



**HAL**  
open science

# Equations générales des milieux continus

Jean Garrigues

► **To cite this version:**

Jean Garrigues. Equations générales des milieux continus. École d'ingénieur. Equations générales des milieux continus(mécanique et thermodynamique), LMA, France. 2023, pp.123. cel-00696063v6

**HAL Id: cel-00696063**

**<https://cel.hal.science/cel-00696063v6>**

Submitted on 4 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Équations générales des milieux continus

Jean Garrigues

(version du 4 janvier 2023)





# Avant-propos

L'objectif de ce cours est d'établir les équations générales régissant tous les milieux continus, qu'ils soient solides ou fluides. Les développements qui suivent se placent dans le cadre de la physique classique (non relativiste et non quantique). Les équations générales des milieux continus sont donc les conséquences des quatre principes fondamentaux de la physique classique<sup>(1)</sup> :

1. le principe de la conservation de la masse ;
2. le principe fondamental de la mécanique ;
3. le premier principe de la thermodynamique ou principe de la conservation de l'énergie ;
4. le second principe de la thermodynamique.

En ce qui concerne le principe fondamental de la mécanique, l'auteur a résolument choisi de se baser sur le principe fondamental de Newton qui est généralement enseigné dans les cours élémentaires de mécanique générale. Ce choix est un choix pédagogique : plutôt que de commencer la mécanique des milieux continus par l'énoncé d'un nouveau principe fondamental de la mécanique (le principe des travaux virtuels ou des puissances virtuelles<sup>(2)</sup>, voire d'autres principes<sup>(3)</sup>), il semble préférable à l'auteur de se baser sur les connaissances classiques préalablement acquises par les étudiants en mécanique générale. Les connaissances préalables de mécanique générale nécessaires et suffisantes à la lecture de ce cours se limitent aux trois théorèmes généraux pour des ensembles de points matériels (finis ou infinis) établis dans les cours de mécanique générale :

1. le théorème de la résultante dynamique ;
2. le théorème du moment dynamique ;
3. le théorème de la puissance cinétique (dérivée temporelle de l'énergie cinétique).

En ce qui concerne la thermodynamique, aucune connaissance préalable n'est requise ; le cours en rappelle les concepts fondamentaux et ne s'appuie que sur l'énoncé primal des deux principes de la thermodynamique :

1. le premier principe de la thermodynamique (conservation de l'énergie),
2. le second principe de la thermodynamique.

En première lecture, le lecteur pourra ignorer la plupart des remarques ou commentaires qui apparaissent en retrait et en petits caractères sans nuire à la compréhension de l'ensemble du cours. Toutefois, leur lecture est recommandée aux lecteurs déjà initiés.

La lecture de ce cours suppose une maîtrise suffisante de l'algèbre et de l'analyse tensorielles<sup>(4)</sup>

---

<sup>(1)</sup> Jean Cousteix a démontré que si le principe de la conservation de l'énergie est universel pour des observateurs dont le mouvement relatif est une translation à vitesse constante dans le temps et si la masse et les grandeurs thermiques scalaires ou vectorielles sont objectives, alors les deux premiers principes (masse et mécanique) en sont des conséquences. Voir l'article <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00600261>. Toutefois, pour s'épargner cette démonstration, on peut présenter ces quatre principes comme des axiomes indépendants puisqu'ils ne sont pas contradictoires.

<sup>(2)</sup> Dans ce cours, les « principes virtuels » apparaîtront donc comme des théorèmes.

<sup>(3)</sup> Comme la recherche du minimum d'une certaine « énergie potentielle ».

<sup>(4)</sup> L'auteur propose un autre cours intitulé *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* : <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00679923> ou bien <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tenseurs.html>

ainsi qu'une maîtrise suffisante de la cinématique des milieux continus <sup>(5)</sup>.

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :

- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple :  $a, \mu$ );
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple :  $\mathbf{v}$ );
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple :  $\mathbf{T}$ );
- les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = [m_{ij}]$$

- la transposition est notée avec un  $\top$  en exposant (exemple :  $\mathbf{T}^\top$ );
- les ensembles d'entités mathématiques sont en majuscules doublées, en particulier :
- $\mathbb{R}$  est l'espace des réels,
- $\mathbb{V}_3$  est un espace vectoriel de dimension 3,
- $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$  est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre  $p$  construits sur  $\mathbb{V}_3$  (de dimension  $3^p$ ),
- $\mathbb{Q}_{3+}$  est le groupe des rotations ( $\mathbb{Q}_{3+} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ );
- le produit vectoriel de deux vecteurs de  $\mathbb{V}_3$  est noté «  $\wedge$  »;
- le tenseur métrique est noté  $\mathbf{G}$ ;
- le tenseur d'orientation est noté  $\mathbf{H}$ ;
- la description de Lagrange d'un champ matériel est notée avec un indice  $L$ ;
- la description d'Euler d'un champ matériel est notée avec un indice  $E$ ;
- la dérivée particulaire d'un champ matériel  $\Psi(P, t)$  est notée  $\dot{\Psi}(P, t)$ .

## Remerciements

Je tiens à remercier très vivement Mathias LEGRAND <sup>(6)</sup>, ce grand magicien de  $\text{\LaTeX}$ , sans qui la mise en page de ce texte ne serait que celle par défaut de la classe book <sup>(7)</sup> et qui m'a aussi donné de précieux conseils sur la typographie française.

Je remercie aussi vivement mon ancien collègue et néanmoins toujours ami Thierry DÉSOYER <sup>(8)</sup> pour les discussions parfois vives mais le plus souvent fructueuses qu'il a bien voulu m'accorder, ainsi que pour le temps qu'il a bien voulu passer à la relecture de ce texte.

Bonne lecture.

**Information** – Ce texte est rédigé en vue d'une lecture dynamique à l'écran : toutes les références internes et externes sont actives et conduisent à la cible référencée (dans la plupart des visualisateurs de fichiers au format pdf, on revient à l'état précédent avec la combinaison de touches <alt><page arrière>). Néanmoins, les références des pages ont été conservées pour la lecture du document imprimé.

<sup>(5)</sup> L'auteur propose un autre cours intitulé *Cinématique des milieux continus* : <http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00681766> ou bien <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/cinematique.html>.

<sup>(6)</sup> De l'université McGill, de Montréal.

<sup>(7)</sup> Ceux qui écrivent en  $\text{\LaTeX}$  me comprendront.

<sup>(8)</sup> De l'École Centrale Marseille (ECM) et du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) à Marseille.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Concepts fondamentaux</b>	<b>9</b>
1.1	Les domaines de milieux continus Domaine matériel, 9 • Domaine géométrique, 10 • Comparaison, 10.	9
1.2	Grandeurs physiques extensives Application à un domaine matériel, 11 • Application à un domaine géométrique, 12.	11
1.3	Dérivée temporelle d'une grandeur extensive Dérivées temporelle d'intégrales à bord mobile, 12 • Cas d'un domaine matériel, 13 • Cas d'un domaine géométrique, 14.	12
1.4	Lemme fondamental	16
1.5	En bref...	17
<b>2</b>	<b>Conservation de la masse</b>	<b>19</b>
2.1	Concept de masse Masse actuelle d'un domaine matériel, 19 • Masse actuelle d'un domaine géométrique, 20.	19
2.2	Principe de la conservation de la masse pour un domaine matériel	20
2.3	Forme locale du principe de la conservation de la masse Conservation locale de la masse, 20 • Intégration temporelle de l'équation locale de la conservation de la masse, 22.	20
2.4	Application à un domaine géométrique	22
2.5	Densités massiques de grandeurs extensives Grandeur extensive d'un domaine, décrite avec des densités massiques, 23 • Dérivée temporelle d'une grandeur extensive, décrite avec des densités massiques, 23.	23
2.6	Changements d'observateur	24
2.7	En bref...	25
<b>3</b>	<b>Principe fondamental de la mécanique</b>	<b>27</b>
3.1	Rappels de mécanique générale Loi de Newton et observateurs galiléens, 27 • Théorèmes généraux, 29.	27
3.2	Efforts extérieurs sur un domaine matériel Actions à distance, 30 • Actions de contact, 31.	30
3.3	Efforts intérieurs dans un milieu continu Existence du tenseur des contraintes, 33 • Conditions aux limites en contrainte, 34 • Décomposition des contraintes, 34.	32
3.4	Théorèmes généraux de la mécanique pour un domaine matériel Théorème de la résultante dynamique, 36 • Théorème du moment dynamique, 37 • Théorème de la	35

	puissance cinétique, 38.	
<b>3.5</b>	<b>Conséquences locales des théorèmes généraux</b> .....	<b>39</b>
	Champs de forces à distance, 39 • Équation de mouvement, 39 • Symétrie du tenseur des contraintes, 41 • Puissance des efforts intérieurs, 43 • Résumé des conséquences locales des théorèmes généraux, 44.	
<b>3.6</b>	<b>Théorèmes généraux pour un domaine géométrique</b> .....	<b>44</b>
	Théorème de la résultante dynamique pour un domaine géométrique, 45 • Théorème du moment dynamique pour un domaine géométrique, 46 • Théorème de la puissance cinétique pour un domaine géométrique, 47.	
<b>3.7</b>	<b>Formulation intégrale des équations de mouvement</b> .....	<b>48</b>
<b>3.8</b>	<b>Changements d'observateur</b> .....	<b>51</b>
<b>3.9</b>	<b>En bref...</b> .....	<b>54</b>
<b>4</b>	<b>Premier principe de la thermodynamique</b> .....	<b>55</b>
<b>4.1</b>	<b>Concepts fondamentaux en thermodynamique</b> .....	<b>55</b>
	Système, 55 • Variables d'état, 56 • Fonction d'état, 60 • Isotropie des fonctions d'état scalaires objectives, 61 • Espace des états, 63 • Évolution thermodynamique, 63.	
<b>4.2</b>	<b>Premier principe de la thermodynamique</b> .....	<b>64</b>
	Énoncé traditionnel pour une évolution finie entre deux instants, 65 • Formulation instantanée de la conservation de l'énergie dans l'évolution d'un système, 66.	
<b>4.3</b>	<b>Premier principe de la thermodynamique pour un domaine matériel</b> .....	<b>66</b>
<b>4.4</b>	<b>Courant de chaleur dans un milieu continu</b> .....	<b>69</b>
<b>4.5</b>	<b>Forme locale du premier principe de la thermodynamique</b> .....	<b>71</b>
<b>4.6</b>	<b>Premier principe de la thermodynamique pour un domaine géométrique</b> .....	<b>72</b>
<b>4.7</b>	<b>Changements d'observateur</b> .....	<b>73</b>
<b>4.8</b>	<b>En bref...</b> .....	<b>74</b>
<b>5</b>	<b>Second principe de la thermodynamique</b> .....	<b>77</b>
<b>5.1</b>	<b>Introduction</b> .....	<b>77</b>
<b>5.2</b>	<b>Énoncé traditionnel du second principe de la thermodynamique</b> .....	<b>78</b>
<b>5.3</b>	<b>Second principe pour un domaine matériel</b> .....	<b>80</b>
<b>5.4</b>	<b>Forme locale du second principe</b> .....	<b>82</b>
<b>5.5</b>	<b>Second principe pour un domaine géométrique</b> .....	<b>86</b>
<b>5.6</b>	<b>Changements d'observateur</b> .....	<b>87</b>
<b>5.7</b>	<b>Nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique</b> .....	<b>87</b>
<b>5.8</b>	<b>Capacités thermiques locales dans une évolution</b> .....	<b>89</b>
<b>5.9</b>	<b>En bref...</b> .....	<b>90</b>

---

<b>6</b>	<b>Le modèle fluide simple</b>	<b>93</b>
6.1	Définition d'un fluide simple	93
6.2	Conséquences du second principe de la thermodynamique	94
	Relation de Helmholtz, 95 • Loi de comportement mécanique, 96 • Loi de comportement thermique, 97 • Résumé des conséquences de la non négativité de la dissipation, 97.	
6.3	Fluides simples newtoniens	98
6.4	Gaz parfaits	99
6.5	Liquides idéaux	101
6.6	Fluides simples compressibles et dilatables	102
	Fluide simple à compressibilité et dilatabilité constantes, 105.	
6.7	En bref ...	107
<b>7</b>	<b>Synthèse sur les équations générales</b>	<b>109</b>
7.1	Le problème de mécanique des milieux continus	110
7.2	La résolution	111
7.3	Conclusion	112
<b>A</b>	<b>Démonstrations</b>	<b>115</b>
A.1	Lemme fondamental pour les intégrales de volume	115
A.2	Démonstration de l'« hypothèse » de Cauchy	116
A.3	Existence du tenseur des contraintes (de Cauchy)	119
A.4	Existence du vecteur courant de chaleur	121





# Concepts fondamentaux

Avant d'aborder l'écriture des principes fondamentaux de la physique classique et leurs conséquences pour les milieux continus, il est nécessaire d'introduire des concepts indispensables à la bonne compréhension des chapitres de ce cours.

## 1.1 Les domaines de milieux continus

En mécanique des milieux continus, on raisonne sur deux types de domaines : les domaines matériels et les domaines géométriques. Dans cette section on en donne les définitions.

**Remarque** – Dans la littérature spécialisée, les auteurs ne précisent pas toujours clairement le type de domaine qu'ils considèrent. Cette imprécision est à l'origine de nombreux malentendus.

### 1.1.1 Domaine matériel

- **Définition 1.1 – Domaine matériel.** Un domaine matériel est défini par l'ensemble des particules (*a priori* en mouvement) qui le constituent.

Si une particule appartient au domaine matériel à un instant  $t$ , elle lui appartient donc à tout instant. Un domaine matériel se déplace et se déforme en raison du mouvement de ses particules. Quand on considère un domaine matériel, on dit parfois que « l'on suit le domaine dans son mouvement ». *Il n'y a donc pas de matière qui traverse la frontière en mouvement.* Le domaine matériel étant en mouvement, l'ensemble des positions actuelles de ses particules définit une région de l'espace qui change à chaque instant.

**Rappels** – On rappelle que la position et le mouvement d'une particule sont perçus différemment d'un observateur à l'autre. La forme d'un domaine matériel évolue avec le temps, mais sa *forme actuelle* est la même pour tous les observateurs car les distances actuelles entre particules sont des grandeurs scalaires objectives.

- **Notation 1.2** – Dans la suite, on utilisera les conventions suivantes :
  - un domaine matériel sera noté  $\mathcal{D}^m$  (c'est un ensemble de particules);
  - le domaine de l'espace occupé par ses particules à l'instant actuel  $t$  sera noté  $\mathcal{D}_t^m$ ;
  - sa frontière à l'instant actuel  $t$  sera notée  $\partial \mathcal{D}_t^m$ ;
  - le domaine de l'espace occupé par ses particules à un instant de référence  $t_0$  sera noté  $\mathcal{D}_0^m$ ;
  - sa frontière à l'instant de référence  $t_0$  sera notée  $\partial \mathcal{D}_0^m$ .

**Vocabulaire** – Dans les textes traitant de thermodynamique, les domaines matériels sont le plus souvent appelés *systèmes fermés* car aucune matière ne traverse la frontière<sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Les thermodynamiciens supposent souvent implicitement que la frontière étanche à la matière est fixe (pour

### 1.1.2 Domaine géométrique

- **Définition 1.3 – Domaine géométrique.** Un domaine géométrique est défini par l'ensemble des points de l'espace qui le constituent.

Comme pour tout domaine, la frontière d'un domaine géométrique est une surface fermée. Quand un milieu continu est en mouvement, les particules qui sont dans le domaine géométrique à un instant  $t$  ne sont pas les mêmes que celles qui s'y trouvent à un autre instant  $t'$ . On dit que le domaine géométrique est « traversé par le milieu continu en mouvement ». Il y a donc des particules qui traversent la frontière (ou une partie de la frontière), en entrant ou en sortant du domaine géométrique. Dans ce cours, les frontières des domaines géométriques seront considérées *a priori* comme mobiles pour l'observateur utilisé pour décrire le mouvement, mais le mouvement des points de la frontière du domaine géométrique est *a priori* sans rapport avec le mouvement des particules qui s'y trouvent.

**Remarque** – Chaque observateur attribue aux points de la frontière du domaine géométrique une position et un mouvement différent. La forme du domaine géométrique peut être variable avec le temps, mais sa *forme actuelle* est la même pour tous les observateurs (objectivité des distances actuelles entre points).

- **Notation 1.4** – Dans la suite, on utilisera les conventions suivantes :
  - un domaine géométrique sera noté  $\mathcal{D}^g$  (région de l'espace délimitée par une frontière fermée);
  - le domaine de l'espace qu'il occupe à l'instant  $t$  sera noté  $\mathcal{D}_t^g$ ;
  - sa frontière (*a priori* mobile) à l'instant  $t$  sera notée  $\partial \mathcal{D}_t^g$ .

**Vocabulaire** – En thermodynamique, les domaines géométriques sont appelés *systèmes ouverts*. En mécanique des fluides, ils sont souvent aussi appelés *volumes de contrôle*<sup>(2)</sup>.

### 1.1.3 Comparaison entre les deux types de domaines

Les deux types de domaines ont chacun leur intérêt :

- *Les domaines matériels sont les préférés des mécaniciens des solides déformables.* En effet, leur sujet d'étude est le comportement d'un objet déformable toujours constitué des mêmes particules : les particules de l'objet déformable.
- *Les domaines géométriques sont les préférés des mécaniciens des fluides.* En effet, en mécanique des fluides (liquides ou gaz), on ne se préoccupe que de l'évolution des grandeurs physiques des particules qui se trouvent actuellement à l'intérieur du domaine géométrique, sans se préoccuper de leur évolution lorsqu'elles se situent à l'extérieur du domaine géométrique.

**Remarque** – Les mécaniciens des fluides qui n'envisagent que des domaines géométriques supposent souvent implicitement (et parfois un peu trop vite) que les domaines géométriques ont des frontières fixes (pour l'observateur qu'ils utilisent). Il n'est pas toujours possible de trouver un observateur pour lequel le domaine géométrique est à frontières fixes. Par exemple, si l'on considère le domaine géométrique défini comme l'espace à l'intérieur d'une turbomachine, il existe des parties de frontières qui sont mobiles (les aubages qui tournent) par rapport à d'autres parties de frontières (les

l'observateur utilisé !). Nous ne ferons évidemment pas cette restriction car en général il n'existe pas d'observateur pour lequel la frontière du domaine matériel est fixe.

<sup>(2)</sup> En thermodynamique comme en mécanique des fluides, il est parfois sous-entendu que les frontières d'un domaine géométrique sont fixes (pour l'observateur utilisé !). Nous ne ferons évidemment pas cette restriction afin d'écrire des équations valables pour tous les observateurs.

parois et les sections d'entrée et de sortie); dans ce cas, il n'est pas possible de trouver un observateur pour lequel toutes les frontières du domaine géométrique sont fixes. C'est pourquoi dans la suite, pour ne pas restreindre la généralité des équations, les frontières d'un domaine géométriques seront *a priori* considérées comme mobiles.

## 1.2 Grandeurs physiques extensives

- **Définition 1.5 – Grandeur extensive.** On dit qu'une grandeur physique  $\Psi(\mathcal{D})$  (scalaire, vectorielle ou tensorielle) définie pour un domaine  $\mathcal{D}$  (matériel ou géométrique) est extensive si, pour toute partition du domaine  $\mathcal{D}$ , sa valeur est la somme de ses valeurs pour chaque partie  $\mathcal{D}_i$  de la partition :

$$\Psi \text{ grandeur extensive} \Leftrightarrow \Psi(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^n \Psi(\mathcal{D}_i) \quad \text{pour toute partition } \{\mathcal{D}_i\} \text{ de } \mathcal{D} \quad (1.1)$$

**Rappel** – Une partition d'un domaine  $\mathcal{D}$  est un ensemble de  $n$  parties  $\{\mathcal{D}_i\}$  tel que :

$$\mathcal{D} = \cup_{i=1}^n \mathcal{D}_i \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$$

- **Théorème 1.6 – Densité volumique d'une grandeur extensive.** Si une grandeur  $\Psi(\mathcal{D})$  est extensive, il existe dans le domaine  $\mathcal{D}$  un champ, noté  $\Psi^v(M)$ , appelé densité volumique de  $\Psi$  :

$$\Psi \text{ grandeur extensive} \Rightarrow \exists \Psi^v \text{ tel que } \Psi(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} \Psi^v(M) \, dv \quad (1.2)$$

**Démonstration** – Cette propriété est l'application du théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue (en théorie de la mesure) à l'ensemble des partitions de  $\mathcal{D}$ .

Certaines grandeurs physiques sont extensives, d'autres ne le sont pas. Pour le déterminer, il suffit de vérifier si leurs propriétés sont compatibles avec les conditions (1.1) [p. 11].

**Exemples** – Le volume (scalaire), la masse (scalaire), l'énergie cinétique (scalaire), la quantité de mouvement ou impulsion (vecteur), la quantité d'accélération (vecteur) sont des grandeurs extensives.

La température (scalaire), la pression (scalaire), la vitesse (vecteur), la déformation (tenseur d'ordre 2), le taux de déformation (tenseur d'ordre 2), toute densité volumique sont des grandeurs non extensives.

### 1.2.1 Application à un domaine matériel

Puisque dans un domaine matériel, les particules qu'il contient sont toujours les mêmes, on peut identifier ses particules indifféremment par la méthode de Lagrange (par leur position de référence) ou par la méthode d'Euler (par leur position actuelle)<sup>(3)</sup>. Pour désigner les domaines, on utilise les notations 1.2 [p. 9] et 1.4 [p. 10].

Soit  $\Psi$  une grandeur extensive et soit  $\Psi^v$  sa densité volumique [th. 1.6 p. 11], sa valeur actuelle pour le domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  peut s'écrire de deux manières :

$$\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \, dv_0 \quad (1.3)$$

<sup>(3)</sup> Voir la section 2.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

où  $K_v = dv_t/dv_0$  est la dilatation volumique actuelle en une particule <sup>(4)</sup> dans une déformation dont le domaine de référence est  $\mathcal{D}_0^m$ . Le terme  $K_{vL}(\mathbf{x}_0, t)$  est la description de Lagrange de ce champ matériel.

**Rappel** – Dans l'équation (1.3), pour passer de l'intégrale sur le domaine actuel  $\mathcal{D}_t^m$  à l'intégrale sur le domaine de référence  $\mathcal{D}_0^m$ , on effectue le changement de variable  $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$ , où  $\mathbf{f}$  est la description de Lagrange du mouvement. On a donc :

$$\Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) = \Psi_E^v(\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t), t) = \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) \quad (= \Psi^v(P, t)) \quad \text{et} \quad dv_t = K_v dv_0$$

Le changement de variable est une méthode classique en mathématiques pour ramener une intégrale sur un domaine à une intégrale sur un autre domaine. Dans certains textes de mécanique des solides déformables, ces changements de variable sont appelés « équations de transport ».

### 1.2.2 Application à un domaine géométrique

Contrairement aux domaines matériels, on ne peut identifier les particules du domaine géométrique que par la méthode d'Euler, car ce sont les valeurs de la densité volumique  $\Psi^v$  pour les particules actuellement à l'intérieur du domaine géométrique qui sont l'objet de l'intégration (certaines particules ne sont peut-être plus dans le domaine  $\mathcal{D}_t^g$  à un autre instant  $t'$  car des particules traversent la frontière). Par conséquent, la valeur actuelle de la grandeur extensive  $\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  ne peut s'écrire qu'avec une description d'Euler de la densité volumique  $\Psi^v(P, t)$  :

$$\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t \quad (1.4)$$

## 1.3 Dérivée temporelle d'une grandeur extensive

### 1.3.1 Rappel : dérivées temporelles d'intégrales à bord mobile

Que les domaines envisagés soient matériels ou géométriques, on aura besoin, dans les chapitres qui suivent, d'écrire la dérivée temporelle d'intégrales sur des domaines dont les frontières sont *a priori* variables avec le temps. La variation temporelle d'une intégrale de volume dont le domaine d'intégration varie avec le temps est due à la fois à la variation temporelle de son intégrande et à la variation temporelle du domaine d'intégration dû au mouvement des frontières.

On rappelle le résultat mathématique suivant <sup>(5)</sup> :

- **Théorème 1.7 – Dérivée d'une intégrale à bords mobiles.** Soit  $\mathcal{D}_t$  la position actuelle d'un domaine (matériel ou géométrique) et soit  $\Psi^v(M, t)$  un champ défini dans  $\mathcal{D}_t$ . Soit  $N$  un point générique de la frontière, on note  $\mathbf{n}_t(N, t)$  la normale unitaire sortante à la frontière actuelle et on note  $\mathbf{v}^f(N, t)$  la vitesse actuelle d'un point de la frontière. La dérivée temporelle de l'intégrale du champ  $\Psi^v$  sur le domaine  $\mathcal{D}_t$  est :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t} \Psi^v(M, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t} \frac{\partial}{\partial t} \Psi^v(M, t) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \Psi^v(N, t) (\mathbf{v}^f(N, t) \cdot \mathbf{n}_t(N, t)) ds_t \quad (1.5)$$

<sup>(4)</sup> Voir la section 4.5.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note5 p. 4].

<sup>(5)</sup> La démonstration est donnée dans la section 4.3 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

### 1.3.2 Dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine matériel

Soit  $\Psi$  une grandeur extensive dont la densité volumique est le champ matériel  $\Psi^v(P, t)$  et soit  $\mathcal{D}^m$  un domaine matériel. On peut décrire le champ matériel  $\Psi^v(P, t)$  par la méthode de Lagrange ou celle d'Euler [éq. (1.3) p. 11].

**Si le champ  $\Psi^v$  est décrit par la méthode d'Euler,** la valeur actuelle de la grandeur extensive  $\Psi$  pour le domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  est :

$$\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t \quad [\text{éq. (1.3) p. 11}]$$

Le domaine d'intégration  $\mathcal{D}_t^m$  est variable avec le temps. Le domaine étant matériel, la vitesse d'un point de la frontière du domaine d'intégration est la vitesse de la particule qui s'y trouve, on a donc :  $\mathbf{v}^f = \mathbf{v}(P, t)$ . En vertu du théorème 1.7 [p. 12], la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^m, t)$  s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.6)$$

Le champ des vitesses  $\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)$  étant défini dans tout le domaine d'intégration, on peut utiliser le théorème de la divergence pour transformer l'intégrale de frontière en une intégrale de volume. En utilisant l'identité tensorielle algébrique suivante :

$$\mathbf{T}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \quad (1.7)$$

le théorème de la divergence permet de récrire l'intégrale de frontière dans l'équation (1.6) avec une intégrale de volume :

$$\int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{n}) ds_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{div} \left( \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \right) dv$$

**Remarque** – Si la grandeur extensive  $\Psi$  est une grandeur scalaire (tenseur d'ordre 0), le produit tensoriel  $\otimes$  se réduit à un produit simple d'un scalaire par un vecteur.

