HAL
open science

Cinématique des milieux continus

Jean Garrigues

To cite this version:

Jean Garrigues. Cinématique des milieux continus. École d'ingénieur. Cinématique des milieux continus (déformations finies), Marseille, France. 2016, pp.116. cel-00681766v4

HAL Id: cel-00681766

https://cel.hal.science/cel-00681766v4

Submitted on 7 Apr 2016 (v4), last revised 2 Nov 2022 (v5)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cinématique des milieux continus

Jean Garrigues

(version du 7 avril 2016)

CENTRALE
MARSEILLE

Avant-propos

L'objectif de ce cours est d'introduire les outils nécessaires à la description du mouvement, de la déformation et de la vitesse de déformation d'un milieu continu déformable au sens le plus général du terme, c'est-à-dire en pratique les solides déformables, les liquides et les gaz. Tous les concepts introduits dans ce cours sont valables pour l'un quelconque de ces milieux continus.

Les développements qui suivent se placent résolument dans le cadre de la physique classique (non relativiste et non quantique). Nous admettrons donc que
- l'espace dans lequel les mouvements de milieux continus se produisent est de dimension trois,
- le temps et la distance actuelle entre deux particules sont des grandeurs scalaires communes à tous les observateurs du mouvement.

Contrairement à la plupart des cours traditionnels, les déformations présentées dans ce cours sont sans aucune concession géométrique ou cinématique. Les déformations ne sont ni « petites » ni « grandes », elles sont tout simplement finies, et les mouvements envisageables ne sont pas restreints. Les petites déformations n'apparaîtront donc que comme un cas particulier.

La lecture de ce cours suppose une maîtrise suffisante de l'algèbre et de l'analyse tensorielles [1] : en effet, toutes les grandeurs physiques relatives aux milieux continus déformables sont représentées par des champs de tenseurs d'ordre 0 ou plus.

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :
- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple : a, μ) ;
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple : $\boldsymbol{v}$) ;
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple : $\boldsymbol{T}$) ;
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = \left[m_{ij}\right]$$

- la transposition est notée avec un $^\top$ en exposant (exemple : $\boldsymbol{T}^\top$) ;
- les ensembles d'entités mathématiques sont en majuscules doublées, en particulier :
  $\mathbb{R}$ est l'espace des réels,
  $\mathbb{V}_3$ est un espace vectoriel de dimension 3,
  $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$ est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p construis sur $\mathbb{V}_3$ (de dimension 3^p),
  $\mathbb{Q}_{3+}$ est le groupe des rotations ($\mathbb{Q}_{3+} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$) ;
- le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{V}_3$ est noté « $\wedge$ » ;
- Le tenseur métrique est noté $\boldsymbol{G}$;
- Le tenseur d'orientation est noté $\boldsymbol{H}$.

[1] L'auteur propose un autre cours intitulé *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* : `http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00679923`, ou bien `http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tenseurs.html`.

Remerciements

Je tiens à remercier très vivement Mathias LEGRAND [2], ce grand magicien de LaTeX, sans qui la mise en page de ce texte ne serait que celle par défaut de la classe `book` [3] et qui m'a aussi donné de précieux conseils sur la typographie française.

Je remercie aussi vivement mon ancien collègue et néanmoins toujours ami Thierry DÉSOYER [4] pour les discussions parfois vives mais le plus souvent fructueuses qu'il a bien voulu m'accorder, ainsi que pour le temps qu'il a bien voulu passer à la relecture de ce texte.

Bonne lecture.

Information – Ce texte est rédigé en vue d'une lecture dynamique à l'écran : toutes les références internes et externes sont actives et conduisent à la cible référencée (dans la plupart des visualisateurs de fichiers au format pdf, on revient à l'état précédent avec la combinaison de touches <alt><page arrière>). Néanmoins, les références de pages ont été conservées pour la lecture du document imprimé.

[2] De l'université McGill, de Montréal.
[3] Ceux qui écrivent en LaTeX me comprendront.
[4] De l'École Centrale Marseille (ECM) et du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) à Marseille.

Table des matières

1 Concepts fondamentaux 9

1.1 Modèle continu de la matière 9

Milieu matériel continu, 9 • Particule, 10 • Champ matériel, 10.

1.2 Mouvement par rapport à un observateur 11

Observateur, 11 • Espace vectoriel de calcul, 12 • Vecteur position, 12 • Mouvement, 13.

1.3 Universalité et objectivité 14

Universalité d'une relation, 14 • Objectivité d'une grandeur physique, 14.

1.4 Tenseur de changement d'observateur 15

Biparticule, 16 • Tenseur de changement d'observateur, 16 • Correspondances avec la cinématique traditionnelle, 18.

1.5 En bref... 20

2 Description des champs et du mouvement 21

2.1 Descriptions des champs matériels 21

Description de Lagrange, 21 • Description d'Euler, 21.

2.2 Descriptions du mouvement 22

Transformation entre deux instants, 22 • Description de Lagrange, 23 • Description d'Euler, 23.

2.3 Équivalence des descriptions 23

Équivalence des descriptions de champs matériels, 23 • Équivalence des descriptions du mouvement, 24 • Comparaison des descriptions, 25.

2.4 Champ des déplacements 26

2.5 Opérateurs différentiels lagrangiens et eulériens 26

Rappels d'analyse tensorielle, 26 • Gradients lagrangien et eulérien, 27 • Gradient de la transformation, 28 • Relation entre gradient lagrangien et gradient eulérien, 29 • Autres opérateurs lagrangiens et eulériens, 29.

2.6 Dérivée particulaire d'un champ matériel 30

Description de Lagrange, 30 • Description d'Euler, 31.

2.7 Champ des accélérations 31

2.8 Outils d'analyse du mouvement 32

Trajectoire, 32 • Ligne de courant, 33 • Ligne d'émission, 34 • Débits, 35.

2.9 Mouvement stationnaire 36

2.10 Changements d'observateur 36

2.11 En bref... 37

3 Objectivité 39

3.1 Objectivité des grandeurs scalaires 40

3.2 Objectivité des grandeurs vectorielles 40

3.3 Objectivité des grandeurs tensorielles du second ordre 41

3.4 Objectivité des grandeurs tensorielles d'ordre p 43

3.5 Exemples de changement d'observateur 43

Gradient de la transformation, 43 • Opérateurs eulériens sur des champs objectifs, 44 • Opérateurs eulériens sur des champs non objectifs, 45 • Opérateurs lagrangiens sur des champs objectifs, 45 • Opérateurs lagrangiens sur des champs non objectifs, 46 • Dérivée particulaire d'un champ objectif, 46.

3.6 En bref 47

4 Déformation 49

4.1 Introduction 49

4.2 Direction matérielle 50

Chemin matériel, 50 • Direction matérielle, 50 • Changement d'observateur, 51.

4.3 Dilatation linéique 52

Définition, 52 • Changement d'observateur, 54.

4.4 Quelques tenseurs de déformation 54

Définitions, 54 • Changements d'observateur, 55 • Relations entre tenseurs de déformation objectifs et non objectifs, 56 • Propriétés spectrales, 57.

4.5 Dilatation volumique 59

Définition, 59 • Changement d'observateur, 60.

4.6 Dilatation surfacique 60

Facette matérielle, 60 • Changement d'observateur, 61 • Dilatation surfacique, 62 • Changement d'observateur, 63.

4.7 Distorsion stérique 63

Définition, 63 • Changement d'observateur, 64.

4.8 Distorsion angulaire 65

Définition, 65 • Changement d'observateur, 66.

4.9 Déviation d'une direction matérielle 66

4.10 Décomposition des déformations 67

Déformation sphérique, 67 • Déformation isovolume, 68 • Décomposition des déformations, 68.

4.11 Petites déformations 70

Définition, 70 • Dilatation linéique, 71 • Dilatation volumique, 72 • Dilatation surfacique, 72 • Distorsion stérique, 73 • Distorsion angulaire, 73 • Déviation, 73.

4.12 Petites « perturbations » 74

Utilisation du champ de déplacement, 74 • Tenseur des petites « perturbations », 75 • Relations avec les tenseurs de déformation, 76 • Formules simplifiées, 76 • Changement d'observateur, 78.

4.13 En bref... 78

5 Vitesse de déformation 81

5.1 Introduction 81

5.2 Taux de dilatation linéique 81
Point de vue eulérien, 81 • Point de vue lagrangien, 83 • Changements d'observateur, 84.

5.3 Taux de dilatation volumique 85
Point de vue eulérien, 85 • Point de vue lagrangien, 86 • Changement d'observateur, 86.

5.4 Taux de dilatation surfacique 86
Point de vue eulérien, 86 • Point de vue lagrangien, 87 • Changement d'observateur, 88.

5.5 Taux de distorsion stérique 88
Point de vue lagrangien, 88 • Point de vue eulérien, 89 • Changements d'observateur, 90.

5.6 Taux de distorsion angulaire 90
Point de vue lagrangien, 90 • Point de vue eulérien, 91 • Changements d'observateur, 91.

5.7 Vitesse de rotation d'une direction matérielle 92
Point de vue eulérien, 92 • Point de vue lagrangien, 93 • Changements d'observateur, 94.

5.8 Tenseur tourbillon 94

5.9 En bref... 97

6 Synthèse 99

A Dilatations et distorsions maximales 101

A.1 Dilatations linéiques extrémales 101

A.2 Distorsion angulaire maximale 103
Recherche de la distorsion angulaire maximale, 103 • Recherche des couples de directions de distorsion angulaire maximale, 105.

A.3 Distorsion stérique maximale 106
Recherche de la distorsion stérique maximale, 107 • Recherche des trièdres des directions de distorsion stérique maximale, 109.

B Dérivées particulaires utiles 111

B.1 Rappels 111

B.2 Tenseurs de déformation objectifs 112
Tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$, 112 • Tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$, 113 • Tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$, 113.

B.3 Tenseurs de déformation non objectifs 115

1

Concepts fondamentaux

Avant d'aborder les chapitres traitant de la cinématique des milieux continus proprement dite, on définit dans ce chapitre le concept de *milieu continu* puis on précise un certain nombre de concepts fondamentaux sur lesquels s'appuie la cinématique dans le cadre de la *physique classique*. On supposera donc que l'espace dans lequel les milieux matériels évoluent, est mathématiquement représentable par un espace affine de points, de dimension 3, noté $\mathscr{E}_3$, muni de la distance euclidienne.

1.1 Modèle continu de la matière

1.1.1 Milieu matériel continu

- **Définition 1.1 – Milieu continu.** Soit $\mathscr{D}$ un domaine volumique de $\mathscr{E}_3$. On dit que le domaine $\mathscr{D}$ est rempli d'un milieu matériel continu si, à tout instant t et en chaque point M du domaine, on peut définir des grandeurs physiques relatives à ce milieu matériel.

  Les grandeurs physiques d'un milieu continu sont donc décrites par des *champs* (distribution spatiale) variables avec le temps. En mécanique des milieux continus, les grandeurs physiques peuvent être mathématiquement représentées par :
  – des champs scalaires (masse volumique, température, pression, etc) ;
  – des champs vectoriels (vitesse, accélération, etc) ;
  – des champs tensoriels (déformations, contraintes, etc).

  Remarque – Les lecteurs qui connaissent la mécanique des solides indéformables ont déjà pratiqué la mécanique sur des milieux continus : ils ont considéré des champs scalaires (masse volumique, énergie cinétique massique) et des champs vectoriels (vitesses, accélérations) définis en tout point du domaine $\mathscr{D}$ occupé par le solide. Les solides indéformables sont des cas particuliers de milieux continus.

  Une vision continue de la matière (il existe quelquechose de matériel en tout point géométrique M d'un domaine $\mathscr{D}$) est assurément une *idéalisation*. Nos connaissances en physique atomique sont en flagrante contradiction avec cette affirmation : en un point géométrique M et à un intant t choisis arbitrairement, il n'y a qu'une très faible probabilité d'y trouver un corpuscule (atome, noyau, électron, ...) et bon nombre de grandeurs physiques macroscopiques perdent leur sens à cette échelle d'observation.

  Exemples – Des grandeurs macroscopiques telles que la pression, la température ou la vitesse, qui semblent naturellement descriptibles par des champs mathématiques $p(M,t)$, $T(M,t)$ ou $\boldsymbol{v}(M,t)$, perdent de leur sens au niveau microscopique : la probabilité est grande pour qu'il n'y ait que du vide au point M et à l'instant t, auquel on ne peut associer aucune de ces grandeurs physiques.

Le modèle continu de la matière présente néanmoins une grande utilité pratique car les vérifications expérimentales des prédictions de ce modèle se font macroscopiquement : lorsque l'on veut vérifier une pression, une température ou une vitesse prédite par la théorie en un point et à un instant donnés, on effectue une mesure avec un *appareil macroscopique* dont le « point de mesure » est en fait un petit volume contenant un très grand nombre de corpuscules. La mesure effectuée est donc une moyenne statistique, sur un petit volume de mesure et sur un petit intervalle de temps, des interactions des corpuscules microscopiques avec la zone sensible de l'appareil de mesure [(1)].

La mécanique des milieux continus, ignorant délibérément la structure corpusculaire de la matière, ne peut fournir aucun renseignement sur les mouvements individuels des corpuscules microscopiques qui la constituent.

Remarque – Les prédictions d'un modèle continu de la matière ne sont pas fiables si le volume du « point de mesure » ne contient pas suffisamment de corpuscules pour que la moyenne mesurée soit statistiquement significative. Par exemple, dans les hautes couches de l'atmosphère terrestre, le libre parcours moyen des corpuscules est de l'ordre du mètre. Si l'on veut que les prédictions d'un modèle continu de la matière dans cette région corroborent correctement des mesures, il faudrait un instrument dont le « point de mesure » ait un volume d'au moins 1 km^3 !

1.1.2 Particule en mécanique des milieux continus

- **Définition 1.2 – Point et particule.** L'espace $\mathscr{E}_3$ est constitué de *points géométriques* (concept mathématique). Un milieu matériel continu est constitué de *points matériels* que l'on appellera particules. À un instant t, chaque particule P du milieu continu coïncide avec un point géométrique M de $\mathscr{E}_3$.

Par définition, *les particules sont donc des entités matérielles de volume nul.*

Vocabulaire – Dans des contextes autres que la mécanique des milieux continus, le mot « particule » est employé pour désigner des objets de volume non nul, comme des grains de poussière, des molécules, des atomes, etc. Dans ce cours, pour éviter toute ambigüité, on désignera ces objets de petit volume par le mot « corpuscule ».

Remarque – Beaucoup d'auteurs tiennent à attribuer aux particules de la mécanique des milieux continus un « petit volume » quelquefois aussi appelé « volume élémentaire représentatif », dont la taille n'est jamais clairement définie et à l'intérieur desquels on suppose parfois de plus que les grandeurs physiques sont uniformes. Ces considérations, censées être une aide pédagogique, paraissent nuisibles à l'auteur : elles empêchent de définir correctement des concepts mathématiques tels que des gradients ou des limites. La suite du cours montre qu'il n'est pas nécessaire de considérer des « petits volumes » pour développer la théorie des milieux continus.

1.1.3 Champ matériel

- **Définition 1.3 – Champ matériel.** Soit $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}_3$ un domaine contenant un milieu continu, de particule générique P, et soit $\boldsymbol{\Psi}$ une grandeur physique macroscopique (scalaire, vectorielle ou tensorielle). On appelle champ matériel toute application définie par :

$$\{P,t\} \in \mathscr{D} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\boldsymbol{\Psi}} \boldsymbol{\Psi}(P,t) \in \mathbb{V}^{\otimes p} \quad \text{où } \mathbb{V}^{\otimes p} \text{ est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre } p.$$

(1) On rappelle qu'une mole de gaz parfait (22,4 litres dans les conditions normales de pression et de température) contient $6,02\,10^{23}$ molécules. Combien y a-t-il de molécules dans un « point de mesure » de 1 mm^3 ?

Un champ matériel est la description de la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ pour toute particule et à tout instant.

- **Hypothèse 1.4 – Différentiabilité des champs.** En mécanique des milieux continus, on suppose que les champs matériels sont à tout instant t différentiables presque partout sur $\mathscr{D}$.

  Précision – Le sens de la locution « presque partout » est celui que l'on définit dans la théorie de la mesure : une propriété est vraie presque partout dans un domaine $\mathscr{D}$ si l'ensemble des points de $\mathscr{D}$ où la propriété est fausse est de volume nul. On admet donc la possibilité d'existence de points isolés, de lignes et de surfaces où les champs ne sont pas différentiables. On n'exclut donc pas *a priori* l'existence de phénomènes physiques tels que la cavitation, la fissuration ou les ondes de choc. À strictement parler, les champs matériels sont donc des distributions, et les intégrales qui seront écrites dans la suite sont à prendre au sens de Lebesgue.

  Dans une première lecture, on peut ignorer cette extension en supposant que les champs sont partout différentiables et que les intégrales sont au sens classique de Riemann. En mécanique des milieux continus, on peut traiter les discontinuités simples en considérant des domaines différentiables par morceaux, avec des conditions de raccord aux frontières entre les morceaux.

On peut considérer l'hypothèse 1.4 comme un axiome de la mécanique des milieux continus. Elle permet l'existence d'un gradient de la grandeur physique $\boldsymbol{\Psi}$, ainsi que l'existence de tous les opérateurs différentiels qui en découlent (divergence, rotationnel, laplacien), à chaque instant et en (presque) tout point de $\mathscr{D}$.

1.2 Mouvement par rapport à un observateur

1.2.1 Observateurs en physique classique

La notion d'*observateur*, appelé aussi *référentiel* ou encore *solide de référence* [2], est normalement définie dans les cours de mécanique générale. On en rappelle ici la définition :

- **Définition 1.5 – Observateur.** On appelle observateur (ou référentiel ou solide de référence) un ensemble de trois points $\{A,B,C\}$ non colinéaires *dont les distances sont constantes dans le temps*, sur lesquels on a construit, par un procédé quelconque, un *repère* cartésien orthonormé direct.

  Remarques – Les trois points à distance constante $\{A,B,C\}$ forment un « solide de référence » ; le repère cartésien orthonormé construit sur ces trois points est un « référentiel » ; le tout est un « observateur ». Il existe une infinité de manières pour contruire un repère orthonormé direct $\{O,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$ à partir de 3 points $\{A,B,C\}$; on en donne quelques exemples :

  1. Les trois vecteurs liés [3] $\{\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$ unitaires, othogonaux et d'origine A définis par :

  $$\boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{AB}}{\|\boldsymbol{AB}\|} \quad ; \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{w}_1 \wedge \boldsymbol{AC}}{\|\boldsymbol{w}_1 \wedge \boldsymbol{AC}\|} \quad ; \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_1 \wedge \boldsymbol{w}_2$$

  définissent un repère orthonormé direct $\{A,\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\boldsymbol{w}_3\}$.

[2] Il n'y a aucune différence conceptuelle entre ces trois dénominations. Les termes *référentiel* et *solide de référence* sont plutôt employés dans les cours français de mécanique générale. Le mot *observateur* a été remis à la mode dans la seconde moitié du XXe siècle par des mécaniciens américains (TRUESDEL, NOLL, COLEMAN et autres), se revendiquant de la « mécanique rationnelle ». L'auteur a choisi d'utiliser le mot « observateur » en raison de sa connotation anthropomorphe : il lui semble que l'on imagine mieux les différences dans l'observation d'un mouvement lorsque l'on parle d'un changement d'observateur plutôt que d'un changement de référentiel.

[3] C'est à dire des bipoints ordonnés. Plus loin, on les notera $\{A,B\}$.

2. Les trois vecteurs liés $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ unitaires, orthogonaux et d'origine A définis par :

$$\boldsymbol{u}_{AB} = \frac{\boldsymbol{AB}}{\|\boldsymbol{AB}\|} \quad ; \quad \boldsymbol{u}_{AC} = \frac{\boldsymbol{AC}}{\|\boldsymbol{AC}\|} \quad ; \quad \boldsymbol{w}_1 = \frac{\boldsymbol{u}_{AB} + \boldsymbol{u}_{AC}}{\|\boldsymbol{u}_{AB} + \boldsymbol{u}_{AC}\|} \quad ; \quad \boldsymbol{w}_2 = \frac{\boldsymbol{u}_{AB} - \boldsymbol{u}_{AC}}{\|\boldsymbol{u}_{AB} - \boldsymbol{u}_{AC}\|} \quad ; \quad \boldsymbol{w}_3 = \boldsymbol{w}_1 \wedge \boldsymbol{w}_2$$

définissent un repère orthonormé direct $\{A, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$.
3. On prend comme origine le centre de gravité du triangle ABC et on construit un repère orthonormé direct $\{G, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$ sur les directions principales d'inertie du triangle ABC (on sait de la géométrie que l'on peut toujours trouver trois directions principales d'inertie orthogonales).

Un observateur $\mathscr{R}$ étant choisi, on peut associer à tout point M de $\mathscr{E}_3$, par projection orthogonale sur son repère cartésien orthonormé direct $\{O, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3\}$, le triplet de coordonnées cartésiennes orthonormées $\{\alpha_M^1, \alpha_M^2, \alpha_M^3\} \in \mathbb{R}^3$. Cette association est une bijection :

$$\{M \in \mathscr{E}_3, \mathscr{R}\} \leftrightarrow \{\alpha_M^1, \alpha_M^2, \alpha_M^3\} \in \mathbb{R}^3 \tag{1.1}$$

Vocabulaire – Ces trois nombres réels sont habituellement appelés l'abscisse, l'ordonnée et la cote du point M pour l'observateur $\mathscr{R}$.

Soit un autre observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ défini par les trois points à distance constante $\{\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}\}$ sur lesquels on a construit, par un procédé quelconque, son repère orthonormé direct $\{\widetilde{O}, \widetilde{\boldsymbol{w}}_1, \widetilde{\boldsymbol{w}}_2, \widetilde{\boldsymbol{w}}_3\}$ qui permet d'associer bijectivement à tout point M de $\mathscr{E}_3$ le triplet de coordonnées $\{\widetilde{\alpha}_M^1, \widetilde{\alpha}_M^2, \widetilde{\alpha}_M^3\}$:

$$\{M \in \mathscr{E}_3, \widetilde{\mathscr{R}}\} \leftrightarrow \{\widetilde{\alpha}_M^1, \widetilde{\alpha}_M^2, \widetilde{\alpha}_M^3\} \in \mathbb{R}^3 \tag{1.2}$$

Chaque observateur associe donc à un même point M (ou à la particule qui s'y trouve) son propre triplet de réels. En général, on a l'inégalité : $\{\alpha_M^1, \alpha_M^2, \alpha_M^3\} \neq \{\widetilde{\alpha}_M^1, \widetilde{\alpha}_M^2, \widetilde{\alpha}_M^3\}$

1.2.2 Espace vectoriel de calcul

La représentation des points M de $\mathscr{E}_3$ par un triplet de réels propre à chaque observateur n'est pas la représentation la plus commode. En effet, il est difficile d'établir des comparaisons ou des relations entre les représentations d'objets (géométriques ou matériels) issues de deux observateurs différents. Pour pallier cet inconvénient, on définit une autre bijection :

- **Définition 1.6 – Espace de calcul.** On appelle espace vectoriel de calcul, noté $\mathbb{V}_3$ un espace vectoriel mathématique de dimension 3 dans lequel on se donne une base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$.

À tout triplet de réels $\{x^1, x^2, x^3\}$ on peut alors associer bijectivement un vecteur $\boldsymbol{v}$ de $\mathbb{V}_3$:

$$\{x^1, x^2, x^3\} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \boldsymbol{v} = x^1 \boldsymbol{e}_1 + x^2 \boldsymbol{e}_2 + x^3 \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{V}_3 \tag{1.3}$$

L'espace vectoriel de calcul $\mathbb{V}_3$ est un espace de vecteurs (dits « libres », aucune origine n'est associée aux éléments de $\mathbb{V}_3$).

1.2.3 Vecteur position d'un point pour un observateur

Soit un observateur $\mathscr{R}$. En combinant les bijections (1.1) et (1.3), on construit la bijection suivante :

$$\{M \in \mathscr{E}_3, \mathscr{R}\} \leftrightarrow \{\alpha_M^1, \alpha_M^2, \alpha_M^3\} \in \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \boldsymbol{x}_M = \alpha_M^1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_M^2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_M^3 \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{V}_3$$

On peut alors poser la définition suivante :

- **Définition 1.7 – Vecteur position.** On appelle vecteur position du point M (ou de la particule P qui s'y trouve) *pour l'observateur* $\mathscr{R}$, le vecteur $\boldsymbol{x}_M \in \mathbb{V}_3$ défini par la bijection :

$$\{M \in \mathscr{E}_3\,, \mathscr{R}\} \leftrightarrow \boldsymbol{x}_M = \alpha_M^1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_M^2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_M^3 \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{V}_3$$

En appliquant cette définition avec un autre observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$, le vecteur position du même point M pour l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est un autre vecteur $\widetilde{\boldsymbol{x}}_M$ de $\mathbb{V}_3$:

$$\{M \in \mathscr{E}_3\,, \widetilde{\mathscr{R}}\} \leftrightarrow \widetilde{\boldsymbol{x}}_M = \widetilde{\alpha}_M^1 \boldsymbol{e}_1 + \widetilde{\alpha}_M^2 \boldsymbol{e}_2 + \widetilde{\alpha}_M^3 \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{V}_3 \tag{1.4}$$

Les vecteurs position $\boldsymbol{x}_M$ et $\widetilde{\boldsymbol{x}}_M$, attribués *au même point* M respectivement par deux observateurs $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$, sont en général des *vecteurs différents* de $\mathbb{V}_3$ car leur triplet de composantes sur la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$ de $\mathbb{V}_3$ est en général différent.

Cette méthode d'identification d'un point de $\mathscr{E}_3$ par son vecteur position *pour un observateur* $\mathscr{R}$, présente l'avantage de ne pas avoir à se soucier de systèmes de coordonnées. Quel que soit le point et quel que soit l'observateur, les vecteurs position sont des éléments de l'espace vectoriel de calcul $\mathbb{V}_3$, dans lequel on dispose de tous les outils de l'algèbre et de l'analyse.

Pour alléger le langage, le vecteur position d'un point M (ou de la particule P qui s'y trouve) pour un observateur $\mathscr{R}$ sera simplement appelé « position de M (ou de P) pour l'observateur $\mathscr{R}$ » (il est sous-entendu que les positions de particules sont des vecteurs de $\mathbb{V}_3$).

1.2.4 Mouvement par rapport à un observateur

- **Définition 1.8 – Mouvement d'une particule.** On dit qu'une particule P est en mouvement *par rapport à un observateur* $\mathscr{R}$ si sa position pour cet observateur est fonction du temps.

En particulier, un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est dit en mouvement par rapport à l'observateur $\mathscr{R}$ si au moins l'un des points $\{\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}\}$ définissant l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$, est en mouvement pour l'observateur $\mathscr{R}$. Dans ce cas, on dit que l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est en mouvement par rapport à l'observateur $\mathscr{R}$ (on dit aussi que les deux observateurs sont en mouvement relatif).

- **Définition 1.9 – Position actuelle.** La position d'une particule P pour un observateur $\mathscr{R}$ à un instant t est appelée position actuelle de la particule P pour l'observateur $\mathscr{R}$.

Dans la suite, on aura parfois besoin de choisir [4] un instant particulier t_0 qui sera appelé *instant de référence*. On pose donc la définition suivante :

- **Définition 1.10 – Position de référence.** La position d'une particule P pour un observateur $\mathscr{R}$ à l'instant de référence t_0 est appelée position de référence de la particule P pour l'observateur $\mathscr{R}$.

- **Notations 1.11 –** Dans la suite du cours, on utilisera les notations suivantes :
  - la position actuelle d'une particule P pour un observateur $\mathscr{R}$ est notée $\boldsymbol{x}_t^P$,
  - la position de référence d'une particule P pour un observateur $\mathscr{R}$ est notée $\boldsymbol{x}_0^P$,
  - la position actuelle d'une particule P pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est notée $\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^P$,
  - la position de référence d'une particule P pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est notée $\widetilde{\boldsymbol{x}}_0^P$

[4] Les motivations de ce choix seront précisées plus loin.

L'indice $_t$ rappelle que, contrairement aux positions de référence, les positions actuelles sont *a priori* fonction du temps. D'autre part, lorque la particule P est générique, l'indice supérieur ^{P} pourra être omis.

- **Définition 1.12 – Vitesse actuelle d'une particule.** On appelle vitesse actuelle d'une particule P *pour un observateur* $\mathscr{R}$, la dérivée temporelle de sa position actuelle pour cet observateur.

Avec les notations 1.11 [p. 13], les vitesses d'une particule P s'écrivent :
– pour un observateur $\mathscr{R}$: $\boldsymbol{v}(P,t) = \frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_t^P \in \mathbb{V}_3$
– pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$: $\widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t) = \frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^P \in \mathbb{V}_3$
Les vitesses $\boldsymbol{v}(P,t)$ et $\widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t)$ d'une même particule P pour deux observateurs $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ sont généralement des vecteurs de $\mathbb{V}_3$ différents.

Lors de l'étude du mouvement d'un milieu matériel, toute liberté est laissée au scientifique ou à l'ingénieur qui fait cette étude, dans le choix d'un observateur. *Le choix d'un observateur est arbitraire*. En cinématique, il n'y a aucune raison de privilégier un observateur plutôt qu'un autre [(5)]. Dire qu'une particule est en mouvement (ou fixe) sans préciser l'observateur utilisé pour observer ce mouvement, n'a aucun sens.

1.3 Universalité et objectivité

1.3.1 Universalité d'une relation

- **Définition 1.13 – Universalité d'une relation.** On dit qu'une relation est universelle si elle est identique pour tous les observateurs.

L'universalité est une propriété attribuable à une relation. En particulier, toute définition d'une grandeur physique se doit d'être une relation universelle.

Exemples – Quelques définitions qui sont donc des relations universelles :
– La définition de la distance actuelle entre deux particules P et P' est : $d(P,P',t) = \|\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^P\|$. Cette définition est universelle ; pour un autre observateur, la définition s'écrit : $\widetilde{d}(P,P',t) = \|\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P'} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^P\|$.
– La définition de la vitesse actuelle d'une particule est : $\boldsymbol{v}(P,t) = \frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}_t^P$. Cette relation est universelle ; pour un autre observateur, la définition s'écrit : $\widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t) = \frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^P$.
– La définition de l'énergie cinétique actuelle d'un point matériel P de masse m est : $e_c = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}(P,t)^2$. Cette définition est universelle ; pour un autre observateur, la définition s'écrit : $\widetilde{e}_c = \frac{1}{2}\widetilde{m}\widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t)^2$.
– La loi de comportement d'un matériau doit être une relation universelle : on ne conçoit pas que le comportement d'un matériau puisse varier suivant l'observateur utilisé pour l'observer [(6)] ; si $\boldsymbol{\sigma}$ est un tenseur des contraintes et $\boldsymbol{X}$ un tenseur de déformation :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{f}(\widetilde{\boldsymbol{X}}) \qquad \text{avec la même fonction } \boldsymbol{f}.$$

1.3.2 Objectivité d'une grandeur physique

- **Définition 1.14 – Objectivité d'une grandeur physique scalaire.** On dit qu'une grandeur physique *scalaire* est objective si elle a la même valeur actuelle pour tous les observateurs.

(5) Mais on peut être motivé, afin de simplifier des calculs, de choisir un observateur pour lequel un maximum d'entités sont fixes (par exemple une frontière ou une partie de frontière du domaine d'étude $\mathscr{D} \subset \mathscr{E}_3$).
(6) L'universalité des lois de comportement est souvent appelée « principe de l'indifférence matérielle ».

L'objectivité est une propriété attribuable à une grandeur physique scalaire (l'objectivité de grandeurs physiques non scalaires sera définie au chapitre 3 [p. 39]). Certaines grandeurs physiques scalaires sont objectives, d'autres ne le sont pas.

Exemples – En physique classique,
- le temps est une grandeur scalaire objective par principe ; il est supposé identique pour tous les observateurs [7] : $\widetilde{t} = t$;
- la masse d'un objet matériel est une grandeur scalaire objective par principe ; elle est supposée identique pour tous les observateurs : $\widetilde{m} = m$;
- la distance actuelle entre deux particules est une grandeur salaire objective par principe ; elle est supposée identique pour tous les observateurs : $d(P,P',t) = \widetilde{d}(P,P',t)$ (ici, on a utilisé $\widetilde{t} = t$).

En revanche, l'énergie cinétique actuelle d'un point matériel P de masse m n'est pas une grandeur scalaire objective. Sa définition universelle est le scalaire :

$$e_c(P,t) = \frac{1}{2}\, m(P)\, \boldsymbol{v}(P,t)^2$$

L'application de cette définition universelle pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ conduit au scalaire :

$$\widetilde{e}_c(P,\widetilde{t}) = \frac{1}{2}\, \widetilde{m}(P)\, \widetilde{\boldsymbol{v}}(P,\widetilde{t})^2 = \frac{1}{2}\, m(P)\, \widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t)^2 \quad (\text{car } \widetilde{m}(P) = m(P) \text{ et } \widetilde{t} = t)$$

En général on a donc $e_c(P,t) \neq \widetilde{e}_c(P,t)$ car en général $\boldsymbol{v}(P,t)^2 \neq \widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t)^2$.

Pour deux observateurs quelconques en mouvement relatif quelconque, les valeurs actuelles de l'énergie cinétique d'un point matériel sont des scalaires généralement différents. Parler de l'énergie cinétique d'un objet matériel sans préciser l'observateur utilisé n'a donc aucun sens.

Confusion courante – Dans la littérature spécialisée, on constate souvent un certain flou dans l'emploi du qualificatif « objectif » : ou bien il n'est tout simplement pas défini [8], ou bien il qualifie des grandeurs physiques, ou bien il qualifie des relations. La confusion entre l'universalité de relations et l'objectivité de grandeurs physiques est à l'origine de bien des incompréhensions et des malentendus.

1.4 Tenseur de changement d'observateur

Puisque l'on peut utiliser des observateurs arbitrairement choisis pour décrire les mouvements de milieux continus, il est utile de se demander si des relations existent entre les grandeurs attribuées par chaque observateur à un même objet matériel.

Le choix des observateurs étant arbitraire, il n'existe *a priori* aucune relation « intéressante » entre les positions $\boldsymbol{x}_t^P$ et $\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^P$ d'une même particule P pour deux observateurs $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ [9] car la différence entre les deux vecteurs position de la même particule P dépend du choix arbitraire des observateurs [déf. 1.7 p. 13].

Toutefois, on va montrer qu'une relation existe entre les positions attribuées par des observateurs différents à des objets matériels appelés biparticules. Cette relation est une conséquence de l'objectivité de la distance actuelle entre deux particules ; elle permettra d'affirmer l'existence d'un tenseur orthogonal appelé tenseur de changement d'observateur.

[7] Autrement dit : « tous les observateurs utilisent la même horloge ».
[8] Et on lui fait alors dire ce que l'on veut suivant les circonstances.
[9] En mécanique générale, on sait toutefois écrire cette relation si l'on connaît la position relative actuelle des deux observateurs.

1.4.1 Biparticule

- **Définition 1.15 – Biparticule.** On appelle biparticule, un ensemble ordonné de deux particules, noté $\{P,P'\}$. La particule P est appelée origine de la biparticule, la particule P' est appelée extrémité de la biparticule.

- **Définition 1.16 – Position actuelle d'une biparticule.** On appelle position actuelle d'une biparticule pour un observateur $\mathscr{R}$, la différence entre la position actuelle de l'extrémité et la position actuelle de l'origine pour cet observateur.

  En utilisant les notations 1.11 [p. 13], les positions d'une biparticule $\{P,P'\}$ sont :
  – pour un observateur $\mathscr{R}$, la position actuelle de la biparticule est le vecteur : $\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P} \in \mathbb{V}_3$,
  – pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$, la position actuelle de la biparticule est le vecteur : $\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P'} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P} \in \mathbb{V}_3$.

  Attention ! – Une biparticule est parfois appelée « vecteur matériel ». Cette appellation est dangereuse car une biparticule n'est pas un élément d'espace vectoriel. Seul le vecteur position de la biparticule *pour un certain observateur* est un élément de $\mathbb{V}_3$. La locution « considérons le vecteur $\boldsymbol{PP'}$ » n'a pas de sens vectoriel si l'on omet de préciser l'observateur utilisé car chaque observateur associe à la biparticule $\{P,P'\}$ un vecteur position de $\mathbb{V}_3$ en général différent [10]. Ce malencontreux raccourci de langage est à l'origine de bien des malentendus voire des erreurs.

- **Définition 1.17 – Distance actuelle entre deux particules.** On appelle distance actuelle entre deux particules la longueur actuelle de la biparticule $\{P,P'\}$ (ou celle de $\{P',P\}$) :

$$d(P,P',t) = d(P',P,t) = \|\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P}\|$$

1.4.2 Existence du tenseur de changement d'observateur

Bien que ce soit non exprimé explicitement dans la définition 1.17, la distance actuelle entre deux particules est apparemment différente d'un observateur à l'autre puisqu'elle est définie à partir de positions qui sont propres à chaque observateur. Un principe de la physique classique permet d'affirmer qu'elles ne le sont pas :

- **Principe 1.18 – Objectivité des distances.** La distance actuelle entre deux particules est une grandeur scalaire objective (elle est la même pour tous les observateurs, [déf. 1.14 p. 14]) :

$$\forall t\ \forall P\ \forall P'\ \forall \mathscr{R}\ \forall \widetilde{\mathscr{R}}, \quad d(P,P',t) = \widetilde{d}(P,P',t)$$

  On en déduit que si $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ sont deux observateurs quelconques, alors :

$$\forall t\ \forall P\ \forall P'\ \forall \mathscr{R}\ \forall \widetilde{\mathscr{R}}, \quad \|\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P}\| = \|\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P'} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P}\| \tag{1.5}$$

  Remarque – Le principe de l'objectivité des distances n'est valable que dans le cadre de ce qu'il est convenu d'appeler la « physique classique ». Ce principe est contredit en mécanique relativiste : un observateur constate une contraction de certaines dimensions d'un objet en mouvement par rapport lui. En mécanique relativiste, on remet aussi en question l'objectivité du temps et celle de la masse [exemples p. 15]. Tant que les vitesses envisagées en mécanique des milieux continus restent négligeables devant la vitesse de la lumière, les principes d'objectivité du temps, de la masse et des distances restent valables.

[10] On verra dans suite que ces deux vecteurs généralement différents ont néanmoins le même module.

■ **Théorème 1.19 – Tenseur de changement d'observateur.** Soient deux observateurs $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ *a priori* en mouvement relatif quelconque. Si la distance actuelle entre deux particules est une grandeur objective, alors il existe un tenseur orthogonal appelé tenseur de changement d'observateur actuel de $\mathscr{R}$ à $\widetilde{\mathscr{R}}$, noté $\boldsymbol{Q}_{\mathscr{R}\widetilde{\mathscr{R}}}(t)$, tel que :

$$\forall t,\ \forall P,\ \forall P', \quad \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P'} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P} = \boldsymbol{Q}_{\mathscr{R}\widetilde{\mathscr{R}}}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P}) \tag{1.6}$$

Démonstration – Considérons quatre particules A, B, C et D non coplanaires. On note :
– $\boldsymbol{p}^{AB} = \boldsymbol{x}_t^B - \boldsymbol{x}_t^A \in \mathbb{V}_3$ la position actuelle de la biparticule $\{A,B\}$ pour l'observateur $\mathscr{R}$,
– $\widetilde{\boldsymbol{p}}^{AB} = \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^B - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^A \in \mathbb{V}_3$ la position actuelle de la même biparticule $\{A,B\}$ pour l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$.
Chaque observateur représente les quatre biparticules $\{AB\}$, $\{AC\}$ et $\{AD\}$ dans $\mathbb{V}_3$ par son propre trièdre de vecteurs :
– pour l'observateur $\mathscr{R}$: $\mathscr{T} = \{\boldsymbol{p}^{AB}, \boldsymbol{p}^{AC}, \boldsymbol{p}^{AD}\}$
– pour l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$: $\widetilde{\mathscr{T}} = \{\widetilde{\boldsymbol{p}}^{AB}, \widetilde{\boldsymbol{p}}^{AC}, \widetilde{\boldsymbol{p}}^{AD}\}$
Les distances actuelles entre particules étant objectives, les deux trièdres ont les mêmes longueurs, les mêmes angles et les deux trièdres constituent des bases de $\mathbb{V}_3$ de même orientation [(11)]. Autrement dit, les deux trièdres $\mathscr{T}$ et $\widetilde{\mathscr{T}}$ sont superposables.

On sait de la géométrie algébrique dans $\mathbb{V}_3$ qu'il existe une rotation unique $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{Q}_{3+}$ telle que :

$$\widetilde{\boldsymbol{p}}^{AB} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{p}^{AB} \quad ; \quad \widetilde{\boldsymbol{p}}^{AC} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{p}^{AC} \quad ; \quad \widetilde{\boldsymbol{p}}^{AD} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{p}^{AD} \quad ; \quad \widetilde{\boldsymbol{p}}^{BC} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{p}^{BC} \quad ; \quad \cdots$$

En utilisant les trièdres $\mathscr{T}$ et $\widetilde{\mathscr{T}}$ construits avec les particules (A,B,C,D) comme bases dans $\mathbb{V}_3$, le lecteur vérifiera aisément que l'objectivité des distances actuelles implique que, quelle que soit la biparticule $\{M,N\}$, la rotation $\boldsymbol{Q}$ qui a été définie avec les quatre particules $\{A,B,C,D\}$ pour passer de $\mathscr{T}$ à $\widetilde{\mathscr{T}}$, permet de passer de la position actuelle de la biparticule $\{M,N\}$ pour l'observateur $\mathscr{R}$ à celle pour l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ par la relation :

$$\forall\{M,N\}, \quad \widetilde{\boldsymbol{p}}^{MN} = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{p}^{MN} \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall\{M,N\}, \quad \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^N - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^M = \boldsymbol{Q}\cdot(\boldsymbol{x}_t^N - \boldsymbol{x}_t^M)$$

La rotation actuelle $\boldsymbol{Q}$ qui permet de passer de la position actuelle de toute biparticule pour un observateur $\mathscr{R}$ à celle de la même biparticule pour l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est notée $\boldsymbol{Q}_{\mathscr{R}\widetilde{\mathscr{R}}}(t)$.

Le tenseur de changement d'observateur $\boldsymbol{Q}_{\mathscr{R}\widetilde{\mathscr{R}}}(t)$ est donc un endomorphisme orthogonal de l'espace vectoriel $\mathbb{V}_3$ qui permet d'écrire la relation entre la position actuelle de toute biparticule $\{P,P'\}$ pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ et la position actuelle de cette même biparticule pour l'observateur $\mathscr{R}$. L'équation (1.6) est la *formule de changement d'observateur* pour les positions de biparticules.

Commentaires – En cinématique élémentaire, on sait écrire la relation entres les positions actuelles $\boldsymbol{x}_t^P$ et $\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^P$ d'une particule P attribuées par deux observateurs $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ quelconques quand on connaît la position relative actuelle des deux observateurs [(12)]. Il en est de même pour la relation entre les vitesses d'une particule vues par deux observateurs (formule dite de « composition » des vitesses [(13)]). Afin de rassurer le lecteur et le convaincre que cette présentation tensorielle de la cinématique est non seulement équivalente mais algébriquement plus simple que la présentation classique, on donne en section 1.4.3 [p. 18] les relations entre le vecteur rotation ($\boldsymbol{\Omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}$) et le vecteur vitesse de rotation ($\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}$) introduits en cinématique élémentaire, avec le tenseur (orthogonal) de changement d'observateur $\boldsymbol{Q}_{\mathscr{R}\widetilde{\mathscr{R}}}(t)$ et sa dérivée temporelle.

(11) Car tous les observateurs construisent une base orthonormée directe [déf. 1.5 p. 11].

(12) C'est-à-dire le vecteur position de $\widetilde{O}$ pour l'observateur $\mathscr{R}$ et le « vecteur rotation » de $\widetilde{\mathscr{R}}$ par rapport à $\mathscr{R}$ (on peut aussi bien échanger les rôles de $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$).

(13) Cette formule requiert la connaissance de la vitesse de $\widetilde{O}$ pour l'observateur $\mathscr{R}$ ainsi que la vitesse de rotation de $\widetilde{\mathscr{R}}$ par rapport à $\mathscr{R}$ (ou les inverses).

Si l'on ne connaît pas le mouvement relatif des deux observateurs, la valeur actuelle du tenseur orthogonal $\boldsymbol{Q}_{\mathscr{R}\widetilde{\mathscr{R}}}(t)$ est certes inconnue, mais son orthogonalité est certaine ; *c'est cette seule qualité qui sera utilisée dans les démonstrations qui évoquent des changements d'observateur*.

- **Notation 1.20 –** Dans la suite, les deux observateurs $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ seront *a priori* quelconques et en mouvement relatif quelconque, le tenseur de changement d'observateur actuel $\boldsymbol{Q}_{\mathscr{R}\widetilde{\mathscr{R}}}(t)$ sera noté plus simplement $\boldsymbol{Q}_t$ (on conserve l'indice $_t$ pour rappeler qu'il s'agit d'une valeur actuelle).

- **Propriété 1.21 –** Les propriétés algébriques des rotations impliquent que :
  - les angles non orientés formés par les positions actuelles de trois particules sont les mêmes pour tous les observateurs : les angles actuels sont des grandeurs scalaires objectives ;
  - l'aire du triangle formé par les positions actuelles de trois particules est la même pour tous les observateurs : les aires actuelles sont des grandeurs scalaires objectives ;
  - le produit mixte formé par les positions actuelles de quatre particules est le même pour tous les observateurs : les volumes actuels sont des grandeurs scalaires objectives.

1.4.3 Correspondances avec la cinématique traditionnelle

Rappels d'algèbre sur les rotations – L'angle θ_t et l'axe $\boldsymbol{w}_t$ d'une rotation $\boldsymbol{Q}_t$ sont [14] :

$$\cos\theta_t = \frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{Q}_t - 1}{2} \quad \text{où} \quad \theta_t \in [0,\pi] \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{w}_t = -\frac{\boldsymbol{H}:\boldsymbol{Q}_t}{\sin\theta_t} = -\frac{\boldsymbol{H}:\boldsymbol{Q}_t}{\|\boldsymbol{H}:\boldsymbol{Q}_t\|} \tag{1.7}$$

La relation inverse $(\theta_t, \boldsymbol{w}_t) \to \boldsymbol{Q}_t$ est :

$$\boldsymbol{Q}_t = \cos\theta_t\,\boldsymbol{G} + (1-\cos\theta_t)\,\boldsymbol{w}_t \otimes \boldsymbol{w}_t - \sin\theta_t\,\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{w}_t \tag{1.8}$$

Il y a donc une bijection entre les rotations géométriques $(\theta_t, \boldsymbol{w}_t)$ et les tenseurs orthogonaux de déterminant 1. La rotation du vecteur $\boldsymbol{x}$ par la rotation d'angle θ_t autour de l'axe unitaire orienté $\boldsymbol{w}_t$ s'écrit simplement : $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{x}$.

En dérivant temporellement l'identité $\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{G}$ on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}_t = -\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t} = -\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}_t\Big)^\top \tag{1.9}$$

Les deux tenseurs $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}_t$ et $\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t}$ sont donc opposés et antisymétriques.

On note $\boldsymbol{\omega}_t$ le vecteur adjoint au tenseur antisymétrique $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}_t$:

$$\boldsymbol{\omega}_t = \frac{1}{2}\boldsymbol{H}:\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}_t\Big) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{\omega}_t$$

Il découle des propriétés des tenseurs antisymétriques que :

$$\Big(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{Q}_t\Big)\cdot\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{\omega}_t \wedge \boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_3 \tag{1.10}$$

Dans les cours de cinématique élémentaire, on n'introduit pas le tenseur de changement d'observateur, car la bijection entre un tenseur rotation et une rotation géométrique n'est pas supposée connue. La rotation $\boldsymbol{Q}_t$ y est donc définie comme une rotation géométrique d'axe unitaire $\boldsymbol{w}_t$ et d'angle $\theta_t \in [0;\pi]$. Le vecteur $\theta_t\boldsymbol{w}_t$, souvent noté $\boldsymbol{\Omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}$, est appelé *vecteur rotation de $\widetilde{\mathscr{R}}$ par rapport à $\mathscr{R}$* (valeur actuelle). La seule nouveauté ici est donc de représenter la rotation géométrique actuelle $(\theta_t, \boldsymbol{w}_t)$ par un tenseur de changement d'observateur orthogonal $\boldsymbol{Q}_t$ de

[14] Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

déterminant $+1$, qui se prête mieux au calcul tensoriel : le tourné $\boldsymbol{y}$ d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ par la rotation $(\theta_t, \boldsymbol{w}_t)$ s'écrit simplement : $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{x}$ [15]. Les relations d'équivalence entre le couple $(\theta_t, \boldsymbol{w}_t)$ et le tenseur rotation $\boldsymbol{Q}_t$ ont été rappelées dans les équations (1.7) et (1.8) [p. 18].

