned} \quad (4.19)$$

En considérant les deux décompositions polaires à gauche et à droite du gradient de la transformation \mathbf{F} , on obtient la relation entre les tenseurs de déformation \mathbf{U} et \mathbf{V} :

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{R}}(\mathbf{U}) \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathcal{R}_{\mathbf{R}^\top}(\mathbf{V}) \quad (4.20)$$

Ces relations permettent d'exprimer n'importe quel tenseur de déformation lagrangien ou eulérien en fonction de n'importe quel autre :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^\top &\Rightarrow \mathbf{V}^2 = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{R}^\top &\Rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) \\ &\Rightarrow \ln \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \ln \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^\top &\Rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{R}}(\mathbf{L}) \end{aligned}$$

En résumé, tout tenseur de déformation eulérien est le tourné par la rotation \mathbf{R} du tenseur de déformation lagrangien correspondant.

Dans un mouvement rigide (pas de déformation), les tenseurs \mathbf{C} , \mathbf{U} , \mathbf{B} , et \mathbf{V} prennent la valeur \mathbf{G} (tenseur métrique) alors que les tenseurs \mathbf{L} , \mathbf{E} , \mathbf{M} , $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ prennent la valeur $\mathbf{0}$.

Remarque 4.4 – Le champ tensoriel non symétrique $\mathbf{F}(P, t)$ permet aussi d'évaluer les dilatations linéiques actuelles de toutes les directions matérielles issues de P : $K_l = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_t\|^{-1}$. Cependant, pour une déformation actuelle donnée⁽³⁾, la valeur de \mathbf{F} n'est pas unique car

$$K_l = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| \quad \forall \mathbf{Q} \text{ orthogonal}$$

Quelle que soit la valeur du tenseur orthogonal \mathbf{Q} , tout tenseur $\mathbf{F}' = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}$ donnerait des dilatations linéiques actuelles de directions matérielles avec la même formule. En particulier, quand il n'y a pas de déformation, la valeur de \mathbf{F} est une rotation indéterminée. L'utilisation du gradient de la transformation \mathbf{F} comme tenseur de déformation n'est donc pas recommandable, car il existe une infinité de gradients de transformation qui décrivent la même déformation avec les mêmes formules.

On peut facilement inventer quantité d'autres tenseurs de déformation⁽⁴⁾. Ceux qui sont basés sur le produit $(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F})$ sont lagrangiens (ils identifient les directions matérielles par leur direction de référence \mathbf{u}_0) et ceux qui sont basés sur $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top$ sont eulériens (ils identifient les directions matérielles par leur direction actuelle \mathbf{u}_t).

4.7 Spectre matériel de la déformation

Comme tout tenseur du second ordre symétrique, les tenseurs de déformation lagrangiens et eulériens ont des valeurs propres et des directions propres. Dans cette section, on en donne l'interprétation matérielle.

⁽³⁾ Ce qui est différent de pour « un mouvement donné ». Des mouvements différents peuvent aboutir à une même déformation actuelle.

⁽⁴⁾ On trouve dans la littérature spécialisée des tenseurs de Hill, de Henky, de Finger, d'Euler-Almansi, de Piot ...

- **Propriété 4.17** – A partir des relations 4.20 [p. 59] et des propriétés des rotations, le lecteur montrera facilement les propriétés suivantes :

1. Les tenseurs \mathbf{U} et \mathbf{V} ont les mêmes valeurs propres λ_i et les mêmes invariants.
2. Les valeurs propres de \mathbf{B} et \mathbf{C} sont $\{\lambda_i^2\}$ et celles de \mathbf{M} et \mathbf{L} sont $\{\ln \lambda_i\}$.
3. Les tenseurs de déformation lagrangiens ont les mêmes directions propres.
4. Les tenseurs de déformation eulériens ont les mêmes directions propres.
5. Si on note \mathbf{u}_{λ_i} une direction propre du tenseur de déformation lagrangien \mathbf{U} associée à la valeur propre λ_i , et si on note \mathbf{v}_{λ_i} une direction propre du tenseur de déformation eulérien \mathbf{V} associée à la même valeur propre λ_i , la relation entre les directions propres est :

$$\mathbf{v}_{\lambda_i} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_{\lambda_i} = \mathcal{R}_{\mathbf{R}}(\mathbf{u}_{\lambda_i}) \quad (\text{rotation par } \mathbf{R} \text{ du vecteur propre } \mathbf{u}_{\lambda_i}) \quad (4.21)$$

où \mathbf{R} est la partie orthogonale de la décomposition polaire du gradient de la transformation \mathbf{F} .

4.7.1 Directions matérielles propres actuelles

Considérons une direction matérielle dont la direction de référence actuelle coïncide avec la direction propre \mathbf{u}_{λ_i} du tenseur de déformation actuel $\mathbf{U}(P, t)$ associée à la valeur propre actuelle $\lambda_i(t)$. La direction actuelle de cette direction matérielle est donnée par l'équation (4.2) [p. 53] :

$$\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_{\lambda_i}}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_{\lambda_i}\|} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_{\lambda_i}}{\|\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_{\lambda_i}\|} = \frac{\mathbf{R} \cdot (\lambda_i \mathbf{u}_{\lambda_i})}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_{\lambda_i}\|} = \mathbf{R} \cdot \frac{\lambda_i \mathbf{u}_{\lambda_i}}{\lambda_i \|\mathbf{u}_{\lambda_i}\|} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_{\lambda_i} = \mathbf{v}_{\lambda_i} \quad [\text{éq. (4.21)}]$$

La direction actuelle de cette direction matérielle est donc une direction propre de $\mathbf{V}(P, t)$. On pose donc la définition suivante :

- **Définition 4.18 – Direction matérielle propre.** On appelle direction matérielle propre actuelle, une direction matérielle dont la direction de référence actuelle coïncide avec une direction propre d'un tenseur de déformation actuelle lagrangien, ou bien dont la direction actuelle coïncide avec une direction propre d'un tenseur de déformation actuelle eulérien.

Il faut bien noter que les directions matérielles propres à un autre instant t' sont généralement d'autres directions matérielles car le tenseur de déformation (quel que soit celui choisi) évolue, ses directions propres évoluent aussi. Elles coïncident donc avec des directions matérielles différentes à chaque instant.

Remarque 4.5 – On lit parfois une interprétation douteuse à propos de la partie orthogonale \mathbf{R} des décompositions polaires $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$: le tenseur orthogonal \mathbf{R} est quelquefois qualifié de « rotation locale de la matière » avant ou après une « déformation pure » \mathbf{V} ou \mathbf{U} .

- Dans un mouvement de milieu continu entre les instants t_0 et t_1 , le mouvement n'est pas une succession de deux mouvements l'un rigide et l'autre déformant. Pendant un mouvement entre t_0 et t_1 , pour tout $t \in [t_0, t_1]$, on peut faire toutes les décompositions polaires locales intermédiaires : $\mathbf{F}(P, t) = \mathbf{V}(P, t) \cdot \mathbf{R}(P, t) = \mathbf{R}(P, t) \cdot \mathbf{U}(P, t)$.
- La « rotation homogène locale » \mathbf{R} , parfois évoquée, n'existe pas car le champ matériel $\mathbf{R}(P, t)$ est en général un champ non uniforme.
- Dans un mouvement déformant, toutes les directions matérielles issues d'une particule P ont en général une déviation différente [déf. 4.26 p. 67].
- Enfin, les directions matérielles propres à un instant t ne sont plus des directions matérielles propres à un autre instant t' .

Quelle que soit la signification que l'on tente de lui donner, il semble difficile de parler d'une « rotation locale de la matière ». Dans un mouvement de milieu continu, la rotation \mathbf{R} issue de la décomposition polaire du gradient de la transformation \mathbf{F} permet simplement de passer des tenseurs de déformation eulériens aux tenseurs de déformation lagrangiens et inversement [éq. (4.20) et suivantes p. 59].

4.7.2 Dilatations linéiques principales

Considérons une direction matérielle propre [déf. 4.18 p. 60]. Sa direction de référence est par définition une direction propre \mathbf{u}_λ du tenseur de déformation \mathbf{U} (sa direction actuelle est une direction propre \mathbf{v}_λ du tenseur de déformation \mathbf{V}). La dilatation linéique dans cette direction matérielle est :

$$K_I(\mathbf{u}_\lambda) = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_\lambda\| = \|\lambda \mathbf{u}_\lambda\| = \lambda \quad [\text{éq. (4.9) p. 56}]$$

Remarque – On laisse le soin au lecteur de vérifier que l'on aboutit à la même conclusion si la direction matérielle propre est repérée par sa direction actuelle.

La valeur propre λ est donc la dilatation linéique dans la direction matérielle propre. On pose donc la définition suivante :

- **Définition 4.19 – Dilatations linéiques principales actuelles.** Les valeurs propres actuelles $\lambda_i(t)$, communes aux tenseurs de déformation actuelle \mathbf{U} et \mathbf{V} , sont appelées dilatations linéiques principales actuelles.

4.8 Dilatation volumique

Considérons trois particules P' , P'' et P''' d'un voisinage de référence $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0^P)$ de la particule P . Les trois biparticules $\{P, P'\}$, $\{P, P''\}$ et $\{P, P'''\}$, issues de la particule P , ont respectivement les positions de référence suivantes :

$$\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0 \quad ; \quad \mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0 \quad ; \quad \mathbf{x}'''_0 - \mathbf{x}_0$$

Leurs positions actuelles sont [éq. (4.3) p. 54] :

$$\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) + \dots \quad ; \quad \mathbf{x}''_t - \mathbf{x}_t = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0) + \dots \quad ; \quad \mathbf{x}'''_t - \mathbf{x}_t = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}'''_0 - \mathbf{x}_0) + \dots$$

Le volume engendré par les positions de référence des quatre particules P , P' , P'' et P''' (supposées non coplanaires) est le produit mixte noté v_0 :

$$v_0 = [\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}'''_0 - \mathbf{x}_0]$$

Le volume engendré par les positions actuelles de ces quatre particules est le produit mixte :

$$\begin{aligned} v_t &= [\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t, \mathbf{x}''_t - \mathbf{x}_t, \mathbf{x}'''_t - \mathbf{x}_t] \\ &= [\mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) + \dots, \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0) + \dots, \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}'''_0 - \mathbf{x}_0) + \dots] \\ &= (\det \mathbf{F}) [\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}'''_0 - \mathbf{x}_0] + \dots \quad (\text{identité } [\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}, \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \mathbf{F} \cdot \mathbf{w}] = (\det \mathbf{F}) [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]) \\ &= (\det \mathbf{F}) v_0 + \dots \end{aligned}$$

Le rapport de ces deux volumes est donc :

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{[\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t, \mathbf{x}''_t - \mathbf{x}_t, \mathbf{x}'''_t - \mathbf{x}_t]}{[\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}'''_0 - \mathbf{x}_0]} = \det \mathbf{F} + \dots \quad (4.22)$$

Lorsque l'on fait tendre simultanément les trois particules P' , P'' et P''' vers la particule P , chacune le long de son propre chemin matériel \mathcal{C}' , \mathcal{C}'' et \mathcal{C}''' , les deux volumes v_0 et v_t tendent vers 0.

- **Définition 4.20 – Dilatation volumique.** Soient trois chemins matériels distincts \mathcal{C}' , \mathcal{C}'' et \mathcal{C}''' issus d'une particule P . On appelle dilatation volumique actuelle en P , notée K_v , la limite suivante :

$$K_v(P,t) = \lim_{\substack{P' \in \mathcal{C}' \rightarrow P \\ P'' \in \mathcal{C}'' \rightarrow P \\ P''' \in \mathcal{C}''' \rightarrow P}} \frac{v_t}{v_0} \quad (4.23)$$

L'équation (4.22) [p. 61] montre que cette limite est indépendante des chemins matériels :

$$K_v(P,t) = \det \mathbf{F} \quad (4.24)$$

La dilatation volumique est un nombre sans dimension positif car $\det \mathbf{F} > 0$ [éq. (2.20) p. 29]. Pour $0 < K_v < 1$ il y a contraction volumique et pour $K_v > 1$ il y a extension volumique. La dilatation volumique actuelle en une particule P peut s'exprimer aussi bien avec les tenseurs de déformation lagrangiens que les tenseurs de déformation eulériens :

$$K_v = \det \mathbf{F} = \det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} > 0 \quad (\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \text{ avec } \det \mathbf{R} = 1) \quad (4.25)$$

Avec les autres tenseurs de déformation la dilatation volumique actuelle s'écrit :

$$K_v = (\det \mathbf{C})^{\frac{1}{2}} = (\det \mathbf{B})^{\frac{1}{2}} = e^{\text{tr} \mathbf{L}} = e^{\text{tr} \mathbf{M}} \quad (4.26)$$

Remarque 4.6 – En utilisant les notations pour les invariants fondamentaux d'un tenseur du second ordre, les égalités (4.26) s'écrivent ;

$$K_v = U_{\text{III}} = V_{\text{III}} = \sqrt{C_{\text{III}}} = \sqrt{B_{\text{III}}} = e^{I_1} = e^{M_1}$$

4.9 Distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales

Considérons trois directions matérielles *initialement orthogonales* issues d'une particule P . Le produit mixte de leurs directions de référence est donc $[\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0, \mathbf{u}'''_0] = \pm 1$.

Rappel – Le produit mixte de trois vecteurs unitaires reflète l'angle solide formé par les trois vecteurs unitaires.

On note $\mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t$ et \mathbf{u}'''_t les directions actuelles de ces directions matérielles, et on note K'_t, K''_t et K'''_t les dilatations linéiques respectives. En utilisant la relation entre les directions de référence et actuelle d'une direction matérielle [éq.(4.2) p. 53] et la définition de la dilatation linéique [éq. (4.7) p. 55], il vient :

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t, \mathbf{u}'''_t] &= \left[\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{K'_t}, \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0}{K''_t}, \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0}{K'''_t} \right] = \frac{[\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0, \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0, \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0]}{K'_t K''_t K'''_t} = \frac{\det \mathbf{F} [\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0, \mathbf{u}'''_0]}{K'_t K''_t K'''_t} \\ \frac{[\mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t, \mathbf{u}'''_t]}{[\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0, \mathbf{u}'''_0]} &= \frac{\det \mathbf{F}}{K'_t K''_t K'''_t} = \frac{K_v}{K'_t K''_t K'''_t} > 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

L'équation (4.27) montre que dans toute déformation les signes des produits mixtes $[\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0, \mathbf{u}'''_0]$ et $[\mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t, \mathbf{u}'''_t]$ sont les mêmes. Puisque les valeurs extrémales du produit mixte $[\mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t, \mathbf{u}'''_t]$ sont ± 1 , on a donc toujours :

$$0 < \frac{K_v}{K'_t K''_t K'''_t} \leq 1$$

- **Définition 4.21 – Distorsion stérique.** On appelle distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales la quantité notée δ_s définie par :

$$\delta_s(\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0, \mathbf{u}'''_0) = \frac{K'_t K''_t K'''_t}{K_v} = \frac{[\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0, \mathbf{u}'''_0]}{[\mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t, \mathbf{u}'''_t]} = \left| \frac{1}{[\mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t, \mathbf{u}'''_t]} \right| \quad (4.28)$$

La distorsion stérique est un scalaire sans dimension compris entre 1 (pas de distorsion stérique) et l'infini (les directions matérielles deviennent coplanaires ou confondues). Puisqu'elle s'exprime en fonction de la dilatation volumique et des trois dilatations linéiques, elle peut être calculée avec n'importe quel tenseur de déformation. La distorsion stérique reflète la diminution de l'angle solide formé par les trois directions matérielles initialement orthogonales.

Contrairement à la dilatation volumique, la distorsion stérique actuelle en une particule P dépend du choix des trois directions matérielles initialement orthogonales issues de P . On montre en annexe [éq. (A.2) p. 105] que pour une déformation donnée en une particule, il existe une infinité de triplets de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion stérique est maximale. Le maximum est :

$$\delta_{s \max} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad \text{où les } \lambda_i \text{ sont les dilatations linéiques principales.} \quad (4.29)$$

Remarque 4.7 – En chaque particule et à chaque instant, il existe aussi des triplets de directions matérielles initialement orthogonales sans distorsion stérique ($\delta_s = 1$) : ce sont les triplets de directions matérielles propres actuelles [déf. 4.18 p. 60]. En effet, les dilatations linéiques dans les directions matérielles propres sont les dilatations linéiques principales λ_i dont le produit est K_v ; l'équation (4.28) montre qu'on a alors $\delta_s = 1$. La démonstration donnée en annexe A.2 [p. 105] montre qu'il n'en existe pas d'autre.

4.10 Dilatation surfacique

4.10.1 Facette matérielle

- **Définition 4.22 – Facette matérielle.** On appelle facette matérielle le plan engendré par deux directions matérielles. Une facette matérielle est identifiée par la normale commune aux deux directions matérielles.

La normale à une facette matérielle peut être désignée aussi bien par sa direction de référence que par sa direction actuelle :

$$\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{u}'_0 \wedge \mathbf{u}''_0}{\|\mathbf{u}'_0 \wedge \mathbf{u}''_0\|} \quad ; \quad \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t}{\|\mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t\|} \quad (4.30)$$

- **Proposition 4.23** – Les relations entre la direction actuelle de la normale d'une facette matérielle et sa direction de référence sont :

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\|} \Leftrightarrow \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t\|} \quad (4.31)$$

Démonstration – La relation entre la direction de référence et la direction actuelle d'une direction matérielle a été donnée en (4.2) [p. 53]. On a donc :

$$\mathbf{u}'_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\|} \quad ; \quad \mathbf{u}''_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0\|}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t &= \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0) \wedge (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0)}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\| \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0\|} \\ &= \frac{(\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\mathbf{u}'_0 \wedge \mathbf{u}''_0)}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\| \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0\|} \quad (\text{identité algébrique : } (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = (\det \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-\top} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})) \\ &= \frac{(\det \mathbf{F}) \|\mathbf{u}'_0 \wedge \mathbf{u}''_0\|}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\| \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0\|} (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0) \quad [\text{éq. (4.30) p. 63}] \\ \mathbf{n}_t &= \frac{\mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t}{\|\mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t\|} = \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\|} \quad (\text{car } \|k\mathbf{v}\| = k\|\mathbf{v}\| \quad \forall k \geq 0) \end{aligned}$$

On trouve la relation inverse en multipliant à gauche par \mathbf{F}^\top , on obtient :

$$\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\|} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_0 = \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t \\ \text{et} \\ \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| = \frac{1}{\|\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t\|} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t\|}$$

La relation entre la direction actuelle et la direction de référence de la normale à une facette matérielle est différente de la relation entre la position actuelle et la position de référence d'une direction matérielle [éq. (4.2) p. 53]. *Les normales à une facette matérielle ne sont pas des directions matérielles.*

4.10.2 Dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle

Soit une particule P et son voisinage de référence $\mathcal{V}_0(\mathbf{x}_0)$. Dans ce voisinage, on considère deux particules P' et P'' . Les deux biparticules $\{P, P'\}$ et $\{P, P''\}$, issues de la particule P , ont les positions de référence $\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0$. Leurs positions actuelles sont :

$$\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) + \dots \quad \text{et} \quad \mathbf{x}''_t - \mathbf{x}_t = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0) + \dots$$

Les trois particules P , P' et P'' définissent, par leur position de référence et par leur position actuelle, deux surfaces planes d'aire positive s_0 et s_t , de normales unitaires $\bar{\mathbf{n}}_0$ et $\bar{\mathbf{n}}_t$:

$$\bar{\mathbf{n}}_0 s_0 = (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) \wedge (\mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0) \quad \text{et} \quad \bar{\mathbf{n}}_t s_t = (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t) \wedge (\mathbf{x}''_t - \mathbf{x}_t) \quad (4.32)$$

Remarque – Bien noter que les deux surfaces planes sont chacune géométriquement définies par trois points qui sont respectivement $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \mathbf{x}''_0)$ et $(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}'_t, \mathbf{x}''_t)$. En général, une surface matérielle plane à l'instant t_0 se transforme en une surface non plane à l'instant t . Les points à l'intérieur de la surface plane $(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}'_t, \mathbf{x}''_t)$ ne sont pas les positions actuelles des particules identifiées par les points à l'intérieur de la surface plane $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}'_0, \mathbf{x}''_0)$. On ne pourra parler de dilatation surfacique qu'après la définition correcte d'une limite.

On a donc :

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{n}}_t s_t &= \left(\mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) + \dots \right) \wedge \left(\mathbf{F} \cdot (\mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0) + \dots \right) \quad [\text{éq. (4.32) p. 64}] \\ &= (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top} \cdot \left((\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0) \wedge (\mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0) \right) + \dots \quad (\text{car } (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = (\det \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-\top} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})) \\ \bar{\mathbf{n}}_t s_t &= (\det \mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0) s_0 + \dots \quad [\text{éq. (4.32) p. 64}]\end{aligned}\tag{4.33}$$

En prenant la norme de l'égalité (4.33), il vient :

$$s_t = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0\| s_0 + \dots \Leftrightarrow \frac{s_t}{s_0} = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0\| + \dots\tag{4.34}$$

Lorsque l'on fait tendre les deux particules P' et P'' vers la particule P (chacune le long de son propre chemin matériel), elles définissent deux directions matérielles dont les directions de référence sont \mathbf{u}'_0 et \mathbf{u}''_0 . La normale unitaire $\bar{\mathbf{n}}_0$ commune aux deux vecteurs $\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0$ et $\mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0$ tend vers la normale unitaire \mathbf{n}_0 commune aux deux directions de référence \mathbf{u}'_0 et \mathbf{u}''_0 ; et enfin, les deux aires s_0 et s_t tendent vers 0. L'équation (4.34), montre que le rapport $\frac{s_t}{s_0}$ ne dépend pas explicitement de $\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}_0$ ni de $\mathbf{x}''_0 - \mathbf{x}_0$, mais seulement de leur normale commune $\bar{\mathbf{n}}_0$. On pose donc la définition suivante :

- **Définition 4.24 – Dilatation surfacique.** Soient deux chemins matériels \mathcal{C}' et \mathcal{C}'' issus d'une particule P , définissant en P une facette matérielle de normale de référence \mathbf{n}_0 . On appelle dilatation surfacique actuelle en P dans la facette matérielle, la limite suivante :

$$K_s = \lim_{\substack{P' \in \mathcal{C}' \rightarrow P \\ P'' \in \mathcal{C}'' \rightarrow P}} \frac{s_t}{s_0}\tag{4.35}$$

L'équation (4.34) montre que cette limite est :

$$K_s = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\|\tag{4.36}$$

La dilatation surfacique dans une facette matérielle est un scalaire sans dimension strictement positif car $\det \mathbf{F} > 0$ [éq. (2.20) p. 29]. Pour $0 < K_s < 1$ il y a contraction surfacique dans la facette matérielle et pour $K_s > 1$ il y a extension surfacique dans cette facette. La dilatation surfacique actuelle dans une facette matérielle peut s'exprimer aussi bien avec les tenseurs de déformation lagrangiens qu'eulériens :

$$\begin{aligned}K_s &= \det(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) \|(\mathbf{R} \cdot \mathbf{U})^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| \quad (\text{éq. (4.36) et décomposition polaire } \mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}) \\ &= (\det \mathbf{U}) \|\mathbf{R}^{\top} \cdot (\mathbf{U}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0)\| = (\det \mathbf{U}) \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0\| \quad (\mathbf{R} \text{ orthogonal et } \mathbf{U} \text{ symétrique}) \\ K_s &= K_v \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0\|\end{aligned}\tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}K_s &= \det(\mathbf{V} \cdot \mathbf{R}) \|(\mathbf{V} \cdot \mathbf{R})^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| \quad (\text{éq. (4.36) et décomposition polaire } \mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}) \\ &= (\det \mathbf{V}) \|\mathbf{V}^{-\top} \cdot \mathbf{R} \cdot \frac{\mathbf{R}^{\top} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{R}^{\top} \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t\|}\| = \frac{\det \mathbf{V}}{\|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t\|} \quad (\mathbf{R} \text{ orthogonal et } \mathbf{V} \text{ symétrique}) \\ K_s &= K_v \|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t\|^{-1}\end{aligned}\tag{4.38}$$

Les tenseurs de déformation lagrangiens identifient une facette matérielle par la direction de référence \mathbf{n}_0 de sa normale alors que les tenseurs de déformation eulériens identifient cette même facette matérielle par la direction actuelle \mathbf{n}_t de sa normale.