En remplaçant dans (1.6), on obtient une seconde expression de la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^m, t)$  :

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{div} \left( \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \right) \right) dv_t \quad (1.8)$$

En développant la divergence<sup>(6)</sup> dans l'équation (1.8), on obtient une troisième expression de la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^m, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{grad}_E \Psi^v(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) + \text{div}_E \mathbf{v}(\mathbf{x}_t, t) \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \right) dv_t \\ \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \dot{\Psi}_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \tau_{vE}(\mathbf{x}_t, t) \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \right) dv_t \quad (\text{déf. de la dérivée particulière}) \quad (1.9) \end{aligned}$$

où :

- $\dot{\Psi}_E^v$  est la description d'Euler de la *dérivée particulière*<sup>(7)</sup> de la densité volumique  $\Psi^v$  ;
- $\tau_{vE} = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v}$  est la description d'Euler du *taux de dilatation volumique*<sup>(8)</sup> actuel.

<sup>(6)</sup> On rappelle l'identité tensorielle :  $\mathbf{div}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{grad} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \text{div} \mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ .

<sup>(7)</sup> Voir la section 2.6 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4]

<sup>(8)</sup> Voir la section 5.3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4]

Si le champ  $\Psi^v$  est décrit par la méthode de Lagrange, la valeur actuelle de la grandeur extensive  $\Psi$  pour le domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  est :

$$\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) dv_0 \quad [\text{éq. (1.3) p. 11}]$$

où  $K_{vL}$  est la description de Lagrange du champ matériel *dilatation volumique actuelle* dans une déformation dont le domaine de référence est  $\mathcal{D}_0^m$ .

Le domaine d'intégration  $\mathcal{D}_0^m$  est, par définition, indépendant du temps. La vitesse des points de la frontière du domaine d'intégration est donc nulle ( $\mathbf{v}^f = \mathbf{0}$ ). En vertu du théorème 1.7 [p. 12], la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^m, t)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \frac{\partial}{\partial t} \left( \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \right) dv_0 \quad [\text{éq. (1.5) p. 12}] \\ &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \frac{d}{dt} \left( \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \right) dv_0 \quad (\mathbf{x}_0 \text{ ne dépend pas de } t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \dot{\Psi}_L^v(\mathbf{x}_0, t) + \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) \frac{\dot{K}_{vL}(\mathbf{x}_0, t)}{K_{vL}(\mathbf{x}_0, t)} \right) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) dv_0 \\ \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \dot{\Psi}_L^v(\mathbf{x}_0, t) + \Psi_L^v(\mathbf{x}_0, t) \tau_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \right) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) dv_0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

où :

- $\dot{\Psi}^v$  est la dérivée particulaire de la densité volumique  $\Psi^v$  ;
- $K_v$  est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont le domaine de référence est  $\mathcal{D}_0^m$  ;
- $\tau_v = \frac{\dot{K}_v}{K_v} = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v} = \mathbf{grad}_L \mathbf{v} : \mathbf{F}^{-\top}$  est le taux de dilatation volumique actuel <sup>(9)</sup>.

Les trois équations (1.6) [p. 13], (1.8) [p. 13] et (1.9) [p. 13] (avec des descriptions d'Euler), ainsi que les deux équations (1.10) [p. 14] et (1.11) [p. 14] (avec des descriptions de Lagrange) sont toutes des expressions équivalentes de la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^m, t)$  sur un domaine matériel où  $\Psi$  est une grandeur extensive. On peut les utiliser indifféremment, selon les termes que l'on a envie de faire apparaître.

### 1.3.3 Dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine géométrique

Soit  $\Psi$  une grandeur extensive dont la densité volumique est  $\Psi^v(P, t)$  et soit  $\mathcal{D}^g$  un domaine géométrique. Dans un domaine géométrique (de frontière *a priori* variable avec le temps), la seule manière de décrire les grandeurs associées aux particules qui s'y trouvent actuellement est la méthode d'Euler :

$$\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t \quad [\text{éq. (1.4) p. 12}]$$

Le domaine d'intégration  $\mathcal{D}_t^g$  est *a priori* variable avec le temps, mais contrairement aux domaines matériels, la vitesse des points de la frontière est différente de la vitesse des particules

<sup>(9)</sup> Voir la section 5.3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

qui s'y trouvent ( $\mathbf{v}^f(N, t) \neq \mathbf{v}_E(P, t)$ ). En vertu du théorème 1.7 [p. 12], la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  est :

$$\frac{d}{dt}\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}^g} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) dv_t + \int_{\partial\mathcal{D}^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad [\text{éq.(1.5) p. 12}] \quad (1.12)$$

**Remarque** – Si pour l'observateur utilisé toute la frontière du domaine géométrique est fixe, alors  $\mathbf{v}^f = \mathbf{0}$  et l'intégrale de bord disparaît.

En utilisant l'identité tensorielle algébrique rappelée dans l'équation (1.7) [p. 13], le théorème de la divergence permet d'écrire l'égalité :

$$\int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div} \left( \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \right) dv_t = \int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) (\mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.13)$$

En ajoutant le terme de gauche et en retranchant le terme de droite de l'égalité (1.13) à l'équation (1.12), on obtient une seconde expression de  $\frac{d}{dt}\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \underbrace{\text{div} \left( \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) \right)}_{\tau_\Psi} dv_t + \\ \underbrace{\int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \left( (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \cdot \mathbf{n}_t \right) ds_t}_{\Phi_\Psi} \end{aligned} \quad (1.14)$$

où :

- le terme  $\tau_\Psi$  est appelé *taux de production volumique* de  $\Psi$  (unité :  $[\Psi].m^{-3}.s^{-1}$ );
- son intégrale  $\int_{\mathcal{D}_t^g} \tau_\Psi dv_t$  est appelé *taux de production interne* de  $\Psi$  (unité :  $[\Psi].s^{-1}$ );
- le terme  $\Phi_\Psi$  est appelé *flux convectif entrant* [déf. 1.8 p. 15] de  $\Psi$  à travers la frontière (unité :  $[\Psi].s^{-1}$ ).

**Attention!** – Le mot « taux » désigne ici une dérivée temporelle simple et non une dérivée temporelle logarithmique comme pour les taux de déformation ( $\tau_\ell$ ,  $\tau_s$ ,  $\tau_v$ ,  $\mathcal{D}$ ) définis en cinématique. Ces dénominations, malheureusement consacrées par l'usage, peuvent induire en erreur.

- **Définition 1.8 – Flux convectif entrant.** On appelle flux convectif entrant de la grandeur  $\Psi$  dans un domaine  $\mathcal{D}$ , le flux entrant du tenseur  $\Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f)$  à travers la frontière :

$$\Phi_\Psi = \int_{\partial\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \left( (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \cdot \mathbf{n}_t \right) ds_t = - \int_{\mathcal{D}} \left( \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \otimes (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \right) \cdot \mathbf{n}_t ds_t$$

**Démonstration** – L'égalité ci-dessus s'obtient en utilisant l'identité tensorielle algébrique (1.7) [p. 13].

**Attention!** – Certains auteurs appellent « flux » l'intégrande de  $\Phi_\Psi$ . Son unité est alors :  $[\Psi].m^{-2}.s^{-1}$ .

En développant la divergence<sup>(10)</sup> dans l'expression de  $\tau_\Psi$ , on obtient une troisième expression

<sup>(10)</sup> On rappelle l'identité tensorielle :  $\text{div}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) = \text{grad} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} \text{div} \mathbf{v}$ ,  $\forall \mathbf{T} \in \mathbb{V}^{\otimes p}$ ,  $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ .



de la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  :

$$\begin{aligned} \tau_\Psi &= \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \mathbf{grad}_E \Psi^v(\mathbf{x}_t, t) \cdot \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t) + \text{div}_E \mathbf{v}(\mathbf{x}_t, t) \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \\ \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^g, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\left( \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) + \tau_{vE}(\mathbf{x}_t, t) \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \right)}_{\tau_\Psi} dv_t + \\ &\quad \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v(\mathbf{x}_t, t) \left( (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E(\mathbf{x}_t, t)) \cdot \mathbf{n}_t \right) ds_t}_{\Phi_\Psi} \end{aligned} \quad (1.15)$$

**Vocabulaire** – Les équations (1.14) [p. 15] et (1.15) [p. 16] sont souvent appelées « équations de bilan » de la grandeur extensive  $\Psi$  pour le domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$ . On dit que la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  est due au *taux de production interne* de  $\Psi$  à l'intérieur du domaine géométrique  $\int_{\mathcal{D}_t^g} \tau_\Psi dv_t$  et au flux convectif entrant  $\Phi_\Psi$  par la frontière.

Comme précédemment, le mot « taux » désigne une dérivée temporelle *non logarithmique*.

Les trois équations (1.12) [p. 15], (1.14) [p. 15] et (1.15) [p. 16] sont toutes des expressions équivalentes de la dérivée temporelle de  $\Psi(\mathcal{D}^g, t)$  sur un domaine géométrique où  $\Psi$  est une grandeur extensive. On peut les utiliser indifféremment, selon les termes que l'on a envie de faire apparaître.

- **Notation 1.9** – Pour alléger les écritures dans les intégrales, on convient de ne plus faire figurer dans la suite du cours les arguments des descriptions d'Euler et de Lagrange : il est sous-entendu que la valeur actuelle d'un champ matériel décrit par la méthode de Lagrange pour un certain observateur  $\mathcal{R}$  a pour arguments  $(\mathbf{x}_0, t)$  et que s'il est décrit par la méthode d'Euler les arguments sont  $(\mathbf{x}_t, t)$ .

Dans les intégrales, les symboles  $\Psi_L$  et  $\Psi_E$  ne désignent plus des applications  $\mathcal{D}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^{\otimes p}$  ou  $\mathcal{D}_t \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{V}^{\otimes p}$  mais leur valeur actuelle pour une particule :  $\Psi_L(\mathbf{x}_0, t)$  ou  $\Psi_E(\mathbf{x}_t, t)$ .

**Attention!** – Si la notation 1.9 s'avère utile pour améliorer la lisibilité des équations, elle est potentiellement dangereuse. Par exemple l'égalité vraie

$$\Psi(P, t) = \Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)$$

s'écrirait  $\Psi_L = \Psi_E$  ce qui suggère une fausse identité des deux applications  $\Psi_L$  et  $\Psi_E$ . Le lecteur est invité à une grande vigilance dans ses lectures pour déterminer si certains symboles désignent une application ou bien sa valeur actuelle en une particule.

## 1.4 Lemme fondamental

- **Théorème 1.10 – Lemme fondamental.** Soit  $\Psi^v(M)$  un champ (scalaire, vectoriel ou tensoriel) défini dans  $\mathcal{E}_3$  et soit un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$  (matériel ou géométrique). On a l'équivalence suivante :

$$\forall \mathcal{D} \quad \forall M \in \mathcal{E}_3, \quad \int_{\mathcal{D}} \Psi^v(M) dv = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \Psi^v(M) = \mathbf{0} \quad (1.16)$$

**Démonstration** – La démonstration de ce lemme purement mathématique est donnée en annexe A.1 [p. 115].

**Attention!** La démonstration de ce théorème montre qu'il n'est applicable que si le champ de densité volumique  $\Psi^v(M)$  est défini *indépendamment des domaines d'intégration*  $\mathcal{D}$  <sup>(11)</sup>.

Ce lemme sera systématiquement utilisé dans les chapitres qui suivent pour déduire les expressions locales des principes fondamentaux.

## 1.5 En bref...

Pour appliquer les principes fondamentaux de la physique classique en mécanique des milieux continus, on raisonne sur deux sortes de domaines : les domaines matériels et les domaines géométriques. Ces domaines ont en général des frontières (ou des parties de frontières) variables avec le temps.

Les grandeurs physiques extensives permettent de définir des champs de densité volumique de ces grandeurs, qui peuvent être décrits par la méthode de Lagrange (seulement pour les domaines matériels) ou par la méthode d'Euler (pour les domaines matériels ou géométriques).

Suivant le type de domaine (matériel ou géométrique) et suivant le mode de description du champ de la densité volumique  $\Psi^v$  (Lagrange ou Euler), la dérivée temporelle d'une grandeur *extensive*  $\Psi(\mathcal{D}, t)$  définie sur un domaine peut s'écrire sous différentes formes.

Dans les formules qui suivent, on utilise la convention de notation 1.9 [p. 16].

— sur un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  avec la description d'Euler de  $\Psi^v$  :

$$\frac{d}{dt}\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.17)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v + \mathbf{div}(\Psi_E^v \otimes \mathbf{v}_E) \right)}_{\tau_{\Psi_E}} dv_t \quad (1.18)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \underbrace{(\dot{\Psi}_E^v + \tau_{vE} \Psi_E^v)}_{\tau_{\Psi_E}} dv_t \quad (1.19)$$

— sur un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  avec la description de Lagrange de  $\Psi^v$  :

$$\frac{d}{dt}\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} \underbrace{(\dot{\Psi}_L^v + \tau_{vL} \Psi_L^v)}_{\tau_{\Psi_L}} K_{vL} dv_0 \quad (1.20)$$

— sur un domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$  avec la description d'Euler de  $\Psi^v$  :

$$\frac{d}{dt}\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v (\mathbf{v}^f \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad (1.21)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} \Psi_E^v + \mathbf{div}(\Psi_E^v \otimes \mathbf{v}_E) \right)}_{\tau_{\Psi_E}} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v ((\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t}_{\Phi_{\Psi}} \quad (1.22)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{(\dot{\Psi}_E^v + \tau_{vE} \Psi_E^v)}_{\tau_{\Psi_E}} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v ((\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t) ds_t}_{\Phi_{\Psi}} \quad (1.23)$$

<sup>(11)</sup> L'auteur reconnaît humblement avoir utilisé abusivement ce théorème dans des versions antérieures de ce cours pour la déduction de l'équation de mouvement [section 3.5.2 p. 39]. Cet abus a été signalé à l'auteur par Jean COUSTEIX (ONERA, Toulouse, France) et l'auteur l'en remercie vivement.

où :

- $\mathbf{v}^f$  est la vitesse d'un point de la frontière;
- $K_v$  est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est  $\mathcal{D}_0^m$ ;
- $\tau_v$  est le taux de dilatation volumique actuel (dérivée temporelle logarithmique, unité :  $s^{-1}$ );
- $\tau_\Psi$  est le taux de *production volumique* actuel de  $\Psi$  à l'intérieur du domaine matériel ou géométrique (dérivée temporelle, unité :  $[\Psi].m^{-3}.s^{-1}$ );
- $\Phi_\Psi$  est le *flux convectif* de  $\Psi$  [déf. 1.8 p. 15] entrant dans le domaine géométrique à travers la frontière (unité :  $[\Psi].s^{-1}$ ).

**Remarques** – Les équations (1.22) et (1.23) [p. 17] qui font apparaître le flux convectif entrant  $\Phi_\Psi$  sont souvent appelées « équations de bilan » de la grandeur  $\Psi$  pour un domaine géométrique.

Si les frontières mobiles du domaine géométrique sont étanches à la matière, alors ce domaine géométrique contient toujours les mêmes particules, il est donc aussi un domaine matériel et on a l'égalité  $(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t = 0$ . Le flux convectif entrant  $\Phi_\Psi$  est alors nul et on retrouve les équations (1.18) et (1.19) établies pour un domaine matériel.

Par ailleurs, si des parties de frontière du domaine géométrique sont fixes pour l'observateur utilisé pour décrire le mouvement, on a  $\mathbf{v}^f = \mathbf{0}$  sur ces parties de frontière.

*Afin d'éviter des malentendus ou des incompréhensions, le lecteur est invité à la vigilance dans ses diverses lectures pour comprendre le type de domaine qui est considéré car il n'est pas toujours clairement précisé :*

- Dans les textes de *mécanique des fluides*, les domaines envisagés sont souvent implicitement des domaines géométriques. En mécanique des fluides, les domaines géométriques sont parfois nommés « volumes de contrôle ». Quand on veut envisager des domaines matériels, on dit « qu'on suit le domaine dans son mouvement ». De plus, les frontières des domaines géométriques sont souvent implicitement considérées comme fixes pour l'observateur utilisé.
- Dans les textes de *mécanique des solides déformables*, les domaines sont souvent implicitement des domaines matériels.

# Conservation de la masse

## 2.1 Concept de masse en mécanique des milieux continus

La masse est une mesure de la quantité de matière. En physique classique, la masse d'un domaine est une grandeur *scalair*e (un tenseur d'ordre 0), *extensive* (la masse d'un domaine est la somme des masses d'une de ses partitions) et *objective* (la masse actuelle d'un domaine est la même pour tous les observateurs).

L'extensivité de la masse et le théorème 1.6 [p. 11] (avec  $\Psi = m$  et  $\Psi^v = m^v$  scalaires) permettent d'affirmer l'existence dans tout domaine (matériel ou géométrique) d'un *champ matériel*<sup>(1)</sup> de densité volumique de masse. On pose donc la définition suivante :

- **Définition 2.1 – Masse volumique.** On appelle masse volumique le champ matériel qui décrit la densité volumique de masse en une particule. La masse volumique en une particule est traditionnellement notée  $\rho(P, t)$ <sup>(2)</sup> (unité :  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ).

**Remarque** – La masse volumique est traditionnellement définie comme la masse d'une unité de volume de matière en supposant implicitement que l'état (pression, température, déformation etc.) de cette matière est uniforme. La définition donnée ici est plus fine : la masse volumique est un *champ matériel* ; toutes les particules n'ont pas nécessairement la même masse volumique et elle peut varier dans le temps. *La masse volumique n'est pas une caractéristique de matériau.*

### 2.1.1 Masse actuelle d'un domaine matériel

Soit un domaine *matériel*  $\mathcal{D}^m$ , de position de référence  $\mathcal{D}_0^m$  et de position actuelle  $\mathcal{D}_t^m$ . La masse actuelle de ce domaine matériel peut s'écrire avec une intégrale de la description de Lagrange ou d'Euler de la masse volumique (éq. (1.3) [p. 11], avec  $\Psi = m$  et  $\Psi^v = \rho$  scalaires) :

$$\begin{aligned} m(\mathcal{D}^m, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E(\mathbf{x}_t, t) \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \, dv_t && \text{[notations 1.9 p. 16]} \\ &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L(\mathbf{x}_0, t) K_{vL}(\mathbf{x}_0, t) \, dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L K_{vL} \, dv_0 && \text{[notations 1.9 p. 16]} \end{aligned}$$

où :

- $\rho_E$  est la description d'Euler de la masse volumique actuelle,
- $\rho_L$  est la description de Lagrange de la masse volumique actuelle,
- $K_{vL}$  est la description de Lagrange de la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont l'état de référence est  $\mathcal{D}_0^m$ .

<sup>(1)</sup> Déf. 1.3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

<sup>(2)</sup> Puisqu'il s'agit d'une densité volumique de masse, on pourrait la noter  $m^v(P, t)$

### 2.1.2 Masse actuelle d'un domaine géométrique

Soit un domaine *géométrique*  $\mathcal{D}^g$ , de position actuelle  $\mathcal{D}_t^g$ . La masse actuelle de ce domaine géométrique ne peut s'écrire qu'avec une intégrale de la description d'Euler de la masse volumique (éq. (1.4) [p. 12] avec  $\Psi = m$  et  $\Psi^v = \rho$  scalaires) :

$$m(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E(\mathbf{x}_t, t) dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E dv_t \quad [\text{notations 1.9 p. 16}]$$

## 2.2 Principe de la conservation de la masse pour un domaine matériel

Une des manières d'exprimer le principe de la conservation de la masse est la suivante<sup>(3)</sup> :

- **Principe 2.2 – Conservation de la masse.** La masse de tout domaine matériel est invariante dans le temps.

**Rappel** – Un domaine matériel est défini par les particules qui le constituent [déf. 1.1 p.9]. Il contient donc toujours la même matière.

**Si le champ de masse volumique est décrit par la méthode d'Euler**, le principe de la conservation de la masse pour un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  de position actuelle  $\mathcal{D}_t^m$  s'écrit de différentes manières équivalentes :

$$0 = \frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E dv_t \quad [\text{éq. (1.3) p. 11}]$$

$$\text{ou } 0 = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \text{div}_E(\rho \mathbf{v}) \right) dv_t \quad [\text{éq. (1.18) p. 17}] \quad (2.1)$$

$$\text{ou } 0 = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\dot{\rho}_E + \rho_E \tau_{vE}) dv_t \quad [\text{éq. (1.19) p. 17}] \quad (2.2)$$

**Si le champ des masses volumiques est décrit par la méthode de Lagrange**, le principe de la conservation de la masse pour un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  de position de référence  $\mathcal{D}_0^m$  s'écrit de différentes manières équivalentes :

$$0 = \frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L K_{vL} dv_0 \quad [\text{éq. (1.3) p. 11}]$$

$$\text{ou } 0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} (\dot{\rho}_L + \rho_L \tau_{vL}) K_{vL} dv_0 \quad [\text{éq. (1.20) p. 17}] \quad (2.3)$$

## 2.3 Forme locale du principe de la conservation de la masse

### 2.3.1 Conservation locale de la masse

- **Théorème 2.3 – Conservation locale de la masse.** Le principe de la conservation de la masse sur tout domaine matériel est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\tau_v \quad \text{en toute particule et à tout instant.} \quad (2.4)$$

<sup>(3)</sup> On peut exprimer le principe de la conservation de la masse de différentes manières. Celle choisie ici, exprimée pour un domaine matériel, semble la plus intuitive à l'auteur. D'autres auteurs préfèrent l'exprimer avec un domaine géométrique, en disant que le taux de production interne de masse  $y$  est nul [éq.(1.22) ou (1.23) p. 17]. Dans ce cours, l'expression du principe sur un domaine géométrique est donc un théorème qui sera établi plus loin [th. 2.4 p. 22].

**Démonstration** – La conservation de la masse pour un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  s'écrit :

$$0 = \int_{\mathcal{D}^m} (\dot{\rho}_E + \rho_E \tau_{vE}) dv_t \quad [\text{éq. (2.2) p. 20}]$$

Ce principe est vrai quel que soit le domaine matériel considéré. En utilisant le lemme 1.10 [p. 16], on déduit le résultat :  $\dot{\rho}_E + \rho_E \tau_{vE} = 0$ . La réciproque est évidente. Dans l'équation locale (2.4) [p. 20] on a supprimé les indices  $_E$  inutiles car par définition  $\rho_E(\mathbf{x}_t, t) = \rho_L(\mathbf{x}_0, t) = \rho(P, t)$  <sup>(4)</sup>.

On laisse le soin au lecteur de vérifier, par une démarche similaire, que l'on aboutit à la même équation locale (2.4) [p. 20] à partir de l'expression du principe de conservation de la masse (2.3) [p. 20] où le champ de masse volumique est décrit par la méthode de Lagrange (la dilatation volumique  $K_v$  n'est jamais nulle).

Le principe de la conservation de la masse implique donc une relation entre la dérivée temporelle logarithmique de la masse volumique et le taux de dilatation volumique actuel.

**Rappels de cinématique utiles pour la suite** –

Le taux de dilatation volumique  $\tau_v$  peut s'exprimer de différentes manières selon de point de vue :

$$\tau_v = \frac{\dot{K}_v}{K_v} = \text{tr} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v} = \lim_{v_t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} v_t \quad (2.5)$$

D'autre part, les relations entre opérateurs différentiels eulériens et lagrangiens sont :

$$\mathbf{grad}_E \Psi = \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad ; \quad \text{div}_E \Psi = \mathbf{grad}_L \Psi : \mathbf{F}^{-\top} \quad (2.6)$$

**Expression « eulérienne » de l'équation locale** –

L'expression « eulérienne » de la dérivée particulaire  $\dot{\rho}$  est :

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E \rho \cdot \mathbf{v}_E \quad (\text{description d'Euler de la dérivée particulaire } \dot{\rho})$$

L'expression locale du principe de la conservation de la masse (2.4) [p. 20] s'écrit <sup>(5)</sup> donc aussi :

$$\frac{1}{\rho_E} \left( \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \mathbf{grad}_E \rho \cdot \mathbf{v}_E \right) = -\text{div}_E \mathbf{v} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho_E}{\partial t} + \text{div}_E(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.7)$$

Sous la forme (2.7), la conservation locale de la masse est traditionnellement appelée « équation de continuité » <sup>(6)</sup>.

**Expression « lagrangienne » de l'équation locale** –

L'expression « lagrangienne » de la dérivée particulaire  $\dot{\rho}$  est :

$$\dot{\rho} = \frac{\partial \rho_L}{\partial t} \quad (\text{description de Lagrange de la dérivée particulaire } \dot{\rho})$$

l'expression locale du principe de la conservation de la masse [éq. (2.4) p. 20] s'écrit donc aussi :

$$\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial \rho_L}{\partial t} = -\text{div}_E \mathbf{v} = -\mathbf{grad}_L \mathbf{v} : \mathbf{F}^{-\top} \Leftrightarrow \frac{\partial \rho_L}{\partial t} + \rho_L \mathbf{grad}_L \mathbf{v} : \mathbf{F}^{-\top} = 0$$

**Principe alternatif** – Le taux de production volumique de masse en une particule est :

$$\tau_m = \dot{\rho} + \rho \tau_v \quad [\text{éq. (1.23) p. 17, avec } \Psi = m \text{ et } \Psi^v = \rho]$$

Le théorème 2.3 [p. 20] affirme donc que *le taux de production volumique de masse  $\tau_m$  est nul en chaque particule*. Il est possible de prendre cet énoncé comme principe fondamental de la conservation de la masse, et d'en déduire les expressions globales du principe de la conservation de la masse sur un domaine matériel ou géométrique.

<sup>(4)</sup> Voir la section 2.3.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

<sup>(5)</sup> On rappelle l'identité tensorielle :  $\mathbf{div}(f \mathbf{v}) = \mathbf{grad} f \cdot \mathbf{v} + f \text{div} \mathbf{v}$ ,  $\forall f \in \mathbb{R} \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ .

<sup>(6)</sup> La « continuité » évoquée ici n'a aucun rapport avec celle utilisée en mathématiques pour qualifier des fonctions.

### 2.3.2 Intégration temporelle de l'équation locale de la conservation de la masse

L'équation différentielle (2.4) [p. 20] peut s'intégrer temporellement entre les instants  $t_0$  et  $t$  :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\tau_v = -\frac{\dot{K}_v}{K_v} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{C}{K_v} \quad \Leftrightarrow \quad \rho_L(\mathbf{x}_0, t) = \frac{C}{K_{vL}(\mathbf{x}_0, t)}$$

où  $C$  est une constante déterminée par les conditions initiales. Pour  $t = t_0$ , on a :

$$K_{vL}(\mathbf{x}_0, t_0) = 1 \quad \text{et} \quad \rho_L(\mathbf{x}_0, t_0) = \rho_0(\mathbf{x}_0)$$

où  $\rho_0(\mathbf{x}_0)$  est la masse volumique de la particule  $\mathbf{x}_0$  à l'instant de référence  $t_0$  (masse volumique initiale). On en déduit la constante  $C = \rho_0(\mathbf{x}_0)$ . On a donc :

$$K_{vL} = \frac{\rho_0(\mathbf{x}_0)}{\rho_L(\mathbf{x}_0, t)} = \frac{\rho_0(P)}{\rho(P, t)} \quad \Leftrightarrow \quad K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (2.8)$$

*Le principe de la conservation de la masse implique l'égalité entre la dilatation volumique actuelle  $K_v$  (concept cinématique) et le rapport des masses volumiques initiale et actuelle.*

**Remarque** – Contrairement à ce qui est parfois sous-entendu dans certains textes de mécanique des solides déformables, la masse volumique d'un solide déformable varie avec la déformation<sup>(7)</sup>, sauf si la déformation actuelle est isovolume<sup>(8)</sup>.

## 2.4 Application à un domaine géométrique

- **Théorème 2.4 – Bilan de masse.** La masse d'un domaine géométrique n'est pas constante dans le temps. La dérivée temporelle de la masse contenue dans un domaine géométrique est égale au débit massique entrant à travers la frontière.

**Démonstration** – Dans un domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$ , la masse du milieu continu contenu dans le domaine ne se conserve pas au cours du temps. En effet :

$$\frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \underbrace{\dot{\rho}_E + \tau_{vE} \rho_E}_{\tau_m} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\Phi_m} \quad [\text{éq. (1.23) p. 17 où } \Psi = m]$$

Or le théorème 2.3 [p. 20] implique  $\tau_m = 0$ . Il reste :

$$\frac{d}{dt} m(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t = \Phi_m \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{v}^f$  est la vitesse des points de la frontière du domaine géométrique et  $\Phi_m$  est le débit massique (« flux convectif de masse », déf. 1.8 [p. 15]) entrant à travers la frontière du domaine géométrique.

**Principe alternatif** – Le théorème 2.4 [p. 22] peut aussi bien être pris comme principe de la conservation de la masse, et on peut en déduire la forme locale et la forme globale pour un domaine matériel.

<sup>(7)</sup> Même si les déformations sont « petites ».

<sup>(8)</sup> Rappel : une déformation isovolume ( $K_v = 1$ ) se traduit par  $\det \mathbf{U} = \det \mathbf{V} = \det \mathbf{C} = \det \mathbf{B} = 1$  (ou encore dans le cas des « petites perturbations » par  $\text{tr } \boldsymbol{\epsilon} = 0$ ). Pour les autres tenseurs de déformation, c'est une relation entre les invariants. Voir la section 4.10.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

## 2.5 Densités massiques de grandeurs extensives

La distribution d'une grandeur physique extensive  $\Psi$  dans un domaine  $\mathcal{D}$  (géométrique ou matériel) peut aussi se décrire par des *densités massiques*  $\Psi^m$  (unité :  $[\Psi].\text{kg}^{-1}$ ) plutôt que par des densités volumiques  $\Psi^v$  (unité :  $[\Psi].\text{m}^{-3}$ ). La relation entre ces deux densités est :

$$\Psi^v(P,t) = \rho(P,t) \Psi^m(P,t) \quad (2.10)$$

### 2.5.1 Grandeur extensive d'un domaine, décrite avec des densités massiques

Pour un domaine matériel, la valeur actuelle d'une grandeur extensive  $\Psi$  est :

$$\Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \Psi_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E^m dm \quad (2.11)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^v K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \Psi_L^m K_{vL} dv_0 \quad [\text{éq. (2.10) p. 23}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^m \rho_0 dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L^m dm \quad [\text{éq. (2.8) p. 22}] \quad (2.12)$$

Pour un domaine géométrique, la valeur actuelle d'une grandeur extensive  $\Psi$  est :

$$\Psi(\mathcal{D}^g, t) = \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^v dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \Psi_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \Psi_E^m dm \quad (2.13)$$

### 2.5.2 Dérivée temporelle d'une grandeur extensive, décrite avec des densités massiques

On en déduit de nouvelles expressions de la dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine qui seront utiles dans la suite lorsque l'on utilise des densités massiques de grandeurs extensives :

**Domaine matériel avec une description d'Euler de la densité massique  $\psi^m$**

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\dot{\Psi}_E^v + \tau_{vE} \Psi_E^v) dv_t \quad [\text{éq. (1.19) p. 17}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( (\rho_E \Psi_E^m)^\cdot + \tau_{vE} \rho_E \Psi_E^m \right) dv_t \quad [\text{éq. (2.10)}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} (\rho_E \dot{\Psi}_E^m + (\dot{\rho}_E + \tau_{vE} \rho_E) \Psi_E^m) dv_t$$

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \dot{\Psi}_E^m dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{\Psi}_E^m dm \quad [\text{éq. (2.4) p. 20}] \quad (2.14)$$

**Domaine matériel avec une description de Lagrange de la densité massique  $\psi^m$**

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} (\dot{\Psi}_L^v + \tau_{vL} \Psi_L^v) K_{vL} dv_0 \quad [\text{éq. (1.20) p. 17}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( (\rho_L \Psi_L^m)^\cdot + \tau_{vL} \rho_L \Psi_L^m \right) K_{vL} dv_0 \quad [\text{éq. (2.10) p. 23}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \rho_L \dot{\Psi}_L^m + (\dot{\rho}_L + \tau_{vL} \rho_L) \Psi_L^m \right) K_{vL} dv_0$$

$$\frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_0^m} \dot{\Psi}_L^m dm \quad [\text{éq. (2.4) p. 20}] \quad (2.15)$$



### Domaine géométrique avec une description d'Euler de la densité massique $\Psi^m$

**Rappel** – La description d'Euler des champs matériels est la seule possible dans les domaines géométriques.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^s, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^s} (\dot{\Psi}_E^v + \tau_{vE} \Psi_E^v) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \Psi_E^v (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n} ds_t \quad [\text{éq. (1.23) p. 17}] \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^s} \left( (\rho_E \Psi_E^m)' + \tau_{vE} \rho_E \Psi_E^m \right) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E \Psi_E^m ((\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}) ds_t \quad [(2.10) \text{ p. 23}] \\ \frac{d}{dt} \Psi(\mathcal{D}^s, t) &= \int_{\mathcal{D}_t^s} \dot{\Psi}_E^m dm + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E \Psi_E^m ((\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}) ds_t}_{\Phi_\Psi} \quad [\text{éq. (2.4) p. 20}] \quad (2.16) \end{aligned}$$

où :

- $\Phi_\Psi$  est le flux convectif entrant de  $\Psi$  [déf. 1.8 p. 15] à travers la frontière (unité :  $[\Psi].s^{-1}$ );
- $\dot{\Psi}^m$  est la dérivée particulaire de la densité massique  $\Psi^m$ ; c'est aussi le *taux de production massique* actuel de  $\Psi$  à l'intérieur du domaine (unité :  $[\Psi].kg^{-1}.s^{-1}$ ).

## 2.6 Changements d'observateur

- **Théorème 2.5 – Objectivité de la masse volumique.** La masse volumique  $\rho(P, t)$  est un champ matériel scalaire objectif.

**Démonstration** – La masse  $m$  et le volume  $V$  d'un domaine matériel sont des grandeurs objectives par principe (physique classique). La masse volumique moyenne  $m/V$  est donc objective pour tout domaine matériel aussi petit que l'on veut. En passant à la limite, on en déduit que le champ des masses volumiques  $\rho(P, t)$  est un champ matériel scalaire objectif.

- **Théorème 2.6 – Objectivité de la dérivée particulaire de la masse volumique.** La dérivée particulaire de la masse volumique est un champ scalaire objectif.

**Démonstration** – On a montré en cinématique que la dérivée particulaire de toute grandeur scalaire objective est objective <sup>(9)</sup>.

- **Théorème 2.7 – Objectivité de la divergence eulérienne des vitesses.** La divergence eulérienne du champ des vitesses est un champ scalaire objectif.

**Démonstration** – On déduit des deux théorèmes précédents que la dérivée temporelle logarithmique  $\frac{\dot{\rho}}{\rho}$  est une grandeur scalaire objective. On déduit immédiatement de l'équation (2.4) [p. 20] :  $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\tau_v$  que le taux de dilatation volumique  $\tau_v = \text{div}_E \mathbf{v}$  [éq. (2.5) p. 21] est objectif.

Bien que le champ des vitesses soit un champ matériel vectoriel non objectif, sa divergence eulérienne est un champ matériel scalaire objectif. Ce résultat a déjà été établi en cinématique <sup>(10)</sup>, indépendamment de la conservation de la masse.

<sup>(9)</sup> Th. 3.17 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

<sup>(10)</sup> Th. 5.9 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

## 2.7 En bref...

La masse d'un domaine matériel est une grandeur scalaire, extensive, objective et invariante dans le temps. Elle mesure la quantité de matière qui constitue le domaine matériel. L'extensivité permet de définir une masse volumique  $\rho(P,t)$  qui est un champ matériel scalaire objectif.

L'expression locale du principe de la conservation de la masse pour un milieu continu est une équation différentielle aux dérivées partielles. Son intégration temporelle conduit à une relation entre la masse volumique actuelle et la dilatation volumique actuelle.

Contrairement aux domaines matériels, la masse d'un domaine géométrique est variable dans le temps car de la matière traverse les frontières.

On peut calculer la dérivée temporelle d'une grandeur extensive  $\Psi$  sur un domaine matériel ou géométrique, non seulement avec des intégrales de volume de densités volumiques  $\Psi^v$  [sec. 1.5 p. 17], mais aussi avec des intégrales de masse de densités massiques  $\Psi^m$  [sec. 2.5 p. 23].

La dérivée temporelle d'une grandeur extensive d'un domaine peut s'écrire sous différentes formes. La diversité des expressions que l'on peut trouver dans la littérature est due à :

1. l'utilisation de domaines géométriques ou matériels,
2. l'utilisation de densités volumiques ou massiques,
3. l'utilisation de la description de Lagrange ou d'Euler pour décrire les densités volumiques ou massiques,
4. la mise en évidence ou non des flux convectifs à travers la frontière (« équations de bilan »).

Toutes ces expressions expriment exactement la même chose<sup>(11)</sup> : la dérivée temporelle d'une grandeur extensive sur un domaine. Les expressions les plus concises sont celles écrites avec des densités massiques  $\Psi^m$  et leur dérivée particulière  $\dot{\Psi}^m$ .

La démarche qui a été utilisée dans ce chapitre sera aussi suivie pour établir les expressions des trois autres principes fondamentaux (mécanique et thermodynamique). On en rappelle les trois étapes :

1. le principe est postulé pour un domaine matériel ;
2. on en déduit son expression locale (une équation différentielle) ;
3. on en déduit les conséquences pour un domaine géométrique.

<sup>(11)</sup> Même si on attribue parfois à certaines expressions un nom particulier.



# Principe fondamental de la mécanique

## 3.1 Rappels de mécanique générale

### 3.1.1 Loi de Newton et observateurs galiléens

- **Principe 3.1 – Observateur galiléen.** Un observateur galiléen est un observateur pour lequel le mouvement des points matériels obéit à la *loi de Newton* :

$$\mathbf{f}_{ext} = m\boldsymbol{\gamma} \quad (\text{égalité vectorielle}) \quad (3.1)$$

où  $m$  est la masse d'un point matériel,  $\boldsymbol{\gamma}$  est son accélération pour un observateur galiléen et  $\mathbf{f}_{ext}$  est la somme des forces que l'extérieur exerce sur le point matériel.

**Corollaire** – La loi de Newton [éq. (3.1) p. 27] montre que si les forces extérieures s'exerçant sur un point matériel de masse  $m$  sont nulles, son accélération pour un observateur galiléen est nulle et la vitesse du point matériel pour cet observateur est donc un vecteur constant dans le temps. Ce corollaire, conséquence triviale de la loi de Newton, est parfois appelé « principe » d'inertie.

Pour savoir si un observateur est galiléen, il faut donc vérifier expérimentalement si la loi de Newton (ou son corollaire) est vraie pour cet observateur.

- **Principe 3.2 – Interactions de Newton.** On suppose que l'action actuelle d'un point matériel sur un autre est une *force* telle que :

$$\forall i \neq j, \quad \mathbf{F}_{P_i/P_j} = -\mathbf{F}_{P_j/P_i} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}_{P_i/P_j} \wedge (\mathbf{x}_t^{P_i} - \mathbf{x}_t^{P_j}) = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

où  $\mathbf{x}_t^{P_i}$  et  $\mathbf{x}_t^{P_j}$  sont les positions actuelles des points matériels  $P_i$  et  $P_j$  pour l'observateur utilisé pour observer le mouvement.

**Commentaire sur les interactions** – Le principe 3.2 est parfois appelé *principe de l'action et de la réaction*. Il précise que l'action d'un point matériel sur un autre est une *force* colinéaire au segment de droite qui joint les deux points matériels. La direction de la force est précisée, mais *l'intensité et le sens (attraction/répulsion) de la force d'interaction ne sont pas précisées par le principe*. Ces interactions peuvent être dues à la gravitation, à l'électrostatique, à la cohésion ou toute autre interaction mécanique se traduisant par une force *sans moment*<sup>(1)</sup>. Toutefois, la loi de Newton [éq. (3.1) p. 27] et les propriétés des interactions [éq. (3.2) p. 27] sont suffisantes<sup>(2)</sup> pour démontrer les trois théorèmes généraux de mécanique générale rappelés plus loin en section 3.1.2 [p. 29].

<sup>(1)</sup> De ce fait, on élimine la possibilité d'envisager des interactions magnétiques qui sont des moments exercés à distance sur des points matériels munis d'une direction qui leur est propre (limites de dipôles magnétiques). Certains effets mécaniques de l'électromagnétisme ne peuvent donc pas être envisagés dans ce cadre restreint.

<sup>(2)</sup> Dans la démonstration des théorèmes généraux en mécanique générale, il n'est pas nécessaire de préciser la nature physique de ces interactions, c'est-à-dire ni leur sens (répulsion ou attraction) ni leur module.

Pour déterminer si un observateur est galiléen ou non, l'observateur doit donc faire des expériences pour vérifier si les prédictions de la loi de Newton sont correctes ou non pour cet observateur<sup>(3)</sup>.

**Exemples d'expériences** – La loi de Newton prédit que pour un observateur galiléen, un point matériel lâché sans vitesse initiale et soumis à une force constante se déplace en ligne droite avec une accélération constante (pour cet observateur). Elle prédit aussi qu'un pendule lâché sans vitesse initiale oscille dans un plan fixe (pour cet observateur).

Si pour un observateur, les prédictions de la loi de Newton sont considérées comme suffisamment exactes, on peut *déclarer* galiléen cet observateur. Déclarer galiléen un observateur, c'est donc accepter une certaine approximation dans la confrontation avec des expériences.

**Exemples** – Si on assimile un objet pesant à un point matériel, et si on utilise un observateur lié à la terre pour analyser son mouvement, cet objet est soumis à une force constante unique<sup>(4)</sup> : son poids. Lâché sans vitesse initiale, la loi de Newton prédit que sa trajectoire est une droite colinéaire au poids. En première approximation, on peut constater que c'est vrai, cependant des mesures fines mettent en évidence une petite déviation de la chute des corps vers l'est.

De même, si on observe le mouvement d'un pendule simple lâché sans vitesse initiale, on constate que, pour un observateur terrestre, son plan d'oscillation est sensiblement fixe. Mais une observation plus fine (expérience du pendule de Foucault) montre que ce plan tourne à une faible vitesse angulaire.

Selon que l'on considère que la déviation vers l'est de la chute des corps ou que la vitesse de rotation du plan d'oscillation d'un pendule sont négligeables ou non, on *décide* si un observateur terrestre est considéré comme galiléen ou non.

La cinématique élémentaire montre que tous les observateurs dont le mouvement par rapport à un observateur galiléen est une translation à vitesse constante dans le temps sont aussi des observateurs galiléens car pour tous ces observateurs l'accélération d'un point matériel est la même. La loi de Newton est donc aussi valide pour tous ces observateurs observant le même point matériel de masse  $m$  soumis aux mêmes forces extérieures  $\mathbf{f}_{ext}$ . Parmi tous les observateurs galiléens, on ne peut donc pas en distinguer un qui puisse être qualifié d'« absolu ».

Tout observateur qui n'est pas en translation à vitesse constante par rapport à un observateur galiléen n'est pas galiléen car la cinématique élémentaire montre que l'accélération d'un point matériel pour un observateur non galiléen est différente de celle pour un observateur galiléen alors que les forces extérieures et la masse du point matériel sont les mêmes. La loi de Newton [éq. (3.1) p. 27] est donc fautive pour les observateurs non galiléens.

N'étant pas valable pour tous les observateurs, *la loi de Newton  $\mathbf{f}_{ext} = m\boldsymbol{\gamma}$  n'est pas une loi universelle*<sup>(5)</sup>. On peut la rendre artificiellement universelle en ajoutant aux forces extérieures  $\mathbf{f}_{ext}$  des forces extérieures *fictives* appelées *forces d'inertie* (d'entraînement et de Coriolis). La loi de Newton est alors vraie pour tous les observateurs, mais les forces agissant sur un point matériel sont la somme des forces réelles<sup>(6)</sup> et de forces *fictives* qui sont particulières à chaque observateur non galiléen.

<sup>(3)</sup> On rappelle que la valeur de l'accélération  $\boldsymbol{\gamma}$  d'un point matériel dépend de l'observateur utilisé pour observer le mouvement.

<sup>(4)</sup> On néglige l'action des astres et il faut faire l'expérience dans le vide pour éliminer l'action de l'air.

<sup>(5)</sup> C'est-à-dire qu'elle n'est pas valable pour tous les observateurs. La seule mécanique dont les lois sont universelles est la *théorie de la relativité générale* due à Albert EINSTEIN.

<sup>(6)</sup> C'est-à-dire les forces dont la cause est identifiée.

### 3.1.2 Rappel des théorèmes généraux

L'objet de la mécanique (des milieux continus ou non) est de trouver les relations entre le mouvement d'un *système matériel* (c'est-à-dire d'un ensemble de points matériels liés ou non et interagissant entre eux ou non) et les actions mécaniques exercées sur le système matériel par son extérieur. En mécanique des milieux continus, un système matériel est un domaine matériel [déf. 1.1 p. 9].

- **Définition 3.3 – Actions extérieures.** On appelle action mécanique extérieure d'un système matériel l'action mécanique exercée par l'extérieur du système matériel (le reste de l'univers) sur ce système matériel.

En appliquant à chaque point matériel d'un système matériel les deux lois fondamentales énoncées par Newton [principes 3.1 et 3.2 p. 27] (l'observateur utilisé est donc galiléen) et en distinguant dans les efforts extérieurs à chaque point matériel du système étudié ceux qui sont d'origine intérieure au système<sup>(7)</sup> et ceux qui d'origine extérieure au système, on démontre en mécanique générale les trois théorèmes suivants, valables pour tout système matériel :

- **Théorème 3.4 – Résultante dynamique.** La résultante dynamique actuelle (somme des quantités d'accélération des points matériels du système) est égale à la résultante des actions mécaniques extérieures actuelles sur les points matériels du système.
- **Théorème 3.5 – Moment dynamique.** Le moment dynamique actuel en un point (somme des moments en ce point des quantités d'accélération des points matériels du système) est égal au moment en ce point des actions mécaniques extérieures actuelles sur les points matériels du système.
- **Corollaire 3.6 –** On démontre en mécanique générale que le choix du point pour évaluer les moments est indifférent : si l'énoncé du théorème 3.5 [p. 29] est vrai pour les moments calculés en un point, il est vrai pour les moments calculés en tout autre point.
- **Convention 3.7 –** Dans toute la suite, le point choisi pour évaluer les moments sera l'origine  $O$  de l'observateur utilisé pour décrire le mouvement. Le vecteur moment en  $O$  d'un vecteur  $\mathbf{w}(P)$  s'écrira donc :

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{w}(P)) = \mathbf{x}_t^P \wedge \mathbf{w}(P) \quad \text{où } \mathbf{x}_t^P \text{ est le vecteur } \textit{position actuelle} \text{ du point matériel } P.$$

- **Corollaire 3.8 –** La résultante et le moment résultant en un point  $O$  des actions *intérieures* actuelles à un système de points matériels sont des vecteurs nuls.

**Démonstration –** Ce corollaire est une conséquence de la définition des interactions [éq. (3.2) p. 27] : soit un couple de points matériels  $P_i$  et  $P_j$  faisant partie du système matériel ; la somme des deux forces intérieures est :

$$\mathbf{F}_{P_i/P_j} + \mathbf{F}_{P_j/P_i} = \mathbf{0} \quad [\text{éq. (3.2) p. 27}]$$

La somme des deux moments en  $O$  des forces intérieures est :

$$\mathbf{x}_t^{P_i} \wedge \mathbf{F}_{P_i/P_j} + \mathbf{x}_t^{P_j} \wedge \mathbf{F}_{P_j/P_i} = (\mathbf{x}_t^{P_i} - \mathbf{x}_t^{P_j}) \wedge \mathbf{F}_{P_i/P_j} = \mathbf{0} \quad [\text{éq. (3.2) p. 27}]$$

En faisant la somme de toutes les interactions dans tous les couples de points matériels appartenant au système matériel, on aboutit au résultat.

<sup>(7)</sup> C'est-à-dire l'action des autres points matériels du système

- **Théorème 3.9 – Puissance cinétique.** La puissance cinétique actuelle (dérivée temporelle de l'énergie cinétique) est égale à la somme de la puissance actuelle des efforts extérieurs et de la puissance actuelle des efforts intérieurs.

**Rappels** – Bien que la résultante et le moment résultant des efforts intérieurs soient nuls [corollaire 3.8 p. 29], la puissance des efforts intérieurs est *a priori* non nulle. Pour tout couple de points matériels, la puissance des efforts intérieurs pour ces deux points matériels est :

$$\mathcal{P}_{ij} = \mathbf{v}(P_i) \cdot \mathbf{F}_{P_j/P_i} + \mathbf{v}(P_j) \cdot \mathbf{F}_{P_i/P_j} = \mathbf{F}_{P_j/P_i} \cdot (\mathbf{v}(P_i) - \mathbf{v}(P_j)) \quad (\text{car } \mathbf{v}(P_i) \neq \mathbf{v}(P_j) \text{ en général})$$

La puissance des efforts intérieurs dans le système matériel est donc :  $\sum_{i>j} \mathcal{P}_{ij}$ .

Pour les solides *indéformables*, la puissance des efforts intérieurs est nulle car le champ des vitesses d'un solide est équiprojectif<sup>(8)</sup>, ce qui conduit à  $\mathcal{P}_{ij} = 0 \quad \forall i \forall j$ .

Les trois théorèmes généraux 3.4, 3.5 et 3.9 ainsi que le corollaire 3.8 [p. 30] constituent les seules connaissances mécaniques préalables qui sont nécessaires et suffisantes pour comprendre les développements qui suivent. On peut les considérer comme des axiomes pour la mécanique des milieux continus<sup>(9)</sup>.

**Remarque** – Les trois théorèmes généraux précédents sont encore vrais pour un observateur non galiléen si l'on ajoute aux forces extérieures les forces d'inertie *fictives* d'entraînement et de Coriolis qui sont propres à chaque observateur non galiléen.

## 3.2 Efforts extérieurs sur un domaine matériel

Les actions mécaniques extérieures sur un domaine matériel de milieu continu [déf. 1.1 p. 9] peuvent se classer en deux catégories : les actions mécaniques extérieures à *distance* et les actions mécaniques extérieures *de contact* à la frontière du domaine matériel. En mécanique des milieux continus, chacune de ces actions mécaniques extérieures est représentée par un champ.

### 3.2.1 Champ des actions mécaniques extérieures à distance

Les actions mécaniques extérieures à distance sont les actions à distance de l'extérieur du domaine d'étude sur toutes les particules du domaine. On les représente par un champ matériel de *densité volumique de force*<sup>(10)</sup>, que l'on notera  $\mathbf{f}_{ext}^v(P, t)$  (unité :  $\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$ ) ou bien par un champ matériel de *densité massique de force* que l'on notera  $\mathbf{f}_{ext}^m(P, t)$  (unité :  $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1} = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

Le champ vectoriel  $\mathbf{f}_{ext}^v(P, t)$  représente la force volumique à distance<sup>(11)</sup> actuelle exercée par la totalité de l'extérieur du domaine matériel sur la particule  $P$ .

<sup>(8)</sup> L'équiprojectivité du champ des vitesses d'un solide est une conséquence de l'indéformabilité du solide (la distance entre deux points matériels est constante dans le temps).

<sup>(9)</sup> Le lecteur qui n'admettrait pas ces prérequis est invité à consulter tout bon cours de mécanique générale élémentaire.

<sup>(10)</sup> Noter que l'on n'envisage pas de densité volumique de moment. De ce fait, on élimine la possibilité de prendre en compte certaines actions mécaniques extérieures d'origine magnétique. Le comportement (mécano-)électromagnétique des milieux continus n'est pas envisagé dans ce cours. Il demanderait une refonte de toute la cinématique des milieux continus : en électromagnétisme, la position à un instant  $t$  d'un milieu continu n'est pas suffisamment décrite par la seule position actuelle de ses particules, il faut y ajouter leur orientation actuelle (en électromagnétisme, une particule est la limite d'un dipôle magnétique).

<sup>(11)</sup> C'est le plus souvent un champ de forces gravitationnelles ou électrostatiques.