En appliquant la définition du tenseur de changement d'observateur, donnée en (1.6) [p. 17], à deux points $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ choisis parmi ceux qui définissent un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$, il vient :

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{\widetilde{B}} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{\widetilde{A}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t^{\widetilde{B}} - \boldsymbol{x}_t^{\widetilde{A}}) \tag{1.11}$$

Par définition, les points $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ sont fixes pour l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$, c'est-à-dire que leur vecteur position $\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{\widetilde{A}}$ et $\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{\widetilde{B}}$ sont des vecteurs de $\mathbb{V}_3$ temporellement constants :

$$\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{\widetilde{B}} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{\widetilde{A}} = \mathbf{0}$$

En dérivant par rapport au temps l'égalité (1.11), il vient :

$$\mathbf{0} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t} \cdot (\boldsymbol{x}_t^{\widetilde{B}} - \boldsymbol{x}_t^{\widetilde{A}}) + \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{v}_t^{\widetilde{B}} - \boldsymbol{v}_t^{\widetilde{A}}) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{v}_t^{\widetilde{B}} - \boldsymbol{v}_t^{\widetilde{A}} = -\left(\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t}\right) \cdot (\boldsymbol{x}_t^{\widetilde{B}} - \boldsymbol{x}_t^{\widetilde{A}}) \tag{1.12}$$

où le tenseur du second ordre $\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t}$ est antisymétrique [éq. (1.9) p. 18].

Si on note $\boldsymbol{\omega}_t = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} : (\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{Q}_t)$ le vecteur adjoint au tenseur antisymétrique $\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{Q}_t$, alors, en vertu de la relation (1.10) [p. 18], on a l'identité :

$$\left(\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t}\right) \cdot (\boldsymbol{x}_t^{\widetilde{B}} - \boldsymbol{x}_t^{\widetilde{A}}) = -\boldsymbol{\omega}_t \wedge (\boldsymbol{x}_t^{\widetilde{B}} - \boldsymbol{x}_t^{\widetilde{A}}) \qquad \text{[éq. (1.10) p. 18]}$$

L'équation (1.12) s'écrit alors :

$$\boldsymbol{v}_t^{\widetilde{B}} - \boldsymbol{v}_t^{\widetilde{A}} = \boldsymbol{\omega}_t \wedge (\boldsymbol{x}_t^{\widetilde{B}} - \boldsymbol{x}_t^{\widetilde{A}}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{v}_t^{\widetilde{B}} = \boldsymbol{v}_t^{\widetilde{A}} + \boldsymbol{\omega}_t \wedge (\boldsymbol{x}_t^{\widetilde{B}} - \boldsymbol{x}_t^{\widetilde{A}})$$

On reconnaît la formule habituellement donnée dans les cours de cinématique élémentaire pour décrire le champ des vitesses d'un solide (ici le solide est constitué des points à distance constante $(\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C})$ définissant l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$) où le vecteur $\boldsymbol{\omega}_t$, généralement noté $\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}$, est le vecteur *vitesse de rotation actuelle de l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ pour l'observateur $\mathscr{R}$* habituellement introduit en cinématique élémentaire. La relation entre $\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}$ et $\boldsymbol{Q}_t$ est donc :

$$\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}} = \boldsymbol{\omega}_t = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} : \left(\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t}\right) = \mathbf{adj}\left(\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t}\right)) = -\mathbf{adj}\left(\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{Q}_t\right) \tag{1.13}$$

La connaissance des valeurs actuelles du tenseur de changement d'observateur $\boldsymbol{Q}_t$ permet donc de retrouver la vitesse de rotation de $\widetilde{\mathscr{R}}$ par rapport à $\mathscr{R}$ introduite en cinématique élémentaire.

Changement d'observateur inverse – De l'équation (1.6) p. 17] il vient :

$$\boldsymbol{x}_t^B - \boldsymbol{x}_t^A = \boldsymbol{Q}_t^\top \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^B - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^A) \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont deux des points définissant l'observateur } \mathscr{R}.$$

En dérivant temporellement (les points A et B sont fixes pour l'observateur $\mathscr{R}$), il vient :

$$\mathbf{0} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t} \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^B - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^A) + \boldsymbol{Q}_t^\top \cdot (\widetilde{\boldsymbol{v}}^B - \widetilde{\boldsymbol{v}}^A) \qquad \Leftrightarrow \qquad \widetilde{\boldsymbol{v}}^B - \widetilde{\boldsymbol{v}}^A = -\left(\boldsymbol{Q}_t \cdot \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t}\right) \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^B - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^A)$$

[15] Dans les cours de cinématique élémentaire, pour calculer le tourné d'un vecteur $\boldsymbol{x}$ par la rotation géométrique $(\theta_t, \boldsymbol{w}_t)$, on est amené à construire une « matrice de rotation » construite avec θ_t et $\boldsymbol{w}_t$, ce qui revient à exprimer l'expression tensorielle intrinsèque $\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{x}$ dans une base contenant l'axe de rotation.

où le tenseur $\boldsymbol{Q}_t \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t}$ est antisymétrique de vecteur adjoint $\boldsymbol{\omega}'$. On a alors :

$$\widetilde{\boldsymbol{v}}^B - \widetilde{\boldsymbol{v}}^A = \boldsymbol{\omega}' \wedge (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^B - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^A) \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\boldsymbol{v}}^B = \widetilde{\boldsymbol{v}}^A + \boldsymbol{\omega}' \wedge (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^B - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^A)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\omega}'$ est donc le vecteur vitesse de rotation de $\mathscr{R}$ pour l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$:

$$\boldsymbol{\omega}' = \widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} = \mathbf{adj}\left(\boldsymbol{Q}_t \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t^\top}{\mathrm{d}t}\right) = -\mathbf{adj}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top\right) \tag{1.14}$$

Noter que les deux vecteurs $\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}} \in \mathbb{V}_3$ et $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} \in \mathbb{V}_3$ ne sont pas opposés, le premier étant défini par ses composantes dans le repère de l'observateur $\mathscr{R}$ et le second par ses composantes dans le repère de l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$.

En utilisant l'identité $(\boldsymbol{Q}_t \boxtimes \boldsymbol{Q}_t \boxtimes \boldsymbol{Q}_t)\overline{\otimes}^3 \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}$, on montre la relation entre $\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}}$ et $\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}$:

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{\mathscr{R}/\widetilde{\mathscr{R}}} = -\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}} = -\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}) \qquad \text{(rotation par } \boldsymbol{Q}_t \text{ de } \boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}) \tag{1.15}$$

1.5 En bref...

Le modèle *milieu continu* est une idéalisation de la matière. Ses prévisions ne peuvent corroborer que des vérifications macroscopiques.

Pour décrire le mouvement d'un milieu continu, il faut choisir un observateur.

Pour décrire des grandeurs associées à des particules à tout instant, on utilise des *champs matériels* scalaires, vectoriels ou tensoriels, (presque partout) différentiables et dérivables par rapport au temps.

Une relation est *universelle* si elle est la même pour tous les observateurs. Toute définition se doit d'être universelle.

Une grandeur physique scalaire est *objective* si sa valeur est la même pour tous les observateurs. L'objectivité des grandeurs physiques non scalaires sera définie au chapitre 3 [p. 39].

L'universalité de la définition des distances, ainsi que les principes d'objectivité du temps et de la distance entre deux particules, impliquent l'existence d'un tenseur de changement d'observateur actuel $\boldsymbol{Q}_{\mathscr{R}\widetilde{\mathscr{R}}}(t)$ plus simplement noté $\boldsymbol{Q}_t$ qui est une rotation (tenseur orthogonal de déterminant +1). Le tenseur de changement d'observateur est la représentation tensorielle équivalente au classique vecteur rotation d'un observateur par rapport à un autre défini en cinématique élémentaire.

2

Description des champs et du mouvement

Dans ce chapitre, on présente les deux méthodes couramment utilisées en mécanique des milieux continus pour identifier les particules : la méthode de Lagrange et la méthode d'Euler. Chacune de ces deux méthodes conduit à sa propre manière de décrire les champs matériels ainsi que le mouvement pour un observateur. On présente ensuite quelques outils (trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission, dérivée particulaire) qui aident à visualiser les mouvements d'un milieu continu et à appréhender les évolutions des grandeurs physiques liées aux particules.

2.1 Descriptions des champs matériels

2.1.1 Description de Lagrange d'un champ matériel

Soit t_0 un instant de référence un instant arbitrairement choisi.

Dans la description de Lagrange, les particules sont identifiées par leur position de référence, c'est-à-dire qu'on les désigne par la position $\boldsymbol{x}_0$ (pour un observateur $\mathscr{R}$) qu'elles occupent à l'instant de référence t_0.

- **Définition 2.1 – Description de Lagrange d'un champ matériel.** Soit un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ (scalaire, vectoriel ou tensoriel). Sa description de Lagrange est la fonction $\boldsymbol{\Psi}_L$ définie par :

$$(\boldsymbol{x}_0,t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\boldsymbol{\Psi}_L} \boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{\Psi}(P,t) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$$

où $\boldsymbol{x}_0$ est la position de référence de la particule P pour un observateur $\mathscr{R}$.

Le domaine de définition de la fonction $\boldsymbol{\Psi}_L$ est donc le domaine occupé par les particules à l'instant de référence t_0, mais la valeur du champ est sa valeur actuelle.

Vocabulaire – Quand on a choisi un quelconque système de coordonnées, l'argument vectoriel $\boldsymbol{x}_0$ de la fonction $\boldsymbol{\Psi}_L$, peut être remplacé par 3 réels (x_0^1, x_0^2, x_0^3) qui sont les coordonnées des points occupés par les particules à l'intant t_0. Dans ce cas, les quatre arguments réels (x_0^1, x_0^2, x_0^3, t) de la fonction $\boldsymbol{\Psi}_L$ sont appelés *variables de Lagrange*.

2.1.2 Description d'Euler d'un champ matériel

Dans la description d'Euler, les particules sont identifiées par leur position actuelle, c'est-à-dire qu'on les désigne par la position $\boldsymbol{x}_t$ (pour un observateur $\mathscr{R}$) qu'elles occupent à l'instant actuel t.

- **Définition 2.2 – Description d'Euler d'un champ matériel.** Soit un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ (scalaire, vectoriel ou tensoriel). Sa description d'Euler est la fonction $\boldsymbol{\Psi}_E$ définie par :

$$(\boldsymbol{x}_t, t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\boldsymbol{\Psi}_E} \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t) = \boldsymbol{\Psi}(P,t) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$$

où $\boldsymbol{x}_t$ est la position actuelle de la particule P pour l'observateur $\mathscr{R}$.

Le domaine de définition de la fonction $\boldsymbol{\Psi}_E$ est donc le domaine actuellement occupé par les particules et la valeur du champ est la valeur actuelle.

Vocabulaire – Quand on a choisi un quelconque système de coordonnées, l'argument vectoriel $\boldsymbol{x}_t$ de la fonction $\boldsymbol{\Psi}_E$ peut être remplacé par 3 réels (x_t^1, x_t^2, x_t^3) qui sont les coordonnées actuelles des points occupés par les particules. Dans ce cas, les quatre arguments réels (x_t^1, x_t^2, x_t^3, t) de la fonction $\boldsymbol{\Psi}_E$ sont appelés *variables d'Euler*.

2.2 Descriptions du mouvement

2.2.1 Transformation entre deux instants

- **Définition 2.3 – Transformation.** Soit un milieu continu en mouvement pour un certain observateur $\mathscr{R}$, et soit P l'une quelconque de ses particules. On note $\boldsymbol{x}_t$ et $\boldsymbol{x}_{t'}$ les positions, pour l'observateur $\mathscr{R}$, de la particule P aux instants t et t'. On appelle transformation entre les instants t et t' l'application $\boldsymbol{f}_{tt'} : \mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3$ qui à toute position d'une particule à l'instant t fait correspondre sa position à l'instant t' :

$$\boldsymbol{x}_t \in \mathbb{V}_3 \xrightarrow{\boldsymbol{f}_{tt'}} \boldsymbol{x}_{t'} = \boldsymbol{f}_{tt'}(\boldsymbol{x}_t) \in \mathbb{V}_3 \quad \text{(pour un observateur } \mathscr{R}\text{)} \tag{2.1}$$

- **Hypothèse 2.4 –** Dans un mouvement de milieu continu, on fait les hypothèses suivantes :
  1. toute particule dont la position à l'instant t est $\boldsymbol{x}_t$ a une position $\boldsymbol{x}_{t'}$ à l'instant t' ;
  2. deux particules distinctes P et Q dont les positions à l'instant t sont $\boldsymbol{x}_t^P \neq \boldsymbol{x}_t^Q$, ne peuvent occuper la même position à un autre instant t' (autrement dit, les $\boldsymbol{x}_{t'}$ n'ont qu'un seul antécédent dans la transformation $\boldsymbol{f}_{tt'}$).

Dans ces conditions, la fonction $\boldsymbol{f}_{tt'}$ est à la fois surjective et injective, donc bijective. La transformation inverse existe donc :

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{f}_{tt'}^{-1}(\boldsymbol{x}_{t'}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{f}_{tt'}^{-1} = \boldsymbol{f}_{t't} \tag{2.2}$$

Remarque – Dans un mouvement de milieu continu, il est envisageable que l'inversibilité de la transformation $\boldsymbol{f}_{tt'}$ ne soit vraie que presque partout [*Précision* p. 11]. Par exemple, si une cavitation se produit dans le mouvement entre les instants t et $t' > t$, il existe une particule de position $\boldsymbol{x}_t$ (le « germe » de la cavitation) qui a une infinité de positions à l'instant t' : ce sont tous les points de la surface délimitant la bulle de cavitation qui existe à l'instant t'. Dans le cas d'une fissuration, il existe toute une surface de positions $\boldsymbol{x}_t$ qui ont deux positions $\boldsymbol{x}_{t'}$: une sur chaque lèvre de la fissure ouverte.

Le lecteur établira aisément les deux propriétés :

$$\boldsymbol{f}_{tt} = \boldsymbol{I} \text{ (identité)} \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{f}_{tt''} = \boldsymbol{f}_{t't''} \circ \boldsymbol{f}_{tt'} \text{ (transitivité)}$$

2.2.2 Description de Lagrange du mouvement

- **Définition 2.5 – Description de Lagrange du mouvement.** On appelle description de Lagrange du mouvement pour un observateur $\mathscr{R}$, la description de Lagrange du champ matériel des positions actuelles $\boldsymbol{x}_t(P,t)$ pour cet observateur :

$$(\boldsymbol{x}_0,t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \;\rightarrow\; \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{x}_t \in \mathbb{V}_3 \quad \text{[notations 1.11 p. 13]} \tag{2.3}$$

où $\boldsymbol{x}_0$ est la position de référence d'une particule P et où $\boldsymbol{x}_t$ est sa position actuelle.

Décrire le mouvement par la méthode de Lagrange est donc donner la transformation entre les instants t_0 et t [déf. 2.3 p. 22].

Remarque – La notation $\boldsymbol{f}$, qui devrait être notée $\boldsymbol{f}_{t_0 t}$, est traditionnelle. Elle pourrait aussi bien être notée : $\boldsymbol{x}_{t\,L}$ (description de Lagrange des positions actuelles).

Équations développées – Quand on a choisi un système de coordonnées, la fonction vectorielle $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t)$ est à remplacer par la fonction vectorielle $\boldsymbol{f}(x_0^1,x_0^2,x_0^3,t)$ où x_0^1, x_0^2 et x_0^3 sont les coordonnées d'une particule à l'instant de référence t_0 (« variables de Lagrange »). Quand on a choisi une base $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$, la fonction vectorielle $\boldsymbol{f}$ est décrite par les trois fonctions réelles f^1, f^2 et f^3 suivantes :

$$\boldsymbol{f}(x_0^1,x_0^2,x_0^3,t) = f^1(x_0^1,x_0^2,x_0^3,t)\,\boldsymbol{e}_1 + f^2(x_0^1,x_0^2,x_0^3,t)\,\boldsymbol{e}_2 + f^3(x_0^1,x_0^2,x_0^3,t)\,\boldsymbol{e}_3 \tag{2.4}$$

2.2.3 Description d'Euler du mouvement

- **Définition 2.6 – Description d'Euler du mouvement.** On appelle description d'Euler du mouvement pour l'observateur $\mathscr{R}$, la description d'Euler du champ matériel des vitesses actuelles $\boldsymbol{v}(P,t)$ pour cet observateur :

$$(\boldsymbol{x}_t,t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} \;\xrightarrow{\boldsymbol{v}_E}\; \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t) = \boldsymbol{v}(P,t) \in \mathbb{V}_3 \tag{2.5}$$

où $\boldsymbol{x}_t$ est la position actuelle d'une particule P.

Illustration – On peut considérer la description d'Euler du mouvement comme la donnée de la collection des « photographies » du champ des vitesses à tous les instants.

Équations développées – Quand on a choisi un système de coordonnées, la fonction vectorielle $\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)$ est à remplacer par la fonction vectorielle $\boldsymbol{v}_E(x_t^1,x_t^2,x_t^3,t)$ où x_t^1, x_t^2 et x_t^3 sont les coordonnées actuelles d'une particule (« variables d'Euler »). Quand on a choisi une base $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$, le champ vectoriel $\boldsymbol{v}_E$ est décrit par les trois fonctions réelles v_E^1, v_E^2 et v_E^3 suivantes :

$$\boldsymbol{v}_E(x_t^1,x_t^2,x_t^3,t) = v_E^1(x_t^1,x_t^2,x_t^3,t)\,\boldsymbol{e}_1 + v_E^2(x_t^1,x_t^2,x_t^3,t)\,\boldsymbol{e}_2 + v_E^3(x_t^1,x_t^2,x_t^3,t)\,\boldsymbol{e}_3$$

2.3 Équivalence des descriptions

2.3.1 Équivalence des descriptions de champs matériels

Tout champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ peut être décrit aussi bien par la méthode de Lagrange que par la méthode d'Euler. Pour une particule P, de position de référence $\boldsymbol{x}_0$ et de position actuelle $\boldsymbol{x}_t$, on a les égalités :

$$\boldsymbol{\Psi}(P,t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t) \tag{2.6}$$

Les deux fonctions $\boldsymbol{\Psi}_L$ et $\boldsymbol{\Psi}_E$ sont deux applications différentes (leur domaine de définition est différent), mais leur valeur actuelle pour une particule est la même. La transformation $\boldsymbol{f}$ étant inversible, on passe d'une description à l'autre de la manière suivante :

– si le champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ est connu par sa description de Lagrange $\boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t)$, alors sa description d'Euler est :

$$\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_t,t),t) \tag{2.7}$$

– si le champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ est connu par sa description d'Euler $\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t)$, alors sa description de Lagrange est :

$$\boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t),t) \tag{2.8}$$

On voit donc qu'il suffit de connaître la description de Lagrange du mouvement $\boldsymbol{f}$ pour passer d'une description à l'autre d'un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}$.

2.3.2 Équivalence des descriptions du mouvement

La description de Lagrange du mouvement [déf. 2.5 p. 23] décrit les *positions actuelles* des particules alors que la description d'Euler du mouvement [déf 2.6 p. 23] décrit les *vitesses actuelles* des particules. La question se pose de savoir si elles sont équivalentes.

Passage de la description de Lagrange du mouvement à celle d'Euler

Supposons que l'on connaisse la description de Lagrange du mouvement $\boldsymbol{f}$ d'un milieu matériel continu. La position actuelle des particules est donnée par :

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t) \qquad \text{[déf. 2.5 p. 23]}$$

La vitesse d'une particule, identifiée ici par sa position de référence $\boldsymbol{x}_0$, est par définition la dérivée par rapport au temps de sa position actuelle :

$$\boldsymbol{v}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}_t}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t)}{\partial t} \qquad \text{(dérivée à particule constante, c'est-à-dire à } \boldsymbol{x}_0 \text{ constant)} \tag{2.9}$$

Le champ vectoriel $\boldsymbol{v}_L(\boldsymbol{x}_0,t)$ défini dans l'équation (2.9) est la description de Lagrange du champ des vitesses. On obtient la description d'Euler des vitesses, c'est-à-dire la description d'Euler du mouvement [déf. 2.6 p. 23], en utilisant l'équation (2.7) :

$$\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t) = \boldsymbol{v}_L(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_t,t),t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_t,t),t)}{\partial t} \tag{2.10}$$

Équations développées – La traduction de l'équation vectorielle (2.10) en un système de trois équations réelles portant sur des coordonnées dépend à la fois du système de coordonnées utilisé (signification géométrique des trois variables réelles de position actuelle) et de la base sur laquelle on projette cette égalité vectorielle en trois équations réelles.

Passage de la description d'Euler du mouvement à celle de Lagrange

Inversement, supposons que l'on connaisse la description d'Euler du mouvement $\boldsymbol{v}_E$ d'un milieu matériel continu :

$$\boldsymbol{v}(P,t) = \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t) \qquad \text{[éq. (2.5) p. 23]}$$

Trouver la description de Lagrange du mouvement, c'est trouver la description de Lagrange des positions actuelles $\boldsymbol{x}_t$ des particules, c'est-à-dire trouver la fonction $\boldsymbol{f}$ telle que $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t)$.

La description de Lagrange des vitesses est la vitesse de la particule identifiée par $\boldsymbol{x}_0$:

$$\boldsymbol{v}_L(\boldsymbol{x}_0, t) = \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t)}{\partial t} \qquad \text{[éq. (2.9) p. 24]} \tag{2.11}$$

D'après l'équation (2.8) [p. 24], elle est aussi :

$$\boldsymbol{v}_L(\boldsymbol{x}_0, t) = \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t, t) = \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t), t) \tag{2.12}$$

Des équations (2.11) et (2.12), on déduit que la fonction inconnue $\boldsymbol{f}$ est solution de l'équation différentielle vectorielle :

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t)}{\partial t} = \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t), t) \qquad \text{avec les conditions initiales : } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{2.13}$$

La solution de cette équation différentielle vectorielle en $\boldsymbol{f}$, satisfaisant les trois [(1)] conditions initiales est la description de Lagrange du mouvement.

Équations développées – La traduction de l'équation différentielle vectorielle (2.13) en un système de trois équations différentielles portant sur des coordonnées dépend à la fois du système de coordonnées utilisé (signification géométrique des trois variables réelles de position de référence) et de la base sur laquelle on projette cette équation vectorielle en trois équations réelles. Ces choix peuvent rendre la résolution de l'équation différentielle vectorielle en $\boldsymbol{f}$ plus ou moins aisée.

Les deux descriptions du mouvement sont donc équivalentes : à partir de l'une on peut trouver l'autre, et inversement.

2.3.3 Comparaison des deux méthodes de description

Les deux méthodes de description présentent chacune leurs commodités suivant le type de milieux continus que l'on étudie :

- Les mécaniciens spécialisés dans les solides déformables préfèrent souvent la description de Lagrange, car ils peuvent donner un sens physique à l'instant de référence t_0 (par exemple, un instant où le solide déformable n'a jamais été sollicité, il a sa forme « naturelle »). En outre, ils peuvent aisément matérialiser des particules en marquant des points sur le solide déformable dans sa position de référence. La description de Lagrange leur semble la plus naturelle pour suivre l'évolution des champs matériels dans un solide déformable au cours de sa déformation.
- Les mécaniciens spécialisés dans les fluides (liquides ou gaz) préfèrent généralement employer la description d'Euler car la position individuelle des particules à un instant arbitraire t_0 leur est de peu d'intérêt. Ils préfèrent donc la description d'Euler qui n'utilise pas de concept de position de référence. En outre, la description d'Euler donne directement les indications d'un instrument de mesure placé en un certain point d'observation de l'écoulement.

Exemple – Si l'on observe l'écoulement d'une rivière avec un capteur de vitesse situé en un point géométrique M fixe pour l'observateur utilisé, la fonction $\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_M, t)$ pour $\boldsymbol{x}_M$ fixé, est la vitesse à l'instant t de la particule dont la position actuelle est le point M. Si l'on regarde l'évolution de cette mesure au cours du temps, la fonction $\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_M, t)$ donne les vitesses des différentes particules qui passent au point d'observation fixe M.

[(1)] Les conditions initiales de l'équation (2.13) sont une égalité vectorielle.

La différence essentielle entre les deux modes de description est que la description de Lagrange d'un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ décrit la distribution spatiale des valeurs actuelles de la grandeur physique $\boldsymbol{\Psi}$ sur des positions à un instant différent : l'instant de référence t_0 ; alors que la description d'Euler du même champ matériel décrit la distribution spatiale des valeurs actuelles de la grandeur physique $\boldsymbol{\Psi}$ sur les positions actuelles. On prête généralement une plus grande signification physique à cette dernière. Quoi qu'il en soit, les deux descriptions étant mathématiquement équivalentes, toute discussion supplémentaire ne serait qu'affaire de traditions ou d'habitudes.

2.4 Champ des déplacements

Cette méthode de description du mouvement n'est traditionnellement employée que par les mécaniciens des solides déformables. Dans la suite, elle ne sera évoquée qu'occasionnellement.

- **Définition 2.7 – Déplacement.** On appelle vecteur déplacement d'une particule P pour un observateur $\mathscr{R}$, la différence entre sa position actuelle et sa position de référence :

$$\boldsymbol{u}(P,t) = \boldsymbol{x}_t^P - \boldsymbol{x}_0^P \tag{2.14}$$

Comme tout champ matériel, le champ matériel $\boldsymbol{u}(P,t)$ peut être décrit par la méthode de Lagrange ou la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}_0,t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} &\xrightarrow{\boldsymbol{u}_L} \boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t) - \boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{V}_3 \\
(\boldsymbol{x}_t,t) \in \mathbb{V}_3 \times \mathbb{R} &\xrightarrow{\boldsymbol{u}_E} \boldsymbol{u}_E(\boldsymbol{x}_t,t) = \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_t,t) \in \mathbb{V}_3
\end{aligned}$$

La description du mouvement au moyen de la description de Lagrange du champ des déplacements $\boldsymbol{u}_L$ est évidemment équivalente à la description de Lagrange du mouvement $\boldsymbol{f}$. On passe de l'une à l'autre par :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0,t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t) - \boldsymbol{x}_0$$

2.5 Opérateurs différentiels lagrangiens et eulériens

2.5.1 Rappels d'analyse tensorielle

Soit un observateur $\mathscr{R}$. Pour cet observateur, les points de $\mathscr{E}_3$ sont représentés par un vecteur position $\boldsymbol{x}$ [déf. 1.7 p. 13]. Le gradient au point $\boldsymbol{x}$ d'un champ $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})$ d'ordre p pour cet observateur est l'application linéaire notée $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{\Psi}$ définie par :

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|\, \boldsymbol{\mathscr{O}}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \tag{2.15}$$

où $\boldsymbol{\mathscr{O}}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x})$ est une fonction quelconque (à valeur tensorielle d'ordre p) tendant vers $\mathbf{0} \in \mathbb{V}_3^{\otimes p}$ quand le point $\boldsymbol{x}'$ tend vers $\boldsymbol{x}$.

L'opérateur linéaire tangent $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{\Psi}$ est une application linéaire $\mathbb{V}_3 \to \mathbb{V}_3^{\otimes p}$ définie en chaque point $\boldsymbol{x}$ où la fonction $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})$ est différentiable. Les règles de l'algèbre tensorielle impliquent que si la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ est un champ de tenseurs d'ordre p, alors $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{\Psi}$ est un champ de tenseurs d'ordre $p+1$.

Soit un changement de point arbitraire $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}$. On peut toujours poser :

$$\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|\,\overline{\boldsymbol{u}} \quad \text{où } \overline{\boldsymbol{u}} = \frac{\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|} \text{ est un vecteur unitaire.}$$

Lorsque $\boldsymbol{x}' \to \boldsymbol{x}$ en suivant un certain chemin, le vecteur unitaire $\overline{\boldsymbol{u}}$ tend vers un vecteur unitaire $\boldsymbol{u}$.

- **Définition 2.8 – Dérivée directionnelle.** On appelle dérivée au point $\boldsymbol{x}$ de la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ *dans la direction unitaire* $\boldsymbol{u}$, la limite suivante :

$$\boldsymbol{\Psi}'_{\boldsymbol{u}} = \lim_{\frac{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}\|} \to \boldsymbol{u}} \frac{\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})}{\|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|}$$

L'équation (2.15) [p. 26] montre que cette limite est :

$$\boldsymbol{\Psi}'_{\boldsymbol{u}} = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{u}$$

Le tenseur $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{\Psi}$, d'ordre $p+1$, permet d'évaluer la dérivée de la grandeur tensorielle $\boldsymbol{\Psi}$ (d'ordre p) dans toutes les directions unitaires $\boldsymbol{u}$ autour du point $\boldsymbol{x}$.

Remarque – Parmi toutes les directions $\boldsymbol{u}$ autour du point $\boldsymbol{x}$, il existe en général des directions $\boldsymbol{u}$ pour lesquelles $\|\boldsymbol{\Psi}'_{\boldsymbol{u}}\|$ est extrémal et d'autres pour lesquelles $\|\boldsymbol{\Psi}'_{\boldsymbol{u}}\| = 0$.

2.5.2 Gradients lagrangien et eulérien

Soit un milieu continu en mouvement pour un observateur $\mathscr{R}$, sur lequel est défini un champ matériel [déf. 1.3 p. 10] $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ tensoriel d'ordre $p \geqslant 0$. On note $\boldsymbol{\Psi}_L$ sa description de Lagrange et $\boldsymbol{\Psi}_E$ sa description d'Euler. On rappelle que

$$\boldsymbol{\Psi}(P,t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t) \in \mathbb{V}_3^{\otimes p} \qquad \text{[éq. (2.6) p. 23]}$$

- **Définition 2.9 – Gradient lagrangien.** On appelle gradient lagrangien en $\boldsymbol{x}_0$ et à l'instant t du champ matériel $\boldsymbol{\Psi}$, noté $\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi}$, le gradient de sa description de Lagrange :

$$\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}(\boldsymbol{\Psi}_L)$$

- **Définition 2.10 – Gradient eulérien.** On appelle gradient eulérien en $\boldsymbol{x}_t$ et à l'instant t du champ matériel $\boldsymbol{\Psi}$, noté $\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{\Psi}$, le gradient de sa description d'Euler :

$$\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}(\boldsymbol{\Psi}_E)$$

Les deux gradients $\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi}$ et $\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{\Psi}$ sont des champs tensoriels d'ordre $p+1$ définis par :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}(P',t) - \boldsymbol{\Psi}(P,t) &= \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0) + \|\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0\|\,\mathscr{O}(\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0) \\ &= \mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t) + \|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|\,\mathscr{O}(\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t) \end{aligned} \tag{2.16}$$

Interprétations – Le gradient eulérien $(\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{x}_t,t)$ décrit les variations des valeurs actuelles du champ $\boldsymbol{\Psi}$ au voisinage des positions actuelles $\boldsymbol{x}_t$ (c'est une description d'Euler) ; alors que le gradient lagrangien $(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{x}_0,t)$ décrit les variations des mêmes valeurs actuelles du champ $\boldsymbol{\Psi}$, mais rapportées aux positions de référence, c'est-à-dire à des positions à un instant $\boldsymbol{t}_0$ différent de t (c'est une description de Lagrange). On prête généralement plus de sens physique au gradient eulérien d'un champ matériel. Le seul gradient lagrangien physiquement significatif est le gradient lagrangien des positions actuelles [section 2.5.3 p. 28] en raison de son utilité pour étudier la déformation (variation des distances entre particules) entre les instants t_0 et t.

- **Notation 2.11 –** Dans la suite du cours, on utilise fréquemment la notion de gradient qui a été rappelée en section 2.5.1 [p. 26] :

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) = (\mathbf{grad}\,\boldsymbol{\Psi})(\boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) + \|\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}\|\,\mathscr{O}(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) \qquad \text{[éq. (2.15) p. 26]}$$

Pour alléger les écritures, on écrira :

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}') - \boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad}\,\boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{x}) + \cdots$$

sans détailler les termes qui disparaissent lorsque $\boldsymbol{x}' \to \boldsymbol{x}$.

2.5.3 Gradient de la transformation

Considérons le champ matériel des positions actuelles $\boldsymbol{x}_t(P,t)$. Sa description de Lagrange est la description de Lagrange du mouvement [déf. 2.5 p. 23] :

$$\boldsymbol{x}_t^P = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0^P, t) \qquad \text{[notations 1.11 p. 13]} \tag{2.17}$$

- **Définition 2.12 – Gradient de la transformation.** On appelle gradient de la transformation entre l'instant de référence t_0 et l'instant actuel t, le gradient *lagrangien* du champ des positions actuelles.

Vocabulaire – Puisque le champ des positions actuelles $\boldsymbol{x}_t(P,t)$ est donné par la description de Lagrange du mouvement $\boldsymbol{f}$ [éq. (2.17)], qui n'est autre que la transformation entre les instants t_0 et t, ce gradient porte le nom traditionnel de *gradient de la transformation* bien que la notion de gradient ne soit définie que pour des champs. On devrait l'appeler gradient lagrangien des positions actuelles.

- **Notation 2.13 –** Le gradient de la transformation, qui devrait être naturellement noté $\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{x}_t$ ou $\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{f}$, est traditionnellement [(2)] noté $\boldsymbol{F}$.

On écrit donc :

$$\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t = \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{x}_t \cdot (\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0) + \cdots = \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0) + \cdots \qquad \text{[notations 2.13 et 2.11 p. 28]} \tag{2.18}$$

Les règles de l'algèbre tensorielle impliquent que le champ tensoriel $\boldsymbol{F}$ est du second ordre. Ce gradient est défini pour toute particule et à tout instant, c'est-à-dire que c'est un champ matériel [déf. 1.3 p. 10] tensoriel du second ordre, dont $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, t)$ est la description de Lagrange.

Interprétation cinématique – Comme tout gradient lagrangien, le gradient lagrangien des positions actuelles $\boldsymbol{F}$ décrit les variations des positions actuelles en fonction des écarts de positions de référence. C'est en analysant les changements de longueur d'une biparticule $\{P, P'\}$ en comparant sa position de référence $\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0$ et sa position actuelle $\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t$ dans l'équation (2.18) que l'on pourra définir au chapitre 4 [p. 49] ce qu'est une déformation entre les instants t_0 et t.

Remarque – Le gradient *eulérien* des positions actuelles $\boldsymbol{x}_t$ est à tout instant le tenseur métrique $\boldsymbol{G}$. En effet, par définition du gradient eulérien d'un champ, on a la relation :

$$\forall (\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t), \quad \boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t = \mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{x}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t) + \cdots \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{G} \tag{2.19}$$

[(2)] Bien que ne lui paraissant pas vraiment nécessaire, l'auteur se conforme à cette tradition universellement adoptée. Le lecteur devra garder à l'esprit que le tenseur $\boldsymbol{F}$ est le gradient lagrangien des positions actuelles.

- **Propriété 2.14 –** À l'instant $t = t_0$, la valeur du gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$ est le tenseur métrique $\boldsymbol{G}$.

  Démonstration – À l'instant de référence $t = t_0$, les positions des particules sont les positions de référence. On déduit de l'équation (2.18) [p. 28] qu'à l'instant t_0 on a l'égalité :

  $$\forall(\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0), \quad \boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, t_0) \cdot (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0) + \cdots \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, t_0) = \boldsymbol{G}$$

- **Théorème 2.15 –** Dans tout mouvement de milieu continu, en toute particule et à tout instant le déterminant du gradient de la transformation est strictement positif :

  $$\forall P \, \forall t, \quad \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, t) > 0 \tag{2.20}$$

  Démonstration – La transformation $\boldsymbol{f}$ étant inversible [éq. (2.2) p. 22], le déterminant de son gradient (appelé aussi jacobien de la transformation) n'est jamais nul : $\forall t \ \det \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0, t) \neq 0$. Il est donc de signe constant au cours du temps. Puisqu'à l'instant de référence t_0, ce gradient prend pour valeur le tenseur métrique $\boldsymbol{G}$ [prop. 2.14] dont le déterminant est $+1$, $\det \boldsymbol{F}$ reste donc toujours positif et $\boldsymbol{F}^{-1}$ existe.

On peut donc écrire :

$$\forall \{P, P'\}, \quad \boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0) + \cdots \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{F}^{-1} \cdot (\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t) + \cdots \tag{2.21}$$

où $\boldsymbol{F}^{-1}$ est le gradient eulérien des positions de référence.

2.5.4 Relation entre gradient lagrangien et gradient eulérien

Pour tout champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P, t)$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0) + \cdots &= \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t) + \cdots && \text{[éq. (2.16) p. 27]} \\
&= \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0) + \cdots) + \cdots && \text{[éq. (2.18) p. 28]} \\
\mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0) &= \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0) + \cdots, \quad \forall (\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0)
\end{aligned}$$

La relation entre les gradients lagrangien et eulérien d'un champ matériel tensoriel $\boldsymbol{\Psi}$ est donc :

$$\mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \tag{2.22}$$

En particulier, si le champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P, t)$ est le champ des vitesses $\boldsymbol{v}(P, t)$, il vient :

$$\mathbf{grad}_L \boldsymbol{v} = \mathbf{grad}_E \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{grad}_E \boldsymbol{v} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \tag{2.23}$$

2.5.5 Autres opérateurs différentiels lagrangiens et eulériens

Puisque l'on a défini un gradient lagrangien et un gradient eulérien pour décrire les variations locales d'un champ matériel, on définit par conséquent une version lagrangienne et une version eulérienne des opérateurs différentiels définis à partir du gradient [3] :

$$\mathbf{div}_L \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{G} \qquad \boldsymbol{\Delta}_L \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{div}_L \, \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} \qquad \mathbf{rot}_L \boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{H} \tag{2.24}$$

$$\mathbf{div}_E \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{G} \qquad \boldsymbol{\Delta}_E \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{div}_E \, \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \qquad \mathbf{rot}_E \boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{H} \tag{2.25}$$

où $\boldsymbol{G}$ est le tenseur métrique et $\boldsymbol{H}$ le tenseur d'orientation.

[3] On rappelle que $\mathbf{div}\boldsymbol{T} = \mathbf{grad}\boldsymbol{T} : \boldsymbol{G}$, $\mathbf{rot}\boldsymbol{T} = -\mathbf{grad}\boldsymbol{T} : \boldsymbol{H}$ et $\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{T} = \mathbf{div}\,\mathbf{grad}\boldsymbol{T}$.

On déduit de l'équation (2.22) des relations utiles entre opérateurs lagrangiens et eulériens :

$$\mathbf{div}_L \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{G} = (\mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F}) : \boldsymbol{G} = \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{F}^\top \tag{2.26}$$

$$\mathbf{div}_E \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{G} = (\mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) : \boldsymbol{G} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{F}^{-\top} \tag{2.27}$$

$$\mathbf{rot}_L \boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{H} = -(\mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F}) : \boldsymbol{H} = -\mathbf{asym}(\mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F}) : \boldsymbol{H} \tag{2.28}$$

$$\mathbf{rot}_E \boldsymbol{\Psi} = -\mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{H} = -(\mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) : \boldsymbol{H} = -\mathbf{asym}(\mathbf{grad}_L \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) : \boldsymbol{H} \tag{2.29}$$

2.6 Dérivée particulaire d'un champ matériel

- **Définition 2.16 – Dérivée particulaire.** Soit un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ défini sur un milieu continu en mouvement pour un observateur $\mathscr{R}$. On appelle dérivée particulaire du champ matériel $\boldsymbol{\Psi}$, notée $\dot{\boldsymbol{\Psi}}$, la dérivée temporelle de la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ à particule constante :

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}(P,t) = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}(P,t) = \lim_{t' \to t} \frac{\boldsymbol{\Psi}(P,t') - \boldsymbol{\Psi}(P,t)}{t' - t} \tag{2.30}$$

Vocabulaire – Dans certains ouvrages, la dérivée particulaire est appelée dérivée temporelle « quand on suit la particule dans son mouvement ».

La dérivée particulaire d'un champ matériel tensoriel d'ordre p est donc un champ matériel tensoriel du même ordre. Comme tout champ matériel, la dérivée particulaire peut être décrite par la méthode de Lagrange, aussi bien que par celle d'Euler.

2.6.1 Description de Lagrange de la dérivée particulaire d'un champ matériel

- **Théorème 2.17 – Description de Lagrange de la dérivée particulaire.** Soit $\boldsymbol{\Psi}_L$ la description de Lagrange d'un champ matériel. La description de Lagrange de sa dérivée particulaire est :

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t) \tag{2.31}$$

Démonstration – La dérivée particulaire est une dérivée temporelle à particule constante, c'est-à-dire à $\boldsymbol{x}_0$ constant. C'est donc la dérivée partielle par rapport au temps de sa description de Lagrange.

En particulier, si $\boldsymbol{\Psi}_L = \boldsymbol{F}$ on a le résultat suivant :

- **Théorème 2.18 –** La dérivée particulaire du gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$ est le gradient lagrangien du champ des vitesses actuelles :

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{v}$$

Démonstration – La dérivée particulaire du champ $\boldsymbol{F}$ est :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{F}} &= \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F} && \text{[éq. (2.31) avec } \boldsymbol{\Psi}_L = \boldsymbol{F}\text{]} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{grad}_L \boldsymbol{x}_t && \text{[déf. 2.13 p. 28]} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\big(\mathbf{grad}_L(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t))\big) && \text{[déf. 2.5 p. 23]} \\
&= \mathbf{grad}_L\Big(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t)\Big) \\
\dot{\boldsymbol{F}} &= \mathbf{grad}_L \boldsymbol{v} && \text{[déf. 2.9 p. 24]}
\end{aligned}$$

On peut donc récrire la relation entre le gradient lagrangien et le gradient eulérien du champ des vitesses [éq. (2.23) p. 29] de la manière suivante :

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \tag{2.32}$$

2.6.2 Description d'Euler de la dérivée particulaire d'un champ matériel

- **Théorème 2.19 – Description d'Euler de la dérivée particulaire.** Soit $\boldsymbol{\Psi}_E$ la description d'Euler d'un champ matériel et soit P une particule dont la position actuelle est $\boldsymbol{x}_t$. La description d'Euler de la dérivée particulaire du champ matériel $\boldsymbol{\Psi}$ est :

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E = \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{v}_E + \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Psi}_E \tag{2.33}$$

Démonstration – La position de la particule P à un instant t' est notée $\boldsymbol{x}_{t'}$. La valeur de la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ pour cette particule à l'instant t' est : $\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_{t'}, t')$. La variation de la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ pour la particule P entre les instants t et t' s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\Psi}(P,t') - \boldsymbol{\Psi}(P,t) = \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_{t'}, t') - \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t)$$

Par définition, la dérivée particulaire du champ $\boldsymbol{\Psi}$ est :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E &= \lim_{t' \to t} \frac{\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_{t'}, t') - \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t)}{t' - t} \qquad \text{[déf. 2.16 p. 30]} \\
&= \lim_{t' \to t} \frac{\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_{t'}, t') - \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t') + \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t') - \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t)}{t' - t} \\
&= \lim_{t' \to t} \frac{\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_{t'}, t') - \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t')}{t' - t} + \lim_{t' \to t} \frac{\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t') - \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t)}{t' - t} \\
&= \lim_{t' \to t} \frac{\mathbf{grad}\, \boldsymbol{\Psi}_E \cdot (\boldsymbol{x}_{t'} - \boldsymbol{x}_t) + \|\boldsymbol{x}_{t'} - \boldsymbol{x}_t\|\, \boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_{t'} - \boldsymbol{x}_t)}{t' - t} + \lim_{t' \to t} \frac{\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t') - \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t)}{t' - t} \\
&= \mathbf{grad}\, \boldsymbol{\Psi}_E \cdot \lim_{t' \to t} \frac{(\boldsymbol{x}_{t'} - \boldsymbol{x}_t)}{t' - t} + \lim_{t' \to t} \frac{\|\boldsymbol{x}_{t'} - \boldsymbol{x}_t\|\, \boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_{t'} - \boldsymbol{x}_t)}{t' - t} + \lim_{t' \to t} \frac{\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t') - \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t)}{t' - t} \\
\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E &= \mathbf{grad}\, \boldsymbol{\Psi}_E \cdot \boldsymbol{v}_E + \|\boldsymbol{v}_E\| \underbrace{\lim_{t' \to t} \boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{x}_{t'} - \boldsymbol{x}_t)}_{\mathbf{0}} + \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Psi}_E
\end{aligned}$$

Vocabulaire – Dans certains ouvrages de mécanique des fluides, la description d'Euler de la dérivée particulaire $\dot{\boldsymbol{\Psi}}_E$ est appelée « dérivée totale » de la fonction $\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t, t)$ (on considère son argument $\boldsymbol{x}_t$, comme une fonction du temps). Le terme $\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\Psi}_E$ est appelé « dérivée propre » et le terme $\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{v}_E$ est appelé « dérivée convective ».

Remarque – Si $\boldsymbol{\Psi}$ est le champ des positions actuelles ($\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{x}_t$), sa description d'Euler est évidemment $\boldsymbol{x}_{tE}(\boldsymbol{x}_t, t) = \boldsymbol{x}_t$. On a donc $\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{x}_{tE} = \mathbf{0}$. D'autre part, $\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{G}$ [éq. (2.19) p. 28]. L'équation (2.33) conduit à $\dot{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{v}_E$. La vitesse actuelle d'une particule est la dérivée particulaire de sa position actuelle.

2.7 Champ des accélérations

- **Définition 2.20 – Accélération.** Le champ des accélérations actuelles d'un milieu continu en mouvement pour un observateur $\mathscr{R}$ est la dérivée particulaire du champ des vitesses actuelles pour cet observateur.

Si le champ des vitesses actuelles est décrit par la méthode de Lagrange, en utilisant (2.31) [p. 30], on trouve la description de Lagrange du champ des accélérations actuelles :

$$\boldsymbol{\gamma}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_L(\boldsymbol{x}_0,t)}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{\partial}^2 \boldsymbol{f}}{\partial t^2} \tag{2.34}$$

Si le champ des vitesses actuelles est décrit par la méthode d'Euler, en utilisant (2.33) [p. 31], on trouve la description d'Euler du champ des accélérations actuelles :

$$\boldsymbol{\gamma}_E(\boldsymbol{x}_t,t) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}_E \tag{2.35}$$

Autre forme – En utilisant l'identité $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = \frac{1}{2}\,\mathbf{grad}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}) + (\mathbf{rot}\,\boldsymbol{u})\wedge\boldsymbol{u}\ \ \forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{V}_3$, on obtient une autre forme de la description d'Euler des accélérations :

$$\boldsymbol{\gamma}_E(\boldsymbol{x}_t,t) = \frac{\partial \boldsymbol{v}_E}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\mathbf{grad}_E(\boldsymbol{v}^2) + (\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v})\wedge\boldsymbol{v}_E \tag{2.36}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier, à titre d'exercice, que pour le champ des accélérations, on a bien les changement de description suivants [éq. 2.7 et 2.8 p. 24] :

$$\boldsymbol{\gamma}_E(\boldsymbol{x}_t,t) = \boldsymbol{\gamma}_L(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_t,t),t) \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\gamma}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{\gamma}_E(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t),t)$$

2.8 Outils d'analyse du mouvement

2.8.1 Trajectoire d'une particule

- **Définition 2.21 – Trajectoire d'une particule.** La trajectoire de la particule P pour un observateur $\mathscr{R}$ est l'ensemble des positions (pour cet observateur) occupées par la particule au cours du temps.

Rappel – On sait de la cinématique élémentaire, qu'à chaque instant, le vecteur vitesse actuelle d'une particule pour un observateur $\mathscr{R}$ est tangent à la trajectoire au point de sa position actuelle $\boldsymbol{x}_t$.

Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange, la description de Lagrange du mouvement donne directement la trajectoire. En effet, l'équation vectorielle $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t)$ pour $\boldsymbol{x}_0$ donné et pour $t \in \,]-\infty;+\infty[$ définit l'ensemble des positions de la particule identifiée par $\boldsymbol{x}_0$, c'est-à-dire la trajectoire de la particule $\boldsymbol{x}_0$.

Équations développées – Lorsque l'on a choisi un système de coordonnées, l'équation vectorielle des trajectoires se traduit par 3 équations réelles qui sont les équations paramétriques des trajectoires [éq. (2.4) p. 23] :

$$\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_t^1 = f^1(x_0^1,x_0^2,x_0^3,t) \\ x_t^2 = f^2(x_0^1,x_0^2,x_0^3,t) \\ x_t^3 = f^3(x_0^1,x_0^2,x_0^3,t) \end{cases}$$

où t est le paramètre et où x_0^1, x_0^2 et x_0^3 identifient la particule par sa position de référence.

Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler, puisque la recherche des trajectoires revient à rechercher la description de Lagrange du mouvement, il suffit d'intégrer l'équation différentielle vectorielle (2.13) [p. 25].

2.8.2 Lignes de courant actuelles

- **Définition 2.22 – Lignes de courant actuelles.** On appelle lignes de courant actuelles pour un observateur $\mathscr{R}$, les *lignes de champ* du champ des vitesses actuelles pour cet observateur, c'est-à-dire les courbes $\mathscr{L}$ qui sont tangentes aux vitesses actuelles, en chacun de leur point.

Les lignes de courant visualisent donc, par leur tangente, la direction des vitesses actuelles. À un autre instant t', elles sont généralement de forme différente car le champ des vitesses à un instant t' est généralement différent.

Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler, on connaît le champ des vitesses actuelles $\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t,t)$ et on en cherche les lignes de champ $\mathscr{L}$. La manière la plus générale de décrire toute courbe $\mathscr{L}$ de l'espace $\mathscr{E}_3$ est d'en donner des équations paramétriques, c'est-à-dire de donner une fonction vectorielle $\boldsymbol{g}(\mu)$ qui définit le point courant $\boldsymbol{x}$ de la courbe $\mathscr{L}$ par l'équation vectorielle $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\mu)$ (μ est le paramètre).