Vérification – On laisse le soin au lecteur de vérifier, en utilisant les relations (4.31) [p. 64], que les deux formules (4.37) et (4.38) conduisent bien au même résultat.

4.11 Distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales

Considérons deux directions matérielles *initialement orthogonales* issues d'une particule P . Ces deux directions matérielles déterminent une facette matérielle ; la direction de référence de sa normale est $\mathbf{n}_0 = \mathbf{u}'_0 \wedge \mathbf{u}''_0$ où les trois vecteurs \mathbf{n}_0 , \mathbf{u}'_0 et \mathbf{u}''_0 sont orthonormés. L'angle actuel α_t de ces deux directions matérielles est :

$$\begin{aligned} \sin \alpha_t \mathbf{n}_t &= \mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t = \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0) \wedge (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0)}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\| \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0\|} && \text{[éq. (4.2) p. 53]} \\ &= \frac{\det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-\top} \cdot (\mathbf{u}'_0 \wedge \mathbf{u}''_0)}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}'_0\| \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}''_0\|} && \text{(identité : } (\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}) \wedge (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = (\det \mathbf{T}) \mathbf{T}^{-\top} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})) \\ &= \frac{\det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0}{K'_t K''_t} && \text{[éq. (4.7) p. 55]} \\ &= \frac{\det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| \mathbf{n}_t}{K'_t K''_t} && \text{[éq. (4.31) p. 64]} \\ \sin \alpha_t \mathbf{n}_t &= \frac{K_s}{K'_t K''_t} \mathbf{n}_t && \text{[éq. (4.36) p. 65]} \end{aligned}$$

- **Définition 4.25 – Distorsion angulaire.** On appelle distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales la quantité :

$$\delta_a(\mathbf{u}'_0, \mathbf{u}''_0) = \frac{K'_t K''_t}{K_s} = \frac{1}{\sin \alpha_t} \quad \text{où } 0 < \alpha_t \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.39)$$

La distorsion angulaire est un scalaire sans dimension compris entre 1 (pas de distorsion angulaire : $\mathbf{u}_t \perp \mathbf{u}'_t$, $\alpha_t = \pi/2$) et l'infini (\mathbf{u}_t confondu avec \mathbf{u}'_t , $\alpha_t = 0$). Puisqu'elle s'exprime en fonction de la dilatation surfacique et des deux dilations linéiques, elle peut être calculée avec n'importe quel tenseur de déformation. La distorsion angulaire δ_a traduit la diminution de l'angle entre les deux directions matérielles \mathbf{u}'_0 et \mathbf{u}''_0 initialement orthogonales.

Contrairement à la dilatation surfacique, la distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales dépend du choix des deux directions initialement orthogonales issues d'une particule P . On montre en annexe [éq. (A.6) p. 104] que pour une déformation donnée en une particule, il existe un couple de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion angulaire est maximale. La distorsion angulaire maximale vaut :

$$\delta_{amax} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right) \quad (4.40)$$

où λ_1 et λ_3 sont les dilations linéiques principales extrêmes.

Remarques 4.8 – En chaque particule et à chaque instant, il existe des couples de directions matérielles initialement orthogonales sans distorsion angulaire ($\delta_a = 1$) : ce sont les couples de directions matérielles propres actuelles [déf. 4.18 p. 60]. En effet, leur direction de référence sont les directions propres de \mathbf{U} et leur direction actuelle sont les directions propres de \mathbf{V} . Ces tenseurs étant symétriques, leurs directions propres sont orthogonales. La démonstration en annexe [section A.1.1 p. 102] montre qu'il en existe d'autres.

Par ailleurs, on entend parfois parler de « distorsion dans un plan » ou de « cisaillement dans un plan ». Il est facile de vérifier que la distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales dépend de la position de ces deux directions matérielles dans le plan. Il semble difficile de parler de la distorsion angulaire dans un plan sans préciser de quelles directions du plan il s'agit.

4.12 Déviation d'une direction matérielle

- **Définition 4.26 – Déviation.** On appelle déviation actuelle d'une direction matérielle, l'angle entre la direction de référence et la direction actuelle de cette direction matérielle :

$$\delta = \text{Arccos}(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_0)$$

En utilisant les relations (4.2) [p. 53], on peut calculer la déviation actuelle d'une direction matérielle entre les instants t_0 et t en identifiant la direction matérielle aussi bien par sa position de référence que par sa position actuelle :

$$\delta = \text{Arccos}(\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_0) = \text{Arccos}\left(\mathbf{u}_t \cdot \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}{K_l}\right) = \text{Arccos}\left(\mathbf{u}_t \cdot \frac{\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t}{K_l}\right) \quad (4.41)$$

$$= \text{Arccos}\left(\mathbf{u}_0 \cdot \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{K_l}\right) = \text{Arccos}\left(\mathbf{u}_0 \cdot \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0}{K_l}\right) \quad (4.42)$$

On constate que chaque direction matérielle issue d'une particule a sa propre déviation⁽⁵⁾.

Par ailleurs, pour déterminer la déviation actuelle d'une direction matérielle issue d'une particule P , on constate que la seule connaissance d'un tenseur de déformation actuelle (lagrangien ou eulérien) en P est insuffisante : il faut connaître en plus le champ de rotations $\mathbf{R}(P, t)$.

4.13 Décomposition des déformations

4.13.1 Déformation sphérique

- **Définition 4.27 – Déformation sphérique.** On dit que la déformation en une particule P est une déformation sphérique si les dilatations linéiques de toutes les directions matérielles issues de P sont identiques.

Si on mesure les déformations avec le tenseur de déformation \mathbf{U} , on identifie les directions matérielles par leur direction de référence \mathbf{u}_0 . Dans une déformation sphérique, on a donc par définition :

$$\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0\| = \lambda, \quad \forall \mathbf{u}_0 \quad [\text{éq. (4.9) p. 56}]$$

Dans une déformation sphérique, le tenseur de déformation actuelle \mathbf{U} est donc un tenseur sphérique : $\mathbf{U} = \lambda \mathbf{G}$. Ses trois valeurs propres sont égales à λ et toutes les directions matérielles sont des directions matérielles propres. On en déduit aisément, à partir de leur définition, que dans une déformation sphérique tous les tenseurs de déformation lagrangiens ou eulériens sont sphériques :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = \mathbf{V} = \lambda \mathbf{G} \quad \mathbf{C} = \mathbf{B} = \lambda^2 \mathbf{G} \quad \mathbf{L} = \mathbf{M} = \ln \lambda \mathbf{G} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^u = \boldsymbol{\varepsilon}^v = (\lambda - 1) \mathbf{G} \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) \mathbf{G} \end{aligned} \quad \text{où } \lambda = K_v^{\frac{1}{3}} \quad (4.43)$$

- **Propriété 4.28 –** Le lecteur vérifiera aisément que, dans une déformation sphérique en une particule P , on a les propriétés suivantes :

⁽⁵⁾ Voir la remarque 4.5 [p. 60].

- la dilatation volumique est λ^3 ,
- la distorsion stérique de tout triplet de directions matérielles initialement orthogonales est 1,
- la dilatation surfacique dans toute facette matérielle est λ^2 ,
- la distorsion angulaire de tout couple de directions matérielles initialement orthogonales est 1.

4.13.2 Déformation isovolume

- **Définition 4.29 – Déformation isovolume.** On dit que la déformation en une particule P est une déformation isovolume si la dilatation volumique en P vaut 1.

D'après l'équation (4.26) [p. 62], on en déduit que toute déformation isovolume, est caractérisée par les relations suivantes :

$$\det \mathbf{U} = \det \mathbf{C} = \det \mathbf{V} = \det \mathbf{B} = e^{\text{tr} \mathbf{L}} = e^{\text{tr} \mathbf{M}} = 1 \quad (4.44)$$

Dans une déformation isovolume, les tenseurs de déformation \mathbf{U} , \mathbf{C} , \mathbf{V} et \mathbf{B} sont de déterminant unité, alors que les tenseurs de déformation \mathbf{L} et \mathbf{M} sont de trace nulle ⁽⁶⁾.

Remarque 4.9 – Dans une déformation isovolume, le tenseur \mathbf{E} est caractérisé par une relation entre ses invariants :

$$1 = \det \mathbf{C} = \det(2\mathbf{E} + \mathbf{G}) \Rightarrow E_I + 2E_{II} + 4E_{III} = 0$$

La caractérisation d'une déformation isovolume avec le tenseur de déformation \mathbf{E} est d'expression plus compliquée qu'avec les autres tenseurs de déformation. On laisse le soin au lecteur de vérifier que la caractérisation d'une déformation isovolume pour les tenseurs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_I^v + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}^v + \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^v = 0 \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_I^u + \boldsymbol{\varepsilon}_{II}^u + \boldsymbol{\varepsilon}_{III}^u = 0 \quad (4.45)$$

4.13.3 Décomposition des déformations

- **Théorème 4.30 – Décomposition des déformations.** Toute déformation peut être interprétée *de manière unique* comme la composition *commutative* d'une déformation sphérique et d'une déformation isovolume. La représentation tensorielle de cette décomposition commutative des déformations varie selon le tenseur de déformation utilisé.

Démonstration – La décomposition d'une déformation en composition commutative de deux déformations, l'une sphérique et l'autre isovolume s'écrit différemment suivant le tenseur de déformation utilisé.

Avec le tenseur de déformation \mathbf{V} . La décomposition commutative est :

$$\mathbf{V} = \underbrace{\left((\det \mathbf{V})^{-\frac{1}{3}} \mathbf{V} \right)}_{\mathbf{V}^{isov}} \cdot \underbrace{\left((\det \mathbf{V})^{\frac{1}{3}} \mathbf{G} \right)}_{\mathbf{V}^{sph}} = (K_V^{-\frac{1}{3}} \mathbf{V}) \cdot (K_V^{\frac{1}{3}} \mathbf{G}) \quad (4.46)$$

Le tenseur de déformation \mathbf{V}^{isov} est de déterminant unité, il mesure donc une déformation isovolume [éq. (4.44) p. 68] ; le tenseur de déformation \mathbf{V}^{sph} est sphérique, il mesure donc une déformation sphérique [éq. (4.43) p. 67]. De plus, le tenseur \mathbf{V}^{sph} étant sphérique, toutes les bases orthonormées sont des bases propres. Il a donc une base propre commune avec le tenseur \mathbf{V}^{isov} , le produit $\mathbf{V}^{sph} \cdot \mathbf{V}^{isov}$ est donc commutatif.

⁽⁶⁾ Bien qu'ils ne dévient pas tous les vecteurs, les tenseurs du second ordre de trace nulle sont traditionnellement appelés « déviateurs »

Avec les tenseurs de déformation \mathbf{U} , \mathbf{C} et \mathbf{B} . On laisse le soin au lecteur de vérifier que la décomposition commutative de la déformation s'écrit aussi sous forme de produit simplement contracté commutatif :

$$\mathbf{U} = (K_v^{-\frac{1}{3}} \mathbf{U}) \cdot (K_v^{\frac{1}{3}} \mathbf{G}) \quad ; \quad \mathbf{C} = (K_v^{-\frac{2}{3}} \mathbf{C}) \cdot (K_v^{\frac{2}{3}} \mathbf{G}) \quad ; \quad \mathbf{B} = (K_v^{-\frac{2}{3}} \mathbf{B}) \cdot (K_v^{\frac{2}{3}} \mathbf{G})$$

Avec le tenseur de déformation \mathbf{M} . Quand on utilise le tenseur de déformation \mathbf{M} , la décomposition commutative de la déformation en déformation sphérique et déformation isovolume est une somme de tenseurs :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \ln(\mathbf{V}^{sph} \cdot \mathbf{V}^{isov}) = \ln \mathbf{V}^{sph} + \ln \mathbf{V}^{isov} \quad (\mathbf{V}^{sph} \text{ et } \mathbf{V}^{isov} \text{ ont une base propre commune}) \\ &= \ln\left((\det \mathbf{V})^{\frac{1}{3}} \mathbf{G}\right) + \ln\left(\frac{\mathbf{V}}{(\det \mathbf{V})^{\frac{1}{3}}}\right) \\ &= \ln\left((\det \mathbf{V})^{\frac{1}{3}} \mathbf{G}\right) + \ln\left(\mathbf{V} \cdot \frac{\mathbf{G}}{(\det \mathbf{V})^{\frac{1}{3}}}\right) \\ &= \frac{\ln \det \mathbf{V}}{3} \mathbf{G} + \left(\ln \mathbf{V} - \frac{\ln \det \mathbf{V}}{3} \mathbf{G}\right) \quad (\mathbf{G} \text{ et } \mathbf{V} \text{ ont une base propre commune}) \\ \mathbf{M} &= \underbrace{\frac{\text{tr} \mathbf{M}}{3} \mathbf{G}}_{\mathbf{M}^{sph}} + \underbrace{\left(\mathbf{M} - \frac{\text{tr} \mathbf{M}}{3} \mathbf{G}\right)}_{\mathbf{M}^{isov}} = \frac{\ln K_v}{3} \mathbf{G} + \left(\mathbf{M} - \frac{\ln K_v}{3} \mathbf{G}\right) \end{aligned}$$

On reconnaît dans cette somme la décomposition en partie sphérique et partie de trace nulle du tenseur de déformation \mathbf{M} . On vérifie aisément, avec l'équation (4.18) [p. 58] et l'équation (4.26) [p. 62], que la partie sphérique de \mathbf{M} mesure une déformation sphérique et que la partie de trace nulle de \mathbf{M} mesure une déformation isovolume.

Avec le tenseur de déformation \mathbf{L} . On laisse le soin au lecteur de vérifier que la décomposition commutative de la déformation s'écrit aussi sous forme d'une somme :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}^{sph} + \mathbf{L}^{isov} = \frac{\ln K_v}{3} \mathbf{G} + \left(\mathbf{L} - \frac{\ln K_v}{3} \mathbf{G}\right)$$

Avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$. La décomposition commutative d'une déformation en déformation sphérique et déformation isovolume s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^v &= \mathbf{V} - \mathbf{G} = \mathbf{V}^{isov} \cdot \mathbf{V}^{sph} - \mathbf{G} = (\boldsymbol{\varepsilon}^{visov} + \mathbf{G}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}^{vsph} + \mathbf{G}) - \mathbf{G} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^v &= \boldsymbol{\varepsilon}^{visov} + \boldsymbol{\varepsilon}^{vsph} + \boldsymbol{\varepsilon}^{visov} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{vsph} \\ \text{où } \boldsymbol{\varepsilon}^{vsph} &= (K_v^{\frac{1}{3}} - 1) \mathbf{G} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{visov} = K_v^{-\frac{1}{3}} \boldsymbol{\varepsilon}^v + (K_v^{-\frac{1}{3}} - 1) \mathbf{G} \end{aligned}$$

Cette composition est bien commutative car $\boldsymbol{\varepsilon}^{vsph} = (K_v^{\frac{1}{3}} - 1) \mathbf{G}$ est sphérique [éq. (4.43) p. 67], il commute donc avec tout tenseur. En revanche, le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^{visov}$ n'est ni de déterminant unité, ni de trace nulle [éq. (4.45) p. 68].

Avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^u$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que l'on obtient une formule semblable :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^u &= \boldsymbol{\varepsilon}^{uisov} + \boldsymbol{\varepsilon}^{usph} + \boldsymbol{\varepsilon}^{uisov} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{usph} \\ \text{où } \boldsymbol{\varepsilon}^{usph} &= (K_v^{\frac{1}{3}} - 1) \mathbf{G} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{uisov} = K_v^{-\frac{1}{3}} \boldsymbol{\varepsilon}^u + (K_v^{-\frac{1}{3}} - 1) \mathbf{G} \end{aligned}$$

Avec le tenseur de déformation \mathbf{E} . On montre de la même manière que la décomposition d'une déformation en déformation sphérique et déformation isovolume se traduit par la relation :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{isov} + \mathbf{E}^{sph} + \mathbf{E}^{isov} \cdot \mathbf{E}^{sph} \\ \text{où } \mathbf{E}^{sph} &= \frac{1}{2} (K_v^{\frac{2}{3}} - 1) \mathbf{G} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}^{isov} = K_v^{-\frac{2}{3}} \mathbf{E} + \frac{1}{2} (K_v^{-\frac{2}{3}} - 1) \mathbf{G} \end{aligned}$$

On peut noter dans les trois derniers cas (utilisation des tenseurs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ ou \mathbf{E}), que la composition commutative d'une déformation sphérique et d'une déformation isovolume s'écrit de manière un peu plus compliquée qu'avec les autres tenseurs de déformation.

4.14 Petites perturbations

En mécanique des milieux continus solides déformables, il arrive souvent que les déformations soient « petites ». En effet, dans beaucoup de dimensionnements d'objets solides déformables, le souci de l'ingénieur concepteur est que l'objet qu'il conçoit ne se déforme pas beaucoup⁽⁷⁾. En revanche, en mécanique des milieux continus fluides (liquides ou gaz), cette hypothèse est à rejeter car la variation de la distance entre deux particules peut être très importante au cours du mouvement. Cette section ne concerne donc que les mécaniciens des solides peu déformables.

4.14.1 Tenseur des petites perturbations

Historiquement, les déformations d'un milieu continu solide déformable ont d'abord été introduites en décrivant le mouvement des particules du solide déformable avec le champ des déplacements $\mathbf{u}(P, t)$ [déf. 2.8 page 26] dont la description de Lagrange est :

$$\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) \Rightarrow \mathbf{dx}_t = \mathbf{dx}_0 + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{dx}_0 + \dots$$

Pour étudier les variations de distance, on calcule $\|\mathbf{dx}_t\|^2$:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{dx}_t\|^2 &= (\mathbf{dx}_0 + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{dx}_0 + \dots) \cdot (\mathbf{dx}_0 + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{dx}_0 + \dots) \\ &= \|\mathbf{dx}_0\|^2 + \mathbf{dx}_0 \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}) \cdot \mathbf{dx}_0 + \dots \end{aligned}$$

On en déduit la variation relative du carré des longueurs :

$$\frac{\|\mathbf{dx}_t\|^2 - \|\mathbf{dx}_0\|^2}{\|\mathbf{dx}_0\|^2} = \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}) \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 + \dots \quad \text{où } \bar{\mathbf{u}}_0 = \frac{\mathbf{dx}_0}{\|\mathbf{dx}_0\|}$$

En passant à la limite $\mathbf{dx}_0 \rightarrow 0$ en suivant un chemin matériel issu d'une particule P , les deux longueurs $\|\mathbf{dx}_t\|$ et $\|\mathbf{dx}_0\|$ tendent vers 0 et le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{u}}_0$ tend vers la direction de référence d'une direction matérielle \mathbf{u}_0 issue de P :

$$\begin{aligned} \lim_{\mathbf{dx}_0 \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{dx}_t\|^2 - \|\mathbf{dx}_0\|^2}{\|\mathbf{dx}_0\|^2} &= \mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}_0 \\ K_t^2 - 1 &= \mathbf{u}_0 \cdot \underbrace{(\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u})}_{2\mathbf{E}} \cdot \mathbf{u}_0 \end{aligned}$$

On aboutit au tenseur de déformation de Green-Lagrange droit $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$ défini page 56. À ce stade, aucune approximation n'a encore été commise. En élasticité élémentaire, on souhaite obtenir une théorie « linéaire en déplacement ». On pose l'hypothèse simplificatrice suivante :

$$\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \text{ est un infiniment petit d'ordre 1, ce que l'on notera ici : } \|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1 \quad (4.47)$$

Le terme $\mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ est alors un infiniment petit d'ordre 2, qui est *déclaré* négligeable⁽⁸⁾. On aboutit alors à la définition d'un tenseur de déformation simplifié $\boldsymbol{\varepsilon}$, dit des *petites déformations* ou encore des *petites perturbations* :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u}) = \mathbf{sym} \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \quad (4.48)$$

⁽⁷⁾ Il y a aussi des cas où on désire qu'il se déforme beaucoup comme par exemple quand on veut modéliser une mise en forme (pliage, emboutissage, forgeage, extrusion...). Dans ce cas l'hypothèse des petites perturbations n'est évidemment pas admissible.

⁽⁸⁾ Cette déclaration présentée comme une linéarisation en $\mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ est mathématiquement incorrecte : dans un processus correct de linéarisation, on néglige les termes du second ordre devant 1, alors qu'ici on néglige le terme $\mathbf{grad}_L^\top \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ devant $\mathbf{grad}_L \mathbf{u}$, ce qui revient à négliger le terme du premier ordre $\mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ devant 1 !

Remarque importante 4.10 – La signification cinématique de l’hypothèse simplificatrice (4.47) n’est pas toujours perçue clairement : si $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ est un infiniment petit d’ordre 1, cela signifie que le champ de déplacement est un champ presque uniforme, c’est-à-dire voisin d’une *translation* de solide rigide. *Il s’agit d’une restriction importante des mouvements envisageables.* Notamment, un mouvement de rotation sans déformation n’entre pas dans le cadre de cette hypothèse⁽⁹⁾.