La valeur de cette densité volumique de force dépend *a priori* du domaine matériel choisi pour l'étude, car pour chaque domaine matériel, la définition de son extérieur est *a priori* différente<sup>(12)</sup>.

**Remarques** – On rappelle que si l'observateur utilisé pour décrire le mouvement ne peut pas être considéré comme galiléen, le vecteur  $\mathbf{f}_{ext}^v$  (ou bien  $\mathbf{f}_{ext}^m = \mathbf{f}_{ext}^v \rho^{-1}$ ) contient en outre des champs de forces d'inertie volumiques (ou massiques) fictives d'entraînement et de Coriolis.

Par ailleurs, dans la plupart des études, les seules forces à distance notables exercées par l'extérieur sur les particules du domaine matériel se réduisent à la gravitation terrestre<sup>(13)</sup>, les autres masses extérieures ayant une action gravitationnelle négligeable devant celle de la terre, soit parce qu'elles sont trop éloignées<sup>(14)</sup>, soit parce que leur masse est trop faible<sup>(15)</sup>. On peut donc souvent affirmer que le champ de forces gravitationnelles d'origine extérieure est indépendant du choix du domaine.

Lorsque les dimensions du domaine sont petites devant celles de la terre, on simplifie souvent le champ de gravitation terrestre (qui est approximativement un champ vectoriel central convergeant vers le centre de gravité de la terre) en disant que le champ de forces gravitationnel terrestre est un champ de forces massique *uniforme*  $\mathbf{g}$ , orienté vers la terre, appelé *accélération de la pesanteur*, et dont la norme au voisinage de la surface de la terre est  $\|\mathbf{g}\| = g \simeq 9.81 \text{ m.s}^{-2}$ .

Enfin, on peut représenter les forces à distance extérieures par un champ de forces volumiques ou un champ de forces massiques ( $\mathbf{f}_{ext}^v = \rho \mathbf{f}_{ext}^m$ ). Dans les applications où seule la pesanteur est prise en compte, on affirme parfois que le champ des forces volumiques est uniforme. Les lois de la gravitation montrent que c'est le champ des forces massiques  $\mathbf{f}_{ext}^m$  (l'accélération de la pesanteur) qui est uniforme. Le champ des forces volumiques  $\mathbf{f}_{ext}^v$  n'est uniforme que si l'on peut considérer que la masse volumique  $\rho$  est aussi un champ uniforme, ce qui est rarement le cas en mécanique des milieux continus [éq. (2.4) p. 20]. Cette approximation est acceptable pour des liquides (quasi incompressibles), elle est assez grossière pour les solides déformables<sup>(16)</sup> et elle est difficilement admissible pour les gaz.

Quoi qu'il en soit, aucune des approximations évoquées dans ces remarques n'est nécessaire pour établir les équations générales qui suivent. Il revient aux scientifiques et aux ingénieurs de prendre la responsabilité de faire les approximations qui leur semblent acceptables<sup>(17)</sup>.

### 3.2.2 Champ des actions mécaniques extérieures de contact sur la frontière

Pour un domaine matériel de milieu continu, les forces extérieures de contact ne peuvent exister que sur la frontière du domaine. Elles sont donc représentées par une *densité surfacique de force* s'appliquant sur la frontière  $\partial \mathcal{D}^m$ , qui sera notée  $\mathbf{f}^s$  (unité : Pa = N.m<sup>-2</sup>).

**Remarque** – La densité surfacique de force extérieure sur une frontière a bien la dimension d'une pression, mais l'orientation et le sens du champ vectoriel  $\mathbf{f}^s$  sont *a priori* quelconques par rapport à la normale extérieure de la frontière.

<sup>(12)</sup> Dans la pratique, on simplifie souvent l'extérieur du domaine matériel en le réduisant à quelques sources de champs gravitationnels ou électrostatiques. Les champs de forces à distance extérieurs ne changent donc pas pour bon nombre de domaines matériels, tant qu'ils n'incluent pas l'une de ces sources.

<sup>(13)</sup> À condition que la terre ne fasse pas partie du domaine étudié, auquel cas la gravitation terrestre ne serait pas un effort extérieur.

<sup>(14)</sup> Les astres par exemple. Toutefois, si l'on veut comprendre un phénomène comme la marée, il faut prendre en compte la gravitation due à la lune et celle due au soleil.

<sup>(15)</sup> La matière voisine du domaine, par exemple des parois ou l'immeuble d'à côté.

<sup>(16)</sup> Toutefois, en mécanique des milieux continus solides, il arrive que les effets de la pesanteur soient négligeables devant les effets des forces de contact ; dans ce cas, on pose  $\mathbf{f}_{ext}^m \simeq \mathbf{0}$ . Le champ des forces volumiques à distance  $\mathbf{f}_{ext}^v$  est alors uniforme car il est considéré comme nul.

<sup>(17)</sup> Normalement, il ne faut faire ces approximations que pour des raisons physiques (comparaison des ordres de grandeur) et non pour « simplifier » des équations !



### 3.3 Efforts intérieurs dans un milieu continu

Soit  $\mathcal{D}^m$  un domaine matériel dont la position actuelle est  $\mathcal{D}_1^m$ . On a défini dans la section précédente les actions de l'extérieur sur ce domaine matériel. On se propose maintenant de définir des efforts intérieurs à ce domaine matériel.

En mécanique générale élémentaire, on considère des systèmes matériels constitués d'un ensemble dénombrable de points matériels. Dans ce cas, il est aisé de définir les efforts intérieurs en considérant individuellement les interactions de Newton [hypothèse 3.2 p. 27] de chaque couple de points matériels. Dans un domaine matériel de milieu continu, cette méthode est inapplicable. Afin d'envisager les efforts intérieurs dans un domaine de milieu continu, on va considérer les efforts extérieurs à des sous-domaines du domaine matériel étudié.

Soit un sous-domaine matériel  $\mathcal{D}_1^m \subset \mathcal{D}^m$ . L'extérieur du sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  peut être partitionné de la manière suivante :

$$\text{ext}(\mathcal{D}_1^m) = (\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m) \cup \text{ext}(\mathcal{D}^m)$$

Les actions du sous-domaine  $\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m$  sur le sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  sont des actions extérieures au sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  mais *intérieures* au domaine  $\mathcal{D}^m$ . Comme pour tout domaine matériel, les actions extérieures au sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  sont de deux sortes :

1. *Des actions extérieures à distance* provenant de  $(\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m)$  et de  $\text{ext}(\mathcal{D}^m)$  :

$$\mathbf{f}_{\mathcal{D}_1^m}^v = \mathbf{f}_{(\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m)/\mathcal{D}_1^m}^v + \mathbf{f}_{\text{ext}(\mathcal{D}^m)/\mathcal{D}_1^m}^v$$

L'action à distance  $\mathbf{f}_{(\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m)/\mathcal{D}_1^m}^v$  est une action à distance extérieure au sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  mais c'est une action à distance *intérieure* au domaine  $\mathcal{D}^m$ .

2. *Des actions extérieures de contact* sur la frontière  $\partial \mathcal{D}_1^m$  du sous-domaine : on note  $\mathbf{c}$  la densité de force surfacique actuelle exercée par le sous-domaine  $\mathcal{D}^m - \mathcal{D}_1^m$  sur le sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$ , distribuée sur la frontière  $\partial \mathcal{D}_1^m$ . La densité surfacique de force  $\mathbf{c}$  est une action de contact extérieure au sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  mais *intérieure* au domaine  $\mathcal{D}^m$ .

- **Définition 3.10 – Contrainte.** On appelle contrainte actuelle, la densité surfacique de *force de contact* actuelle  $\mathbf{c}$  qui s'exerce sur la frontière d'un sous-domaine de domaine matériel.

La valeur du champ vectoriel de contraintes  $\mathbf{c}$  (unité : Pa = N.m<sup>-2</sup>), défini sur la frontière  $\partial \mathcal{D}_1^m$  du sous-domaine, dépend *a priori* à la fois du choix du sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m \subset \mathcal{D}^m$  et du choix de la particule  $P$  sur sa frontière.

- **Théorème 3.11 –** Tous les sous-domaines  $\mathcal{D}_1$  dont la frontière contient la particule  $P$  et qui ont la même normale extérieure, ont la même contrainte en  $P$ .

**Démonstration –** L'énoncé de ce théorème est le plus souvent postulé sous le nom d'« hypothèse de Cauchy » car la démonstration de cet énoncé n'est généralement pas donnée. On en trouvera une démonstration en annexe A.2 [p. 116]. Le principe de cette démonstration a été communiqué à l'auteur par Jean COUSTEIX<sup>(18)</sup> qui s'est inspiré d'une démonstration due à Walter NOLL citée dans un ouvrage de Clifford TRUESDELL<sup>(19)</sup>.

<sup>(18)</sup> de l'ONERA, Toulouse, France.

<sup>(19)</sup> *Introduction à la mécanique rationnelle des milieux continus*, Clifford TRUESDELL, Masson et Cie, Paris, 1974.

La valeur de la contrainte  $\mathbf{c}$  ne dépend donc que de la particule  $P$  et de la normale extérieure  $\mathbf{n}_t$ , c'est-à-dire que la contrainte  $\mathbf{c}$  est fonction du choix d'une *facette matérielle* <sup>(20)</sup> en la particule  $P$ . Il existe donc une fonction à valeur vectorielle  $\mathbf{f}_\sigma$  telle que :

$$(P, \mathbf{n}_t, t) \xrightarrow{\mathbf{f}_\sigma} \mathbf{c} = \mathbf{f}_\sigma(P, \mathbf{n}_t, t) \text{ où } \mathbf{n}_t \text{ est la direction actuelle d'une facette matérielle.} \quad (3.3)$$

En revanche, pour la même particule  $P$ , le vecteur contrainte  $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}'_t, t)$  est *a priori* différent pour une autre normale extérieure  $\mathbf{n}'_t$  (c'est une autre famille de sous-domaines tangents en  $P$ ). Le théorème 3.11 [p.32] permet de poser une nouvelle définition pour la contrainte :

- **Définition 3.12 – Contrainte (redéfinition).** On appelle contrainte actuelle en une particule  $P$  sur une facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ , la force surfacique actuelle  $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t)$  qui s'exerce en  $P$  sur la frontière de tout sous-domaine ayant  $P$  sur sa frontière et dont la normale unitaire extérieure est  $\mathbf{n}_t$ .

### 3.3.1 Existence du tenseur des contraintes

- **Théorème 3.13 – Tenseur des contraintes.** En chaque particule d'un milieu continu et à chaque instant, il existe un tenseur du second ordre appelé tenseur des contraintes <sup>(21)</sup> actuel, noté  $\sigma$  <sup>(22)</sup>, tel que la contrainte actuelle s'exerçant sur une facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  est donnée par :

$$\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t) = \sigma(P, t) \cdot \mathbf{n}_t(P, t) \quad (3.4)$$

**Démonstration** – En appliquant le théorème de la résultante dynamique à un domaine matériel tétraédrique que l'on fait tendre d'une certaine manière vers un volume nul, on montre que l'application  $\mathbf{f}_\sigma$  définie dans l'équation (3.3) [p. 33] est nécessairement un opérateur *linéaire sur son argument vectoriel*  $\mathbf{n}_t$ . En une particule  $P$  et à un instant  $t$ , l'opérateur linéaire  $\mathbf{f}_\sigma$  est donc un endomorphisme de  $\mathbb{V}_3 : \mathbf{n}_t \rightarrow \mathbf{c}$ , c'est-à-dire un tenseur du second ordre <sup>(23)</sup>. La démonstration détaillée de ce théorème est donnée en annexe section A.3 [p. 119].

Ce théorème ne prouve que l'existence du champ tensoriel des contraintes  $\sigma(P, t)$  sans en préciser la valeur (tensorielle d'ordre 2) en toute particule et à tout instant. Le champ matériel tensoriel du second ordre  $\sigma(P, t)$  est solution d'équations différentielles aux dérivées partielles qui seront établies plus loin.

Comme tout champ matériel, le champ *tenseur des contraintes actuel* peut aussi bien être décrit par la méthode de Lagrange que par la méthode d'Euler :  $\sigma(P, t) = \sigma_L(\mathbf{x}_0, t) = \sigma_E(\mathbf{x}_t, t)$ . Toutefois, quel que soit le mode de description du champ, c'est l'application de la valeur *actuelle* du tenseur des contraintes  $\sigma(P, t)$  à la normale *actuelle*  $\mathbf{n}_t(P, t)$  d'une facette matérielle qui conduit à la valeur *actuelle* de la contrainte pour cette facette matérielle.

<sup>(20)</sup> Une facette matérielle en une particule  $P$  est identifiée par sa normale unitaire. La définition précise d'une facette matérielle est donnée en section 4.6.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

<sup>(21)</sup> Beaucoup d'auteurs le nomment *tenseur des contraintes de Cauchy*, non seulement en hommage au mathématicien Augustin Louis CAUCHY, mais aussi pour le distinguer d'autres pseudo « tenseurs des contraintes » qui ne seront pas utilisés dans ce cours. Voir *Pseudo « tenseurs des contraintes »* p. 41.

<sup>(22)</sup> Dans les ouvrages anglosaxons, le tenseur des contraintes est souvent symbolisé par la lettre  $\mathbf{T}$ .

<sup>(23)</sup> Les endomorphismes de  $\mathbb{V}_3$  sont isomorphes aux tenseurs du second ordre. Voir la section 1.6.8 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

### 3.3.2 Conditions aux limites en contrainte

- **Théorème 3.14 – Condition aux limites en contraintes.** Soit  $\partial \mathcal{D}_1^m$  la frontière actuelle d'un domaine matériel, soit  $P'$  une particule générique de cette frontière et soit  $\mathbf{n}_t(P', t)$  la normale extérieure actuelle à la frontière en  $P'$ . On note  $\mathbf{f}^s(P', t)$  la densité de force surfacique extérieure de contact actuelle en  $P'$  [sec. 3.2.2 p. 31]. Le champ de tenseurs des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$  doit satisfaire la condition à la frontière suivante :

$$\forall P' \in \partial \mathcal{D}_1^m, \quad \boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P', t) = \mathbf{f}^s(P', t) \quad (3.5)$$

**Démonstration** – Considérons la famille de sous-domaines  $\mathcal{D}_1^m$  dont la frontière est tangente en  $P'$  à la frontière  $\partial \mathcal{D}_1^m$  du domaine matériel. En cette particule frontière, la contrainte extérieure  $\mathbf{c}(P', \mathbf{n}_t, t)$  sur un sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  [déf. 3.12 p. 33] est égale à la force surfacique de contact  $\mathbf{f}^s(P', t)$  extérieure au domaine  $\mathcal{D}_1^m$  car en  $P'$ , les frontières  $\partial \mathcal{D}_1^m$  et  $\partial \mathcal{D}_1^m$  ont la même normale extérieure [th. 3.11 p. 32]. On a donc  $\mathbf{c}(P', \mathbf{n}_t, t) = \mathbf{f}^s(P', t)$ . Le théorème d'existence 3.13 [p. 33] du champ tensoriel  $\boldsymbol{\sigma}$  entraîne l'égalité (3.5) [p. 34].

**Bord libre** – On appelle bord libre une partie de frontière sur laquelle il n'y a pas de forces extérieures de contact (rien n'agit sur la frontière). Sur un bord libre, le champ de tenseur des contraintes doit donc satisfaire la condition aux limites :

$$P' \text{ sur un bord libre} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P', t) = \mathbf{0}$$

En mécanique des solides déformables on considère comme bord libre les parties de frontière sur lesquelles aucun effort n'est exercé par un milieu continu extérieur en contact. En mécanique des fluides, ce sont souvent des surfaces libres (limites de jets, surface libre d'un liquide). Dans les deux cas, on n'a strictement un bord libre que si l'on considère les effets mécaniques de la pression atmosphérique comme négligeables.

La condition aux limites (3.5) [p. 34] est très importante : elle contribue à déterminer la solution particulière du problème à résoudre parmi l'infinité de solutions des équations différentielles<sup>(24)</sup> de la mécanique des milieux continus.

### 3.3.3 Décomposition des contraintes

Soit  $P$  une particule à l'intérieur d'un milieu continu, et soit  $\mathbf{n}_t$  la normale unitaire actuelle d'une facette matérielle en  $P$ . On note  $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t)$  la contrainte actuelle en  $P$  pour cette facette matérielle.

La contrainte  $\mathbf{c}$  est la force surfacique de contact actuelle exercée par la matière qui se trouve du côté de  $\mathbf{n}_t$  (l'extérieur d'un sous-domaine matériel  $\mathcal{D}_1^m$ ) sur la matière qui se trouve de l'autre côté de la facette matérielle (l'intérieur d'un sous-domaine matériel  $\mathcal{D}_1^m$ ).

- **Définition 3.15 – Contrainte normale.** On appelle contrainte normale actuelle en la particule  $P$  pour la facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ , le *scalaire* défini par :

$$c_N = \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t) = \mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t = \boldsymbol{\sigma}(P, t) : (\mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) : \mathbf{N}_t$$

- Si  $c_N > 0$  on dit que c'est une *traction* (l'extérieur de  $\mathcal{D}_1^m$  exerce sur  $\partial \mathcal{D}_1^m$  une force surfacique vers lui car  $\mathbf{n}_t$  est une normale *extérieure* à  $\mathcal{D}_1^m$ ).

<sup>(24)</sup> On rappelle que la solution générale d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles contient des fonctions et des constantes indéterminées, qui sont résolues par les conditions aux limites et les conditions initiales.

— Si  $c_N < 0$  on dit que c'est une *compression*.

La définition de la contrainte normale  $c_N$  montre que son signe ne change pas avec sens de  $\mathbf{n}_t$ .

- **Définition 3.16 – Contrainte tangentielle.** On appelle contrainte tangentielle actuelle en la particule  $P$  pour la facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ , le *vecteur* défini par :

$$\mathbf{c}_T = \mathbf{c} - c_N \mathbf{n}_t = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t - (\mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t$$

La contrainte tangentielle actuelle  $\mathbf{c}_T$  pour la facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  est donc un vecteur orthogonal à  $\mathbf{n}_t$  (on vérifie aisément que  $\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{c}_T = 0$ ) et donc dans le plan de la facette matérielle. Pour une facette matérielle en une particule  $P$  et de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$ , on peut donc décomposer le vecteur contrainte actuelle  $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t)$  en une partie normale et une partie tangentielle :

$$\mathbf{c} = c_N \mathbf{n}_t + \mathbf{c}_T \quad \text{avec} \quad \|\mathbf{c}\|^2 = c_N^2 + \|\mathbf{c}_T\|^2$$

Les trois réels  $\|\mathbf{c}\|$ ,  $c_N$  et  $\|\mathbf{c}_T\|$  sont des *scalaires* (leur valeur ne dépend pas d'une base).

**Remarques** – Contrairement au scalaire  $c_N$ , le *vecteur*  $\mathbf{c}_T$  est sensible au sens de  $\mathbf{n}_t$ .

Par ailleurs, dans le plan de la facette matérielle, on peut choisir *arbitrairement* deux directions unitaires orthogonales  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  et poser  $\mathbf{c}_T = c_{T1} \mathbf{t}_1 + c_{T2} \mathbf{t}_2$ . On a alors :

$$c_{T1} = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{c}_T = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{t}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t \quad ; \quad c_{T2} = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{c}_T = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{c} = \mathbf{t}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t$$

Les nombres  $c_{T1}$  et  $c_{T2}$  sont parfois appelés contraintes tangentielles pour les directions  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$ , en  $P$  pour la facette matérielle  $\mathbf{n}_t$ . Ces appellations sont de peu d'intérêt : les nombres  $c_{T1}$  et  $c_{T2}$  ne sont pas des scalaires, car leur valeur dépend du choix arbitraire des directions  $\mathbf{t}_1$  et  $\mathbf{t}_2$  dans le plan de la facette matérielle. Ils sont donc dénués de toute signification physique. Seule la norme  $\|\mathbf{c}_T\|$  est un scalaire (la valeur ne dépend pas d'une base).

### 3.4 Théorèmes généraux de la mécanique pour un domaine matériel

Par définition, la résultante dynamique, le moment dynamique en un point et l'énergie cinétique sont des grandeurs extensives. On peut donc définir des densités volumiques de ces grandeurs [th. 1.6 p. 11] :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t \quad ; \quad \mathbf{M}_{dyn O} = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t \quad ; \quad E_{cin} = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} \, dv_t$$

Par ailleurs, les efforts extérieurs sur un domaine matériel (forces extérieures à distance et forces extérieures de contact) sont décrits avec des densités respectivement volumiques et surfaciques. La résultante, le moment résultant en  $O$  et la puissance des efforts extérieurs s'écrivent :

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{f}_{ext E}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{Q}_t^m} \mathbf{f}_E^s \, ds_t \quad (3.6)$$

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{ext E}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{Q}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^s \, ds_t \quad [\text{convention 3.7 p. 29}] \quad (3.7)$$

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext E}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{Q}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^s \, ds_t \quad (3.8)$$

Les trois théorèmes généraux de la mécanique [th. 3.4, th. 3.5 et th. 3.9 p. 29], appliqués à un domaine matériel s'écrivent :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext} \quad ; \quad \mathbf{M}_{dynO} = \mathbf{M}_{extO} \quad ; \quad \frac{d}{dt} E_{cin} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec} \quad (3.9)$$

Selon la manière dont on transforme l'écriture de ces intégrales sur le volume  $\mathcal{D}_t^m$  ou sur la frontière  $\partial \mathcal{D}_t^m$ , on obtient différentes expressions des trois théorèmes généraux pour un domaine matériel de milieu continu.

### 3.4.1 Théorème de la résultante dynamique sur un domaine matériel

#### Expressions de la résultante des efforts extérieurs sur un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_{extE}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_E^s ds_t \quad [\text{éq. (3.6) p. 35}] \quad (3.10)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_{extE}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad [\text{éq. (3.5) p. 34}]$$

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{f}_{extE}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) dv_t \quad (\text{théorème de la divergence}) \quad (3.11)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f}_{extL}^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{f}_L^s K_{sL} ds_0 \quad (\text{ch. var. de éq. (3.10)})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f}_{extL}^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} K_{sL} ds_0 \quad (\text{cinématique : } \mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f}_{extL}^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \quad (\text{cinématique : } K_s = K_v \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|)$$

$$\mathbf{R}_{ext} = \int_{\mathcal{D}_0^m} (\mathbf{f}_{extL}^v K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) dv_0 \quad (\text{théorème de la divergence}) \quad (3.12)$$

#### Expressions de la résultante dynamique d'un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{\mathbf{v}}_E dm \quad (\text{définition de l'accélération}) \quad (3.13)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E dm \quad [\text{éq. (2.14) p. 23}]$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E dv_t \quad (dm = \rho_E dv_t)$$

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_E \mathbf{v}_E) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad [\text{éq. (1.5) p. 12}] \quad (3.14)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathbf{R}_{dyn} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\gamma}_L dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 \quad [\text{éq. (2.12) p. 23}] \quad (3.15)$$

En écrivant l'égalité :  $\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext}$  et en choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes, on écrit le théorème de la résultante dynamique pour un domaine matériel sous les différentes formes que l'on peut trouver dans la littérature.

### 3.4.2 Théorème du moment dynamique sur un domaine matériel

#### Expressions du moment résultant des efforts extérieurs sur un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{ext E}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^s ds_t \quad [\text{éq. (3.7) p. 35}] \quad (3.16)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{ext E}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge (\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad [\text{éq. (3.5) p. 34}]$$

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{ext E}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad (\text{produit vectoriel écrit avec } \mathbf{H}) \quad (3.17)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{ext E}^v + \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}_E)) \right) dv_t \quad (\text{théorème de la divergence})$$

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}_{ext E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \right) dv_t \quad (\text{développement de la divergence}) \quad (3.18)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange,  $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$  où  $\mathbf{f}$  est la description de Lagrange des positions actuelles (description de Lagrange du mouvement) :

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f} \wedge \mathbf{f}_{ext L}^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{H} : (\mathbf{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} K_{sL} ds_0 \quad (\text{ch. var. de éq. (3.17)})$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f} \wedge \mathbf{f}_{ext L}^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{H} : (\mathbf{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \quad (K_s = K_v \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{f} \wedge \mathbf{f}_{ext L}^v K_{vL} + \mathbf{div}_L (K_{vL} \mathbf{H} : (\mathbf{f} \otimes \boldsymbol{\sigma}_L) \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right) dv_0 \quad (\text{th. de la divergence})$$

$$\mathbf{M}_{ext O} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{f} \wedge (\mathbf{f}_{ext L}^v + \mathbf{div}_L (K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_L \right) K_{vL} dv_0 \quad (3.19)$$

#### Expressions du moment dynamique d'un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\mathbf{M}_{dyn O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( (\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) \cdot -\mathbf{v}_E \wedge \mathbf{v}_E \right) dm \quad (3.20)$$

$$= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E dm = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E dv_t \quad [\text{éq. (2.14) p. 23}]$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad [\text{éq. (1.17) p. 17}]$$

$$\mathbf{M}_{dyn O} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{x}_t \wedge \frac{\partial}{\partial t} (\rho_E \mathbf{v}_E) dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{n}_t) ds_t \quad \left( \frac{\partial \mathbf{x}_t}{\partial t} = \mathbf{v}_E \right) \quad (3.21)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange,  $\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, t)$  où  $\mathbf{f}$  est la description de Lagrange des positions actuelles (description de Lagrange du mouvement) :

$$\mathbf{M}_{dyn O} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \mathbf{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{f} \wedge \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 \quad [\text{éq. (2.12) p. 23}] \quad (3.22)$$

En écrivant l'égalité :  $\mathbf{M}_{dyn O} = \mathbf{M}_{ext O}$  et en choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes, on écrit le théorème du moment dynamique pour un domaine matériel sous les différentes formes que l'on peut trouver dans la littérature.