Rappel – Équations paramétriques : Lorsqu'on a choisi un système de coordonnées, la définition paramétrique de la courbe $\mathscr{L}$ est donnée par trois équations réelles :

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\mu) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^1=g^1(\mu) \\ x^2=g^2(\mu) \\ x^3=g^3(\mu) \end{cases}$$

où μ est le paramètre et où x^1, x^2 et x^3 sont les coordonnées du point courant de $\mathscr{L}$. La recherche de la fonction vectorielle $\boldsymbol{g}(\mu)$ se ramène donc à la recherche des trois les fonctions réelles g^1, g^2 et g^3.

Pour certaines courbes, il est possible de prendre comme paramètre l'une des coordonnées (par exemple $\mu=x^1$), la définition d'une courbe se ramène alors à deux équations. Cependant, puisque l'on ne connaît pas *a priori* les particularités des lignes de courant recherchées, il est prudent d'utiliser un paramétrage général.

On sait de l'étude des courbes paramétriques, que le vecteur $\boldsymbol{g}'(\mu)$ est tangent à la courbe $\mathscr{L}$ au point $\boldsymbol{g}(\mu)$. Il découle de la définition des lignes de courant que l'on recherche des courbes $\mathscr{L}$ de point courant $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\mu)$ telles que la tangente en $\boldsymbol{x}$ à $\mathscr{L}$ soit colinéaire à la vitesse actuelle $\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x},t)$. On cherche donc la fonction vectorielle $\boldsymbol{g}(\mu)$ telle que :

$$\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{g}(\mu),t) \parallel \boldsymbol{g}'(\mu) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{g}(\mu),t)\wedge\boldsymbol{g}'(\mu)=\boldsymbol{0} \tag{2.37}$$

La résolution de l'équation différentielle vectorielle (2.37), d'inconnue $\boldsymbol{g}(\mu)$ et où t est l'instant actuel, donne les lignes de courant à l'instant t.

Remarque – L'écriture du parallélisme de deux vecteurs $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sous la forme vectorielle $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ est une écriture redondante. Si l'on projette cette équation vectorielle sur une base, on obtient un système de seulement 2 équations réelles indépendantes [(4)]. L'équation (2.37) est donc équivalente à un système de 2 équations différentielles réelles (et non 3). Il n'y a donc que deux constantes d'intégration C_1 et C_2. Les lignes de courant actuelles sont donc une famille de courbes à deux paramètres C_1 et C_2.

(4) L'une d'entre elles est une combinaison linéaire des deux autres.

Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange, on cherche la description d'Euler du mouvement suivant la méthode donnée en section 2.3 [p. 23] et on est ramené au problème précédent.

- **Définition 2.23 – Nappe de courant, tube de courant.** L'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur une courbe $\mathscr{C}$ donnée engendre une surface appelée nappe de courant. Si la courbe $\mathscr{C}$ est fermée la surface engendrée est appelée tube de courant.

2.8.3 Ligne d'émission actuelle d'un point fixe

- **Définition 2.24 – Ligne d'émission.** Soit N un point géométrique fixe pour un observateur $\mathscr{R}$. On appelle ligne d'émission actuelle du point N, l'ensemble des positions actuelles des particules dont la trajectoire passe par N.

Les particules P dont la trajectoire passe par N sont celles qui sont passées ou qui vont passer par le point fixe choisi N. Puisqu'à tout instant actuel t, il existe toujours une particule qui se trouve en N, la ligne d'émission actuelle du point N contient toujours le point fixe N.

Illustration – Imaginons que dans un mouvement de milieu continu, il existe au point N « pinceau ponctuel » qui colore les particules qui y passent. Si l'on photographie le milieu continu à l'instant t, les particules colorées de la photographie dessinent la ligne d'émission actuelle de N.

Si le mouvement est décrit par la méthode de Lagrange, on connaît la fonction $\boldsymbol{f}$. On note $\boldsymbol{x}_N$ la position (pour un observateur $\mathscr{R}$) du point d'émission fixe N. Les particules dont la trajectoire passe par N sont les particules (c'est-à-dire les $\boldsymbol{x}_0$) qui sont solutions de :

$$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t_1) \qquad (t_1 \text{ est l'instant où la particule } \boldsymbol{x}_0 \text{ passe au point } N) \tag{2.38}$$

En résolvant en $\boldsymbol{x}_0$ l'équation vectorielle (2.38), on trouve : $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_N, t_1)$. Les $\boldsymbol{x}_0$ trouvés identifient les particules qui sont au point N à un instant t_1. On sélectionne donc l'ensemble des particules dont la trajectoire passe par N en faisant varier le paramètre t_1 dans l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

Par définition [déf. 2.24 p. 34], l'équation de la ligne d'émission actuelle est la position actuelle de toutes ces particules. C'est donc la courbe définie par l'équation vectorielle paramétrique de paramètre t_1 :

$$\boldsymbol{x} = \underbrace{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_N, t_1), t)}_{\boldsymbol{g}(t_1, \boldsymbol{x}_N, t)} \quad \text{où } t_1 \in]-\infty;+\infty[\text{ et où } t \text{ est l'instant actuel.}$$

La fonction $\boldsymbol{g}(t_1, \boldsymbol{x}_N, t) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_N, t_1), t)$ est l'équation paramétrique, de paramètre t_1, de la ligne d'émission actuelle du point fixe N.

Équations développées – Lorque l'on a choisi un système de coordonnées, l'équation paramétrique vectorielle (de paramètre t_1) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(t_1, \boldsymbol{x}_N, t)$ de la ligne d'émission actuelle (c'est-à-dire à l'instant t) de N, se traduit par trois équations réelles :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{g}(t_1, \boldsymbol{x}_N, t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^1 = g^1(t_1, x_N^1, x_N^2, x_N^3, t) \\ x^2 = g^2(t_1, x_N^1, x_N^2, x_N^3, t) \\ x^3 = g^3(t_1, x_N^1, x_N^2, x_N^3, t) \end{cases}$$

où (x^1, x^2, x^3) sont les coordonnées du point courant de la ligne d'émission, où (x_N^1, x_N^2, x_N^3) sont les coordonnées du point d'émission fixe N, où t est l'instant actuel et où t_1 est le paramètre de la courbe.

Si le mouvement est décrit par la méthode d'Euler, on cherche la description de Lagrange du mouvement et on est ramené au cas précédent.

2.8.4 Débits à travers une surface

- **Définition 2.25 – Débit volumique.** Soit $\mathscr{S}$ une surface immatérielle [5], fixe pour un observateur $\mathscr{R}$, bornée, orientable [6], orientée [7] et traversée par un milieu continu en mouvement. On note $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire en un point courant N de $\mathscr{S}$. On appelle débit volumique actuel à travers la surface fixe $\mathscr{S}$, le flux du champ des vitesses actuelles à travers la surface $\mathscr{S}$:

$$q_v(t) = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{v}_E(N,t) \cdot \boldsymbol{n}(N)\, ds \tag{2.39}$$

L'unité légale de débit volumique est le $\mathrm{m}^3.\mathrm{s}^{-1}$.

- **Définition 2.26 – Débit massique.** Soit $\mathscr{S}$ une surface immatérielle, fixe pour un observateur $\mathscr{R}$, bornée, orientée, et traversée par un milieu continu en mouvement. On note $\boldsymbol{n}$ la normale unitaire en un point courant N de $\mathscr{S}$. On appelle débit massique actuel à travers la surface fixe $\mathscr{S}$ le flux de la quantité de mouvement par unité de volume $\rho\,\boldsymbol{v}$ à travers la surface $\mathscr{S}$:

$$q_m(t) = \int_{\mathscr{S}} \rho_E(N,t)\boldsymbol{v}_E(N,t) \cdot \boldsymbol{n}(N)\, dS \tag{2.40}$$

où ρ_E est la description d'Euler de la masse volumique du milieu continu.

L'unité légale de débit massique est le $\mathrm{kg.s}^{-1}$.

Le signe d'un débit (massique ou volumique) dépend du sens de $\boldsymbol{n}$ choisi pour la surface $\mathscr{S}$.

Remarques – La définition du débit massique est prématurée, la masse volumique n'étant pas encore définie. Elle est néanmoins présentée ici pour bien souligner la distinction entre les deux concepts.

Dans les intégrandes des équations (2.39) et (2.40), les champs de vitesse et de masse volumique sont nécessairement décrits par la méthode d'Euler : il faut intégrer les valeurs actuelles de ces champs pour les particules qui se trouvent actuellement au point courant N de la surface $\mathscr{S}$.

Si la surface $\mathscr{S}$ n'est pas fixe (mais reste indéformable), on définit le débit qui la traverse de la même manière, mais en prenant le flux de la *vitesse relative* du milieu continu par rapport à $\mathscr{S}$; ce qui revient à calculer le débit à travers une surface fixe mais avec les vitesses vues par un observateur $\mathscr{R}_{\mathscr{S}}$ lié à la surface indéformable $\mathscr{S}$. On peut définir de la même manière des débits à travers des surfaces déformables si on connaît la vitesse des points N de la surface $\mathscr{S}$.

Vocabulaire – Le scalaire $\boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{n}$ est parfois appelé *vitesse débitante* à travers la surface. Par ailleurs, dans la littérature scientifique, il règne un certain flou dans l'emploi du mot « flux » : en mathématiques, le flux d'un vecteur $\boldsymbol{w}$ à travers une surface $\mathscr{S}$ est le *scalaire* défini par l'intégrale : $\Phi = \int_{\mathscr{S}} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}\, ds$; c'est la définition qui sera utilisée dans ce cours. Toutefois, chez certains auteurs, notamment les thermodynamiciens, le mot « flux » désigne parfois l'intégrande $\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{n}$ (un scalaire) ou parfois encore le vecteur $\boldsymbol{w}$ lui-même.

[5] C'est-à-dire géométrique.

[6] C'est-à-dire que l'on peut y définir une normale. Toutes les surfaces ne sont pas orientables ; par exemple, une bande de Möbius n'est pas orientable car elle n'a qu'une face.

[7] On a choisi une face positive et une face négative parmi les deux choix possibles.

2.9 Mouvement stationnaire

- **Définition 2.27 – Mouvement stationnaire.** On dit qu'un mouvement est stationnaire (ou permanent) pour un observateur $\mathscr{R}$, si les descriptions d'Euler de tous les champs matériels sont, pour l'observateur $\mathscr{R}$, indépendantes du temps :

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t)=\mathbf{0}, \qquad \text{quelle que soit la grandeur physique } \boldsymbol{\Psi} \text{ observée et } \forall \boldsymbol{x}_t \tag{2.41}$$

Illustration – Soit M un point fixe pour un observateur $\mathscr{R}$. La description d'Euler du champ $\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_M,t)$ donne la valeur actuelle de la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ (par exemple une vitesse) pour la particule dont la position actuelle est M. Dans un écoulement stationnaire, cette valeur est indépendante du temps, c'est-à-dire que toutes les particules qui passent par M ont la même valeur de la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$. En un autre point d'observation fixe M', la mesure de la grandeur physique $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}_{M'},t)$ est différente, mais toujours constante dans le temps.

- **Propriété 2.28 –** Dans un mouvement stationnaire pour un observateur $\mathscr{R}$, les trajectoires, les lignes de courant et les lignes d'émission sont des courbes qui se superposent.

Démonstration – Dans un mouvement stationnaire, le champ des vitesses est un champ vectoriel *indépendant du temps*. Les lignes de courant sont par définition les lignes de champ de ce champ vectoriel permanent. Ce sont donc des courbes identiques à tout instant. Par ailleurs, les trajectoires sont tangentes en chaque point à la vitesse de la particule qui s'y trouve. Dans un mouvement stationnaire, ces deux familles de courbes ont donc la même définition géométrique : ce sont les lignes de champ d'un champ vectoriel fixe dans le temps. Bien que leur signification physique soit complètement différente, dans un mouvement stationnaire, les courbes trajectoires et courbes lignes de courant sont des courbes confondues. Ainsi, contrairement à un mouvement général, dans un mouvement stationnaire, en un point géométrique fixe M, il ne passe donc qu'une seule trajectoire. On en déduit que la ligne d'émission de M est confondue avec la trajectoire qui passe par M.

Vocabulaire – En mécanique des milieux continus fluides (liquides et gaz), l'étude des mouvements stationnaires est un cas particulier important : elle consiste à étudier les écoulements en *régime établi* (s'il existe). Les écoulements non stationnaires sont aussi appelés *écoulements transitoires* ou *régimes transitoires* (par exemple, les phases de démarrage ou d'arrêt d'un écoulement).

En présence d'écoulements fluides turbulents, le sens du mot « stationnaire » est réduit à la stationnarité de la seule vitesse moyenne. Les fluctuations autour de la vitesse moyenne ne sont pas stationnaires.

En dynamique des solides déformables (vibrations) et en acoustique, on donne un sens différent à l'adjectif « stationnaire » : on parle de « vibrations stationnaires ». Dans un tel mouvement, la description d'Euler des vitesses n'est pas indépendante du temps, ce sont seulement l'amplitude et la fréquence de vibration des grandeurs qui sont constantes dans le temps.

Le sens du mot « stationnaire » peut donc varier donc suivant le contexte.

2.10 Changements d'observateur

- **Notation 2.29 –** Dans les changements d'observateurs, on considère deux observateurs quelconques $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$, *a priori* en mouvement relatif quelconque. On convient de surmonter d'un $\widetilde{}$ les grandeurs physiques observées par l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$.

Toutes les définitions des concepts développés dans ce chapitre reposent sur la représentation des positions des particules P par un vecteur position $\boldsymbol{x} \in \mathbb{V}_3$. Or, le vecteur position (de référence ou actuelle) d'une particule P est un vecteur généralement différent d'un observateur à

l'autre :

$$\boldsymbol{x}_0^P \neq \widetilde{\boldsymbol{x}}_0^P \quad \text{et} \quad \boldsymbol{x}_t^P \neq \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^P$$

Il s'ensuit que les dérivées temporelles des vecteurs positions sont généralement différentes. Les vitesses et les accélérations mesurées par deux observateurs différents ne sont en général pas les mêmes, ni en direction, ni en module :

$$\boldsymbol{v}(P,t) \neq \widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\gamma}(P,t) \neq \widetilde{\boldsymbol{\gamma}}(P,t)$$

Remarque – En mécanique générale, on sait écrire les relations de changement d'observateur pour les vitesses et les accélérations, à condition de connaître le mouvement relatif des deux observateurs. Ce sont des relations compliquées faisant intervenir à la fois la vitesse relative des origines, la vitesse de rotation relative des observateurs ainsi que leurs dérivées temporelles. Il est inutile de les détailler ici (voir n'importe quel cours de cinématique du point), ces relations ne seront pas utiles dans la suite.

La description de Lagrange du mouvement est une fonction différente pour les deux observateurs : $\boldsymbol{f} \neq \widetilde{\boldsymbol{f}}$ car ces deux fonctions n'ont pas le même domaine de définition ($\boldsymbol{x}_0^P \neq \widetilde{\boldsymbol{x}}_0^P$) et leur valeur actuelle pour une particule est un vecteur différent : ($\boldsymbol{x}_t^P \neq \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^P$). De même, le champ des vitesses actuelles utilisé dans la description d'Euler du mouvement est différent pour les deux observateurs ($\boldsymbol{v}_E \neq \widetilde{\boldsymbol{v}}_E$). Les trajectoires et les lignes de courant sont donc en général des courbes de formes différentes pour des observateurs différents.

Exemple – Soit une particule P en mouvement pour un observateur $\mathscr{R}$. Si l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est choisi tel que son origine est toujours confondue avec la particule P (on peut dire que « l'origine de l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est liée à la particule P » [8]), la trajectoire de la particule P pour l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ se réduit à un point alors que la trajectoire de la même particule pour l'observateur $\mathscr{R}$ est une courbe.

Par ailleurs, si un mouvement est stationnaire pour un observateur, il ne l'est généralement pas pour un autre observateur ; la « définition » de la stationnarité ($\partial_t \boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t) = 0$) n'est pas une relation universelle.

2.11 En bref...

La mécanique des milieux continus se consacre à l'étude de champs matériels, c'est-à-dire des fonctions $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ qui associent une valeur de la grandeur physique $\boldsymbol{\Psi}$ (scalaire, vectorielle ou tensorielle) à toute particule et à tout instant. L'application de la définition (universelle) de la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ par deux observateurs peut conduire à des valeurs différentes ou non. L'étude de ces changements de valeur est l'objet du chapitre suivant.

Les descriptions de Lagrange $\boldsymbol{\Psi}_L(\boldsymbol{x}_0,t)$ et d'Euler $\boldsymbol{\Psi}_E(\boldsymbol{x}_t,t)$ (pour un observateur $\mathscr{R}$) d'un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ sont équivalentes. Le gradient de chacune de ces descriptions conduit à une version lagrangienne et à une version eulérienne des opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien.

Le champ matériel des dérivées particulaires $\dot{\boldsymbol{\Psi}}(P,t)$ d'une grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ peut, comme tout champ matériel, être décrit par la méthode de Lagrange ou celle d'Euler. On en a donné les expressions.

[8] Pour préciser complètement le mouvement relatif des deux observateurs, il faudrait aussi préciser la vitesse de rotation relative entre $\widetilde{\mathscr{R}}$ et $\mathscr{R}$

Pour visualiser le mouvement d'un milieu continu pour un observateur $\mathscr{R}$, on peut observer les trajectoires des particules, les lignes de courant actuelles, les lignes d'émission actuelles issues d'un point fixe.

Les mouvements stationnaires pour un certain observateur ont la même apparence à chaque instant pour cet observateur. Dans le cas d'une définition stricte de la stationnarité, les trajectoires, les lignes de courant et les lignes d'émission sont des courbes confondues pour cet observateur. Un mouvement stationnaire pour un observateur ne l'est généralement pas pour un autre observateur : la stationnarité n'est donc pas une caractéristique universelle d'un écoulement.

3

Objectivité

L'objectivité est une propriété de certaines grandeurs physiques. Après un rappel de la définition de l'objectivité pour des grandeurs physiques scalaires, on définit dans ce chapitre l'objectivité pour des grandeurs physiques vectorielles ou tensorielles. On termine le chapitre avec des exemples de grandeurs physiques non scalaires qui sont objectives ou non.

- **Notations 3.1 –** Dans la suite, on considère deux observateurs quelconques $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$, en mouvement relatif quelconque. Soit une grandeur physique (scalaire, vectorielle ou tensorielle, c'est-à-dire à valeur dans $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$, $p \geqslant 0$) ; l'application de sa définition (universelle) pour un observateur $\mathscr{R}$ conduit à une valeur actuelle qui sera notée $\boldsymbol{\Psi}(t)$; l'application de cette même définition pour un autre observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ conduit à une valeur actuelle qui sera notée $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)$.
  Dans les sections 3.1 à 3.4 qui définissent l'objectivité pour des grandeurs physiques scalaires, vectorielles ou tensorielles, on ne se préoccupe pas de savoir si la valeur actuelle de cette grandeur physique est un champ matériel (valeur en une particule) ou une valeur globale pour tout un domaine. Le seul aspect important est qu'il s'agit de valeurs actuelles. Il se peut que les valeurs actuelles $\boldsymbol{\Psi}(t)$ soient des valeurs en une particule, auquel cas $\boldsymbol{\Psi}(t)$ est à remplacer par $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$, ou des valeurs globales pour un domaine, auquel cas $\boldsymbol{\Psi}(t)$ est à remplacer par $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D},t)$. Pour désigner les positions de particules, on emploiera les notations 1.11 [p. 13].

En général, $\boldsymbol{\Psi}(t) \neq \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)$. On passe de l'une à l'autre de ces valeurs actuelles par une formule dite *formule de changement d'observateur*, qui est *a priori* particulière à chaque grandeur physique : on trouve cette formule en appliquant la définition (universelle) de la grandeur pour chaque observateur. Dans les sections 3.1 à 3.4, on donne une *définition physique* de l'objectivité pour des grandeurs non scalaires et on montre que la formule de changement d'observateur est la même pour toutes les grandeurs objectives de même ordre de tensorialité, ce qui constitue une caractérisation des grandeurs objectives.

On rappelle [section 1.4 p. 15] que, quel que soit le mouvement d'un milieu continu, il existe une rotation [(1)], fonction du temps, appelée *tenseur de changement d'observateur* actuel de $\mathscr{R}$ à $\widetilde{\mathscr{R}}$, noté $\boldsymbol{Q}_{\mathscr{R}\widetilde{\mathscr{R}}}(t)$ ou plus simplement $\boldsymbol{Q}_t$, tel que la relation entre la position actuelle de toute biparticule $\{P^{(1)}, P^{(2)}\}$ [déf. 1.16 p. 16] pour deux observateurs $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\forall t\ \forall \{P^{(1)}, P^{(2)}\}, \quad \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(2)} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(1)} = \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(2)} - \boldsymbol{x}_t^{(1)}), \qquad \text{[éq. (1.6) p. 17]} \tag{3.1}$$

Cette équation est la formule de changement d'observateur de la position actuelle d'une biparticule. Géométriquement, elle signifie qu'à un instant actuel quelconque, la position *relative* actuelle entre les particules (distances, angles, etc.) d'un milieu continu en mouvement est la même pour tous les observateurs. Autrement dit : la matière a actuellement la même forme pour tous les observateurs.

(1) C'est-à-dire un tenseur du second ordre orthogonal de déterminant $+1$.

3.1 Objectivité des grandeurs scalaires

L'objectivité d'une grandeur physique scalaire a déjà été définie en section 1.3 [p. 14], on la rappelle ici pour mémoire :

- **Définition 3.2 – Grandeur scalaire objective.** On dit qu'une grandeur scalaire est objective si sa valeur actuelle est la même pour tous les observateurs :

$$\forall t\ \forall \mathscr{R}\ \forall \widetilde{\mathscr{R}},\quad \Psi(t) = \widetilde{\Psi}(t) \tag{3.2}$$

Il existe des grandeurs scalaires qui sont objectives (par principe ou par conséquence de leur définition) et d'autres qui ne le sont pas.

Exemples – Le temps, la distance actuelle entre deux particules, la masse actuelle d'un domaine, la température actuelle en une particule sont des grandeurs scalaires objectives par principe. On déduit aisément de leur définition que les grandeurs *volume actuel d'un domaine* et *masse volumique actuelle d'une particule* sont des grandeurs scalaires objectives.

En revanche, la norme de la vitesse actuelle d'une particule n'est pas une grandeur scalaire objective car dans un mouvement relatif quelconque entre deux observateurs $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$, on sait de la cinématique élémentaire qu'en général $\|\boldsymbol{v}(P,t)\| \neq \|\widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t)\|$. On en déduit que l'énergie cinétique volumique d'une particule n'est pas une grandeur scalaire objective : $\rho\,\boldsymbol{v}(P,t)^2 \neq \rho\,\widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t)^2$.

3.2 Objectivité des grandeurs vectorielles

- **Définition 3.3 – Grandeur vectorielle objective.** On dit qu'une grandeur vectorielle est objective si le produit scalaire de sa valeur actuelle avec la position actuelle de toute biparticule d'un milieu continu en mouvement est une grandeur scalaire objective :

$$\forall t\ \forall \{P^{(1)}, P^{(2)}\}\ \forall \mathscr{R}\ \forall \widetilde{\mathscr{R}},\quad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(2)} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(1)}) = \boldsymbol{\Psi}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_t^{(2)} - \boldsymbol{x}_t^{(1)}) \tag{3.3}$$

Interprétation – L'équation (3.3) exprime le fait que si une grandeur vectorielle $\boldsymbol{\Psi}$ est objective alors, à tout instant t, tous les observateurs s'accordent sur la « position relative » de la valeur vectorielle actuelle $\boldsymbol{\Psi}(t)$ par rapport aux positions actuelles $\boldsymbol{x}_t$ des particules du milieu continu en mouvement. Les vecteurs $\boldsymbol{\Psi}(t)$ et $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)$ sont des vecteurs différents de $\mathbb{V}_3$, de même les positions d'une biparticule $\boldsymbol{x}_t^{(2)} - \boldsymbol{x}_t^{(1)}$ et $\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(2)} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(1)}$ sont différentes, mais leurs positions relatives sont les mêmes pour les deux observateurs. On peut résumer littérairement cette définition en disant qu'une grandeur vectorielle est objective si, à tout instant, sa valeur actuelle a « la même orientation par rapport à la matière actuelle » pour tous les observateurs.

Illustration – Soit $\boldsymbol{\Psi}(t)$ grandeur vectorielle objective. Alors, les « photographies » de la matière et du champ vectoriel prises à un instant t par tous les observateurs sont des images superposables.

Exemples – La vitesse actuelle d'une particule n'est pas une grandeur vectorielle objective car son module actuel ainsi que son angle actuel avec des biparticules diffèrent d'un observateur à l'autre. Il en est de même pour l'accélération. On donne plus loin [section 3.5.2 p. 44] des exemples de grandeurs vectorielles objectives. On peut en citer un pour les lecteurs déjà initiés à la mécanique des milieux continus : la contrainte actuelle s'exerçant sur une facette matérielle est une grandeur vectorielle objective.

- **Théorème 3.4 – Caractérisation.** Une grandeur vectorielle $\boldsymbol{\Psi}$ est objective si et seulement si la formule de changement d'observateur de sa valeur actuelle est :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) = \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{\Psi}(t) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(t)\big) \quad (\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t} : \text{rotation par } \boldsymbol{Q}_t) \tag{3.4}$$

Démonstration – Pour toute grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ vectorielle objective, on par définition :

$$\forall t\ \forall\{P^{(1)},P^{(2)}\}\ \forall\mathscr{R}\ \forall\widetilde{\mathscr{R}},\qquad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(2)}-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(1)})=\boldsymbol{\Psi}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_t^{(2)}-\boldsymbol{x}_t^{(1)})\quad \text{[déf. 3.3 p. 40]}$$

$$\forall t\ \forall\{P^{(1)},P^{(2)}\}\ \forall\mathscr{R}\ \forall\widetilde{\mathscr{R}},\qquad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)\cdot\boldsymbol{Q}_t\cdot(\boldsymbol{x}_t^{(2)}-\boldsymbol{x}_t^{(1)})=\boldsymbol{\Psi}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_t^{(2)}-\boldsymbol{x}_t^{(1)})\quad \text{[éq. (3.1) p. 39]}$$

$$\forall t\ \forall\mathscr{R}\ \forall\widetilde{\mathscr{R}},\qquad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)\cdot\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{\Psi}(t)$$

On en déduit la formule de changement d'observateur de toute grandeur vectorielle objective :

$$\forall t\ \forall\mathscr{R}\ \forall\widetilde{\mathscr{R}},\quad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)=\boldsymbol{\Psi}(t)\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top=\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{\Psi}(t)$$

Inversement, si la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle $\boldsymbol{\Psi}$ est :

$$\forall t\ \forall\mathscr{R}\ \forall\widetilde{\mathscr{R}},\qquad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)=\boldsymbol{\Psi}(t)\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top$$

$$\forall t\ \forall\{P^{(1)},P^{(2)}\}\ \forall\mathscr{R}\ \forall\widetilde{\mathscr{R}},\qquad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(2)}-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(1)})=\boldsymbol{\Psi}(t)\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(2)}-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(1)})$$

$$\forall t\ \forall\{P^{(1)},P^{(2)}\}\ \forall\mathscr{R}\ \forall\widetilde{\mathscr{R}},\qquad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(2)}-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(1)})=\boldsymbol{\Psi}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_t^{(2)}-\boldsymbol{x}_t^{(1)})$$

D'après la définition 3.3 [p. 40], la grandeur $\boldsymbol{\Psi}$ est donc une grandeur objective.

Ainsi, pour savoir si une grandeur vectorielle est objective, il suffit d'écrire sa formule de changement d'observateur. Si la formule est de la forme (3.4) [p. 40], alors la grandeur vectorielle est objective, sinon elle ne l'est pas.

Illustration – La formule (3.4) [p. 40] montre que la formule de changement d'observateur de la grandeur vectorielle actuelle $\boldsymbol{\Psi}(t)$ est une rotation identique à celle du changement d'observateur des positions actuelles des biparticules [éq. (3.1) p. 39]. Leurs orientations relatives sont donc identiques pour les deux observateurs. On peut donc dire que l'orientation d'une grandeur vectorielle objective par rapport à la position actuelle de la matière est la même pour tous les observateurs.

Exemple – On sait de la cinématique élémentaire que la formule de changement d'observateur de la vitesse actuelle d'une particule est :

$$\boldsymbol{v}(P,t)=\widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t)+\boldsymbol{v}(\widetilde{O},t)+\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}\vec{(}\boldsymbol{x}^P-\boldsymbol{x}^{\widetilde{O}})\quad \text{où } \boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}}=\mathbf{adj}\left(\boldsymbol{Q}_t^\top\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t}\right)\ \text{[éq. (1.13) p. 19]}$$

La formule de changement d'observateur des vitesses actuelles d'une particule n'est pas conforme à la formule (3.4) [p. 40] ($\widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t)\neq\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{v}(P,t)$), ce qui prouve à nouveau, si besoin en était, que la vitesse actuelle d'une particule n'est pas une grandeur vectorielle objective.

- **Théorème 3.5 –** Si $\boldsymbol{\Psi}$ est une grandeur vectorielle objective, alors sa norme est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – Soit $\boldsymbol{\Psi}$ est une grandeur vectorielle objective. Sa formule de changement d'observateur est donc :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)=\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(t)\big)\qquad \text{[th. 3.4 p. 40]}$$

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)\|=\|\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(t)\big)\|=\|\boldsymbol{\Psi}(t)\|\qquad \text{(la rotation d'un vecteur ne change pas sa norme)}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

3.3 Objectivité des grandeurs tensorielles du second ordre

- **Définition 3.6 – Grandeur tensorielle du second ordre objective .** On dit qu'une grandeur tensorielle du second ordre est objective si sa valeur actuelle appliquée à la position actuelle de tout couple de biparticules d'un milieu continu en mouvement est un scalaire objectif :

$$\forall t\ \forall P^{(i)}\ \forall\mathscr{R}\ \forall\widetilde{\mathscr{R}},\quad (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(1)}-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(2)})\cdot\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(3)}-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(4)})=(\boldsymbol{x}_t^{(1)}-\boldsymbol{x}_t^{(2)})\cdot\boldsymbol{\Psi}(t)\cdot(\boldsymbol{x}_t^{(3)}-\boldsymbol{x}_t^{(4)})\quad (3.5)$$

Interprétation – Par cette définition, il s'agit d'exprimer, comme pour les grandeurs vectorielles objectives, que la « l'orientation relative » de la valeur actuelle (propre à chaque observateur) de la grandeur tensorielle du second ordre par rapport aux positions actuelles (propres à chaque observateur) des biparticules, est la même pour tous les observateurs. On peut résumer littérairement cette définition en disant qu'une grandeur tensorielle d'ordre 2 est objective si à tout instant elle a « la même orientation par rapport à la matière » pour tous les observateurs. Les propriétés 3.8 [p. 42] illustrent la signification de « l'orientation par rapport à la matière actuelle » de la grandeur tensorielle du second ordre objective en analysant l'orientation de ses directions propres par rapport à la position actuelle des biparticules.

- **Théorème 3.7 – Caractérisation.** Une grandeur tensorielle du second ordre $\boldsymbol{\Psi}$ est objective si et seulement si la formule de changement d'observateur de sa valeur actuelle est :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\Psi}(t) \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(t)\big) \qquad (\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t} : \text{rotation par } \boldsymbol{Q}_t) \tag{3.6}$$

Démonstration – Comme pour les vecteurs objectifs, on déduit de l'équation (3.5) [p. 41] la formule de changement d'observateur de toute grandeur tensorielle du second ordre objective par la suite d'équivalences suivantes, toutes valables $\forall t\ \forall P^{(i)}\ \forall \mathscr{R}\ \forall \widetilde{\mathscr{R}}$:

$$\begin{aligned}
& (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(1)} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(2)}) \cdot \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(3)} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(4)}) = (\boldsymbol{x}_t^{(1)} - \boldsymbol{x}_t^{(2)}) \cdot \boldsymbol{\Psi}(t) \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(3)} - \boldsymbol{x}_t^{(4)}) \\
\Leftrightarrow \quad & \big(\boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(1)} - \boldsymbol{x}_t^{(2)})\big) \cdot \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) \cdot \big(\boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(3)} - \boldsymbol{x}_t^{(4)})\big) = (\boldsymbol{x}_t^{(1)} - \boldsymbol{x}_t^{(2)}) \cdot \boldsymbol{\Psi}(t) \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(3)} - \boldsymbol{x}_t^{(4)}) \\
\Leftrightarrow \quad & (\boldsymbol{x}_t^{(1)} - \boldsymbol{x}_t^{(2)}) \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) \cdot \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(3)} - \boldsymbol{x}_t^{(4)}) = (\boldsymbol{x}_t^{(1)} - \boldsymbol{x}_t^{(2)}) \cdot \boldsymbol{\Psi}(t) \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(3)} - \boldsymbol{x}_t^{(4)}) \\
\Leftrightarrow \quad & \boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) \cdot \boldsymbol{Q}_t = \boldsymbol{\Psi}(t) \\
\Leftrightarrow \quad & \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\Psi}(t) \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

- **Propriété 3.8 –** On laisse le soin au lecteur de vérifier, en utilisant la caractérisation (3.6) et les propriétés algébriques des tenseurs orthogonaux, que si $\boldsymbol{\Psi}$ est une grandeur tensorielle du second ordre objective, alors on a les propriétés suivantes :
  - les valeurs propres actuelles des tenseurs du second ordre $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)$ et de $\boldsymbol{\Psi}(t)$ sont les mêmes, ce sont donc des grandeurs scalaires objectives ; il en est de même pour les invariants ;
  - les vecteurs propres unitaires des tenseurs du second ordre $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t)$ et de $\boldsymbol{\Psi}(t)$ sont liés par la relation $\widetilde{\boldsymbol{u}}(t) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}(t)$, ce sont donc des grandeurs vectorielles objectives [th. 3.4 p. 40] ; l'angle des directions propres actuelles avec la direction actuelle de toute biparticule est donc le même pour tous les observateurs ;
  - si on représente les directions propres non orientées par les tenseurs uniaxiaux unitaires $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$ et $\widetilde{\boldsymbol{U}} = \widetilde{\boldsymbol{u}} \otimes \widetilde{\boldsymbol{u}}$, leur relation de changement d'observateur est : $\widetilde{\boldsymbol{U}}(t) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{U}(t) \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top$, ce sont donc des grandeurs tensorielles du second ordre objectives.

- **Définition 3.9 – Définition équivalente.** Une grandeur tensorielle du second ordre est objective si et seulement si sa valeur actuelle simplement contractée à toute position actuelle de biparticule est une grandeur vectorielle objective :

$$\forall \{P^{(1)}, P^{(2)}\}, \quad \boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(1)}) \text{ objectif} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{\Psi} \text{ objectif}$$

Démonstration – Pour abréger les notations, on pose $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}^{(2)} - \boldsymbol{x}^{(1)}$ et $\widetilde{\boldsymbol{w}} = \widetilde{\boldsymbol{x}}^{(2)} - \widetilde{\boldsymbol{x}}^{(1)}$.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{w}} &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{w}\big) && \text{(objectivité du vecteur } \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{w}\text{, [th. 3.4 p. 40])} \\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}\big) \cdot \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{w}\big) && \text{(propriété des rotations)} \\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}\big) \cdot \widetilde{\boldsymbol{w}} && \text{(objectivité du vecteur } \boldsymbol{w}\text{, [éq. (3.1) p. 39])} \\
\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}\big) && \text{(l'égalité précédente est vraie } \forall \widetilde{\boldsymbol{w}})
\end{aligned}$$

La grandeur tensorielle du second ordre $\boldsymbol{\Psi}$ est donc objective [th. 3.7 p. 42].

3.4 Objectivité des grandeurs tensorielles d'ordre p

La définition équivalente [déf. 3.9 p. 42] de l'objectivité des grandeurs tensorielles du second ordre permet de généraliser par récurrence la définition de l'objectivité des grandeurs tensorielles de tous ordres :

- **Définition 3.10 – Grandeur tensorielle objective.** Une grandeur tensorielle d'ordre p est une grandeur objective si le produit contracté simple de sa valeur actuelle avec la position actuelle de toute biparticule est une grandeur tensorielle d'ordre $p-1$ objective :

$$\boldsymbol{\Psi} \text{ objectif} \quad \Leftrightarrow \quad \forall t\, \forall \{P^{(1)}, P^{(2)}\} \forall \mathscr{R}\, \forall \widetilde{\mathscr{R}}, \quad \boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(2)} - \boldsymbol{x}_t^{(1)}) \text{ objectif} \tag{3.8}$$

Le vecteur vérifiera aisément que cette définition généralise les cas particuliers $p=1$ et $p=2$ précédemment étudiés.

- **Théorème 3.11 – Caractérisation.** Une grandeur tensorielle d'ordre p est objective si et seulement si sa formule de changement d'observateur est :

$$\boldsymbol{\Psi} \text{ objectif} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\Psi}(t)) \tag{3.9}$$

Démonstration – Soit une grandeur tensorielle d'ordre p.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi} \text{ objectif} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall \{P^{(1)}, P^{(2)}\}, \quad \boldsymbol{\Psi}(t) \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(2)} - \boldsymbol{x}_t^{(1)}) \text{ objectif} \qquad \text{[déf. 3.8 p. 43]} \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \{P^{(1)}, P^{(2)}\}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(2)} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{(1)}) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\Big(\boldsymbol{\Psi}(t) \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(2)} - \boldsymbol{x}_t^{(1)})\Big) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \{P^{(1)}, P^{(2)}\}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) \cdot \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(2)} - \boldsymbol{x}_t^{(1)}) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\Psi}(t)) \cdot \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{x}_t^{(2)} - \boldsymbol{x}_t^{(1)}) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall \{P^{(1)}, P^{(2)}\}, \quad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) \cdot \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(2)} - \boldsymbol{x}_t^{(1)}) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\Psi}(t)) \cdot \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t^{(2)} - \boldsymbol{x}_t^{(1)}) \\
&\Leftrightarrow \quad \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\Psi}(t))
\end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que la caractérisation [th. 3.11] est bien valable dans les cas particuliers $p=0$, $p=1$ et $p=2$ envisagés précédemment. Elle est donc valable pour tout tenseur d'ordre 0 ou plus si pour les tenseurs d'ordre 0 (scalaires ou invariants) on pose :

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(x) = x$$

Rappels d'algèbre – La rotation par $\boldsymbol{Q}_t$ d'un tenseur $\boldsymbol{T}$ d'ordre $p \geqslant 1$ s'écrit avec le produit tensoriel de Kronecker $\boxtimes$:

$$\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{T}) = (\underbrace{\boldsymbol{Q}_t \boxtimes \cdots \boxtimes \boldsymbol{Q}_t}_{p \text{ termes}}) \overline{\otimes}^p \boldsymbol{T} \qquad \text{où} \qquad (\boldsymbol{Q}_t \boxtimes \cdots \boxtimes \boldsymbol{Q}_t)^{i_1 \cdots i_p}{}_{j_1 \cdots j_p} = {Q_t}^{i_1}{}_{j_1} \cdots {Q_t}^{i_p}{}_{j_p}$$

Pour $p=2$, on vérifie aisément que $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{T}) = (\boldsymbol{Q}_t \boxtimes \boldsymbol{Q}_t) : \boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top$

3.5 Exemples de changement d'observateur

3.5.1 Changement d'observateur du gradient de la transformation

- **Théorème 3.12 – Non objectivité du gradient de la transformation.** Le gradient de la transformation est un champ matériel tensoriel du second ordre non objectif. Sa formule de changement d'observateur est :

$$\widetilde{\boldsymbol{F}}(P,t) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{F}(P,t) \cdot \boldsymbol{Q}_0^\top \tag{3.10}$$

Démonstration – Considérons une biparticule $\{P,P'\}$ quelconque. La formule de changement d'observateur de sa position actuelle est :

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P'} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P} = \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P}) \qquad \text{[éq. (1.6) p. 17]} \tag{3.11}$$

En particulier, pour $t = t_0$ il vient :

$$\widetilde{\boldsymbol{x}}_0^{P'} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_0^{P} = \boldsymbol{Q}_0 \cdot (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) \tag{3.12}$$

où $\boldsymbol{Q}_0$ est la valeur du tenseur de changement d'observateur à l'instant t_0.

La définition du gradient de la transformation en $\widetilde{\boldsymbol{x}}_0$ pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P'} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t^{P} &= \widetilde{\boldsymbol{F}} \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_0^{P'} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_0^{P}) + \|\widetilde{\boldsymbol{x}}_0^{P'} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_0^{P}\| \, \boldsymbol{\mathscr{O}}(\widetilde{\boldsymbol{x}}_0^{P'} - \widetilde{\boldsymbol{x}}_0^{P}) \\
\boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P}) &= \widetilde{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{Q}_0 \cdot (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) + \|\boldsymbol{Q}_0 \cdot (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P})\| \, \boldsymbol{\mathscr{O}}(\boldsymbol{Q}_0 \cdot (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P})) \qquad \text{[éq. (3.11) et (3.12)]} \\
&= \widetilde{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{Q}_0 \cdot (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) + \|\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}\| \, \boldsymbol{\mathscr{O}}'(\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) \qquad (\boldsymbol{Q}_0 \text{ orthogonal}) \\
\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P} &= \boldsymbol{Q}_t^{\top} \cdot \widetilde{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{Q}_0 \cdot (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) + \|\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}\| \, \boldsymbol{Q}_t^{\top} \cdot \boldsymbol{\mathscr{O}}'(\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) \\
\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P} &= \boldsymbol{Q}_t^{\top} \cdot \widetilde{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{Q}_0 \cdot (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) + \|\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}\| \, \boldsymbol{\mathscr{O}}''(\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P})
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Or la définition du gradient de la transformation pour l'observateur $\mathscr{R}$ est :

$$\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P} = \boldsymbol{F} \cdot (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) + \|\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}\| \, \boldsymbol{\mathscr{O}}(\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) \tag{3.14}$$

En comparant les équations (3.13) et (3.14) [p. 44], on trouve la relation :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}_t^{\top} \cdot \widetilde{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{Q}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \widetilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{Q}_0^{\top}$$

qui est la formule de changement d'observateur du gradient de la transformation. Cette formule est différente de la caractérisation d'une grandeur tensorielle du second ordre objective [th. 3.7 p. 42].

3.5.2 Opérateurs différentiels eulériens sur des champs objectifs

- **Théorème 3.13 – Objectivité du gradient eulérien d'un champ objectif.** Le gradient eulérien d'un champ matériel tensoriel d'ordre $p \geqslant 0$ objectif est un champ matériel tensoriel d'ordre $p+1$ objectif :

$$\boldsymbol{\Psi}(P,t) \text{ objectif} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{grad}_E \, \boldsymbol{\Psi}(P,t) \text{ objectif}$$

Démonstration – Soit $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ un champ matériel objectif. Sa formule de changement d'observateur est donc :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(P,t) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\Psi}(P,t)) \qquad \text{[th. 3.11 p. 43]} \tag{3.15}$$

La variation de $\boldsymbol{\Psi}$ pour deux particules P et P' est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(P',t) - \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(P,t) &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(P',t)\big) - \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(P,t)\big) \qquad \text{[éq. (3.15)]} \\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(P',t) - \boldsymbol{\Psi}(P,t)\big) \qquad \text{(propriété des rotations)} \\
\mathbf{grad}_E \, \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t' - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t) &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\mathbf{grad}_E \, \boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t)\big) \qquad \text{(déf. du gradient eulérien)} \\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\mathbf{grad}_E \, \boldsymbol{\Psi}\big) \cdot \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t) \qquad \text{(propriété des rotations)} \\
\mathbf{grad}_E \, \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t' - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t) &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\mathbf{grad}_E \, \boldsymbol{\Psi}\big) \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t' - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t) \qquad \text{[éq. (1.6) p. 17]}
\end{aligned}$$

Cette égalité étant vraie quelle que soit la biparticule $\{P,P'\}$, et donc $\forall (\widetilde{\boldsymbol{x}}_t' - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t)$, il vient :

$$\mathbf{grad}_E \, \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\mathbf{grad}_E \, \boldsymbol{\Psi}\big)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur objective [éq. (3.9) p. 43].

La version eulérienne des opérateurs différentiels divergence, rotationnel et laplacien a été définie dans les équations (2.25) [p. 29]. À partir de l'objectivité du gradient eulérien de tout champ matériel objectif [th. 3.13 p. 44], on en déduit facilement l'objectivité des opérateurs différentiels qui en dérivent :

- **Théorème 3.14 – Objectivité des opérateurs différentiels eulériens de champs objectifs.** L'application des opérateurs différentiels eulériens à des champs matériels objectifs engendre des champs matériels objectifs.

Démonstration –

$$\mathbf{div}_E\,\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} : \boldsymbol{G} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{\Psi}) : \boldsymbol{G} = \mathbf{div}_E\,\boldsymbol{\Psi} \qquad (\text{car } \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{G}) = \boldsymbol{G})$$

On procède de même pour le rotationnel eulérien car $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H}$.
L'objectivité du laplacien eulérien $\boldsymbol{\Delta}_E\,\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{div}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{\Psi}$ se déduit de l'objectivité de la divergence eulérienne d'un champ objectif.

3.5.3 Opérateurs différentiels eulériens sur des champs matériels non objectifs

Contrairement aux grandeurs objectives, la formule de changement d'observateur des grandeurs non objectives n'est pas connue *a priori* : elle est spécifique à chaque grandeur non objective. Il faut donc établir la formule de changement d'observateur au cas par cas en appliquant la définition universelle de la grandeur non objective pour chaque observateur. On peut alors vérifier si la formule de changement d'observateur du gradient eulérien de ces champs est conforme ou non à celle d'une grandeur objective. Il se peut que l'application d'opérateurs eulériens à des champs matériels non objectifs conduise à un champ matériel objectif. Par exemple, on montrera plus loin que, bien que le champ des vitesses ne soit pas objectif, sa divergence eulérienne [th. 5.9 p. 86] et son laplacien eulérien [th. 5.24 p. 96] sont néanmoins des champs matériels respectivement scalaire et vectoriel objectifs [(2)].

3.5.4 Opérateurs différentiels lagrangiens sur des champs matériels objectifs

- **Théorème 3.15 – Non objectivité du gradient lagrangien d'un champ objectif.** Le gradient lagrangien d'un champ matériel tensoriel d'ordre p objectif est un champ matériel tensoriel d'ordre $p+1$ non objectif :

$$\boldsymbol{\Psi}(P,t) \text{ objectif} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{grad}_E\,\Psi(P,t) \text{ non objectif}$$

Démonstration – Soit $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ un champ matériel objectif. Sa formule de changement d'observateur est :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(P,t) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\Psi}(P,t)) \qquad [\text{th. 3.11 p. 43}] \tag{3.16}$$

La variation de $\boldsymbol{\Psi}$ pour deux particules P et P' est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(P',t) - \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(P,t) &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(P',t)\big) - \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(P,t)\big) \qquad [\text{éq. (3.16)}]\\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(P',t) - \boldsymbol{\Psi}(P,t)\big) \qquad (\text{propriété des rotations})\\
\mathbf{grad}_L\,\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_0' - \widetilde{\boldsymbol{x}}_0) &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi} \cdot (\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0)\big) \qquad (\text{déf. du gradient lagrangien})\\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi}\big) \cdot \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big((\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0)\big) \qquad (\text{propriété des rotations})\\
\mathbf{grad}_L\,\widetilde{\boldsymbol{\Psi}} \cdot (\widetilde{\boldsymbol{x}}_0' - \widetilde{\boldsymbol{x}}_0) &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi}\big) \cdot \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_0^\top}(\widetilde{\boldsymbol{x}}_0' - \widetilde{\boldsymbol{x}}_0)\big) \qquad (\text{ch. obs. à l'instant de référence})\\
&\neq \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{\Psi}\big) \cdot \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big((\widetilde{\boldsymbol{x}}_0' - \widetilde{\boldsymbol{x}}_0)\big)
\end{aligned}$$

- **Théorème 3.16 –** L'application des opérateurs différentiels lagrangiens à des champs matériels objectifs engendre des champs matériels non objectifs.

(2) En revanche, on verra aussi que le rotationnel eulérien des vitesses n'est pas objectif [th. 5.22 p. 95].

Démonstration – La non objectivité du gradient lagrangien d'un champ objectif entraîne celle des versions lagrangiennes de la divergence, du rotationnel et du laplacien qui en découlent [éq.(2.24) p. 29].

Exemple – La divergence lagrangienne d'un champ objectif $\boldsymbol{\Psi}$ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) s'écrit : $\mathrm{div}_L \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{F}^\top$ [éq. (2.26) p. 30]. Pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}_L \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} &= \mathbf{grad}_E \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} : \widetilde{\boldsymbol{F}}^\top && \text{(définition de la divergence lagrangienne pour } \widetilde{\mathscr{R}}\text{)} \\
&= (\boldsymbol{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top) : \widetilde{\boldsymbol{F}}^\top && (\boldsymbol{\Psi} \text{ objectif} \Rightarrow \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \text{ objectif}) \\
&= (\boldsymbol{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top) : (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{Q}_0^\top)^\top && \text{(changement d'observateur de } \boldsymbol{F}\text{)} \\
&= (\boldsymbol{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top) : (\boldsymbol{Q}_0 \cdot \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top) \\
&\neq \mathbf{grad}_E \boldsymbol{\Psi} : \boldsymbol{F}^\top = \mathrm{div}_L \boldsymbol{\Psi} && \text{(à cause de la présence de } \boldsymbol{Q}_0 \text{ dans la ligne précédente)}
\end{aligned}$$

3.5.5 Opérateurs lagrangiens appliqués à des champs non objectifs

On ne peut rien dire de général sur les opérateurs lagrangiens appliqués à des champs (scalaires, vectoriel ou tensoriels) non objectifs, car contrairement aux champs objectifs, la formule de changement d'observateur des champs non objectifs n'est pas connue *a priori*. Il faut donc vérifier au cas par cas.