D’autre part, si l’hypothèse (4.47) implique bien que $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ est un infiniment petit d’ordre 1 et donc que les variations relatives des longueurs dans une direction matérielle sont petites, la réciproque est fautive : si les déformations sont petites ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$), $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ n’est pas nécessairement petit. En effet

$$\mathbf{grad}_L \mathbf{u} = \mathbf{sym} \mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{asym} \mathbf{grad}_L \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A} \quad (4.49)$$

où le tenseur antisymétrique $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}$ et où le vecteur \mathbf{a} est solution de l’équation différentielle⁽¹⁰⁾ :

$$\mathbf{grad}_L \mathbf{a} = -\mathbf{rot}_L^\top \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.50)$$

La condition $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$ n’implique rien sur la norme du vecteur \mathbf{a} ⁽¹¹⁾ et donc rien sur $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$. Or l’équation (4.49) montre que le tenseur \mathbf{A} , qui est la partie antisymétrique du tenseur $\mathbf{grad}_L \mathbf{u}$, doit avoir une norme infiniment petite d’ordre 1 pour satisfaire l’hypothèse simplificatrice posée en (4.47) :

$$\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1 \Rightarrow \|\mathbf{A}\| \ll 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{a}\| \ll 1$$

Supposer les déformations petites ne suffit donc pas pour justifier l’utilisation du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme mesure des déformations, il faut de plus supposer que $\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{asym} \mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$.

On peut donner une interprétation cinématique de la condition supplémentaire $\|\mathbf{A}\| \ll 1$. Il découle de la définition du champ de déplacement que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} = \mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \mathbf{A}^2 \quad (4.51)$$

Le cosinus de la déviation d’une direction matérielle est donnée par [éq. (4.2) p. 53] :

$$\cos \delta = \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} = \frac{1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_0}{\sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \mathbf{A}^2) \cdot \mathbf{u}_0 + 1}} \quad (\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|^2 = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0)$$

Puisque $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$ et $\|\mathbf{A}\| \ll 1$, il reste au second ordre près :

$$\cos \delta \simeq \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_0 + 1}{\sqrt{2\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 + 1}} \simeq \frac{\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_0 + 1}{\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 + 1} = 1 + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_0 = 1$$

car $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \forall \mathbf{A}$ antisymétrique. La condition $\|\mathbf{A}\| \ll 1$ impliquée par l’hypothèse simplificatrice (4.47) page 70 signifie donc que l’angle de déviation δ de toute direction matérielle identifiée par sa direction de référence \mathbf{u}_0 doit être un angle infiniment petit devant 1.

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ devrait donc être appelé honnêtement « tenseur des petites déformations et des petites déviations ». C’est pourquoi on l’appelle souvent le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ *tenseur des petites perturbations*, une « petite perturbation » étant à la fois une petite déformation (petite variation des longueurs) et une petite déviation des directions matérielles. En revanche, contrairement à ce qui est parfois affirmé, les déplacements n’ont pas à être « petits » : on peut ajouter au champ de déplacement une translation de solide aussi grande que l’on veut sans rien changer à $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$.

⁽⁹⁾ Pour s’en convaincre, il suffit de calculer le champ des déplacements des particules d’un solide indéformable dans une rotation (par exemple d’angle $\frac{\pi}{2}$ pour simplifier les écritures). On verra clairement que dans ce mouvement, $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ n’est pas un infiniment petit du premier ordre et que le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ calculé avec la définition (4.48) n’est pas une bonne mesure des déformations dans un tel mouvement car il est loin d’être nul bien que les déformations le soient de manière certaine.

⁽¹⁰⁾ L’auteur donne une démonstration de ces conditions de compatibilité dans le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l’étude des milieux continus* [note (1) p. 3].

⁽¹¹⁾ La valeur de $\|\mathbf{a}\|$ dépend des constantes d’intégration de l’équation différentielle (4.50).

Compte tenu des conditions $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$ et $\|\mathbf{A}\| \ll 1$ impliquées par l'hypothèse (4.47) [p 70], le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{symgrad}_L \mathbf{u}$ permet de calculer une approximation des dilatations linéiques, surfaciques et volumiques *seulement lorsque le champ de déplacement est proche d'une translation de solide rigide* ⁽¹²⁾.

Bien que la « linéarisation » proposée dans la définition du tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ soit mathématiquement incorrecte ⁽¹³⁾, les linéarisations qui suivent sont correctes : on ne néglige devant 1 que des termes du second ordre .

Petit allongement relatif dans une direction matérielle

La dilatation linéique dans une direction matérielle de position de référence \mathbf{u}_0 est [éq. (4.7) p. 55] :

$$\begin{aligned} K_l &= \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0} = \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot (\mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^2 - \mathbf{A}^2) \cdot \mathbf{u}_0} \quad [\text{éq. (4.51) p. 71}] \\ &\simeq \sqrt{\mathbf{u}_0 \cdot (2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{u}_0} \simeq \sqrt{1 + 2\mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0} \simeq 1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0 \quad (\text{car } \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1 \text{ et } \|\mathbf{A}\| \ll 1) \end{aligned}$$

- **Définition 4.31** – On appelle petit allongement relatif dans la direction matérielle identifiée par sa position de référence \mathbf{u}_0 , la quantité :

$$K_l - 1 = \lim_{\ell_0 \rightarrow 0} \frac{\ell_t - \ell_0}{\ell_0} \simeq \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0$$

Petite dilatation volumique relative

La dilatation volumique [déf. 4.20 p. 62] est :

$$K_v = \det \mathbf{F} \simeq \det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A}) \simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}$$

- **Définition 4.32** – On appelle petite dilatation volumique relative, la quantité :

$$K_v - 1 = \lim_{v_0 \rightarrow 0} \frac{v_t - v_0}{v_0} \simeq \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}$$

Petite distorsion stérique

La distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales [déf. 4.21 p. 63] est :

$$\delta_s = \frac{K_l K'_l K''_l}{K_v} \simeq \frac{(1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0) (1 + \mathbf{u}'_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}'_0) (1 + \mathbf{u}''_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}''_0)}{1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}} \simeq 1 + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)$$

Dans un mouvement de quasi translation, il n'y a pas, au second ordre près, de distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales.

Petite dilatation surfacique relative d'une facette matérielle

La dilatation surfacique d'une facette matérielle identifiée par sa normale unitaire de référence \mathbf{n}_0 est [éq. (4.36) p. 65] :

$$\begin{aligned} K_s &= (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| \simeq \det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A}) \sqrt{\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon})^{-1} \cdot \mathbf{n}_0} \\ &\simeq (1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \sqrt{\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{G} - 2\boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n}_0} \simeq (1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) \sqrt{1 - 2\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0} \simeq (1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}) (1 - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0) \\ &\simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0 \end{aligned}$$

⁽¹²⁾ Pratiquement, ces conditions ne sont réalisées que dans un essai de traction.

⁽¹³⁾ Voir la note (8) [p. 70].

- **Définition 4.33** – On appelle petite dilatation surfacique relative d'une facette matérielle identifiée par sa normale de référence \mathbf{n}_0 , la quantité :

$$K_s - 1 = \lim_{s_0 \rightarrow 0} \frac{s_t - s_0}{s_0} \simeq \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0$$

Petite distorsion angulaire

Soient \mathbf{u}_0 et \mathbf{u}'_0 deux directions matérielles initialement orthogonales. Leur normale commune est \mathbf{n}_0 . Ces trois vecteurs forment une base orthonormée. La distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales [déf. 4.25 p. 66] est :

$$\delta_a = \frac{K_l K'_l}{K_s} \simeq \frac{(1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}_0)(1 + \mathbf{u}'_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{u}'_0)}{1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}_0} \simeq 1 + \mathcal{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|^2)$$

Dans un mouvement de quasi translation, il n'y a pas, au second ordre près, de distorsion angulaire de deux directions initialement orthogonales.

Conditions de compatibilité en petites perturbations traditionnelles

Pour résoudre certains problèmes en élasticité classique, on est parfois amené à formuler des hypothèses sur le champ inconnu $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ces hypothèses ne peuvent être quelconques, elles doivent satisfaire des conditions dites de compatibilité (ou d'intégrabilité) pour qu'il existe un champ de déplacements $\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t)$ tel que $\boldsymbol{\varepsilon}$ soit la partie symétrique de son gradient lagrangien :

$$\mathbf{0} = \text{rot}_L \text{rot}_L^\top \boldsymbol{\varepsilon} \Leftrightarrow \mathbf{0} = 2 \text{sym grad}_L \text{div}_L \boldsymbol{\varepsilon} - \text{grad}_L \text{grad}_L \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} - \Delta_L \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.52)$$

La démonstration de cette condition ⁽¹⁴⁾ fournit la méthode pour trouver le champ de déplacement \mathbf{u}_L quand le champ $\boldsymbol{\varepsilon}$ satisfait à la condition (4.52). On en rappelle les deux étapes :

1. Intégrer l'équation $\text{grad}_L \mathbf{a} = \text{rot}_L^\top \boldsymbol{\varepsilon}$, ce qui donne toutes les parties antisymétriques possibles de $\text{grad}_L \mathbf{u}$: ces sont les tenseurs $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}$. Les solutions \mathbf{a} sont donc déterminées à un champ vectoriel uniforme \mathbf{a}_0 près. Il y a donc 3 « petites » constantes d'intégration, car le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'a de sens que si $\|\mathbf{A}\| \ll 1 \Leftrightarrow \|\mathbf{a}\| \ll 1$. Dans ces conditions, le tenseur $\mathbf{G} + \mathbf{A}$ peut être interprété comme une petite rotation.
2. Intégrer l'équation $\text{grad}_L \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{A}$. Les champs de déplacement \mathbf{u}_L sont déterminés à un champ de déplacement uniforme \mathbf{u}_0 près (les trois constantes d'intégration sont des translations arbitraires non nécessairement petites).

Tous les champs de déplacement solutions diffèrent donc d'un champ de déplacement de solide restreint (translation quelconque mais petite rotation).

4.14.2 Petites déformations sans restrictions sur le mouvement

On définit les deux tenseurs de déformation suivants :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^u = \mathbf{U} - \mathbf{G} \quad ; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{V} - \mathbf{G} \quad (4.53)$$

⁽¹⁴⁾ On trouvera une démonstration des conditions d'intégrabilité dans le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* du même auteur [note (1) p. 3]. Dans les cours d'élasticité classique, on rencontre l'une ou l'autre des formes (équivalentes) données dans l'équation (4.52).

Le premier est lagrangien et le second est eulérien. Il sont tous les deux symétriques non définis positifs. On vérifie aisément que la relation entre ces deux tenseurs est :

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^\top \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^u \cdot \mathbf{R}^\top$$

On fait une hypothèse de petites déformations *sans restriction sur le mouvement* en posant :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^u\| \ll 1 \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1 \quad (\text{infiniments petits du premier ordre}) \quad (4.54)$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'en linéarisant (rigoureusement) au second ordre près les expressions des dilatations linéiques surfaciques et volumiques ainsi que des distorsions angulaires et stériques, on obtient des formules linéarisées semblables aux formules classiques présentées en « petites perturbations » traditionnelles :

$$\begin{aligned} K_l &= \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0\| \simeq 1 + \mathbf{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^u \cdot \mathbf{u}_0 & K_l &= \frac{1}{\|\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} \simeq 1 + \mathbf{u}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{u}_t \\ K_s &= \det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0\| \simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^u \cdot \mathbf{n}_0 & K_s &= \frac{\det \mathbf{V}}{\|\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_t\|} \simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^v - \mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{n}_t \\ K_v &= \det \mathbf{U} \simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^u & K_v &= \det \mathbf{V} \simeq 1 + \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^v \\ \delta_s &= \frac{K_l K_l' K_l''}{K_v} \simeq 1 \quad (\text{distorsion stérique}) & \delta_a &= \frac{K_l K_l'}{K_s} \simeq 1 \quad (\text{distorsion angulaire}) \end{aligned}$$

Aucun de ces deux tenseurs des petites déformations n'est la partie symétrique du gradient des déplacements. En revanche il n'y a aucune limitation sur la déviation des directions matérielles. La seule hypothèse posée porte sur la norme des tenseurs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^u$ ou $\boldsymbol{\varepsilon}^v$.

Remarque 4.11 – Le gradient de la transformation est $\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$. On en déduit des expressions approchées des autres tenseurs de déformation dans le cas de petites déformations (au sens de l'hypothèse (4.54) [p. 74], c'est-à-dire sans restriction sur le mouvement) :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = (\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v) \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{R} & \mathbf{F} &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^u) = \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^u \\ \mathbf{B} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top = \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}^v + \boldsymbol{\varepsilon}^{v^2} \simeq \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}^v & \mathbf{C} &= \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}^u + \boldsymbol{\varepsilon}^{u^2} \simeq \mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}^u \\ \mathbf{M} &= \mathbf{L} \mathbf{n} \mathbf{V} \simeq \boldsymbol{\varepsilon}^v & \mathbf{L} &= \mathbf{L} \mathbf{n} \mathbf{U} \simeq \boldsymbol{\varepsilon}^u \end{aligned} \quad (4.55)$$

Les formules (4.55) montrent que lorsque les déformations sont petites, le gradient de la transformation \mathbf{F} est voisin d'une rotation \mathbf{R} quelconque ; alors que quand on utilise le tenseur des « petites perturbations » classique $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$), le tenseur \mathbf{F} est restreint à être voisin de \mathbf{G} .

4.15 Changements d'observateur

Toutes les grandeurs scalaires, vectorielles ou tensorielles qui ont été introduites dans ce chapitre ont une définition qui est universelle⁽¹⁵⁾. On va établir les formules de changement d'observateur de ces grandeurs en appliquant cette définition pour deux observateurs \mathcal{R} et $\tilde{\mathcal{R}}$ quelconques en mouvement relatif quelconque. On utilise les notations 1.24 [p. 17] et 2.27 [p. 36]. Par ailleurs, on rappelle que pour tous les observateurs, tous les vecteurs ou tenseurs mesurant des grandeurs physiques sont représentés dans l'espace vectoriel de calcul \mathbb{V}_3 [déf. 1.7 p. 12].

⁽¹⁵⁾ Sauf le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ [section 4.15.10 p. 79].

4.15.1 Changement d'observateur des directions matérielles

Un observateur identifie une direction matérielle par sa direction de référence \mathbf{u}_0 ou par sa direction actuelle \mathbf{u}_t . On se propose d'établir les formules de changement d'observateur de ces deux identifications d'une direction matérielle. La définition de la direction actuelle d'une direction matérielle [déf. 4.5 p. 52] est la même pour les deux observateurs :

$$\mathbf{u}_t = \lim_{\mathbf{x}'_t \rightarrow \mathbf{x}_t} \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{u}}_t = \lim_{\tilde{\mathbf{x}}'_t \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_t} \frac{\tilde{\mathbf{x}}'_t - \tilde{\mathbf{x}}_t}{\|\tilde{\mathbf{x}}'_t - \tilde{\mathbf{x}}_t\|} \quad (4.56)$$

Le changement d'observateur de la position actuelle d'une biparticule s'écrit [éq. (1.7) p. 17] :

$$\tilde{\mathbf{x}}'_t - \tilde{\mathbf{x}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t) \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{\mathbf{x}}'_t - \tilde{\mathbf{x}}_t\| = \|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\| \quad \Rightarrow \quad \{\mathbf{x}'_t \rightarrow \mathbf{x}_t \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}'_t \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_t\}$$

où \mathbf{Q}_t est le tenseur de changement d'observateur actuel. On a alors :

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = \lim_{\tilde{\mathbf{x}}'_t \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_t} \frac{\tilde{\mathbf{x}}'_t - \tilde{\mathbf{x}}_t}{\|\tilde{\mathbf{x}}'_t - \tilde{\mathbf{x}}_t\|} = \lim_{\tilde{\mathbf{x}}'_t \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}_t} \frac{\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t)}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} = \lim_{\mathbf{x}'_t \rightarrow \mathbf{x}_t} \frac{\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t)}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} = \mathbf{Q}_t \cdot \lim_{\mathbf{x}'_t \rightarrow \mathbf{x}_t} \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t$$

Le changement d'observateur de la direction actuelle d'une direction matérielle s'écrit donc :

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{U}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top \quad (\text{directions non orientées : } \mathbf{U}_t = \mathbf{u}_t \otimes \mathbf{u}_t \text{ et } \tilde{\mathbf{U}}_t = \tilde{\mathbf{u}}_t \otimes \tilde{\mathbf{u}}_t) \quad (4.57)$$

En particulier, pour $t = t_0$ il vient :

$$\tilde{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{u}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{U}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{U}_0 \cdot \mathbf{Q}_0^\top \quad (\text{directions non orientées}) \quad (4.58)$$

où \mathbf{Q}_0 est le tenseur de changement d'observateur à l'instant $t = t_0$.

Remarques 4.12 – Bien qu'une direction matérielle ne soit pas à proprement parler une grandeur physique, la formule de changement d'observateur de la direction *actuelle* \mathbf{u}_t d'une direction matérielle est semblable à celle d'une grandeur vectorielle objective [th. 3.6 p. 40].

Par ailleurs, on peut vérifier que la relation entre la direction de référence et la direction actuelle d'une direction matérielle [éq. (4.2) p. 53] est bien une relation *universelle* :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} && (\text{relation pour l'observateur } \mathcal{R}) \\ \mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t &= \frac{\mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{u}_0\|} && [\text{éq. (4.57) et éq. (3.14) p. 44}] \\ &= \frac{\mathbf{Q}_t^\top \cdot \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0}{\|\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0\|} && (\mathbf{Q}_t \text{ orthogonal et éq. (4.58)}) \\ \tilde{\mathbf{u}}_t &= \frac{\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0}{\|\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0\|} && (\text{même relation pour l'observateur } \tilde{\mathcal{R}}) \end{aligned}$$

4.15.2 Changement d'observateur des normales à une facette matérielle

La définition de la direction actuelle de la normale à une facette matérielle $(\mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t)$ est :

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t}{\|\mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t\|} \quad [\text{éq. (4.30) p. 63}] \quad (4.59)$$

Cette définition appliquée pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ conduit à :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{n}}_t &= \frac{\tilde{\mathbf{u}}'_t \wedge \tilde{\mathbf{u}}''_t}{\|\tilde{\mathbf{u}}'_t \wedge \tilde{\mathbf{u}}''_t\|} = \frac{\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}''_t}{\|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}''_t\|} && \text{[éq. (4.57)]} \\ &= \frac{\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t)}{\|\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t)\|} = \frac{\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t)}{\|\mathbf{u}'_t \wedge \mathbf{u}''_t\|} && (\mathbf{Q}_t \text{ est orthogonal}) \\ &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t && \text{[éq. (4.59)]}\end{aligned}$$

La formule de changement d'observateur pour la direction actuelle de la normale à une facette matérielle est donc :

$$\tilde{\mathbf{n}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{N}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top \quad (\text{directions non orientées}) \quad (4.60)$$

En particulier, pour $t = t_0$, la formule est :

$$\tilde{\mathbf{n}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{n}_0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{N}}_0 = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{N}_0 \cdot \mathbf{Q}_0^\top \quad (\text{directions non orientées}) \quad (4.61)$$

où \mathbf{Q}_0 est le tenseur de changement d'observateur à l'instant $t = t_0$.

Remarques 4.13 – Bien qu'une normale à une facette matérielle ne soit pas à proprement parler une grandeur physique, la formule de changement d'observateur pour la direction *actuelle* de la normale à une facette matérielle est semblable à celle d'une grandeur vectorielle objective. On laisse le soin au lecteur de vérifier que la relation entre la direction de référence et la direction actuelle de la normale à une facette matérielle [éq. (4.31) p. 64] est bien une relation universelle par un calcul similaire à celui de la remarque 4.12 [p. 75].

4.15.3 Changement d'observateur des tenseurs de déformation

La formule de changement d'observateur du gradient de la transformation a déjà été établie [éq. (3.14) p. 44] : $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}}^\top \cdot \tilde{\mathbf{F}} &= \mathbf{Q}_0 \cdot (\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}) \cdot \mathbf{Q}_0^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_0}(\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}) \\ \tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^\top &= \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top) \cdot \mathbf{Q}_t^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top)\end{aligned}$$

Les propriétés des rotations permettent d'en déduire les formules de changement d'observateur pour les différents tenseurs mesurant la déformation actuelle :

tenseurs lagrangiens :	tenseurs eulériens :
$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}_0^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_0}(\mathbf{C})$	$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{Q}_t^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{B})$
$\tilde{\mathbf{U}} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}_0^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_0}(\mathbf{U})$	$\tilde{\mathbf{V}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}_t^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{V})$
$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{Q}_0^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_0}(\mathbf{L})$	$\tilde{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Q}_t^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{M})$
$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^u = \mathbf{Q}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^u \cdot \mathbf{Q}_0^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_0}(\boldsymbol{\varepsilon}^u)$	$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^v = \mathbf{Q}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{Q}_t^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\boldsymbol{\varepsilon}^v)$
$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}_0^\top = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_0}(\mathbf{E})$	

Ces formules de changement d'observateur des tenseurs de déformation montrent que *seuls les tenseurs de déformation eulériens sont des grandeurs tensorielles du second ordre objectives* [théorème 3.9 p. 42].

Remarque 4.14 – Ces formules de changement d'observateur sont vraies quelles que soient les déformations. Elles sont donc toujours valables quand les déformations sont petites.

- **Propriété 4.34** – On laisse le soin au lecteur de vérifier les propriétés suivantes⁽¹⁶⁾ :
 - Les dilatations linéiques principales actuelles⁽¹⁷⁾ ordonnées sont des grandeurs scalaires objectives : $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$. On en déduit que les invariants actuels des tenseurs de déformation (lagrangiens comme eulériens) sont des grandeurs scalaires objectives ;
 - Les formules de changement d'observateur des directions actuelles des directions matérielles propres actuelles⁽¹⁸⁾ sont identiques à celles de grandeurs vectorielles objectives :

$$\tilde{\mathbf{v}}_{i \lambda_i} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{v}_{i \lambda_i} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{v}_{i \lambda_i})$$

- En revanche, les formules de changement d'observateur des directions de référence de ces mêmes directions matérielles propres actuelles⁽¹⁹⁾ ne sont pas identiques à celles des grandeurs vectorielles objectives : on laisse le soin au lecteur de vérifier que leur formule de changement d'observateur est :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{0 \lambda_i(t)} = \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{u}_{0 \lambda_i(t)} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_0}(\lambda_i(t))$$

- Le champ tensoriel orthogonal $\mathbf{R}(P, t)$ défini par la décomposition polaire $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$ est un champ tensoriel non objectif : on laisse le soin au lecteur de vérifier que sa formule de changement d'observateur est :

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}_0^\top$$

Le champ matériel tensoriel du second ordre n'est donc pas une grandeur objective.