### 3.4.3 Théorème de la puissance cinétique sur un domaine matériel

#### Expressions de la puissance des efforts extérieurs sur un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext}^{mec} &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext E}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_E^s ds_t \quad [\text{éq. (3.8) p. 35}] \\ \mathcal{P}_{ext}^{mec} &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext E}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad [\text{éq. (3.5) p. 34}] \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext E}^v + \text{div}_E(\mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E) \right) dv_t \quad (\text{théorème de la divergence})$$

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_{ext E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \right) dv_t \quad (\text{dévelop. de la divergence}) \quad (3.24)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{ext}^{mec} &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_{ext L}^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|} K_{sL} ds_0 \quad (\text{ch. var. de (3.23)}) \\ &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_{ext L}^v K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \quad (K_s = K_v \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|) \\ &= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_{ext L}^v K_{vL} + \text{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right) dv_0 \quad (\text{th. de la divergence}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{f}_{ext L}^v K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + K_{vL} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \mathbf{grad}_L^T \mathbf{v}_L \right) dv_0$$

$$= \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{f}_{ext L}^v K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + K_{vL} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}} \right) dv_0$$

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{v}_L \cdot (\mathbf{f}_{ext L}^v K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})) + K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L : (\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \right) dv_0 \quad (3.26)$$

#### Expressions de la puissance cinétique d'un domaine matériel :

Si les champs sont décrits par la méthode d'Euler :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{cin}^{mec} &= \frac{dE_{cin}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dv_t = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{\mathbf{v}_E^2}{2} dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{(\mathbf{v}_E^2)'}{2} dm \quad [\text{éq. (2.14) p. 23}] \\ \mathcal{P}_{cin}^{mec} &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv_t \end{aligned} \quad (3.27)$$

Si les champs sont décrits par la méthode de Lagrange :

$$\mathcal{P}_{cin}^{mec} = \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{v}_L \cdot \boldsymbol{\gamma}_L dv_0 \quad (3.28)$$

Le théorème de la puissance cinétique permet donc d'évaluer la puissance mécanique des efforts intérieurs dans un domaine matériel de milieu continu :

$$\mathcal{P}_{int}^{mec}(\mathcal{D}_t^m, t) = \mathcal{P}_{cin}^{mec}(\mathcal{D}_t^m, t) - \mathcal{P}_{ext}^{mec}(\mathcal{D}_t^m, t) \quad [\text{éq. (3.9) p. 36}] \quad (3.29)$$

En choisissant l'une des expressions précédentes pour chacun des termes  $\mathcal{P}_{cin}^{mec}$  et  $\mathcal{P}_{ext}^{mec}$ , on écrit les différentes expressions de la puissance mécanique des efforts intérieurs  $\mathcal{P}_{int}^{mec}$  pour un domaine matériel que l'on peut trouver dans la littérature.

### 3.5 Conséquences locales des théorèmes généraux

Les résultats qui suivent sont les conséquences locales des trois théorèmes généraux énoncés pour un domaine matériel dans la section précédente. Avant de les déduire, il convient de préciser quelques définitions sur les forces à distance.

#### 3.5.1 Champs de forces à distance

- **Hypothèse 3.17** – Les seules forces à distance considérées dans ce cours se limitent aux forces gravitationnelles et électrostatiques <sup>(25)</sup>.
- **Définition 3.18** – **Champ de forces volumiques à distance.** On appelle champ de forces volumiques à distance la *force volumique* (unité :  $\text{N}\cdot\text{m}^{-3}$ ) que *tout l'univers* exerce (par gravitation ou électrostatique) sur chacune de ses particules. On le note  $\mathbf{f}_0^v(P, t)$ .

Bien noter que le champ de forces volumiques  $\mathbf{f}_0^v(P, t)$  existe indépendamment de toute définition d'un domaine.

Lorsque l'on considère un domaine  $\mathcal{D}$  (matériel ou géométrique), les particules de ce domaine subissent ces forces volumiques à distance  $\mathbf{f}_0^v(P, t)$ . Puisque les théorèmes généraux de la mécanique s'expriment avec les efforts mécaniques *d'origine extérieure*, il faut distinguer dans les forces volumiques à distance celles qui sont exercées par les particules extérieures à  $\mathcal{D}$  et celles qui sont exercées par les particules intérieures  $\mathcal{D}$ . Cette distinction dépend du domaine  $\mathcal{D}$  considéré car chaque domaine définit son propre intérieur et son propre extérieur.

- **Notations 3.19** –
  - Le champ des forces volumiques à distance dû à l'extérieur d'un domaine et agissant sur les particules du domaine a été noté  $\mathbf{f}_{ext}^v(P, t)$  ;
  - Le champ des forces volumiques à distance dû à tout l'univers agissant sur toute particule a été noté  $\mathbf{f}_0^v(P, t)$  ;
  - Le champ des forces volumiques à distance dû aux particules intérieures à un domaine et agissant sur les particules du domaine sera noté  $\mathbf{f}_{int}^v(P, t)$ .

Par définition, en toute particule  $P$  d'un domaine, on a donc :

$$\mathbf{f}_0^v(P, t) = \mathbf{f}_{int}^v(P, t) + \mathbf{f}_{ext}^v(P, t) \quad (3.30)$$

#### 3.5.2 Équation de mouvement

Dans cette sous-section, on déduit les conséquences locales du théorème de la résultante dynamique :  $\mathbf{R}_{dyn} = \mathbf{R}_{ext}$ .

- **Théorème 3.20** – **Équation de mouvement.** Le théorème de la résultante dynamique sur un domaine matériel actuel  $\mathcal{D}_t^m$  est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0^v = \text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_0^m \quad \text{en toute particule et à tout instant.} \quad (3.31)$$

<sup>(25)</sup> Relire la note 10 [p. 30] à propos des actions magnétiques.



**Démonstration** – En prenant l'expression (3.11) [p. 36] pour la résultante des efforts extérieurs et l'expression (3.13) [p. 36] pour la résultante dynamique (on choisit les expressions sans intégrale de frontière), le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{ext E}^v) \, dv_t \quad (3.32)$$

où  $\mathbf{f}_{ext}^v$  est le champ des forces volumiques à distance exercé sur les particules du domaine actuel par l'*extérieur actuel* du domaine matériel  $\mathcal{D}_t^m$ . La valeur de ce champ dépend donc du domaine matériel actuel car la définition de l'extérieur du domaine dépend du domaine<sup>(26)</sup>. Le lemme fondamental [th. 1.10 p. 16] n'est donc pas utilisable pour obtenir une équation locale à partir de l'équation (3.32) car dans son intégrande, la valeur du champ  $\mathbf{f}_{ext E}^v$  dépend de la définition du domaine matériel.

D'après le corollaire 3.8 [p. 29] on peut écrire que :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{f}_{int E}^v \, dv_t = \mathbf{0}$$

où  $\mathbf{f}_{int}^v$  est la densité volumique des actions à distance actuelles des particules *intérieures* au domaine matériel sur la particule  $P$ . En additionnant cette intégrale nulle à l'équation (3.32) [p. 40], il vient :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \underbrace{\mathbf{f}_{ext E}^v + \mathbf{f}_{int E}^v}_{\mathbf{f}_{0E}^v}) \, dv_t \quad [\text{éq. (3.30) p. 39}]$$

où le champ  $\mathbf{f}_{0}^v$  est un champ défini quel que soit le domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  [déf. 3.18 p. 39]. Le lemme fondamental [th. 1.10 p. 16] est alors applicable et on en déduit le résultat. Dans l'équation (3.31) [p. 39], on a supprimé les indices  $E$  inutiles car, par définition,  $\boldsymbol{\Psi}_E(\mathbf{x}_t, t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\mathbf{x}_0, t) = \boldsymbol{\Psi}(P, t)$ .

La démonstration de la réciproque se fait ainsi :

$$\begin{aligned} \rho \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0^v &\Rightarrow \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{0E}^v) \, dv_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{ext E}^v + \mathbf{f}_{int E}^v) \, dv_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^m} (\mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_{ext E}^v) \, dv_t \quad [\text{corollaire 3.8 p. 29}] \end{aligned}$$

L'équation de mouvement (3.31) [p. 39] est donc équivalente au théorème de la résultante dynamique pour un domaine matériel.

**Remarques** – Dans bien des cours<sup>(27)</sup>, on fait la confusion entre le champ de forces volumiques à distance *due à l'extérieur du domaine*  $\mathbf{f}_{ext}^v$  et le champ de forces volumiques à distance  $\mathbf{f}_0^v$  *due à l'univers entier* (intérieur et extérieur du domaine d'étude). L'argument habituellement avancé est que leur différence  $\mathbf{f}_{int}^v$  est négligeable. Cependant, si l'on néglige  $\mathbf{f}_{int}^v$ , le lemme fondamental [th. 1.10 p. 16] n'est pas applicable car contrairement au champ de forces à distance  $\mathbf{f}_0^v$ , la valeur du champ  $\mathbf{f}_{ext}^v$  dépend du domaine d'intégration. Pour établir correctement l'équation locale, il est donc indispensable ne pas négliger les actions à distance intérieures.

Dans d'autres cours, on préfère démontrer l'équation (3.31) [p. 39] en appliquant le théorème de la résultante dynamique sur un « petit volume » parallélépipédique de volume «  $dv$  ». Le terme  $\rho \boldsymbol{\gamma}$  est une quantité d'accélération par unité de volume, le terme  $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}$  est « interprété » comme la limite de la résultante des forces de contact par unité de volume s'appliquant sur les frontières du « petit volume » et  $\mathbf{f}_0^v$  comme des forces à distance par unité de volume extérieures au « petit volume ». En dépit du caractère quelque peu laborieux et inélégant de ce type de démonstration, on voit bien que le terme  $\mathbf{f}_0^v$  représente bien les forces de volume à distance exercées par tout l'univers sur le « petit volume ».

Dans la pratique, la confusion  $\mathbf{f}_{ext}^v \simeq \mathbf{f}_0^v$  n'est généralement pas grave car dans la plupart des problèmes courants, le champ  $\mathbf{f}_{int}^v$  dû à l'autogravitation et aux éventuelles forces électrostatiques internes est

<sup>(26)</sup> Pour rappeler cette dépendance, on devrait le noter (lourdement)  $\mathbf{f}_{ext}^v(\mathcal{D}_t^m)$ .

<sup>(27)</sup> Y compris dans des versions précédentes de ce cours !

généralement négligeable. Toutefois, il n'est pas interdit de considérer des domaines matériels de masse importante<sup>(28)</sup> dans lesquels négliger la gravitation interne  $\mathbf{f}_{int}^v$  serait une faute grave.

**Écritures « lagrangiennes »** – En prenant l'expression (3.12) [p. 36] pour la résultante des efforts extérieurs et l'expression (3.15) [p. 36] pour la résultante dynamique, le théorème de la résultante dynamique s'écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L K_{vL} \boldsymbol{\gamma}_L \, dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \left( \mathbf{f}_{extL}^v K_{vL} + \mathbf{div}_L(K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) \right) dv_0$$

En suivant le même raisonnement que précédemment, on en déduit l'équation différentielle<sup>(29)</sup> :

$$\rho K_v \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{f}_0^v K_v + \mathbf{div}_L(K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \quad (3.33)$$

$$\rho_0 \boldsymbol{\gamma} = \rho_0 \mathbf{f}_0^m + \mathbf{div}_L(K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \quad (K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \text{ et } \mathbf{f}_0^v = \rho \mathbf{f}_0^m) \quad (3.34)$$

où  $K_v = \det \mathbf{F}$  est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont le domaine de référence est  $\mathcal{D}_0^m$ <sup>(30)</sup> et où  $\rho_0$  est la masse volumique *initiale* ( $\rho_0(P) = \rho(P, t_0)$ ).

Une autre expression « lagrangienne » sans « tenseur des contraintes » artificiel (voir la remarque qui suit), est déduite directement de l'équation (3.31) :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{grad}_L \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{F}^{-T} + \rho \mathbf{f}_0^m \quad [\text{éq. (2.6) p. 21}] \quad (3.35)$$

C'est cette dernière expression qui apparaîtra automatiquement dans certaines méthodes numériques de résolution des problèmes de mécanique des solides déformables quand on voudra ramener, par changement de variables, des intégrales sur le domaine matériel actuel  $\mathcal{D}_t^m$  (inconnu car déformé) à des intégrales sur le domaine matériel de référence non déformé connu  $\mathcal{D}_0^m$ .

**Pseudo « tenseurs des contraintes »** – Pour forcer une ressemblance entre l'équation (3.34) [p. 41] et l'équation de mouvement (3.31) [p. 39], le groupement de termes  $\boldsymbol{\Pi} = K_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}$  qui apparaît en argument de la divergence lagrangienne de l'équation (3.34) [p. 41] est souvent dénommé premier « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff (ou encore de Boussinesq). On peut donner une « interprétation » à ce tenseur : le vecteur  $\boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{n}_0$  est la force de contact *actuelle* par unité de surface *de référence* sur une facette matérielle dont la direction *de référence* est  $\mathbf{n}_0$ <sup>(31)</sup>. Contrairement au tenseur des contraintes (de Cauchy)  $\boldsymbol{\sigma}$ , le tenseur  $\boldsymbol{\Pi}$  n'est pas symétrique [th. 3.21 p. 41].

Dans la littérature on trouve encore d'autres pseudo « tenseurs des contraintes » : le tenseur de Kirchhoff :  $\boldsymbol{\tau} = K_v \boldsymbol{\sigma}$  et le second tenseur de Piola-Kirchhoff :  $\boldsymbol{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Pi}$ . Ces deux tenseurs sont symétriques. Ces groupements de termes ne sont nommés que parce qu'ils apparaissent dans certains textes de mécanique des solides déformables, mais ils n'ont pas de signification physique. Aucun de ces pseudo « tenseurs des contraintes » ne sera utile dans la suite. *Lorsque l'on parlera de tenseur des contraintes, il s'agira toujours du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  défini par le théorème 3.13 [p. 33].*

### 3.5.3 Symétrie du tenseur des contraintes

Dans cette sous-section, on déduit les conséquences locales du théorème du moment dynamique  $\mathbf{M}_{dynO} = \mathbf{M}_{extO}$ .

- **Théorème 3.21 – Symétrie du tenseur des contraintes.** Le théorème du moment dynamique implique la symétrie du tenseur des contraintes.

<sup>(28)</sup> Une planète gazeuse par exemple.

<sup>(29)</sup> On a enlevé les indices  $L$  inutiles car par définition  $\boldsymbol{\Psi}_E(\mathbf{x}_t, t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\mathbf{x}_0, t) = \boldsymbol{\Psi}(P, t)$ .

<sup>(30)</sup> Voir section 4.5.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

<sup>(31)</sup> On divise donc une force *actuelle* par une aire à l'instant de référence  $t_0$  !

**Démonstration** – En prenant l’expression (3.18) [p. 37] pour le moment en  $O$  des forces extérieures et l’expression (3.20) [p. 37] pour le moment dynamique en  $O$  (on choisit les expressions sans intégrales de frontière), le théorème du moment dynamique s’écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}_{ext E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \right) dv_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}_{ext E}^v + \mathbf{f}_{int E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \right) dv_t \quad [\text{corollaire 3.8 p. 29}] \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}_{0E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \right) dv_t \end{aligned}$$

En tenant compte de l’équation de mouvement (3.31) [p. 39], il reste :

$$\mathbf{0} = \int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma}_E \, dv_t$$

En utilisant le lemme 1.10 [p.16], on en déduit :  $\mathbf{H} : \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$  en toute particule et à tout instant. Le tenseur d’orientation  $\mathbf{H}$  étant complètement antisymétrique, cette égalité implique<sup>(32)</sup> la symétrie du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ .

**Remarques** – Cette conclusion n’est valable que si les actions mécaniques extérieures et intérieures sont modélisables par des densités volumiques de forces *sans densités volumiques de moments* [note 10 p. 30]. Dans le cas contraire, le théorème du moment dynamique contient des moments supplémentaires qui invalident la symétrie du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ .

D’autre part, on laisse le soin au lecteur de vérifier que l’on pouvait aussi bien déduire la symétrie du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  à partir de l’expression (3.19) [p. 37] pour le moment en  $O$  des forces extérieures et l’expression (3.22) [p. 37] pour le moment dynamique en  $O$  (expressions avec les descriptions de Lagrange des champs).

Le tenseur des contraintes actuel  $\boldsymbol{\sigma}$  étant symétrique, il a donc 3 valeurs propres réelles  $\sigma_1(P, t)$ ,  $\sigma_2(P, t)$  et  $\sigma_3(P, t)$  (éventuellement confondues) et des espaces propres associés à ces valeurs propres. On peut donc poser les définitions suivantes :

- **Définition 3.22 – Contraintes principales.** Les valeurs propres du tenseur des contraintes actuel  $\boldsymbol{\sigma}$  sont appelées contraintes principales actuelles.
- **Définition 3.23 – Directions principales des contraintes.** Les directions propres du tenseur des contraintes actuel  $\boldsymbol{\sigma}$  sont appelées directions principales actuelles des contraintes.
- **Propriété 3.24 –** En une particule  $P$ , les facettes matérielles dont la direction actuelle de la normale unitaire  $\mathbf{n}_t$  coïncide avec une direction principale des contraintes, ont une contrainte tangentielle nulle et la contrainte normale est égale à la contrainte principale actuelle.

**Démonstration** – Si la direction actuelle de la normale unitaire à une facette  $\mathbf{n}_t$  coïncide avec une direction propre associée à la valeur propre  $\sigma_i$ , alors la contrainte pour cette facette matérielle est :

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t = \sigma_i \mathbf{n}_t \quad (\text{définition des valeurs propres et des vecteurs propres})$$

La contrainte normale pour cette facette matérielle [déf. 3.15 p. 34] est donc :  $c_N = \mathbf{c} \cdot \mathbf{n}_t = \sigma_i$  et la contrainte tangentielle [déf. 3.16 p. 35] est  $\mathbf{c}_T = \mathbf{c} - c_N \mathbf{n}_t = \mathbf{0}$ .

- Si les trois contraintes principales actuelles sont distinctes, il n’existe en une particule  $P$  que trois facettes matérielles orthogonales entre elles, dont les contraintes sont purement normales, toutes les autres facettes matérielles autour de  $P$  ont une contrainte tangentielle non nulle ;

<sup>(32)</sup> Th. 1.42 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l’étude des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

- si deux contraintes principales sont confondues, il existe une infinité de facettes matérielles dont les contraintes sont purement normales : leurs normales unitaires actuelles sont dans un plan propre du tenseur des contraintes actuel ;
- si les trois contraintes principales actuelles sont égales (le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est sphérique), alors toutes les facettes matérielles autour de  $P$  ont une contrainte tangentielle nulle.

**Représentation de Mohr du tenseur des contraintes** – Le tenseur des contraintes étant symétrique, il est susceptible d'être représenté graphiquement avec la représentation de Mohr<sup>(33)</sup>. Cette représentation graphique montre que la contrainte normale actuelle et la norme de la contrainte tangentielle actuelle pour une facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_i$  quelconque ne peuvent pas prendre des valeurs quelconques indépendantes : le point de coordonnées  $(c_N, \|\mathbf{c}_T\|)$  est nécessairement à l'intérieur du tricerclé de Mohr. En particulier, si on ordonne les contraintes principales  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ , la norme de la contrainte tangentielle et la contrainte normale de toutes les facettes matérielles autour d'une particule sont soumises aux inégalités suivantes :

$$0 \leq \|\mathbf{c}_T\| \leq \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \quad \text{et} \quad \sigma_3 \leq c_N \leq \sigma_1$$

### 3.5.4 Puissance volumique des efforts intérieurs

Dans cette sous-section, on déduit les conséquences locales du théorème de la puissance cinétique :  $\mathcal{P}_{cin} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec}$ .

- **Théorème 3.25 – Densité volumique de puissance des efforts intérieurs.** La puissance des efforts intérieurs dans un milieu continu est une grandeur extensive. La densité volumique de puissance des efforts intérieurs (unité :  $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$ ) est :

$$\mathcal{P}_{int}^{v\,mec}(P,t) = \underbrace{-\boldsymbol{\sigma}(P,t) : \mathbf{D}(P,t)}_{\mathcal{P}_{int}^{cont}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v}_{\mathcal{P}_{int}^{dist}} \quad (3.36)$$

où  $\mathbf{D}$  est le tenseur des taux de déformation et où  $\mathbf{f}_{int}^v$  est le champ des forces volumiques à distance *intérieures*.

**Démonstration** – En utilisant l'expression de la puissance cinétique (3.27) [p.38] et l'expression de la puissance des efforts extérieurs (3.24) [p. 38] (on choisit les expressions sans intégrale de frontière), la puissance des efforts intérieurs dans un domaine matériel est donnée par le théorème de la puissance cinétique [éq. (3.29) p. 38] :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int}^{mec} &= \int_{\mathcal{Q}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t - \int_{\mathcal{Q}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_{ext E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \right) dv_t \\ &= \int_{\mathcal{Q}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t - \int_{\mathcal{Q}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_{int E}^v - \mathbf{f}_{int E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \right) dv_t \quad [\text{éq. (3.30)}] \end{aligned}$$

Compte tenu de l'équation de mouvement (3.31) [p. 39], il reste :

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = - \int_{\mathcal{Q}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \, dv_t + \int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int E}^v \, dv_t$$

Enfin, compte tenu de la symétrie du tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{int}^{mec} &= - \int_{\mathcal{Q}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{sym grad}_E \mathbf{v} \, dv_t + \int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int E}^v \, dv_t \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{Q}_t^m} (-\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E) \, dv_t}_{\mathcal{P}_{int}^{cont}} + \underbrace{\int_{\mathcal{Q}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int E}^v \, dv_t}_{\mathcal{P}_{int}^{dist}} \quad (3.37) \end{aligned}$$

<sup>(33)</sup> Cette représentation graphique des tenseurs symétriques est présentée en section 4.5 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

La puissance des efforts intérieurs *de contact* dans un domaine matériel  $\mathcal{P}_{int}^{v cont}$  est une intégrale sur le domaine matériel  $\mathcal{D}_t^m$ . Elle est donc une grandeur extensive dont la densité volumique est :

$$\mathcal{P}_{int}^{v cont} = -\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$$

De même, la puissance mécanique des efforts intérieurs *à distance*  $\mathcal{P}_{int}^{v cont}$  est une intégrale sur le domaine matériel  $\mathcal{D}_t^m$ . Elle est donc une grandeur extensive dont la densité volumique est :

$$\mathcal{P}_{int}^{v dist} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v$$

La densité volumique des efforts intérieurs de contact et à distance est donc :

$$\mathcal{P}_{int}^{v mec} = \mathcal{P}_{int}^{v cont} + \mathcal{P}_{int}^{v dist} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v \quad (3.38)$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier qu'on aboutit au même résultat en utilisant les expressions avec des descriptions de Lagrange (3.26) et (3.28) [p. 38].

- **Hypothèse 3.26** – La puissance volumique des efforts *intérieurs à distance*  $\mathcal{P}_{int}^{v dist} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v$  est souvent négligée :

$$\mathcal{P}_{int}^{v dist} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{int}^{v mec}(P, t) \simeq -\boldsymbol{\sigma}(P, t) : \mathbf{D}(P, t) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{int}^{v mec} \simeq \int_{\mathcal{D}_t^m} -\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \, dv_t$$

**Commentaire** – Le terme négligé  $\mathcal{P}_{int}^{v dist} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v$  est la puissance mécanique volumique nécessaire pour mouvoir une particule dans le champ d'autogravitation (ou le champ auto-électrostatique si les particules ont une charge électrique) à l'intérieur du domaine matériel considéré. Cette approximation est acceptable si la taille du domaine est petite (efforts intérieurs à distance  $\mathbf{f}_{int}^v$  faibles) et si les vitesses sont modérées.

Toutefois, dans l'étude de la mécanique d'une planète gazeuse ce terme ne peut pas être négligé car les forces volumiques d'autogravitation sont importantes. De même, dans l'étude d'une explosion ce terme peut devenir non négligeable car les vitesses sont grandes.

### 3.5.5 Résumé des conséquences locales des théorèmes généraux

Les trois théorèmes généraux de la mécanique, énoncés pour un domaine matériel quelconque, ont permis d'aboutir aux conclusions locales suivantes :

1. le théorème de la résultante dynamique est équivalent à l'équation de mouvement ;
2. le théorème du moment dynamique implique la symétrie du tenseur des contraintes ;
3. le théorème de la puissance cinétique conduit à l'évaluation de la puissance des efforts intérieurs dans un domaine matériel de milieu continu, et à sa densité volumique.

## 3.6 Théorèmes généraux pour un domaine géométrique

En mécanique générale, les théorèmes généraux rappelés en section 3.1.2 [p. 29] sont établis pour des systèmes matériels, c'est-à-dire toujours constitués des mêmes particules. En mécanique des milieux continus, les systèmes matériels sont des domaines matériels [déf. 1.1 p. 9].

Dans cette section, on va écrire les conséquences des théorèmes généraux pour des domaines géométriques [déf. 1.3 p. 10].

On considère un domaine géométrique  $\mathcal{D}^g$  dont le domaine actuel <sup>(34)</sup> est  $\mathcal{D}_t^g$ .

<sup>(34)</sup> Les frontières sont éventuellement en mouvement, mais ce mouvement est *a priori* différent des particules qui s'y trouvent.

### 3.6.1 Théorème de la résultante dynamique pour un domaine géométrique

En intégrant l'équation de mouvement sur un domaine géométrique, il vient :

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}_{0E}^v \, dv_t \\
 &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}_{extE}^v \, dv_t \quad [\text{corollaire 3.8 p. 29}] \\
 \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t}_{\mathbf{R}_{dyn}} &= \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}_E^s \, ds_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}_{extE}^v \, dv_t}_{\mathbf{R}_{ext}} \quad (\text{th. de la divergence et } \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t = \mathbf{f}^s) \quad (3.39)
 \end{aligned}$$

Le théorème de la résultante dynamique pour un domaine géométrique traversé par un milieu continu s'exprime donc exactement de la même manière que pour un domaine matériel.

**Interprétation de  $\mathbf{R}_{dyn}$**  – On rappelle que la *quantité de mouvement* ou *impulsion*, traditionnellement notée  $\mathbf{p}$ , d'un point matériel de masse  $m$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v}$  est le vecteur défini par :  $\mathbf{p}(P) = m(P)\mathbf{v}(P)$ . Comme la quantité d'accélération, cette grandeur est extensive [déf. 1.5 p. 11]. On peut donc définir une densité massique ou volumique de  $\mathbf{p}$  :

$$\mathbf{p}^m = \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{p}^v = \rho \mathbf{v}$$

La résultante dynamique peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{dyn} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \boldsymbol{\gamma}_E \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \dot{\mathbf{v}}_E \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \dot{\mathbf{p}}_E^m \, dm \\
 &= \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{p}_E^m \, dm}_{\mathbf{p}(\mathcal{D}_t^g, t)} - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{p}_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \quad [\text{éq. (2.16) p. 24 avec } \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{p}]
 \end{aligned}$$

Le théorème de la résultante dynamique [éq. (3.39) p. 45] s'écrit donc encore :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{p}(\mathcal{D}_t^g, t) = - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{p}_E^m (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t}_{\boldsymbol{\Phi}_p} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}_{extE}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{f}_E^s \, ds_t}_{\mathbf{R}_{ext}} \quad (3.40)$$

où  $\boldsymbol{\Phi}_p$  est le *flux convectif entrant* [déf. 1.8 p. 15] d'impulsion (quantité de mouvement) à travers la frontière.