3.5.6 Changement d'observateur de la dérivée particulaire d'un champ objectif

Rappel – La définition de la dérivée particulaire d'un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ est [déf. 2.16 p. 30] :

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\Psi}(P,t) \qquad \text{(dérivée à } P \text{ constant)}$$

- **Théorème 3.17 – Objectivité de la dérivée particulaire d'un champ scalaire objectif.** La dérivée particulaire d'un champ matériel scalaire objectif est un champ matériel scalaire objectif.

Démonstration – Soit $\Psi(P,t)$ un champ matériel scalaire objectif. Sa formule de changement d'observateur est donc : $\widetilde{\Psi}(P,t) = \Psi(P,t)$ [déf. 3.2 p. 40]. La dérivée particulaire pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ s'écrit :

$$\dot{\widetilde{\Psi}}(P,t) = \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\Psi}(P,t) = \frac{\partial}{\partial t}\Psi(P,t) = \dot{\Psi}(P,t) \tag{3.17}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective [déf. 3.2 p. 40].

- **Théorème 3.18 – Non objectivité de la dérivée particulaire d'un champ objectif non scalaire .** La dérivée particulaire d'un champ matériel objectif *non scalaire* est un champ matériel non objectif.

Démonstration – La formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective est :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(P,t) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\Psi}(P,t) \qquad \text{[th. 3.11 p. 43]}$$

La dérivée particulaire du champ $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ s'écrit :

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}} = \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(P,t) = \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\Psi}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{Q}_t \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{\Psi} + \boldsymbol{Q}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}} \neq \boldsymbol{Q}_t \cdot \dot{\boldsymbol{\Psi}}$$

La dérivée particulaire d'un champ matériel vectoriel objectif est donc un champ vectoriel non objectif.

Il en est de même pour la dérivée particulaire de tout champ matériel objectif $\boldsymbol{\Psi}$ *non scalaire*, car la formule de changement d'observateur des champs non scalaires objectifs contient toujours la rotation $\boldsymbol{Q}_t$. Il s'ensuit que la relation entre les dérivées particulaires du champ non scalaire pour deux observateurs contient nécessairement des dérivées $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{Q}_t$ du tenseur de changement d'observateur.

Remarque réservée aux lecteurs initiés à la MMC – La non objectivité de la dérivée particulaire de grandeurs vectorielles ou tensorielles objectives a troublé certains auteurs, qui pensaient (à tort) que cette dérivée particulaire devait l'être pour que les « lois tangentes » ou « lois incrémentales » de la forme $\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{f}(\dot{\boldsymbol{X}})$ où $\boldsymbol{X}$ est un tenseur de déformation, soient universelles [(3)]. On peut écrire sans inconvénient des relations universelles entre grandeurs non objectives. Un exemple de loi incrémentale *universelle* qui est une relation entre dérivées particulaires (donc non objectives) de tenseurs objectifs est donné dans le cours *Comportement élastique* [(4)], du même auteur.

3.6 En bref ...

L'objectivité est une propriété de certaines grandeurs physiques scalaires vectorielles ou tensorielles. La valeur actuelle des grandeurs objectives non scalaires a la même orientation par rapport à la position actuelle de la matière pour tous les observateurs.

Si $\boldsymbol{Q}_t$ est le tenseur de changement d'observateur actuel entre deux observateurs quelconques $\mathscr{R}$ et $\widetilde{\mathscr{R}}$ en mouvement relatif quelconque, la formule de changement d'observateur des valeurs actuelles de toute grandeur objective est :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\Psi}(t)) \quad \text{où } \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\Psi}(t)) \text{ est la rotation par } \boldsymbol{Q}_t \text{ du tenseur } \boldsymbol{\Psi}(t).$$

Si la grandeur est un tenseur d'ordre zéro (un scalaire) alors $\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\Psi(t)) = \Psi(t)$.

Le changement d'observateur de la valeur actuelle d'une grandeur physique objective, revient donc à la faire tourner par la même rotation que les positions actuelles des biparticules. Les « positions relatives » de la grandeur physique actuelle et de la matière actuelle sont donc les mêmes.

On a donné quelques exemples de grandeurs objectives et non objectives :
- les opérateurs différentiels *eulériens* appliqués à des champs matériels *objectifs* engendrent des champs matériels objectifs ;
- il se peut aussi que des opérateurs eulériens appliqués à certains champs matériels non objectifs engendrent des champs objectifs ;
- en revanche, les opérateurs différentiels lagrangiens appliqués à des champs matériels objectifs n'engendrent pas des champs matériels objectifs ;
- seules les dérivées particulaires de champs matériels *scalaires* sont des champs matériels scalaires objectifs.

[(3)] Ces auteurs disent « lois objectives » à la place de « lois universelles » [remarque *Confusion courante* p. 15]. Cette confusion amène certains auteurs à inventer des « dérivées objectives » qui sont bien des quantités objectives mais qui ne sont en aucun cas des dérivées particulaires de tenseurs.

[(4)] Disponible à `http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00827790`, ou bien `http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/elas.html`

4

Déformation

4.1 Introduction

Un solide, tel qu'il est défini en mécanique générale, est un milieu continu indéformable : la distance entre tout couple de particules est constante dans le temps. Pour analyser la déformation à un instant t dans un mouvement de milieu continu déformable, il faudrait *a priori* comparer la longueur actuelle et la longueur à un instant de référence t_0 *arbitrairement choisi* de toutes les biparticules du milieu continu. À l'instant de référence t_0, le milieu continu est déclaré comme *non déformé*.

Remarques – Le choix d'un instant de référence est arbitraire mais important car la valeur de la grandeur tensorielle *déformation actuelle* qui va être définie dans ce chapitre dépend évidemment du choix de cet instant de référence. Le concept de déformation actuelle n'a de sens que lorsque l'on a choisi un instant de référence t_0, la forme de la matière à cet instant servant de référence pour la comparaison des longueurs actuelles et des longueurs de référence de biparticules.

Pour l'étude des mouvements de milieux continus solides déformables, on choisit normalement un instant de référence t_0 physiquement significatif ; le plus souvent, l'instant de référence est un instant où le solide déformable n'a jamais été sollicité par le milieu extérieur : on *décide* donc qu'à cet instant le solide déformable est considéré comme non déformé.

En revanche, en mécanique des milieux continus fluides (liquides ou gaz), le choix d'un instant de référence est plus difficile à motiver physiquement : un milieu continu fluide n'a pas de forme propre particulière à laquelle on puisse se référer. Même si la déformation actuelle par rapport à la forme du fluide à un instant de référence arbitrairement choisi peut parfaitement être définie pour un fluide (il s'agit bien d'un milieu continu), le concept de déformation par rapport à cette forme de référence arbitraire et sans motivation physique n'a que très peu d'intérêt pour les mécaniciens des fluides.

Observer les changements de longueur de toutes les biparticules d'un milieu continu en mouvement est redondant : certains changements de longueurs peuvent se déduire géométriquement d'autres changements de longueur. Pour prouver qu'un milieu continu en mouvement se déforme, il suffit logiquement de trouver une biparticule dont la longueur varie dans le temps. Cependant, cette information ne donne aucun renseignement sur la variation de longueur des autres biparticules. Pour donner une description complète de la déformation, on procèdera de la manière suivante : pour chaque particule, on n'observe les variations de distance qu'avec les particules voisines. L'idée, pour l'instant floue, de « particule voisine » dans un milieu continu en mouvement sera précisée rigoureusement et aboutira à la notion de direction matérielle après un certain passage à la limite. La déformation actuelle d'un milieu continu par rapport à sa forme de référence dans une direction matérielle se décrira avec un *champ matériel* tensoriel du second ordre.

Rappel – Tous les vecteurs et tenseurs évoqués dans la suite sont relatifs à un certain observateur. Leur valeur est définie dans l'espace vectoriel de calcul $\mathbb{V}_3$ défini en section 1.2.2 [p. 12]. Le changement d'observateur de chaque notion introduite sera précisé.

4.2 Direction matérielle

4.2.1 Chemin matériel

- **Définition 4.1 – Chemin matériel.** On appelle chemin matériel $\mathscr{C}$, un ensemble de particules dont les positions actuelles (pour l'observateur utilisé) forment une courbe $\mathscr{C}_t$ régulière [(1)].

- **Proposition 4.2 –** Si les positions actuelles des particules d'un chemin matériel $\mathscr{C}$ forment une courbe régulière $\mathscr{C}_t$ et si la transformation $\boldsymbol{f}_{tt'}$ [déf. 2.3 p. 22] est différentiable, alors la courbe des positions à un autre instant t' est une autre courbe régulière $\mathscr{C}_{t'}$. En particulier, la courbe $\mathscr{C}_0$ des positions de référence des particules du chemin matériel $\mathscr{C}$ est une courbe régulière.

  Démonstration – Soit $\mathscr{C}$ un chemin matériel dont les positions actuelles $\boldsymbol{x}_t$ forment la courbe régulière $\mathscr{C}_t$. Soit $\boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{g}_t(\mu)$ l'équation paramétrique, de paramètre μ, de la courbe $\mathscr{C}_t$. Le paramètre μ identifie les particules du chemin matériel. La régularité de la courbe $\mathscr{C}_t$ signifie que la fonction $\boldsymbol{g}_t(\mu)$ est continue et dérivable. La position de référence des particules du chemin matériel $\mathscr{C}$ est donnée par la description de Lagrange du mouvement [déf. 2.5 p. 23] :

  $$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_t, t) = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{g}_t(\mu), t) = (f^{-1} \circ \boldsymbol{g}_t)(\mu) = \boldsymbol{g}_0(\mu) \quad \text{où } \boldsymbol{g}_0 = (\boldsymbol{f}^{-1} \circ \boldsymbol{g}_t)$$

  La transformation $\boldsymbol{f}$ étant inversible et différentiable en $\boldsymbol{x}_0$, la fonction $\boldsymbol{f}^{-1}$ l'est aussi en $\boldsymbol{x}_t$. Puisque la fonction $\boldsymbol{g}_t$ est continue et dérivable en μ, alors la fonction $\boldsymbol{g}_0 = (\boldsymbol{f}^{-1} \circ \boldsymbol{g}_t)$ l'est aussi. L'équation paramétrique g_0 de la courbe $\mathscr{C}_0$ est donc une fonction continue dérivable en μ, la courbe $\mathscr{C}_0$ est donc régulière. On en déduit, avec un raisonnement analogue, qu'à tout instant t' les positions des particules d'un chemin matériel $\mathscr{C}$ forment une courbe régulière $\mathscr{C}_{t'}$.

- **Définition 4.3 – Chemin matériel issu d'une particule.** On appelle chemin matériel issu d'une particule P un chemin matériel contenant la particule P.

- **Proposition 4.4 –** Soit $\mathscr{C}^P$ un chemin matériel issu de la particule P. Alors la courbe $\mathscr{C}_t^P$ des positions actuelles contient la position actuelle $\boldsymbol{x}_t$ de la particule P. De même, la courbe $\mathscr{C}_0^P$ des positions de référence contient la position de référence $\boldsymbol{x}_0$ de la particule P. Si P' est une particule de $\mathscr{C}^P$, de position actuelle $\boldsymbol{x}'_t$ et de position de référence $\boldsymbol{x}'_0$, on a l'équivalence suivante :

  $$\boldsymbol{x}'_t \in \mathscr{C}_t^P \to \boldsymbol{x}_t \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}'_0 \in \mathscr{C}_0^P \to \boldsymbol{x}_0\,; \qquad \text{ce que l'on écrira : } P' \in \mathscr{C}^P \to P \tag{4.1}$$

  Démonstration – Cette propriété est une conséquence directe de la régularité des courbes position d'un chemin matériel [proposition 4.2] et de la différentiabilité de la description de Lagrange $\boldsymbol{f}$ du mouvement.

  Attention ! – La locution « P' tend vers P » ne doit pas être comprise comme un mouvement de P' vers P en suivant le chemin matériel $\mathscr{C}^P$. On ne fait que considérer la suite des différentes particules génériques P' constituant le chemin matériel $\mathscr{C}^P$ sans présupposer quoi que ce soit sur la vitesse actuelle des particules génériques P'.

4.2.2 Direction matérielle

- **Définition 4.5 – Direction actuelle d'une direction matérielle.** Soit $\mathscr{C}^P$ un chemin matériel issu d'une particule P et soit $\mathscr{C}_t^P$ l'ensemble des positions actuelles de ses particules. On appelle direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ de la direction matérielle issue de P, la tangente unitaire à la courbe $\mathscr{C}_t^P$ en la position actuelle $\boldsymbol{x}_t$ de la particule P.

  $$\boldsymbol{u}_t = \lim_{P' \in \mathscr{C}^P \to P} \frac{\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|} \qquad \text{[éq. (4.1)]}$$

(1) C'est-à-dire une courbe continue et ayant une tangente unique en chaque point.

- **Définition 4.6 – Direction de référence d'une direction matérielle .** Soit $\mathscr{C}^P$ un chemin matériel issu d'une particule P et soit $\mathscr{C}_0^P$ l'ensemble des positions de référence de ses particules. On appelle direction de référence $\boldsymbol{u}_0$ de la direction matérielle issue de P, la tangente unitaire à la courbe $\mathscr{C}_0^P$ en la position de référence $\boldsymbol{x}_0$ de la particule P.

$$\boldsymbol{u}_0 = \lim_{P' \in \mathscr{C}^P \to P} \frac{\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\|} \qquad \text{[éq. (4.1) p. 50]}$$

- **Proposition 4.7 –** Soit une direction matérielle issue d'une particule P dont la direction de référence est $\boldsymbol{u}_0$ et dont la direction actuelle est $\boldsymbol{u}_t$. La relation entre sa direction de référence et sa direction actuelle est :

$$\boldsymbol{u}_t = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{u}_0 = \frac{\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t}{\|\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t\|} \tag{4.2}$$

Démonstration – La définition de la tangente unitaire en $\boldsymbol{x}_t$ à la courbe $\mathscr{C}_t^P$ est :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_t &= \lim_{\boldsymbol{x}_t' \in \mathscr{C}_t^P \to \boldsymbol{x}_t} \frac{\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t}{\|\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t\|} && \text{[déf. 4.5 p. 50]} \\
&= \lim_{\boldsymbol{x}_0' \in \mathscr{C}_0^P \to \boldsymbol{x}_0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0', t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t)}{\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0', t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, t)\|} && \text{[déf. 2.5 p. 23, éq. (4.1) p. 50]} \\
&= \lim_{\boldsymbol{x}_0' \in \mathscr{C}_0^P \to \boldsymbol{x}_0} \frac{\mathbf{grad}_L \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0) + \|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\| \, \mathscr{O}(\|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\|)}{\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0) + \|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\| \, \mathscr{O}(\|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\|)\|} && \text{(gradient de la transformation)} \\
&= \lim_{\boldsymbol{x}_0' \in \mathscr{C}_0^P \to \boldsymbol{x}_0} \frac{\boldsymbol{F} \cdot \frac{\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\|} + \mathscr{O}(\|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\|)}{\|\boldsymbol{F} \cdot \frac{\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\|} + \mathscr{O}(\|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\|)\|} && \text{[notation 2.13 p. 28]} \\
&= \frac{\boldsymbol{F} \cdot \lim_{\boldsymbol{x}_0' \in \mathscr{C}_0^P \to \boldsymbol{x}_0} \frac{\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\|}}{\|\boldsymbol{F} \cdot \lim_{\boldsymbol{x}_0' \in \mathscr{C}_0^P \to \boldsymbol{x}_0} \frac{\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\|}\|} \\
&= \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} && \text{[déf. 4.6 p. 51]}
\end{aligned}$$

On obtient la relation inverse, $\boldsymbol{u}_0$ en fonction de $\boldsymbol{u}_t$, en multipliant ce résultat à gauche par $\boldsymbol{F}^{-1}$:

$$\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t = \frac{\boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \boldsymbol{u}_0 = \|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\| \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t \\ \text{et} \\ \|\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{u}_0 = \frac{\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t}{\|\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t\|}$$

- **Notation 4.8 –** Lorsque l'on voudra désigner une direction matérielle sans préciser si on l'identifie par sa direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ ou par sa direction de référence $\boldsymbol{u}_0$, on la notera simplement $\boldsymbol{u}$.

4.2.3 Changement d'observateur d'une direction matérielle

Une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ est un objet matériel défini par un chemin matériel $\mathscr{C}^P$ issu d'une particule P [déf. 4.3 p. 50] dont la direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ et la direction de référence $\boldsymbol{u}_0$ sont propres à chaque observateur. On établit leurs formules de changement d'observateur.

- **Théorème 4.9 –** Les formules de changement d'observateur de la direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ et de la direction de référence $\boldsymbol{u}_0$ d'une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ sont :

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_t = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\boldsymbol{u}}_0 = \boldsymbol{Q}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0 \tag{4.3}$$

Démonstration – La définition (universelle) de la direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ d'une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{u}}_t &= \lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P} \frac{\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t}{\|\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t - \widetilde{\boldsymbol{x}}_t\|} && \text{[déf. 4.5 p. 50]}\\
&= \lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P} \frac{\boldsymbol{Q}_t\cdot(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t)}{\|\boldsymbol{Q}_t\cdot(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t)\|} && \text{[éq. (1.6) p. 17]}\\
&= \lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P} \frac{\boldsymbol{Q}_t\cdot(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t)}{\|\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t\|} && (\boldsymbol{Q}_t \text{ est orthogonal, il ne change pas la norme d'un vecteur})\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot \lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P} \frac{\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t}{\|\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t\|} && (\boldsymbol{Q}_t \text{ est le même pour toutes les biparticules})\\
\widetilde{\boldsymbol{u}}_t &= \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{u}_t && \text{[déf. 4.5 p. 50]}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

En particulier, à l'instant t_0 il vient :

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}_0 = \boldsymbol{Q}_0\cdot\boldsymbol{u}_0 \tag{4.5}$$

Remarque – Bien qu'une direction matérielle ne soit à pas, à proprement parler, une grandeur physique associée à une particule, la formule de changement d'observateur de sa direction actuelle est la même que celle d'une grandeur physique vectorielle objective [th. 3.4 p. 40].

4.3 Dilatation linéique dans une direction matérielle

4.3.1 Définition

Si les particules sont identifiées par leur position de référence :

La différence entre les positions actuelles de deux particules P et P' est :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}'_0,t) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0,t) && \text{[déf. 2.5 p. 23]}\\
&= \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,t)\cdot(\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)+\cdots && \text{[notations 2.13 p. 28 et 2.11 p. 28]}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Pour savoir s'il y a déformation, il faut comparer la longueur actuelle $\ell_t = \|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|$ avec la longueur de référence $\ell_0 = \|\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0\|$ des biparticules $\{P,P'\}$:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t\|^2 &= \big(\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)+\cdots\big)\cdot\big(\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)+\cdots\big) && \text{[éq. (4.6)]}\\
&= (\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)\cdot\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)+\cdots && (\text{identité } (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v})\cdot(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{T}^\top\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v})\\
\frac{\|\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t\|^2}{\|\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0\|^2} &= \frac{\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0\|}\cdot\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}\cdot\frac{\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0\|}+\cdots\\
\frac{\ell_t^2}{\ell_0^2} &= \overline{\boldsymbol{u}}_0\cdot\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}_0+\cdots
\end{aligned} \tag{4.7}$$

où le vecteur $\overline{\boldsymbol{u}}_0 = \frac{\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0}{\|\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0\|}$ est unitaire. Lorsque la particule P' tend vers la particule P *sur un certain chemin matériel* $\mathscr{C}^P$, les deux longueurs ℓ_t et ℓ_0 tendent vers 0, et le vecteur unitaire $\overline{\boldsymbol{u}}_0$ tend vers la direction de référence $\boldsymbol{u}_0$ d'une direction matérielle [déf. 4.6 p. 51].

- **Définition 4.10 – Dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle.** Soit $\mathscr{C}^P$ un chemin matériel issu d'une particule P, définissant en P une direction matérielle $\boldsymbol{u}$. On appelle dilatation linéique actuelle dans la direction matérielle $\boldsymbol{u}$ issue de P, la limite suivante :

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) = \lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P} \frac{\ell_t}{\ell_0} \tag{4.8}$$

L'équation (4.7) [p. 52] montre que cette limite est :

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) = \big(\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\big)^{\frac{1}{2}} = \big((\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0) \cdot (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0)\big)^{\frac{1}{2}} = \|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\| \tag{4.9}$$

$$= \big((\boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F}) : (\boldsymbol{u}_0 \otimes \boldsymbol{u}_0)\big)^{\frac{1}{2}} = \big((\boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F}) : \boldsymbol{U}_0\big)^{\frac{1}{2}} \tag{4.10}$$

où le tenseur du second ordre $(\boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F})$ est symétrique défini positif et où $\boldsymbol{U}_0 = \boldsymbol{u}_0 \otimes \boldsymbol{u}_0$ est un tenseur du second ordre uniaxial unitaire représentant la direction de référence *non orientée* de la direction matérielle. Le sens d'une direction matérielle est sans importance :

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) = K_\ell(-\boldsymbol{u})$$

La dilatation linéique dans une direction matérielle est un scalaire sans dimension strictement positif :
– si $0 < K_\ell(\boldsymbol{u}) < 1$, il y a contraction de la direction matérielle $\boldsymbol{u}$;
– si $K_\ell(\boldsymbol{u}) > 1$, il y a élongation de la direction matérielle $\boldsymbol{u}$.

La dilatation linéique dans une direction matérielle dépend de la direction matérielle $\boldsymbol{u}$ considérée (ici elle est identifiée par sa direction de référence $\boldsymbol{u}_0$). On ne peut donc pas parler de dilatation linéique en une particule sans préciser de quelle direction matérielle il s'agit. Autour d'une particule, il peut y avoir élongation dans une certaine direction matérielle et contraction dans une autre. Pour décrire toutes les dilatations linéiques actuelles dans toutes les directions matérielles issues d'une particule P identifiées par leur direction de référence, il faut un tenseur du second ordre (ici le tenseur symétrique défini positif $\boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F}$).

Si les particules sont identifiées par leur position actuelle :

La différence entre les positions de référence de deux particules P et P' est :

$$\boldsymbol{x}'_0 - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}'_t, t) - \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{x}_t, t) \qquad \text{([déf. 2.5 p. 23] et } \boldsymbol{f} \text{ inversible [éq. (2.2) p. 22])}$$

$$= \boldsymbol{F}^{-1}(\boldsymbol{x}_t, t) \cdot (\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t) + \cdots \qquad \text{[notations 2.13 p. 28 et 2.11 p. 28]} \tag{4.11}$$

Avec un calcul similaire au cas précédent, on évalue la dilatation linéique actuelle d'une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ identifiée par sa position actuelle $\boldsymbol{u}_t$:

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) = \lim_{P' \in \mathscr{C}^P \to P} \frac{\ell_t}{\ell_0} = \big(\boldsymbol{u}_t \cdot (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top)^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t\big)^{-\frac{1}{2}} = \|\boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t\|^{-1} \tag{4.12}$$

$$= \big((\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top)^{-1} : (\boldsymbol{u}_t \otimes \boldsymbol{u}_t)\big)^{-\frac{1}{2}} = \big((\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top)^{-1} : \boldsymbol{U}_t\big)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.13}$$

où le tenseur du second ordre $(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top)$ est symétrique défini positif et où $\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{u}_t \otimes \boldsymbol{u}_t$ est un tenseur du second ordre uniaxial unitaire représentant la direction actuelle non orientée de la direction matérielle.

Remarque – Que la direction matérielle $\boldsymbol{u}$ soit identifiée par sa direction de référence $\boldsymbol{u}_0$ ou par sa direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$, on retrouve bien que $K_\ell(\boldsymbol{u}) = K_\ell(-\boldsymbol{u})$.

Pour évaluer la dilatation linéique actuelle dans des directions matérielles $\boldsymbol{u}$ issues de P identifiées par leur position actuelle $\boldsymbol{u}_t$, il faut utiliser le tenseur du second ordre symétrique défini positif $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top$.

4.3.2 Changement d'observateur des dilatations linéiques

- **Théorème 4.11 – Objectivité des dilatations linéiques.** La dilatation linéique actuelle d'une direction matérielle est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition (universelle) de la dilatation linéique d'une direction matérielle pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}_\ell(\boldsymbol{u}) &= \lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P} \frac{\widetilde{\ell}_t}{\widetilde{\ell}_0} && \text{[déf. 4.10 p. 52]}\\
&= \lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P} \frac{\ell_t}{\ell_0} && \text{(les longueurs des biparticules sont des grandeurs objectives)}\\
&= K_\ell(\boldsymbol{u}) && \text{[déf. 4.10 p. 52]} \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective [déf. 3.2 p. 40].

4.4 Quelques tenseurs de déformation

4.4.1 Définitions

Suivant que l'on identifie les directions matérielles par leur direction de référence ou par leur direction actuelle, on trouve dans la littérature deux classes de tenseurs de déformation :
– les tenseurs de déformation basés sur le tenseur $\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}$;
– les tenseurs de déformation basés sur le tenseur $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top$.
On en cite quelques uns dans le tableau suivant :

Tenseurs basés sur $\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}$:	Tenseurs basés sur $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top$:	Propriétés :
$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}$ (Cauchy-Green droit)	$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top$ (Cauchy-Green gauche)	(sym. déf. positifs)
$\boldsymbol{U}=\sqrt{\boldsymbol{C}}$	$\boldsymbol{V}=\sqrt{\boldsymbol{B}}$	(sym. déf. positifs)
$\boldsymbol{L}=\ln\boldsymbol{U}$	$\boldsymbol{M}=\ln\boldsymbol{V}$	(symétriques)
$\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{G})$ (Green-Lagrange droit)	$\boldsymbol{J}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{G})$ (Green-Lagrange gauche)	(symétriques)
$\boldsymbol{\varepsilon}^U=\boldsymbol{U}-\boldsymbol{G}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^V=\boldsymbol{V}-\boldsymbol{G}$	(symétriques)

La liste ci-dessus n'est pas exhaustive : on trouve dans la littérature spécialisée des tenseurs de déformation de Hill, de Finger, d'Euler-Almansy, de Hencky, de Piot, etc.

Remarque sur les noms propres – Dans la littérature les noms propres attribués à certains tenseurs de déformation sont sujets à variations. Ceux qui sont proposés dans le tableau précédent semblent faire consensus. Dans la suite du cours, pour éviter tout malentendu, les tenseurs de déformation seront désignés par les symboles qui sont utilisés dans le tableau.

Vocabulaire – Les tenseurs de déformation basés sur $\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}$ sont souvent qualifiés de « lagrangiens » et les tenseurs de déformation basés sur $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top$ sont souvent qualifiés d'« eulériens ». Ces qualificatifs semblent inadéquats à l'auteur : un champ matériel ne peut être qualifié de lagrangien ou d'eulérien puisque tout champ matériel peut être décrit par les deux méthodes de description [section 2.1.2 p. 21]. Les tenseurs de déformation sont des champs matériels [déf. 1.3 p. 10], c'est-à-dire des grandeurs tensorielles qui ont une valeur en toute particule et à tout instant : $\boldsymbol{C}(P,t)$, $\boldsymbol{B}(P,t)$, etc. Comme tout champ matériel, ils peuvent être décrits par la méthode de Lagrange ou par celle d'Euler :

$$\boldsymbol{C}(P,t)=\boldsymbol{C}_L(\boldsymbol{x}_0,t)=\boldsymbol{C}_E(\boldsymbol{x}_t,t) \qquad \boldsymbol{B}(P,t)=\boldsymbol{B}_L(\boldsymbol{x}_0,t)=\boldsymbol{B}_E(\boldsymbol{x}_t,t) \qquad \cdots \qquad \text{[éq. (2.6) p. 23]}$$

On montre en section 4.4.2 [p. 55] que les tenseurs de déformation basés sur $\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}$ ne sont pas objectifs alors que les tenseurs de déformation basés sur $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top$ sont objectifs. Dans la suite on les distinguera donc par leur objectivité.

Remarque – Le champ tensoriel $\boldsymbol{F}(P,t)$, non symétrique en général, permet aussi d'évaluer les dilatations linéiques actuelles dans toutes les directions matérielles issues de P :

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\| = \|\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t\|^{-1} \qquad \text{[éq. (4.9) p. 53 et éq. (4.12) p. 53]}$$

Cependant, pour une *déformation* actuelle donnée [(2)], la valeur de $\boldsymbol{F}$ n'est pas unique car

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\| = \|\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\| \quad \forall\boldsymbol{Q}\text{ orthogonal} \qquad (\forall\boldsymbol{Q}\text{ orthogonal},\ \|\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{v}\| = \|\boldsymbol{v}\|)$$

Quelle que soit la valeur du tenseur orthogonal $\boldsymbol{Q}$, tout tenseur $\boldsymbol{F}' = \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{F}$ donnerait la dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle avec la même formule. De plus, quand il n'y a pas de déformation, la valeur de $\boldsymbol{F}$ est un tenseur orthogonal indéterminé. L'utilisation du gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$ comme tenseur de déformation n'est donc pas recommandable car il existe une infinité de gradients de transformation qui conduisent à la même déformation avec les mêmes formules. Autrement dit, le tenseur $\boldsymbol{F}$ n'est pas une bonne variable pour caractériser l'état de déformation actuelle d'une particule.

Tous ces tenseurs de déformation sont légitimes en ce sens qu'ils permettent tous d'évaluer la dilatation linéique dans une direction matérielle, mais chacun avec des formules différentes :

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{u}_0)^{\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{U}^2\cdot\boldsymbol{u}_0)^{\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{u}_0\cdot\mathbf{e}^{2\boldsymbol{L}}\cdot\boldsymbol{u}_0)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{[éq. (4.10) p. 53]} \tag{4.15}$$

$$= (\boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{u}_0)^{\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^U)^2)\cdot\boldsymbol{u}_0)^{\frac{1}{2}} \tag{4.16}$$

$$= (\boldsymbol{u}_t\cdot\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t)^{-\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{u}_t\cdot\boldsymbol{V}^{-2}\cdot\boldsymbol{u}_t)^{-\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{u}_t\cdot\mathbf{e}^{-2\boldsymbol{M}}\cdot\boldsymbol{u}_t)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{[éq. (4.13) p. 53]} \tag{4.17}$$

$$= (\boldsymbol{u}_t\cdot(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{J})^{-1}\cdot\boldsymbol{u}_t)^{-\frac{1}{2}} = (\boldsymbol{u}_t\cdot(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^V)^{-2}\cdot\boldsymbol{u}_t)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.18}$$

Pour calculer la dilatation linéique $K_\ell(\boldsymbol{u})$ d'une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ issue d'une particule P, les tenseurs de déformation basés sur $\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}$ identifient la direction matérielle par sa direction de référence $\boldsymbol{u}_0$ [éq. (4.15) et (4.16)], alors que les tenseurs de déformation basés sur $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top$ identifient la direction matérielle par sa direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ [éq. (4.17) et (4.18)].

Lorsqu'il n'y a pas de déformation (c'est-à-dire $\forall\boldsymbol{u},\ K_\ell(\boldsymbol{u}) = 1$), les tenseurs $\boldsymbol{C},\boldsymbol{B},\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ prennent la valeur $\boldsymbol{G}$ (tenseur métrique), les autres prennent la valeur $\mathbf{0}$ (tenseur nul d'ordre 2).

4.4.2 Changement d'observateur des tenseurs de déformation

- **Théorème 4.12 – Objectivité des tenseurs de déformation basés sur $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top$.** Les tenseurs de déformation basés sur $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top$ sont des grandeurs tensorielles du second ordre objectives.

Démonstration – La définition (universelle) du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$, en une particule P, pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{B}} &= \widetilde{\boldsymbol{F}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{F}}^\top \qquad \text{(valeurs actuelles)}\\
&= (\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top)\cdot(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top)^\top \qquad \text{[éq. (3.10) p. 43]}\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top\cdot\boldsymbol{Q}_0\cdot\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top \qquad (4.19)\\
\widetilde{\boldsymbol{B}} &= \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{B}) \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ est donc une grandeur du second ordre objective [th. 3.7 p. 42].

(2) Ce qui est différent de « pour un mouvement donné ». Des mouvements différents peuvent aboutir à une même déformation actuelle.

En utilisant les propriétés des rotations de tenseurs du second ordre [3], le lecteur montrera aisément que la formule changement d'observateur de tout tenseur de déformation basé sur $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top$ est :

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{X}) \qquad \text{(ils sont donc objectifs [th. 3.7 p. 42])} \tag{4.21}$$

- **Théorème 4.13 – Non objectivité des tenseurs de déformation basés sur $\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}$.** Les tenseurs de déformation basés sur $\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}$ sont des grandeurs tensorielles du second ordre non objectives. Leur formule de changement d'observateur est :

$$\widetilde{\boldsymbol{X}}(P,t) = \boldsymbol{Q}_0\cdot\boldsymbol{X}(P,t)\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_0}\big(\boldsymbol{X}(P,t)\big) \tag{4.22}$$

Démonstration – En utilisant la même méthode que précédemment, le lecteur montrera aisément la formule de changement d'observateur du tenseur de déformation actuelle $\boldsymbol{C}$:

$$\widetilde{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{Q}_0\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_0}(\boldsymbol{C})$$

Contrairement au tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$, le tenseur de déformation actuelle $\boldsymbol{C}$ n'est pas une grandeur tensorielle du second ordre objective [th. 3.7 p. 42].

En utilisant les propriétés des rotations de tenseurs du second ordre, le lecteur montrera aisément que la formule changement d'observateur de tout tenseur de déformation basé sur $\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}$ est :

$$\widetilde{\boldsymbol{X}} = \boldsymbol{Q}_0\cdot\boldsymbol{X}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_0}(\boldsymbol{X}) \qquad \text{(ils ne sont donc pas objectifs [th. 3.7 p. 42])}$$

4.4.3 Relations entre tenseurs de déformation objectifs et non objectifs

Rappel d'algèbre – Tout tenseur inversible du second ordre est susceptible d'une décomposition polaire. Pour le gradient lagrangien des positions actuelles (gradient de la transformation [déf. 2.12 p. 28]) noté $\boldsymbol{F}$ [notation 2.13 p. 28], il vient : $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}$ où $\boldsymbol{R}$ est une rotation (tenseur orthogonal de déterminant +1), et où les parties symétriques définies positives de la décomposition sont :

$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F})^{\frac{1}{2}}\ (=\sqrt{\boldsymbol{C}}) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{V} = (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^\top)^{\frac{1}{2}}\ (=\sqrt{\boldsymbol{B}})$$

On trouve ici une autre manière de définir les tenseurs de déformation $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$: ils sont les parties symétriques définies positives de la décomposition polaire du gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$.

Les propriétés des tenseurs orthogonaux [4] permettent d'écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{R}^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{U}) \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{R}^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{C}) \qquad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{R}^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) \\ &\boldsymbol{J} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{R}^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{E}) \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^V = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{R}^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{\varepsilon}^U) \end{aligned} \tag{4.23}$$

où $\boldsymbol{R}$ est la rotation de la décomposition polaire du gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$.

En résumé, dans le tableau page 54 chaque tenseur de déformation objectif (colonne de droite) est le tourné par la rotation $\boldsymbol{R}$ du tenseur de déformation non objectif (colonne de gauche) situé sur la même ligne.

- **Théorème 4.14 – Non objectivité de la rotation $\boldsymbol{R}$.** La partie orthogonale de la décomposition polaire du gradient de la transformation est un tenseur orthogonal non objectif. Sa formule de changement d'observateur est :

$$\widetilde{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top \tag{4.24}$$

[3] Par exemple : $\forall\boldsymbol{Q}$ orthogonal, $\sqrt{\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{Q}^\top} = \boldsymbol{Q}\cdot\sqrt{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top$, etc.

[4] Voir la section 1.6.13 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

Démonstration – L'application de la définition (universelle) de la décomposition polaire du gradient de la transformation pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{R}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{U}} &= \widetilde{\boldsymbol{F}} \\
\widetilde{\boldsymbol{R}}\cdot\boldsymbol{Q}_0\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top &= \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top \qquad \text{[éq. (4.22) et éq. (3.10) p. 43]} \\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top \qquad \text{(décomposition polaire de } \boldsymbol{F}\text{)} \\
\widetilde{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top\cdot\boldsymbol{Q}_0\cdot\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top = \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top
\end{aligned}$$

Pseudo « rotation de la matière » – On lit souvent une interprétation douteuse à propos de la partie orthogonale $\boldsymbol{R}$ des décompositions polaires $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}$: le tenseur orthogonal $\boldsymbol{R}$ est quelquefois appelé « rotation locale de la matière » avant ou après une « déformation pure » $\boldsymbol{V}$ ou $\boldsymbol{U}$.

- Dans un mouvement de milieu continu entre les instants t_0 et t_1, le mouvement n'est pas une succession de deux mouvements l'un rigide et l'autre déformant.
- Pendant un mouvement entre t_0 et t_1, pour tout $t\in[t_0,t_1]$, on peut faire toutes les décompositions polaires locales intermédiaires : $\boldsymbol{F}(P,t)=\boldsymbol{V}(P,t)\cdot\boldsymbol{R}(P,t)=\boldsymbol{R}(P,t)\cdot\boldsymbol{U}(P,t)$, mais la rotation finale $\boldsymbol{R}(P,t_1)$ n'est pas une combinaison des seules rotations intermédiaires $\boldsymbol{R}(P,t)$, de même la déformation finale n'est pas une combinaison des seules déformations intermédiaires.
- La « rotation *homogène* locale » $\boldsymbol{R}$, parfois évoquée, n'existe pas car le champ matériel $\boldsymbol{R}(P,t)$ est en général un champ non uniforme.
- Dans un mouvement déformant, toutes les directions matérielles issues d'une particule P ont en général une déviation différente [déf. 4.31 p. 66].
- Enfin, les directions matérielles qui sont principales à un instant t [déf. 4.18 p. 58] ne restent pas principales à un autre instant t'.

Quelle que soit l'interprétation que l'on tente de donner à la rotation $\boldsymbol{R}$, il semble difficile de parler d'une « rotation locale de la matière ». Dans un mouvement de milieu continu, la rotation $\boldsymbol{R}$ issue de la décomposition polaire du gradient de la transformation actuel $\boldsymbol{F}$ permet simplement de passer des tenseurs de déformation objectifs aux tenseurs de déformation non objectifs et inversement [éq. (4.23) p. 56].

4.4.4 Propriétés spectrales

■ **Notation 4.15 –** On note $\{\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_3>0\}=\{\lambda_\bullet\}$ les valeurs propres ordonnées du tenseur de déformation $\boldsymbol{U}$ (symétrique défini positif).
On note $\{\boldsymbol{e}_\bullet^U\}$ une base propre orthonormée du tenseur de déformation $\boldsymbol{U}$.
On note $\{\boldsymbol{e}_\bullet^V\}$ une base propre orthonormée du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$.

Les rotations par $\boldsymbol{R}$ dans les équations 4.23 [p. 56] permettent d'affirmer que :

- les valeurs propres des tenseurs de déformation $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ sont identiques ; il en est de même pour les couples de tenseurs de déformation $(\boldsymbol{C},\boldsymbol{B})$, $(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M})$, $(\boldsymbol{E},\boldsymbol{J})$ et $(\boldsymbol{\varepsilon}^U,\boldsymbol{\varepsilon}^V)$ qui sont sur la même ligne dans le tableau p. 54 ;
- la relation entre les directions propres des tenseurs de déformation objectifs et les directions propres des tenseurs de déformation non objectifs est :

$$\boldsymbol{e}_\bullet^V=\mathscr{R}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{e}_\bullet^U)=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{e}_\bullet^U \quad ; \quad \text{etc.} \tag{4.25}$$

Il découle de la définition de la puissance d'un tenseur du second ordre symétrique et du logarithme d'un tenseur du second ordre symétrique défini positif [5] que :

- les valeurs propres de $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{B}$ sont $\{\lambda_\bullet{}^2\}$;
- les valeurs propres de $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{M}$ sont $\{\ln\lambda_\bullet\}$;

[5] Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

– les valeurs propres de $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{J}$ sont $\{\lambda_\bullet{}^2 - 1\}$;
– les valeurs propres de $\boldsymbol{\varepsilon}^U$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^V$ sont $\{\lambda_\bullet - 1\}$;
– les directions propres des tenseurs non objectifs sont les mêmes, on les note $\{\boldsymbol{e}_\bullet^U\}$;
– les directions propres des tenseurs objectifs sont les mêmes, on les note $\{\boldsymbol{e}_\bullet^V\}$.

■ **Théorème 4.16 –** Les valeurs propres $\{\lambda_\bullet\}$ (communes aux tenseurs de déformation $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$) sont les dilatations linéiques dans les directions matérielles $\boldsymbol{u}^{pr}$ qui sont actuellement confondues avec les directions propres des tenseurs de déformation (c'est-à-dire : $\boldsymbol{u}_0^{pr} = \boldsymbol{e}_\bullet^U$ et $\boldsymbol{u}_t^{pr} = \boldsymbol{e}_\bullet^V$).

Démonstration – Soit $\boldsymbol{u}^{pr}$ une direction matérielle telle que $\boldsymbol{u}_0^{pr} = \boldsymbol{e}_i^U$. La dilatation linéique de cette direction matérielle est :

$$\begin{aligned}
K_\ell(\boldsymbol{u}^{pr}) &= (\boldsymbol{e}_i^U \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{e}_i^U)^{\frac{1}{2}} && \text{[éq. (4.10) p. 53]}\\
&= (\boldsymbol{e}_i^U \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{e}_i^U)^{\frac{1}{2}}\\
&= ((\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{e}_i^U) \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{e}_i^U))^{\frac{1}{2}} && (\boldsymbol{U} \text{ est symétrique})\\
&= ((\lambda_i\, \boldsymbol{e}_i^U) \cdot (\lambda_i\, \boldsymbol{e}_i^U))^{\frac{1}{2}} && (\boldsymbol{e}_i^U \text{ est un vecteur propre de } \boldsymbol{U})\\
&= (\lambda_i{}^2)^{\frac{1}{2}} && (\boldsymbol{e}_i^U \text{ est un vecteur unitaire})\\
&= \lambda_i && (\text{car } \lambda_i > 0)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, si la direction de référence de $\boldsymbol{u}^{pr}$ est $\boldsymbol{u}_0^{pr} = \boldsymbol{e}_i^U$ alors sa direction actuelle est :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_t^{pr} &= \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0^{pr}}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0^{pr}\|} && \text{[éq. (4.2) p. 51]}\\
&= \frac{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{e}_i^U}{\|\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{e}_i^U\|} && (\text{décomposition polaire de } \boldsymbol{F})\\
&= \frac{\lambda_i\, \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{e}_i^U}{\|\lambda_i\, \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{e}_i^U\|} && (\boldsymbol{e}_i^U \text{ est vecteur propre de } \boldsymbol{U})\\
&= \frac{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{e}_i^U}{\|\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{e}_i^U\|} = \frac{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{e}_i^U}{\|\boldsymbol{e}_i^U\|} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{e}_i^U = \boldsymbol{e}_i^V && \text{[éq. (4.25) p. 57]}
\end{aligned}$$

La direction actuelle $\boldsymbol{u}_t^{pr}$ de la direction matérielle propre $\boldsymbol{u}^{pr}$ est donc une direction propre du tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$.

On peut donc poser les définitions suivantes :

■ **Définition 4.17 – Dilatations linéiques principales actuelles.** On appelle dilatations linéiques principales actuelles d'une déformation, les valeurs propres actuelles $\{\lambda_\bullet(t)\}$, communes aux tenseurs de déformation actuelle $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$.

■ **Définition 4.18 – Directions matérielles principales actuelles.** On appelle directions matérielles principales actuelles d'une déformation, les directions matérielles $\boldsymbol{u}^{pr}$ actuellement confondues avec les directions principales des tenseurs de déformation (c'est-à-dire que sa direction de référence est $\boldsymbol{u}_0^{pr} = \boldsymbol{e}_\bullet^U$ et sa direction actuelle est $\boldsymbol{u}_t^{pr} = \boldsymbol{e}_\bullet^V$).

■ **Théorème 4.19 – Objectivité des dilatations linéiques principales actuelles.** Les dilatations linéiques principales actuelles $\{\lambda_\bullet(t)\}$ d'une déformation sont des grandeurs scalaires objectives.

Démonstration – Les dilatations linéiques principales sont les valeurs propres communes aux tenseurs de déformation $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$, dont les formules de changement d'observateur sont :

$$\widetilde{\boldsymbol{U}} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_0}(\boldsymbol{U}) \quad \text{[éq. (4.22) p. 56]} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\boldsymbol{V}} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{V}) \quad \text{[th. 4.12 p. 55]}$$

La rotation d'un tenseur du second ordre ne change pas ses valeurs propres. On a donc $\widetilde{\lambda}_\bullet = \lambda_\bullet$.

4.5 Dilatation volumique

4.5.1 Définition

Considérons quatre particules P, P', P'' et P'''. Les trois biparticules $\{P,P'\}$,$\{P,P''\}$ et $\{P,P'''\}$, issues de la particule P, ont respectivement les positions de référence suivantes :

$$\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0 \quad ; \quad \boldsymbol{x}_0'' - \boldsymbol{x}_0 \quad ; \quad \boldsymbol{x}_0''' - \boldsymbol{x}_0$$

En utilisant la notation 2.11 [p. 28], leurs positions actuelles sont [éq. (4.11) p. 53] :

$$\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0) + \cdots \quad ; \quad \boldsymbol{x}_t'' - \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}_0'' - \boldsymbol{x}_0) + \cdots \quad ; \quad \boldsymbol{x}_t''' - \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}_0''' - \boldsymbol{x}_0) + \cdots$$

Le volume du parallélépipède défini par les positions de référence des quatre particules P, P', P'' et P''' (supposées non coplanaires) est le produit mixte noté v_0 :

$$v_0 = [\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\,,\boldsymbol{x}_0'' - \boldsymbol{x}_0\,,\boldsymbol{x}_0''' - \boldsymbol{x}_0]$$

Le volume du parallélépipède défini par les positions actuelles de ces quatre particules est le produit mixte :

$$\begin{aligned} v_t &= [\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t\,,\boldsymbol{x}_t'' - \boldsymbol{x}_t\,,\boldsymbol{x}_t''' - \boldsymbol{x}_t] \\ &= [\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0) + \cdots\,,\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}_0'' - \boldsymbol{x}_0) + \cdots\,,\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}_0''' - \boldsymbol{x}_0) + \cdots] \\ &= (\det\boldsymbol{F})\,[\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\,,\boldsymbol{x}_0'' - \boldsymbol{x}_0\,,\boldsymbol{x}_0''' - \boldsymbol{x}_0] + \cdots \qquad \text{(identité } [\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{w}] = (\det\boldsymbol{F})\,[\boldsymbol{u}\,,\boldsymbol{v}\,,\boldsymbol{w}]) \\ &= (\det\boldsymbol{F})\,v_0 + \cdots \end{aligned}$$

Le rapport de ces deux volumes est donc :

$$\frac{v_t}{v_0} = \frac{[\boldsymbol{x}_t' - \boldsymbol{x}_t\,,\boldsymbol{x}_t'' - \boldsymbol{x}_t\,,\boldsymbol{x}_t''' - \boldsymbol{x}_t]}{[\boldsymbol{x}_0' - \boldsymbol{x}_0\,,\boldsymbol{x}_0'' - \boldsymbol{x}_0\,,\boldsymbol{x}_0''' - \boldsymbol{x}_0]} = \det\boldsymbol{F} + \cdots \tag{4.26}$$

Attention ! – Les particules dont la position de référence appartient au parallélépipède défini par les quatre positions initiales $\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_0',\boldsymbol{x}_0'',\boldsymbol{x}_0'''\}$ n'ont pas nécessairement leur position actuelle dans le parallélépipède défini par les quatre positions actuelles $\{\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{x}_t',\boldsymbol{x}_t'',\boldsymbol{x}_t'''\}$. Autrement dit : un parallélépipède initial ne se transforme généralement pas en parallélépipède. Ce n'est qu'après la définition correcte d'une limite que l'on pourra parler de dilatation volumique.

Lorsque les trois particules P', P'' et P''' tendent vers la particule P, chacune sur son propre chemin matériel $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ et $\mathscr{C}'''$, les deux volumes v_0 et v_t tendent vers 0.

- **Définition 4.20 – Dilatation volumique actuelle.** Soient trois chemins matériels distincts $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$ et $\mathscr{C}'''$ issus d'une particule P. On appelle dilatation volumique actuelle en P, notée K_v, la limite suivante :

$$K_v(P,t) = \lim_{\substack{P'\in\mathscr{C}'\to P \\ P''\in\mathscr{C}''\to P \\ P'''\in\mathscr{C}'''\to P}} \frac{v_t}{v_0} \tag{4.27}$$

L'équation (4.26) montre que cette limite est indépendante des trois chemins matériels. Cette limite est :

$$K_v(P,t) = \det\boldsymbol{F} \tag{4.28}$$

La dilatation volumique est un nombre sans dimension positif car $\det\boldsymbol{F} > 0$ [éq. (2.20) p. 29] :

– pour $0 < K_v < 1$, il y a contraction volumique en la particule P ;
– pour $K_v > 1$, il y a extension volumique en la particule P.