- La relation entre les directions propres actuelles des tenseurs de déformation lagrangiens et les directions propres actuelles des tenseurs de déformation eulériens [éq. (4.21) p. 60] est une relation universelle :

$$\mathbf{v}_{\lambda_i} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_{\lambda_i} = \mathcal{R}_{\mathbf{R}}(\mathbf{u}_{\lambda_i}) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\mathbf{v}}_{\lambda_i} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_{\lambda_i} = \mathcal{R}_{\tilde{\mathbf{R}}}(\tilde{\mathbf{u}}_{\lambda_i})$$

4.15.4 Changement d'observateur de la dilatation linéique

- **Théorème 4.35** – La dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition universelle de la dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle, identifiée par sa direction de référence actuelle \mathbf{u}_0 est $K_I = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|$ [éq. (4.7) page 55]. Pour un observateur \mathcal{R} , elle s'écrit :

$$\tilde{K}_I = \|\tilde{\mathbf{F}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_0\| = \|(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top) \cdot (\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{u}_0)\| = \|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| = K_I$$

ce qui est la caractérisation d'une grandeur scalaire objective. On peut aussi bien retrouver ce résultat en identifiant la direction matérielle par sa position actuelle \mathbf{u}_t [éq. (4.15) p. 57].

⁽¹⁶⁾ Ce sont d'excellents exercices pour vérifier la compréhension des concepts qui ont été introduits précédemment.

⁽¹⁷⁾ C'est-à-dire les valeurs propres actuelles des tenseurs de déformation \mathbf{U} [déf. 4.19 p. 61] ou \mathbf{V} [prop. 4.17 p.60].

⁽¹⁸⁾ C'est-à-dire les directions propres actuelles des tenseurs de déformation eulériens [déf. 4.18 p. 60].

⁽¹⁹⁾ C'est-à-dire les directions propres actuelles des tenseurs de déformation lagrangiens [déf. 4.18 p. 60].

4.15.5 Changement d'observateur de la dilatation volumique

- **Théorème 4.36** – La dilatation volumique actuelle en une particule est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition universelle de la dilatation volumique en une particule est : $K_v = \det \mathbf{F}$ [éq. (4.24) p. 62]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, elle s'écrit :

$$\tilde{K}_v = \det \tilde{\mathbf{F}} = \det(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top) = \det \mathbf{F} = K_v \quad (\text{car } \det \mathbf{Q}_t = \det \mathbf{Q}_0 = 1)$$

ce qui est la caractérisation d'une grandeur scalaire objective.

4.15.6 Changement d'observateur de la distorsion stérique

- **Théorème 4.37** – La distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition de la distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales est le produit de grandeurs scalaires objectives : $\delta_s = K_t K_t' K_t'' K_v^{-1}$ [éq. (4.28) p. 63]. Elle est donc une grandeur scalaire objective.

- **Théorème 4.38** – Le produit mixte de trois directions matérielles actuelles (initialement orthogonales ou non) est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – En utilisant la formule de changement d'observateur des directions matérielles [éq. (4.57) p. 75], il vient :

$$[\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}', \tilde{\mathbf{u}}''] = [\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}, \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}', \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}'] = \det \mathbf{Q}_t [\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}'] = [\mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{u}']$$

ce qui est la caractérisation d'une grandeur scalaire objective.

4.15.7 Changement d'observateur de la dilatation surfacique

- **Théorème 4.39** – La dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition universelle de la dilatation surfacique d'une facette matérielle, identifiée par la direction de référence \mathbf{n}_0 de sa normale, est $K_s = \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|$ [éq. (4.35) p. 65]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_s &= \det \tilde{\mathbf{F}} \|\tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_0\| = \det(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top) \|(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top)^{-T} \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{n}_0\| \\ &= \det \mathbf{F} \|(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{Q}_0^\top) \cdot \mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{n}_0\| = \det \mathbf{F} \|\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0)\| = \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| = K_s \end{aligned}$$

ce qui est la caractérisation d'une grandeur scalaire objective. On peut aussi bien retrouver ce résultat en identifiant la facette matérielle par la direction actuelle \mathbf{n}_t de sa normale [éq. (4.38) p. 65].

4.15.8 Changement d'observateur de la distorsion angulaire

- **Théorème 4.40** – La distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition de la distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales est le produit de grandeurs scalaires objectives : $\delta_a = K_t K_t' K_s^{-1}$ [déf. 4.25 p. 66]. Elle est donc une grandeur scalaire objective.

- **Théorème 4.41** – L'angle actuel de deux directions matérielles (initialement orthogonales ou non) est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – Soient deux directions matérielles dont les directions actuelles sont $\tilde{\mathbf{u}}_t$ et $\tilde{\mathbf{u}}'_t$ pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$.

$$\cos \tilde{\alpha}_t = \tilde{\mathbf{u}}_t \cdot \tilde{\mathbf{u}}'_t = (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}'_t) = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}'_t = \cos \alpha_t \quad \Rightarrow \quad \tilde{\alpha}_t = \alpha_t \quad (\alpha_t \in [0; \pi]) \quad (4.62)$$

4.15.9 Changement d'observateur des déviations

- **Théorème 4.42** – La déviation actuelle d'une direction matérielle est une grandeur scalaire non objective.

Démonstration – La déviation d'une direction matérielle est $\cos \delta = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_t$ [déf. 4.26 p. 67]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, elle s'écrit :

$$\cos \tilde{\delta} = \tilde{\mathbf{u}}_0 \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t = (\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{u}_0) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) = \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{Q}_0^\top \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \neq \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{u}_t = \cos \delta \quad (4.63)$$

La déviation actuelle d'une direction matérielle est *différente* pour les deux observateurs.

4.15.10 Changement d'observateur du tenseur des petites perturbations

- **Théorème 4.43** – L'hypothèse $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ utilisée dans la définition du tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'est pas une hypothèse universelle.

Démonstration – L'hypothèse simplificatrice $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$, qui définit le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ [éq. (4.48) p. 70], n'est pas consistante vis à vis de l'universalité. En effet, dans un mouvement de milieu continu, si cette hypothèse est vraie pour un observateur \mathcal{R} , elle est en général fautive pour un autre observateur $\tilde{\mathcal{R}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_L \tilde{\mathbf{u}} &= \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top - \mathbf{G} = \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{Q}_0^\top - \mathbf{G} \\ &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_0^\top + \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^\top - \mathbf{G} \\ \|\mathbf{grad}_L \tilde{\mathbf{u}}\| &\leq \|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_0^\top\| + \|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^\top - \mathbf{G}\| \\ \|\mathbf{grad}_L \tilde{\mathbf{u}}\| &\leq \|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| + \|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^\top - \mathbf{G}\| \end{aligned}$$

L'hypothèse simplificatrice $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ faite par un observateur \mathcal{R} n'implique pas $\|\mathbf{grad}_L \tilde{\mathbf{u}}\| \ll 1$ pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, sauf si $\|\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^\top - \mathbf{G}\| \ll 1$, c'est-à-dire sauf si le mouvement relatif des deux observateurs est très particulier : il doit être proche d'une translation ($\mathbf{Q}_t \simeq \mathbf{Q}_0$ au second ordre près).

- **Théorème 4.44** – La partie symétrique du gradient lagrangien des déplacements est une grandeur tensorielle non objective.

Démonstration – La relation de changement d'observateur entre les parties symétriques du gradient lagrangien du champ de déplacement est :

$$\begin{aligned} \mathbf{sym grad}_L \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{sym}(\tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G}) = \mathbf{sym} \tilde{\mathbf{F}} - \mathbf{G} = \mathbf{sym}(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top) - \mathbf{G} \quad [\text{éq. (3.14) p. 44}] \\ &= \mathbf{sym}(\mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{G}) \cdot \mathbf{Q}_0^\top) - \mathbf{G} \quad [\text{éq. (4.51) p. 71}] \\ &= \mathbf{sym}(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_0^\top) + \mathbf{sym}(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_0^\top) - \mathbf{G} \quad (4.64) \end{aligned}$$

On a donc $\mathbf{sym grad}_L \tilde{\mathbf{u}} \neq \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{sym grad}_L \mathbf{u} \cdot \mathbf{Q}_t^\top$. La partie symétrique du gradient lagrangien des déplacements actuels n'est donc pas une grandeur tensorielle objective [th. 3.9 p. 42].

4.16 En bref...

L'étude des déformations d'un milieu continu est l'étude de la variation des distances entre particules pendant un mouvement : on compare les distances entre les particules à un instant t aux distances entre les mêmes particules à un instant de référence arbitraire t_0 .

On a défini différents tenseurs de déformation, tous susceptibles d'évaluer en chaque particule P et à tout instant, la dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle. Les tenseurs de déformation lagrangiens identifient la direction matérielle issue de P par sa direction de référence, alors que les tenseurs de déformation eulériens l'identifient par sa direction actuelle. Les tenseurs de déformation lagrangiens sont non objectifs alors que les tenseurs de déformation eulériens sont objectifs.

En outre, avec ces tenseurs de déformation (lagrangiens comme eulériens), on peut évaluer les grandeurs scalaires suivantes :

- la dilatation volumique actuelle en une particule,
- la distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales issues d'une particule,
- la dilatation surfacique actuelle dans une facette matérielle,
- la distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales issues d'une particule.

Toutes ces grandeurs scalaires sont objectives. En revanche, la déviation d'une direction matérielle entre les instants t_0 et t est non objective.

La définition du tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'est valable que pour des mouvements voisins d'une translation de solide rigide *pour un certain observateur*. Cette définition n'est donc pas universelle.

Vitesse de déformation

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la vitesse actuelle de déformation d'un milieu continu en mouvement, c'est-à-dire qu'on étudie la dérivée temporelle des distances actuelles entre les particules. Comme pour les déformations, on va définir un tenseur du second ordre appelé *tenseur des taux de déformation* qui permettra, connaissant le mouvement, de calculer la vitesse de déformation dans toutes les directions matérielles issues d'une particule P , après un certain passage à la limite. On peut définir le tenseur des taux de déformation de deux manières : suivant un point de vue eulérien en évaluant les vitesses de déformation actuelles à partir du champ des vitesses actuelles, ou bien suivant un point de vue lagrangien en envisageant les vitesses de déformation comme des dérivées temporelles de déformations actuelles mesurées par rapport à une forme de référence. Quel que soit le point de vue envisagé, on aboutit à la définition du même tenseur des taux de déformation. Pour satisfaire les préférences de tous les lecteurs ⁽¹⁾, on envisagera systématiquement les deux points de vue.

Conseil – L'auteur invite les lecteurs dont le centre d'intérêt est la mécanique des fluides et qui auraient, de ce fait, ignoré le chapitre 4 [p. 51] sur les déformations, à lire néanmoins les sections 4.2 [p. 52] (direction matérielle) et 4.3 [p. 53] (voisinage d'une particule) qui définissent des concepts utilisés dans ce chapitre.

5.2 Taux de dilatation linéique dans une direction matérielle

5.2.1 Point de vue eulérien

Considérons une particule P et un voisinage actuel de cette particule $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ [déf. 4.9 p. 53]. Les positions actuelles des biparticules $\{P, P'\}$ du voisinage sont : $\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t$ et leur longueur actuelle est $\ell_t = \|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|$. Leur dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \ell_t &= \frac{d}{dt} \|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\| = \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t) && \left(\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\| = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{v} \right) \\
 &= \bar{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{v}(P', t) - \mathbf{v}(P, t)) = \bar{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}'_t) - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t)) && (\bar{\mathbf{u}}_t = \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} \text{ est unitaire}) \\
 &= \bar{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t) + \dots) && (\text{définition du gradient eulérien}) \\
 \frac{d}{dt} \frac{\ell_t}{\ell_t} &= \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \frac{(\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t)}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} + \dots \\
 &= \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \dots \\
 &= \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{sym grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \dots && (\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{asym grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t = 0, \forall \mathbf{u}_t) \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

⁽¹⁾ C'est-à-dire ceux qui sont plutôt orientés « fluides » et ceux qui sont plutôt orientés « solides déformables ».

Lorsque $P' \rightarrow P$ en suivant un certain chemin matériel \mathcal{C}^P issu de la particule P [déf. 4.3 p. 52], alors $\ell_t \rightarrow 0$, $\frac{d}{dt}\ell_t \rightarrow 0$ et le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{u}}_t$ tend vers une direction matérielle \mathbf{u}_t .

- **Définition 5.1 – Taux de dilatation linéique.** Soit \mathcal{C}^P un chemin matériel issu d'une particule P , définissant en P une direction matérielle dont la direction actuelle est \mathbf{u}_t . On appelle taux de dilatation linéique actuel en P dans la direction matérielle actuelle \mathbf{u}_t la limite suivante :

$$d_l(P, \mathbf{u}_t, t) = \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\frac{d}{dt}\ell_t}{\ell_t} \quad (\text{limite de la dérivée temporelle logarithmique de } \|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|) \quad (5.2)$$

L'équation (5.1) montre que cette limite est :

$$d_l(P, \mathbf{u}_t, t) = \mathbf{u}_t \cdot \text{sym grad}_E \mathbf{v}(P, t) \cdot \mathbf{u}_t$$

Le taux de dilatation linéique actuel d_l en une particule P dans une direction matérielle dont la direction actuelle est \mathbf{u}_t , est un scalaire de la dimension d'une fréquence (unité légale : s^{-1}). Si $d_l < 0$, la direction matérielle est en cours de contraction, sinon elle est en cours d'extension. Puisque la valeur de d_l en une particule P dépend de la direction matérielle considérée, il faut un tenseur du second ordre pour décrire les taux de dilatation linéique dans toutes les directions matérielles issues de P .

- **Définition 5.2 – Tenseur des taux de déformation.** On appelle tenseur des taux de déformation actuel, noté \mathbf{D} , la partie symétrique du gradient eulérien des vitesses :

$$\mathbf{D}(P, t) = \text{sym grad}_E \mathbf{v}(P, t) \quad (5.3)$$

Le champ matériel tensoriel des taux de déformation $\mathbf{D}(P, t)$ permet de calculer le taux de dilatation linéique d_l en une particule P dans une direction matérielle identifiée par sa direction actuelle \mathbf{u}_t :

$$d_l = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{D} : \mathbf{U}_t \quad (\mathbf{U}_t = \mathbf{u}_t \otimes \mathbf{u}_t, \text{ direction matérielle actuelle non orientée}) \quad (5.4)$$

5.2.2 Point de vue lagrangien

On calcule la dérivée temporelle de la dilatation linéique actuelle K_l (mesurée par rapport à une forme de référence) dans une direction matérielle issue d'une particule P , identifiée par sa direction de référence \mathbf{u}_0 . Elle s'écrit $K_l = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|$ [éq. (4.7) p. 55].

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}K_l &= \frac{d}{dt}\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\| = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \cdot (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{u}_0) && (P \text{ fixé et } \mathbf{u}_0 \text{ indépendant de } t) \\ &= \mathbf{u}_t \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0 && [\text{éq. (4.2) p. 53}] \\ &= \mathbf{u}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0) && [\text{éq. (2.32) p. 30}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{dt}K_l}{K_l} &= \mathbf{u}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t && [\text{éq. (4.7) p. 55}] \\ &= \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t && (\mathbf{u}_t \cdot \text{asym grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t = 0, \forall \mathbf{u}_t) \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\frac{\frac{d}{dt}K_l}{K_l} = d_l \quad [\text{éq. (5.4) p. 82}] \quad (5.6)$$

Le tenseur des taux de déformation \mathbf{D} permet de calculer la dérivée temporelle logarithmique de la dilatation linéique actuelle K_l [éq. (5.5)]. Le point de vue lagrangien comme le point de vue eulérien conduisent au même tenseur des taux de déformation \mathbf{D} .

Remarques 5.1 – Le calcul qui précède a été fait dans l'intention d'étudier directement la dérivée temporelle de dilatations linéiques actuelles d'un point de vue lagrangien. Bien que la valeur d'une dilatation linéique actuelle dépende de la forme de référence arbitrairement choisie [éq. (4.6) p. 55], ce calcul montre que sa dérivée temporelle logarithmique est, quant à elle, indifférente au choix de la forme de référence. On retrouve le résultat (5.6) à partir de la définition de d_l [déf. 5.1 p. 82] et de la définition de K_l [déf. 4.12 p. 55] :

$$\begin{aligned} d_l &= \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\frac{d}{dt} \ell_t}{\ell_t} && \text{[déf. 5.1 p. 82]} \\ &= \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\frac{d}{dt} \frac{\ell_t}{\ell_0}}{\frac{\ell_t}{\ell_0}} = \frac{\frac{d}{dt} \lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\ell_t}{\ell_0}}{\lim_{P' \in \mathcal{C}^P \rightarrow P} \frac{\ell_t}{\ell_0}} && (\ell_0 \text{ temporellement constant}) \\ d_l &= \frac{\frac{d}{dt} K_l}{K_l} && \text{[déf. 4.12 p. 55]} \end{aligned}$$

Par ailleurs, contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer, le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D} = \text{sym grad}_E \mathbf{v} = \text{sym}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1})$ n'est pas la dérivée particulière d'un tenseur de déformation eulérien ou lagrangien. Les dérivées particulières des tenseurs de déformation et de leurs invariants sont calculées en annexe B [p. 109].

5.3 Taux de dilatation volumique

5.3.1 Point de vue eulérien

Considérons le voisinage actuel $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ d'une particule P , et trois biparticules $\{P, P'\}$, $\{P, P''\}$ et $\{P, P'''\}$ de ce voisinage dont les positions actuelles sont les trois vecteurs :

$$\boldsymbol{\delta}' = \mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t \quad ; \quad \boldsymbol{\delta}'' = \mathbf{x}''_t - \mathbf{x}_t \quad ; \quad \boldsymbol{\delta}''' = \mathbf{x}'''_t - \mathbf{x}_t$$

Le volume actuel engendré par les trois biparticules est le produit mixte :

$$v_t = [\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] \quad (5.7)$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_t &= \left[\frac{d}{dt} \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}''' \right] + \left[\boldsymbol{\delta}', \frac{d}{dt} \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}''' \right] + \left[\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \frac{d}{dt} \boldsymbol{\delta}''' \right] \\ &= [\text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}' + \dots, \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] + [\boldsymbol{\delta}', \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}'' + \dots, \boldsymbol{\delta}'''] + \\ &\quad [\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}''' + \dots] \quad \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\delta}' = \mathbf{v}_E(\mathbf{x}'_t, t) - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \right) \\ &= [\text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] + [\boldsymbol{\delta}', \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] + [\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}'''] + \dots \\ &= [\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] \text{tr grad}_E \mathbf{v} + \dots \quad \left(\text{car } \text{tr} \mathbf{T} = \frac{[\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] + [\mathbf{u}_1, \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] + [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_3]}{[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]} \right) \\ \frac{d}{dt} v_t &= \text{tr grad}_E \mathbf{v} + \dots \quad \text{[éq. (5.7)]} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Lorsque les trois particules voisines tendent vers P chacune avec son propre chemin matériel, les deux termes $\frac{d}{dt} v_t$ et v_t tendent vers 0.

- **Définition 5.3 – Taux de dilatation volumique.** On appelle taux de dilatation volumique actuel en une particule P la limite suivante :

$$d_v = \lim_{\substack{P' \in \mathcal{C}'_t \rightarrow P \\ P'' \in \mathcal{C}''_t \rightarrow P \\ P''' \in \mathcal{C}'''_t \rightarrow P}} \frac{\frac{d}{dt} v_t}{v_t} \quad (5.9)$$

L'équation (5.8) [p. 83] montre que cette limite est indépendante des chemins matériels :

$$d_v = \text{tr } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \text{tr } \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v} \quad (5.10)$$

Le taux de dilatation volumique actuel en une particule est un scalaire de la dimension d'une fréquence (unité légale : s^{-1}). Si $d_v < 0$, la particule matérielle est en cours de contraction volumique, sinon elle est en cours d'expansion volumique.

5.3.2 Point de vue lagrangien

La dilatation volumique actuelle (mesurée par rapport à une forme de référence) est : $K_v = \det \mathbf{F}$ [éq. (4.24) p. 62]. Sa dérivée temporelle est :

$$\dot{K}_v = (\det \mathbf{F})' = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-\top} : \dot{\mathbf{F}} = K_v \text{tr}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = K_v \text{tr } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = K_v \text{tr } \mathbf{D}$$

La dérivée temporelle logarithmique de la dilatation volumique actuelle mesurée entre les instants t_0 et t est donc :

$$\frac{\dot{K}_v}{K_v} = \text{tr } \mathbf{D} = d_v$$

Remarque 5.2 – Comme pour la dilatation linéique, la valeur de la dilatation volumique actuelle dépend du choix de la forme de référence, mais sa dérivée temporelle logarithmique n'en dépend pas. On retrouve aussi bien ce résultat en utilisant la définition de K_v [déf. 4.20 p. 62] et la définition de d_v [déf. 5.3 p. 83] :

$$\frac{\dot{K}_v}{K_v} = \frac{\frac{d}{dt} \lim_{dv_t \rightarrow 0} \frac{v_t}{v_0}}{\lim_{dv_t \rightarrow 0} \frac{v_t}{v_0}} = \frac{\frac{d}{dt} \lim_{dv_t \rightarrow 0} v_t}{\lim_{dv_t \rightarrow 0} v_t} = \lim_{dv_t \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt} v_t}{v_t} = d_v$$

5.4 Taux de dilatation surfacique

5.4.1 Point de vue eulérien

Considérons le voisinage actuel $\mathcal{V}_t(\mathbf{x}_t)$ d'une particule P , et deux biparticules $\{P, P'\}$ et $\{P, P''\}$ de ce voisinage dont les positions actuelles sont les deux vecteurs :

$$\boldsymbol{\delta}' = \mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t \quad ; \quad \boldsymbol{\delta}'' = \mathbf{x}''_t - \mathbf{x}_t$$

La surface actuelle engendrée s_t par les deux biparticules est définie par :

$$s_t \bar{\mathbf{n}}_t = \boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}'' \quad \Rightarrow \quad s_t = \|\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}''\| = [\bar{\mathbf{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}''] \quad (5.11)$$

La dérivée temporelle de l'aire s_t est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} s_t &= \frac{d}{dt} \|\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}''\| = \frac{\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}''}{\|\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}''\|} \cdot \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}'') \quad \left(\frac{d}{dt} \|\mathbf{v}\| = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \right) \\ &= \bar{\mathbf{n}}_t \cdot \left(\frac{d}{dt} \boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}'' \right) + \bar{\mathbf{n}}_t \cdot \left(\boldsymbol{\delta}' \wedge \frac{d}{dt} \boldsymbol{\delta}'' \right) \\ &= \bar{\mathbf{n}}_t \cdot \left(\mathbf{v}_E(\mathbf{x}'_t, t) - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \right) \wedge \boldsymbol{\delta}'' + \bar{\mathbf{n}}_t \cdot \left(\mathbf{v}_E(\mathbf{x}''_t, t) - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \right) \wedge \boldsymbol{\delta}' \\ \frac{d}{dt} s_t &= [\bar{\mathbf{n}}_t, \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}' + \dots, \boldsymbol{\delta}'] + [\bar{\mathbf{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}'' + \dots] \quad [\text{notation 4.11 p. 54}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} s_t &= \frac{[\bar{\mathbf{n}}_t, \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}''] + [\bar{\mathbf{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\delta}'']}{[\bar{\mathbf{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'']} + \dots \quad [\text{éq. (5.11) p. 84}] \\
&= \text{tr } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \frac{[\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'']}{[\bar{\mathbf{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'']} + \dots \quad (\text{tr } \mathbf{T} = \frac{[\mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] + [\mathbf{u}_1, \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] + [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_3]}{[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3]}) \\
&= \text{tr } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \frac{(\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}'') \cdot (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{n}}_t)}{\|\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}''\|} + \dots \quad [\text{éq. (5.11) p. 84}] \\
&= \text{tr } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \bar{\mathbf{n}}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{n}}_t + \dots \\
\frac{d}{dt} s_t &= \text{tr } \mathbf{D} - \bar{\mathbf{n}}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \bar{\mathbf{n}}_t + \dots \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Lorsque les deux particules voisines tendent vers P (chacune avec son propre chemin), les deux termes s_t et $\frac{d}{dt} s_t$ tendent vers 0 et le vecteur unitaire $\bar{\mathbf{n}}_t$ tend vers une direction unitaire \mathbf{n}_t .