On en déduit une expression équivalente du théorème de la résultante dynamique (un corollaire) : la dérivée temporelle de l'impulsion d'un domaine géométrique  $\mathbf{p}(\mathcal{D}_t^g, t)$  est égale à la somme du flux convectif d'impulsion entrant par la frontière<sup>(35)</sup> et de la résultante des efforts extérieurs à distance et de contact. En comparant l'équation (3.40) [p. 45] avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive pour un domaine géométrique [éq. (1.15) p. 16], on peut dire que cette équation est un « bilan d'impulsion » pour le domaine géométrique où  $\boldsymbol{\tau}_p = \mathbf{f}_{ext}^v + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}$  serait un « taux de production volumique interne d'impulsion ».

L'équation (3.40) [p. 45] est utile en mécanique des fluides *lorsque le mouvement du fluide est stationnaire*. Le terme de gauche est alors nul. On constate qu'il suffit de connaître les vitesses seulement à la frontière d'un domaine géométrique pour en déduire la résultante des efforts extérieurs (à distance et de contact) sur le domaine géométrique. Les actions à distance se réduisent la plupart du temps à la pesanteur dont la résultante est facile à évaluer (le poids du fluide dans le domaine géométrique). Or la résultante des actions extérieures de contact est l'opposé de la résultante de l'action du fluide sur les frontières du domaine géométrique. *Dans un mouvement stationnaire*, en ne connaissant que les vitesses à la frontière du domaine géométrique, on peut donc calculer la résultante des actions du fluide sur ses frontières, sans toutefois connaître sa distribution sur la frontière.

<sup>(35)</sup> Dans certains ouvrages, le flux convectif d'impulsion est appelé « débit de quantité de mouvement ».

### 3.6.2 Théorème du moment dynamique pour un domaine géométrique

L'équation de mouvement (3.31) [p. 39] permet d'écrire :

$$\rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E = \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{0E}^v$$

En intégrant sur un domaine géométrique, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{0E}^v \, dv_t \quad (3.41)$$

$$\underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t}_{\mathbf{M}_{dyn O}} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} \, dv_t}_{\mathbf{A}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{ext E}^v \, dv_t}_{\mathbf{M}_{ext O}^{dist}} \quad [\text{corollaire 3.8 p. 29}] \quad (3.42)$$

L'intégrande de l'intégrale  $\mathbf{A}$  peut s'écrire sous la forme d'une divergence :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E &= \mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{H} : (\mathbf{div}_E (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma}) - \mathbf{grad}_E \mathbf{x}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}_E) \\ &= \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) - \mathbf{H} : (\mathbf{G} \cdot \boldsymbol{\sigma}_E) \\ \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E &= \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) \quad (\text{symétrie de } \boldsymbol{\sigma}) \end{aligned}$$

L'intégrale  $\mathbf{A}$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{div}_E (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) \, dv_t = \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} (\mathbf{H} : (\mathbf{x}_t \otimes \boldsymbol{\sigma})) \cdot \mathbf{n} \, ds_t = \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge (\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}) \, ds_t \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^s \, ds_t = \mathbf{M}_{ext O}^{cont} \end{aligned} \quad (3.43)$$

L'intégrale  $\mathbf{A}$  de l'équation (3.42) [p. 46] est donc le moment en  $O$  des actions extérieures de contact actuelles.

En reportant la valeur de  $\mathbf{A}$  dans l'équation (3.42) [p. 46] on obtient :

$$\underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t}_{\mathbf{M}_{dyn O}} = \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}^s \, ds_t}_{\mathbf{M}_{ext O}^{cont}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{ext E}^v \, dv_t}_{\mathbf{M}_{ext O}^{dist}} \quad (3.44)$$

Le théorème du moment dynamique pour un domaine géométrique traversé par un milieu continu s'exprime donc exactement de la même manière que pour un domaine matériel.

**Interprétation de  $\mathbf{M}_{dyn O}$**  – On rappelle que le *moment cinétique*, traditionnellement noté  $\mathbf{L}$ , en un point  $O$  d'un point matériel de masse  $m$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v}$  est le vecteur  $\mathbf{L}(P) = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{p}(P)$ , c'est-à-dire le moment en  $O$  de l'impulsion  $\mathbf{p}$ . De même que le moment dynamique, cette grandeur vectorielle est extensive [déf. 1.5 p. 11]. On peut donc définir une densité massique ou volumique de moment cinétique :

$$\mathbf{L}^m(P) = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{p}^m = \mathbf{OP} \wedge \mathbf{v}(P) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{L}^v(P) = \rho(P) \mathbf{OP} \wedge \mathbf{v}(P)$$

Le moment dynamique en  $O$  peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{dyn O} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \boldsymbol{\gamma}_E \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \dot{\mathbf{v}}_E \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \left( \underbrace{(\mathbf{x}_t \wedge \mathbf{v}_E)}_{\dot{\mathbf{L}}_E^m} - \underbrace{\dot{\mathbf{x}}_t \wedge \mathbf{v}_E}_{\mathbf{0}} \right) \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \dot{\mathbf{L}}_E^m \, dm \\ &= \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{L}_E^m \, dm}_{\mathbf{L}(\mathcal{D}_t^g, t)} - \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{L}_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \quad [\text{éq. (2.16) p. 24 avec } \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{L}] \end{aligned}$$

Le théorème du moment dynamique [éq. (3.44) p. 46] s'écrit donc encore :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}(\mathcal{D}_t^g, t) = - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{L}_E^m (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t}_{\Phi_L} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_{ext E}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{x}_t \wedge \mathbf{f}_E^s \, ds_t}_{\mathbf{M}_{O_{ext}}} \quad (3.45)$$

où  $\Phi_L$  est le flux convectif entrant [déf. 1.8 p. 15] de moment cinétique à travers la frontière.

On en déduit une expression équivalente du théorème du moment dynamique (un corollaire) : la dérivée temporelle du moment cinétique  $\mathbf{L}(\mathcal{D}_t^g, t)$  d'un domaine géométrique est égale à la somme du flux convectif entrant de moment cinétique en  $O$  par la frontière et du moment en  $O$  des efforts extérieurs à distance et de contact.

En comparant l'équation (3.45) [p. 47] avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive pour un domaine géométrique [éq. (1.15) p. 16], on peut dire que cette équation est un « bilan de moment cinétique » pour le domaine géométrique où la quantité  $\boldsymbol{\tau}_L = \mathbf{x}_t \wedge (\mathbf{f}_{ext}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma})$  serait un « taux de production volumique interne de moment cinétique » [éq. (3.43) p. 46].

L'équation (3.45) [p. 47] est très utile en mécanique des fluides *lorsque le mouvement du fluide est stationnaire*. Le terme de gauche est alors nul. On constate qu'il suffit de connaître les vitesses seulement à la frontière d'un domaine géométrique pour en déduire le moment résultant en  $O$  des efforts extérieurs (à distance et de contact) sur le domaine géométrique. Les actions à distance se réduisent la plupart du temps à la pesanteur, dont le moment résultant en  $O$  est facile à évaluer (c'est le moment en  $O$  du poids du fluide appliqué au centre de gravité le domaine géométrique). Or le moment résultant en  $O$  des actions extérieures de contact est l'opposé du moment résultant en  $O$  de l'action du fluide sur les frontières du domaine géométrique. *Dans un mouvement stationnaire*, en ne connaissant que les vitesses à la frontière du domaine géométrique, on peut donc calculer le moment résultant en  $O$  des actions du fluide sur ses frontières, sans toutefois connaître sa distribution sur la frontière.

### 3.6.3 Théorème de la puissance cinétique pour un domaine géométrique

En utilisant la dérivation des intégrales pour les domaines géométriques [éq. (2.16) p. 24] (avec  $\Psi_E^m = \frac{v_E^2}{2}$ ), la puissance cinétique dans le domaine géométrique s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{cin} &= \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{v_E^2}{2} \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{(\dot{v}_E^2)}{2} \, dm + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \frac{v_E^2}{2} (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \\ &= \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t}_{\mathbf{A}} - \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \frac{v_E^2}{2} (\mathbf{v}_E - \mathbf{v}^f) \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t}_{\Phi_{E_{cin}}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

où  $\Phi_{E_{cin}}$  est le flux convectif entrant [déf. 1.8 p. 15] d'énergie cinétique à travers la frontière et où l'intégrale  $\mathbf{A}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0^v) \, dv_t \quad [\text{éq. (3.31) p. 39}] \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^g} (\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_{ext}^v + \mathbf{f}_{int}^v)) \, dv_t \quad [\text{éq. (3.30) p. 39}] \end{aligned}$$



En utilisant l'identité tensorielle<sup>(36)</sup>  $\mathbf{div}(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{grad} \mathbf{v}$ , il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \left( \mathbf{div}_E(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_{ext}^v + \mathbf{f}_{int}^v) \right) dv_t \\
&= \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} (-\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E + \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int}^v) dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext}^v dv_t \quad (\boldsymbol{\sigma} \text{ symétrique}) \\
&= \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext}^s ds_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathcal{P}_{int}^{v \text{ mec}} dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext}^v dv_t \quad [\text{éq. (3.36) p. 43}] \\
&= \mathcal{P}_{int}^{mec}(\mathcal{D}_t^g, t) + \mathcal{P}_{ext}^{mec}(\mathcal{D}_t^g, t)
\end{aligned}$$

Finalement, l'équation (3.46) [p. 47] devient :

$$\mathcal{P}_{cin}(\mathcal{D}_t^g, t) = \mathcal{P}_{int}^{mec}(\mathcal{D}_t^g, t) + \mathcal{P}_{ext}^{mec}(\mathcal{D}_t^g, t) + \Phi_{E_{cin}} \quad (3.47)$$

Pour les domaines géométriques le théorème de la puissance cinétique s'exprime de manière *différente* que pour les domaines matériels [éq. (3.29) p. 38] : il faut tenir compte du flux convectif entrant d'énergie cinétique à travers la frontière.

### 3.7 Formulation intégrale des équations de mouvement

En première lecture, on peut ignorer cette section et continuer en section 3.8 [p. 51] sans nuire à la compréhension de la suite.

Dans cette section, on établit une formulation intégrale équivalente à l'équation différentielle de mouvement locale (3.31) [p. 39]. Cette formulation est utile pour pratiquer certaines méthodes numériques couramment employées dans la résolution numérique des systèmes d'équations différentielles.

Soit  $\mathbf{w}(M)$  un champ vectoriel *quelconque* défini sur la position actuelle  $\mathcal{D}_t$  d'un domaine de milieu continu matériel ou géométrique<sup>(37)</sup>. L'équation de mouvement (3.31) [p. 39] (équation vectorielle) est évidemment équivalente à la proposition *scalaire* suivante :

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{V}_3, \quad \rho \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_0^v$$

En intégrant cette égalité sur le domaine actuel  $\mathcal{D}_t$ , il vient :

$$\forall \mathbf{w}, \quad \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv = \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} dv + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_{0E}^m dv, \quad (3.48)$$

$$= \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{div}_E(\mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dv - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{w} dv + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_{0E}^m dv,$$

$$= \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_{0E}^m dv - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{w} dv,$$

$$\forall \mathbf{w}, \quad \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma}_E dv = \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_E^s ds + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_{0E}^m dv - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{w} dv, \quad (3.49)$$

où dans la dernière ligne (éq. (3.49)), on a utilisé la symétrie du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ .

<sup>(36)</sup> Voir la section 3.7.2 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(37)</sup> Dans cette section, on n'utilise pas de dérivées temporelles d'intégrales, les résultats sont donc valables pour des domaines matériels ou géométriques.

On démontre en analyse fonctionnelle que si cette égalité *scalaire* d'intégrales est vraie *pour tout champ*  $\mathbf{w}$  défini sur  $\mathcal{D}_t$ , alors elle est équivalente à l'équation *différentielle vectorielle* de mouvement (3.31) [p. 39].

**Aperçu de la démonstration** – L'implication a été établie dans le calcul précédent, on n'aborde donc ici que la réciproque.

Soit  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$  l'espace vectoriel des fonctions définies sur  $\mathcal{D}_t$  et de carré intégrable sur  $\mathcal{D}_t$ . L'espace  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$  est un espace de fonctions, dit *espace de Hilbert*, de dimension infinie.

On montre en analyse fonctionnelle que l'intégrale  $\int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{x}) dv_t$  où  $\mathbf{g} \in \mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$  et  $\mathbf{h} \in \mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$ , est un produit scalaire dans  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$ , souvent noté  $\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle$  ou  $\langle \mathbf{g} | \mathbf{h} \rangle$ . L'équation (3.48) s'écrit donc :

$$\forall \mathbf{w} \in \mathbb{H}(\mathcal{D}_t), \quad \int_{\mathcal{D}_t} (\rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} - \rho_E \mathbf{f}_{0E}^m) \cdot \mathbf{w} dv_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} - \rho_E \mathbf{f}_{0E}^m, \mathbf{w} \rangle = 0$$

Le champ vectoriel  $(\rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma} - \rho_E \mathbf{f}_{0E}^m) \in \mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$  étant orthogonal (dans l'espace  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$ ) à tout champ vectoriel arbitraire  $\mathbf{w} \in \mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$ , il est donc nécessairement nul.

**Terminologies :** Dans la littérature spécialisée, la formulation intégrale des équations de mouvement est présentée sous diverses formes :

- L'équation (3.49) [p. 48] est appelée *formulation intégrale* ou encore *formulation variationnelle*<sup>(38)</sup> ou encore *formulation faible*<sup>(39)</sup> des équations de mouvement. Les champs arbitraires  $\mathbf{w}$  sont souvent appelés *fonctions test* ou encore *fonctions de pondération* par les numériciens.
- Si l'on interprète le champ vectoriel arbitraire  $\mathbf{w}$  comme un champ de vitesses arbitraire, il est appelé champ de *vitesses virtuelles*<sup>(40)</sup>. Les termes de l'égalité (3.49) [p. 48] sont alors de la dimension d'une puissance, et le théorème prend le nom de *théorème des puissances virtuelles*.
- Si l'on interprète le champ vectoriel arbitraire  $\mathbf{w}$  comme un champ de déplacements arbitraire, il est appelé champ de *déplacements virtuels*<sup>(41)</sup>. Les termes de l'égalité (3.49) [p. 48] sont alors de la dimension d'un travail, et le théorème prend le nom de *théorème des travaux virtuels*.

**Remarques** – Du fait de son équivalence à l'équation de mouvement (3.31) page 39, la formulation intégrale (3.48) ou (3.49) [p. 48] est présentée dans beaucoup de cours de mécanique des milieux continus comme le principe fondamental (peu intuitif) de la mécanique, afin d'aboutir plus rapidement à l'exposé d'une méthode de résolution numérique<sup>(42)</sup>.

En effet, la formulation intégrale est à la base d'une méthode numérique de résolution *approchée* de systèmes d'équations différentielles : la méthode des éléments finis. L'approximation provient de ce que l'on cherche des solutions, non pas dans l'espace  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$  de tous les champs définis sur  $\mathcal{D}_t$ , mais seulement dans un sous-espace de dimension finie de champs définis sur  $\mathcal{D}_t$  qui sont le plus souvent des champs polynomiaux par morceaux.

<sup>(38)</sup> Ce nom est utilisé par les auteurs qui utilisent un autre principe fondamental de la mécanique : la solution d'un problème de mécanique est le champ défini sur  $\mathcal{D}_t$  qui minimise une certaine intégrale appelée « énergie potentielle ». Pour chercher ce minimum, on utilise le calcul variationnel.

<sup>(39)</sup> Ce nom est plutôt utilisé par les numériciens : cette formulation n'est pas plus faible que l'équation de mouvement, elle lui est équivalente. Elle ne devient « faible » que lorsqu'on limite la recherche du champ solution dans un sous-espace de dimension finie inclus dans  $\mathbb{H}(\mathcal{D}_t)$  (on obtient alors une solution approchée).

<sup>(40)</sup> Souvent noté  $\tilde{\mathbf{v}}$  ou  $\mathbf{v}^*$ .

<sup>(41)</sup> Souvent noté  $\delta \mathbf{u}$

<sup>(42)</sup> Au détriment d'une bonne compréhension de ce que sont les efforts intérieurs.

Par ailleurs, *en mécanique des solides déformables*, les domaines envisagés sont des domaines matériels ; il faut ramener les intégrales de l'équation (3.49) [p. 48] portant sur le domaine matériel actuel  $\mathcal{D}_t^m$  (déformé donc inconnu) à des intégrales sur le domaine matériel de référence  $\mathcal{D}_0^m$  (forme initiale connue). On laisse le soin au lecteur, en utilisant les formules de changement de variables [éq. (1.3) p. 11] (ou bien en suivant la même démarche que précédemment en partant de l'expression lagrangienne de l'équation de mouvement (3.33) [p. 41]) de vérifier que l'expression de ce théorème avec des descriptions de Lagrange des champs s'écrit :

$$\forall \mathbf{w}, \quad \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{w} \cdot \boldsymbol{\gamma}_L \, dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_{0L}^m \, dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{w} \cdot \mathbf{f}_L^s \, dv_0 - \int_{\mathcal{D}_0^m} K_{vL} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \mathbf{grad}_L \mathbf{w} \, dv_0$$

où  $\mathbf{F} = \mathbf{grad}_L \mathbf{x}_t$  est le gradient de la transformation en une particule  $P$  entre les instants  $t_0$  et  $t$ , où  $K_v = \det \mathbf{F}$  est la dilatation volumique actuelle en  $P$  dans une déformation dont le domaine de référence est  $\mathcal{D}_0^m$  et où  $\rho_0$  est la masse volumique en  $P$  à l'instant de référence  $t_0$ .

Les auteurs qui interprètent le champ arbitraire  $\mathbf{w}$  comme la description de Lagrange d'un champ de vitesses virtuelles transforment parfois le dernier terme :

$$\underbrace{K_{vL} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})}_{\boldsymbol{\Pi}_L} : \mathbf{grad}_L \mathbf{w} = \underbrace{K_{vL} \boldsymbol{\sigma}_L}_{\boldsymbol{\tau}_L} : \mathbf{sym}(\mathbf{grad}_L \mathbf{w} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \boldsymbol{\tau}_L : \underbrace{\mathbf{sym grad}_E \mathbf{w}}_{\mathbf{D}^w}$$

où  $\mathbf{D}^w$  serait interprétable comme un « taux de déformation virtuel » par « analogie » avec les vitesses réelles. Les groupements de termes tensoriels du second ordre  $\boldsymbol{\Pi}$  et  $\boldsymbol{\tau}$  ont déjà été commentés dans la remarque *Pseudo* « tenseurs des contraintes » [p. 41].

### Conclusion pour cette section :

L'exposé de cette section était prématuré : la construction d'une formulation intégrale du système d'équations différentielles aux dérivées partielles à résoudre n'est nécessaire qu'au moment de la mise en œuvre de certaines méthodes de résolution numérique du système d'équations différentielles lorsqu'une résolution analytique est inaccessible. La formulation intégrale des équations de mouvement n'a été présentée ici que pour faire le lien avec les textes qui utilisent un « principe virtuel » (travail ou puissance virtuels, selon les goûts) comme principe fondamental de la mécanique et aussi pour montrer que la formulation intégrale (3.49) [p. 48] de l'équation de mouvement (3.31) [p. 39] obtenue ici est identique à celles données dans ces textes.

- *En mécanique des solides déformables*, le domaine étudié est un domaine *matériel* constitué des particules de l'objet étudié [déf. 1.1 p. 9]. La formulation intégrale (3.48) ou (3.49) [p. 48] de l'équation de mouvement (3.31) [p. 39] a été écrite avec des intégrales sur le domaine matériel actuel  $\mathcal{D}_t^m$  inconnu, et donc nécessairement avec une description d'Euler des champs dans les intégrandes [sec. 1.2.2 p. 12]. La description de Lagrange de ces champs apparaît automatiquement lorsque l'on fait les changements de variable [éq. (1.3) p. 11]<sup>(43)</sup> nécessaires pour ramener les intégrales sur le domaine actuel inconnu  $\mathcal{D}_t^m$  à des intégrales sur le domaine de référence connu  $\mathcal{D}_0^m$  (la forme initiale du solide déformable) [Remarques p. 49].
- *En mécanique des fluides*, le domaine d'étude est un domaine *géométrique* [déf. 1.3 p. 10] connu *a priori*. Aucun changement de variable n'est nécessaire et les champs de la solution sont donc décrits par la méthode d'Euler.
- Enfin, *dans un problème de thermomécanique* (solide ou fluide), la formulation intégrale écrite dans cette section est *incomplète* car il faut résoudre non seulement l'équation différentielle vectorielle de mouvement [éq. (3.31) p. 39], mais aussi l'équation scalaire de la chaleur qui sera établie dans l'étude des conséquences locales du principe de la conservation

<sup>(43)</sup> Ces changements de variables sont parfois appelés « équations de transport ».

de l'énergie [éq. (4.10) p. 71] ainsi que l'équation scalaire locale de la conservation de la masse (équation dite « de continuité », [éq. (2.4) p. 20])<sup>(44)</sup>.

Pour la résolution numérique d'un problème de mécanique des milieux continus, il faudra donc reprendre et compléter les raisonnements de cette section afin de construire une formulation intégrale du système *complet* d'équations différentielles aux dérivées partielles<sup>(45)</sup>.

### 3.8 Changements d'observateur

- **Notation 3.27** – Dans cette section, on considère deux observateurs quelconques  $\mathcal{R}$  et  $\tilde{\mathcal{R}}$  en mouvement relatif quelconque. *A priori*, ils ne sont donc pas galiléens. On convient de surmonter d'un «  $\tilde{\phantom{x}}$  » les grandeurs relatives à l'observateur  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Le tenseur (orthogonal) de changement d'observateur actuel de  $\mathcal{R}$  à  $\tilde{\mathcal{R}}$  sera noté  $\mathbf{Q}_t$ .

On rappelle<sup>(46)</sup> que les formules de changement d'observateur de la direction actuelle  $\mathbf{u}_t$  d'une direction matérielle, de la direction actuelle  $\mathbf{n}_t$  de la normale d'une facette matérielle et de toute grandeur actuelle vectorielle  $\mathbf{w}(t)$  objective sont :

$$\tilde{\mathbf{u}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{u}_t \quad ; \quad \tilde{\mathbf{n}}_t = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{n}_t \quad ; \quad \tilde{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{w}(t) \quad (3.50)$$

- **Principe 3.28 – Objectivité des forces de contact.** Les forces extérieures surfaciques actuelles de contact sur la frontière de tout domaine matériel sont des grandeurs vectorielles objectives :

$$\forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}}, \quad \tilde{\mathbf{f}}^s = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{f}^s$$

**Commentaire** – La signification physique de l'objectivité d'une grandeur vectorielle est que la valeur vectorielle actuelle de cette grandeur a « la même position par rapport à la position actuelle de la matière » pour tous les observateurs, ce qui se traduit par l'une de ces deux égalités équivalentes<sup>(47)</sup> :

$$\forall P' \forall P'' \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}}, \quad \tilde{\mathbf{f}}^s(P, t) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{f}^s(P, t), \quad \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}} \Leftrightarrow \mathbf{f}^s(P, t) \cdot (\mathbf{x}'_t - \mathbf{x}''_t) = \tilde{\mathbf{f}}^s(P, t) \cdot (\tilde{\mathbf{x}}'_t - \tilde{\mathbf{x}}''_t)$$

Le principe de l'objectivité des forces de contact a pour conséquence que si un observateur constate que l'extérieur d'un domaine exerce actuellement sur une facette matérielle de la frontière une contrainte *normale* à la frontière actuelle, alors tous les observateurs font la même constatation. De même une contrainte tangentielle actuelle est tangentielle et a la même norme pour tous les observateurs. Le vecteur  $\mathbf{f}^s$  actuel fait donc le même angle avec la facette matérielle actuelle pour tous les observateurs. L'orthogonalité du tenseur de changement d'observateur actuel  $\mathbf{Q}_t$  garantit aussi que tous les observateurs observent aussi la même norme de la contrainte actuelle  $\mathbf{f}^s$ .

En revanche, il n'est pas possible de postuler une objectivité pour les forces à distance massiques  $\mathbf{f}_{ext}^m$  ou volumiques  $\mathbf{f}_{ext}^v$  car les observateurs sont *a priori* en mouvement relatif quelconque. Même si l'un des observateurs  $\mathcal{R}$  est galiléen, l'observateur  $\tilde{\mathcal{R}}$  ne l'est pas *a priori*. Or, tout observateur non galiléen doit inclure dans les forces à distance des forces *fictives*<sup>(48)</sup> d'inertie d'entraînement et de Coriolis non objectives et qui sont particulières à chaque observateur non galiléen. On a donc en général  $\mathbf{f}_{ext}^m \neq \tilde{\mathbf{f}}_{ext}^m$ . La suite montre que seule l'objectivité des forces de contact est nécessaire.

<sup>(44)</sup> Dans la résolution numérique d'un problème de solide déformable, on élimine l'équation différentielle de la conservation de la masse en éliminant le champ inconnu  $\rho(P, t)$  avec la conservation de la masse intégrée (2.8) [p. 22].

<sup>(45)</sup> Curieusement, dans la résolution d'un problème de thermomécanique, il n'est pas d'usage d'« interpréter » le champ scalaire arbitraire en facteur de l'équation de la chaleur comme un champ de « températures virtuelles ».

<sup>(46)</sup> Voir th. 4.9, th. 3.4 et th. 4.24 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

<sup>(47)</sup> Voir la section 3.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

<sup>(48)</sup> C'est-à-dire dont la source n'est pas identifiable.

- **Théorème 3.29 – Objectivité du tenseur des contraintes.** Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$  est un champ matériel tensoriel du second ordre objectif.