La dilatation volumique actuelle en une particule P peut s'exprimer aussi bien avec les tenseurs de déformation objectifs ou non objectifs :

$$K_v = \det\boldsymbol{F} = \det\boldsymbol{U} = \det\boldsymbol{V} = \det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^U) = \det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^V) \tag{4.29}$$

$$= (\det\boldsymbol{C})^{\frac{1}{2}} = (\det\boldsymbol{B})^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\boldsymbol{L}} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\boldsymbol{M}} = (\det(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{E}))^{\frac{1}{2}} = (\det(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{J}))^{\frac{1}{2}} \tag{4.30}$$

4.5.2 Changement d'observateur de la dilatation volumique

■ **Théorème 4.21 – Objectivité de la dilatation volumique actuelle.** La dilatation volumique actuelle en une particule est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La dilatation volumique est le déterminant commun des tenseurs de déformation $\boldsymbol{U}$ et $\boldsymbol{V}$ [éq. (4.29)], dont les formules de changement d'observateur sont :

$$\widetilde{\boldsymbol{U}} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_0}(\boldsymbol{U}) \quad \text{[éq. (4.22) p. 56]} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\boldsymbol{V}} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{V}) \quad \text{[th. 4.12 p. 55]}$$

La rotation d'un tenseur du second ordre ne change pas son déterminant. On a donc :

$$\widetilde{K}_v = \det\left(\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_0}(\boldsymbol{U})\right) = \det\widetilde{\boldsymbol{U}} = \det\boldsymbol{U} = K_v$$

On obtient le même résultat en partant de la définition $\widetilde{K}_v = \det\widetilde{\boldsymbol{V}}$.

4.6 Dilatation surfacique

4.6.1 Facette matérielle

■ **Définition 4.22 – Facette matérielle.** On appelle facette matérielle en une particule P le plan engendré par deux directions matérielles issues de P non colinéaires. Une facette matérielle est identifiée par la normale commune aux deux directions matérielles.

Soient deux directions matérielles $\boldsymbol{u}'$ et $\boldsymbol{u}''$ issues d'une particule P, non colinéaires. La normale $\boldsymbol{n}$ à cette facette matérielle peut être désignée aussi bien par sa normale de référence que par sa normale actuelle :

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{u}'_0 \wedge \boldsymbol{u}''_0}{\|\boldsymbol{u}'_0 \wedge \boldsymbol{u}''_0\|} \quad ; \quad \boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{u}'_t \wedge \boldsymbol{u}''_t}{\|\boldsymbol{u}'_t \wedge \boldsymbol{u}''_t\|} \tag{4.31}$$

■ **Proposition 4.23 –** Les relations entre la normale actuelle et la normale de référence d'une facette matérielle sont :

$$\boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\|} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{F}^{\top}\cdot\boldsymbol{n}_t}{\|\boldsymbol{F}^{\top}\cdot\boldsymbol{n}_t\|} \tag{4.32}$$

Démonstration – La relation entre la direction de référence et la direction actuelle d'une direction matérielle a été donnée en (4.2) [p. 51]. On a donc :

$$\boldsymbol{u}'_t = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}'_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}'_0\|} \quad ; \quad \boldsymbol{u}''_t = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}''_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}''_0\|}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_t' \wedge \boldsymbol{u}_t'' &= \frac{(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0') \wedge (\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0'')}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0'\|\,\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0''\|} \\
&= \frac{(\det\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot(\boldsymbol{u}_0'\wedge\boldsymbol{u}_0'')}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0'\|\,\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0''\|} \qquad \text{(identité algébrique : } (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u})\wedge(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}) = (\det\boldsymbol{T})\,\boldsymbol{T}^{-\top}\cdot(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v})\text{)} \\
&= \frac{(\det\boldsymbol{F})\,\|\boldsymbol{u}_0'\wedge\boldsymbol{u}_0''\|}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0'\|\,\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0''\|}\,(\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0) \qquad \text{[éq. (4.31) p. 60]} \\
&= k\,(\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0) \qquad \text{(où } k = \frac{(\det\boldsymbol{F})\,\|\boldsymbol{u}_0'\wedge\boldsymbol{u}_0''\|}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0'\|\,\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0''\|} > 0\text{)} \\
\boldsymbol{n}_t &= \frac{\boldsymbol{u}_t'\wedge\boldsymbol{u}_t''}{\|\boldsymbol{u}_t'\wedge\boldsymbol{u}_t''\|} = \frac{k\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0}{\|k\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\|} = \frac{\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\|} \qquad \text{(car } k>0\text{)}
\end{aligned}$$

On trouve la relation inverse en multipliant à gauche par $\boldsymbol{F}^{\top}$, on obtient :

$$\boldsymbol{F}^{\top}\cdot\boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\|} \qquad \Rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{n}_0 = \|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\|\,\boldsymbol{F}^{\top}\cdot\boldsymbol{n}_t \\ \text{et} \\ \|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\| = \frac{1}{\|\boldsymbol{F}^{\top}\cdot\boldsymbol{n}_t\|} \end{array}\right\} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{F}^{\top}\cdot\boldsymbol{n}_t}{\|\boldsymbol{F}^{\top}\cdot\boldsymbol{n}_t\|}$$

La relation entre la normale actuelle et la normale de référence d'une facette matérielle est différente de la relation entre la direction actuelle et la direction de référence d'une direction matérielle [éq. (4.2) p. 51]. *La normale à une facette matérielle n'est pas une direction matérielle*.

4.6.2 Changement d'observateur de la normale à une facette matérielle

- **Théorème 4.24 –** Les formules de changement d'observateur de la normale actuelle et de la normale de référence sont :

$$\widetilde{\boldsymbol{n}}_t = \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{n}_t \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\boldsymbol{n}}_0 = \boldsymbol{Q}_0\cdot\boldsymbol{n}_0$$

Démonstration – La définition (universelle) de la normale actuelle d'une facette matérielle pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{n}}_t &= \frac{\widetilde{\boldsymbol{u}}_t'\wedge\widetilde{\boldsymbol{u}}_t''}{\|\widetilde{\boldsymbol{u}}_t'\wedge\widetilde{\boldsymbol{u}}_t''\|} \qquad \text{[éq. (4.31) p.60]} \\
&= \frac{(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{u}_t')\wedge(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{u}_t'')}{\|(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{u}_t')\wedge(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{u}_t'')\|} \qquad \text{[éq. (4.4) p.52]} \\
&= \frac{\boldsymbol{Q}_t\cdot(\boldsymbol{u}_t'\wedge\boldsymbol{u}_t'')}{\|\boldsymbol{Q}_t\cdot(\boldsymbol{u}_t'\wedge\boldsymbol{u}_t'')\|} \qquad \text{(propriété des rotations)} \\
&= \frac{\boldsymbol{Q}_t\cdot(\boldsymbol{u}_t'\wedge\boldsymbol{u}_t'')}{\|\boldsymbol{u}_t'\wedge\boldsymbol{u}_t''\|} \qquad \text{(propriété des rotations)} \\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{n}_t \qquad \text{[éq. (4.31) p.60]}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

En particulier, à l'instant de référence, il vient :

$$\widetilde{\boldsymbol{n}}_0 = \boldsymbol{Q}_0\cdot\boldsymbol{n}_0 \tag{4.34}$$

Remarque – Bien qu'une facette matérielle ne soit à pas, à proprement parler, une grandeur physique associée à une particule, la formule de changement d'observateur de sa normale actuelle est la même que celle d'une grandeur physique vectorielle objective [th. 3.4 p. 40].

4.6.3 Dilatation surfacique actuelle dans une facette matérielle

Soient trois particules P, P' et P''. Les deux biparticules $\{P,P'\}$ et $\{P,P''\}$, issues de la particule P, ont les positions de référence $\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0$ et $\boldsymbol{x}''_0-\boldsymbol{x}_0$. Leurs positions actuelles sont :

$$\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)+\cdots \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{x}''_t-\boldsymbol{x}_t=\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}''_0-\boldsymbol{x}_0)+\cdots \qquad \text{[éq. (4.11) p. 53]}$$

Les trois particules P, P' et P'' définissent, par leur position de référence et par leur position actuelle, deux parallélogrammes d'aire positive s_0 et s_t, de normales unitaires $\overline{\boldsymbol{n}}_0$ et $\overline{\boldsymbol{n}}_t$:

$$\overline{\boldsymbol{n}}_0\,s_0=(\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)\wedge(\boldsymbol{x}''_0-\boldsymbol{x}_0) \qquad \text{et} \qquad \overline{\boldsymbol{n}}_t\,s_t=(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t)\wedge(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t) \tag{4.35}$$

Attention ! – Les particules dont la position de référence est intérieure au parallélogramme (plan) défini par les positions initiales $\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}'_0,\boldsymbol{x}''_0\}$ n'ont pas nécessairement leur position actuelle dans le plan du parallélogramme défini par les trois positions actuelles $\{\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{x}'_t,\boldsymbol{x}''_t\}$. Autrement dit : un parallélogramme initial ne se transforme généralement pas en parallélogramme. Ce n'est qu'après la définition correcte d'une limite que l'on pourra parler de dilatation surfacique.

De l'équation (4.35) il vient :

$$\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{n}}_t\,s_t &= \Big(\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)+\cdots\Big)\wedge\Big(\boldsymbol{F}\cdot(\boldsymbol{x}''_0-\boldsymbol{x}_0)+\cdots\Big) && \text{[éq. (4.35) p. 62]}\\
&= (\det\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\Big((\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0)\wedge(\boldsymbol{x}''_0-\boldsymbol{x}_0)\Big)+\cdots && (\text{car } (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u})\wedge(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v})=(\det\boldsymbol{T})\,\boldsymbol{T}^{-\top}\cdot(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}))\\
\overline{\boldsymbol{n}}_t\,s_t &= (\det\boldsymbol{F})\,(\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\overline{\boldsymbol{n}}_0)\,s_0+\cdots && \text{[éq. (4.35) p. 62]}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

En prenant la norme de l'égalité (4.36), il vient :

$$s_t=(\det\boldsymbol{F})\,\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\overline{\boldsymbol{n}}_0\|\,s_0+\cdots \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{s_t}{s_0}=(\det\boldsymbol{F})\,\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\overline{\boldsymbol{n}}_0\|+\cdots \tag{4.37}$$

Lorsque les deux particules P' et P'' tendent vers la particule P, chacune sur son propre chemin matériel, elles définissent deux directions matérielles dont les directions de référence sont $\boldsymbol{u}'_0$ et $\boldsymbol{u}''_0$. La normale unitaire $\overline{\boldsymbol{n}}_0$ commune aux deux vecteurs $\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0$ et $\boldsymbol{x}''_0-\boldsymbol{x}_0$ tend vers la normale unitaire $\boldsymbol{n}_0$ commune aux deux directions de référence $\boldsymbol{u}'_0$ et $\boldsymbol{u}''_0$; enfin, les deux aires s_0 et s_t tendent vers 0. L'équation (4.37) [p. 62] montre que le rapport $\frac{s_t}{s_0}$ ne dépend pas explicitement de $\boldsymbol{x}'_0-\boldsymbol{x}_0$ ni de $\boldsymbol{x}''_0-\boldsymbol{x}_0$, mais seulement de leur normale commune $\overline{\boldsymbol{n}}_0$. On pose donc la définition suivante :

- **Définition 4.25 – Dilatation surfacique actuelle.** Soient deux chemins matériels $\mathscr{C}'$ et $\mathscr{C}''$ issus d'une particule P, définissant en P une facette matérielle $\boldsymbol{n}$ de normale de référence $\boldsymbol{n}_0$. On appelle dilatation surfacique actuelle en P dans la facette matérielle, la limite suivante :

$$K_s(\boldsymbol{n})=\lim_{\substack{P'\in\mathscr{C}'\to P\\ P''\in\mathscr{C}''\to P}}\frac{s_t}{s_0} \tag{4.38}$$

L'équation (4.37) montre que cette limite est :

$$K_s(\boldsymbol{n})=(\det\boldsymbol{F})\,\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\| \tag{4.39}$$

La dilatation surfacique actuelle dans une facette matérielle est un scalaire sans dimension strictement positif car $\det\boldsymbol{F}>0$ [éq. (2.20) p. 29] :

– pour $0 < K_s < 1$, il y a contraction surfacique dans la facette matérielle ;
– pour $K_s > 1$, il y a extension surfacique dans la facette matérielle.

La dilatation surfacique actuelle dans une facette matérielle peut s'exprimer aussi bien avec les tenseurs de déformation objectifs ou non objectifs :

Avec un tenseur de déformation non objectif :

$$\begin{aligned}
K_s(\boldsymbol{n}) &= \det(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})\,\|(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U})^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\| \qquad \text{(éq. (4.39) p. 62 et décomposition polaire } \boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\text{)}\\
&= (\det\boldsymbol{U})\,\|\boldsymbol{R}^{\top}\cdot(\boldsymbol{U}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0)\| = (\det\boldsymbol{U})\,\|\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_0\| \qquad (\boldsymbol{R}\text{ orthogonal et }\boldsymbol{U}\text{ symétrique})\\
K_s(\boldsymbol{n}) &= K_v\,\|\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_0\| = K_v\,\|\boldsymbol{C}^{-\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{n}_0\| = K_v\,\|(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{U})^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_0\| = \cdots
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Avec un tenseur de déformation objectif :

$$\begin{aligned}
K_s(\boldsymbol{n}) &= \det(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R})\,\|(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R})^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\| \qquad \text{(éq. (4.39) p. 62 et décomposition polaire } \boldsymbol{F}=\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}\text{)}\\
&= (\det\boldsymbol{V})\,\|\boldsymbol{V}^{-\top}\cdot\boldsymbol{R}\cdot\frac{\boldsymbol{R}^{\top}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_t}{\|\boldsymbol{R}^{\top}\cdot\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_t\|}\| = \frac{\det\boldsymbol{V}}{\|\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_t\|} \qquad (\boldsymbol{R}\text{ orthogonal et }\boldsymbol{V}\text{ symétrique})\\
K_s(\boldsymbol{n}) &= K_v\,\|\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}_t\|^{-1} = K_v\,\|\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\cdot\boldsymbol{n}_t\|^{-1} = K_v\,\|(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^{V})^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_t\| = \cdots
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Les tenseurs de déformation non objectifs identifient la facette matérielle par sa normale de référence $\boldsymbol{n}_0$ [éq. (4.40)] alors que les tenseurs de déformation objectifs l'identifient par sa normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ [éq. (4.41)].

4.6.4 Changement d'observateur des dilatations surfaciques

■ **Théorème 4.26 – Objectivité de la dilatation surfacique dans une facette matérielle.** La dilatation surfacique dans une facette matérielle est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – L'application de la définition (universelle) de la dilatation surfacique dans une facette matérielle pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\widetilde{K}_s(\boldsymbol{n}) &= \lim_{\substack{P'\in\mathscr{C}'\to P\\ P''\in\mathscr{C}''\to P}} \frac{\widetilde{s}_t}{\widetilde{s}_0} \qquad \text{[éq. (4.38) p. 62]}\\
&= \lim_{\substack{P'\in\mathscr{C}'\to P\\ P''\in\mathscr{C}''\to P}} \frac{s_t}{s_0} \qquad \text{(les aires sont des grandeurs scalaires objectives)}\\
&= K_s(\boldsymbol{n}) \qquad \text{[éq. (4.38) p. 62]}
\end{aligned}$$

4.7 Distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales

4.7.1 Définition

Considérons trois directions matérielles *initialement orthogonales* issues d'une particule P. Le produit mixte de leurs directions de référence est donc $[\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}'_0, \boldsymbol{u}''_0] = \pm 1$.

Rappel – Le produit mixte de trois vecteurs unitaires reflète l'angle solide formé par les trois vecteurs unitaires.

On note $\boldsymbol{u}_t$, $\boldsymbol{u}'_t$ et $\boldsymbol{u}''_t$ les directions actuelles de ces directions matérielles, et on note K_ℓ, K'_ℓ et K''_ℓ les dilatations linéiques respectives. En utilisant la relation entre les directions de référence

et actuelle d'une direction matérielle [éq. (4.2) p. 51] et la définition de la dilatation linéique [éq. (4.9) p. 53], il vient :

$$[\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}'_t,\boldsymbol{u}''_t] = \left[\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0}{K'_\ell},\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}'_0}{K''_\ell},\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}''_0}{K'''_\ell}\right] = \frac{[\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}'_0,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}''_0]}{K_\ell K'_\ell K''_\ell} = \frac{\det\boldsymbol{F}\,[\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}'_0,\boldsymbol{u}''_0]}{K_\ell K'_\ell K''_\ell}$$

$$\frac{[\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}'_t,\boldsymbol{u}''_t]}{[\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}'_0,\boldsymbol{u}''_0]} = \frac{\det\boldsymbol{F}}{K_\ell K'_\ell K''_\ell} = \frac{K_v}{K_\ell K'_\ell K''_\ell} > 0 \quad \text{(car les dilatations lin. et vol. sont positives)} \tag{4.42}$$

L'équation (4.42) montre que dans toute déformation les signes des produits mixtes $[\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}'_0,\boldsymbol{u}''_0]$ et $[\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}'_t,\boldsymbol{u}''_t]$ sont les mêmes. Puisque les valeurs extrémales du produit mixte $[\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}'_t,\boldsymbol{u}''_t]$ sont ± 1, on a donc toujours :

$$0 < \frac{K_v}{K_l K'_l K''_l} \leqslant 1$$

- **Définition 4.27 – Distorsion stérique actuelle.** On appelle distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles *initialement orthogonales* la quantité notée δ^s définie par :

$$\delta^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'') = \frac{K_\ell K'_\ell K''_\ell}{K_v} = \frac{[\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}'_0,\boldsymbol{u}''_0]}{[\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}'_t,\boldsymbol{u}''_t]} = \left|\frac{1}{[\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}'_t,\boldsymbol{u}''_t]}\right| \tag{4.43}$$

La distorsion stérique est un scalaire sans dimension compris entre 1 (pas de distorsion stérique) et l'infini (les directions matérielles deviennent coplanaires ou confondues). Elle reflète la diminution de l'angle solide formé par les trois directions matérielles initialement orthogonales.

Puisqu'elle s'exprime en fonction de la dilatation volumique K_v et des trois dilatations linéiques K_l, K'_l et K''_l, elle peut être calculée avec n'importe quel tenseur de déformation.

Contrairement à la dilatation volumique, la distorsion stérique actuelle en une particule P dépend du choix des trois directions matérielles initialement orthogonales issues de P. On montre en annexe [éq. (A.13) p. 106] que pour une déformation donnée en une particule, il existe une infinité de triplets de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion stérique actuelle est maximale. Le maximum de distorsion stérique en une particule est :

$$\delta^s_{max} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3} \tag{4.44}$$

où les $\lambda_\bullet$ sont les dilatations linéiques principales actuelles. On peut les évaluer avec tout tenseur de déformation.

Remarque – En chaque particule et à chaque instant, il existe aussi des triplets de directions matérielles initialement orthogonales sans distorsion stérique ($\delta^s = 1$) : ce sont les triplets de directions matérielles principales actuelles [déf. 4.18 p. 58]. En effet, les dilatations linéiques dans ces directions matérielles sont les dilatations linéiques principales λ_i dont le produit est K_v ; l'équation (4.43) [p. 64] montre qu'on a alors $\delta^s = 1$. La démonstration donnée en annexe A.3 [p. 106] montre accessoirement qu'il n'en existe pas d'autre.

4.7.2 Changement d'observateur des distorsions stériques

- **Théorème 4.28 – Objectivité des distorsions stériques.** La distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – L'application de la définition (universelle) de la distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'') &= \frac{\widetilde{K}_v}{\widetilde{K}_l\,\widetilde{K}'_l\,\widetilde{K}''_l} && \text{[déf. (4.43) p. 64]}\\
&= \frac{K_v}{K_l\,K'_l\,K''_l} && \text{(objectivité des dilations volumique et linéiques)}\\
&= \delta^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'') && \text{[déf. (4.43) p. 64]}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

4.8 Distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales

4.8.1 Définition

Considérons deux directions matérielles *initialement orthogonales* issues d'une particule P . Ces deux directions matérielles déterminent une facette matérielle dont la normale de référence est $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{u}_0 \wedge \boldsymbol{u}'_0$. Les deux directions matérielles étant initialement orthogonales, les trois vecteurs $\{\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}'_0, \boldsymbol{n}_0\}$ forment un trièdre orthonormé.

L'angle actuel α_t de ces deux directions matérielles est :

$$\begin{aligned}
\sin\alpha_t\,\boldsymbol{n}_t = \boldsymbol{u}_t \wedge \boldsymbol{u}'_t &= \frac{(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0)\wedge(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}'_0)}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|\,\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}'_0\|} && \text{[éq. (4.2) p. 51]}\\
&= \frac{(\det\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot(\boldsymbol{u}_0\wedge\boldsymbol{u}'_0)}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|\,\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}'_0\|} && \text{(identité : } (\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{u})\wedge(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}) = (\det\boldsymbol{T})\,\boldsymbol{T}^{-\top}\cdot(\boldsymbol{u}\wedge\boldsymbol{v}))\\
&= \frac{(\det\boldsymbol{F})\,\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0}{K_\ell\,K'_\ell} && \text{[éq. (4.10) p. 53]}\\
&= \frac{\det\boldsymbol{F}\;\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\|\,\boldsymbol{n}_t}{K_\ell\,K'_\ell} && \text{[éq. (4.32) p. 60]}\\
\sin\alpha_t\,\boldsymbol{n}_t &= \frac{K_s}{K_\ell\,K'_\ell}\,\boldsymbol{n}_t && \text{[éq. (4.39) p. 62]}
\end{aligned}$$

- **Définition 4.29 – Distorsion angulaire actuelle.** On appelle distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles *initialement orthogonales* la quantité :

$$\delta^a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}') = \frac{K_\ell\,K'_\ell}{K_s} = \frac{1}{\sin\alpha_t} \qquad \text{où} \quad 0 < \alpha_t \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{4.46}$$

La distorsion angulaire est un scalaire sans dimension compris entre 1 (pas de distorsion angulaire : $\boldsymbol{u}_t \perp \boldsymbol{u}'_t$, $\alpha_t = \pi/2$) et l'infini ($\boldsymbol{u}_t$ confondu avec $\boldsymbol{u}'_t$, $\alpha_t = 0$). La distorsion angulaire traduit la diminution de l'angle entre les deux directions matérielles $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}'$ initialement orthogonales.

Puisqu'elle s'exprime en fonction de la dilatation surfacique K_s et des deux dilatations linéiques K_ℓ et K'_ℓ, elle peut être calculée avec n'importe quel tenseur de déformation.

Contrairement à la dilatation surfacique, la distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales dépend du choix des deux directions initialement orthogonales issues d'une particule P. On montre en annexe [éq. (A.11) p. 105] que pour une déformation

donnée en une particule, il existe un couple unique [6] de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion angulaire est maximale. La distorsion angulaire maximale en une particule vaut :

$$\delta^a_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) \tag{4.47}$$

où λ_1 et λ_3 sont les dilatations linéiques principales actuelles extrêmes.

Remarques – En chaque particule et à chaque instant, il existe aussi des couples de directions matérielles initialement orthogonales sans distorsion angulaire ($\delta^a = 1$). Par exemple les couples de directions matérielles principales actuelles [déf. 4.18 p. 58] restent orthogonaux car leur direction de référence sont des directions propres de $\boldsymbol{U}$ (donc orthogonales) et leur direction actuelle sont les directions propres de $\boldsymbol{V}$ (aussi orthogonales). La démonstration en annexe [section A.2.1 p. 103] montre accessoirement qu'il existe d'autres couples de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion angulaire actuelle est 1.

Par ailleurs, on entend parfois parler de « distorsion dans un plan ». Il est facile de vérifier que la distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales dépend du choix de ces deux directions matérielles initialement orthogonales dans le plan (initial). Il semble difficile de parler de la distorsion angulaire dans un plan initial sans préciser de quelles directions initialement orthogonales du plan il s'agit.

4.8.2 Changement d'observateur des distorsions angulaires

- **Théorème 4.30 – Objectivité des distorsions angulaires.** La distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – L'application de la définition (universelle) de la distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ conduit à :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\delta}^a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}') &= \frac{\widetilde{K}_v}{\widetilde{K}_l\,\widetilde{K}'_l} && \text{[déf. (4.46) p. 65]}\\
&= \frac{K_v}{K_l\,K'_l} && \text{(objectivité des dilations volumique et linéiques)}\\
&= \delta^a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}') && \text{[déf. (4.46) p. 65]}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

4.9 Déviation d'une direction matérielle

- **Définition 4.31 – Déviation actuelle.** Soit une direction matérielle $\boldsymbol{u}$. Sa direction de référence est $\boldsymbol{u}_0$ et sa direction actuelle est $\boldsymbol{u}_t$. On appelle déviation actuelle d'une direction matérielle, l'angle entre sa direction de référence et sa direction actuelle :

$$\beta(\boldsymbol{u}) = \mathrm{Arccos}(\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{u}_0) \qquad (\beta \in [0;\pi])$$

En utilisant les relations (4.2) [p. 51], on peut calculer la déviation actuelle d'une direction matérielle entre les instants t_0 et t en identifiant la direction matérielle aussi bien par sa direction

[6] Ce sont les deux directions matérielles dont les directions de référence sont les deux bissectrices des directions matérielles principales extrêmes.

de référence que par sa direction actuelle :

$$\beta(\boldsymbol{u}) = \mathrm{Arccos}(\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{u}_0) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t}{K_\ell}\right) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{V}^{-1} \cdot \boldsymbol{u}_t}{K_\ell}\right) \tag{4.49}$$

$$= \mathrm{Arccos}\left(\frac{\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0}{K_\ell}\right) = \mathrm{Arccos}\left(\frac{\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{u}_0}{K_\ell}\right) \tag{4.50}$$

On constate que chaque direction matérielle issue d'une particule P a sa propre déviation [7].

Remarque – Pour un mouvement donné, il existe en une particule, une ou trois directions matérielles qui ne dont pas déviées : ce sont les directions matérielles dont la direction de référence est confondue avec une direction propre réelle de $\boldsymbol{F}$ [8] (ou dont la direction actuelle est confondue avec une direction propre de $\boldsymbol{F}^{-1}$).

Par ailleurs, pour déterminer la déviation actuelle d'une direction matérielle issue d'une particule P, on constate dans les éq. (4.49) et (4.50) que la seule connaissance d'un tenseur de déformation actuelle (objectif ou non) en P est insuffisante : il faut connaître en plus le champ de rotations $\boldsymbol{R}(P,t)$ (non objectif) de la décomposition polaire de $\boldsymbol{F}$.

- **Théorème 4.32 – Non objectivité de la déviation actuelle.** La déviation actuelle d'une direction matérielle est une grandeur scalaire non objective.

Démonstration – La définition (universelle) de la déviation d'une direction matérielle pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\cos\widetilde{\beta} &= \widetilde{\boldsymbol{u}}_0 \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_t && \text{[déf. (4.31) p. 66]}\\
&= (\boldsymbol{Q}_0 \cdot \boldsymbol{u}_0) \cdot (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t) && \text{[éq. (4.5) p. 52 et éq. (4.4) p. 52]}\\
&= \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{Q}_0^\top \cdot \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t\\
&\neq \cos\beta
\end{aligned} \tag{4.51}$$

4.10 Décomposition des déformations

4.10.1 Déformation sphérique

- **Définition 4.33 – Déformation sphérique.** On dit que la déformation en une particule P est une déformation sphérique si les dilatations linéiques de toutes les directions matérielles issues de P sont identiques.

En particulier, les dilatations linéiques principales sont : $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

Dans une déformation sphérique, tous les tenseurs de déformation sont sphériques :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} = \lambda\,\boldsymbol{G} && \boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} = \lambda^2\boldsymbol{G} && \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M} = \ln\lambda\,\boldsymbol{G}\\
&\boldsymbol{\varepsilon}^U = \boldsymbol{\varepsilon}^V = (\lambda-1)\,\boldsymbol{G} && \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\lambda^2-1)\,\boldsymbol{G} && \text{où} \quad \lambda = K_v^{\frac{1}{3}}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

- **Propriété 4.34 –** Le lecteur vérifiera aisément que, dans une déformation sphérique en une particule P, on a les propriétés suivantes :

[7] Voir la remarque *Pseudo « rotation de la matière »* [p. 57].

[8] On rappelle que le tenseur $\boldsymbol{F}$ est en général non symétrique. Il peut donc avoir une ou trois valeurs propres réelles.

– la dilatation volumique est λ^3,
– la dilatation surfacique de toute facette matérielle est λ^2,
– la distorsion stérique de tout triplet de directions matérielles initialement orthogonales est 1,
– la distorsion angulaire de tout couple de directions matérielles initialement orthogonales est 1.

4.10.2 Déformation isovolume

■ **Définition 4.35 – Déformation isovolume.** On dit que la déformation en une particule P est une déformation isovolume si la dilatation volumique K_v en P vaut 1.

D'après l'équation (4.30) [p. 60], on en déduit que toute déformation isovolume, est caractérisée par l'une des relations suivantes :

$$\det\boldsymbol{U} = \det\boldsymbol{C} = \det\boldsymbol{V} = \det\boldsymbol{B} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\boldsymbol{L}} = \mathrm{e}^{\mathrm{tr}\boldsymbol{M}} = 1 \tag{4.53}$$

Dans une déformation isovolume, les tenseurs de déformation $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{B}$ sont de déterminant unité, alors que les tenseurs de déformation $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{M}$ sont de trace nulle [(9)].

Si on utilise les tenseurs de déformation $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{J}$, une déformation isovolume est caractérisée par une relation entre leurs invariants fondamentaux :

$$1 = \det\boldsymbol{C} = \det(2\boldsymbol{E}+\boldsymbol{G}) \quad \Rightarrow \quad E_{\mathrm{I}} + 2E_{\mathrm{II}} + 4E_{\mathrm{III}} = 0$$
$$1 = \det\boldsymbol{B} = \det(2\boldsymbol{J}+\boldsymbol{G}) \quad \Rightarrow \quad J_{\mathrm{I}} + 2J_{\mathrm{II}} + 4J_{\mathrm{III}} = 0$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier, à partir de l'égalité $\det\boldsymbol{U} = \det\boldsymbol{V} = 1$, que la caractérisation d'une déformation isovolume avec les tenseurs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^U$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^V$ est :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^U_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\varepsilon}^U_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{\varepsilon}^U_{\mathrm{III}} = 0 \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}^V_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{\varepsilon}^V_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{\varepsilon}^V_{\mathrm{III}} = 0 \tag{4.54}$$

4.10.3 Décomposition des déformations

■ **Théorème 4.36 – Décomposition des déformations.** Toute déformation peut être interprétée *de manière unique* comme la composition *commutative* d'une déformation sphérique et d'une déformation isovolume. La représentation tensorielle de cette décomposition commutative des déformations varie selon le tenseur de déformation utilisé.

Démonstration – On envisage différents tenseurs de déformation :
Avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}$. La décomposition commutative est :

$$\boldsymbol{V} = \Big(\underbrace{(\det\boldsymbol{V})^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{V}^{isov}}\Big)\cdot\Big(\underbrace{(\det\boldsymbol{V})^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{V}^{sph}}\Big) = (K_v{}^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{V})\cdot(K_v{}^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{G}) \tag{4.55}$$

Le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}^{isov}$ est de déterminant unité, il mesure donc une déformation isovolume [éq. (4.53) p. 68] ; le tenseur de déformation $\boldsymbol{V}^{sph}$ est sphérique, il mesure donc une déformation sphérique [éq. (4.52) p. 67]. De plus, le tenseur $\boldsymbol{V}^{sph}$ étant sphérique, toutes les bases sont des bases propres. Il a donc une base propre commune avec le tenseur $\boldsymbol{V}^{isov}$, le produit simplement contracté $\boldsymbol{V}^{sph}\cdot\boldsymbol{V}^{isov}$ est donc commutatif.

(9) On rappelle que les tenseurs du second ordre de trace nulle sont traditionnellement appelés « déviateurs », bien qu'ils ne dévient pas tous les vecteurs.

Avec les tenseurs de déformation $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{C}$ et $\boldsymbol{B}$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que la décomposition commutative de la déformation s'écrit aussi sous forme de produit simplement contracté commutatif :

$$\boldsymbol{U} = (K_v^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{U})\cdot(K_v^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{G}) \qquad \boldsymbol{C} = (K_v^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{C})\cdot(K_v^{\frac{2}{3}}\boldsymbol{G}) \qquad \boldsymbol{B} = (K_v^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{B})\cdot(K_v^{\frac{2}{3}}\boldsymbol{G})$$

Avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$. Quand on utilise le tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$, la décomposition commutative de la déformation en déformation sphérique et déformation isovolume est une somme de tenseurs :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M} &= \mathbf{ln}\left(\boldsymbol{V}^{sph}\cdot\boldsymbol{V}^{isov}\right) = \mathbf{ln}\boldsymbol{V}^{sph} + \mathbf{ln}\boldsymbol{V}^{isov} \qquad (\boldsymbol{V}^{sph} \text{ et } \boldsymbol{V}^{isov} \text{ ont une base propre commune})\\
&= \mathbf{ln}\left((\det\boldsymbol{V})^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{G}\right) + \mathbf{ln}\left(\frac{\boldsymbol{V}}{(\det\boldsymbol{V})^{\frac{1}{3}}}\right)\\
&= \mathbf{ln}\left(\det\boldsymbol{V})^{\frac{1}{3}}\boldsymbol{G}\right) + \mathbf{ln}\left(\boldsymbol{V}\cdot\frac{\boldsymbol{G}}{(\det\boldsymbol{V})^{\frac{1}{3}}}\right)\\
&= \frac{\ln\det\boldsymbol{V}}{3}\boldsymbol{G} + \left(\mathbf{ln}\boldsymbol{V} - \frac{\ln\det\boldsymbol{V}}{3}\boldsymbol{G}\right) \qquad (\boldsymbol{G} \text{ et } \boldsymbol{V} \text{ ont une base propre commune})\\
\boldsymbol{M} &= \underbrace{\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{M}}{3}\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{M}^{sph}} + \underbrace{\left(\boldsymbol{M} - \frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{M}}{3}\boldsymbol{G}\right)}_{\boldsymbol{M}^{isov}} = \frac{\ln K_v}{3}\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{M} - \frac{\ln K_v}{3}\boldsymbol{G})
\end{aligned}$$

On reconnaît dans cette somme la décomposition en partie sphérique et partie de trace nulle du tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$. On vérifie aisément que la partie sphérique de $\boldsymbol{M}$ mesure une déformation sphérique [éq. (4.17) p. 55] et que la partie de trace nulle de $\boldsymbol{M}$ mesure une déformation isovolume [éq. (4.30) p. 60].

Avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{L}$. On laisse le soin au lecteur de vérifier avec une démarche identique que la décomposition commutative de la déformation s'écrit aussi sous forme d'une somme :

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^{sph} + \boldsymbol{L}^{isov} = \frac{\ln K_v}{3}\boldsymbol{G} + (\boldsymbol{L} - \frac{\ln K_v}{3}\boldsymbol{G})$$

Avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^V$. La décomposition commutative d'une déformation en déformation sphérique et déformation isovolume s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varepsilon}^V = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{G} = \boldsymbol{V}^{isov}\cdot\boldsymbol{V}^{sph} - \boldsymbol{G} = (\boldsymbol{\varepsilon}^{V\,isov} + \boldsymbol{G})\cdot(\boldsymbol{\varepsilon}^{V\,sph} + \boldsymbol{G}) - \boldsymbol{G}\\
&\boldsymbol{\varepsilon}^V = \boldsymbol{\varepsilon}^{V\,isov} + \boldsymbol{\varepsilon}^{V\,sph} + \boldsymbol{\varepsilon}^{V\,isov}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{V\,sph} \qquad (4.56)\\
&\text{où} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{V\,sph} = (K_v^{\frac{1}{3}} - 1)\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{V\,isov} = K_v^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{\varepsilon}^v + (K_v^{-\frac{1}{3}} - 1)\boldsymbol{G}
\end{aligned}$$

Cette composition est bien commutative car $\boldsymbol{\varepsilon}^{V\,sph} = (K_v^{\frac{1}{3}} - 1)\boldsymbol{G}$ est sphérique [éq. (4.52) p. 67], il commute donc avec tout tenseur. Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^{V\,isov}$ n'est ni de déterminant unité, ni de trace nulle [éq. (4.54) p. 68].

Avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^U$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que l'on obtient une formule semblable :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\varepsilon}^U = \boldsymbol{\varepsilon}^{U\,isov} + \boldsymbol{\varepsilon}^{U\,sph} + \boldsymbol{\varepsilon}^{U\,isov}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^{U\,sph} \qquad (4.57)\\
&\text{où} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{U\,sph} = (K_v^{\frac{1}{3}} - 1)\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{U\,isov} = K_v^{-\frac{1}{3}}\boldsymbol{\varepsilon}^U + (K_v^{-\frac{1}{3}} - 1)\boldsymbol{G}
\end{aligned}$$

Avec les tenseurs de déformation $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{J}$. On montre de la même manière que la décomposition d'une déformation en déformation sphérique et déformation isovolume est :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}^{isov} + \boldsymbol{E}^{sph} + \boldsymbol{E}^{isov}\cdot\boldsymbol{E}^{sph} \qquad (4.58)\\
&\text{où} \quad \boldsymbol{E}^{sph} = \frac{1}{2}(K_v^{\frac{2}{3}} - 1)\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{E}^{isov} = K_v^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{E} + \frac{1}{2}(K_v^{-\frac{2}{3}} - 1)\boldsymbol{G}\\
&\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{isov} + \boldsymbol{J}^{sph} + \boldsymbol{E}^{isov}\cdot\boldsymbol{E}^{sph} \qquad (4.59)\\
&\text{où} \quad \boldsymbol{J}^{sph} = \frac{1}{2}(K_v^{\frac{2}{3}} - 1)\boldsymbol{G} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{J}^{isov} = K_v^{-\frac{2}{3}}\boldsymbol{J} + \frac{1}{2}(K_v^{-\frac{2}{3}} - 1)\boldsymbol{G}
\end{aligned}$$

4.11 Petites déformations

En mécanique des milieux continus solides déformables, il arrive souvent que les déformations soient « petites ». En effet, dans beaucoup de dimensionnements d'objets solides déformables, le souci de l'ingénieur concepteur est que l'objet qu'il conçoit ne se déforme pas beaucoup [10]. En revanche, en mécanique des milieux continus fluides (liquides ou gaz), cette hypothèse est à rejeter car la variation de la distance entre deux particules peut être très importante au cours du mouvement. Cette section ne concerne donc que les mécaniciens des solides peu déformables.

Tous les tenseurs de déformation, les dilatations linéique, surfacique et volumique, les distorsions angulaire et stérique et la déviation définis précédemment ont été établis *sans aucune hypothèse sur l'amplitude des déformations*. Ces concepts sont donc parfaitement utilisables quand les déformations sont faibles. Toutefois, il est de tradition de considérer le cas particulier des « petites déformations » en vue d'obtenir des formules un peu plus simples mais approchées.

4.11.1 Définition

- **Définition 4.37 – Petite déformation.** On dit que la déformation est petite si les dilatations linéiques dans toutes les directions matérielles sont des infiniments petits d'ordre 1. On écrira :

$$\forall \boldsymbol{u}, \quad K_\ell(\boldsymbol{u}) \ll 1 \qquad (x \ll 1 \text{ signifie : } x \text{ est un infiniment petit d'ordre 1})$$

Remarques – L'hypothèse de petite déformation développée dans cette section est distincte de l'hypothèse de petites « perturbations » présentée dans les cours traditionnels d'élasticité. L'hypothèse de petites « perturbations » sera analysée dans la section suivante.

L'hypothèse de petite déformation peut être posée *a priori* dans les études de solides peu déformables. Toutefois, il est indispensable de vérifier *a posteriori* que les déformations trouvées en utilisant les formules simplifiées entrent bien dans le cadre de cette hypothèse.

- **Théorème 4.38 –** Les dilatations linéiques principales $\{\lambda_\bullet\}$ en une particule P sont des extremums des dilatations linéiques dans toutes les directions matérielles issues de P.

Démonstration – La démonstration est donnée en annexe A.1 [p. 101].

Pour s'assurer que toutes les dilatations linéiques des directions matérielles issues de P des infiniment petits d'ordre 1, il suffit donc donc de poser :

$$\lambda_1 = 1+\eta_1 \quad \lambda_2 = 1+\eta_2 \quad \lambda_3 = 1+\eta_3 \qquad \text{avec} \quad |\eta_1| \ll 1 \text{ et } |\eta_2| \ll 1 \text{ et } |\eta_3| \ll 1$$

Dans leurs bases propres respectives $\{\boldsymbol{e}^U_\bullet\}$ et $\{\boldsymbol{e}^E_\bullet\}$, les tenseurs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^U$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^V$ s'écrivent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^U = \boldsymbol{U} - \boldsymbol{G} = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i - 1)\, \boldsymbol{e}^U_i \otimes \boldsymbol{e}^U_i = \sum_{i=1}^{3} \eta_i\, \boldsymbol{e}^U_i \otimes \boldsymbol{e}^U_i \qquad K_\ell(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^U \cdot \boldsymbol{u}_0 = \sum_{i=1}^{3} \eta_i\, (\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{e}^U_i)^2$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^V = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{G} = \sum_{i=1}^{3} (\lambda_i - 1)\, \boldsymbol{e}^V_i \otimes \boldsymbol{e}^V_i = \sum_{i=1}^{3} \eta_i\, \boldsymbol{e}^V_i \otimes \boldsymbol{e}^V_i \qquad K_\ell(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^V \cdot \boldsymbol{u}_t = \sum_{i=1}^{3} \eta_i\, (\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{e}^V_i)^2$$

[10] Il y a aussi des cas où on désire qu'il se déforme beaucoup comme par exemple quand on veut modéliser une mise en forme (pliage, emboutissage, forgeage, extrusion...). Dans ce cas l'hypothèse des petites déformations n'est évidemment pas admissible.

Les valeurs propres communes $\{\eta_\bullet\}$ de ces deux tenseurs ainsi leur norme sont donc des infiniment petits d'ordre 1 :

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}^U\| = \|\boldsymbol{\varepsilon}^V\| = \sqrt{\eta_1{}^2 + \eta_2{}^2 + \eta_3{}^2} = \eta \ll 1$$

- **Théorème 4.39 –** Si $\boldsymbol{S}$ est un tenseur symétrique du second ordre tel que $\|\boldsymbol{S}\| \sim \eta$ et si $\boldsymbol{v}$ est un vecteur unitaire, alors :

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v} \sim \eta \qquad (x \sim y \text{ signifie : } x \text{ est du même ordre que } y)$$

Démonstration – Soit $\boldsymbol{S}$ un tenseur d'ordre 2 symétrique, de valeurs propres $\{\eta_\bullet\} \ll 1$ et soit $\{\boldsymbol{e}_\bullet\}$ une de ses bases propres orthonormées. Enfin, soit $\boldsymbol{v}$ un vecteur unitaire. Le tenseur $\boldsymbol{S}$ s'écrit donc :

$$\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{3} \eta_i\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i \qquad \text{où les } \eta_\bullet \text{ sont ses valeurs propres.}$$

On a donc

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{3} \eta_i\, \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i\Big)\cdot\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} \eta_i\, \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_i)\cdot\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{3} \eta_i (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i)^2$$

Les vecteurs $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{e}_\bullet$ étant unitaires, on a nécessairement les inégalités : $0 \leqslant (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}_i)^2 \leqslant 1$.
Si $\|\boldsymbol{S}\| = \big(\sum_{i=1}^{3} \eta_i{}^2\big)^{\frac{1}{2}} \sim \eta$, alors $\eta_\bullet \sim \eta$.
On en déduit que $0 \leqslant \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v} \leqslant \sum_{i=1}^{3} \eta_i \sim \eta$ et donc :

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v} \sim \eta$$

Toutes les approximations qui suivent sont fondées sur le même principe : *les infiniments petits d'ordre 2 sont négligés devant 1*. On obtient ainsi des formules dites « linéarisées ».

4.11.2 Approximation des dilatations linéiques

La dilatation linéique exacte dans une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ avec les tenseurs de déformation non objectifs (la direction matérielle est donc identifiée par sa direction de référence) s'écrit :

$$\begin{aligned}
K_\ell(\boldsymbol{u}) &= (\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{U}^2\cdot\boldsymbol{u}_0)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{[éq. (4.15) p. 55]}\\
&= (\boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^U)^2\cdot\boldsymbol{u}_0)^{\frac{1}{2}}\\
&= (\boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{\varepsilon}^U+(\boldsymbol{\varepsilon}^U)^2)\cdot\boldsymbol{u}_0)^{\frac{1}{2}}\\
&\simeq (\boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{\varepsilon}^U)\cdot\boldsymbol{u}_0)^{\frac{1}{2}} \qquad (\|(\boldsymbol{\varepsilon}^U)^2\| = \|\boldsymbol{\varepsilon}^U\|^2 \text{ est négligé devant } \|\boldsymbol{G}\| = 3)\\
&\simeq (1+2\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0)^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{le vecteur } \boldsymbol{u}_0 \text{ est unitaire})\\
&\simeq 1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0 \qquad (\text{développement en série de } \sqrt{1+2\eta} \simeq 1+\eta)
\end{aligned}$$

En petites déformations, on définit traditionnellement l'*allongement relatif* dans une direction matérielle $\boldsymbol{u}$:

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) - 1 = \lim \frac{\ell_t}{\ell_0} - 1 = \lim \frac{\ell_t - \ell_0}{\ell_0} \simeq \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0$$

On laisse le soin au lecteur d'établir une formule similaire avec le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^V$ en partant de l'égalité $K_\ell(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{u}_t\cdot\boldsymbol{V}^{-2}\cdot\boldsymbol{u}_t)^{-\frac{1}{2}}$ [éq. (4.17) p. 55] et en négligeant les termes de l'ordre de η^2 devant 1. Il trouvera l'allongement relatif dans la direction matérielle $\boldsymbol{u}$ exprimé avec le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^V$:

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) - 1 \simeq \boldsymbol{u}_t\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^V\cdot\boldsymbol{u}_t$$

Bien noter que la direction matérielle $\boldsymbol{u}$ est identifiée par sa direction de référence $\boldsymbol{u}_0$ si on utilise le tenseur de déformation non objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^U$ et par sa direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ si on utilise le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^V$.

4.11.3 Approximation de la dilatation volumique

La dilatation volumique exacte en une particule est :

$$\begin{aligned}
K_v &= \det \boldsymbol{U} \\
&= \det(\boldsymbol{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^U) \\
&= 1 + \varepsilon_{\mathrm{I}}^U + \varepsilon_{\mathrm{II}}^U + \varepsilon_{\mathrm{III}}^U \\
&\simeq 1 + \varepsilon_{\mathrm{I}}^U = 1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U
\end{aligned}$$

En petites déformations, on définit traditionnellement la *dilatation volumique relative* en une particule :

$$K_v - 1 = \lim \frac{v_t}{v_0} - 1 = \lim \frac{v_t - v_0}{v_0} \simeq \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que la dilatation volumique relative s'exprime aussi avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^V$:

$$K_v - 1 \simeq \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^V$$

4.11.4 Approximation des dilatations surfaciques

La dilatation surfacique exacte dans une facette matérielle de normale $\boldsymbol{n}$ est :

$$\begin{aligned}
K_s(\boldsymbol{n}) &= K_v \, \|\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{n}_0\| \qquad \text{[éq. (4.40) p. 63]} \\
&\simeq (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U) \, (\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{U}^{-2} \cdot \boldsymbol{n}_0)^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U) \, (\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^U)^{-2} \cdot \boldsymbol{n}_0)^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U) \, (\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{G} - \boldsymbol{\varepsilon}^U)^{2} \cdot \boldsymbol{n}_0)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(rappel : } (\boldsymbol{G} + \boldsymbol{S})^{-1} = \boldsymbol{G} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \boldsymbol{S}^k \text{ si } \|\boldsymbol{S}\| < 1\text{)} \\
&\simeq (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U) \, (\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{G} - 2\boldsymbol{\varepsilon}^U) \cdot \boldsymbol{n}_0)^{\frac{1}{2}} \\
&\simeq (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U) \, (1 - 2\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^U \cdot \boldsymbol{n}_0)^{\frac{1}{2}} \qquad (\boldsymbol{n}_0 \text{ est unitaire}) \\
&\simeq (1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U) \, (1 - \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^U \cdot \boldsymbol{n}_0) \qquad \text{(rappel : } \sqrt{1 - 2\eta} \simeq 1 - \eta \text{ si } \|\eta\| \ll 1\text{)} \\
&\simeq 1 + \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U - \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^U \cdot \boldsymbol{n}_0
\end{aligned}$$

En petites déformations, on définit traditionnellement la *dilatation surfacique relative* dans une facette matérielle $\boldsymbol{n}$:

$$K_s(\boldsymbol{n}) - 1 = \lim \frac{s_t}{s_0} - 1 = \lim \frac{s_t - s_0}{s_0} \simeq \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^U - \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^U \cdot \boldsymbol{n}_0$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que la dilatation surfacique relative dans une facette matérielle s'exprime aussi avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^V$:

$$K_s(\boldsymbol{n}) - 1 \simeq \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^V - \boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^V \cdot \boldsymbol{n}_t$$

Bien noter que la normale à la facette matérielle est identifiée par sa normale de référence $\boldsymbol{n}_0$ si on utilise le tenseur de déformation non objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^U$ et par sa normale actuelle $\boldsymbol{n}_t$ si on utilise le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^V$.