- **Définition 5.4 – Taux de dilatation surfacique.** On appelle taux de dilatation surfacique actuel d'une facette matérielle de direction actuelle \mathbf{n}_t la limite de la dérivée temporelle logarithmique suivante :

$$d_s = \lim_{\substack{P' \in \mathcal{C}' \rightarrow 0 \\ P'' \in \mathcal{C}'' \rightarrow 0}} \frac{\frac{d}{dt} s_t}{s_t} \quad (5.13)$$

L'équation (5.12) montre que cette limite ne dépend que de la direction actuelle \mathbf{n}_t de la normale à la facette matérielle :

$$d_s = \text{tr } \mathbf{D} - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t \quad (5.14)$$

Le taux de dilatation surfacique d'une facette matérielle est un scalaire de la dimension d'une fréquence (unité légale : s^{-1}). Si $d_s < 0$, la facette matérielle est en cours de contraction surfacique, sinon elle est en cours d'expansion surfacique.

5.4.2 Point de vue lagrangien

La dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle identifiée par l'orientation de référence \mathbf{n}_0 de sa normale est $K_s = (\det \mathbf{F}) \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\|$ [éq. (4.36) p. 65]. Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned}
\frac{dK_s}{dt} &= (\det \mathbf{F}) \cdot \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| + \det \mathbf{F} \frac{d}{dt} \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| \\
&= (\det \mathbf{F}) (\mathbf{F}^{-\top} : \dot{\mathbf{F}}) \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| + \det \mathbf{F} \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\|} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0) \quad (\dot{T}_{\text{III}} = T_{\text{III}} \mathbf{T}^{-\top} : \dot{\mathbf{T}}) \\
&= \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\| \text{tr}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) + \det \mathbf{F} \mathbf{n}_t \cdot (\mathbf{F}^{-\top})' \cdot \mathbf{n}_0 \quad [\text{éq. (4.31) p. 64}] \\
&= K_s \text{tr } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \det \mathbf{F} \mathbf{n}_t \cdot (\mathbf{F}^{-\top} \cdot \dot{\mathbf{F}}^{\top} \cdot \mathbf{F}^{-\top}) \cdot \mathbf{n}_0 \quad [\text{éq. (4.36) p. 65, éq. (2.32) p. 30}] \\
\frac{d}{dt} \frac{K_s}{K_s} &= \text{tr } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \frac{\det \mathbf{F}}{K_s} \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{grad}_E^{\top} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0 \quad [\text{éq. (2.32) p. 30}] \\
&= \text{tr } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{grad}_E^{\top} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_t \quad [\text{éq. (4.36) p. 65}] \\
\frac{d}{dt} \frac{K_s}{K_s} &= \text{tr } \mathbf{D} - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t \\
\frac{d}{dt} \frac{K_s}{K_s} &= d_s \quad [\text{éq. (5.14) p. 85}] \quad (5.15)
\end{aligned}$$

Remarque 5.3 – Comme précédemment, bien que la valeur actuelle de la dilatation surfacique d'une facette matérielle dépende du choix de la forme de référence, sa dérivée temporelle logarithmique n'en dépend pas. On laisse le soin au lecteur de retrouver le résultat 5.15 à partir de la définition de K_s [déf. 4.24 p. 65] et de la définition de d_s [déf. 5.4 p. 85], en suivant la même méthode que dans les remarques 5.1 [p. 83] et 5.2 [p. 84].

5.5 Vitesse de rotation d'une direction matérielle

Pendant un mouvement, les directions matérielles [déf. 4.5 p. 52] sont en mouvement car les chemins matériels sont en mouvement. Les directions actuelles des directions matérielles sont des vecteurs unitaires et on peut définir leur vecteur vitesse de rotation ⁽²⁾.

5.5.1 Point de vue eulérien

Soit un chemin matériel \mathcal{C}^P issu d'une particule P définissant une direction matérielle issue de P de direction actuelle \mathbf{u}_t . La dérivée temporelle de \mathbf{u}_t est :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\mathbf{u}_t &= \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \left(\lim_{P' \in \mathcal{C}_t^P \rightarrow P} \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} \right) && \text{[déf. 4.5 p. 52]} \\
&= \lim_{P' \in \mathcal{C}_t^P \rightarrow P} \left(\frac{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}(\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t)}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} - (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t) \frac{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|^2} \right) \\
&= \lim_{P' \in \mathcal{C}_t^P \rightarrow P} \left(\frac{\mathbf{v}_E(\mathbf{x}'_t, t) - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} - \frac{\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} \frac{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} \right) \\
&= \lim_{P' \in \mathcal{C}_t^P \rightarrow P} \left(\frac{\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t) + \dots}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} - \bar{\mathbf{u}}_t \frac{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|}{\|\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}_t\|} \right) && \text{[notation 4.11 p. 54]} \\
&= \lim_{P' \in \mathcal{C}_t^P \rightarrow P} \left(\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \bar{\mathbf{u}}_t - \bar{\mathbf{u}}_t \frac{\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\ell_t}{\ell_t} + \dots \right) \\
\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\mathbf{u}_t &= \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t d_l && \text{[déf. 5.1 p. 82]} \quad (5.16)
\end{aligned}$$

Remarque 5.4 – La dérivée de tout vecteur unitaire lui est orthogonale ⁽³⁾. On vérifie bien que :

$$\mathbf{u}_t \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l = d_l - d_l = 0$$

Le vecteur vitesse de rotation de la direction matérielle de direction actuelle \mathbf{u}_t est donc :

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t} = \mathbf{u}_t \wedge \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t}\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \wedge (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t d_l) = \mathbf{u}_t \wedge \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t \quad (5.17)$$

Remarques 5.5 – Le tenseur $\mathbf{grad}_E^\top \mathbf{v} \cdot \mathbf{H}$ est d'ordre 3. La vitesse angulaire actuelle et l'axe de rotation actuel de la direction matérielle sont :

$$\|\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t}\| = \sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l^2} \quad ; \quad \frac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t}}{\|\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t}\|} = \frac{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top \mathbf{v} \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t}{\sqrt{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l^2}} \quad (5.18)$$

⁽²⁾ Un vecteur unitaire en mouvement peut être vu comme un solide indéformable en mouvement.

⁽³⁾ Pour s'en convaincre, il suffit de dériver l'égalité $\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}_t = 1$.

On constate que chaque direction matérielle issue de P a sa propre vitesse de rotation (axe et module) ; on ne peut donc pas parler, comme on le lit parfois, de « vitesse de rotation locale de la matière ». En particulier, il existe à chaque instant au moins une direction matérielle issue de P dont la vitesse de rotation est nulle : ce sont la (les) direction(s) matérielle(s) qui sont actuellement confondues avec une direction propre de $\mathbf{grad}_E \mathbf{v}$ ⁽⁴⁾. En effet, si \mathbf{u}_t est une direction propre de $\mathbf{grad}_E \mathbf{v}$ de valeur propre associée k , l'équation (5.18) montre que la norme de sa vitesse de rotation est nulle :

$$\|\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{u}_t}\|^2 = \mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{grad}_E^\top \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_t - d_t^2 = \underbrace{(\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t)}_{k\mathbf{u}_t} \cdot \underbrace{(\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t)}_{k\mathbf{u}_t} - (\mathbf{u}_t \cdot \underbrace{\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t}_{k\mathbf{u}_t})^2 = 0$$

5.5.2 Point de vue lagrangien

La direction actuelle d'une direction matérielle en fonction de sa direction de référence est :

$$\mathbf{u}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \quad [\text{éq. (4.2) p. 53}]$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t &= \frac{\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} - \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \frac{\frac{d}{dt} \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \\ &= \frac{\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} - \mathbf{u}_t \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|^2} \cdot (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{u}_0) \right) \quad (\text{car } \frac{d\|\mathbf{v}\|}{dt} = \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}}{\|\mathbf{v}\|}) \\ &= \frac{\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} - \mathbf{u}_t \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \cdot \frac{\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}_0\|} \right) \\ &= \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t (\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t) \quad [\text{éq. (2.32) p. 30}] \\ \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t &= \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_t \mathbf{u}_t \quad [\text{éq. (5.4) p. 82}] \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat donné dans l'équation (5.16) [p. 86].

5.6 Taux de distorsion angulaire

5.6.1 Point de vue lagrangien

Le taux actuel de distorsion angulaire n'a de sens *a priori* que d'un point de vue lagrangien. En effet, la distorsion angulaire actuelle n'est définie que pour deux directions matérielles *initialement orthogonales*. Sa valeur est :

$$\delta_a = \frac{1}{\sin \alpha_t} = \frac{K_l K_l'}{K_s} \in [1; \infty[\quad [\text{éq. (4.39) p. 66}]$$

Le taux de distorsion angulaire actuel est donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta_a &= \frac{d}{dt} K_l + \frac{d}{dt} K_l' - \frac{d}{dt} K_s = d_l + d_l' - d_s \\ &= \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t' \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t' - \text{tr} \mathbf{D} + \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t \quad \text{où } \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}_t'}{\|\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}_t'\|} \quad [\text{éq. (5.14) p. 85}] \quad (5.19) \end{aligned}$$

⁽⁴⁾ Le tenseur du second ordre $\mathbf{grad}_E \mathbf{v}$ est réel non symétrique en général, il a une ou trois valeurs propres réelles et donc une ou trois directions propres réelles.

Afin d'évaluer la dérivée temporelle de l'angle actuel α_t de deux directions matérielles initialement orthogonales, on utilise la définition $\delta_a = \frac{1}{\sin \alpha_t}$ [déf. 4.39 p. 66] ; il vient :

$$\frac{d}{dt} \delta_a = -\frac{d}{dt} \frac{\sin \alpha_t}{\sin \alpha_t} = -\frac{d}{dt} \alpha_t = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \text{tr} \mathbf{D} + \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t \quad [\text{éq. (5.19)}]$$

On en déduit une expression de la dérivée temporelle de l'angle actuel des directions matérielles initialement orthogonales :

$$\frac{d\alpha_t}{dt} = \tan \alpha_t (\text{tr} \mathbf{D} - \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t) \quad \text{où } \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t}{\|\mathbf{u}_t \wedge \mathbf{u}'_t\|} \quad (5.20)$$

Remarque 5.6 – Si les directions matérielles \mathbf{u}_t et \mathbf{u}'_t sont non seulement initialement orthogonales mais aussi actuellement orthogonales, alors le trièdre $\{\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{n}_t\}$ est orthonormé, ce qui implique :

$$\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t + \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t = \text{tr} \mathbf{D}$$

Dans ce cas, l'équation (5.20) [p. 88] ne permet pas de statuer sur la valeur actuelle de $\frac{d\alpha_t}{dt}$ car elle conduit à une forme indéterminée $\infty \times 0$. Le point de vue eulérien qui suit permettra d'établir une formule [éq. (5.22)] qui évite cet écueil.

5.6.2 Point de vue eulérien

Sans parler de distorsion angulaire de deux directions initialement orthogonales, on peut néanmoins évaluer la dérivée temporelle de l'angle actuel α_t de deux directions matérielles sans se soucier de savoir si elles étaient orthogonales à un quelconque instant de référence.

Soient deux directions matérielles dont les directions actuelles sont \mathbf{u}_t et \mathbf{u}'_t . Leur angle actuel α_t est défini par ⁽⁵⁾ $\cos \alpha_t = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}'_t$. La dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \cos \alpha_t &= \mathbf{u}'_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t + \mathbf{u}_t \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{u}'_t \\ &= \mathbf{u}'_t \cdot (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t d_l) + \mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_t - \mathbf{u}'_t d'_l) \quad [\text{éq. (5.16) p. 86}] \\ &= \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_t + \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_t - (d_l + d'_l) \cos \alpha_t \\ -\sin \alpha_t \frac{d\alpha_t}{dt} &= 2\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - (d_l + d'_l) \cos \alpha_t \\ \frac{d\alpha_t}{dt} &= -\frac{2\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t}{\sin \alpha_t} + \frac{\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t}{\tan \alpha_t} \quad [\text{éq. (5.4) p. 82}] \end{aligned} \quad (5.21)$$

En particulier, pour deux directions matérielles *actuellement orthogonales* ($\alpha_t = \frac{\pi}{2}$), il reste :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_t}{dt} &= -2\mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{sph} \mathbf{D} + \mathbf{dev} \mathbf{D}) \cdot \mathbf{u}'_t \quad (\tan \frac{\pi}{2} = \infty) \\ &= -2 \frac{\text{tr} \mathbf{D}}{3} \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{u}'_t - 2\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{dev} \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t \\ &= -2\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{dev} \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t \end{aligned} \quad (5.22)$$

Remarques 5.7 – Contrairement à l'équation (5.20) [p. 88], l'équation (5.21) ne conduit à aucune indétermination dans l'évaluation de $\frac{d\alpha_t}{dt}$ quand les deux directions matérielles sont actuellement orthogonales ($\alpha_t = \frac{\pi}{2}$).

⁽⁵⁾ On rappelle que, dans l'espace \mathcal{E}_3 , l'angle entre deux vecteurs est toujours dans l'intervalle $[0; \pi]$.

Par ailleurs, on peut montrer à la suite d'un calcul pénible⁽⁶⁾, que les deux évaluations de $\frac{d\alpha_t}{dt}$ données dans l'équation (5.21) et dans l'équation (5.20) sont égales quand $\alpha_t \neq \frac{\pi}{2}$. Ce résultat signifie que lorsque l'on observe la dérivée temporelle de l'angle actuel de deux directions matérielles, on peut toujours imaginer qu'il existe un instant où ces directions matérielles sont orthogonales et considérer une distorsion angulaire par rapport à cet instant.

5.7 Taux de distorsion stérique

5.7.1 Point de vue lagrangien

Tout comme le taux de distorsion angulaire, le taux de distorsion stérique n'a de sens *a priori* que d'un point de vue lagrangien. En effet, la distorsion stérique n'est définie que pour trois directions matérielles *initialement orthogonales*. Sa valeur est :

$$\delta_s = \frac{K_l K'_l K''_l}{K_v} = \frac{1}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|} \in [1; \infty[\quad [\text{éq. (4.28) p. 63}]$$

Le taux de distorsion stérique est :

$$\frac{d}{dt} \delta_s = \frac{d}{dt} \frac{K_l}{K_l} + \frac{d}{dt} \frac{K'_l}{K'_l} + \frac{d}{dt} \frac{K''_l}{K''_l} - \frac{d}{dt} \frac{K_v}{K_v} = d_t + d'_t + d''_t - d_v \quad (5.23)$$

$$= \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t + \mathbf{u}''_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}''_t - \text{tr} \mathbf{D} \quad (5.24)$$

Afin d'évaluer la dérivée temporelle du produit mixte actuel de trois directions matérielles initialement orthogonales, on utilise la définition $\delta_s = \frac{1}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|}$ [déf. 4.21 p. 63], il vient :

$$\frac{d}{dt} \delta_s = \frac{d}{dt} \frac{1}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|} = - \frac{d}{dt} \frac{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|^2}$$

On en déduit la dérivée temporelle logarithmique du produit mixte actuel de trois directions matérielles initialement orthogonales :

$$\frac{d}{dt} \frac{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|} = \text{tr} \mathbf{D} - \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \mathbf{u}''_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}''_t \quad (5.25)$$

Remarque 5.8 – En particulier, si les trois directions matérielles sont non seulement initialement orthogonales mais aussi actuellement orthogonales ($|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]| = 1$), alors la distorsion stérique actuelle de ces trois directions matérielles vaut 1. Elle est donc actuellement à un minimum et sa dérivée temporelle doit être nulle. On retrouve bien ce résultat avec l'équation (5.25). En effet, dans ce cas le trièdre $\{\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t\}$ est actuellement orthonormé, ce qui implique :

$$\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t + \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t + \mathbf{u}''_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}''_t = \text{tr} \mathbf{D}$$

On a alors :

$$\frac{d}{dt} \delta_s = 0 \quad [\text{éq. (5.24)}] \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt} \frac{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|} = 0 \quad [\text{éq. (5.25)}]$$

⁽⁶⁾ Il vaut mieux s'aider d'un logiciel ce calcul formel.

5.7.2 Point de vue eulérien

Sans parler de distorsion stérique de directions matérielles initialement orthogonales, on peut toujours évaluer la dérivée temporelle du produit mixte de trois directions matérielles actuelles sans se soucier si elles sont orthogonales à un quelconque instant de référence.

Soient trois directions matérielles de direction actuelles \mathbf{u}_t , \mathbf{u}'_t et \mathbf{u}''_t . La dérivée temporelle de leur produit mixte est :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] &= \left[\frac{d}{dt} \mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t \right] + [\mathbf{u}_t, \frac{d}{dt} \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] + [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \frac{d}{dt} \mathbf{u}''_t] \\ &= [\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_t \mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] + [\mathbf{u}_t, \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'_t - d'_t \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] + \\ &\quad [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}''_t - d''_t \mathbf{u}''_t] \quad [\text{éq. (5.16) p. 86}] \\ &= [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] \text{tr } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} - [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] (d_t + d'_t + d''_t) \\ \frac{d}{dt} \frac{[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]}{[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]} &= \text{tr } \mathbf{D} - \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \mathbf{u}''_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}''_t \end{aligned} \quad (5.26)$$

Remarque 5.9 – Il est remarquable de constater que le résultat de l'équation (5.26) est identique à celui obtenu dans le point de vue lagrangien [éq. (5.25) p. 89], où les directions matérielles étaient initialement orthogonales. Lorsqu'on observe le produit mixte actuel de trois directions matérielles, on peut toujours imaginer qu'il existe un instant où elles sont orthogonales et considérer la distorsion stérique par rapport à cet instant.

Par ailleurs, la dérivée temporelle du produit mixte de trois directions matérielles actuellement orthogonales est nulle car $[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] = \pm 1$, ce qui est un extremum pour le produit mixte de trois vecteurs unitaires. La dérivée temporelle de ce produit mixte est donc nulle. On peut le vérifier avec un calcul analogue à celui de la remarque 5.8 [p. 89].

5.8 Tenseur tourbillon

Contrairement aux autres concepts cinématiques définis précédemment, la définition de ce tenseur n'a pas de motivation physique mais seulement algébrique.

- **Définition 5.5 – Tenseur tourbillon.** On appelle tenseur tourbillon actuel la partie antisymétrique du gradient eulérien du champ des vitesses actuelles :

$$\mathbf{W} = \text{asym } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \quad (5.27)$$

Le tenseur tourbillon étant antisymétrique, on peut considérer son vecteur adjoint :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} = \text{adj } \mathbf{W} &= \frac{1}{2} \mathbf{H} : \mathbf{W} = -\frac{1}{2} \mathbf{W} : \mathbf{H} = -\frac{1}{2} \text{asym } \mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{H} = -\frac{1}{2} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{H} \\ \mathbf{w} &= \frac{1}{2} \mathbf{rot}_E \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.28)$$

- **Définition 5.6 – Vecteur tourbillon.** Le vecteur $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \mathbf{rot}_E \mathbf{v}$ est appelé vecteur tourbillon. On appelle lignes tourbillons à l'instant t , les lignes de champ du champ des vecteurs tourbillons à l'instant t . On appelle tube tourbillon à l'instant t , la surface engendrée par les lignes tourbillon à l'instant t s'appuyant sur une courbe fermée \mathcal{C}_0 donnée.

Remarques 5.10 – Le tenseur tourbillon $\mathbf{W} = \text{asym grad}_E \mathbf{v}$ est parfois improprement appelé tenseur des « taux de rotation » ou des « vitesses de rotation ». Ce vocabulaire peut induire en erreur : le vecteur vitesse de rotation des directions matérielles a déjà été calculé : $\boldsymbol{\omega}_{u_t} = \mathbf{u}_t \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) \cdot \mathbf{H} \cdot \mathbf{u}_t$ [éq. (5.17) p. 86]. Comme on peut le constater, la seule connaissance de \mathbf{W} est insuffisante pour calculer la vitesse de rotation actuelle des directions matérielles. Par ailleurs, on montre un peu plus loin en 5.10.3 [p. 94] que, contrairement au tenseur des taux de déformation \mathbf{D} , le tenseur tourbillon \mathbf{W} n'est pas objectif.