**Démonstration** – Les forces extérieures de contact étant objectives [principe 3.28 p. 51], la formule de changement d'observateur des vecteurs contraintes [déf. 3.12 p. 33] est :

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{c} \quad [\text{éq. (3.50)}] \quad (3.51)$$

En appliquant la définition de la contrainte (3.4) [p. 33] pour chaque observateur, l'égalité (3.51) s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{n}_t, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \tilde{\boldsymbol{n}}_t &= \boldsymbol{Q}_t \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_t), \\ \forall \boldsymbol{n}_t, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{n}_t &= \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{n}_t, \quad [\text{éq. (3.50)}] \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{Q}_t &= \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}} &= \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top \end{aligned} \quad (3.52)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur tensorielle du second ordre objective.

**Remarque** – On laisse le soin au lecteur d'établir, s'il le souhaite, les formules de changement d'observateur des pseudo « tenseurs des contraintes »  $\boldsymbol{\Pi}$ ,  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\boldsymbol{S}$  évoqués p. 41. Il en déduira<sup>(49)</sup> que seul le pseudo « tenseur des contraintes »  $\boldsymbol{\tau} = K_v \boldsymbol{\sigma}$  est objectif.

On en déduit aisément qu'une contrainte normale actuelle  $c_N(P, \boldsymbol{n}_t, t) = \boldsymbol{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \boldsymbol{n}_t$  est un scalaire objectif quelle que soit la facette matérielle de normale actuelle  $\boldsymbol{n}_t$  considérée. De même, le vecteur contrainte tangentielle actuelle en une particule pour une facette matérielle de normale actuelle  $\boldsymbol{n}_t$ , ainsi que sa norme sont des grandeurs respectivement vectorielle et scalaire objectives car  $\forall \boldsymbol{u}_t, \quad \tilde{\boldsymbol{c}}_T \cdot \tilde{\boldsymbol{u}}_t = \boldsymbol{c}_T \cdot \boldsymbol{u}_t$ . Enfin, l'objectivité du tenseur des contraintes actuelles  $\boldsymbol{\sigma}$  implique l'objectivité de ses valeurs propres actuelles, de ses invariants actuels et de ses directions propres actuelles.

- **Théorème 3.30 – Objectivité de la puissance des efforts intérieurs de contact.** La densité volumique de puissance des efforts intérieurs de contact est une grandeur scalaire objective.

**Démonstration** – La formule de changement d'observateur du tenseur des contraintes est donnée dans l'équation (3.52) [p. 52]. On rappelle que le tenseur des taux de déformation actuel  $\boldsymbol{D}$  est objectif. Sa formule de changement d'observateur est donc :  $\tilde{\boldsymbol{D}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{Q}_t^\top$ . Le lecteur montera sans difficulté que l'on a alors l'égalité :

$$\tilde{\mathcal{P}}_{int}^{v cont} = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \tilde{\boldsymbol{D}} = -\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{D} = \mathcal{P}_{int}^{v cont}$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur scalaire objective.

- **Théorème 3.31 – Objectivité de la puissance des efforts intérieurs à distance.** La puissance des efforts intérieurs à distance est une grandeur scalaire objective.

**Démonstration** – La définition de la puissance des efforts intérieurs à distance est :  $\int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{v}_E \cdot \boldsymbol{f}_{int}^v dv_t$  où  $\boldsymbol{f}_{int}^v(P, t)$  est le champ de forces volumiques à distances engendré par toutes les particules  $P'$  du domaine actuel  $\mathcal{D}_t$  :

$$\boldsymbol{f}_{int}^v = \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{F}_{P'/P} dv_t$$

En vertu de l'hypothèse des interactions de Newton [principe 3.2 p. 27], l'action de la particule  $P'$  sur la particule  $P$  est une force colinéaire à la biparticule  $\{P, P'\}$  :

$$\boldsymbol{F}_{P'/P} = k(\|\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^P\|) (\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^P) \quad (\text{la fonction } k(\|\boldsymbol{x}_t^{P'} - \boldsymbol{x}_t^P\|) \text{ n'est pas précisée, mais elle est universelle})$$

<sup>(49)</sup> On rappelle que la formule de changement d'observateur du gradient lagrangien des positions actuelles  $\boldsymbol{F}$  est :  $\tilde{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{Q}_t \cdot \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{Q}_0^\top$ . Voir section 3.5.1 du cours du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

Cette force est une grandeur vectorielle objective, en effet :

$$k(\|\mathbf{x}_i^{P'} - \mathbf{x}_i^P\|) = k(\|\tilde{\mathbf{x}}_i^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_i^P\|) \quad (\text{universalité de la fonction } k \text{ et objectivité des distances}) \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}_{P'/P} &= k(\|\tilde{\mathbf{x}}_i^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_i^P\|) (\tilde{\mathbf{x}}_i^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_i^P) \quad (\text{définition universelle de l'interaction de Newton}) \\ &= k(\|\mathbf{x}_i^{P'} - \mathbf{x}_i^P\|) (\tilde{\mathbf{x}}_i^{P'} - \tilde{\mathbf{x}}_i^P) \quad [\text{éq. (3.53)}] \\ &= k(\|\mathbf{x}_i^{P'} - \mathbf{x}_i^P\|) \mathbf{Q}_i \cdot (\mathbf{x}_i^{P'} - \mathbf{x}_i^P) \quad (\text{changement d'observateur des biparticules}) \\ &= \mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{F}_{P'/P} \quad (\text{définition universelle de l'interaction de Newton}) \end{aligned} \quad (3.54)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective.

La puissance des efforts intérieurs à distance pour un observateur  $\tilde{\mathcal{R}}$  pour un couple de particules  $\{P, P'\}$  est :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{PP'}^{int} &= \tilde{\mathbf{F}}_{P'/P} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^P + \tilde{\mathbf{F}}_{P/P'} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{P'} = \tilde{\mathbf{F}}_{P'/P} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^P - \tilde{\mathbf{F}}_{P'/P} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^{P'} = \tilde{\mathbf{F}}_{P'/P} \cdot (\tilde{\mathbf{v}}^P - \tilde{\mathbf{v}}^{P'}) \\ &= \mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{F}_{P'/P} \cdot (\tilde{\mathbf{v}}^P - \tilde{\mathbf{v}}^{P'}) \quad [\text{éq. (3.54)}] \end{aligned}$$

Or le changement d'observateur des vitesses permet d'écrire<sup>(50)</sup> :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{PP'}^{int} &= \mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{F}_{P'/P} \cdot \left( \mathbf{Q}_i \cdot (\mathbf{v}^P - \mathbf{v}^{\tilde{O}}) + \dot{\mathbf{Q}}_i \cdot (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{\tilde{O}}) - \mathbf{Q}_i \cdot (\mathbf{v}^{P'} - \mathbf{v}^{\tilde{O}}) - \dot{\mathbf{Q}}_i \cdot (\mathbf{x}^{P'} - \mathbf{x}^{\tilde{O}}) \right) \\ &= \mathbf{Q}_i \cdot \mathbf{F}_{P'/P} \cdot \left( \mathbf{Q}_i \cdot (\mathbf{v}^P - \mathbf{v}^{P'}) + \dot{\mathbf{Q}}_i \cdot (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{P'}) \right) \\ &= \mathbf{F}_{P'/P} \cdot \mathbf{Q}_i^\top \cdot \mathbf{Q}_i \cdot (\mathbf{v}^P - \mathbf{v}^{P'}) - k(\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{P'}) \cdot \mathbf{Q}_i^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}}_i \cdot (\mathbf{x}^P - \mathbf{x}^{P'}) \\ &= \mathbf{F}_{P'/P} \cdot \mathbf{Q}_i^\top \cdot \mathbf{Q}_i \cdot (\mathbf{v}^P - \mathbf{v}^{P'}) \quad (\text{car } \mathbf{Q}_i^\top \cdot \dot{\mathbf{Q}}_i \text{ est antisymétrique}) \\ \tilde{\mathcal{P}}_{PP'}^{int} &= \mathbf{F}_{P'/P} \cdot (\mathbf{v}^P - \mathbf{v}^{P'}) = \mathcal{P}_{PP'}^{int} \quad (\text{car } \mathbf{Q}_i^\top \cdot \mathbf{Q}_i = \mathbf{G}) \end{aligned}$$

La puissance des efforts intérieurs à distance pour un couple de particules est donc une grandeur scalaire objective. On en déduit que la somme des puissances des efforts intérieurs à distance sur tous les couples de particules d'un domaine est une grandeur objective.

En vertu des deux théorèmes 3.30 [p. 52] et 3.31 [p. 52], on en déduit le théorème suivant :

- **Théorème 3.32 – Objectivité de la puissance des efforts intérieurs.** La puissance actuelle des efforts intérieurs (à distance et de contact) dans un domaine de milieu continu est une grandeur scalaire objective.

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = \mathcal{P}_{int}^{cont} + \mathcal{P}_{int}^{dist} = \int_{\mathcal{D}_t} -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int}^v \, dv_t \quad (3.55)$$

**Rappel** – La puissance des efforts intérieurs à distance  $\mathcal{P}_{int}^{dist} = \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int}^v \, dv_t$  est très souvent négligée [hyp. 3.26 p. 44].

En revanche, la puissance des efforts extérieurs (à distance et de contact)  $\mathcal{P}_{ext}^{mec}$  et la puissance cinétique  $\mathcal{P}_{cin} = \frac{dE_{cin}}{dt}$  ne sont pas des grandeurs scalaires objectives, car la vitesse et l'accélération ne sont pas des grandeurs vectorielles objectives. Cependant, le théorème de la puissance cinétique montre que leur différence est objective :

$$\mathcal{P}_{int}^{mec} = \mathcal{P}_{cin} - \mathcal{P}_{ext}^{mec} = \frac{dE_{cin}}{dt} - \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext}^v \, dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}^s \, ds_t$$

<sup>(50)</sup> Voir la section 1.4.3 (éq. (1.12)) du cours Cinématique des milieux continus, du même auteur [note 5 p. 4].

### 3.9 En bref...

Dans ce chapitre, on a déduit les équations différentielles aux dérivées partielles de la mécanique des milieux continus à satisfaire en toute particule et à tout instant, à partir des théorèmes généraux établis en mécanique générale en application des lois de Newton <sup>(51)</sup>.

Les concepts essentiels sont :

1. *Les efforts extérieurs* agissant sur un domaine de milieu continu sont :
  - (a) des forces extérieures à *distance* qui agissent sur toutes les particules du domaine de milieu continu, décrites par un champ de forces volumiques  $\mathbf{f}_{ext}^v$  ou massiques  $\mathbf{f}_{ext}^m$  ;
  - (b) des forces extérieures *de contact* agissant sur la frontière, décrites par un champ de forces surfaciques  $\mathbf{f}^s$  définis sur la frontière.
2. *Les efforts intérieurs* dans un domaine sont :
  - (a) les efforts intérieurs *de contact* décrits par le champ de tenseurs des contraintes objectif  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$  : en une particule  $P$ , la contrainte s'exerçant sur une facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  est donnée par :  $\mathbf{c}(P, \mathbf{n}_t, t) = \boldsymbol{\sigma}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t$   
En particulier, en toute particule  $P'$  de la frontière d'un domaine, de normale extérieure actuelle  $\mathbf{n}_t(P', t)$ , le tenseur des contraintes doit satisfaire la *condition aux limites en contraintes* :  
 $\boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P', t) = \mathbf{f}^s(P', t)$
  - (b) le champ des efforts intérieurs à *distance*  $\mathbf{f}_{int}^v$  sont souvent négligés.
3. *Les lois de la mécanique* de Newton impliquent que :
  - (a) En toute particule et à tout instant, l'équation de mouvement doit être satisfaite :

$$\text{div}_E \boldsymbol{\sigma} = \rho (\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{f}_0^m) \quad (\text{équation différentielle vectorielle})$$

où  $\mathbf{f}_0^m(P, t)$  est le champ de force à distance massique actuel exercé par tout l'univers (extérieur et intérieur du domaine d'étude) sur la particule  $P$ . Le champ des forces massiques à distance sur une particule  $\mathbf{f}_{int}^m(P, t)$ , dû à l'intérieur du domaine d'étude, est souvent négligé ( $\mathbf{f}_0^m$  souvent confondu avec  $\mathbf{f}_{ext}^m$ ).

**Rappel** – Si l'observateur utilisé pour décrire le mouvement n'est pas galiléen, il faut ajouter au champ  $\mathbf{f}_0^m$  un champ de forces massiques fictives d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

- (b) Le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  est symétrique.
- (c) La puissance des efforts intérieurs est une grandeur extensive. Sa densité volumique est :

$$\mathcal{P}_{int}^{v\text{mec}}(P, t) = \underbrace{-\boldsymbol{\sigma}(P, t) : \mathbf{D}(P, t)}_{\mathcal{P}_{int}^{v\text{cont}}} + \underbrace{\mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int}^v(P, t)}_{\mathcal{P}_{int}^{v\text{dist}}} \quad (\mathcal{P}_{int}^{v\text{dist}} \text{ est souvent négligé}) \quad (3.56)$$

On a donné dans cette section les différentes manières qu'on peut trouver dans la littérature pour écrire et interpréter les théorèmes généraux de la mécanique pour des domaines matériels ou géométriques.

Le tenseur des contraintes est une grandeur tensorielle du second ordre objective ; le vecteur contrainte sur une facette matérielle est une grandeur vectorielle objective ; la puissance des efforts intérieurs ainsi que sa densité volumique sont des grandeurs scalaires objectives.

<sup>(51)</sup> D'autres auteurs préfèrent baser les équations de la mécanique des milieux continus sur d'autres principes (virtuels ou non).

# Premier principe de la thermodynamique

Le premier principe de la thermodynamique est aussi appelé *principe de la conservation de l'énergie*. Avant d'aborder son expression pour un domaine de milieu continu, il est utile de clarifier un certain nombre de concepts de base utilisés en thermodynamique.

## 4.1 Concepts fondamentaux en thermodynamique

### 4.1.1 Système

La thermodynamique a pour ambition d'étudier l'évolution de systèmes physiques macroscopiques dont la constitution est *a priori* quelconque (machines, objets matériels solides ou non, ponctuels ou non, agencés entre eux de manière quelconque) et susceptibles d'échanger de la matière et de l'énergie avec l'extérieur du système. L'échange d'énergie avec l'extérieur du système se fait sous la forme d'énergie mécanique, le *travail*, et sous la forme d'autres énergies non mécaniques qui, dans ce cours, seront ramenés à de la *chaleur*.

Dans ce cours, les systèmes dont on étudie l'évolution thermodynamique sont soit des domaines matériels (ou systèmes fermés) [déf. 1.1 p. 9], soit des domaines géométriques (ou systèmes ouverts) [déf. 1.3 p. 10], remplis d'un milieu presque partout <sup>(1)</sup> continu.

**Commentaires** – La modélisation d'un dispositif matériel réel au moyen d'un modèle milieu continu par morceaux séparés par des surfaces est très générale. On peut pratiquement modéliser n'importe quel dispositif macroscopique de cette manière : les objets solides (déformables ou non) sont des milieux continus séparés des autres constituants du système par leur surface frontière ; les autres constituants peuvent être des fluides (liquides ou gaz) qui eux aussi sont délimités par des frontières de solides (parois, aubages) ou des surfaces limites du système (sections d'entrée, sections de sortie). Chaque morceau est un milieu continu avec son propre comportement, soumis à des conditions aux limites aux interfaces entre les morceaux ou à ses frontières avec l'extérieur du système.

Dans les cours élémentaires de thermodynamique, les constituants d'un système sont fortement simplifiés (solides indéformables, fluides non visqueux, gaz parfaits, ressorts sans masse, liaisons sans frottement, pressions et températures uniformes dans l'espace, contraintes uniquement normales etc.). Ces simplifications, qui ont pour principal objectif l'extrême simplification –voire la disparition– des équations de la mécanique, sont sous la responsabilité de ceux qui en font usage.

---

<sup>(1)</sup> Le sens de la locution « presque partout » est celui qu'on lui donne dans la théorie de la mesure et des distributions : l'ensemble des points où le milieu n'est pas continu est de volume nul (points, lignes, surfaces). En particulier, un milieu continu par morceaux est un milieu presque partout continu.



Dans la suite, la seule hypothèse faite sur les systèmes envisagés est qu'ils sont constitués de milieux continus par morceaux, dont l'état des particules est *a priori* non uniforme dans l'espace et dont des lois de comportement respectent le premier et le second principes de la thermodynamique.

- **Définition 4.1 – Système thermodynamique.** Un système thermodynamique est un domaine matériel (système fermé) ou un domaine géométrique (système ouvert) dont le contenu est modélisé par un milieu (presque partout) continu. Ce système échange de l'énergie avec son extérieur sous forme de travail et de chaleur.

Quel que soit le type de domaine étudié (matériel ou géométrique), il est délimité par une frontière, éventuellement mobile pour l'observateur utilisé, qui doit être une *surface fermée*. Cette frontière définit donc un intérieur et un extérieur du système. Les deux principes de la thermodynamique se réfèrent à l'intérieur et à l'extérieur des systèmes.

**Remarque** – Dans certains textes parlant de thermodynamique, le type de domaine (matériel ou géométrique), sa frontière, son intérieur et son extérieur ne sont pas toujours définis avec toute la précision souhaitable –voire varient au cours du discours– ce qui peut conduire à des incompréhensions chez les apprenants, voire à des conclusions erronées.

#### 4.1.2 Variables d'état

Comme on va le voir dans la suite, le premier principe de la thermodynamique évoque « l'état d'un système ». Il convient de préciser ce concept.

Dans les cours de thermodynamique élémentaire, les systèmes envisagés sont des systèmes suffisamment simplifiés pour que le nombre de paramètres qui évoluent lorsque le système évolue soit limité à quelques unités. Ces paramètres évolutifs sont appelés *variables d'état*. Il existe aussi d'autres paramètres non évolutifs qui définissent le système (dimensions, raideurs de ressorts, caractéristiques de fluides, etc.) qui ne sont pas des variables d'état. L'état actuel d'un système est défini par un ensemble de valeurs actuelles données aux variables d'état.

##### Quelques systèmes simplifiés classiques envisagés en thermodynamique élémentaire –

1. Le système est un domaine (matériel ou géométrique) de fluide dont les caractéristiques sont des champs supposés uniformes (à chaque instant, toutes les particules sont supposées dans le même état). Les grandeurs en une particule du domaine caractérisent l'état du domaine complet.
2. Le système est composé d'un nombre fini de constituants simplifiés agencés entre eux (solides indéformables souvent sans masse, ressorts élastiques sans masse, liaisons sans frottement, etc.). Dans ce cas, l'état actuel du système est défini par un nombre fini de paramètres géométriques définissant les positions relatives actuelles entre des éléments du système.
3. Le système est une combinaison des deux cas précédents : typiquement un cylindre indéformable et un piston indéformable avec un glissement étanche et sans frottement, enfermant un gaz en état uniforme ; ou plus généralement une machine thermodynamique fortement idéalisée.

En thermodynamique élémentaire, ces simplifications ont essentiellement pour effet de pouvoir décrire l'évolution du *système idéalisé* par l'évolution d'un petit nombre de variables d'état.

Par ailleurs, on qualifie souvent de « variables d'état » des grandeurs physiques évolutives, sans se soucier si ces variables sont indépendantes ou non <sup>(2)</sup>. Si les variables d'état ne sont pas indépendantes, la définition d'un état actuel (ensemble de valeurs données aux variables d'état) doit être compatible avec les relations d'interdépendance entre les variables.

<sup>(2)</sup> Il n'est pas rare de lire que pour un gaz parfait en état uniforme, la pression, le volume massique (ou son inverse la masse volumique) et la température absolue sont des variables d'état alors qu'elles sont liées par la loi de Mariotte.

Dans ce cours, la liste des variables d'état retenues pour définir l'état d'un système sera un ensemble de paramètres évolutifs *nécessaire et suffisant* pour la description de l'état du système modélisé. Les variables d'état seront donc des grandeurs *indépendantes*, c'est-à-dire que l'on peut donner à chacune d'elles une valeur arbitraire (dans son domaine de définition) pour définir un état. Un ensemble de valeurs attribuées aux variables d'état indépendantes est la *définition* de l'état du système, et toutes les valeurs possibles des variables d'état engendrent tous les états envisageables par ce modèle du système.

Enfin, en thermodynamique élémentaire, on se soucie rarement de l'universalité de la définition de l'état du système : un même ensemble de valeurs pour les variables d'état devrait définir le même état du système pour tous les observateurs. En d'autres termes, les variables d'état doivent être des grandeurs scalaires objectives, afin que tous les observateurs décrivent un état du système avec les mêmes valeurs de variables d'état ; les évolutions de l'état d'un système (c'est-à-dire celle de ses variables d'état) sont alors les mêmes pour tous les observateurs.

**Commentaire** – Le vecteur position ou le vecteur vitesse d'une particule ou d'un objet par rapport à un observateur sont des grandeurs différentes d'un observateur à l'autre. Ces paramètres peuvent effectivement servir à décrire l'état d'un système pour un certain observateur, mais un autre observateur décrira le même état du système avec d'autres valeurs. En revanche, des grandeurs telles que des distances actuelles ou des vitesses *relatives* actuelles entre éléments du système sont des paramètres communs à tous les observateurs qui peuvent définir un état de système avec les mêmes valeurs pour tous les observateurs. Si les variables d'état ne contiennent que des paramètres géométriques ou cinématiques *relatifs* entre éléments du système, ces paramètres permettent de reconstituer la géométrie actuelle et le mouvement actuel du système à un mouvement de solide près (c'est-à-dire à un changement d'observateur actuel près), ce qui est suffisant pour définir l'état d'un système. Un système et son état actuel sont une réalité physique indépendante des observateurs et ils doivent pouvoir être décrits intrinsèquement, c'est-à-dire indépendamment de l'observateur utilisé pour analyser son évolution. Par exemple, la longueur actuelle d'un ressort est une variable d'état objective alors que les vecteurs position actuelle de ses extrémités ne sont pas des variables d'état objectives car elles changent d'un observateur à l'autre.

Compte tenu des considérations précédentes, et afin de développer une thermodynamique générale, rigoureuse et universelle<sup>(3)</sup>, on pose la définition suivante :

- **Définition 4.2 – Variables d'état.** Les variables d'état décrivant l'état d'un système thermodynamique [déf. 4.1 p. 56] sont choisies tel que :
  1. Les variables d'état sont des *champs matériels objectifs*<sup>(4)</sup> de grandeurs physiques (scalaires vectorielles ou tensorielles) presque partout<sup>(5)</sup> différentiables ; les milieux continus considérés ne sont donc pas *a priori* en état uniforme dans l'espace ; les champs matériels choisis comme variables d'état décrivent l'état actuel de chaque particule.
  2. La liste des variables d'état est la liste des champs matériels *nécessaire et suffisante* pour définir un état du système, c'est-à-dire l'état de ses particules : on peut donc donner une valeur arbitraire (dans son domaine de définition) à chacun des champs matériels retenus comme variables d'état pour définir un état du système.

<sup>(3)</sup> C'est-à-dire valable pour tous les observateurs.

<sup>(4)</sup> C'est-à-dire des champs  $\Psi(P,t)$  objectifs définis (éventuellement par morceaux) sur le système (domaine matériel ou géométrique). On rappelle que leur objectivité implique que leur formule de changement d'observateur est :  $\tilde{\Psi} = \mathcal{R}_Q(\Psi)$ . Voir le chapitre 3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

<sup>(5)</sup> Voir la note 1 [p. 55].

**Remarque** – On verra plus loin [déf. 4.9 p. 62] que toute liste de variables d'état tensorielles objectives et indépendantes peut se ramener à une liste de variables d'état *scalaires* objectives indépendantes.

*Le choix d'une liste de variables d'état indépendantes est la première étape de la modélisation du comportement d'un système thermodynamique.*

En faisant ce choix, on *décide* que tous les états envisageables par ce *modèle* du système sont obtenus en donnant indépendamment une valeur arbitraire à chacune des variables d'état (dans leur domaine de valeurs admissibles).

**Commentaires** – Le choix d'un ensemble de variables d'état indépendantes est normalement suggéré par des constatations expérimentales sur le système que l'on veut modéliser : on doit pouvoir donner indépendamment à chacune des variables d'état une valeur arbitraire. Elles ne doivent donc pas être liées par une relation issue d'une définition, de la cinématique, d'un principe fondamental ou d'une loi de comportement.

- *Exemple en mécanique des solides déformables* : on ne peut pas prendre simultanément la masse volumique actuelle  $\rho$  et un tenseur de déformation actuel  $\mathbf{X}$  comme variables d'état indépendantes, car la dilatation volumique actuelle  $K_v$  en une particule, déterminée par le tenseur de déformation actuelle  $\mathbf{X}$ , est liée à la masse volumique actuelle par le principe de la conservation de la masse :  $K_v = \rho_0 \rho^{-1}$  [éq. (2.8) p. 22]. Les deux grandeurs  $\mathbf{X}$  et  $\rho$  ne sont donc pas indépendantes. Si l'on tient à conserver la variable  $\rho$  comme variable d'état pour un solide déformable, alors il faut l'associer au tenseur **isov**( $\mathbf{X}$ ) qui est la partie isovolume de la déformation issue de la décomposition de la déformation  $\mathbf{X}$ <sup>(6)</sup>. Une autre option plus simple est de garder le tenseur de déformation complet  $\mathbf{X}$  comme variable d'état et de supprimer  $\rho$  de la liste de la liste des variables d'état car elle peut se déduire de  $\mathbf{X}$  et du principe de la conservation de la masse.
- *Exemple en mécanique des gaz* : si le milieu continu est modélisé par un gaz parfait, on ne peut pas prendre comme variables d'état indépendantes à la fois la température actuelle  $T$ , la masse volumique actuelle  $\rho$  et la pression actuelle  $p$  d'une particule car ces trois grandeurs sont liées par la définition d'un gaz parfait  $p = r \rho T$  où  $r$  est une constante caractéristique du gaz parfait. Si on choisit (par exemple) la température et la masse volumique comme variables d'état d'un gaz parfait, la pression en une particule de gaz parfait est par définition une *fonction d'état* [déf. 4.5 p. 60], c'est-à-dire une fonction des variables d'état indépendantes retenues pour ce modèle.

En revanche, si on constate expérimentalement qu'il faut distinguer des états qui auraient les mêmes valeurs de variables d'état, alors il est nécessaire d'ajouter à la liste de ces variables d'état une ou plusieurs variables d'état qui permettent de distinguer ces états. On en donne un exemple p. 59.