4.11.5 Approximation de la distorsion stérique

La distorsion stérique exacte de trois directions matérielle initialement orthogonales est :

$$\begin{aligned}
\delta^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'') &= \frac{K_\ell K'_\ell K''_\ell}{K_v} \qquad \text{[éq. (4.43) p. 64]}\\
&\simeq \frac{(1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0)\,(1+\boldsymbol{u}'_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}'_0)\,(1+\boldsymbol{u}''_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}''_0)}{1+\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^U}\\
&\simeq \frac{1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}'_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}'_0+\boldsymbol{u}''_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}''_0}{1+\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^U}\\
&\simeq \frac{1+\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^U}{1+\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^U} \qquad (\{\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}'_0,\boldsymbol{u}''_0\}\text{ est une base orthonormée, les dir. mat. sont initialement orthogonales})\\
&\simeq 1+\mathscr{O}(\eta)^2
\end{aligned}$$

En petites déformations, la distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales est 1 au second ordre près. Il n'est donc pas possible de l'évaluer dans le cadre de l'approximation des petites déformations.

4.11.6 Approximation de la distorsion angulaire

La distorsion angulaire exacte de deux directions matérielles initialement orthogonales est :

$$\begin{aligned}
\delta^a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}') &= \frac{K_\ell K'_\ell}{K_s} \qquad \text{[éq. (4.46) p. 65]}\\
&\simeq \frac{(1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0)\,(1+\boldsymbol{u}'_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}'_0)}{1+\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^U-\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{n}_0} \qquad (\text{où } \boldsymbol{n}_0=\boldsymbol{u}_0\wedge\boldsymbol{u}'_0\,;\ \{\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{u}'_0,\boldsymbol{n}_0\}\text{ est donc orthonormé})\\
&\simeq \frac{1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}'_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}'_0}{1+\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^U-\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{n}_0}\\
&\simeq \frac{1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}'_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}'_0}{1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}'_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}'_0} \qquad (\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^U=\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}'_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}'_0+\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{n}_0)\\
&\simeq 1+\mathscr{O}(\eta)^2
\end{aligned}$$

En petites déformations, la distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales est 1 au second ordre près. Il n'est donc pas possible de l'évaluer dans le cadre de l'approximation des petites déformations.

4.11.7 Approximation de la déviation d'une direction matérielle

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{u}_t=\boldsymbol{u}_0\cdot\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|} \qquad \text{[éq. (4.2) p. 51]}\\
&= \frac{\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|}=\frac{\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{u}_0}{K_\ell}=\frac{\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{R}\cdot(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^U)\cdot\boldsymbol{u}_0}{1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0}\\
&\simeq (1-\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{u}_0)\,(\boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U)\cdot\boldsymbol{u}_0)\\
&\simeq \boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^U-\boldsymbol{\varepsilon}^U\cdot\boldsymbol{R})\cdot\boldsymbol{u}_0
\end{aligned}$$

On laisse le soin au lecteur de montrer que si on utilise le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^V$, on obtient la relation :

$$\cos\beta\simeq\boldsymbol{u}_t\cdot(\boldsymbol{R}^\top+\boldsymbol{\varepsilon}^V\cdot\boldsymbol{R}^\top-\boldsymbol{R}^\top\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^V)\cdot\boldsymbol{u}_t$$

4.12 Petites « perturbations »

4.12.1 Utilisation du champ de déplacement

Historiquement, les déformations d'un milieu continu solide déformable ont d'abord été étudiées en décrivant le mouvement des particules du solide déformable avec le champ des déplacements $\boldsymbol{u}(P,t)$ [déf. 2.7 page 26] dont la description de Lagrange est :

$$\boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{x}_t - \boldsymbol{x}_0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{x}_t = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0,t) \tag{4.60}$$

On en rappelle ici la démarche. Soit une biparticule $\{P,P'\}$. La relation entre sa position actuelle et sa position de référence est :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P} &= \big(\boldsymbol{x}_0^{P'} + \boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0^{P'},t)\big) - \big(\boldsymbol{x}_0^{P} + \boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0^{P},t)\big) && \text{[éq. (4.60) p. 74]}\\
&= \boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P} + \boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0^{P'},t) - \boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0^{P},t)\\
&= \boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P} + \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) + \cdots && \text{[déf. 2.9 p. 27, notation 2.11 p. 28]}
\end{aligned}$$

Pour étudier les variations de distance, on calcule ${\ell_t}^2 = \|\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P}\|^2 = (\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P})\cdot(\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^{P})$:

$$\begin{aligned}
{\ell_t}^2 &= (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P} + \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) + \cdots)\cdot(\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P} + \mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P} + \cdots)\\
&= \|\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}\|^2 + (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P})\cdot(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) + \cdots\\
&= {\ell_0}^2 + (\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P})\cdot(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u})\cdot(\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}) + \cdots
\end{aligned}$$

On en déduit la variation relative du carré des longueurs :

$$\begin{aligned}
\frac{{\ell_t}^2 - {\ell_0}^2}{{\ell_0}^2} &= \frac{\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}}{\|\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}\|}\cdot(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u})\cdot\frac{\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}}{\|\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}\|} + \cdots\\
&= \overline{\boldsymbol{u}}_0\cdot(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u})\cdot\overline{\boldsymbol{u}}_0 + \cdots
\end{aligned} \tag{4.61}$$

où $\overline{\boldsymbol{u}}_0 = \frac{\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}}{\|\boldsymbol{x}_0^{P'} - \boldsymbol{x}_0^{P}\|}$ est un vecteur unitaire.

Lorsque $P' \to P$ en suivant un certain chemin matériel $\mathscr{C}^P$ [déf. 4.3 p. 50], le vecteur unitaire $\overline{\boldsymbol{u}}_0$ tend vers la direction de référence $\boldsymbol{u}_0$ d'une direction matérielle et les deux longueurs ℓ_t et ℓ_0 tendent vers 0. On note k la limite de la variation relative du carré des longueurs lorsque $P' \in \mathscr{C}^P \to P$:

$$k = \lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P} \frac{{\ell_t}^2 - {\ell_0}^2}{{\ell_0}^2}$$

L'équation 4.61 montre que cette limite est :

$$k = \boldsymbol{u}_0\cdot(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u})\cdot\boldsymbol{u}_0$$

On note $\boldsymbol{E}$ le tenseur du second ordre défini par :

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top\,\boldsymbol{u}\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}) \tag{4.62}$$

La variation relative du carré des longueurs s'écrit alors :

$$k = 2\,\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{u}_0$$

Remarque – Le tenseur $\boldsymbol{E}$ défini dans l'équation (4.62) [p. 74] est exactement le tenseur de *Green-Lagrange droit* qui a été défini en section 4.4 [p. 54]. En effet :

$$\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{G}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{G})$$

où $\boldsymbol{F} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{x}_t^P = \mathbf{grad}_L(\boldsymbol{x}_0^P + \boldsymbol{u}(P,t)) = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{x}_0^P + \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} = \boldsymbol{G} + \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$. On a donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{G}) &= \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{G}+\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u})^\top \cdot (\boldsymbol{G}+\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}) - \boldsymbol{G}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top \boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u})\end{aligned}$$

À ce stade, aucune approximation n'a encore été commise.

4.12.2 Tenseur des petites « perturbations »

En élasticité traditionnelle, on tient à construire une théorie qui soit « linéaire en déplacement ». On pose traditionnellement l'hypothèse simplificatrice suivante :

- **Hypothèse 4.40 – Hypothèse de petite « perturbation ».** On suppose que $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\|$ est un infiniment petit d'ordre 1 : $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$.

  Non équivalence avec les petites déformations – L'hypothèse de petite « perturbation » est *différente* de l'hypothèse de petite déformation posée dans la section précédente [déf. 4.37 p. 70]. L'équation (4.62) [p. 74] montre que $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1 \;\Rightarrow\; \|\boldsymbol{E}\| \ll 1$, c'est-à-dire qu'une petite « perturbation » implique bien une petite déformation ; en revanche *la réciproque est fausse* : une petite déformation n'implique pas une petite « perturbation ». Pour s'en convaincre, le lecteur est invité à considérer le contre exemple suivant [11] : dans un mouvement de rotation de solide indéformable (la déformation est donc petite puisque inexistante), le gradient lagrangien du déplacement n'est pas un infiniment petit d'ordre 1 (pour un mouvement de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, les calculs sont simples et on trouve $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| = 2$).

  Signification physique de l'hypothèse – Une petite « perturbation » ($\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1$) signifie que le gradient lagrangien du champ de déplacement est proche de 0, c'est-à-dire que le champ de déplacement est quasi-uniforme. L'hypothèse de petite « perturbation » implique donc non seulement que les déformations sont petites, mais aussi une condition *sur le mouvement* qui est rarement soulignée : *le mouvement du milieu continu est une quasi-translation* pour l'observateur utilisé. L'hypothèse de petite « perturbation » est parfois imprudemment postulée dans des problèmes où le mouvement vu par l'observateur utilisé est loin d'être un mouvement de translation (notamment dans des mouvements de flexion ou de torsion).

  Par ailleurs, on dit parfois que l'hypothèse de petite « perturbation » signifie à la fois petite déformation et petit déplacement. Cette affirmation est incorrecte car les déplacements ne sont pas limités : on peut ajouter au champ de déplacement un champ de déplacement uniforme (un mouvement de translation) aussi grand que l'on veut sans changer la valeur de $\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$.

- **Hypothèse 4.41 – Approximation traditionnelle.** On suppose que le terme $\mathbf{grad}_L^\top \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$ de l'équation 4.62 [p. 74] est négligeable devant $\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top \boldsymbol{u}$.

  Pseudo-linéarisation abusive – L'approximation traditionnelle présentée ici est « motivée » par la disparition du terme $\mathbf{grad}_L^\top \boldsymbol{u} \cdot \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$, qui rend non linéaire la relation entre la déformation et le gradient lagrangien du déplacement $\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$. Toutefois, elle consiste à négliger un terme de l'ordre

[11] L'exhibition d'un contre exemple suffit à démontrer la fausseté de la réciproque.

de $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\|^2$ devant un terme de l'ordre $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\|$, ce qui revient à négliger $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\|$ devant 1 ! Dans une linéarisation correcte on ne néglige que les infiniments petits d'ordre 2 devant 1 et on garde les infiniment petits d'ordre 1.

- **Définition 4.42 – Le tenseur de déformation traditionnel $\boldsymbol{\varepsilon}$.** Sous réserve d'acceptation des deux hypothèses 4.40 et 4.41, on aboutit à la définition d'un tenseur de déformation simplifié traditionnellement noté $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top \boldsymbol{u}\right) = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} \tag{4.63}$$

4.12.3 Relations avec les tenseurs de déformation

On rappelle que $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} + \mathbf{grad}_L^\top \boldsymbol{u}\right) = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G}) + (\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G})^\top\right) = \mathbf{sym}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{G} \\ &= \mathbf{sym}(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{G} = \mathbf{sym}(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{R}) - \boldsymbol{G} \qquad \text{(décomposition polaire de } \boldsymbol{F}\text{)}\end{aligned}$$

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ est donc différent des tenseurs de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^U$ et $\boldsymbol{\varepsilon}^V$ introduits en section 4.4.1 [p. 54], sauf si le mouvement est un mouvement très particulier tel que $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{G}$, c'est-à-dire dans le cas où le gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$ est symétrique défini positif.

Par ailleurs, la décomposition de $\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$ en partie symétrique et antisymétrique permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} &= \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} + \mathbf{asym}\,\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} \\ &= \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{4.64}$$

Puisque $\|\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| \ll 1 \;\Rightarrow\; \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$ [éq. (4.63) p.76], l'équation 4.64 implique que la partie antisymétrique de $\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$ est aussi telle que $\|\mathbf{asym}\,\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{A}\| \ll 1$.

Sous l'hypothèse de petites « perturbations », le gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$ s'écrit donc :

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \mathbf{grad}_L \boldsymbol{u} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{A} \qquad \text{où} \quad \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1 \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{A}\| \ll 1 \tag{4.65}$$

4.12.4 Formules simplifiées en petites « perturbations »

La dilatation linéique dans une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ [éq. (4.10) p. 53] est :

$$\begin{aligned}K_\ell(\boldsymbol{u}) &= \sqrt{\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{F}^\top\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0} = \sqrt{\boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\varepsilon}^2-\boldsymbol{A}^2)\cdot\boldsymbol{u}_0} \quad \text{[éq. (4.65)]} \\ &\simeq \sqrt{\boldsymbol{u}_0\cdot(2\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{u}_0} \simeq \sqrt{1+2\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_0} \simeq 1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_0 \quad (\text{car } \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1 \text{ et } \|\boldsymbol{A}\| \ll 1) \\ K_\ell(\boldsymbol{u}) - 1 &\simeq \boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_0\end{aligned}$$

La dilatation surfacique d'une facette matérielle de normale normale unitaire $\boldsymbol{n}$ [éq. (4.39) p. 62] est :

$$\begin{aligned}K_s(\boldsymbol{n}) &= (\det\boldsymbol{F})\,\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\| \simeq \det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{A})\sqrt{\boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{G}+2\boldsymbol{\varepsilon})^{-1}\cdot\boldsymbol{n}_0} \\ &\simeq (1+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\sqrt{\boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{G}-2\boldsymbol{\varepsilon})\cdot\boldsymbol{n}_0} \simeq (1+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})\sqrt{1-2\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{n}_0} \\ &\simeq (1+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon})(1-\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{n}_0) \simeq 1+\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{n}_0 \\ K_s(\boldsymbol{n}) - 1 &\simeq \mathrm{tr}\,\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{n}_0\end{aligned}$$

La dilatation volumique en une particule [déf. 4.20 p. 59] est :

$$K_v = \det \boldsymbol{F} \simeq \det(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{A}) \simeq 1+\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (\operatorname{tr}\boldsymbol{A}=0)$$
$$K_v - 1 \simeq \operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}$$

La distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales [déf. 4.27 p. 64] est :

$$\delta^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'') = \frac{K_\ell K'_\ell K''_\ell}{K_v} \simeq \frac{(1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_0)\,(1+\boldsymbol{u}'_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}'_0)\,(1+\boldsymbol{u}''_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}''_0)}{1+\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}} \simeq 1+\mathscr{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|)^2$$

Sous l'hypothèse de petites « perturbations », il n'est pas possible de déterminer la distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales.

La distorsion angulaire de deux directions matérielles initialement orthogonales [déf. 4.29 p. 65] est :

$$\delta^a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}') = \frac{K_\ell K'_\ell}{K_s} \simeq \frac{(1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_0)\,(1+\boldsymbol{u}'_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}'_0)}{1+\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{n}_0} \simeq 1+\mathscr{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|)^2$$

Sous l'hypothèse de petites « perturbations », il n'est pas possible de déterminer la distorsion angulaire de deux directions initialement orthogonales.

La déviation d'une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ [éq. (4.50) p. 67] est :

$$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0}{K_\ell(\boldsymbol{u})} \simeq \frac{\boldsymbol{u}_0\cdot(\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{u}_0}{1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_0} \simeq \frac{1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_0+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{u}_0}{1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_0} \simeq \frac{1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_0}{1+\boldsymbol{u}_0\cdot\boldsymbol{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{u}_0}$$
$$\simeq 1+\mathscr{O}(\|\boldsymbol{\varepsilon}\|)^2$$

On retrouve le fait que l'hypothèse de petites « perturbations » implique une quasi-translation.

Remarque – On peut retrouver les formules simplifiées en petites « perturbations » en posant $\boldsymbol{R}\simeq\boldsymbol{G}$ et donc $\boldsymbol{F}\simeq\boldsymbol{U}\simeq\boldsymbol{V}\simeq\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^U\simeq\boldsymbol{G}+\boldsymbol{\varepsilon}^V$ dans les formules linéarisées en petites déformations de la section 4.12 [p. 74]. On retrouve encore une fois que l'hypothèse de petite « perturbation » n'est acceptable que dans des mouvements particuliers tels que $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{G}$. Si tel n'est pas le cas, le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ est une mauvaise mesure des petites déformations.

Conditions de compatibilité en petites « perturbations » – Pour résoudre *analytiquement* certains problèmes en petites « perturbations » (élasticité traditionnelle), on est parfois amené à formuler des hypothèses sur le champ inconnu des petites « perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$. Ces hypothèses ne peuvent pas être quelconques, elles doivent satisfaire des conditions dites de compatibilité (ou d'intégrabilité) pour qu'il existe un champ de déplacements $\boldsymbol{u}_L(\boldsymbol{x}_0,t)$ tel que $\boldsymbol{\varepsilon}$ soit la partie symétrique de son gradient lagrangien [12] :

$$\mathbf{0} = \mathbf{rot}_L\,\mathbf{rot}_L^\top\,\boldsymbol{\varepsilon} \quad\Leftrightarrow\quad \mathbf{0} = 2\,\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L\,\mathbf{div}_L\,\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{grad}_L\,\mathbf{grad}_L\,\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Delta}_L\,\boldsymbol{\varepsilon} \tag{4.66}$$

La démonstration de cette condition [13] fournit la méthode pour trouver le champ de déplacement $\boldsymbol{u}_L$ quand le champ $\boldsymbol{\varepsilon}$ satisfait à la condition (4.66). On en rappelle les deux étapes :

[12] Ces conditions de compatibilité ne sont donc utilisables que si l'on admet les restrictions inhérentes à l'hypothèse des petites « perturbations ». Fort heureusement, les équations de compatibilité ne sont d'aucune utilité dans les résolutions numériques car il n'est pas nécessaire d'y faire des suppositions sur la distribution du champ des déformations.

[13] On trouvera une démonstration des conditions d'intégrabilité dans le dernier chapitre du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note (1) p. 3]. Dans les cours d'élasticité traditionnelle, on rencontre l'une ou l'autre des formes (équivalentes) données dans l'équation (4.66).

1. Intégrer l'équation $\mathbf{grad}\,\boldsymbol{a} = \mathbf{rot}^\top \boldsymbol{\varepsilon}$, ce qui donne toutes les parties antisymétriques possibles de $\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}$: ces sont les tenseurs $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{a}$. Les solutions $\boldsymbol{a}$ sont donc déterminées à un champ vectoriel uniforme $\boldsymbol{a}_0$ près. Il y a donc 3 « petites » constantes d'intégration, car l'hypothèse de petite « pertubation » implique $\|\boldsymbol{A}\| \ll 1 \Leftrightarrow \|\boldsymbol{a}\| \ll 1$. Dans ces conditions, le tenseur $\boldsymbol{G}+\boldsymbol{A}$ qui apparaît dans l'équation (4.65) [p. 76] peut être interprété comme une petite rotation [(14)].
2. Intégrer l'équation $\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{A}$. Les champs de déplacement $\boldsymbol{u}_L$ sont déterminés à un champ de déplacement uniforme $\boldsymbol{u}_0$ près (les trois constantes d'intégration sont des translations arbitraires non nécessairement petites).

Tous les champs de déplacement solutions diffèrent donc d'un champ de déplacement de solide restreint (translation quelconque mais petite rotation).

4.12.5 Changement d'observateur du tenseur des petites perturbations

- **Théorème 4.43 –** L'hypothèse $\|\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\| \ll 1$ utilisée dans la définition du tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'est pas une hypothèse universelle.

Démonstration – L'hypothèse simplificatrice $\|\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\| \ll 1$, qui définit le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ [éq. (4.63) p. 76], n'est pas consistante vis à vis de l'universalité. En effet, si cette hypothèse est vraie pour un observateur $\mathscr{R}$, elle est en général fausse pour un autre observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_L\,\widetilde{\boldsymbol{u}} &= \widetilde{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{G} = \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top - \boldsymbol{G} = \boldsymbol{Q}_t\cdot(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top - \boldsymbol{G}\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top + \boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top - \boldsymbol{G}\\
\|\mathbf{grad}_L\,\widetilde{\boldsymbol{u}}\| &\leqslant \|\boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top\| + \|\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top - \boldsymbol{G}\| \qquad (\text{ car } \|\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}'\| \leqslant \|\boldsymbol{T}\|+\|\boldsymbol{T}'\|)\\
\|\mathbf{grad}_L\,\widetilde{\boldsymbol{u}}\| &\leqslant \|\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top - \boldsymbol{G}\|
\end{aligned}$$

L'hypothèse simplificatrice $\|\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\| \ll 1$ faite par un observateur $\mathscr{R}$ n'implique pas $\|\mathbf{grad}_L\,\widetilde{\boldsymbol{u}}\| \ll 1$ pour l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$, sauf si $\|\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top - \boldsymbol{G}\| \ll 1$, c'est-à-dire sauf si le mouvement relatif des deux observateurs est très particulier : il doit être proche d'une translation ($\boldsymbol{Q}_t \simeq \boldsymbol{Q}_0$ au second ordre près).

- **Théorème 4.44 – Non objectivité du tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$.** La partie symétrique du gradient lagrangien des déplacements est une grandeur tensorielle non objective.

Démonstration – La relation de changement d'observateur entre les parties symétriques du gradient lagrangien du champ de déplacement est :

$$\begin{aligned}
\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L\,\widetilde{\boldsymbol{u}} &= \mathbf{sym}(\widetilde{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{G}) = \mathbf{sym}\,\widetilde{\boldsymbol{F}} - \boldsymbol{G} = \mathbf{sym}(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top) - \boldsymbol{G} \qquad [\text{éq.(3.10) p. 43}]\\
&= \mathbf{sym}(\boldsymbol{Q}_t\cdot(\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}+\boldsymbol{G})\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top) - \boldsymbol{G} \qquad [\text{éq. (4.65) p. 76}]\\
&= \mathbf{sym}(\boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top) + \mathbf{sym}(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top) - \boldsymbol{G} \qquad (4.67)
\end{aligned}$$

On a donc $\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L\,\widetilde{\boldsymbol{u}} \neq \boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_L\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top$. La partie symétrique du gradient lagrangien des déplacements actuels n'est donc pas une grandeur tensorielle objective [th. 3.7 p. 42].

4.13 En bref...

L'étude des déformations d'un milieu continu est l'étude de la variation des distances entre particules pendant un mouvement : on compare les distances entre les particules à un instant t (distances actuelles) aux distances entre les mêmes particules à un instant de référence arbitraire t_0 (distances de référence).

[(14)] Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

On a défini différents tenseurs de déformation, tous susceptibles d'évaluer en chaque particule P et à tout instant, la dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle. Les tenseurs de déformation non objectifs identifient la direction matérielle issue de P par sa direction de référence, alors que les tenseurs de déformation objectifs l'identifient par sa direction actuelle.

Avec ces tenseurs de déformation (objectifs ou non), on peut évaluer les grandeurs scalaires objectives suivantes :
- la dilatation linéique dans une direction matérielle,
- la dilatation surfacique actuelle dans une facette matérielle,
- la dilatation volumique actuelle en une particule,
- la distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales issues d'une particule,
- la distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales issues d'une particule.

En revanche, la déviation d'une direction matérielle entre les instants t_0 et t est une grandeur scalaire non objective.

La définition du tenseur traditionnel des petites « perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'est valable que pour des observateurs (s'ils existent) pour lesquels le mouvement du solide déformable est voisin d'une translation de solide rigide. Sa définition n'est donc pas universelle. De plus, cette définition implique une pseudo linéarisation simplificatrice en $\mathbf{grad}_L \boldsymbol{u}$ abusive.

Remarque personnelle de l'auteur – En raison des incorrections commises dans la construction du tenseur des petites « perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ (non universalité de la définition d'une petite « perturbation », restriction sur les mouvements envisageables et pseudo-linéarisation), l'auteur espère qu'à plus ou moins long terme ce tenseur disparaîtra des cours et des logiciels, en dépit de l'inertie de la tradition.

5

Vitesse de déformation

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la vitesse actuelle de déformation d'un milieu continu en mouvement, c'est-à-dire que l'on étudie la dérivée temporelle actuelle des concepts qui ont été définis dans le chapitre des déformations. Comme pour les déformations, on va définir un tenseur du second ordre appelé *tenseur des taux de déformation* qui permettra de calculer la vitesse de déformation dans toutes les directions matérielles issues d'une particule P.

On peut définir le tenseur des taux de déformation de deux manières : suivant un point de vue eulérien en évaluant les vitesses de déformation actuelles par l'analyse du champ des vitesses actuelles, ou bien suivant un point de vue lagrangien en envisageant les vitesses de déformation comme des dérivées temporelles de déformations actuelles mesurées par rapport à une forme de référence. Quel que soit le point de vue envisagé, on aboutit à la définition du même tenseur des taux de déformation. Pour satisfaire les préférences ou les habitudes de tous les lecteurs [1], on envisagera systématiquement les deux points de vue.

- **Notation 5.1 – Dérivées temporelles.** Dans ce chapitre on utilisera abondamment des dérivées temporelles de quantités ou d'expressions. La dérivée *particulaire* d'un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$ a été notée $\dot{\boldsymbol{\Psi}}$ [éq. (2.30) p. 30]. Pour toute autre quantité $\boldsymbol{Y}$ qui n'est pas un champ matériel (par exemple un tenseur de changement d'observateur $\boldsymbol{Q}_t$ actuel entre deux observateurs quelconques ou bien une quantité relative à un domaine $\boldsymbol{\Psi}(\mathscr{D},t)$), la dérivée temporelle devrait être notée $\frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{Y}$. Néanmoins, afin d'améliorer la concision et la lisibilité des formules, on écrira :

$$\frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Y}}{\mathrm{d}t} = \dot{\boldsymbol{Y}} \quad \text{ou bien} \quad \frac{\mathbf{d}}{\mathrm{d}t}(\cdots) = (\cdots)^{\cdot} \quad ; \qquad \text{par exemple } \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t} \text{ sera noté } \dot{\boldsymbol{Q}}_t$$

Cette convention n'induit pas de confusion : si la quantité dérivée temporellement est un champ matériel $\boldsymbol{\Psi}(P,t)$, il s'agit d'une dérivée particulaire [2], dans le cas contraire il s'agit d'une dérivée temporelle ordinaire.

5.2 Taux de dilatation linéique dans une direction matérielle

5.2.1 Point de vue eulérien

Considérons une particule P, un chemin matériel $\mathscr{C}^P$ issu de P [déf. 4.3 p. 50] et une particule générique P' de ce chemin matériel.

[1] C'est-à-dire ceux qui sont plutôt orientés « fluides » qui préfèreront le point de vue eulérien et ceux qui sont plutôt orientés « solides déformables » qui préfèreront le point de vue lagrangien.

[2] On dérive temporellement « en suivant la particule dans son mouvement ».

La position actuelle de la biparticule $\{P,P'\}$ est : $\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t$ et sa longueur actuelle est $\ell_t = \|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|$. Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned}
\dot{\ell}_t &= \|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|^{\cdot} = \frac{\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|} \cdot (\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t)^{\cdot} \qquad (\|\boldsymbol{v}\|^{\cdot} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}) \\
&= \bar{\boldsymbol{u}}_t \cdot (\boldsymbol{v}(P',t) - \boldsymbol{v}(P,t)) = \bar{\boldsymbol{u}}_t \cdot (\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}'_t) - \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t)) \qquad (\bar{\boldsymbol{u}}_t = \frac{\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|} \text{ est unitaire}) \\
&= \bar{\boldsymbol{u}}_t \cdot (\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t) + \cdots) \qquad \text{(définition du gradient eulérien des vitesses)} \\
\frac{\dot{\ell}_t}{\ell_t} &= \bar{\boldsymbol{u}}_t \cdot \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \frac{(\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t)}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|} + \cdots \\
&= \bar{\boldsymbol{u}}_t \cdot \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_t + \cdots \\
&= \bar{\boldsymbol{u}}_t \cdot \mathbf{sym\,grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \bar{\boldsymbol{u}}_t + \cdots \qquad (\boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{asym\,grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t = 0,\ \forall \boldsymbol{u}_t)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Lorsque $P' \to P$ en suivant un certain chemin matériel $\mathscr{C}^P$ issu de la particule P, alors $\ell_t \to 0$, $\dot{\ell}_t \to 0$ et le vecteur unitaire $\bar{\boldsymbol{u}}_t$ tend vers la direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ d'une direction matérielle $\boldsymbol{u}$.

- **Définition 5.2 – Taux de dilatation linéique.** Soir $\mathscr{C}^P$ un chemin matériel issu d'une particule P, définissant en P une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ de direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$. On appelle taux de dilatation linéique actuel en P dans la direction matérielle $\boldsymbol{u}$ la limite suivante :

$$\tau_\ell(\boldsymbol{u}) = \lim_{P' \in \mathscr{C}^P \to P} \frac{\dot{\ell}_t}{\ell_t} \qquad \text{(limite de la dérivée temporelle logarithmique de } \|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|) \tag{5.2}$$

L'équation (5.1) montre que cette limite est :

$$\tau_\ell(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{sym\,grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t$$

Le taux de dilatation linéique actuel τ_ℓ en une particule P dans une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ de direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$, est un scalaire de la dimension d'une fréquence (unité légale : s^{-1}) :
– si $\tau_\ell < 0$, la direction matérielle est en cours de contraction,
– si $\tau_\ell > 0$ la direction matérielle est en cours d'extension.
Pour donner la valeur de τ_ℓ en une particule P dans toutes les directions matérielles issues de P, il faut un tenseur symétrique du second ordre : $\mathbf{sym\,grad}_E\, \boldsymbol{v}$. On pose donc la définition suivante :

- **Définition 5.3 – Tenseur des taux de déformation.** On appelle tenseur des taux de déformation actuel, noté $\boldsymbol{D}$, la partie symétrique du gradient eulérien des vitesses :

$$\boldsymbol{D}(P,t) = (\mathbf{sym\,grad}_E\, \boldsymbol{v})(P,t) \tag{5.3}$$

Le taux de dilatation linéique actuel τ_ℓ en une particule P dans une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ de direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ est évalué par :

$$\tau_\ell(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{D} : \boldsymbol{U}_t \qquad (\boldsymbol{U}_t = \boldsymbol{u}_t \otimes \boldsymbol{u}_t, \text{ direction matérielle actuelle non orientée}) \tag{5.4}$$

Le taux de dilatation linéique τ_ℓ dans une direction matérielle est indifférent à l'orientation de la direction matérielle :

$$\tau_\ell(\boldsymbol{u}) = \tau_\ell(-\boldsymbol{u})$$

5.2.2 Point de vue lagrangien

On calcule la dérivée temporelle de la dilatation linéique actuelle K_ℓ (mesurée par rapport à une forme de référence) dans une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ de direction de référence $\boldsymbol{u}_0$, issue d'une particule P. La dilatation linéique dans cette direction matérielle est :

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\| \qquad \text{[éq. (4.9) p. 53]}$$

La dérivée temporelle de cette dilatation linéique est :

$$\begin{aligned}
\dot{K}_\ell(\boldsymbol{u}) &= \|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|^{\cdot} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0\|}\cdot(\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{u}_0) \qquad (\|\boldsymbol{v}\|^{\cdot} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\cdot\dot{\boldsymbol{v}} \text{ et } \boldsymbol{u}_0 \text{ indépendant de } t)\\
&= \boldsymbol{u}_t\cdot\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0 \qquad \text{[éq. (4.2) p. 51]}\\
&= \boldsymbol{u}_t\cdot\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}_0) \qquad \text{[éq. (2.32) p. 31]}\\
\frac{\dot{K}_\ell(\boldsymbol{u})}{K_\ell(\boldsymbol{u})} &= \boldsymbol{u}_t\cdot\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_t \qquad \text{[éq. (4.9) p. 53 et éq. (4.2) p. 51]}\\
&= \boldsymbol{u}_t\cdot\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_t\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{u}_t = \tau_\ell \qquad \text{[éq. (5.4) p. 82]}
\end{aligned}$$

Le tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D}$ introduit dans le point de vue eulérien [déf. 5.3 p. 82] apparaît aussi naturellement dans le point de vue lagrangien. Le taux de dilatation linéique dans une direction matérielle est aussi la dérivée temporelle logarithmique de la dilatation linéique dans cette même direction matérielle :

$$\tau_\ell(\boldsymbol{u}) = \frac{\dot{K}_\ell(\boldsymbol{u})}{K_\ell(\boldsymbol{u})} \tag{5.5}$$

Démonstration alternative – Le calcul qui précède a été fait dans l'intention d'étudier directement la dérivée temporelle de la dilatation linéique actuelle par rapport à une forme de référence arbitrairement choisie [éq. (4.8) p. 52]. Le calcul précédent montre que sa dérivée temporelle logarithmique est, quant à elle, indifférente au choix de la forme de référence. La démonstration qui suit montre mieux pourquoi le taux de dilatation linéique actuel est indifférent à la longueur de référence.

La définition de τ_ℓ [déf. 5.2 p. 82] est :

$$\begin{aligned}
\tau_\ell(\boldsymbol{u}) &= \lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P}\frac{\dot{\ell}_t}{\ell_t} \qquad \text{[déf. 5.2 p. 82]}\\
&= \lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P}\frac{(\frac{\ell_t}{\ell_0})^{\cdot}}{\frac{\ell_t}{\ell_0}} = \frac{(\lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P}\frac{\ell_t}{\ell_0})^{\cdot}}{\lim_{P'\in\mathscr{C}^P\to P}\frac{\ell_t}{\ell_0}} \qquad (\ell_0 \text{ temporellement constant})\\
\tau_\ell(\boldsymbol{u}) &= \frac{\dot{K}_\ell(\boldsymbol{u})}{K_\ell(\boldsymbol{u})} \qquad \text{[déf. 4.10 p. 52]}
\end{aligned}$$

Compatibilité des taux de déformation – Si l'on se donne *a priori* un champ de tenseurs symétriques $\boldsymbol{D}$ comme champ de tenseurs des taux de déformation dans un milieu continu, il doit satisfaire à des équations de compatibilité [(3)] pour qu'il soit la partie symétrique du gradient eulérien d'un champ de vitesses. On peut écrire ces conditions de deux manières :

$$\mathbf{rot}_E\,\mathbf{rot}_E^{\top}\boldsymbol{D} = \mathbf{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\,\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\,\mathbf{div}_E\boldsymbol{D} - \mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\mathrm{tr}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{\Delta}_E\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$$

La recherche des champs de vitesses solutions se fait en deux temps :

[(3)] Voir la note 13 [p. 77]

1. On cherche d'abord le champ des vecteurs $\boldsymbol{w}_E$ solution des 9 équations aux dérivées partielles : $\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{w} = -\,\mathbf{rot}_E^\top\,\boldsymbol{D}$.
   Les solutions $\boldsymbol{w}_E$ sont définies à un champ $\boldsymbol{w}_0$ uniforme près, c'est-à-dire à un champ de vitesses à rotationnel uniforme près [(4)]. Contrairement aux conditions de compatibilité pour le tenseur des petites « perturbations » [item 1 p. 78], il n'y aucune restriction sur $\|\boldsymbol{w}_E\|$.
2. On cherche ensuite le champ de vecteurs $\boldsymbol{v}_E$ solution des 9 équations aux dérivées partielles : $\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{w}_E = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}$.
   Les solutions sont à un champ de vitesses uniforme $\boldsymbol{v}_0$ près, c'est-à-dire à un champ de vitesses de translation de solide près.

5.2.3 Changements d'observateur

- **Théorème 5.4 – Non objectivité du gradient eulérien des vitesses.** Le gradient eulérien du champ des vitesses actuelles est un champ tensoriel du second ordre non objectif. Sa formule de changement d'observateur est :

$$\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top + \dot{\boldsymbol{Q}}_t\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top \tag{5.6}$$

Démonstration – Pour tout observateur on a la relation $\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}$ [éq. (2.32) p. 31].

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}} &= \dot{\widetilde{\boldsymbol{F}}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{F}}^{-1} = (\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top)^{\cdot}\cdot(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top)^{-1} && \text{[éq. (3.10) p. 43]}\\
&= (\dot{\boldsymbol{Q}}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top + \boldsymbol{Q}_t\cdot\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{Q}_0^\top)\cdot(\boldsymbol{Q}_0\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top) && (\text{car } \dot{\boldsymbol{Q}}_0 = \mathbf{0})\\
&= \dot{\boldsymbol{Q}}_t\cdot\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top + \boldsymbol{Q}_t\cdot\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top\\
\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}} &= \dot{\boldsymbol{Q}}_t\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top + \boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top && \text{[éq. (2.32) p. 31]}
\end{aligned}$$

ce qui est différent de la formule de changement d'observateur des grandeurs tensorielles du second ordre objectives [th. 3.7 p. 42].

- **Théorème 5.5 – Objectivité du tenseur des taux de déformation.** Le tenseur des taux de déformation est une grandeur tensorielle symétrique du second ordre objective.

Démonstration – Le définition (universelle) du tenseur des taux de déformation pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{D}} &= \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\\
&= \mathbf{sym}(\dot{\boldsymbol{Q}}_t\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top) + \mathbf{sym}(\boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top) && \text{[éq. (5.6) p. 84]}\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{D}) && (\dot{\boldsymbol{Q}}_t\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top \text{ est antisymétrique})
\end{aligned} \tag{5.7}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur des grandeurs tensorielles du second ordre objectives [th. 3.7 p. 42].

Remarque – Contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer (et qui est parfois affirmé), le tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D}$ n'est pas la dérivée particulaire d'un tenseur de déformation (objectif ou non) car la dérivée particulaire d'une grandeur non scalaire (même objective) n'est jamais objective [th. 3.18 p. 46] alors que le tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D}$ est objectif.

On donne en annexe B [p. 111] les dérivées particulaires (non objectives) de quelques tenseurs de déformation et aussi les dérivées particulaires (objectives) de leurs invariants.

---

(4) Contrairement à ce qui est parfois affirmé, ce n'est pas nécessairement un champ de vitesses de solide en rotation. Par exemple, le champ donné en coordonnées cartésiennes orthonormées : $\boldsymbol{v} = 2x(y+z)\boldsymbol{e}_x + (z+x^2)\boldsymbol{e}_y + x^2\boldsymbol{e}_z$ a un rotationnel uniforme ($\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{e}_x$) mais n'est pas pour autant un champ de vitesses de solide : par exemple, le taux de dilatation linéique dans la direction $\boldsymbol{e}_x$ est $2(y+z) \neq 0$.

■ **Théorème 5.6 – Objectivité du taux de dilatation linéique.** Le taux de dilatation linéique est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition (universelle) du taux de dilatation linéique actuel dans une direction matérielle de direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ est : $\tau_\ell = \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t$ [éq. (5.4) p. 82]. Pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ elle s'écrit :

$$\widetilde{\tau}_\ell(\boldsymbol{u}) = \widetilde{\boldsymbol{u}}_t \cdot \widetilde{\boldsymbol{D}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_t = (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t) \cdot (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top) \cdot (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t) \qquad \text{[éq. (4.4) p. 52 et éq. (5.7)]}$$

$$\widetilde{\tau}_\ell(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t = \tau_\ell(\boldsymbol{u}) \qquad \text{[éq. (5.4) p. 82]} \tag{5.8}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

5.3 Taux de dilatation volumique

5.3.1 Point de vue eulérien

Considérons une particule P, et trois particules P', P'' et P''' chacune sur son propre chemin matériel issu de P. Pour alléger les écritures, on pose provisoirement :

$$\boldsymbol{\delta}' = \boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t \quad ; \quad \boldsymbol{\delta}'' = \boldsymbol{x}''_t - \boldsymbol{x}_t \quad ; \quad \boldsymbol{\delta}''' = \boldsymbol{x}'''_t - \boldsymbol{x}_t$$

Le volume actuel du parallélépipède défini par les trois biparticules $\{P, P'\}$, $\{P, P''\}$ et $\{P, P'''\}$ est le produit mixte :

$$v_t = [\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] \tag{5.9}$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned}
\dot{v}_t &= [\dot{\boldsymbol{\delta}}', \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] + [\boldsymbol{\delta}', \dot{\boldsymbol{\delta}}'', \boldsymbol{\delta}'''] + [\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \dot{\boldsymbol{\delta}}''']\\
&= [\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}' + \cdots, \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] + [\boldsymbol{\delta}', \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}'' + \cdots, \boldsymbol{\delta}'''] + [\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}''' + \cdots]\\
&= [\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] + [\boldsymbol{\delta}', \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] + [\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}'''] + \cdots\\
&= [\boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'', \boldsymbol{\delta}'''] \operatorname{tr} \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} + \cdots \qquad \left(\text{car } \operatorname{tr}\boldsymbol{T} = \frac{[\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] + [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] + [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}_3]}{[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]}\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\dot{v}_t}{v_t} = \operatorname{tr} \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} + \cdots \qquad \text{[éq. (5.9) p. 85]} \tag{5.10}$$

Lorsque les trois particules P', P'' et P''' tendent vers P, chacune sur son propre chemin matériel, les deux termes $\dot{v}_t$ et v_t tendent vers 0.

■ **Définition 5.7 – Taux de dilatation volumique.** On appelle taux de dilatation volumique actuel en une particule P la limite suivante :

$$\tau_v = \lim_{\substack{P' \in \mathscr{C}'_t \to P \\ P'' \in \mathscr{C}''_t \to P \\ P''' \in \mathscr{C}'''_t \to P}} \frac{\dot{v}_t}{v_t} \tag{5.11}$$

L'équation (5.10) [p. 85] montre que cette limite est indépendante des chemins matériels :

$$\tau_v = \operatorname{tr} \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} = \operatorname{tr} \boldsymbol{D} \quad (= \operatorname{div}_E\, \boldsymbol{v}) \tag{5.12}$$

Le taux de dilation volumique actuel en une particule est un scalaire de la dimension d'une fréquence (unité légale : s^{-1}) :
– si $\tau_v < 0$, la particule est en cours de contraction volumique,
– si $\tau_v > 0$, la particule est en cours d'expansion volumique.

5.3.2 Point de vue lagrangien

La dilatation volumique actuelle (mesurée par rapport à une forme de référence) est : $K_v = \det \boldsymbol{F}$ [éq. (4.28) p. 59]. Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned}\dot{K}_v &= (\det \boldsymbol{F})^{\cdot} = (\det \boldsymbol{F})\boldsymbol{F}^{-\top} : \dot{\boldsymbol{F}} \qquad (\text{identité } \dot{I}_{\mathrm{III}} = I_{\mathrm{III}}\boldsymbol{T}^{-\top} : \dot{\boldsymbol{T}}) \\ &= K_v \operatorname{tr}(\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) = K_v \operatorname{tr} \mathbf{grad}_E \boldsymbol{v} = K_v \operatorname{tr}\boldsymbol{D}\end{aligned}$$

Sa dérivée temporelle logarithmique est donc :

$$\frac{\dot{K}_v}{K_v} = \operatorname{tr}\boldsymbol{D} = \tau_v$$

Démonstration alternative – Comme pour la dilatation linéique, la valeur de la dilatation volumique actuelle dépend du choix de la forme de référence, mais sa dérivée temporelle logarithmique n'en dépend pas. On retrouve aussi bien ce résultat en utilisant la définition de K_v [déf. 4.20 p. 59] et la définition de τ_v [déf. 5.7 p. 85] :

$$\frac{\dot{K}_v}{K_v} = \frac{(\lim_{dv_t \to 0} \frac{v_t}{v_0})^{\cdot}}{\lim_{dv_t \to 0} \frac{v_t}{v_0}} = \frac{(\lim_{dv_t \to 0} v_t)^{\cdot}}{\lim_{dv_t \to 0} v_t} = \lim_{dv_t \to 0} \frac{\dot{v}_t}{v_t} = \tau_v$$

5.3.3 Changement d'observateur

- **Théorème 5.8 – Objectivité du taux de dilatation volumique.** Le taux de dilatation volumique actuel en une particule est une grandeur scalaire objective.

  Démonstration – Le tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D}$ est objectif. Ses invariants (et en particulier sa trace) sont donc des scalaires objectifs [prop. 3.8 p. 42].

De l'égalité $\operatorname{tr}\boldsymbol{D} = \operatorname{div}_E \boldsymbol{v}$, on déduit un corollaire :

- **Théorème 5.9 – Objectivité de la divergence eulérienne des vitesses.** La divergence eulérienne du champ des vitesses est une grandeur scalaire objective.

  Remarque – Bien que le champ des vitesses actuelles soit un champ matériel non objectif, sa divergence eulérienne est objective [sec. 3.5.3 p. 45].

5.4 Taux de dilatation surfacique

5.4.1 Point de vue eulérien

Considérons une particule P, et deux particules P' et P'' chacune sur son propre chemin matériel issu de P. Pour alléger les écritures, on pose provisoirement :

$$\boldsymbol{\delta}' = \boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t \quad ; \quad \boldsymbol{\delta}'' = \boldsymbol{x}''_t - \boldsymbol{x}_t$$

L'aire actuelle s_t du parallélogramme défini par les deux biparticules $\{P, P'\}$ et $\{P, P''\}$ est :

$$s_t \overline{\boldsymbol{n}}_t = \boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}'' \quad \Rightarrow \quad s_t = \|\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}''\| = [\boldsymbol{n}_t, \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}''] \tag{5.13}$$

où $\overline{\boldsymbol{n}}_t$ est la normale au parallélogramme.

Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned}
\dot{s}_t &= \|\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}''\|^{\cdot} = \frac{\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}''}{\|\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}''\|} \cdot (\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}'')^{\cdot} \qquad (\text{car } \|\boldsymbol{v}\|^{\cdot} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \cdot \dot{\boldsymbol{v}},\ \forall \boldsymbol{v}) \\
&= \overline{\boldsymbol{n}}_t \cdot \left(\dot{\boldsymbol{\delta}}' \wedge \boldsymbol{\delta}''\right) + \overline{\boldsymbol{n}}_t \cdot \left(\boldsymbol{\delta}' \wedge \dot{\boldsymbol{\delta}}''\right) \\
&= \overline{\boldsymbol{n}}_t \cdot \left((\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}'_t, t) - \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t, t)) \wedge \boldsymbol{\delta}''\right) + \overline{\boldsymbol{n}}_t \cdot \left((\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}''_t, t) - \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t, t)) \wedge \boldsymbol{\delta}''\right) \\
\dot{s}_t &= [\overline{\boldsymbol{n}}_t, \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}' + \cdots, \boldsymbol{\delta}''] + [\overline{\boldsymbol{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}'' + \cdots] \qquad \text{[notation 2.11 p. 28]}
\end{aligned}$$

La dérivée temporelle logatithmique de s_t est donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{s}_t}{s_t} &= \frac{[\overline{\boldsymbol{n}}_t, \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}''] + [\overline{\boldsymbol{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\delta}'']}{[\overline{\boldsymbol{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'']} + \cdots \qquad \text{[éq. (5.13) p. 86]} \\
&= \operatorname{tr} \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} - \frac{[\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \overline{\boldsymbol{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'']}{[\overline{\boldsymbol{n}}_t, \boldsymbol{\delta}', \boldsymbol{\delta}'']} + \cdots \qquad \left(\operatorname{tr}\boldsymbol{T} = \frac{[\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] + [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3] + [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}_3]}{[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]}\right) \\
&= \operatorname{tr} \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} - \frac{(\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}'') \cdot (\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \overline{\boldsymbol{n}}_t)}{\|\boldsymbol{\delta}' \wedge \boldsymbol{\delta}''\|} + \cdots \qquad \text{[éq. (5.13) p. 86]} \\
&= \operatorname{tr} \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} - \overline{\boldsymbol{n}}_t \cdot \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \overline{\boldsymbol{n}}_t + \cdots \\
\frac{\dot{s}_t}{s_t} &= \operatorname{tr} \boldsymbol{D} - \overline{\boldsymbol{n}}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \overline{\boldsymbol{n}}_t + \cdots
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Lorsque les deux particules P' et P'' tendent vers P, chacune sur son propre chemin matériel, les deux termes s_t et $\dot{s}_t$ tendent vers 0 et le vecteur unitaire $\overline{\boldsymbol{n}}_t$ tend vers la direction unitaire $\boldsymbol{n}_t$.

- **Définition 5.10 – Taux de dilation surfacique.** On appelle taux de dilatation surfacique actuel dans une facette matérielle de direction actuelle $\boldsymbol{n}_t$, la limite de la dérivée temporelle logarithmique suivante :

$$\tau_s = \lim_{\substack{P' \in \mathscr{C}' \to 0 \\ P'' \in \mathscr{C}'' \to 0}} \frac{\dot{s}_t}{s_t} \tag{5.15}$$

L'équation (5.14) montre que cette limite ne dépend que de la direction actuelle $\boldsymbol{n}_t$ de la normale à la facette matérielle :

$$\tau_s = \operatorname{tr} \boldsymbol{D} - \boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}_t \tag{5.16}$$

Le taux de dilation surfacique τ_s dans une facette matérielle est un scalaire de la dimension d'une fréquence (unité légale : s^{-1}) :
- si $\tau_s < 0$, la facette matérielle est en cours de contraction surfacique,
- si $\tau_s > 0$, la facette matérielle est en cours d'expansion surfacique.