5.9 Compatibilité des taux de déformation

Si l'on se donne *a priori* un champ de tenseurs symétriques comme champ de tenseurs des taux de déformation dans un milieu continu, il doit satisfaire à des équations de compatibilité⁽⁷⁾ pour qu'il soit la partie symétrique du gradient eulérien d'un champ de vitesses. On peut écrire ces conditions de deux manières :

$$\text{rot}_E \text{rot}_E^\top \mathbf{D} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad 2 \text{sym grad}_E \text{div}_E \mathbf{D} - \text{grad}_E \text{grad}_E \text{tr} \mathbf{D} - \Delta_E \mathbf{D} = \mathbf{0}$$

La recherche des champs de vitesses solutions se fait en deux temps :

1. On cherche d'abord le champ des vecteurs tourbillon \mathbf{w}_E solution des 9 équations aux dérivées partielles : $\text{grad}_E \mathbf{w} = -\text{rot}_E^\top \mathbf{D}$.
Les solutions \mathbf{w}_E sont définies à un champ \mathbf{w}_0 uniforme près, c'est-à-dire à un champ de vitesses à rotationnel uniforme près⁽⁸⁾. Contrairement aux conditions de compatibilité pour le tenseur des « petites perturbations » [item 1 p. 73], il n'y aucune restriction sur $\|\mathbf{w}\|$.
2. On cherche ensuite le champ de vecteurs \mathbf{v}_E solution des 9 équations aux dérivées partielles : $\text{grad}_E \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{w}_E = \mathbf{D} + \mathbf{W}$.
Les solutions sont à un champ de vitesses uniforme \mathbf{v}_0 près, c'est-à-dire à un champ de vitesses de translation de solide près.

5.10 Changements d'observateur

5.10.1 Changement d'observateur des opérateurs eulériens

Gradient eulérien des vitesses

- **Théorème 5.7** – Le gradient eulérien du champ des vitesses est un champ tensoriel du second ordre non objectif.

Démonstration – Pour tout observateur on a la relation $\text{grad}_E \mathbf{v} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ [éq. (2.32) p. 30].

$$\begin{aligned} \text{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} &= \dot{\tilde{\mathbf{F}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-1} = (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top)^{-1} && \text{[éq. (3.14) p. 44]} \\ &= \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}_0^\top + \mathbf{Q}_t \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{Q}_0^\top \right) \cdot (\mathbf{Q}_0 \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) && \left(\frac{d}{dt} \mathbf{Q}_0 = 0 \right) \\ &= \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_t^\top + \mathbf{Q}_t \cdot \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{Q}_t^\top \\ \text{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} &= \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top + \mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top && \text{[éq. (2.32) p. 30]} \end{aligned} \quad (5.29)$$

⁽⁷⁾ Voir la note 14 [p. 73]

⁽⁸⁾ Contrairement à ce qui est parfois affirmé, ce n'est pas nécessairement un champ de vitesses de solide en rotation. Par exemple, le champ donné en coordonnées cartésiennes orthonormées : $\mathbf{v} = 2x(y+z)\mathbf{e}_x + (z+x^2)\mathbf{e}_y + x^2\mathbf{e}_z$ a un rotationnel uniforme ($\text{rot} \mathbf{v} = -\mathbf{e}_x$) mais n'est pas pour autant un champ de vitesses de solide : par exemple, le taux de dilatation linéique dans la direction \mathbf{e}_x est $2(y+z) \neq 0$.

ce qui est différent de la formule de changement d'observateur des grandeurs tensorielles du second ordre objectives [th. 3.9 p. 42].

Divergence eulérienne des vitesses

- **Théorème 5.8** – La divergence eulérienne du champ des vitesses est un champ scalaire objectif.

Démonstration – Pour tous les observateurs, la définition de la divergence eulérienne du champ des vitesses est $\text{div}_E \mathbf{v} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{G}$ [éq. (2.25) p. 29]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{div}_E \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{G} && \text{(définition de la divergence pour } \tilde{\mathcal{R}}) \\ &= \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) : \mathbf{G} + (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) : \mathbf{G} && \text{[éq. (5.29) p. 91]} \\ &= \mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{G} && \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top \text{ est antisymétrique)} \\ &= \text{div}_E \mathbf{v} && \text{(définition de la divergence pour } \mathcal{R}) \end{aligned} \quad (5.30)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire [éq. (3.2) p. 40].

Remarque 5.11 – Bien que le champ des vitesses soit un champ vectoriel non objectif, sa divergence eulérienne est un champ scalaire objectif.

Rotationnel eulérien des vitesses

- **Théorème 5.9** – Le rotationnel eulérien du champ des vitesses est un champ vectoriel non objectif.

Démonstration – On déduit de l'équation (5.29) la formule de changement d'observateur du rotationnel eulérien du champ des vitesses :

$$\begin{aligned} \text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}} &= -\mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{H} = -\left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) : \mathbf{H} - (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) : \mathbf{H} \\ &= -\mathbf{H} : \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) - \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{H}) = -\mathbf{H} : \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) + \mathbf{Q}_t \cdot \text{rot}_E \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.31)$$

ce n'est pas la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective [th. 3.6 p. 40].

Double gradient eulérien du champ des vitesses

- **Théorème 5.10** – Le gradient eulérien du gradient eulérien du champ des vitesses est un champ tensoriel d'ordre 3 objectif.

Démonstration – Pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, le double gradient eulérien est :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{d}\tilde{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{d}(\mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}}) \\ \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}_t &= \mathbf{d} \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) + \mathbf{d}(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) && \text{[éq. (5.29) p. 91]} \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{d}(\mathbf{grad}_E \mathbf{v}) \cdot \mathbf{Q}_t^\top && (\mathbf{Q}_t \text{ est un champ uniforme)} \\ &= \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}_t) \cdot \mathbf{Q}_t^\top && \text{(double gradient pour } \mathcal{R}) \\ &= (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) : \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x}_t \\ \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t &= (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) : \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \\ \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} &= [(\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) : \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \mathbf{v}] \cdot \mathbf{Q}_t^\top \\ \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} &= (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) \boxtimes^3 \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \end{aligned} \quad (5.32)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur tensorielle objective d'ordre 3 [th. 3.13 p. 43].

Remarque 5.12 – Bien que le gradient eulérien du champ des vitesses ne soit pas objectif, son gradient eulérien (tenseur d'ordre 3) est objectif.

Laplacien eulérien du champ des vitesses

- **Théorème 5.11** – Le laplacien eulérien du champ des vitesses est un champ vectoriel objectif.

Démonstration – On déduit de la formule de changement d'observateur (5.32) [p. 92] celle du laplacien eulérien du champ des vitesses :

$$\Delta_E \tilde{\mathbf{v}} = \text{div}_E \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{G} \quad (5.33)$$

$$= \left((\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) \overline{\otimes}^3 \mathbf{grad}_E \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \right) : \mathbf{G} \quad [\text{éq. (5.32) p. 92}] \quad (5.34)$$

$$= \mathbf{Q}_t \cdot \Delta_E \mathbf{v} \quad (5.35)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective [th. 3.6 p. 40].

Remarque 5.13 – Bien que le champ des vitesses ne soit pas objectif, son laplacien eulérien est un champ vectoriel objectif.

Gradient eulérien du rotationnel eulérien du champ des vitesses

- **Théorème 5.12** – Le gradient eulérien du rotationnel eulérien du champ des vitesses est un champ tensoriel du second ordre objectif.

Démonstration – La définition du gradient du rotationnel pour l'observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est :

$$\begin{aligned} \mathbf{grad}_E \text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot d\tilde{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{d}(\text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}}) \\ &= \mathbf{d} \left(-\mathbf{H} : \left(\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}t} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) + \mathbf{Q}_t \cdot \text{rot}_E \mathbf{v} \right) \quad [\text{éq. (5.31) p. 92}] \\ \mathbf{grad}_E \text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t \cdot d\mathbf{x}_t &= \mathbf{0} + \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{d}(\text{rot}_E \mathbf{v}) \quad (\mathbf{Q}_t \text{ est un champ uniforme}) \\ &= \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{grad}_E \text{rot}_E \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{x}_t \\ \mathbf{grad}_E \text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{Q}_t &= \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{grad}_E \text{rot}_E \mathbf{v}) \\ \mathbf{grad}_E \text{rot}_E \tilde{\mathbf{v}} &= \mathbf{Q}_t \cdot (\mathbf{grad}_E \text{rot}_E \mathbf{v}) \cdot \mathbf{Q}_t^\top \quad (5.36) \end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur tensorielle du second ordre objective [th. 3.6 p. 42].

Remarque 5.14 – Bien que le rotationnel eulérien des vitesses ne soit pas objectif, son gradient eulérien est objectif.

Double rotationnel eulérien du champ des vitesses

- **Théorème 5.13** – Le double rotationnel eulérien du champ des vitesses est un champ vectoriel objectif.

Démonstration – On rappelle l'identité vectorielle : $\Delta_E \mathbf{v} = \mathbf{grad}_E \text{div}_E \mathbf{v} - \text{rot}_E \text{rot}_E \mathbf{v}$. Le terme $\Delta_E \mathbf{v}$ est un champ vectoriel objectif [th. 5.11 p. 93]; le terme $\text{div}_E \mathbf{v}$ est un champ scalaire objectif [th. 5.8 p. 92]; enfin on sait que le gradient eulérien d'un champ scalaire objectif est un champ vectoriel objectif [th. 3.15 p. 44], le terme $\mathbf{grad}_E \text{div}_E \mathbf{v}$ est donc un champ vectoriel objectif. On en déduit que le terme $\text{rot}_E \text{rot}_E \mathbf{v}$ est la différence de deux champs vectoriels objectifs, il est donc objectif.

Remarque 5.15 – Bien que le rotationnel eulérien des vitesses ne soit pas objectif, son rotationnel eulérien est un champ vectoriel objectif.

5.10.2 Changement d'observateur du tenseur des taux de déformation

- **Théorème 5.14** – Le champ du tenseur des taux de déformation est un champ tensoriel du second ordre objectif.

Démonstration – La définition du tenseur des taux de déformation pour tout observateur est : $\mathbf{D} = \text{sym grad}_E \mathbf{v}$ [éq. (5.3) p. 82]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{D}} &= \text{sym grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \\
 &= \text{sym} \left(\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) && \text{[éq. (5.29) p. 91]} \\
 &= \text{sym} (\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) && \left(\frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^\top \text{ est antisymétrique} \right) \\
 &= \mathbf{Q}_t \cdot \text{sym grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top && \text{(propriété des rotations)} \\
 &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^\top && (5.37)
 \end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur des grandeurs tensorielles du second ordre objectives [th. 3.6 p. 42].

On en déduit que ses invariants⁽⁹⁾ et ses valeurs propres ordonnées sont des champs scalaires objectifs, et que les vecteurs propres unitaires (ou les tenseurs uniaxiaux unitaires associés) sont aussi des tenseurs objectifs.

5.10.3 Changement d'observateur du tenseur tourbillon

- **Théorème 5.15** – Le champ tensoriel des tenseurs tourbillons est un champ tensoriel du second ordre non objectif.

Démonstration – La définition du tenseur tourbillon est : $\mathbf{W} = \text{asym grad}_E \mathbf{v}$ [déf. 5.5 p. 90]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{W}} &= \text{asym grad}_E \tilde{\mathbf{v}} = \text{asym} \left(\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) && \text{[éq. (5.29) p. 91]} \\
 &= \text{asym} (\mathbf{Q}_t \cdot \text{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^\top = \mathbf{Q}_t \cdot \text{asym grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^\top \\
 &= \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}_t^\top + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^\top && (5.38)
 \end{aligned}$$

ce qui est différent de la formule de changement d'observateur d'une grandeur tensorielle du second ordre [th. 3.6 p. 42].

- **Théorème 5.16** – Le champ des vecteurs tourbillons est un champ vectoriel non objectif.

Démonstration – La définition du vecteur tourbillon est : $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot}_E \mathbf{v}$ [éq. (5.28) p. 90]. Or on sait que $\text{rot}_E \mathbf{v}$ est un champ vectoriel non objectif [th. 5.9 p. 92]. On peut retrouver ce résultat à partir de la formule de changement d'observateur pour les vecteurs tourbillon (5.38) [p. 94] :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbf{w}} &= \text{adj} \tilde{\mathbf{W}} = \text{adj} \left(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}_t^\top + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) = \text{adj} (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) + \text{adj} \left(\frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) \\
 &= \mathbf{Q}_t \cdot \text{adj} \mathbf{W} + \text{adj} \left(\frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^\top \right) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{w} - \boldsymbol{\omega}_{\tilde{\mathcal{R}}/\mathcal{R}} && \text{[éq. (1.14) p. 19]} && (5.39)
 \end{aligned}$$

⁽⁹⁾ L'objectivité de $\text{tr} \mathbf{D}$ a déjà été démontrée [th. 5.8 p. 92].

Remarque 5.16 – En mécanique des fluides, on considère des écoulements particuliers dits irrotationnels définis par $\mathbf{rot}_E \mathbf{v} = \mathbf{0}$. La formule (5.39) [p. 94] montre que si un écoulement est irrotationnel pour un observateur, il n'est pas irrotationnel pour un autre observateur. Cette définition de l'irrotationnalité d'un écoulement n'est donc pas une définition universelle. En revanche, le gradient eulérien du rotationnel eulérien étant un champ tensoriel d'ordre 2 objectif [th. 5.12 p. 93], ce gradient, ses opérateurs différentiels dérivés ainsi que leurs parties symétriques ou antisymétriques pourraient servir à une définition universelle de « vorticité » pourvu que cette définition soit cinématiquement motivée. D'ailleurs, les deux grandeurs objectives construites à partir du champ \mathbf{W} [th. 5.12 p. 93] et [th. 5.13 p. 93] peuvent s'exprimer avec des opérateurs différentiels eulériens appliqués au tenseur des taux de déformation objectif \mathbf{D} avec les identités suivantes :

$$\mathbf{grad}_E \mathbf{rot}_E \mathbf{v} = \mathbf{rot}_E^\top \mathbf{D} \quad ; \quad \mathbf{rot}_E \mathbf{rot}_E \mathbf{v} = 2\mathbf{H} : \mathbf{asym} \mathbf{rot}_E \mathbf{D}$$

ce qui vérifie à nouveau que ces quantités sont bien objectives car $\mathbf{rot}_E \mathbf{D}$ est objectif [th. 3.19 p. 45]. Il semble à l'auteur que la définition 5.5 [p. 90] (non physiquement motivée) du tenseur tourbillon ne soit pas indispensable.

5.10.4 Changement d'observateur du taux de dilatation linéique

- **Théorème 5.17** – Le taux de dilatation linéique actuel dans une direction matérielle est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition du taux de dilatation linéique actuel dans une direction matérielle de direction actuelle \mathbf{u}_t est : $d_l = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t$ [éq. (5.4) p. 82]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ est :

$$\begin{aligned} \tilde{d}_l &= \tilde{\mathbf{u}}_t \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t = (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \quad [\text{éq. (4.57) p. 75 et (4.57) p. 75}] \\ \tilde{d}_l &= \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t = d_l \end{aligned} \quad (5.40)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

5.10.5 Changement d'observateur de la vitesse de rotation d'une direction matérielle

- **Théorème 5.18** – La dérivée temporelle de la direction actuelle d'une direction matérielle est une grandeur vectorielle non objective.

Démonstration – La dérivée temporelle de la direction actuelle \mathbf{u}_t d'une direction matérielle est : $\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l \mathbf{u}_t$ [éq. (5.16) p. 86]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ elle est :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_t}{dt} &= \mathbf{grad}_E \tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t - \tilde{d}_l \tilde{\mathbf{u}}_t \\ &= [\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{Q}_t^\top + \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{Q}_t^\top] \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) - d_l (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \quad [\text{éq. (5.29) p. 91 et éq. (5.40)}] \\ \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_t}{dt} &= \mathbf{Q}_t \cdot [\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_t - d_l \cdot \mathbf{u}_t] + \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} + \frac{d}{dt} \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \quad [\text{éq. (5.16) p. 86}] \end{aligned} \quad (5.41)$$

ce qui est différent de la formule de changement d'observateur de la direction actuelle d'une direction matérielle [éq. (4.57) p. 75].

- **Théorème 5.19** – La vitesse de rotation actuelle d'une direction matérielle est une grandeur vectorielle non objective.

Démonstration – La vitesse de rotation de la direction actuelle d'une direction matérielle est :

$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_t \wedge \frac{d}{dt} \mathbf{u}_t$ [éq. (5.17) p. 86]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ elle est :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\omega}} &= \tilde{\mathbf{u}}_t \wedge \frac{d\tilde{\mathbf{u}}_t}{dt} = (\mathcal{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \wedge \left(\mathcal{Q}_t \cdot \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} + \frac{d}{dt} \mathcal{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \right) \quad [\text{éq. (5.41)}] \\ &= (\mathcal{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \wedge \left(\mathcal{Q}_t \cdot \left(\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} + \mathcal{Q}_t^\top \cdot \frac{d}{dt} \mathcal{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \right) \right) \\ &= (\det \mathcal{Q}_t) \mathcal{Q}_t \cdot \left(\mathbf{u}_t \wedge \left(\frac{d\mathbf{u}_t}{dt} + \mathcal{Q}_t^\top \cdot \frac{d}{dt} \mathcal{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \right) \right) \\ &= \mathcal{Q}_t \cdot \left(\mathbf{u}_t \wedge \frac{d\mathbf{u}_t}{dt} \right) + \mathcal{Q}_t \cdot \left(\mathbf{u}_t \wedge \mathcal{Q}_t^\top \cdot \frac{d}{dt} \mathcal{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \right) \quad (\det \mathcal{Q}_t = 1) \\ &= \mathcal{Q}_t \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathcal{Q}_t \cdot \left(\mathbf{u}_t \wedge \mathcal{Q}_t^\top \cdot \frac{d}{dt} \mathcal{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \right) \end{aligned}$$

ce qui est différent de la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective [th. 3.6 p. 40].

5.10.6 Changement d'observateur du taux de dilatation volumique

- **Théorème 5.20** – Le taux de dilatation volumique actuel en une particule est un champ scalaire objectif.

Démonstration – La définition du taux de dilatation volumique est : $d_v = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v}$ [éq. (5.10) p. 84]. L'objectivité de $\text{div}_E \mathbf{v}$ [th. 5.8 p. 92] implique l'objectivité de d_v .

5.10.7 Changement d'observateur du taux de dilatation surfacique

- **Théorème 5.21** – Le taux de dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition du taux de dilatation surfacique actuel d'une facette matérielle de normale actuelle \mathbf{n}_t est : $d_s = d_v - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t$ [éq. (5.13) p. 85]. Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ elle est :

$$\begin{aligned} \tilde{d}_s &= \tilde{d}_v - \tilde{\mathbf{n}}_t \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_t = d_v - (\mathcal{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t) \cdot (\mathcal{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathcal{Q}_t^\top) \cdot (\mathcal{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t) \quad [\text{éq. (4.60) p. 76 et éq. (5.37) p. 94}] \\ \tilde{d}_s &= d_v - \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}_t = d_s \quad [\text{éq. (5.13) p. 85}] \end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective [déf. 3.2 p. 40].

5.10.8 Changement d'observateur du taux de distorsion angulaire

- **Théorème 5.22** – Le taux actuel de distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – Le taux de distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales a été défini en (5.19) page 87 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta_a}{\delta_a} = d_l + d_l' - d_s$$

Étant la somme de grandeurs scalaires objectives, $\frac{d}{dt} \frac{\delta_a}{\delta_a}$ est une grandeur scalaire objective.

5.10.9 Changement d'observateur de la dérivée temporelle de l'angle actuel de deux directions matérielles

- **Théorème 5.23** – La dérivée temporelle de l'angle actuel de deux directions matérielles est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La dérivée temporelle de l'angle actuel de deux directions matérielles de direction actuelle \mathbf{u}_t et \mathbf{u}'_t est :

$$\frac{d\alpha_t}{dt} = -\frac{2\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t}{\sin \alpha_t} + \frac{d_l + d'_l}{\tan \alpha_t} \quad [\text{éq. (5.21) p. 88}]$$

Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$ elle est :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\alpha}_t}{dt} &= -\frac{2\tilde{\mathbf{u}}_t \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}'_t}{\sin \tilde{\alpha}_t} + \frac{\tilde{d}_l + \tilde{d}'_l}{\tan \tilde{\alpha}_t} \\ &= -\frac{2(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}'_t)}{\sin \alpha_t} + \frac{d_l + d'_l}{\tan \alpha_t} \quad [\text{éq. (4.62) p. 79 et éq. (5.40) p. 95}] \end{aligned}$$

$$\frac{d\tilde{\alpha}_t}{dt} = -\frac{2\mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t}{\sin \alpha_t} + \frac{d_l + d'_l}{\tan \alpha_t} = \frac{d\alpha_t}{dt} \quad [\text{éq. (5.21) p. 88}]$$

Le scalaire $\frac{d\alpha_t}{dt}$ est donc une grandeur scalaire objective [déf. 3.2 p. 40].

5.10.10 Changement d'observateur du taux de distorsion stérique

- **Théorème 5.24** – Le taux de distorsion stérique actuel de trois directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – Le taux de distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales est :

$$\frac{d}{dt} \frac{\delta_s}{\delta_s} = d_l + d'_l + d''_l - d_v$$

Étant une somme de scalaires objectifs, $\frac{d}{dt} \frac{\delta_s}{\delta_s}$ est un scalaire objectif.

5.10.11 Changement d'observateur de la dérivée temporelle du produit mixte de trois directions matérielles

- **Théorème 5.25** – La dérivée temporelle du produit mixte de trois directions matérielles est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – Pour un observateur $\tilde{\mathcal{R}}$, la dérivée temporelle de ce produit mixte s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{[\tilde{\mathbf{u}}_t, \tilde{\mathbf{u}}'_t, \tilde{\mathbf{u}}''_t]}{[\tilde{\mathbf{u}}_t, \tilde{\mathbf{u}}'_t, \tilde{\mathbf{u}}''_t]} &= \text{tr} \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{u}}_t \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}_t - \tilde{\mathbf{u}}'_t \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}'_t - \tilde{\mathbf{u}}''_t \cdot \tilde{\mathbf{D}} \cdot \tilde{\mathbf{u}}''_t \quad [\text{éq. (5.26) p. 90}] \\ &= \text{tr}(\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) - (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t) \\ &\quad - (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}'_t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}'_t) - (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}''_t) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{Q}_t^\top) \cdot (\mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}''_t) \\ &= \text{tr} \mathbf{D} - \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_t - \mathbf{u}'_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}'_t - \mathbf{u}''_t \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}''_t \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{[\tilde{\mathbf{u}}_t, \tilde{\mathbf{u}}'_t, \tilde{\mathbf{u}}''_t]}{[\tilde{\mathbf{u}}_t, \tilde{\mathbf{u}}'_t, \tilde{\mathbf{u}}''_t]} = \frac{d}{dt} \frac{[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]}{[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]} \quad [\text{éq. (5.26) p. 90}]$$

$$\frac{d}{dt} \frac{[\tilde{\mathbf{u}}_t, \tilde{\mathbf{u}}'_t, \tilde{\mathbf{u}}''_t]}{[\tilde{\mathbf{u}}_t, \tilde{\mathbf{u}}'_t, \tilde{\mathbf{u}}''_t]} = \frac{d}{dt} [\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t] \quad [\text{th. 4.38 p. 78}]$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective [déf. 3.2 p. 40].