5.4.2 Point de vue lagrangien

La dilatation surfacique actuelle K_s dans une facette matérielle de normale de référence $\boldsymbol{n}_0$ est :

$$K_s(\boldsymbol{n}) = (\det \boldsymbol{F})\, \|\boldsymbol{F}^{-\top} \cdot \boldsymbol{n}_0\| \qquad \text{[éq. (4.39) p. 62]}$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned}
\dot{K}_s(\boldsymbol{n}) &= (\det\boldsymbol{F})^{\cdot}\ \|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\| + \det\boldsymbol{F}\,\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\|^{\cdot} \\
&= (\det\boldsymbol{F})\,(\boldsymbol{F}^{-\top}:\dot{\boldsymbol{F}})\,\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\| + \det\boldsymbol{F}\,\frac{\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\|}\cdot(\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0)^{\cdot} \quad (\dot{T}_{\mathrm{III}} = T_{\mathrm{III}}\boldsymbol{T}^{-\top}:\dot{\boldsymbol{T}}) \\
&= \det\boldsymbol{F}\ \|\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0\|\ \mathrm{tr}(\dot{\boldsymbol{F}}\cdot\boldsymbol{F}^{-1}) + \det\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{n}_t\cdot(\boldsymbol{F}^{-\top})^{\cdot}\cdot\boldsymbol{n}_0 \qquad \text{[éq. (4.32) p. 60]} \\
&= K_s\ \mathrm{tr}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} - \det\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{n}_t\cdot(\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\dot{\boldsymbol{F}}^{\top}\cdot\boldsymbol{F}^{-\top})\cdot\boldsymbol{n}_0 \qquad \text{[éq. (4.39) p. 62, éq. (2.32) p. 31]}
\end{aligned}$$

Sa dérivée temporelle logarithmique est :

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{K}_s(\boldsymbol{n})}{K_s(\boldsymbol{n})} &= \mathrm{tr}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} - \frac{\det\boldsymbol{F}}{K_s}\,\boldsymbol{n}_t\cdot\mathbf{grad}_E^{\top}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F}^{-\top}\cdot\boldsymbol{n}_0 \qquad \text{[éq. (2.32) p. 31]} \\
&= \mathrm{tr}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{n}_t\cdot\mathbf{grad}_E^{\top}\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}_t \qquad \text{[éq. (4.39) p. 62]} \\
&= \mathrm{tr}\,\boldsymbol{D} - \boldsymbol{n}_t\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}_t \\
\frac{\dot{K}_s(\boldsymbol{n})}{K_s(\boldsymbol{n})} &= \tau_s(\boldsymbol{n}) \qquad \text{[éq. (5.16) p. 87]}
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Démonstration alternative – Comme précédemment, bien que la valeur actuelle de la dilatation surfacique K_s d'une facette matérielle dépende du choix de la forme de référence, sa dérivée temporelle logarithmique n'en dépend pas. On laisse le soin au lecteur de retrouver le résultat 5.17 à partir de la définition de K_s [déf. 4.25 p. 62] et de la définition de τ_s [déf. 5.10 p. 87], en suivant la même démarche que dans les démonstrations alternatives p. 83 et p. 86.

5.4.3 Changement d'observateur

- **Théorème 5.11 – Objectivité du taux de dilatation surfacique.** Le taux de dilatation surfacique actuel dans une facette matérielle est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition (universelle) du taux de dilatation surfacique actuel pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\tau}_s(\boldsymbol{n}) &= \mathrm{tr}\,\widetilde{\boldsymbol{D}} - \widetilde{\boldsymbol{n}}_t\cdot\widetilde{\boldsymbol{D}}\cdot\widetilde{\boldsymbol{n}}_t \qquad \text{[éq. (5.16) p. 87]} \\
&= \mathrm{tr}\boldsymbol{D} - ((\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{n})\cdot(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{Q}_t^{\top})\cdot(\boldsymbol{Q}_t\cdot\boldsymbol{n})) \qquad \text{[th. 5.8 p. 86 , th. 5.5 p. 84 et th. 4.24 p. 61]} \\
&= \mathrm{tr}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n} = \tau_s(\boldsymbol{n}) \qquad \text{[éq. (5.16) p. 87]}
\end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

5.5 Taux de distorsion stérique

5.5.1 Point de vue lagrangien

Le taux de distorsion stérique n'a de sens *a priori* que d'un point de vue lagrangien. En effet, la distorsion stérique n'est définie que pour trois directions matérielles *initialement orthogonales* . Sa valeur est :

$$\delta^s(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}',\boldsymbol{u}'') = \frac{K_\ell\,K'_\ell\,K''_\ell}{K_v} = \frac{1}{|\,[\boldsymbol{u}_t,\boldsymbol{u}'_t,\boldsymbol{u}''_t]\,|} \in [1\,;\infty[\qquad \text{[éq. (4.43) p. 64]}$$

Le taux de distorsion stérique de trois directions matérielle $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}'$ et $\boldsymbol{u}''$ est donc :

$$\frac{\dot{\delta}^s}{\delta^s} = \frac{\dot{K}_\ell}{K_\ell} + \frac{\dot{K}'_\ell}{K'_\ell} + \frac{\dot{K}''_\ell}{K''_\ell} - \frac{\dot{K}_v}{K_v} = \tau_\ell + \tau'_\ell + \tau''_\ell - \tau_v \tag{5.18}$$

$$= \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}'_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t + \boldsymbol{u}''_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}''_t - \mathrm{tr}\boldsymbol{D} \qquad \text{[éq. (5.4) p. 82 et éq. (5.12) p. 85]} \tag{5.19}$$

On peut évaluer la dérivée temporelle logarithmique du produit mixte actuel de trois directions matérielles initialement orthogonales, en utilisant la définition $\delta^s = \frac{1}{|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]|}$ [déf. 4.27 p. 64] :

$$\frac{\dot{\delta}^s}{\delta^s} = \frac{\left(\frac{1}{|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]|}\right)^{\cdot}}{\frac{1}{|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]|}} = -\frac{|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]|^{\cdot}}{|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]|}$$

On en déduit la dérivée temporelle logarithmique du produit mixte actuel de trois directions matérielles initialement orthogonales :

$$\frac{|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]|^{\cdot}}{|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]|} = -\frac{\dot{\delta}^s}{\delta^s} = \mathrm{tr}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}'_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t - \boldsymbol{u}''_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}''_t \qquad \text{[éq. (5.19) p. 89]} \tag{5.20}$$

Remarque – En particulier, si les trois directions matérielles sont non seulement initialement orthogonales mais aussi actuellement orthogonales ($|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]| = 1$), alors la distorsion stérique actuelle de ces trois directions matérielles vaut 1. Elle est donc actuellement à un minimum et sa dérivée temporelle doit être nulle. On retrouve bien ce résultat avec l'équation (5.20). En effet, dans ce cas le trièdre $\{\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t\}$ est actuellement orthonormé, ce qui implique :

$$\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}'_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t + \boldsymbol{u}''_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}''_t = \mathrm{tr}\boldsymbol{D}$$

On a alors :

$$\frac{\dot{\delta}^s}{\delta^s} = 0 \quad \text{[éq. (5.19)]} \qquad \text{et} \qquad \frac{|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]|^{\cdot}}{|[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]|} = 0 \quad \text{[éq. (5.20)]}$$

5.5.2 Point de vue eulérien

Sans parler de distorsion stérique de directions matérielles initialement orthogonales, on peut toujours évaluer la dérivée temporelle du produit mixte de trois directions matérielles actuelles sans se soucier si elles sont orthogonales à un quelconque instant de référence.

Soient trois directions matérielles de direction actuelles $\boldsymbol{u}_t$, $\boldsymbol{u}'_t$ et $\boldsymbol{u}''_t$. La dérivée temporelle de leur produit mixte est :

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]^{\cdot} &= [\dot{\boldsymbol{u}}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t] + [\boldsymbol{u}_t, \dot{\boldsymbol{u}}'_t, \boldsymbol{u}''_t] + [\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \dot{\boldsymbol{u}}''_t] \\
&= [\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t - \tau_\ell \boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t] + [\boldsymbol{u}_t, \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}'_t - \tau'_\ell \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t] + \\
&\qquad [\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}''_t - \tau''_\ell \boldsymbol{u}''_t] \qquad \text{[éq. (5.27) p. 92]} \\
&= [\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]\ \mathrm{tr}\ \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} - [\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]\,(\tau_\ell + \tau'_\ell + \tau''_\ell)
\end{aligned}$$

$$\frac{[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]^{\cdot}}{[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t]} = \mathrm{tr}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}'_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t - \boldsymbol{u}''_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}''_t \tag{5.21}$$

Remarques – Le résultat de l'équation (5.21) est identique à celui obtenu dans le point de vue lagrangien [éq. (5.20) p. 89], où les directions matérielles étaient initialement orthogonales. Lorsque

l'on observe le produit mixte actuel de trois directions matérielles, on peut toujours imaginer qu'il existe un instant où elles sont orthogonales et considérer la distorsion stérique par rapport à cet instant.

Par ailleurs, la dérivée temporelle du produit mixte de trois directions matérielles *actuellement orthogonales* est nécessairement nulle car $[\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{u}''_t] = \pm 1$ est un extremum pour le produit mixte de trois vecteurs unitaires. On peut le vérifier avec un calcul analogue à celui de la remarque p. 89.

5.5.3 Changements d'observateur

En utilisant les définitions universelles éq. (5.18) [p. 89] et éq. (5.21) [p. 89], on laisse le soin au lecteur de vérifier les deux résultats suivants :

- **Théorème 5.12 – Objectivité du taux de distorsion stérique.** Le taux actuel de distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.
- **Théorème 5.13 – Objectivité de la dérivée temporelle du produit mixte actuel de trois directions matérielles.** La dérivée temporelle du produit mixte actuel de trois directions matérielles est une grandeur scalaire objective.

5.6 Taux de distorsion angulaire

5.6.1 Point de vue lagrangien

Le taux actuel de distorsion angulaire n'a de sens *a priori* que d'un point de vue lagrangien. En effet, la distorsion angulaire actuelle n'est définie que pour deux directions matérielles *initialement orthogonales* . Sa valeur est :

$$\delta^a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}') = \frac{1}{\sin \alpha_t} = \frac{K_\ell K'_\ell}{K_s} \in [1\,;\infty[\qquad \text{[éq. (4.46) p. 65]}$$

Le taux de distorsion angulaire actuel est donc :

$$\frac{\dot{\delta}^a}{\delta^a} = \frac{\dot{K}_\ell}{K_\ell} + \frac{\dot{K}'_\ell}{K'_\ell} - \frac{\dot{K}_s}{K_s} = \tau_\ell + \tau'_\ell - \tau_s \tag{5.22}$$

$$= \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}'_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t - \mathrm{tr}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}_t \quad \text{où } \boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{u}_t \wedge \boldsymbol{u}'_t}{\|\boldsymbol{u}_t \wedge \boldsymbol{u}'_t\|} \quad \text{[éq. (5.16) p. 87]} \tag{5.23}$$

On peut évaluer la dérivée temporelle de l'angle actuel α_t entre deux directions matérielles initialement orthogonales, en utilisant la définition $\delta^a = \frac{1}{\sin \alpha_t}$ [déf. 4.46 p. 65] ; il vient :

$$\frac{\dot{\delta}^a}{\delta^a} = -\frac{(\sin \alpha_t)^{\cdot}}{\sin \alpha_t} = -\frac{\dot{\alpha}_t}{\tan \alpha_t} = \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}'_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t - \mathrm{tr}\boldsymbol{D} + \boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}_t \qquad \text{[éq. (5.23)]}$$

On en déduit une expression de la dérivée temporelle de l'angle actuel des directions matérielles initialement orthogonales :

$$\dot{\alpha}_t = \tan \alpha_t \left(\mathrm{tr}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}'_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t - \boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}_t\right) \quad \text{où } \boldsymbol{n}_t = \frac{\boldsymbol{u}_t \wedge \boldsymbol{u}'_t}{\|\boldsymbol{u}_t \wedge \boldsymbol{u}'_t\|} \tag{5.24}$$

Remarque – Si les directions matérielles $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}'$ sont non seulement initialement orthogonales mais aussi actuellement orthogonales, alors le trièdre $\{\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{u}'_t, \boldsymbol{n}_t\}$ est orthonormé, ce qui implique :

$$\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}'_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t + \boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{n}_t = \mathrm{tr}\boldsymbol{D}$$

Dans ce cas, l'équation (5.24) ne permet pas déterminer la valeur actuelle de $\dot{\alpha}_t$ car elle conduit à une forme indéterminée $\infty \times 0$. Le point de vue eulérien qui suit permettra d'établir une expression de $\dot{\alpha}_t$ qui évite cet écueil [éq. (5.26) p. 91].

5.6.2 Point de vue eulérien

Sans parler de distorsion angulaire de deux directions initialement orthogonales, on peut néanmoins évaluer la dérivée temporelle de l'angle actuel α_t de deux directions matérielles sans se soucier de savoir si elles étaient orthogonales à un quelconque instant de référence.

Soient deux directions matérielles $\boldsymbol{u}$ et $\boldsymbol{u}'$ dont les directions actuelles sont $\boldsymbol{u}_t$ et $\boldsymbol{u}'_t$. Leur angle actuel α_t est défini par [5] $\cos\alpha_t = \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{u}'_t$. La dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned}
(\cos\alpha_t)^{\cdot} &= \boldsymbol{u}'_t \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_t + \boldsymbol{u}_t \cdot \dot{\boldsymbol{u}}'_t \\
&= \boldsymbol{u}'_t \cdot (\mathbf{grad}_E \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}_t\, \tau_\ell) + \boldsymbol{u}_t \cdot (\mathbf{grad}_E \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}'_t - \boldsymbol{u}'_t\, \tau'_\ell) \qquad \text{[éq. (5.27) p. 92]} \\
&= \boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}'_t + \boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}'_t - (\tau_\ell + \tau'_\ell)\cos\alpha_t \\
-\sin\alpha_t\, \dot{\alpha}_t &= 2\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t - (\tau_\ell + \tau'_\ell)\cos\alpha_t \\
\dot{\alpha}_t &= -\frac{2\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t}{\sin\alpha_t} + \frac{\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}'_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t}{\tan\alpha_t} \qquad \text{[éq. (5.4) p. 82]}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

En particulier, pour deux directions matérielles *actuellement orthogonales* ($\alpha_t = \frac{\pi}{2}$), il reste :

$$\begin{aligned}
\dot{\alpha}_t &= -2\boldsymbol{u}_t \cdot (\mathbf{sph}\boldsymbol{D} + \mathbf{dev}\boldsymbol{D}) \cdot \boldsymbol{u}'_t \qquad (\sin\frac{\pi}{2} = 1 \text{ et } \tan\frac{\pi}{2} = \infty\,) \\
&= -2\,\frac{\mathrm{tr}\boldsymbol{D}}{3}\,\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{u}'_t - 2\boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{dev}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t \\
&= -2\boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{dev}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t \qquad (\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{u}'_t = 0)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Remarques – Contrairement à l'équation (5.24) [p. 90], l'équation (5.25) ne conduit à aucune indétermination dans l'évaluation de $\dot{\alpha}_t$ quand les deux directions matérielles sont actuellement orthogonales ($\alpha_t = \frac{\pi}{2}$). L'équation (5.25) [p. 91] est évidemment préférable car elle ne fait pas intervenir la normale commune aux deux directions matérielles actuelles $\boldsymbol{u}_t$ et $\boldsymbol{u}'_t$

On peut vérifier à la suite d'un calcul pénible [6], que les deux évaluations de $\dot{\alpha}_t$ données dans les équation (5.25) et (5.24) [p. 90] sont égales quand $\alpha_t \neq \frac{\pi}{2}$. Ce résultat signifie que lorsque l'on observe la dérivée temporelle de l'angle actuel de deux directions matérielles, on peut toujours imaginer qu'il existe un instant où ces directions matérielles sont orthogonales et considérer une distorsion angulaire par rapport à cet instant.

5.6.3 Changements d'observateur

- **Théorème 5.14 – Objectivité du taux de distorsion angulaire.** Le taux de distorsion angulaire actuel de deux directions matérielles initialement orthogonales est une grandeur scalaire objective.

[5] On rappelle que, dans l'espace $\mathscr{E}_3$, l'angle entre deux vecteurs est toujours dans l'intervalle $[0\,;\pi]$; il est donc complètement défini par son cosinus.

[6] Il vaut mieux s'aider d'un logiciel ce calcul formel.

Démonstration – L'équation (5.22) [p. 90] montre que ce taux est la somme de grandeurs scalaires objectives.

- **Théorème 5.15 – Objectivité de l'angle actuel de deux directions matérielles.** L'angle actuel α_t de deux directions matérielles est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – L'angle entre les directions actuelles pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\cos\widetilde{\alpha}_t = \widetilde{\boldsymbol{u}}_t \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}'_t = (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t) \cdot (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}'_t) = \boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{u}'_t = \cos\alpha_t \qquad \text{[th. 4.9 p. 51]}$$

- **Théorème 5.16 – Objectivité de la dérivée temporelle de l'angle actuel de deux directions matérielles.** La dérivée temporelle de l'angle actuel α_t de deux directions matérielles est une grandeur scalaire objective.

Démonstration – La définition (universelle) de $\dot{\alpha}_t$ [éq. (5.25) p. 91] appliquée pour l'observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ conduit à :

$$\dot{\widetilde{\alpha}}_t = -\frac{2\widetilde{\boldsymbol{u}}_t \cdot \widetilde{\boldsymbol{D}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}'_t}{\sin\widetilde{\alpha}_t} + \frac{\widetilde{\boldsymbol{u}}_t \cdot \widetilde{\boldsymbol{D}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_t + \widetilde{\boldsymbol{u}}'_t \cdot \widetilde{\boldsymbol{D}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}'_t}{\tan\widetilde{\alpha}_t} = \cdots = -\frac{2\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t}{\sin\alpha_t} + \frac{\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}'_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u}'_t}{\tan\alpha_t} = \dot{\alpha}_t$$

(il suffit d'utiliser les formules de changement d'observateur éq. (4.3) [p. 51] et th. 5.5 [p. 84])

5.7 Vitesse de rotation d'une direction matérielle

Pendant un mouvement, les directions matérielles [déf. 4.5 p. 50] sont en mouvement car les chemins matériels sont en mouvement. Les directions actuelles des directions matérielles issues d'une particule P sont des vecteurs unitaires et on peut définir leur vecteur vitesse actuelle de rotation [7].

5.7.1 Point de vue eulérien

Soit un chemin matériel $\mathscr{C}^P$ issu d'une particule P définissant une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ issue de P, de direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$. La dérivée temporelle de sa direction actuelle $\boldsymbol{u}_t$ est :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{u}}_t &= \Big(\lim_{P' \in \mathscr{C}_t^P \to P} \frac{\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|}\Big)^{\cdot} \qquad \text{[déf. 4.5 p. 50]} \\
&= \lim_{P' \in \mathscr{C}_t^P \to P} \Big(\frac{(\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t)^{\cdot}}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|} - (\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t)\,\frac{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|^{\cdot}}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|^2}\Big) \\
&= \lim_{P' \in \mathscr{C}_t^P \to P} \Big(\frac{\boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}'_t, t) - \boldsymbol{v}_E(\boldsymbol{x}_t, t)}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|} - \frac{\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|}\,\frac{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|^{\cdot}}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|}\Big) \\
&= \lim_{P' \in \mathscr{C}_t^P \to P} \Big(\frac{\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t) + \cdots}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|} - \overline{\boldsymbol{u}}_t\,\frac{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|^{\cdot}}{\|\boldsymbol{x}'_t - \boldsymbol{x}_t\|}\Big) \qquad \text{[notation 2.11 p. 28]} \\
&= \lim_{P' \in \mathscr{C}_t^P \to P} \Big(\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} \cdot \overline{\boldsymbol{u}}_t - \overline{\boldsymbol{u}}_t\,\frac{\dot{\ell}_t}{\ell_t} + \cdots\Big) \\
\dot{\boldsymbol{u}}_t &= \mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}_t\,\tau_\ell(\boldsymbol{u}) \qquad \text{[déf. 5.2 p. 82]}
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Remarque – La dérivée de tout vecteur unitaire lui est orthogonale [8]. On vérifie bien que :

$$\boldsymbol{u}_t \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_t = \boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t - \tau_\ell(\boldsymbol{u}) = \tau_\ell(\boldsymbol{u}) - \tau_\ell(\boldsymbol{u}) = 0$$

[7] Un vecteur unitaire en mouvement peut être vu comme un solide indéformable en mouvement.

[8] Pour s'en convaincre, il suffit de dériver l'égalité $\boldsymbol{u}_t \cdot \boldsymbol{u}_t = 1$.

Le vecteur vitesse de rotation actuel de la direction matérielle $\boldsymbol{u}$ est donc :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega}_t(\boldsymbol{u}) &= \boldsymbol{u}_t \wedge \dot{\boldsymbol{u}}_t \qquad \text{(définition de la vitesse de rotation d'un vecteur unitaire)} \\
&= \boldsymbol{u}_t \wedge (\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}_t\, \tau_\ell(\boldsymbol{u})) \qquad \text{[éq. (5.27) p. 92]} \qquad (5.28)\\
&= \boldsymbol{u}_t \wedge (\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t) \\
&= \boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{u}_t \qquad (5.29)
\end{aligned}$$

Remarques – Le tenseur $\mathbf{grad}_E^\top\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{H}$ est d'ordre 3. La vitesse angulaire actuelle et l'axe de rotation actuel de la direction matérielle $\boldsymbol{u}$ sont :

$$\|\boldsymbol{\omega}_t(\boldsymbol{u})\| = (\boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top\, \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t - \tau_\ell(\boldsymbol{u})^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{(algèbre)} \qquad (5.30)$$

$$\frac{\boldsymbol{\omega}_t(\boldsymbol{u})}{\|\boldsymbol{\omega}_t(\boldsymbol{u})\|} = \frac{\boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{u}_t}{(\boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top\, \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t - \tau_\ell(\boldsymbol{u})^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (5.31)$$

On constate que chaque direction matérielle issue de P a sa propre vitesse de rotation (axe et module) ; on ne peut donc pas parler, comme on le lit parfois, de « vitesse de rotation locale de la matière ».

En particulier, il existe à chaque instant au moins une direction matérielle issue de P dont la vitesse de rotation est nulle : ce sont la (les) direction(s) matérielle(s) qui sont actuellement confondues avec une direction propre du tenseur $\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v}$ [9]. En effet, si $\boldsymbol{u}_t$ est une direction propre de $\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v}$ de valeur propre associée k, l'équation (5.30) montre que la norme de sa vitesse de rotation est nulle :

$$\|\boldsymbol{\omega}_t(\boldsymbol{u})\|^2 = \boldsymbol{u}_t \cdot (\mathbf{grad}_E^\top\, \boldsymbol{v} \cdot \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{u}_t - \tau_\ell^2 = (\underbrace{\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t}_{k\boldsymbol{u}_t}) \cdot (\underbrace{\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t}_{k\boldsymbol{u}_t}) - (\boldsymbol{u}_t \cdot \underbrace{\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t}_{k\boldsymbol{u}_t})^2 = 0$$

5.7.2 Point de vue lagrangien

La direction actuelle d'une direction matérielle en fonction de sa direction de référence est :

$$\boldsymbol{u}_t = \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} \qquad \text{[éq. (4.2) p. 51]}$$

Sa dérivée temporelle est :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{u}}_t &= \frac{\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} - \frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} \frac{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|^{\cdot}}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} \\
&= \frac{\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} - \boldsymbol{u}_t \left(\frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|^2} \cdot (\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{u}_0) \right) \qquad \left(\text{car } \|\boldsymbol{v}\|^{\cdot} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} \text{ et } \dot{\boldsymbol{u}}_0 = \boldsymbol{0}\right) \\
&= \frac{\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} - \boldsymbol{u}_t \left(\frac{\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} \cdot \frac{\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0}{\|\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_0\|} \right) \\
&= \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}_t\, (\boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t) \qquad \text{[éq. (2.32) p. 31]} \\
\dot{\boldsymbol{u}}_t &= \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t - \boldsymbol{u}_t\, \tau_\ell(\boldsymbol{u}) \qquad \text{[éq. (5.4) p. 82]}
\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat donné dans l'équation (5.27) [p. 92].

[9] Le tenseur du second ordre $\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v}$ est réel non symétrique en général, il a une ou trois valeurs propres réelles et donc une ou trois directions propres réelles.

5.7.3 Changements d'observateur

- **Théorème 5.17 –** La formule de changement d'observateur de la dérivée temporelle de la direction actuelle d'une direction matérielle est :

$$\dot{\widetilde{\boldsymbol{u}}}_t = \boldsymbol{Q}_t \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_t + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{u}_t \tag{5.32}$$

Démonstration – La dérivée temporelle de la direction actuelle d'une direction matérielle pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\dot{\widetilde{\boldsymbol{u}}}_t &= \mathbf{grad}_E\, \widetilde{\boldsymbol{v}} \cdot \widetilde{\boldsymbol{u}}_t - \widetilde{\tau}_\ell(\boldsymbol{u})\, \widetilde{\boldsymbol{u}}_t && \text{[éq. (5.27) p. 92]}\\
&= \left[\boldsymbol{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top\right] \cdot (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t) - \tau_\ell(\boldsymbol{u})\, (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t) && \text{[éq. (5.6) p. 84 et éq. (5.8)]}\\
\dot{\widetilde{\boldsymbol{u}}}_t &= \boldsymbol{Q}_t \cdot \left[\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_t - \tau_\ell(\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{u}_t\right] + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{Q}_t \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_t + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{u}_t && \text{[éq. (5.27) p. 92]}
\end{aligned}$$

On peut retrouver ce résultat en dérivant temporellement la formule de changement d'observateur de la direction actuelle d'une direction matérielle [th. 4.9 p. 51].

- **Théorème 5.18 – Non objectivité de la vitesse de rotation d'une direction matérielle.** La vitesse de rotation actuelle d'une direction matérielle est une grandeur vectorielle non objective. Sa formule de changement d'observateur est :

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_t(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_t(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{Q}_t \cdot \left(\boldsymbol{u}_t \wedge (\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{u}_t)\right)$$

Démonstration – La vitesse de rotation de la direction actuelle d'une direction matérielle pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_t(\boldsymbol{u}) &= \widetilde{\boldsymbol{u}}_t \wedge \dot{\widetilde{\boldsymbol{u}}}_t = (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t) \wedge \left(\boldsymbol{Q}_t \cdot \dot{\boldsymbol{u}}_t + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{u}_t\right) && \text{[éq. (5.29) p. 93]}\\
&= (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{u}_t) \wedge \left(\boldsymbol{Q}_t \cdot \left(\dot{\boldsymbol{u}}_t + \boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{u}_t\right)\right)\\
&= (\det \boldsymbol{Q}_t)\, \boldsymbol{Q}_t \cdot \left(\boldsymbol{u}_t \wedge \left(\dot{\boldsymbol{u}}_t + \boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{u}_t\right)\right) && \text{(identité } (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{v}) \wedge (\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{w}) = (\det \boldsymbol{Q}_t)\, \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{w}))\\
&= \boldsymbol{Q}_t \cdot \left(\boldsymbol{u}_t \wedge \dot{\boldsymbol{u}}_t\right) + \boldsymbol{Q}_t \cdot \left(\boldsymbol{u}_t \wedge (\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{u}_t)\right) && (\det \boldsymbol{Q}_t = 1)\\
&= \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_t(\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{Q}_t \cdot \left(\boldsymbol{u}_t \wedge (\boldsymbol{Q}_t^\top \cdot \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{u}_t)\right) && \left(= \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\omega}_t(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{Q}_t \cdot \left(\boldsymbol{u}_t \wedge (\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}} \wedge \boldsymbol{u}_t)\right) \text{[éq. (1.13)]}\right)
\end{aligned}$$

ce qui est différent de la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective [th. 3.4 p. 40].

5.8 Tenseur tourbillon

Contrairement aux autres concepts cinématiques définis précédemment, l'introduction de ce tenseur n'a pas de motivation cinématique mais seulement algébrique.

- **Définition 5.19 – Tenseur tourbillon.** On appelle tenseur tourbillon actuel la partie antisymétrique du gradient eulérien du champ des vitesses actuelles :

$$\boldsymbol{W} = \mathbf{asym}\, \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} \tag{5.33}$$

Le tenseur tourbillon étant antisymétrique, on peut considérer son vecteur adjoint :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{w} &= \mathbf{adj}\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\boldsymbol{H} : \boldsymbol{W} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{W} : \boldsymbol{H} = -\frac{1}{2}\, \mathbf{asym}\, \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} : \boldsymbol{H} = -\frac{1}{2}\, \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} : \boldsymbol{H}\\
\boldsymbol{w} &= \frac{1}{2}\, \mathbf{rot}_E\, \boldsymbol{v}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

- **Définition 5.20 – Vecteur tourbillon.** Le vecteur $\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\,\mathbf{rot}_E \boldsymbol{v}$ est appelé vecteur tourbillon.

On appelle lignes tourbillons à l'instant t, les lignes de champ du champ des vecteurs tourbillons à l'instant t. On appelle tube tourbillon à l'instant t, la surface engendrée par les lignes tourbillon à l'instant t s'appuyant sur une courbe fermée $\mathscr{C}_0$ donnée.

Remarques – Le tenseur tourbillon $\boldsymbol{W} = \mathbf{asym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}$ est souvent improprement appelé tenseur des « taux de rotation » ou des « vitesses de rotation ». Ces dénominations (voire interprétations) sont injustifiées : le vecteur vitesse de rotation des directions matérielles est :

$$\boldsymbol{\omega}_t(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}_t \cdot \mathbf{grad}_E^\top \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_t \cdot (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{u}_t \qquad \text{[éq. (5.29) p. 93]}$$

Comme on peut le constater, la seule connaissance de $\boldsymbol{W}$ est insuffisante pour déterminer la vitesse de rotation actuelle des directions matérielles.

Par ailleurs, on montre ci-dessous [th. 5.21] que, contrairement au tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D}$, le tenseur tourbillon $\boldsymbol{W}$ n'est pas objectif.

- **Théorème 5.21 – Non objectivité du tenseur tourbillon.** Le tenseur tourbillon est une grandeur tensorielle du second ordre non objective. Sa formule de changement d'observateur est :

$$\widetilde{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top \tag{5.35}$$

Démonstration – La définition du tenseur tourbillon est : $\boldsymbol{W} = \mathbf{asym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}$ [déf. 5.19 p. 94]. Pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$, elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{W}} &= \mathbf{asym}\,\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}} = \mathbf{asym}\left(\boldsymbol{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top\right) \qquad \text{[éq. (5.6) p. 84]}\\
&= \mathbf{asym}\,(\boldsymbol{Q}_t \cdot \mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top) + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top = \boldsymbol{Q}_t \cdot \mathbf{asym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top\\
&= \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top
\end{aligned}$$

ce qui est différent de la formule de changement d'observateur d'une grandeur tensorielle du second ordre [th. 3.7 p. 42].

- **Théorème 5.22 – Non objectivité du vecteur tourbillon.** Le vecteur tourbillon actuel en une particule est une grandeur vectorielle non objective. Sa formule de changement d'observateur est :

$$\widetilde{\boldsymbol{w}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{w} + \mathbf{adj}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top\right) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}} \qquad \text{[éq. (1.13) p. 19])} \tag{5.36}$$

Démonstration – La définition (universelle) du vecteur tourbillon est : $\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}$ [éq. (5.34) p. 94]. Pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ elle s'écrit :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{w}} &= \mathbf{adj}\,\widetilde{\boldsymbol{W}} = \mathbf{adj}\left(\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top + \dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top\right) \qquad \text{[éq. (5.35) p. 95]}\\
&= \mathbf{adj}\,(\boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top) + \mathbf{adj}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top\right)\\
&= \boldsymbol{Q}_t \cdot \mathbf{adj}\,\boldsymbol{W} + \mathbf{adj}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_t \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top\right) = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{w} - \boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathscr{R}}/\mathscr{R}} \qquad \text{[éq. (1.13) p. 19]}
\end{aligned}$$

ce qui est différent de la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective [th. 3.4 p. 40].

On démontre dans la suite quelques théorèmes d'objectivité qui peuvent s'avérer utiles en mécanique des fluides :

- **Théorème 5.23 – Objectivité de $\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}$.** Le gradient eulérien du gradient eulérien du champ des vitesses est un champ tensoriel d'ordre 3 objectif.

Démonstration – La définition du gradient eulérien pour un observateur $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t)+\cdots=\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(P',t)-\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(P,t) \qquad \text{[notation 2.11 p. 28]}$$

Pour $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}=\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}$ il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t)+\cdots &= \mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}(P',t)-\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t) \qquad (\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}=\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}})\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}(P',t)\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top-\boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}(P,t)\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top \qquad \text{[éq. (5.6) p. 84]}\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot(\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}(P',t)-\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}(P,t))\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\big(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t)+\cdots\big)\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top\\
\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t) &= \boldsymbol{Q}_t\cdot\big(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t)\big)\cdot\boldsymbol{Q}_t^\top+\cdots\\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t)\big)+\cdots\\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v})\cdot\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t)+\cdots\\
&\qquad\qquad (\text{car } \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v})=\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{T})\cdot\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{v}))\\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v})\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t)+\cdots\\
\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}} &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}) \qquad (\text{l'égalité précédente est vraie } \forall\,(\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t))
\end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'un tenseur objectif [th. 3.11 p. 43].

Remarque – Bien que le gradient eulérien du champ des vitesses ne soit pas objectif [th. 5.4 p. 84], son gradient eulérien (tenseur d'ordre 3) est objectif [sec. 3.5.3 p. 45].

- **Théorème 5.24 – Objectivité du laplacien eulérien des vitesses.** Le laplacien eulérien du champ des vitesses est un champ vectoriel objectif.

Démonstration – On déduit de l'objectivité de $\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}$ celle du laplacien eulérien du champ des vitesses :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Delta}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}} &= \mathbf{div}_E\,\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}} \qquad \text{(définition du laplacien eulérien)}\\
&= (\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}):\boldsymbol{G} \qquad \text{(définition de la divergence eulérienne)}\\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}):\boldsymbol{G} \qquad \text{(objectivité de } \mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v})\\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}:\boldsymbol{G}) \qquad \text{(propriété des rotations)}\\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\mathbf{div}_E\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}) \qquad \text{(définition de la divergence eulérienne)}\\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{\Delta}_E\,\boldsymbol{v}) \qquad \text{(définition du laplacien eulérien)} \qquad (5.37)
\end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective [th. 3.4 p. 40].

Remarque – Bien que le champ des vitesses ne soit pas objectif, son laplacien eulérien est un champ vectoriel objectif [sec. 3.5.3 p. 45].

- **Théorème 5.25 – Objectivité de $\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}$.** Le gradient eulérien du rotationnel eulérien du champ des vitesses est un champ tensoriel du second ordre objectif.

Démonstration – La définition du gradient du rotationnel eulérien des vitesses pour $\widetilde{\mathscr{R}}$ est :

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t)+\cdots &= \mathbf{rot}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}(P',t)-\mathbf{rot}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}(P,t) \qquad \text{(définition du gradient pour } \widetilde{\mathscr{R}})\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}(P',t)-\boldsymbol{Q}_t\cdot\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}(P,t) \qquad \text{[éq. (5.36) p. 95]}\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\big(\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}(P',t)-\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}(P,t)\big)\\
&= \boldsymbol{Q}_t\cdot\big(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t)+\cdots\big) \qquad \text{(définition du gradient pour } \mathscr{R})\\
\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}}\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t) &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v})\cdot\mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\boldsymbol{x}'_t-\boldsymbol{x}_t)+\cdots\\
&= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v})\cdot(\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t)+\cdots\\
\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\widetilde{\boldsymbol{v}} &= \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}) \qquad (\text{l'égalité précédente est vraie } \forall\,(\widetilde{\boldsymbol{x}}'_t-\widetilde{\boldsymbol{x}}_t))
\end{aligned}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'un tenseur du second ordre objectif.

Remarque – Bien que le rotationnel eulérien des vitesses ne soit pas objectif [th. 5.22 p. 95], son gradient eulérien est objectif [sec. 3.5.3 p. 45].

■ **Théorème 5.26 – Objectivité de $\mathbf{rot}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}$.** Le double rotationnel eulérien du champ des vitesses est un champ vectoriel objectif.

Démonstration – Par définition du rotationnel eulérien [éq. (2.25) p. 29],

$$\mathbf{rot}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v} = -\,\mathbf{grad}_E(\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}) : \boldsymbol{H}$$

où $\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}$ est objectif [th. 5.25 p. 96]. Or un opérateur différentiel eulérien appliqué à un champ objectif est objectif [th. 3.14 p. 45]. Le résulat est donc objectif.

Remarque – Bien que le rotationnel eulérien des vitesses ne soit pas objectif [th. 5.22 p. 95], son rotationnel eulérien est un champ vectoriel objectif [sec. 3.5.3 p. 45].

Écoulements « irrotationnels » – En mécanique des fluides, on considère parfois des écoulements particuliers dits « irrotationnels » tels que $\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$. La formule de changement d'observateur de $\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}$ [éq. (5.36) p. 95] montre que si un écoulement est irrotationnel pour un observateur, il n'est pas irrotationnel pour un autre observateur. Cette caractéristique d'un écoulement n'est donc pas une caractéristique universelle.

En revanche, le gradient eulérien du rotationnel eulérien des vitesses ($\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}$) est un champ tensoriel d'ordre 2 objectif [th. 5.25 p. 96]. Ce gradient, ses opérateurs différentiels dérivés ainsi que leurs parties symétriques ou antisymétriques, sphériques ou de trace nulle voire leur décomposition polaire pourraient éventuellement servir à la définition *universelle* d'une « vorticité », pourvu que cette définition soit cinématiquement motivée.

Enfin, il se trouve que les deux grandeurs objectives construites à partir du tenseur tourbillon $\boldsymbol{W}$ (non objectif) [th. 5.25 p. 96] et [th. 5.26 p. 97] peuvent s'exprimer avec des opérateurs différentiels eulériens appliqués au seul tenseur des taux de déformation objectif $\boldsymbol{D}$ avec les identités suivantes :

$$\mathbf{grad}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v} = \mathbf{rot}_E^{\top}\boldsymbol{D} \quad ; \quad \mathbf{rot}_E\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{H} : \mathbf{asym}\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{D}$$

Ces identités prouvent à nouveau que ces quantités sont bien objectives car $\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{D}$ est un tenseur du second ordre objectif [th. 3.14 p. 45]. Il semble donc à l'auteur que la « définition » du tenseur tourbillon [déf. 5.19 p. 94], non cinématiquement motivée, ne soit pas indispensable.

5.9 En bref...

Le tenseur des taux de déformation $\boldsymbol{D} = \mathbf{sym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}$ est un champ tensoriel du second ordre objectif qui permet de calculer :
- le taux de dilatation linéique actuel d'une direction matérielle,
- le taux de dilatation surfacique actuel d'une facette matérielle,
- le taux de dilatation volumique actuel,
- le taux de distorsion angulaire actuel,
- le taux de distorsion stérique actuel.

Toutes ces grandeurs scalaires sont objectives.

En revanche, le vecteur vitesse de rotation d'une direction matérielle est une grandeur vectorielle non objective. De même, le tenseur tourbillon $\boldsymbol{W} = \mathbf{asym}\,\mathbf{grad}_E\,\boldsymbol{v}$ et son vecteur adjoint le vecteur tourbillon $\boldsymbol{w} = \frac{1}{2}\,\mathbf{rot}_E\,\boldsymbol{v}$ sont des grandeurs non objectives.

Bien que le champ des vitesses ne soit pas objectif, sa divergence eulérienne et son laplacien eulérien sont des champs respectivement scalaire et vectoriel objectifs.

6

Synthèse de la cinématique des milieux continus

La cinématique des milieux continus est l'analyse les mouvements d'un milieu continu par rapport à un observateur. On y a défini des grandeurs cinématiques scalaires vectorielles ou tensorielles dont on a pu analyser les changements lorsque l'on change d'observateur. Les grandeurs vectorielles ou tensorielles objectives sont celles dont la valeur actuelle a la même disposition par rapport à la position actuelle de la matière pour tous les observateurs ; leur formule de changement d'observateur est la même que celle de la position actuelle de toute biparticule, c'est-à-dire la rotation par $\boldsymbol{Q}_t$ (valeur actuelle du tenseur de changement d'observateur) :

$$\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}(t) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\boldsymbol{\Psi}(t)\big) \qquad \text{(si } \Psi \text{ est scalaire, } \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}_t}\big(\psi(t)\big) = \Psi(t) \;\Rightarrow\; \widetilde{\Psi}(t) = \Psi(t)\text{)}$$

La position actuelle d'une particule, la vitesse actuelle d'une particule, l'accélération actuelle d'une particule sont des champs vectoriels non objectifs. Les trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission sont donc des courbes différentes d'un observateur à l'autre.

L'analyse des déformations entre un instant de référence et un instant actuel, qui n'intéresse *a priori* que les mécaniciens des solides déformables, a conduit à la définition de tenseurs de déformations (certains objectifs et d'autres non) permettant de calculer en une particule (chacun avec des formules différentes) les grandeurs cinématiques scalaires suivantes :
– la dilatation linéique actuelle dans une direction matérielle,
– la dilatation surfacique actuelle dans une facette matérielle,
– la dilatation volumique actuelle en une particule,
– la distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales,
– la distorsion angulaire actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales.
Toutes ces grandeurs scalaires sont objectives.

À chaque instant il existe en toute particule P des directions matérielles orthonormées qui sont principales. Les dilatations linéiques dans ces directions matérielles sont dites principales : elles sont des extrémums des dilatations linéiques actuelles dans toutes les directions matérielles issues de la particule P.

Dans le cas de petites déformations, il est possible d'écrire des expressions simplifiées, mais approximatives, pour les dilatations linéique, surfacique et volumique actuelles.

L'analyse des vitesses de déformation a conduit à la définition d'un tenseur des taux de déformation objectif qui permet d'évaluer en une particule les grandeurs cinématiques scalaires suivantes [1] :

[1] Dans la liste qui suit, le mot « taux » signifie : dérivée temporelle logarithmique.

– le taux de dilatation linéique actuel dans une direction matérielle,
– le taux de dilatation surfacique actuel dans une facette matérielle,
– le taux de dilatation volumique actuel en une particule,
– le taux de distorsion angulaire actuel de deux directions matérielles initialement orthogonales,
– la dérivée temporelle de l'angle actuel de deux directions matérielles,
– le taux de distorsion stérique actuel de trois directions matérielles initialement orthogonales,
– la dérivée temporelle actuelle du produit mixte de trois directions matérielles actuelles.

Toutes ces grandeurs scalaires sont objectives.

En revanche, la vitesse de rotation des directions matérielles n'est pas une grandeur objective.

La cinématique des milieux continus ne fait que décrire les mouvements, les déformations et les vitesses de déformation, sans se préoccuper des causes qui les provoquent. La relation entre le mouvement et les sollicitations extérieures fait l'objet du cours suivant : *Équations générales des milieux continus* [(2)], du même auteur.

[(2)] Disponible à `http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00696063`, ou bien `http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/mmc.html`

A

Dilatations et distorsions maximales

Dans cette annexe la déformation en une particule est représentée par le tenseur de déformation actuelle non objectif $\boldsymbol{U}$ car il donne lieu à des écritures un peu plus simples dans les démonstrations. On verra dans la suite que ce choix est sans aucune importance, car les extremums que l'on va calculer s'expriment en fonction des dilatations linéiques principales $\{\lambda_\bullet\}$ de la déformation, lesquelles peuvent se calculer à partir de n'importe quel tenseur de déformation.

Le tenseur de déformation $\boldsymbol{U}$ étant symétrique, on peut toujours écrire :

$$\boldsymbol{U} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \boldsymbol{e}_i^U \otimes \boldsymbol{e}_i^U$$

où les valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$ sont les dilatations linéiques principales de cette déformation et où les trois vecteurs $\{\boldsymbol{e}_\bullet^U\}$ sont une base propre orthonormée directe des tenseurs de déformation non objectifs [sec. 4.4.4 p. 57].

A.1 Dilatations linéiques extrémales

Soit une direction matérielle $\boldsymbol{u}$ dont la direction de référence est le vecteur unitaire $\boldsymbol{u}_0$. La dilatation linéique actuelle dans cette direction matérielle est :

$$\begin{aligned} K_\ell(\boldsymbol{u}) &= \left(\boldsymbol{u}_0 \cdot \boldsymbol{U}^2 \cdot \boldsymbol{u}_0\right)^{\frac{1}{2}} && \text{[éq. (4.15) p. 55]} \\ &= \left((\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{u}_0) \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{u}_0)\right) && (\boldsymbol{U} \text{ est symétrique}) \\ &= \|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{u}_0\| \end{aligned}$$

On se propose de rechercher quelles sont les valeurs extrémales de la dilatation linéique actuelle sur l'ensemble des directions matérielles issues de la particule P, et accessoirement dans quelles directions matérielles on atteint cette dilatation linéique extrémale.

Pour envisager toutes les direction matérielles $\boldsymbol{u}_0$, on pose :

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_1^U$$

où $\boldsymbol{Q}(\mu)$ est une rotation, fonction quelconque d'un paramètre μ. Les propriétés des tenseurs orthogonaux nous assurent que $\forall \boldsymbol{Q}(\mu),\ \|\boldsymbol{u}_0\| = 1$. La dilatation linéique dans la direction matérielle $\boldsymbol{u}$ s'écrit donc :

$$K_\ell(\boldsymbol{u}) = \|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_1^U\| \tag{A.1}$$

Pour rechercher les dilatations linéiques extrémales, il suffit d'annuler la dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}K_\ell(\boldsymbol{u})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}K_\ell(\boldsymbol{u})}{K_\ell(\boldsymbol{u})} &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}(\mu)\cdot\boldsymbol{e}_1^U\|}{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}(\mu)\cdot\boldsymbol{e}_1^U\|} \\
&= \frac{(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U)\cdot(\boldsymbol{U}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U)}{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U\|^2} \qquad \left(\text{rappel : } \frac{\mathrm{d}\|\boldsymbol{v}\|}{\mathrm{d}\mu} = \frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}\mu}\right) \\
&= \frac{\boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{Q}^\top\cdot\boldsymbol{U}^2\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U}{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U\|^2} \\
&= \frac{\boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{Q}^\top\cdot\boldsymbol{U}^2\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Q}^\top\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U}{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U\|^2} \\
&= \frac{\boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1^U}{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U\|^2} = \frac{\boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1^U}{{K_\ell}^2} \qquad (K_\ell > 0)
\end{aligned} \tag{A.2}$$

où on a posé dans la dernière ligne :

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q}^\top\cdot\boldsymbol{U}^2\cdot\boldsymbol{Q} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}^\top}(\boldsymbol{U}^2) \quad \text{symétrique défini positif} \tag{A.3}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^\top\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \quad \text{antisymétrique quelle que soit la fonction } \boldsymbol{Q}(\mu) \tag{A.4}$$

Lorsque la rotation $\boldsymbol{Q}(\mu)$ varie, le tenseur $\boldsymbol{A}$ prend une valeur antisymétrique quelconque. La dilatation linéique est donc extrémale quand :

$$\boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1^U = 0, \quad \forall\boldsymbol{A} \text{ antisymétrique} \qquad [\text{éq. (A.2)}] \tag{A.5}$$

On définit les composantes des tenseurs $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{A}$ sur la base propre de $\boldsymbol{U}$:

$\boldsymbol{T} = T_{ij}\,\boldsymbol{e}_i^U\otimes\boldsymbol{e}_j^U$ où $T_{ij} = T_{ji}$, composantes de $\boldsymbol{T}$ sur la base propre orthonormée $\{\boldsymbol{e}_\bullet^U\}$ de $\boldsymbol{U}$;

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{a}$ tenseur antisymétrique quelconque où $\boldsymbol{a} = a_i\boldsymbol{e}_i^U$ est un vecteur quelconque.

L'équation scalaire (A.5) s'écrit alors [1] :

$$-a_3\,T_{12} + a_2\,T_{13} = 0, \quad \forall a_1\,\forall a_2\,\forall a_3$$

dont la solution est : $T_{12} = 0$ et $T_{13} = 0$. La matrice des composantes du tenseur $\boldsymbol{T}$ est donc de la forme :

$$[T] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ 0 & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix}$$

et la dilatation linéique extrémale est [éq. (A.1) p. 101] :

$$K_\ell = \|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}(\mu)\cdot\boldsymbol{e}_1^U\| \qquad \Rightarrow \qquad {K_\ell}^2 = \boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{Q}^\top\cdot\boldsymbol{U}^2\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U = \boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_1^U = T_{11}$$

où T_{11} est une valeur propre du tenseur $\boldsymbol{T}$.

Les valeurs propres de $\boldsymbol{U}^2$ sont : $(\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2)$. Les propriétés des rotations impliquent que les valeurs propres de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}^2$ sont les mêmes, mais dans un ordre éventuellement différent.

Les dilatations linéiques extrêmes sont donc les valeurs propres de $\boldsymbol{U}$, c'est-à-dire les dilatations linéiques principales de la déformation. La plus grande est λ_1 et la plus petite est λ_3. Ces valeurs sont atteintes quand la direction matérielle $\boldsymbol{u}$ coïncide avec les directions matérielles principales actuelles de la déformation.

[1] Pour l'écrire, on peut s'aider d'un logiciel de calcul formel.