5.11 En bref...

Le tenseur des taux de déformation $\mathbf{D} = \text{sym grad}_E \mathbf{v}$ est un champ tensoriel du second ordre objectif qui permet de calculer :

- le taux de dilatation linéique actuel d'une direction matérielle,
- le taux de dilatation surfacique actuel d'une facette matérielle,
- le taux de distorsion angulaire actuel,
- le taux de dilatation volumique actuel,
- le taux de distorsion stérique actuel.

Toutes ces grandeurs scalaires sont objectives.

En revanche, le vecteur vitesse de rotation d'une direction matérielle est une grandeur vectorielle non objective. De même, le tenseur tourbillon $\mathbf{W} = \text{asym grad}_E \mathbf{v}$ et son vecteur adjoint le vecteur tourbillon $\mathbf{w} = \frac{1}{2} \text{rot}_E \mathbf{v}$ sont des grandeurs non objectives.

Bien que le champ des vitesses ne soit pas objectif, sa divergence et son laplacien sont des champs respectivement scalaire et vectoriel objectifs.

Synthèse de la cinématique des milieux continus

La cinématique des milieux continus est l'analyse des mouvements d'un milieu continu par rapport à un observateur. On y a défini des grandeurs cinématiques scalaires vectorielles ou tensorielles dont on a pu analyser les changements lorsque l'on change d'observateur. Les grandeurs vectorielles ou tensorielles objectives sont celles dont la valeur actuelle a la même disposition par rapport à la position actuelle de la matière pour tous les observateurs. La position actuelle, la vitesse actuelle, l'accélération actuelle des particules sont des champs vectoriels non objectifs. Les trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission sont donc des courbes différentes d'un observateur à l'autre.

L'analyse des déformations entre un instant de référence et l'instant actuel, qui n'intéresse *a priori* que les mécaniciens des solides déformables, a conduit à la définition de tenseurs de déformations (lagrangiens ou eulériens) permettant de calculer en une particule (chacun avec des formules différentes) les grandeurs cinématiques scalaires suivantes :

- la dilatation linéique dans une direction matérielle,
- la dilatation surfacique dans une facette matérielle,
- la distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales,
- la dilatation volumique en une particule,
- la distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales.

Toutes ces grandeurs scalaires (calculables au moyen des tenseurs de déformation lagrangiens ou eulériens) sont objectives. En revanche, seuls les tenseurs de déformation eulériens sont objectifs. Les tenseurs de déformation (eulériens et lagrangiens) mettent aussi en évidence l'existence à chaque instant de directions matérielles principales de déformation.

L'analyse des vitesses de déformation a conduit à la définition d'un tenseur des taux de déformation objectif qui permet d'évaluer en une particule les grandeurs cinématiques scalaires suivantes ⁽¹⁾ :

- le taux de dilatation linéique dans une direction matérielle,
- le taux de dilatation surfacique dans une facette matérielle,
- le taux de distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales,
- la dérivée temporelle de l'angle actuel de deux directions matérielles,
- le taux de dilatation volumique en une particule,
- le taux de distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales,
- la dérivée temporelle du produit mixte actuel de trois directions matérielles.

Toutes ces grandeurs scalaires sont objectives. En revanche, la vitesse de rotation des directions matérielles n'est pas une grandeur objective.

⁽¹⁾ Dans la liste qui suit, le mot « taux » signifie : dérivée temporelle logarithmique.

La cinématique des milieux continus ne fait que décrire les mouvements, les déformations et les vitesses de déformation, sans se préoccuper des causes qui les provoquent. La relation entre le mouvement et les sollicitations extérieures fait l'objet d'un autre cours : *Équations générales des milieux continus*⁽²⁾, du même auteur.

⁽²⁾ Disponible à <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00696063>, ou bien <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/mmc.html>

Distorsions maximales

A.1 Distorsion angulaire maximale

Soit \mathbf{U} le tenseur de déformation actuel ⁽¹⁾ en une particule. Le tenseur de déformation \mathbf{U} étant symétrique, on peut toujours écrire :

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

où les valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ sont les dilatations linéiques principales de cette déformation et où les trois vecteurs $\{\mathbf{u}_i\}$ sont une base propre orthonormée directe du tenseur de déformation \mathbf{U} .

Soit un couple de deux directions matérielles *initialement orthogonales* $\{\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)}\}$. La distorsion angulaire actuelle de ce couple de directions matérielles est :

$$\delta_a = \frac{K_l^{(1)} K_l^{(2)}}{K_s} \in [1, \infty[\quad [\text{éq. (4.39) p. 66}]$$

Chaque couple de directions matérielles initialement orthogonales a sa propre distorsion angulaire, car les dilatations linéiques $K_l^{(1)}$ et $K_l^{(2)}$ dépendent des directions matérielles et la dilatation surfacique K_s dépend de la normale unitaire au plan des deux directions matérielles :

$$\begin{aligned} K_l^{(1)} &= \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0^{(1)}\| \quad ; \quad K_l^{(2)} = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0^{(2)}\| && [\text{éq. (4.9) p. 56}] \\ K_s &= \det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot (\mathbf{u}_0^{(1)} \wedge \mathbf{u}_0^{(2)})\| && ([\text{éq. (4.37) p. 65}]; \mathbf{u}_0^{(1)} \text{ et } \mathbf{u}_0^{(2)} \text{ orthogonaux}) \end{aligned}$$

On se propose de rechercher quelle est la valeur maximale de la distorsion angulaire dans cette déformation sur l'ensemble des couples de directions matérielles initialement orthogonales, et accessoirement pour quels couples de directions matérielles on atteint cette distorsion angulaire maximale.

Pour envisager tous les couples de vecteurs orthogonaux $\{\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)}\}$, on pose :

$$\mathbf{u}_0^{(1)} = \mathcal{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_0^{(2)} = \mathcal{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2$$

où $\mathcal{Q}(\mu)$ est une rotation, fonction quelconque d'un paramètre μ et où \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont les deux premiers vecteurs de base d'une base propre orthonormée de \mathbf{U} . Les propriétés des tenseurs orthogonaux garantissent que $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont orthogonaux quelle que soit la rotation $\mathcal{Q}(\mu)$.

⁽¹⁾ On choisit d'utiliser ici le tenseur de déformation \mathbf{U} [4.4.2 p. 56] car il donne lieu à des écritures un peu plus simples. On verra dans la suite que ce choix est sans importance, car les résultats sont des fonctions des valeurs propres λ_i qui sont les dilatations linéiques principales. Elles sont exprimables avec tous les tenseurs de déformation.

La distorsion angulaire du couple de vecteurs $(\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)})$ s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\delta_a &= \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot (\mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2)\|} = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot (\mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2)\|} \\ \delta_a &= \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_3\|}\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

Comme on peut le constater, la distorsion angulaire du couple de vecteurs $(\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)})$ dépend de la rotation $\mathbf{Q}(\mu)$.

A.1.1 Recherche de la distorsion angulaire maximale

Pour rechercher les distorsions angulaires extrémales, il suffit d'annuler la dérivée $\frac{d}{d\mu} \delta_a$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\mu} \delta_a &= \frac{d}{d\mu} \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_1\|} + \frac{d}{d\mu} \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2\|}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_2\|} - \frac{d}{d\mu} \frac{\|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_3\|}{\|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_3\|} \\ &= \frac{(\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1) \cdot (\mathbf{U} \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1)}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\|^2} + \frac{(\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2) \cdot (\mathbf{U} \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2)}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|^2} - \frac{(\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3) \cdot (\mathbf{U}^{-1} \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3)}{\|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|^2} \\ &= \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\|^2} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2}{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|^2} - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3}{\|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|^2} \\ &= \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2} - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^{-2} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3} \\ &= \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2} - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{u}_3}\end{aligned}$$

où on a posé dans la dernière ligne :

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}^\top}(\mathbf{U}^2) \quad \text{symétrique défini positif} \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}^\top \cdot \frac{d}{d\mu} \mathbf{Q} \quad \text{antisymétrique quelle que soit la fonction } \mathbf{Q}(\mu) \quad (\text{A.3})$$

Lorsque la rotation $\mathbf{Q}(\mu)$ varie, le tenseur \mathbf{A} prend une valeur antisymétrique quelconque⁽²⁾. La distorsion angulaire δ_a est donc extrémale quand :

$$\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2} - \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{u}_3} = 0, \quad \forall \mathbf{A} \text{ antisymétrique} \quad (\text{A.4})$$

On définit les composantes des tenseurs \mathbf{T} et \mathbf{A} sur la base propre de \mathbf{U} :

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_j \quad \text{où } T_{ij} = T_{ji}, \text{ composantes de } \mathbf{T} \text{ sur la base propre orthonormée } \{\mathbf{u}_i\} \text{ de } \mathbf{U}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a} \quad \text{tenseur antisymétrique quelconque où } \mathbf{a} = a_i \mathbf{u}_i \text{ est un vecteur quelconque}$$

L'équation scalaire (A.4) s'écrit alors⁽³⁾ :

$$\frac{a_3 T_{12} (T_{11} - T_{22})}{T_{11} T_{22}} + \frac{a_2 T_{12} (T_{11} T_{23} - T_{12} T_{13})}{T_{11} (T_{11} T_{22} - T_{12}^2)} - \frac{a_1 T_{12} (T_{13} T_{22} - T_{12} T_{23})}{T_{22} (T_{11} T_{22} - T_{12}^2)} = 0, \quad \forall a_1 \forall a_2 \forall a_3$$

⁽²⁾ Si μ était considéré comme un temps, le vecteur adjoint de \mathbf{A} serait le vecteur vitesse de rotation du trièdre orthonormé $\{\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)}, \mathbf{u}_0^{(1)} \wedge \mathbf{u}_0^{(2)}\}$ par rapport au trièdre orthonormé $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

⁽³⁾ Pour l'écrire, on peut s'aider d'un logiciel de calcul formel.

La résolution de ces trois équations à 6 inconnues T_{ij} impliquent que la matrice des composantes de \mathbf{T} dans la base propre de \mathbf{U} est de l'une des deux formes suivantes :

$$[M_1] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [M_2] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

On calcule les distorsions extrémales dans ces deux cas.

Cas $[M_1]$ La distorsion angulaire des deux directions initialement orthogonales $\mathbf{u}_0^{(1)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_0^{(2)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2$ est [éq. (A.1) p. 102] :

$$\delta_a = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|} \quad \text{où } \mathbf{U}^2 = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^\top \quad \Rightarrow \quad \delta_a^2 = \frac{T_{11} T_{22}}{\det(M_1) (M_1^{-1})_{33}} = 1$$

Dans ce cas, il n'y a donc pas de distorsion angulaire (les deux directions $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ restent orthogonales après déformation). Cet extrémum est donc un minimum de la distorsion angulaire.

Cas $[M_2]$ Les valeurs propres de $\mathbf{T} = \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathbf{Q}$, c'est-à-dire celles de $[M_2]$, sont :

$$(T_{11} + T_{12}, T_{11} - T_{12}, T_{33})$$

Les valeurs propres de \mathbf{U}^2 sont : $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$. Les propriétés des rotations impliquent que les valeurs propres de \mathbf{T} et \mathbf{U}^2 sont les mêmes, mais dans un ordre éventuellement différent :

$$T_{11} + T_{12} = \lambda_i^2 ; \quad T_{11} - T_{12} = \lambda_j^2 ; \quad T_{33} = \lambda_k^2 \quad \text{où } (i, j, k) \text{ est une permutation de } (1, 2, 3),$$

ce qui entraîne :

$$T_{11} = \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{2} ; \quad T_{12} = \frac{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}{2}$$

Les extrema de la distorsion angulaire des deux directions orthogonales $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont donc [éq. (A.1) p. 102] :

$$\delta_a = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|} \quad \Rightarrow \quad \delta_a^2 = \frac{T_{11} T_{22}}{\det(M_2) M_2^{-1}_{33}} = \frac{T_{11}^2}{(T_{11} + T_{12})(T_{11} - T_{12})} = \frac{(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)^2}{4 \lambda_i^2 \lambda_j^2}$$

Les distorsions extrémales sont donc :

$$\delta_a = \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{2 \lambda_i \lambda_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right) \quad \text{où } (i, j, k) \text{ est une permutation de } (1, 2, 3).$$

Le tenseur de déformation \mathbf{U} étant symétrique défini positif, les valeurs propres λ_i et λ_j sont strictement positives. On vérifie aisément que si les valeurs propres sont distinctes, alors $\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j} + \frac{\lambda_j}{\lambda_i} \right) > 1$. Ces extrema sont donc des maximums relatifs de distorsion angulaire. Les trois maximums relatifs de distorsion angulaire sont donc :

$$\delta_{a3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) ; \quad \delta_{a1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) ; \quad \delta_{a2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right) \quad (\text{A.5})$$

Si on pose $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$, on vérifie aisément que la distorsion angulaire maximale est celle calculée avec les valeurs propres extrêmes :

$$\delta_{a \max} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \right) \quad (\text{A.6})$$

La distorsion angulaire maximale d'une déformation est une fonction des dilatations linéiques principales extrêmes. Elle peut donc être évaluée avec n'importe quel tenseur de déformation lagrangien ou eulérien.

A.1.2 Recherche des couples de directions de distorsion angulaire maximale

On peut préciser quelles sont les rotations \mathbf{Q} qui définissent les couples $\{\mathbf{u}_0^{(1)}, \mathbf{u}_0^{(2)}\}$ de distorsion angulaire extrême. Les composantes dans la base $\{\mathbf{u}_i\}$ des vecteurs propres unitaires du tenseur \mathbf{T} sont les vecteurs propres de la matrice $[\mathbf{M}_2]$:

$$\mathbf{t}_{\lambda_i} = \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \mathbf{t}_{\lambda_j} = \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \mathbf{t}_{\lambda_k} = \mathbf{u}_3$$

Les propriétés des rotations impliquent qu'elles sont aussi $\mathbf{t}_{\lambda_k} = \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{u}_k$ [éq. (A.2) p. 102], on a donc :

$$\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{t}_{\lambda_k} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{Q}^\top \cdot \mathbf{u}_k = Q_{jk}^\top$$

Les composantes⁽⁴⁾ de \mathbf{Q} dans la base orthonormée $\{\mathbf{u}_i\}$ sont donc : $Q_{kj} = Q_{jk}^\top = \mathbf{t}_{\lambda_k} \cdot \mathbf{u}_j$ Pour toutes les permutations de (i, j, k) , on obtient les six matrices suivantes :

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q^{(123)}} & \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(231)}} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(312)}} \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(132)}} & \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{Q^{(213)}} & \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(321)}} \end{array}$$

Ces six rotations s'interprètent géométriquement de la manière suivante :

(on pose $\theta_1 = \arccos(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4})$ et $\theta_2 = \arccos(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})$) :

- $Q^{(123)}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de $-\mathbf{u}_3$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$;
- $Q^{(231)}$ est une rotation d'angle θ_1 autour de $(1 - \sqrt{2})\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$;
- $Q^{(312)}$ est une rotation d'angle θ_2 autour de $\mathbf{u}_1 + (1 + \sqrt{2})\mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$;
- $Q^{(132)}$ est une rotation d'angle θ_2 autour de $(1 + \sqrt{2})\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$;

⁽⁴⁾ La variance est sans importance dans une base orthonormée.

- $\mathcal{Q}^{(213)}$ est une rotation d'angle π autour de $(-1 + \sqrt{2})\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$;
- $\mathcal{Q}^{(321)}$ est une rotation d'angle θ_2 autour de $\mathbf{u}_1 - (1 + \sqrt{2})\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, les vecteurs $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$.

Les rotations \mathcal{Q} qui définissent les vecteurs initialement orthogonaux $\mathbf{u}_0^{(i)}$ conduisant à la distorsion angulaire maximale sont les deux rotations $\mathcal{Q}^{(231)}$ ou $\mathcal{Q}^{(132)}$ et les directions de distorsion angulaire maximale sont les bissectrices du plan $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$.

A.2 Distorsion stérique maximale

La distorsion stérique de trois directions initialement orthogonales est :

$$\delta_s = \frac{K_l^{(1)} K_l^{(2)} K_l^{(3)}}{K_v} \in [1; \infty[\quad [\text{éq. (4.28) p. 63}]$$

Chaque triplet de directions matérielles initialement orthogonales a sa propre distorsion stérique car les trois dilatations linéiques $K_l^{(1)}$, $K_l^{(2)}$ et $K_l^{(3)}$ dépendent de la direction de référence des directions matérielles. En revanche, la dilatation volumique K_v n'en dépend pas [éq. (4.25) p. 62]. La recherche de la distorsion stérique maximale en une particule revient donc à rechercher la valeur maximale du produit $K_l^{(1)} K_l^{(2)} K_l^{(3)}$.

Comme dans la section précédente, on utilise le tenseur \mathbf{U} pour évaluer les trois dilatations linéiques, et on utilise une rotation $\mathcal{Q}(\mu)$ quelconque pour engendrer tous les triplets de directions matérielles initialement orthogonales à partir d'une base propre orthonormée du tenseur de déformation \mathbf{U} :

$$\mathbf{u}_0^{(i)} = \mathcal{Q}(\mu) \cdot \mathbf{u}_i$$

La distorsion stérique est alors :

$$\delta_s = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_1\| \|\mathbf{U} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_2\| \|\mathbf{U} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|}{\det \mathbf{U}}$$

A.2.1 Recherche de la distorsion stérique maximale

Pour rechercher la distorsion stérique maximale, il suffit d'annuler la dérivée $\frac{d}{d\mu} \delta_s$.

$$\frac{d}{d\mu} \delta_s = \frac{\frac{d}{d\mu} \|\mathbf{U} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_1\|}{\|\mathbf{U} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_1\|} + \frac{\frac{d}{d\mu} \|\mathbf{U} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|}{\|\mathbf{U} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_2\|} + \frac{\frac{d}{d\mu} \|\mathbf{U} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|}{\|\mathbf{U} \cdot \mathcal{Q} \cdot \mathbf{u}_3\|}$$

Avec des calculs similaires à la section précédente, on obtient :

$$\frac{d}{d\mu} \delta_s = \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2} + \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_3}$$

où on a posé comme dans la section précédente :

$$\mathbf{T} = \mathcal{Q}^\top \cdot \mathbf{U}^2 \cdot \mathcal{Q} = \mathcal{R}_{\mathcal{Q}^\top}(\mathbf{U}^2) \quad \text{symétrique défini positif,}$$

$$\mathbf{A} = \mathcal{Q}^\top \cdot \frac{d}{d\mu} \mathcal{Q} \quad \text{antisymétrique quelle que soit la fonction } \mathcal{Q}(\mu).$$

Lorsque la rotation $\mathcal{Q}(\mu)$ varie, le tenseur \mathbf{A} prend une valeur antisymétrique quelconque. La distorsion stérique δ_s est donc extrémale quand :

$$\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_1} + \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_2}{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_2} + \frac{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{u}_3}{\mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_3} = 0, \quad \forall \mathbf{A} \text{ antisymétrique} \quad (\text{A.7})$$

En écrivant les composantes de \mathbf{T} et de $\mathbf{A} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{a}$ sur la base propre orthonormée de \mathbf{U} , il vient :

$$\frac{a_3 T_{12} (T_{11} - T_{22})}{T_{11} T_{22}} + \frac{a_2 T_{13} (T_{33} - T_{11})}{T_{33} T_{11}} + \frac{a_1 T_{23} (T_{22} - T_{33})}{T_{22} T_{33}} = 0, \quad \forall a_1 \forall a_2 \forall a_3$$

où les termes diagonaux T_{11} , T_{22} et T_{33} sont respectivement les carrés des dilatations linéiques dans les directions $\mathbf{u}_0^{(1)}$, $\mathbf{u}_0^{(2)}$ et $\mathbf{u}_0^{(3)}$. Ils ne sont donc jamais nuls. La solution de ce système de trois équations à six inconnues implique que la matrice des composantes de \mathbf{T} dans la base propre orthonormée de \mathbf{U} a l'une des cinq formes suivantes :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}}_{\text{cas n}^\circ 1}, \underbrace{\begin{bmatrix} x & T_{12} & 0 \\ T_{12} & x & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & 0 \\ T_{13} & 0 & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x & T_{23} \\ 0 & T_{23} & x \end{bmatrix}}_{\text{cas n}^\circ 2, 3, 4}, \underbrace{\begin{bmatrix} x & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & x & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & x \end{bmatrix}}_{\text{cas n}^\circ 5}$$

Cas n° 1 Les tenseurs \mathbf{T} et \mathbf{U}^2 ont même base propre. On a donc :

$$T_{11} = \lambda_i^2 \quad ; \quad T_{22} = \lambda_j^2 \quad ; \quad T_{33} = \lambda_k^2 \quad \text{où } (i, j, k) \text{ est une permutation de } (1, 2, 3).$$

La distorsion stérique pour cet extremum est alors : $\delta_s = \frac{\lambda_i \lambda_j \lambda_k}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = 1$. Cet extrémum est donc un minimum de la distorsion stérique.

Cas n° 2, 3 et 4 Ces trois cas sont similaires : le tenseur \mathbf{T} a une direction propre commune avec \mathbf{U}^2 . Par exemple, pour la matrice n° 2, les valeurs propres de \mathbf{T} ($x + T_{12}, x - T_{12}, T_{33}$) sont aussi celles de \mathbf{U}^2 :

$$x + T_{12} = \lambda_i^2 \quad ; \quad x - T_{12} = \lambda_j^2 \quad ; \quad T_{33} = \lambda_k^2 \quad \text{où } (i, j, k) \text{ est une permutation de } (1, 2, 3),$$

ce qui implique :

$$x = \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{2}$$

La distorsion stérique pour cet extremum est donc :

$$\delta_s^2 = \frac{x^2 T_{33}}{K_v^2} = \frac{(\lambda_i^2 + \lambda_j^2)^2 \lambda_k^2}{4 \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2} \Rightarrow \delta_s = \frac{(\lambda_i^2 + \lambda_j^2) \lambda_k}{2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

Pour toutes les permutations de (i, j, k) on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_{s3} &= \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \lambda_3}{2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) = \delta_{a3} > 1 \\ \delta_{s2} &= \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_3^2) \lambda_2}{2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) = \delta_{a2} > 1 \\ \delta_{s1} &= \frac{(\lambda_2^2 + \lambda_3^2) \lambda_1}{2 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2} \right) = \delta_{a1} > 1 \end{aligned}$$

Pour les matrices n° 3 et 4, les calculs sont semblables et conduisent aux mêmes maximums relatifs. Ainsi, pour ces cas 2, 3 et 4, l'extrémum de la distorsion stérique est un extrémum de la distorsion angulaire [éq. (A.5) p. 103]. On sait des distorsions angulaires que δ_{a2} est la plus grande. δ_{s2} est donc (pour l'instant) la plus grande distorsion stérique.