A.2 Distorsion angulaire maximale

Soit un couple de deux directions matérielles *initialement orthogonales* $\{\boldsymbol{u}_0^{(1)}, \boldsymbol{u}_0^{(2)}\}$. La distorsion angulaire actuelle de ce couple de directions matérielles est :

$$\delta^a = \frac{K_\ell^{(1)} K_\ell^{(2)}}{K_s} \quad \in [1, \infty[\qquad \text{[éq. (4.46) p. 65]}$$

Chaque couple de directions matérielles initialement orthogonales a sa propre distorsion angulaire, car les dilatations linéiques $K_\ell^{(1)}$ et $K_\ell^{(2)}$ dépendent des directions matérielles et la dilatation surfacique K_s dépend de la normale unitaire au plan des deux directions matérielles :

$$K_\ell^{(1)} = \|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{u}_0^{(1)}\| \quad ; \quad K_\ell^{(2)} = \|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{u}_0^{(2)}\| \qquad \text{[éq. (4.15) p. 55]}$$

$$K_s = \det\boldsymbol{U}\, \|\boldsymbol{U}^{-1} \cdot (\boldsymbol{u}_0^{(1)} \wedge \boldsymbol{u}_0^{(2)})\| \qquad (\text{[éq. (4.40) p. 63]} \,;\, \boldsymbol{u}_0^{(1)} \text{ et } \boldsymbol{u}_0^{(2)} \text{ orthogonaux})$$

On se propose de rechercher quelle est la valeur maximale de la distorsion angulaire dans cette déformation sur l'ensemble des couples de directions matérielles initialement orthogonales, et accessoirement pour quels couples de directions matérielles on atteint cette distorsion angulaire maximale. Pour envisager tous les couples de vecteurs orthogonaux $\{\boldsymbol{u}_0^{(1)}, \boldsymbol{u}_0^{(2)}\}$, on pose :

$$\boldsymbol{u}_0^{(1)} = \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_1^U \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{u}_0^{(2)} = \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_2^U$$

où $\boldsymbol{Q}(\mu)$ est une rotation, fonction quelconque d'un paramètre μ et où $\boldsymbol{e}_1^U$ et $\boldsymbol{e}_2^U$ sont les deux premiers vecteurs de base d'une base propre orthonormée de $\boldsymbol{U}$. Les propriétés des tenseurs orthogonaux garantissent que $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ sont orthogonaux quelle que soit la rotation $\boldsymbol{Q}(\mu)$.

La distorsion angulaire du couple de vecteurs $(\boldsymbol{u}_0^{(1)}, \boldsymbol{u}_0^{(2)})$ s'écrit donc :

$$\delta^a = \frac{\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_1^U\|\, \|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_2^U\|}{\det\boldsymbol{U}\, \|\boldsymbol{U}^{-1} \cdot (\boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_1^U \wedge \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_2^U)\|} = \frac{\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_1^U\|\, \|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_2^U\|}{\det\boldsymbol{U}\, \|\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot (\boldsymbol{e}_1^U \wedge \boldsymbol{e}_2^U)\|}$$

$$\delta^a = \frac{\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_1^U\|\, \|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_2^U\|}{\det\boldsymbol{U}\, \|\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_3^U\|} \tag{A.6}$$

Comme on peut le constater, la distorsion angulaire du couple de vecteurs $(\boldsymbol{u}_0^{(1)}, \boldsymbol{u}_0^{(2)})$ dépend de la rotation $\boldsymbol{Q}(\mu)$.

A.2.1 Recherche de la distorsion angulaire maximale

Pour rechercher les distorsions angulaires extrémales, il suffit d'annuler la dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\delta^a$:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\delta^a}{\delta^a} &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_1^U\|}{\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_1^U\|} + \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_2^U\|}{\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_2^U\|} - \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\|\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_3^U\|}{\|\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}(\mu) \cdot \boldsymbol{e}_3^U\|} \\
&= \frac{(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_1^U) \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_1^U)}{\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_1^U\|^2} + \frac{(\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_2^U) \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_2^U)}{\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_2^U\|^2} - \frac{(\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_3^U) \cdot (\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_3^U)}{\|\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_3^U\|^2} \\
&= \frac{\boldsymbol{e}_1^U \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_1^U}{\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_1^U\|^2} + \frac{\boldsymbol{e}_2^U \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^2 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_2^U}{\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_2^U\|^2} - \frac{\boldsymbol{e}_3^U \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^{-2} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_3^U}{\|\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_3^U\|^2} \\
&= \frac{\boldsymbol{e}_1^U \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^2 \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_1^U}{\boldsymbol{e}_1^U \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^2 \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_1^U} + \frac{\boldsymbol{e}_2^U \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^2 \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_2^U}{\boldsymbol{e}_2^U \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^2 \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_2^U} - \frac{\boldsymbol{e}_3^U \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^{-2} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_3^U}{\boldsymbol{e}_3^U \cdot \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^{-2} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_3^U} \\
&= \frac{\boldsymbol{e}_1^U \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_1^U}{\boldsymbol{e}_1^U \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_1^U} + \frac{\boldsymbol{e}_2^U \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_2^U}{\boldsymbol{e}_2^U \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_2^U} - \frac{\boldsymbol{e}_3^U \cdot \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_3^U}{\boldsymbol{e}_3^U \cdot \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{e}_3^U}
\end{aligned}$$

où, comme dans la section prévédente, on a posé dans la dernière ligne :

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^2 \cdot \boldsymbol{Q} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}^\top}(\boldsymbol{U}^2) \quad \text{symétrique défini positif} \tag{A.7}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^\top \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \quad \text{antisymétrique quelle que soit la fonction } \boldsymbol{Q}(\mu) \tag{A.8}$$

Lorsque la rotation $\boldsymbol{Q}(\mu)$ varie, le tenseur $\boldsymbol{A}$ prend une valeur antisymétrique quelconque. La distorsion angulaire δ^a est donc extrémale quand :

$$\frac{\boldsymbol{e}_1^U \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_1^U}{\boldsymbol{e}_1^U \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_1^U} + \frac{\boldsymbol{e}_2^U \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_2^U}{\boldsymbol{e}_2^U \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{e}_2^U} - \frac{\boldsymbol{e}_3^U \cdot \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_3^U}{\boldsymbol{e}_3^U \cdot \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \boldsymbol{e}_3^U} = 0, \quad \forall \boldsymbol{A} \text{ antisymétrique} \tag{A.9}$$

On définit les composantes des tenseurs $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{A}$ sur la base propre de $\boldsymbol{U}$:

$\boldsymbol{T} = T_{ij}\, \boldsymbol{e}_i^U \otimes \boldsymbol{e}_j^U$ où $T_{ij} = T_{ji}$, composantes de $\boldsymbol{T}$ sur la base propre orthonormée $\{\boldsymbol{e}_\bullet^U\}$ de $\boldsymbol{U}$;

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{a}$ tenseur antisymétrique quelconque où $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{u}_i$ est un vecteur quelconque.

L'équation scalaire (A.9) s'écrit alors [(2)] :

$$\frac{a_3\, T_{12}\,(T_{11} - T_{22})}{T_{11}\, T_{22}} + \frac{a_2\, T_{12}\,(T_{11}\;\; T_{23} - T_{12}\, T_{13})}{T_{11}\,\left(T_{11}\, T_{22} - T_{12}^2\right)} - \frac{a_1\, T_{12}\;\; (T_{13}\, T_{22} - T_{12}\, T_{23})}{T_{22}\,\left(T_{11}\, T_{22} - T_{12}^2\right)} = 0, \quad \forall a_1\, \forall a_2\, \forall a_3$$

La résolution de ces trois équations à 6 inconnues $T_{\bullet\bullet}$ implique que la matrice des composantes de $\boldsymbol{T}$ dans la base propre de $\boldsymbol{U}$ est de l'une des deux formes suivantes :

$$[M_1] = \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad [M_2] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{11} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}$$

On calcule les distorsions extrémales dans ces deux cas.

Cas $[M_1]$ La distorsion angulaire des deux directions initialement orthogonales $\boldsymbol{u}_0^{(1)} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_1^U$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_2^U$ est [éq. (A.6) p. 103] :

$$\delta^a = \frac{\|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_1^U\|\, \|\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_2^U\|}{\det \boldsymbol{U}\, \|\boldsymbol{U}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{e}_3^U\|} \quad \text{où } \boldsymbol{U}^2 = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{Q}^\top \quad \Rightarrow \quad \delta_2^a = \frac{T_{11}\, T_{22}}{\det(M_1)\,(M_1^{-1})_{33}} = 1$$

Dans ce cas, il n'y a donc pas de distorsion angulaire (les deux directions $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ restent orthogonales après déformation). Cet extrémum est un minimum de la distorsion angulaire.

Cas $[M_2]$ Les valeurs propres de $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q}^\top \cdot \boldsymbol{U}^2 \cdot \boldsymbol{Q}$, c'est-à-dire celles de $[M_2]$, sont :

$$(T_{11} + T_{12}\,,\, T_{11} - T_{12}\,,\, T_{33})$$

Les valeurs propres de $\boldsymbol{U}^2$ sont : $(\lambda_1^2\,,\, \lambda_2^2\,,\, \lambda_3^2)$. Les propriétés des rotations impliquent que les valeurs propres de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}^2$ sont les mêmes, mais dans un ordre éventuellement différent :

$$T_{11} + T_{12} = \lambda_i^2 \;\; ; \;\; T_{11} - T_{12} = \lambda_j^2 \;\; ; \;\; T_{33} = \lambda_k^2 \quad \text{où } (i, j, k) \text{ est une permutation de } (1, 2, 3),$$

(2) Pour l'écrire, on peut s'aider d'un logiciel de calcul formel.

ce qui entraîne :

$$T_{11} = \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{2} \quad ; \quad T_{12} = \frac{\lambda_i^2 - \lambda_j^2}{2}$$

Les extremums de la distorsion angulaire des deux directions orthogonales $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ sont donc [éq. (A.6) p. 103] :

$$\delta^a = \frac{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U\|\,\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2^U\|}{\det\boldsymbol{U}\,\|\boldsymbol{U}^{-1}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3^U\|} \quad\Rightarrow\quad \delta^{a2} = \frac{T_{11}\,T_{22}}{\det(M_2)\,M_2^{-1}{}_{33}} = \frac{T_{11}^2}{(T_{11}+T_{12})\,(T_{11}-T_{12})} = \frac{(\lambda_i^2+\lambda_j^2)^2}{4\,\lambda_i^2\,\lambda_j^2}$$

Les distorsions extrémales sont donc :

$$\delta^a = \frac{\lambda_i^2+\lambda_j^2}{2\,\lambda_i\,\lambda_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}+\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right) \quad \text{où } (i,j,k) \text{ est une permutation de } (1,2,3).$$

Le tenseur de déformation $\boldsymbol{U}$ étant symétrique défini positif, les valeurs propres λ_i et λ_j sont strictement positives. On vérifie aisément que si les valeurs propres sont distinctes, alors $\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}+\frac{\lambda_j}{\lambda_i}\right) > 1$. Ces extrémums sont donc des maximums relatifs de distorsion angulaire. Les trois maximums relatifs de distorsion angulaire sont donc :

$$\delta_3^a = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \quad ; \quad \delta_1^a = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_3}+\frac{\lambda_3}{\lambda_2}\right) \quad ; \quad \delta_2^a = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) \tag{A.10}$$

Si on pose $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$, on vérifie aisément que la distorsion angulaire maximale est celle calculée avec les valeurs propres extrêmes :

$$\delta_{max}^a = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}+\frac{\lambda_1}{\lambda_3}\right) \tag{A.11}$$

La distorsion angulaire maximale δ_{max}^a en une particule est une fonction des dilatations linéiques principales extrêmes. Elle peut être évaluée avec n'importe quel tenseur de déformation.

A.2.2 Recherche des couples de directions de distorsion angulaire maximale

On peut préciser quelles sont les rotations $\boldsymbol{Q}$ qui définissent les couples $\{\boldsymbol{u}_0^{(1)},\boldsymbol{u}_0^{(2)}\}$ de distorsion angulaire extrémale. Les composantes dans la base $\{\boldsymbol{e}_\bullet^U\}$ des vecteurs propres unitaires du tenseur $\boldsymbol{T}$ sont les vecteurs propres de la matrice $[M_2]$:

$$\boldsymbol{t}_{\lambda_i} = \frac{\boldsymbol{e}_1^U+\boldsymbol{e}_2^U}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \boldsymbol{t}_{\lambda_j} = \frac{\boldsymbol{e}_1^U-\boldsymbol{e}_2^U}{\sqrt{2}} \quad ; \quad \boldsymbol{t}_{\lambda_k} = u_3$$

Les propriétés des rotations impliquent qu'elles sont aussi $\boldsymbol{t}_{\lambda_k} = \boldsymbol{Q}^\top\cdot\boldsymbol{e}_k^U$ [éq. (A.7) p. 104].
On a donc l'égalité :

$$\boldsymbol{e}_j^U\cdot\boldsymbol{t}_{\lambda_k} = \boldsymbol{e}_j^U\cdot\boldsymbol{Q}^\top\cdot\boldsymbol{e}_k^U = Q_{jk}^\top = Q_{kj}$$

Les composantes [3] de $\boldsymbol{Q}$ dans la base orthonormée $\{\boldsymbol{e}_\bullet^U\}$ sont donc : $Q_{kj} = \boldsymbol{t}_{\lambda_k} \cdot \boldsymbol{e}_j^U$. Pour toutes les permutations de (i,j,k), on obtient les six matrices de rotation suivantes :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{Q^{(123)}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(231)}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(312)}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(132)}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{Q^{(213)}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}}_{Q^{(321)}}$$

Ces six rotations s'interprétent géométriquement de la manière suivante :
(on pose $\theta_1 = \arccos(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4})$ et $\theta_2 = \arccos(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})$) :

- $\boldsymbol{Q}^{(123)}$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ autour de $-\boldsymbol{e}_3^U$, les vecteurs $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\boldsymbol{e}_1^U, \boldsymbol{e}_2^U)$;
- $\boldsymbol{Q}^{(231)}$ est une rotation d'angle θ_1 autour de $(1-\sqrt{2})\boldsymbol{e}_1^U - \boldsymbol{e}_2^U - \boldsymbol{e}_3^U$, les vecteurs $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\boldsymbol{e}_1^U, \boldsymbol{e}_3^U)$;
- $\boldsymbol{Q}^{(312)}$ est une rotation d'angle θ_2 autour de $\boldsymbol{e}_1^U + (1+\sqrt{2})\boldsymbol{e}_2^U + \boldsymbol{e}_3^U$, les vecteurs $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\boldsymbol{e}_2^U, \boldsymbol{e}_3^U)$;
- $\boldsymbol{Q}^{(132)}$ est une rotation d'angle θ_2 autour de $(1+\sqrt{2})\boldsymbol{e}_1^U + \boldsymbol{e}_2^U - \boldsymbol{e}_3^U$, les vecteurs $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\boldsymbol{e}_1^U, \boldsymbol{e}_3^U)$;
- $\boldsymbol{Q}^{(213)}$ est une rotation d'angle π autour de $(-1+\sqrt{2})\boldsymbol{e}_1^U + \boldsymbol{e}_2^U$, les vecteurs $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\boldsymbol{e}_1^U, \boldsymbol{e}_2^U)$;
- $\boldsymbol{Q}^{(321)}$ est une rotation d'angle θ_2 autour de $\boldsymbol{e}_1^U - (1+\sqrt{2})\boldsymbol{e}_2^U - \boldsymbol{e}_3^U$, les vecteurs $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ sont des bissectrices du plan $(\boldsymbol{e}_2^U, \boldsymbol{e}_3^U)$.

Les rotations $\boldsymbol{Q}$ qui définissent les vecteurs initialement orthogonaux $\boldsymbol{u}_0^{(i)}$ conduisant à la distorsion angulaire maximale sont les deux rotations $\boldsymbol{Q}^{(231)}$ ou $\boldsymbol{Q}^{(132)}$ et les directions de distorsion angulaire maximale sont les bissectrices du plan $(\boldsymbol{e}_1^U, \boldsymbol{e}_3^U)$.

A.3 Distorsion stérique maximale

La distorsion stérique de trois directions initialement orthogonales est :

$$\delta^s = \frac{K_\ell^{(1)} K_\ell^{(2)} K_\ell^{(3)}}{K_v} \in [1;\infty[\qquad \text{[éq. (4.43) p. 64]}$$

Chaque triplet de directions matérielles initialement orthogonales a sa propre distorsion stérique car les trois dilatations linéiques $K_\ell^{(1)}$, $K_\ell^{(2)}$ et $K_\ell^{(3)}$ dépendent des directions matérielles. En revanche, la dilatation volumique K_v n'en dépend pas [éq. (4.29) p. 60]. La recherche de la distorsion stérique maximale en une particule revient donc à rechercher la valeur maximale du produit $K_\ell^{(1)} K_\ell^{(2)} K_\ell^{(3)}$.

[3] La variance est sans importance dans une base orthonormée.

Comme dans la section précédente, on utilise le tenseur $\boldsymbol{U}$ pour évaluer les dilatations linéiques, et on utilise une rotation $\boldsymbol{Q}(\mu)$ quelconque pour engendrer tous les triplets de directions matérielles initialement orthogonales à partir d'une base propre orthonormée du tenseur de déformation $\boldsymbol{U}$:

$$\boldsymbol{u}_0^{(i)} = \boldsymbol{Q}(\mu)\cdot\boldsymbol{e}_i^U$$

La distorsion stérique est alors :

$$\delta^s = \frac{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}(\mu)\cdot\boldsymbol{e}_1^U\|\,\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}(\mu)\cdot\boldsymbol{e}_2^U\|\,\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}(\mu)\cdot\boldsymbol{e}_3^U\|}{\det\boldsymbol{U}}$$

A.3.1 Recherche de la distorsion stérique maximale

Pour rechercher la distorsion stérique maximale, il suffit d'annuler la dérivée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\delta^s$.

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\delta^s}{\delta^s} = \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U\|}{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_1^U\|} + \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2^U\|}{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_2^U\|} + \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3^U\|}{\|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{e}_3^U\|} \qquad (\det\boldsymbol{U} \text{ est indépendant de } \mu)$$

Avec des calculs similaires à la section précédente, on obtient :

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\delta^s}{\delta^s} = \frac{\boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1^U}{\boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_1^U} + \frac{\boldsymbol{e}_2^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2^U}{\boldsymbol{e}_2^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_2^U} + \frac{\boldsymbol{e}_3^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3^U}{\boldsymbol{e}_3^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_3^U}$$

où on a posé comme dans la section précédente :

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{Q}^\top\cdot\boldsymbol{U}^2\cdot\boldsymbol{Q} = \mathscr{R}_{\boldsymbol{Q}^\top}(\boldsymbol{U}^2) \qquad \text{symétrique défini positif,}$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}^\top\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\boldsymbol{Q} \qquad \text{antisymétrique quelle que soit la fonction } \boldsymbol{Q}(\mu).$$

Lorsque la rotation $\boldsymbol{Q}(\mu)$ varie, le tenseur $\boldsymbol{A}$ prend une valeur antisymétrique quelconque. La distorsion stérique δ^s est donc extrémale quand :

$$\frac{\boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_1^U}{\boldsymbol{e}_1^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_1^U} + \frac{\boldsymbol{e}_2^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_2^U}{\boldsymbol{e}_2^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_2^U} + \frac{\boldsymbol{e}_3^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_3^U}{\boldsymbol{e}_3^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_3^U} = 0, \quad \forall\boldsymbol{A} \text{ antisymétrique} \tag{A.12}$$

En écrivant les composantes de $\boldsymbol{T}$ et de $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{a}$ sur la base propre orthonormée de $\boldsymbol{U}$, il vient :

$$\frac{a_3\,T_{12}\,(T_{11}-T_{22})}{T_{11}\,T_{22}} + \frac{a_2\,T_{13}\,(T_{33}-T_{11})}{T_{33}\,T_{11}} + \frac{a_1\,T_{23}\,(T_{22}-T_{33})}{T_{22}\,T_{33}} = 0, \quad \forall a_1\,\forall a_2\,\forall a_3$$

où les termes diagonaux T_{11}, T_{22} et T_{33} sont respectivement les carrés des dilatations linéiques dans les directions $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$, $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$. Ils ne sont donc jamais nuls. La résolution de ce système de trois équations à six inconnues implique que la matrice des composantes de $\boldsymbol{T}$ dans la base propre orthonormée de $\boldsymbol{U}$ a l'une des cinq formes suivantes :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}}_{\text{cas n° 1}}, \underbrace{\begin{bmatrix} x & T_{12} & 0 \\ T_{12} & x & 0 \\ 0 & 0 & T_{33} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 0 & T_{13} \\ 0 & T_{22} & 0 \\ T_{13} & 0 & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & x & T_{23} \\ 0 & T_{23} & x \end{bmatrix}}_{\text{cas n° 2, 3, 4}}, \underbrace{\begin{bmatrix} x & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & x & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & x \end{bmatrix}}_{\text{cas n° 5}}$$

Cas n° 1 Les tenseurs $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{U}^2$ ont la même base propre. On a donc :

$$T_{11} = \lambda_i^2 \quad ; \quad T_{22} = \lambda_j^2 \quad ; \quad T_{33} = \lambda_k^2 \quad \text{où } (i,j,k) \text{ est une permutation de } (1,2,3).$$

La distorsion stérique pour cet extremum est alors : $\delta^s = \dfrac{\lambda_i\,\lambda_j\,\lambda_k}{\lambda_1\,\lambda_2\lambda_3} = 1$. Cet extrémum est donc un minimum de la distorsion stérique.

Cas n° 2, 3 et 4 Ces trois cas sont similaires : le tenseur $\boldsymbol{T}$ a une direction propre commune avec $\boldsymbol{U}^2$. Par exemple, pour la matrice n° 2, les valeurs propres de $\boldsymbol{T}$ $(x+T_{12}, x-T_{12}, T_{33})$ sont aussi celles de $\boldsymbol{U}^2$:

$$x+T_{12} = \lambda_i^2 \quad ; \quad x-T_{12} = \lambda_j^2 \quad ; \quad T_{33} = \lambda_k^2 \quad \text{où } (i,j,k) \text{ est une permutation de } (1,2,3),$$

ce qui implique :

$$x = \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{2}$$

La distorsion stérique pour cet extrémum est donc :

$$\delta^{s2} = \frac{x^2\,T_{33}}{K_v^2} = \frac{(\lambda_i^2+\lambda_j^2)^2\,\lambda_k^2}{4\,\lambda_1^2\,\lambda_2^2\,\lambda_3^2} \quad \Rightarrow \quad \delta^s = \frac{(\lambda_i^2+\lambda_j^2)\,\lambda_k}{2\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}$$

Pour toutes les permutations de (i,j,k) on obtient :

$$\delta_3^s = \frac{(\lambda_1^2+\lambda_2^2)\,\lambda_3}{2\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Big) = \delta_3^a > 1$$
$$\delta_2^s = \frac{(\lambda_1^2+\lambda_3^2)\,\lambda_2}{2\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\Big) = \delta_2^a > 1$$
$$\delta_1^s = \frac{(\lambda_2^2+\lambda_3^2)\,\lambda_1}{2\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}\Big) = \delta_1^a > 1$$

Pour les matrices n° 3 et 4, les calculs sont semblables et conduisent aux mêmes maximums relatifs. Ainsi, pour ces cas 2, 3 et 4, l'extrémum de la distorsion stérique est un extrémum de la distorsion angulaire [éq. (A.10) p. 105]. On sait des distorsions angulaires que δ_2^a est la plus grande. δ_2^s est donc (pour l'instant) la plus grande distorsion stérique.

Remarque – Il n'est pas étonnant de retrouver que les extrémums relatifs de la distorsion stérique trouvés ici soient aussi des extrémums de la distorsion angulaire : les extrémums de la distorsion angulaire sont obtenus quand les directions $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ sont les bissectrices des plans $(\boldsymbol{e}_i^U, \boldsymbol{e}_j^U)$ [section A.2.2 p. 105]. La troisième direction $\boldsymbol{u}_0^{(3)}$ est donc la direction propre $\boldsymbol{e}_k^U$. On trouve donc ici un maximum relatif de la distorsion stérique lorsque l'une des trois directions initialement orthogonales est une direction principale de $\boldsymbol{U}$.

Cas n° 5 Dans ce dernier cas, le tenseur $\boldsymbol{T}$ et le tenseur $\boldsymbol{U}^2$ n'ont aucune direction propre commune. En revanche, les dilatations linéiques des trois directions initialement orthogonales $\boldsymbol{u}_0^{(1)}$, $\boldsymbol{u}_0^{(2)}$ et $\boldsymbol{u}_0^{(3)}$ sont égales :

$$K_\ell^{(i)} = \|\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{u}_0^{(i)}\| = (\boldsymbol{e}_i^U\cdot\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{e}_i^U)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x} \qquad \Rightarrow \qquad K_\ell^{(1)}\,K_\ell^{(2)}\,K_\ell^{(3)} = x^{\frac{3}{2}}$$

D'autre part, les propriétés des rotations impliquent que $\mathrm{tr}\,\boldsymbol{T} = \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{U}^2)$, ce qui implique :

$$x = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{3}$$

La distorsion stérique de cet extrémum est donc :

$$\delta_4^s = \frac{K^{(1)}\,K^{(2)}\,K^{(3)}}{K_v} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{K_v} = \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}\,\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3} = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3}$$

Conclusion

Si on pose $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 > 0$, on peut prouver [(4)] que $\delta_4^s \geqslant \delta_2^s$. La distorsion stérique maximale est donc :

$$\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9}\,\frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3} \tag{A.13}$$

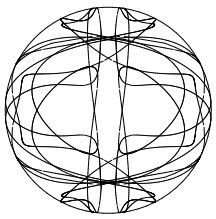
La distorsion stérique maximale en une particule est une fonction des dilatations linéiques principales actuelles. Elle peut donc être évaluée avec n'importe quel tenseur de déformation.

A.3.2 Recherche des trièdres des directions de distorsion stérique maximale

Il existe une infinité de rotations $\boldsymbol{Q}$ définissant les $\boldsymbol{u}_0^{(i)}$ et conduisant à la distorsion stérique maximale [(5)]. On laisse le soin au lecteur de vérifier [(6)] que l'une des solutions est le tenseur $\boldsymbol{Q}$ dont les composantes dans la base propre orthonormée $\{\boldsymbol{e}_\bullet^U\}$ sont :

$$\begin{bmatrix} \sqrt{\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_3^2}{6(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}} & \sqrt{\frac{2\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2}{3(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}} & \sqrt{\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_3^2}{6(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{\frac{2\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2}{6(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}} & -\sqrt{\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2-2\lambda_3^2}{3(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}} & \sqrt{\frac{2\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2}{6(\lambda_1^2-\lambda_3^2)}} \end{bmatrix}$$

Afin d'illustrer l'existence d'une infinité de rotations $\boldsymbol{Q}$ conduisant à la distorsion stérique maximale, la figure ci-contre montre, sur une demi-sphère unité, la trace des axes des rotations $\boldsymbol{Q}$ conduisant à un trièdre $\{\boldsymbol{u}_0^{(i)}\}$ de distorsion stérique maximale (cette figure a été calculée avec un logiciel de calcul formel pour les valeurs : $\lambda_1 = 1.25$, $\lambda_2 = 1$ et $\lambda_3 = 0.75$). À chaque axe de rotation est associé un certain angle de rotation compris entre 0 et π.



[(4)] Il vaut mieux s'aider d'un logiciel de calcul formel, en montrant que $\delta_4^{s2} - \delta_2^{s2} \geqslant 0$

[(5)] En interprétant les composantes de $\boldsymbol{Q}$ dans la base $\{\boldsymbol{e}_\bullet^U\}$ comme une matrice de changement de base entre deux bases orthonormées, on en déduit un corollaire : pour tout tenseur symétrique, il existe une infinité de bases orthonormées dans laquelle la matrice des composantes a ses termes diagonaux égaux.

[(6)] Il est préférable de s'aider d'un logiciel de calcul formel.

B

Dérivées particulaires utiles

Les dérivées particulaires des tenseurs de déformation (objectifs ou non) ont des relations avec le tenseur des taux de déformation objectif $\boldsymbol{D}$. Comme on va le voir, ces relations ne sont pas triviales. En mécanique des milieux continus, on aura surtout besoin de la dérivée particulaire des invariants (scalaires) des tenseurs de déformation.

B.1 Rappels

Dans cette annexe, on ne donnera que les dérivées particulaires des trois invariants fondamentaux $(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}})$, c'est-à-dire les coefficients du polynôme caractéristique d'un tenseur de déformation symétrique $\boldsymbol{S}$. S'il plaît au lecteur (notamment pour des raisons d'interprétation physique des invariants) d'utiliser un autre triplet équivalent [1] d'invariants définis par :

$$\{S^{(1)} = f^{(1)}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}) \ , \ S^{(2)} = f^{(2)}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}) \ , \ S^{(3)} = f^{(3)}(S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}})\}$$

il est facile de trouver les dérivées particulaires de ces nouveaux invariants par les formules :

$$\begin{aligned}
\dot{S}^{(1)} &= \partial_1 f^{(1)}\, \dot{S}_{\mathrm{I}} + \partial_2 f^{(1)}\, \dot{S}_{\mathrm{II}} + \partial_3 f^{(1)}\, \dot{S}_{\mathrm{III}} \\
\dot{S}^{(2)} &= \partial_1 f^{(2)}\, \dot{S}_{\mathrm{I}} + \partial_2 f^{(2)}\, \dot{S}_{\mathrm{II}} + \partial_3 f^{(2)}\, \dot{S}_{\mathrm{III}} \\
\dot{S}^{(3)} &= \partial_1 f^{(3)}\, \dot{S}_{\mathrm{I}} + \partial_2 f^{(3)}\, \dot{S}_{\mathrm{II}} + \partial_3 f^{(3)}\, \dot{S}_{\mathrm{III}}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on rappelle un résultat d'algèbre tensorielle : pour tout tenseur symétrique $\boldsymbol{S}$, les dérivées particulaires des invariants fondamentaux s'écrivent :

$$\dot{S}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{S}} \tag{B.1}$$

$$\dot{S}_{\mathrm{II}} = (S_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{S}) : \dot{\boldsymbol{S}} \tag{B.2}$$

$$\dot{S}_{\mathrm{III}} = (S_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - S_{\mathrm{I}}\boldsymbol{S} + \boldsymbol{S}^2) : \dot{\boldsymbol{S}} \quad \big(= S_{\mathrm{III}}\boldsymbol{S}^{-1} : \dot{\boldsymbol{S}} \quad \text{si } \boldsymbol{S}^{-1} \text{ existe}\big) \tag{B.3}$$

Pour évaluer les dérivées particulaires des trois invariants fondamentaux de $\boldsymbol{S}$, il suffit donc de savoir évaluer les trois produits scalaires $(\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{S}})$, $(\boldsymbol{S}^2 : \dot{\boldsymbol{S}})$ et éventuellement $(\boldsymbol{S}^{-1} : \dot{\boldsymbol{S}})$ si $\boldsymbol{S}^{-1}$ existe.

Enfin, on rappelle que les tenseurs de déformation objectifs $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{B}}$ et $\boldsymbol{M} = \mathbf{Ln}\boldsymbol{V}$, leurs puissances, leur exponentielle et leur logarithme ont leurs directions propres communes, les produits contractés simples de deux d'entre eux sont donc commutatifs.

[1] Pour que ce changement d'invariants soit valide, il faut s'assurer que le jacobien de la transformation $\{S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}, S_{\mathrm{III}}\} \leftrightarrow \{S^{(1)}, S^{(2)}, S^{(3)}\}$ soit non nul.

B.2 Tenseurs de déformation objectifs

B.2.1 Tenseur de déformation $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top$

Sa définition est : $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top$ [section 4.4.1 p. 54]. Sa dérivée particulaire est donc :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{B}} &= \dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^\top + \boldsymbol{F} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}^\top = (\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) \cdot (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top) + (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{F}^\top) \cdot (\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}^\top) \\
&= (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W})^\top \\
\dot{\boldsymbol{B}} &= (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W})
\end{aligned} \tag{B.4}$$

où on a utilisé la relation : $\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1} = \mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}$ [éq. (2.32) p. 31 et éq. (5.3) p. 82], et où $\boldsymbol{W} = \mathbf{asym}\,\mathbf{grad}_E\, \boldsymbol{v}$.

Remarque – Bien que le tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ soit un tenseur objectif, le lecteur vérifiera aisément que sa dérivée particulaire $\dot{\boldsymbol{B}}$ ne l'est pas [th.3.18 p. 46], notamment en raison de la présence du tenseur non objectif $\boldsymbol{W}$ [(2)].

Avec un peu de calcul algébrique [(3)], on montre que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{B}^n : \dot{\boldsymbol{B}} = 2\, \boldsymbol{B}^{n+1} : \boldsymbol{D}$$

En particulier, pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$, il vient :

$$\boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{B}} = 2\, \boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \quad ; \quad \boldsymbol{B} : \dot{\boldsymbol{B}} = 2\, \boldsymbol{B}^2 : \boldsymbol{D} \quad ; \quad \boldsymbol{B}^2 : \dot{\boldsymbol{B}} = 2\,(B_{\mathrm{III}} \boldsymbol{G} - B_{\mathrm{II}} \boldsymbol{B} + B_{\mathrm{I}} \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \tag{B.5}$$

En utilisant les résultats rappelés en (B.1), (B.2) et (B.3) [p. 111], on en déduit les dérivées particulaires des invariants fondamentaux du tenseur de déformation $\boldsymbol{B}$ en fonction de $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{D}$:

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{B}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \tag{B.6}$$

$$\dot{B}_{\mathrm{II}} = (B_{\mathrm{I}} \boldsymbol{G} - \boldsymbol{B}) : \dot{\boldsymbol{B}} = 2\,(B_{\mathrm{I}} \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}^2) : \boldsymbol{D} \tag{B.7}$$

$$\dot{B}_{\mathrm{III}} = (B_{\mathrm{II}} \boldsymbol{G} - B_{\mathrm{I}} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2) : \dot{\boldsymbol{B}} = 2\, B_{\mathrm{III}} \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \tag{B.8}$$

Méthode alternative – Il est possible d'obtenir (ou de vérifier) ces résultats sans algèbre tensorielle, en écrivant les composantes de $\boldsymbol{B}$ dans une base propre orthonormée $\{\boldsymbol{e}^V_\bullet\}$ commune aux tenseurs de déformation objectifs. Par exemple, on obtient (B.6) de la manière suivante :

$$\dot{B}_{\mathrm{I}} = (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\cdot} = 2\left(\lambda_1^2 \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} + \lambda_2^2 \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} + \lambda_3^2 \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3}\right) \quad \text{où } \frac{\dot{\lambda}_i}{\lambda_i} = \boldsymbol{e}^V_i \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e}^V_i = \tau_{\ell\, i} \qquad \text{[éq. (5.4) p. 82]}$$

On obtient le résultat en remarquant que :

$$2\left(\lambda_1^2 \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} + \lambda_2^2 \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} + \lambda_3^2 \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3}\right) = 2\,\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\dot{\lambda}_1}{\lambda_1} & D_{12} & D_{13} \\ D_{12} & \frac{\dot{\lambda}_2}{\lambda_2} & D_{23} \\ D_{13} & D_{23} & \frac{\dot{\lambda}_3}{\lambda_3} \end{bmatrix}^\top \right) = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D}$$

On laisse le soin au lecteur de procéder de la même manière pour les dérivées particulaires des autres invariants.

(2) On rappelle que sa formule de changement d'observateur est : $\widetilde{\boldsymbol{W}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{Q}_t}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{Q}_t$ [éq. (5.35) p. 95].

(3) On utilise les propriétés du produit combiné des tenseurs du second ordre : $\boldsymbol{A} : (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{B}^\top \cdot \boldsymbol{A}) : \boldsymbol{C}$. Dans la dernière égalité de (B.5), on utilise l'identité de Cayley-Hamilton : $\boldsymbol{T}^3 - T_{\mathrm{I}} \boldsymbol{T}^2 + T_{\mathrm{II}} \boldsymbol{T} - T_{\mathrm{III}} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{0}$.

B.2.2 Tenseur de déformation $\boldsymbol{V} = \sqrt{\boldsymbol{B}}$

De l'équation (B.4) [p. 112], il vient :

$$\boldsymbol{V}\cdot\dot{\boldsymbol{V}} + \dot{\boldsymbol{V}}\cdot\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{V}^2 + \boldsymbol{V}^2\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W}) \tag{B.9}$$

Remarque – La dérivée particulaire $\dot{\boldsymbol{V}}$ est solution de cette équation tensorielle [(4)], mais il n'est pas nécessaire de la résoudre pour calculer les dérivées particulaires des invariants de $\boldsymbol{V}$.

Avec un peu de calcul algébrique [(5)], on déduit de l'équation (B.9) que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \boldsymbol{V}^{n+1} : \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}^{n+2} : \boldsymbol{D}$$

En particulier pour $n = -1$, $n = 0$ et $n = 1$, il vient :

$$\boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V} : \boldsymbol{D} \quad ; \quad \boldsymbol{V} : \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}^2 : \boldsymbol{D} \quad ; \quad \boldsymbol{V}^2 : \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}^3 : \boldsymbol{D} = (V_{\mathrm{I}}\boldsymbol{V}^2 - V_{\mathrm{II}}\boldsymbol{V} + V_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G}) : \boldsymbol{D}$$

En utilisant les résultats (B.1), (B.2) et (B.3) [p. 111], il vient :

$$\dot{V}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V} : \boldsymbol{D} \tag{B.10}$$

$$\dot{V}_{\mathrm{II}} = (V_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G} - \boldsymbol{V}) : \dot{\boldsymbol{V}} = (V_{\mathrm{I}}\boldsymbol{V} - \boldsymbol{V}^2) : \boldsymbol{D} \tag{B.11}$$

$$\dot{V}_{\mathrm{III}} = (V_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G} - V_{\mathrm{I}}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{V}^2) : \dot{\boldsymbol{V}} = V_{\mathrm{III}}\boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \tag{B.12}$$

Remarque – On peut vérifier ces résultats sans calcul tensoriel par une méthode alternative similaire à celle exposée page 112 en écrivant les composantes des tenseurs dans une base propre de $\boldsymbol{V}$.

B.2.3 Tenseur de déformation $\boldsymbol{M} = \ln \boldsymbol{V}$

De l'équation (B.9) [p. 113], il vient :

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}}\cdot(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}})^{\cdot} + (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}})^{\cdot}\cdot\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W})\cdot\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{M}}\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W}) \tag{B.13}$$

Rappel – On rappelle que, par définition,

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\boldsymbol{M}^k}{k!} = \boldsymbol{G} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\boldsymbol{M}^k}{k!} \qquad \Rightarrow \qquad (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}})^{\cdot} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\boldsymbol{M}^k)^{\cdot}$$

où $(\boldsymbol{M}^k)^{\cdot}$ est la somme de k termes qui ne se factorisent pas [(6)] :

$$(\boldsymbol{M}^k)^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{M}}\cdot\boldsymbol{M}^{k-1} + \boldsymbol{M}\cdot\dot{\boldsymbol{M}}\cdot\boldsymbol{M}^{k-2} + \boldsymbol{M}^2\cdot\dot{\boldsymbol{M}}\cdot\boldsymbol{M}^{k-3} + \cdots + \boldsymbol{M}^{k-1}\cdot\dot{\boldsymbol{M}}$$

L'équation (B.13) est donc bien une équation en $\dot{\boldsymbol{M}}$, mais elle est compliquée [(7)].

---

(4) On en connait la solution : $\dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}^{-1}\cdot\mathbf{sym}(\boldsymbol{V}^2\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})) + \boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}$, où $\boldsymbol{A}$ est le tenseur antisymétrique suivant : $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{H}\cdot\Big((\boldsymbol{H}:(\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\boldsymbol{H}))^{-1}\cdot(\boldsymbol{H}:(\boldsymbol{V}^{-1}\cdot\mathbf{sym}(\boldsymbol{V}^2\cdot(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W}))))\Big)$. La complexité de cette expression devrait décourager toute tentative d'utilisation de la dérivée particulaire $\dot{\boldsymbol{V}}$!

(5) En calculant le produit scalaire ($\boldsymbol{V}^n$: équation(B.9))

(6) La dérivée particulaire $\dot{\boldsymbol{M}}$ ne commute pas avec $\boldsymbol{M}$, ni avec ses puissances entières, car elle n'a pas de base propre commune avec $\boldsymbol{M}^p$.

(7) Contrairement au cas précédent [note 4 p. 113], l'expression de $\dot{\boldsymbol{M}}$ en fonction de $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{W}$ semble inaccessible. Comme précédemment, on peut heureusement s'en passer pour évaluer les produits scalaires $\boldsymbol{M}^n : \dot{\boldsymbol{M}}$.

Soit $\boldsymbol{S}$ un tenseur symétrique ayant une base propre commune avec $\boldsymbol{M}$. De l'équation (B.13) on déduit :

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{S} : (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}} \cdot (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}})^{\cdot}) + \boldsymbol{S} : ((\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}})^{\cdot} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}}) = \boldsymbol{S} : ((\boldsymbol{D}+\boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{M}}) + \boldsymbol{S} : (\boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{M}} \cdot (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{W})) \\
&2\,(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}}) : (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}})^{\cdot}) = 2\,(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e}^{2\boldsymbol{M}}) : \boldsymbol{D} \qquad \text{(propriétés de } \boldsymbol{A} : (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \text{ et } \boldsymbol{W} \text{ est antisymétrique)} \\
&(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{V}) : \dot{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{V}^2) : \boldsymbol{D}, \quad \forall \boldsymbol{S} \text{ commutant avec } \boldsymbol{M}
\end{aligned} \tag{B.14}$$

D'autre part, puisque $\boldsymbol{S}$ est un tenseur symétrique ayant une base propre commune avec $\boldsymbol{M}$, le produit contracté double $\boldsymbol{S} : (\boldsymbol{M}^k)^{\cdot}$ s'écrit :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} : (\boldsymbol{M}^k)^{\cdot} &= \boldsymbol{S} : (\dot{\boldsymbol{M}} \cdot \boldsymbol{M}^{k-1}) + \boldsymbol{S} : (\boldsymbol{M} \cdot \dot{\boldsymbol{M}} \cdot \boldsymbol{M}^{k-2}) + \cdots + \boldsymbol{S} : (\boldsymbol{M}^{k-1} \cdot \dot{\boldsymbol{M}}) \\
&= (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}^{k-1}) : \dot{\boldsymbol{M}} + (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}^{k-1}) : \dot{\boldsymbol{M}} + \cdots + (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}^{k-1}) : \dot{\boldsymbol{M}} \qquad (\boldsymbol{S} \text{ et } \boldsymbol{M}^{k-1} \text{ commutent}) \\
&= k\,(\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}^{k-1}) : \dot{\boldsymbol{M}}
\end{aligned}$$

Or $\dot{\boldsymbol{V}} = (\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}})^{\cdot} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} (\boldsymbol{M}^k)^{\cdot}$; on a donc :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{V}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{S} : (\boldsymbol{M}^k)^{\cdot} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}^{k-1}) : \dot{\boldsymbol{M}} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{M}^p) : \dot{\boldsymbol{M}} = \Big(\boldsymbol{S} \cdot \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\boldsymbol{M}^p}{p!}\Big) : \dot{\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{M}}) : \dot{\boldsymbol{M}} \\
\boldsymbol{S} : \dot{\boldsymbol{V}} &= (\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{V}) : \dot{\boldsymbol{M}}, \quad \forall \boldsymbol{S} \text{ commutant avec } \boldsymbol{M}
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Les deux relations (B.14) et (B.15) nous permettent d'évaluer les produits scalaires $\boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{M}}$, $\boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{M}}$ et $\boldsymbol{M}^2 : \dot{\boldsymbol{M}}$ en fonction de $\boldsymbol{D}$ comme suit :

- la relation (B.15) avec $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}^{-1}$ conduit à : $\boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{V}^{-1} : \dot{\boldsymbol{V}}$
  la relation (B.14) avec $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{V}^{-2}$ conduit à : $\boldsymbol{V}^{-1} : \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$
  On a donc : $\boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D}$
- la relation (B.15) avec $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{V}^{-1}$ conduit à : $\boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{V}^{-1}) : \dot{\boldsymbol{V}}$
  la relation (B.14) avec $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{V}^{-2}$ conduit à : $(\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{V}^{-1}) : \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{D}$
  On a donc : $\boldsymbol{M} : \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M} : \boldsymbol{D}$
- la relation (B.15) avec $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{M}^2 \cdot \boldsymbol{V}^{-1}$ conduit à : $\boldsymbol{M}^2 : \dot{\boldsymbol{M}} = (\boldsymbol{M}^2 \cdot \boldsymbol{V}^{-1}) : \dot{\boldsymbol{V}}$
  la relation (B.14) avec $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{M}^2 \cdot \boldsymbol{V}^{-2}$ conduit à : $(\boldsymbol{M}^2 \cdot \boldsymbol{V}^{-1}) : \dot{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{M}^2 : \boldsymbol{D}$
  On a donc : $\boldsymbol{M}^2 : \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M}^2 : \boldsymbol{D}$

En utilisant les résultats (B.1), (B.2) et (B.3) [p. 111], il vient :

$$\dot{M}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{G} : \dot{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{G} : \boldsymbol{D} \tag{B.16}$$

$$\dot{M}_{\mathrm{II}} = (M_{\mathrm{I}} \boldsymbol{G} - \boldsymbol{M}) : \dot{\boldsymbol{M}} = (M_{\mathrm{I}} \boldsymbol{G} - \boldsymbol{M}) : \boldsymbol{D} \tag{B.17}$$

$$\dot{M}_{\mathrm{III}} = (M_{\mathrm{II}} \boldsymbol{G} - M_{\mathrm{I}} \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2) : \dot{\boldsymbol{M}} = (M_{\mathrm{II}} \boldsymbol{G} - M_{\mathrm{I}} \boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}^2) : \boldsymbol{D} \tag{B.18}$$

Remarques – On peut vérifier ces résultats sans calcul tensoriel par un méthode alternative similaire à celle exposée page 112 en écrivant les composantes des tenseurs dans une base propre de $\boldsymbol{M}$.

Par ailleurs, le lecteur pourra remarquer que même si les expressions des dérivées particulaires des invariants du tenseur de déformation $\boldsymbol{M}$ [éq. (B.16), (B.17) et (B.18)] sont d'apparence aussi simple qu'avec les autres tenseurs de déformation objectifs $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{V}$, leur obtention est nettement plus compliquée.

B.3 Tenseurs de déformation non objectifs

Le tenseur de déformation $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{F}$ est non objectif [sec. 4.4.1 p. 54]. Sa dérivée particulaire est :

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{C}} &= \dot{\boldsymbol{F}}^\top \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^\top \cdot \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{F}^\top \cdot (\boldsymbol{F}^{-T} \cdot \dot{\boldsymbol{F}}^\top) \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^\top \cdot (\dot{\boldsymbol{F}} \cdot \boldsymbol{F}^{-1}) \cdot \boldsymbol{F} \\
&= \boldsymbol{F}^\top \cdot (\boldsymbol{D} - \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^\top \cdot (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{W}) \cdot \boldsymbol{F} \\
&= 2\,\boldsymbol{F}^\top \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{F} = 2\,\boldsymbol{U} \cdot \boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U} \\
\dot{\boldsymbol{C}} &= 2\,\boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}} \cdot (\boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{R}) \cdot \boldsymbol{C}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Contrairement au tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{B}$, le calcul de la dérivée particulaire $\dot{\boldsymbol{C}}$ du tenseur de déformation non objectif $\boldsymbol{C}$ requiert la connaissance de la rotation $\boldsymbol{R}$ (non objective) de la décomposition polaire $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{U}$. Toutefois, il est inutile de recommencer les calculs pour trouver les dérivées particulaires (objectives) des invariants des tenseurs non objectifs car les invariants des tenseurs qui se correspondent dans le tableau p. 54 sont les mêmes, et donc aussi leur dérivée particulaire [th. 3.17 p. 46]. Par exemple :

$$\begin{aligned}
\dot{C}_{\mathrm{I}} &= \dot{B}_{\mathrm{I}} = 2\boldsymbol{B} : \boldsymbol{D} \quad \text{[éq. (B.6) p. 112]} \\
&= 2\,(\underbrace{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{R}^\top}_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{C})}) : \boldsymbol{D} = 2\,\boldsymbol{C} : (\underbrace{\boldsymbol{R}^\top \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{R}}_{\mathscr{R}_{\boldsymbol{R}^\top}(\boldsymbol{D})})
\end{aligned}$$

Il en est de même pour les autres invariants de $\boldsymbol{C}$ ainsi que pour les invariants des autres tenseurs de déformation non objectifs qui se correspondent. Comme on peut le constater, contrairement aux tenseurs de déformation objectifs, la dérivée particulaire des invariants des tenseurs de déformation non objectifs ne peut pas s'exprimer en fonction seulement du tenseur de déformation non objectif et de $\boldsymbol{D}$: il faut connaître en plus la rotation $\boldsymbol{R}$ (non objective [th. 4.14 p. 56]) de la décomposition polaire du gradient de la transformation $\boldsymbol{F}$.

Anticipation – La présence du tenseur rotation non objectif $\boldsymbol{R}$ dans l'expression de la dérivée particulaire (objective) des invariants des tenseurs de déformation non objectifs empêche l'utilisation du théorème de représentation sur les fonctions isotropes [(8)] lorsque l'on écrit les fonctions d'état d'un milieu continu en fonction de ses variables d'état : une des variables d'état est un tenseur de déformation non objectif, ce qui complique l'expression des lois de comportement. La présence du tenseur non objectif $\boldsymbol{R}$ dans les lois de comportement amène les auteurs qui utilisent des tenseurs de déformation non objectifs à nommer « tenseur des contraintes » (de Piola-Kirchhoff ou autres, certains non symétriques) des groupements de termes où $\boldsymbol{R}$ intervient et dont la signification physique est obscure. L'utilisation des tenseurs de déformation objectifs est donc préférable.

[(8)] Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].