Remarque A.1 – Il n'est pas étonnant de retrouver que les extrema relatifs de la distorsion stérique trouvés ici soient aussi des extrema de la distorsion angulaire : les extrema de la distorsion angulaire sont obtenus quand les directions $\mathbf{u}_0^{(1)}$ et $\mathbf{u}_0^{(2)}$ sont les bissectrices des plans $(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ [section A.1.2 p. 104]. La troisième direction $\mathbf{u}_0^{(3)}$ est donc la direction propre \mathbf{u}_k . On trouve donc ici un maximum relatif de la distorsion stérique lorsque l'une des trois directions initialement orthogonales est une direction principale.

Cas n° 5 Dans ce dernier cas, le tenseur \mathbf{T} et le tenseur \mathbf{U}^2 n'ont aucune direction propre commune. En revanche, les dilatations linéiques des trois directions initialement orthogonales $\mathbf{u}_0^{(1)}$, $\mathbf{u}_0^{(2)}$ et $\mathbf{u}_0^{(3)}$ sont égales :

$$K^{(i)} = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0^{(i)}\| = \sqrt{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_i} = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad K^{(1)} K^{(2)} K^{(3)} = x^{\frac{3}{2}}$$

D'autre part, les propriétés des rotations impliquent que $\text{tr} \mathbf{T} = \text{tr}(\mathbf{U}^2)$, ce qui implique :

$$x = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{3}$$

La distorsion stérique de cet extrémum est donc :

$$\delta_{s4} = \frac{K^{(1)} K^{(2)} K^{(3)}}{K_v} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{K_v} = \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}$$

Conclusion

Si on pose $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$, on peut prouver⁽⁵⁾ que $\delta_{s4} \geq \delta_{s2}$. La distorsion stérique maximale est donc :

$$\delta_{s \max} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \quad (\text{A.8})$$

La distorsion stérique maximale d'une déformation est une fonction des dilatations linéiques principales. Elle peut donc être évaluée avec n'importe quel tenseur de déformation lagrangien ou eulérien.

A.2.2 Recherche des trièdres des directions de distorsion stérique maximale

Il existe une infinité de rotations \mathbf{Q} définissant les $\mathbf{u}_0^{(i)}$ et conduisant à la distorsion stérique maximale⁽⁶⁾. On laisse le soin au lecteur de vérifier⁽⁷⁾ que l'une des solutions est le tenseur \mathbf{Q}

⁽⁵⁾ Il vaut mieux s'aider d'un logiciel de calcul formel, en montrant que $\delta_{s4}^2 - \delta_{s2}^2 \geq 0$

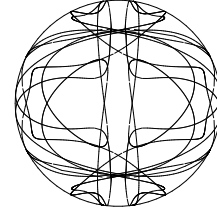
⁽⁶⁾ En interprétant les composantes de \mathbf{Q} dans la base $\{\mathbf{u}_i\}$ comme une matrice de changement de base entre deux bases orthonormées, on en déduit un corollaire : pour tout tenseur symétrique, il existe une infinité de bases orthonormées dans laquelle la matrice des composantes a ses termes diagonaux égaux.

⁽⁷⁾ Il est préférable de s'aider d'un logiciel de calcul formel.

dont les composantes dans la base propre orthonormée $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ sont :

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_3^2}{6(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} & \sqrt{\frac{2\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} & \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_3^2}{6(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{\frac{2\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{6(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} & -\sqrt{\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\lambda_3^2}{3(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} & \sqrt{\frac{2\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{6(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)}} \end{bmatrix}$$

Afin d'illustrer l'existence d'une infinité de rotations conduisant à la distorsion stérique maximale, la figure ci-contre montre, sur une demi-sphère unité, la trace des axes des rotations \mathbf{Q} conduisant à des trièdres $\{\mathbf{u}_0^{(i)}\}$ de distorsion stérique maximale (cette figure a été calculée avec un logiciel de calcul formel pour les valeurs : $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0.75$). À chaque axe de rotation est associé un certain angle de rotation compris entre 0 et π .



Dérivées particulières utiles

Les dérivées particulières des tenseurs de déformation (lagrangiens ou eulériens) ont des relations avec le tenseur des taux de déformation \mathbf{D} . Comme on va le voir, ces relations ne sont pas triviales. En mécanique des milieux continus, on aura surtout besoin de la dérivée particulière des invariants (scalaires) des tenseurs de déformation.

B.1 Rappels

Dans cette annexe, on ne donnera que les dérivées particulières des trois invariants fondamentaux (S_I, S_{II}, S_{III}) , c'est-à-dire les coefficients du polynôme caractéristique d'un tenseur de déformation symétrique \mathbf{S} . S'il plaît au lecteur (notamment pour des raisons d'interprétation physique des invariants) d'utiliser un autre triplet équivalent d'invariants définis par ⁽¹⁾ :

$$\{S^{(1)} = f^{(1)}(S_I, S_{II}, S_{III}), S^{(2)} = f^{(2)}(S_I, S_{II}, S_{III}), S^{(3)} = f^{(3)}(S_I, S_{II}, S_{III})\}$$

il lui sera facile de trouver les dérivées particulières de ces nouveaux invariants par les formules :

$$\dot{S}^{(1)} = \partial_1 f^{(1)} \dot{S}_I + \partial_2 f^{(1)} \dot{S}_{II} + \partial_3 f^{(1)} \dot{S}_{III}$$

$$\dot{S}^{(2)} = \partial_1 f^{(2)} \dot{S}_I + \partial_2 f^{(2)} \dot{S}_{II} + \partial_3 f^{(2)} \dot{S}_{III}$$

$$\dot{S}^{(3)} = \partial_1 f^{(3)} \dot{S}_I + \partial_2 f^{(3)} \dot{S}_{II} + \partial_3 f^{(3)} \dot{S}_{III}$$

Par ailleurs, on rappelle ici un résultat d'algèbre tensorielle : pour tout tenseur symétrique \mathbf{S} , les dérivées particulières des invariants fondamentaux s'écrivent :

$$\dot{S}_I = \mathbf{G} : \dot{\mathbf{S}} \tag{B.1}$$

$$\dot{S}_{II} = (S_I \mathbf{G} - \mathbf{S}) : \dot{\mathbf{S}} \tag{B.2}$$

$$\dot{S}_{III} = (S_{II} \mathbf{G} - S_I \mathbf{S} + \mathbf{S}^2) : \dot{\mathbf{S}} \quad (= S_{III} \mathbf{S}^{-1} : \dot{\mathbf{S}} \text{ si } \mathbf{S}^{-1} \text{ existe}) \tag{B.3}$$

Pour évaluer ces trois dérivées particulières d'invariants, il suffit donc de savoir évaluer les trois produits scalaires $\mathbf{S} : \dot{\mathbf{S}}$, $\mathbf{S}^2 : \dot{\mathbf{S}}$ et éventuellement $\mathbf{S}^{-1} : \dot{\mathbf{S}}$.

Enfin, on rappelle que les tenseurs de déformation eulériens \mathbf{B} , $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{n} \mathbf{V}$, leurs puissances, leur exponentielle et leur logarithme ⁽²⁾ ont des directions propres communes, les produits contractés simples de deux d'entre eux sont donc commutatifs.

⁽¹⁾ Pour que ce changement d'invariants soit valide, il faut que la jacobien de la transformation $\{S_I, S_{II}, S_{III}\} \leftrightarrow \{S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}\}$ soit non nul.

⁽²⁾ Il n'est défini que pour les tenseurs symétriques définis positifs.

B.2 Tenseur de déformation eulérien \mathbf{B}

Sa définition est : $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top$ [éq. 4.15 p. 57]. Sa dérivée particulière est donc :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{B}} &= \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^\top + \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{F}}^\top = (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top) + (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top) \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^\top) \\ &= (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{W})^\top \\ \dot{\mathbf{B}} &= (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W})\end{aligned}\quad (\text{B.4})$$

où on a utilisé la relation : $\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$ [éq. (2.32) p. 30 et éq. (5.3) p. 82].

Remarque B.1 – Bien que le tenseur de déformation eulérien \mathbf{B} soit un tenseur objectif, le lecteur vérifiera aisément que sa dérivée particulière $\dot{\mathbf{B}}$ ne l'est pas [th.3.26 p. 48], notamment en raison de la présence du tenseur non objectif \mathbf{W} ⁽³⁾.

Avec un peu de calcul algébrique⁽⁴⁾, on montre que :

$$\mathbf{B}^n : \dot{\mathbf{B}} = 2\mathbf{B}^{n+1} : \mathbf{D}$$

et donc en particulier que :

$$\mathbf{G} : \dot{\mathbf{B}} = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} \quad ; \quad \mathbf{B} : \dot{\mathbf{B}} = 2\mathbf{B}^2 : \mathbf{D} \quad ; \quad \mathbf{B}^2 : \dot{\mathbf{B}} = 2(\mathbf{B}_{\text{III}} \mathbf{G} - \mathbf{B}_{\text{II}} \mathbf{B} + \mathbf{B}_{\text{I}} \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} \quad (\text{B.5})$$

En utilisant les résultats (B.1), (B.2) et (B.3) [p. 109], on en déduit les dérivées particulières des invariants fondamentaux du tenseur de déformation \mathbf{B} en fonction de \mathbf{B} et \mathbf{D} :

$$\dot{B}_{\text{I}} = \mathbf{G} : \dot{\mathbf{B}} = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} \quad (\text{B.6})$$

$$\dot{B}_{\text{II}} = (\mathbf{B}_{\text{I}} \mathbf{G} - \mathbf{B}) : \dot{\mathbf{B}} = 2(\mathbf{B}_{\text{I}} \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{B}_{\text{III}} = (\mathbf{B}_{\text{II}} \mathbf{G} - \mathbf{B}_{\text{I}} \mathbf{B} + \mathbf{B}^2) : \dot{\mathbf{B}} = 2\mathbf{B}_{\text{III}} \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad (\text{B.8})$$

Méthode alternative – Il est possible d'obtenir ces résultats sans algèbre tensorielle, en écrivant les composantes de \mathbf{B} dans une base propre orthonormée de tenseur de déformation eulérien $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Par exemple, on obtient (B.6) de la manière suivante :

$$\dot{B}_{\text{I}} = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \cdot = 2 \left(\lambda_1^2 \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} + \lambda_2^2 \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} + \lambda_3^2 \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} \right) \quad \text{où } \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{v}_i = d_{l_i} \quad [\text{éq. (5.4) p. 82}]$$

On obtient le résultat en remarquant que :

$$2 \left(\lambda_1^2 \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} + \lambda_2^2 \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} + \lambda_3^2 \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} \right) = 2 \operatorname{tr} \left(\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} \end{bmatrix}^\top \right) = 2\mathbf{B} : \mathbf{D}$$

On laisse le soin au lecteur de procéder de la même manière pour les dérivées particulières des autres invariants.

⁽³⁾ Sa formule de changement d'observateur est : $\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}_t^\top + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t$ [éq. (5.38) p. 94]

⁽⁴⁾ On utilise les propriétés du produit combiné des tenseurs du second ordre : $\mathbf{A} : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = (\mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}) : \mathbf{C}$. Dans la dernière égalité de (B.5), on utilise l'identité de Cayley-Hamilton : $\mathbf{T}^3 - T_{\text{I}} \mathbf{T}^2 + T_{\text{II}} \mathbf{T} - T_{\text{III}} \mathbf{G} = \mathbf{0}$.

B.3 Tenseur de déformation eulérien $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$

De l'équation (B.4) [p. 110], il vient :

$$\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^2 \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) \quad (\text{B.9})$$

Remarque B.2 – La dérivée particulière $\dot{\mathbf{V}}$ est solution de cette équation tensorielle ⁽⁵⁾, mais il n'est pas nécessaire de la connaître pour calculer les dérivées particulières des invariants de \mathbf{V} .

Avec un peu de calcul algébrique ⁽⁶⁾, on déduit de l'équation (B.9) que :

$$\mathbf{V}^{n+1} : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^{n+2} : \mathbf{D}$$

et donc en particulier ⁽⁷⁾ pour $n = -1$, $n = 0$ et $n = 1$:

$$\mathbf{G} : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V} : \mathbf{D} \quad ; \quad \mathbf{V} : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^2 : \mathbf{D} \quad ; \quad \mathbf{V}^2 : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^3 : \mathbf{D} = (V_I \mathbf{V}^2 - V_{II} \mathbf{V} + V_{III} \mathbf{G}) : \mathbf{D}$$

En utilisant les résultats (B.1), (B.2) et (B.3) [p. 109], il vient :

$$\dot{V}_I = \mathbf{G} : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V} : \mathbf{D} \quad (\text{B.10})$$

$$\dot{V}_{II} = (V_I \mathbf{G} - \mathbf{V}) : \dot{\mathbf{V}} = (V_I \mathbf{V} - \mathbf{V}^2) : \mathbf{D} \quad (\text{B.11})$$

$$\dot{V}_{III} = (V_{II} \mathbf{G} - V_I \mathbf{V} + \mathbf{V}^2) : \dot{\mathbf{V}} = V_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad (\text{B.12})$$

Remarque B.3 – On peut obtenir ces résultats sans calcul tensoriel par une méthode alternative similaire à celle exposée page 110.

B.4 Tenseur de déformation eulérien $\mathbf{M} = \ln \mathbf{V}$

De l'équation (B.9) [p. 111], il vient :

$$\mathbf{e}^{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{e}^{\mathbf{M}}) \cdot + (\mathbf{e}^{\mathbf{M}}) \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{M}} = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}^{2\mathbf{M}} + \mathbf{e}^{2\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) \quad (\text{B.13})$$

Rappel – On rappelle que, par définition,

$$\mathbf{e}^{\mathbf{M}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!} = \mathbf{G} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{e}^{\mathbf{M}}) \cdot = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{M}^k) \cdot$$

où $(\mathbf{M}^k) \cdot$ est la somme de k termes qui ne se factorisent pas ⁽⁸⁾ :

$$(\mathbf{M}^k) \cdot = \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}^{k-1} + \mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}^{k-2} + \mathbf{M}^2 \cdot \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}^{k-3} + \dots + \mathbf{M}^{k-1} \cdot \dot{\mathbf{M}}$$

L'équation (B.13) est donc bien une équation en $\dot{\mathbf{M}}$, mais elle est compliquée ⁽⁹⁾.

⁽⁵⁾ On en connaît la solution : $\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \text{sym}(\mathbf{V}^2 \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W})) + \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{A}$, où \mathbf{A} est le tenseur antisymétrique suivant : $\mathbf{A} = -\mathbf{H} \cdot \left((\mathbf{H} : (\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{H}))^{-1} \cdot (\mathbf{H} : (\mathbf{V}^{-1} \cdot \text{sym}(\mathbf{V}^2 \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W})))) \right)$

⁽⁶⁾ En calculant le produit scalaire (\mathbf{V}^n : équation(B.9))

⁽⁷⁾ On peut prendre $n = -1$ car \mathbf{V} est symétrique défini positif et donc inversible.

⁽⁸⁾ La dérivée particulière $\dot{\mathbf{M}}$ ne commute pas avec \mathbf{M} , ni avec ses puissances entières, car elle n'a pas de base propre commune avec \mathbf{M}^p .

⁽⁹⁾ Contrairement au cas précédent [note 5 p. 111], l'expression de $\dot{\mathbf{M}}$ en fonction de \mathbf{M} , \mathbf{D} et \mathbf{W} semble inaccessible. Comme précédemment, on peut heureusement s'en passer pour évaluer les produits scalaires $\mathbf{M}^n : \dot{\mathbf{M}}$.

Soit \mathbf{S} un tenseur symétrique ayant une base propre commune avec \mathbf{M} . De l'équation (B.13) on déduit :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : (\mathbf{e}^{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{e}^{\mathbf{M}})') + \mathbf{S} : ((\mathbf{e}^{\mathbf{M}})' \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{M}}) &= \mathbf{S} : ((\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{e}^{2\mathbf{M}}) + \mathbf{S} : (\mathbf{e}^{2\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W})) \\ 2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{M}})' : (\mathbf{e}^{\mathbf{M}})' &= 2(\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}^{2\mathbf{M}})' : \mathbf{D} \\ (\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}) : \dot{\mathbf{V}} &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^2)' : \mathbf{D}, \quad \forall \mathbf{S} \text{ commutant avec } \mathbf{M} \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

D'autre part, si \mathbf{S} est un tenseur symétrique ayant une base propre commune avec \mathbf{M} , le produit contracté double $\mathbf{S} : (\mathbf{M}^k)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : (\mathbf{M}^k)' &= \mathbf{S} : (\dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) + \mathbf{S} : (\mathbf{M} \cdot \dot{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{M}^{k-2}) + \dots + \mathbf{S} : (\mathbf{M}^{k-1} \cdot \dot{\mathbf{M}}) \\ &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) : \dot{\mathbf{M}} + (\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) : \dot{\mathbf{M}} + \dots + (\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) : \dot{\mathbf{M}} \quad (\mathbf{S} \text{ et } \mathbf{M}^{k-1} \text{ commutent}) \\ &= k(\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) : \dot{\mathbf{M}} \end{aligned}$$

Or $\dot{\mathbf{V}} = (\mathbf{e}^{\mathbf{M}})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{M}^k)'$; on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{V}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{S} : (\mathbf{M}^k)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^{k-1}) : \dot{\mathbf{M}} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{M}^p) : \dot{\mathbf{M}} = \left(\mathbf{S} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^p}{p!} \right) : \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{S} \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{M}}) : \dot{\mathbf{M}} \\ \mathbf{S} : \dot{\mathbf{V}} &= (\mathbf{S} \cdot \mathbf{V}) : \dot{\mathbf{M}}, \quad \forall \mathbf{S} \text{ commutant avec } \mathbf{M} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Les deux relations (B.14) et (B.15) nous permettent d'évaluer les produits scalaires $\mathbf{G} : \dot{\mathbf{M}}$, $\mathbf{M} : \dot{\mathbf{M}}$ et $\mathbf{M}^2 : \dot{\mathbf{M}}$ en fonction de \mathbf{D} comme suit :

- la relation (B.15) avec $\mathbf{S} = \mathbf{V}^{-1}$ conduit à : $\mathbf{G} : \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{V}^{-1} : \dot{\mathbf{V}}$
la relation (B.14) avec $\mathbf{S} = \mathbf{V}^{-2}$ conduit à : $\mathbf{V}^{-1} : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{G} : \mathbf{D}$
On a donc : $\mathbf{G} : \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{G} : \mathbf{D}$
- la relation (B.15) avec $\mathbf{S} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}^{-1}$ conduit à : $\mathbf{M} : \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{V}^{-1}) : \dot{\mathbf{V}}$
la relation (B.14) avec $\mathbf{S} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{V}^{-2}$ conduit à : $(\mathbf{M} \cdot \mathbf{V}^{-1}) : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M} : \mathbf{D}$
On a donc : $\mathbf{M} : \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} : \mathbf{D}$
- la relation (B.15) avec $\mathbf{S} = \mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{V}^{-1}$ conduit à : $\mathbf{M}^2 : \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{V}^{-1}) : \dot{\mathbf{V}}$
la relation (B.14) avec $\mathbf{S} = \mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{V}^{-2}$ conduit à : $(\mathbf{M}^2 \cdot \mathbf{V}^{-1}) : \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{M}^2 : \mathbf{D}$
On a donc : $\mathbf{M}^2 : \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M}^2 : \mathbf{D}$

En utilisant les résultats (B.1), (B.2) et (B.3) [p. 109], il vient :

$$\dot{\mathbf{M}}_{\text{I}} = \mathbf{G} : \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad (\text{B.16})$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{\text{II}} = (\mathbf{M}_{\text{I}} \mathbf{G} - \mathbf{M}) : \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}_{\text{I}} \mathbf{G} - \mathbf{M}) : \mathbf{D} \quad (\text{B.17})$$

$$\dot{\mathbf{M}}_{\text{III}} = (\mathbf{M}_{\text{II}} \mathbf{G} - \mathbf{M}_{\text{I}} \mathbf{M} + \mathbf{M}^2) : \dot{\mathbf{M}} = (\mathbf{M}_{\text{II}} \mathbf{G} - \mathbf{M}_{\text{I}} \mathbf{M} + \mathbf{M}^2) : \mathbf{D} \quad (\text{B.18})$$

Remarque B.4 – On peut obtenir ces résultats sans calcul tensoriel par un méthode alternative similaire à celle exposée page 110.

B.5 Tenseurs de déformation lagrangiens

Le tenseur de déformation $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$ est non objectif [section 4.15.3 page 76]. Sa dérivée particulière est :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{C}} &= \dot{\mathbf{F}}^\top \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \cdot \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{F}^\top \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \dot{\mathbf{F}}^\top) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \cdot (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \cdot \mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^\top \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^\top \cdot (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{F} \\ &= 2\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} = 2\mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \\ \dot{\mathbf{C}} &= 2\mathbf{C}^{\frac{1}{2}} \cdot (\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R}) \cdot \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Contrairement au tenseur de déformation eulérien \mathbf{B} , le calcul de la dérivée particulière du tenseur de déformation lagrangien \mathbf{C} requiert la connaissance de la rotation \mathbf{R} de la décomposition polaire $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$. Toutefois, il est inutile de recommencer les calculs pour trouver les dérivées particulières (objectives) des invariants des tenseurs lagrangiens car les invariants des tenseurs lagrangiens et eulériens sont les mêmes, et donc aussi leur dérivée particulière [éq. (3.17) p. 48]. Par exemple :

$$\dot{\mathbf{C}}_1 = \dot{\mathbf{B}}_1 = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} = 2 \underbrace{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^\top)}_{\mathcal{R}_R(\mathbf{C})} : \mathbf{D} = 2\mathbf{C} : \underbrace{(\mathbf{R}^\top \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{R})}_{\mathcal{R}_{R^\top}(\mathbf{D})}$$

Il en est de même pour les autres invariants de \mathbf{C} ainsi que pour les invariants des autres tenseurs de déformation lagrangiens qui se correspondent. Comme on peut le constater, contrairement aux tenseurs de déformation eulériens, la dérivée particulière des invariants des tenseurs de déformation ne peut s'exprimer en fonction du tenseur de déformation lagrangien (non objectif) et de \mathbf{D} (objectif) que si l'on connaît en plus la rotation \mathbf{R} (non objective) de la décomposition polaire du gradient de la transformation \mathbf{F} .