- **Notation 4.3** – Tant que les modèles de milieu continu ne sont pas précisés (fluide ou solide déformable, anisotrope ou non etc.), les variables d'état indépendantes retenues pour le modèle seront notées  $\{\chi_1(P,t), \dots, \chi_n(P,t)\}$ , chacun de ces champs matériels pouvant être scalaire, vectoriel ou tensoriel.

### Exemples de listes de variables d'état indépendantes pour un milieu continu :

On verra dans le chapitre suivant que le second principe de la thermodynamique impose l'existence d'une variable d'état scalaire et objective obligatoire : la température absolue  $T$ . Elle figure donc toujours dans la liste des variables d'état des exemples qui suivent.

<sup>(6)</sup> On rappelle que l'expression de la décomposition unique et commutative de toute déformation en déformation sphérique et déformation isovolume dépend du tenseur de déformation utilisé. Voir la section 4.10 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

1. La variable d'état *masse volumique actuelle* (un scalaire) traduit la présence d'une certaine quantité de matière par unité de volume<sup>(7)</sup>. Cette description macroscopique locale de la répartition actuelle de la matière est la plupart du temps jugée suffisante pour les modèles de fluides. Une liste de variables d'état indépendantes et objectives pour décrire l'état d'une particule de fluide simple est donc  $\{T, \rho\}$ .
2. Un *tenseur de déformation actuelle* (un tenseur du second ordre) traduit plus finement la disposition actuelle de la matière en comparant les distances actuelles entre particules voisines avec les distances entre ces mêmes particules dans une forme de référence. Un tenseur de déformation doit donc obligatoirement figurer dans la liste des variables d'état d'une particule de milieu continu solide déformable. La forme de référence utilisée pour définir les déformations est la forme du solide déformable lorsqu'il n'a encore jamais été sollicité. Une liste de variables d'état objectives pour décrire l'état d'une particule de solide déformable *isotrope* est donc  $\{T, \mathbf{X}\}$  où  $\mathbf{X}$  est un tenseur de déformation actuelle objectif<sup>(8)</sup>.
3. Pour les solides déformables *anisotropes*, un tenseur de déformation actuelle est insuffisant pour définir un état actuel : il faut compléter la description de l'état actuel d'une particule en précisant l'orientation du tenseur de déformation actuel par rapport aux directions actuelles d'anisotropie. En plus de la température, les variables d'état d'un solide déformable anisotrope doivent donc comporter à la fois un tenseur de déformation actuelle et les directions matérielles actuelles d'anisotropie. Une liste de variables d'état objectives pour décrire l'état d'une particule de solide déformable anisotrope est donc  $\{T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_p\}$  où  $\mathbf{X}$  est un tenseur de déformation actuelle objectif et où les  $\{\mathbf{N}_\bullet\}$  sont des tenseurs uniaxiaux unitaires représentant les directions d'anisotropie non orientées actuelles<sup>(9)</sup>.
4. Pour certains milieux continus, on constate expérimentalement que l'histoire de l'évolution des variables d'état pour parvenir à un état donné est importante. Dans ce cas, il faut ajouter des variables d'état (scalaires, vectorielles ou tensorielles) qui sont le résumé actuel de l'histoire de l'évolution de cette particule<sup>(10)</sup>. Ces variables d'état sont souvent appelées variables d'état « internes ». Ce résumé de l'histoire peut être plus ou moins riche selon les éléments de l'histoire que l'on a sélectionnés comme importants.

**Exemple – Allongement isotherme d'une barre.** À l'aide d'une machine de traction, on allonge de 1% une éprouvette par un chargement progressif à la température constante  $T_0$ , ou bien on l'allonge de 10% puis on la ramène à un allongement final de 1%, toujours à la température constante  $T_0$ . Si l'on constate que l'effort exercé par la machine à l'allongement final de 1% diffère dans les deux expériences, cela signifie que la seule déformation par rapport à l'état initial est une variable d'état insuffisante pour caractériser l'état final allongé de 1% à la température  $T_0$  : il faut distinguer les deux états finaux par le fait que l'histoire de la déformation n'est pas la même dans les deux expériences.

Le qualificatif « interne » attribué aux variables d'état qui représentent l'histoire de l'évolution semble plus ou moins consacré par l'usage, bien que toutes les variables d'état puissent être qualifiées d'internes puisqu'elles traduisent l'état local des particules du système. Certains auteurs

<sup>(7)</sup> Microscopiquement, c'est un nombre moyen de corpuscules par unité de volume.

<sup>(8)</sup> Il en existe plusieurs, tous aptes à décrire la déformation d'un solide déformable. Voir section 4.4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

<sup>(9)</sup> Lorsqu'il y a plusieurs directions d'anisotropie en une particule, la liste de variables d'états tensorielles proposée ici n'est pas tout à fait indépendante car les angles actuels entre les directions d'anisotropie ne sont pas indépendants de la déformation actuelle  $\mathbf{X}$ . Lors de l'étude des milieux continus solides anisotropes (élastiques ou inélastiques), on la ramènera à une liste de variables d'état scalaires indépendantes.

<sup>(10)</sup> Ces variables d'état traduisent macroscopiquement des phénomènes microscopiques tels que des réarrangements ou des ruptures de liaisons intercorpusculaires qui se sont produits dans l'évolution qui a abouti à l'état actuel. Les constatations phénoménologiques macroscopiques sont nommées plastification, endommagement, fatigue etc.

préfèrent les qualifier de « non observables » ou « cachées » ou encore « non mesurables ». Ces variables d'état sont pourtant visibles, observables (et donc mesurables) puisque ce sont des observations expérimentales qui permettent d'en déceler la nécessité. Dans l'exemple précédent, on *observe* une différence dans l'effort final des deux chemins <sup>(11)</sup>. Pour nommer ces variables d'état sans induire de suggestions ambiguës, on pose la définition suivante :

- **Définition 4.4 – Variables d'état mnésiques.** On appelle variable d'état mnésique toute variable d'état qui est un résumé (la mémoire partielle) de l'histoire de l'évolution de la particule.

### 4.1.3 Fonction d'état

L'énoncé du premier principe de la thermodynamique évoque la notion de « fonction d'état ». Il convient de préciser ce concept.

- **Définition 4.5 – Fonction d'état.** On appelle fonction d'état, toute grandeur physique scalaire, vectorielle ou tensorielle dont la valeur est déterminée par la seule connaissance des valeurs des variables d'état indépendantes.

Les fonctions d'état sont donc des applications  $f_{\chi'} : \{\chi_1, \dots, \chi_n\} \rightarrow \mathbb{V}_3^{\otimes q}$  où  $q$  est l'ordre de tensorialité de la grandeur  $\chi'$ . Une fonction d'état  $f_{\chi'}$  définit <sup>(12)</sup> une nouvelle grandeur physique  $\chi'$  en fonction des valeurs des variables d'état indépendantes :

$$\chi'(P, t) = f_{\chi'}(\chi_1(P, t), \dots, \chi_n(P, t))$$

Lors de l'évolution d'un système, l'état  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$  des particules évolue avec le temps, la valeur de la nouvelle grandeur  $\chi'$  évolue donc aussi avec le temps. Sa dérivée particulière <sup>(13)</sup> est :

$$\dot{\chi}' = \sum_{i=1}^n \partial_i f_{\chi'} \overline{\otimes}^{p_i} \dot{\chi}_i \quad (\text{rappel : } \partial_i f_{\chi'}, \text{ parfois noté } \frac{\partial f_{\chi'}}{\partial \chi_i}, \text{ est un tenseur d'ordre } p_i + q)$$

où  $p_i$  est l'ordre de tensorialité de la variable d'état  $\chi_i$  et où  $\overline{\otimes}^{p_i}$  est un produit tensoriel  $p_i$ -contracté.

La plupart des fonctions d'état envisagées dans la suite seront scalaires ( $q = 0, \mathbb{V}_3^{\otimes q} = \mathbb{R}$ ). Dans ce cas, la dérivée particulière s'écrit :

$$\dot{\chi}' = \sum_{i=1}^n \partial_i f_{\chi'} \overline{\otimes}^{p_i} \dot{\chi}_i \quad (\text{rappel : } \partial_i f_{\chi'}, \text{ parfois noté } \frac{\partial f_{\chi'}}{\partial \chi_i}, \text{ est un tenseur d'ordre } p_i)$$

Si la fonction d'état est scalaire et si de plus toutes les variables d'état sont scalaires, la dérivée particulière s'écrit simplement :

$$\dot{\chi}' = \sum_{i=1}^n \partial_i f_{\chi'} \dot{\chi}_i$$

<sup>(11)</sup> Accessoirement, on observe aussi une déformation permanente après décharge de la barre : la barre déchargée n'est pas dans le même état que l'état initial car sa variable d'état déformation est différente.

<sup>(12)</sup> Comme toute définition, cette définition est *universelle* : la fonction  $f_{\chi'}$  qui définit une nouvelle grandeur  $\chi'$  est la même pour tous les observateurs :  $\tilde{\chi}'(P, t) = f_{\chi'}(\tilde{\chi}_1(P, t), \dots, \tilde{\chi}_n(P, t))$  avec la même fonction  $f_{\chi'}$ .

<sup>(13)</sup> C'est-à-dire la dérivée temporelle à particule constante (« on suit la particule dans son mouvement »).

Ce dernier cas sera le plus utile car on verra plus loin [sec. 4.1.4 p. 61] qu'on peut ramener toute fonction d'état objective d'arguments tensoriels objectifs à une fonction d'arguments scalaires. Bien noter que ces expressions de dérivées particulières seraient fausses si les variables d'état n'étaient pas indépendantes.

**Vocabulaire** – Les fonctions d'état scalaires (ou seulement certaines d'entre-elles) sont parfois appelées « potentiels thermodynamiques ».

Dans ses lectures, l'auteur a été obligé de constater qu'en physique (et donc en mécanique et en thermodynamique), le mot « potentiel » est utilisé avec des significations diverses : il s'agit parfois d'un champ scalaire ou vectoriel dont le gradient (ou le rotationnel) a une interprétation physique (on dit que certaines grandeurs vectorielles « dérivent d'un potentiel »), ou bien il s'agit d'une grandeur scalaire dont la variation « ne dépend pas du chemin suivi », voire encore d'autres significations. Dans la suite on n'aura pas besoin de parler de « potentiels ».

**Commentaires** –

*Changements de variables d'état :*

On peut définir une infinité de fonctions d'état  $\chi'_i$  : toute fonction de fonctions d'état et de variables d'état est une fonction d'état.

Parmi un ensemble de  $n + q$  grandeurs  $\{\chi_1, \dots, \chi_n, \chi'_1, \dots, \chi'_q\}$  où les  $\chi_i$  sont des variables d'état et les  $\chi'_i$  sont des fonctions d'état, on peut choisir  $n$  grandeurs  $\{\chi''_1, \dots, \chi''_n\}$  telles que les  $q$  grandeurs restantes s'expriment en fonction des  $\chi''_i$ . Certaines anciennes fonctions d'état  $\chi'_i$  deviennent des variables d'état et inversement. Il suffit que l'application  $\{\chi_1, \dots, \chi_n\} \leftrightarrow \{\chi''_1, \dots, \chi''_n\}$  (changement de variables d'états) soit inversible. Cette possibilité de changer de liste de variables d'états indépendantes dans des exposés de thermodynamique explique la profusion de formules (exprimant la même chose) que l'on peut trouver dans beaucoup de cours de thermodynamique.

*Dans ce cours, par souci de clarté et d'économie de formules inutiles, on évitera de faire de tels changements de variables d'état. Le choix d'une liste de variables d'état indépendantes est la première étape de la modélisation d'un système; en changer ne peut qu'entraîner des confusions et des surabondances de formules.*

*Fonctions d'état auxiliaires :*

On verra dans la suite que les seules fonctions d'état véritablement fondamentales sont les deux fonctions d'état scalaires dont l'existence est postulée par les deux principes fondamentaux de la thermodynamique : l'énergie interne introduite par le premier principe de la thermodynamique [sec. 4.2.1 p. 65] et l'entropie introduite par le second principe de la thermodynamique [chap. 5 p. 77]. Les autres fonctions d'état évoquées classiquement dans les traités de thermodynamique (enthalpie libre ou non, énergie libre de Helmholtz, énergie libre de Gibbs etc.) ne sont en fait que des combinaisons des deux fonctions d'état fondamentales (énergie interne et entropie) avec des variables d'état et éventuellement d'autres fonctions d'état auxiliaires déjà définies. Ces fonctions d'état auxiliaires ne sont nommées que parce qu'elles apparaissent dans l'étude de certaines évolutions particulières (isothermes, isobares, isochores, isentropes, changement de phase etc.) de certains milieux continus particuliers (gaz, liquides, solides déformables); elles n'ont rien de fondamental.

#### 4.1.4 Isotropie des fonctions d'état scalaires objectives

- **Théorème 4.6 – Isotropie des fonctions d'état scalaires objectives.** Toute fonction d'état scalaire et objective, fonction de variables d'état tensorielles objectives et indépendantes, est nécessairement une fonction isotrope<sup>(14)</sup> de ses arguments.

**Démonstration** – Les variables d'état étant objectives, leur formule de changement d'observateur

<sup>(14)</sup> ATTENTION ! ne pas confondre l'isotropie d'une fonction (propriété mathématique) avec l'isotropie d'un matériau (propriété de la matière).

est connue *a priori* :

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}_i(P, t) = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\boldsymbol{\chi}_i(P, t))$$

où  $\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\boldsymbol{\chi}_i)$  est la rotation du tenseur  $\boldsymbol{\chi}_i$  par le tenseur de changement d'observateur actuel  $\mathbf{Q}_t$  <sup>(15)</sup>.

Soit une fonction d'état *scalaire et objective* définie par  $\chi' = f_{\chi'}(\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n)$ . L'universalité de sa définition implique que l'application  $f_{\chi'}$  est la même pour tous les observateurs. L'objectivité de cette grandeur scalaire implique donc les égalités :

$$\forall \mathbf{Q}_t, \quad f_{\chi'}(\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) = f_{\chi'}(\tilde{\boldsymbol{\chi}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\chi}}_n) = f_{\chi'}(\mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\boldsymbol{\chi}_1), \dots, \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\boldsymbol{\chi}_n))$$

La fonction  $f_{\chi'}$  est donc invariante pour toute rotation par  $\mathbf{Q}_t$  de ses invariants, ce qui est la définition d'une fonction scalaire isotrope.

- **Théorème 4.7 – Théorème des fonctions isotropes (rappel d'analyse).** Si une fonction scalaire  $f_{\chi'}$  est isotrope pour ses arguments tensoriels (d'ordre 0 ou plus) indépendants, alors il existe une fonction  $\bar{f}_{\chi'}$  d'arguments scalaires objectifs telle que :

$$f_{\chi'} \text{ isotrope} \quad \Rightarrow \quad \exists \bar{f}_{\chi'} \text{ tel que } f_{\chi'}(\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) = \bar{f}_{\chi'}(I_1, \dots, I_m) \quad (4.1)$$

où  $\{I_1, \dots, I_m\}$  est une liste d'invariants *indépendants* calculés à partir des arguments tensoriels  $\{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$  de la fonction  $f_{\chi'}$ .

**Démonstration** – La démonstration de ce théorème est donnée dans l'annexe B du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

Les deux théorèmes 4.6 [p. 61] et 4.7 [p. 62]] permettent d'affirmer le théorème suivant :

- **Théorème 4.8** – Toute fonction d'état scalaire objective d'arguments tensoriels objectifs indépendants peut être ramenée à une fonction scalaire d'arguments scalaires objectifs indépendants.

La démonstration du théorème des fonctions isotropes montre que la longueur  $m$  de la liste d'arguments scalaires indépendants  $\{I_1, \dots, I_m\}$  de la fonction  $\bar{f}_{\chi'}$  est toujours inférieure ou égale au nombre de composantes nécessaires pour donner une valeur aux  $n$  variables d'état tensorielles  $\{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ .

Puisque les variables d'état tensorielles  $\{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$  sont objectives, les invariants calculés à partir de ces variables sont des grandeurs scalaires objectives. Les listes  $\{I_1, \dots, I_m\}$  de scalaires objectifs indépendants varient suivant le nombre et l'ordre de tensorialité des variables d'état tensorielles indépendantes  $\boldsymbol{\chi}_\bullet$ . *Ces listes ne sont pas uniques*, mais pour un certain ensemble de variables d'état tensorielles, elles ont toutes le même nombre  $m$  de scalaires.

La description de l'état d'une particule de milieu continu avec des variables d'état tensorielles objectives  $\{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$  et indépendantes peut donc toujours se ramener à un ensemble de  $m$  variables d'état scalaires objectives  $\{I_1, \dots, I_m\}$  indépendantes. On ne pourra préciser cette liste que lorsque la liste des variables d'état tensorielles indépendantes  $\{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ , particulières à chaque modèle de milieu continu, auront été choisies.

- **Définition 4.9 – Variables d'état réduites.** La liste des  $m$  champs scalaires objectifs  $\{I_1, \dots, I_m\}$  est appelée liste de variables d'état réduites.

<sup>(15)</sup> On rappelle que pour une grandeur vectorielle objective  $\mathbf{v}$ , la formule de changement d'observateur est :  $\tilde{\mathbf{v}} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{v}) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{v}$ , et pour une grandeur tensorielle d'ordre 2 objective  $\mathbf{T}$  elle s'écrit :  $\tilde{\mathbf{T}} = \mathcal{R}_{\mathbf{Q}_t}(\mathbf{T}) = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}_t^\top$ . Voir le chapitre 3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

**Interprétation** – L'interprétation physique du théorème mathématique sur les fonctions isotropes est que les seules valeurs réelles objectives nécessaires et suffisantes pour décrire un état de particule défini par des variables d'état vectorielles ou tensorielles, sont les invariants de chacune des variables d'état ainsi que des invariants croisés <sup>(16)</sup> qui déterminent les orientations relatives de ces tenseurs les uns par rapport aux autres <sup>(17)</sup>, en excluant toute orientation absolue par rapport à un observateur particulier. Les  $m$  variables scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  ne permettent donc pas de reconstruire complètement les variables d'état tensorielles pour un observateur particulier, elles permettent seulement de reconstruire l'ensemble des variables d'état tensorielles à une rotation d'ensemble  $\mathcal{Q}_t$  quelconque près, c'est-à-dire à un changement d'observateur quelconque près. Le théorème des fonctions isotropes permet donc de trouver systématiquement des descriptions de l'état d'une particule par une suite de scalaires objectifs indépendants.

#### 4.1.5 Espace des états

Chaque état de particule étant défini par un nombre fini  $m$  de scalaires objectifs [déf. 4.9 p. 62], on peut donc représenter chaque état de particule <sup>(18)</sup> par un point de  $\mathbb{R}^m$  où chaque coordonnée dans  $\mathbb{R}^m$  est une variable d'état réduite.

- **Définition 4.10 – Espace des états.** Soit  $m$  le nombre de variables d'état réduites d'un modèle de milieu continu. On appelle espace des états, la région <sup>(19)</sup> d'un espace de points  $\mathbb{R}^m$  tel que chaque point de  $m$  coordonnées  $\{I_1, \dots, I_m\}$  représente un état de particule.

Dans l'espace des états  $\mathbb{R}^m$ , de dimension  $m$ , toute fonction d'état scalaire peut se représenter par ses *isovaleurs* : ce sont des hypersurfaces dans  $\mathbb{R}^m$ , de dimension  $m - 1$ .

**Remarque** – En thermodynamique des gaz <sup>(20)</sup>, les variables d'état indépendantes se réduisent à deux scalaires objectifs indépendants ( $m = 2$ , on dit que les gaz sont « divalents »). Les isovaleurs des fonctions d'état d'un gaz sont donc des courbes tracées dans un espace des états de dimension 2. On peut donc les représenter graphiquement dans des diagrammes plans. Du fait que dans leur discours, les thermodynamiciens changent souvent d'ensemble de variables d'état indépendantes [Commentaires p. 61], ils présentent plusieurs versions de ces diagrammes (plan  $(H, S)$ , plan  $(T, S)$ , plan  $(p, v)$  etc.), qui expriment toutes la même chose : des isovaleurs de fonctions d'état. On peut tenter de justifier la présentation de ces différentes versions de diagrammes thermodynamiques par le fait que l'on souhaite représenter graphiquement des chemins d'évolutions particulières (isothermes, isobares, isochores, isenthalpes, isentropes etc.) par des verticales ou des horizontales afin de faciliter des calculs graphiques (lecture d'abaques).

#### 4.1.6 Évolution thermodynamique

L'évolution thermodynamique d'un système est la description des changements d'état de chaque particule au cours du temps, c'est-à-dire la donnée des  $m$  champs matériels scalaires  $\{I_1(P, t), \dots, I_m(P, t)\}$ . Pendant l'évolution d'un système, chaque particule du système décrit sa propre courbe d'évolution dans l'espace des états  $\mathbb{R}^m$ , paramétrée par le temps.

<sup>(16)</sup> C'est-à-dire ceux qui sont calculés à partir de plusieurs arguments tensoriels.

<sup>(17)</sup> Voir la démonstration du théorème sur les fonctions isotropes, en annexe B du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(18)</sup> Plus précisément : chaque état de particule envisageable par le modèle de milieu continu.

<sup>(19)</sup> Chaque variable d'état réduite a son propre domaine de définition qui peut être limité à une partie de  $\mathbb{R}$ . Par exemple :  $T > 0$ .

<sup>(20)</sup> C'est la seule thermodynamique vraiment développée dans les cours élémentaires de thermodynamique, le plus souvent limitée aux gaz parfaits.



- **Définition 4.11 – Évolution d’une particule.** On appelle évolution thermodynamique d’une particule, la courbe <sup>(21)</sup> décrite par son point représentatif dans l’espace des états  $\mathbb{R}^m$  au cours du temps.
- **Définition 4.12 – Vitesse d’évolution d’une particule.** On appelle vitesse d’évolution thermodynamique actuelle de la particule  $P$ , la dérivée temporelle dans l’espace des états  $\mathbb{R}^m$  du point représentatif de l’état actuel d’une particule au cours d’une évolution.

La vitesse d’évolution thermodynamique d’une particule est donc un vecteur de  $\mathbb{R}^m$  tangent à sa courbe d’évolution. Les  $m$  composantes de la vitesse d’évolution thermodynamique d’une particule  $P$  dans l’espace des états sont les  $m$  dérivées particulières objectives <sup>(22)</sup>  $\{\dot{I}_1(P,t), \dots, \dot{I}_m(P,t)\}$ .

Contrairement à ce qui est parfois affirmé, si l’ensemble des variables d’état d’un modèle de milieu continu est bien un ensemble de valeurs indépendantes, *l’ensemble de ses dérivées particulières n’est pas nécessairement indépendant* : il se peut que la cinématique, des lois physiques ou des principes fondamentaux imposent des relations entre les dérivées particulières  $\{\dot{I}_1(P,t), \dots, \dot{I}_m(P,t)\}$  des variables d’état.

*Dans l’espace des états  $\mathbb{R}^m$ , toutes les directions de vitesse d’évolution thermodynamique à partir d’un point de l’espace des états ne sont donc pas toujours possibles.*

**Exemple** – Pour un milieu continu solide anisotrope à une seule direction d’anisotropie, la déformation actuelle  $\mathbf{X}$  la direction d’anisotropie actuelle  $\mathbf{N}_t$  sont des variables d’état indépendantes : tout tenseur de déformation actuel associé à toute direction d’anisotropie actuelle est un état possible. Toutefois, les directions d’anisotropie étant des directions matérielles, la cinématique implique des relations entre la dérivée particulière des déformations  $\dot{\mathbf{X}}$  et la dérivée particulière de la direction d’anisotropie  $\dot{\mathbf{N}}_t$  car une direction d’anisotropie est, comme toute direction matérielle, entraînée par le mouvement. Les relations cinématiques entre la dérivée particulière d’un tenseur de déformation et la dérivée particulière d’une direction matérielle d’anisotropie seront détaillées dans la section 5.2.3 du cours *Comportement élastique*, du même auteur <sup>(23)</sup>.

## 4.2 Premier principe de la thermodynamique

La démarche suivie dans ce chapitre est similaire à celle suivie dans les deux chapitres précédents : on pose le principe pour un domaine matériel, on en déduit une expression locale à l’aide du lemme fondamental puis on exprime les conséquences pour un domaine géométrique.

Le premier principe de la thermodynamique fait intervenir une nouvelle forme d’énergie : la *chaleur*. La chaleur est une forme d’énergie non mécanique qui, comme le *travail*, peut être échangée avec l’extérieur du système étudié.

<sup>(21)</sup> Certains auteurs disent le « chemin » ou la « trajectoire » dans l’espace des états  $\mathbb{R}^m$  du point représentatif de l’état actuel, par analogie avec le mouvement d’un point matériel dans  $\mathbb{R}^3$ .

<sup>(22)</sup> On rappelle que la dérivée particulière d’une grandeur scalaire objective est une grandeur scalaire objective (théorème 3.17 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4]).

<sup>(23)</sup> <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/elas.html> ou bien <https://cel.hal.science/ce1-00827790>

### 4.2.1 Énoncé traditionnel pour une évolution finie entre deux instants

On considère un domaine *matériel*<sup>(24)</sup> quelconque en évolution entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ .

- **Principe 4.13 – Premier principe de la thermodynamique.** Le premier principe de la thermodynamique postule deux assertions :

1. *L'énergie se conserve* : il existe une grandeur scalaire, extensive<sup>(25)</sup> et objective, appelée *énergie interne* du domaine matériel, telle que l'énergie (travail et chaleur) reçue<sup>(26)</sup> de l'extérieur du domaine matériel entre deux instants sert à modifier son énergie cinétique (modification du mouvement), le reste servant à modifier son *énergie interne*.

**Remarque** – Il est important de préciser qu'il n'y a pas de spécialisation : on peut modifier l'énergie interne d'un système aussi bien avec du travail qu'avec de la chaleur reçus de l'extérieur. Il en est de même pour l'énergie cinétique du système.

2. *L'énergie interne du domaine matériel est une fonction d'état*, c'est-à-dire une fonction de l'« état du système » (donc une fonction de l'état de ses particules<sup>(27)</sup>).

À chaque état du domaine matériel correspond une valeur de son énergie interne.

Des variations de l'énergie interne du domaine matériel impliquent donc des variations de variables d'état du domaine matériel.

Bien noter que *la réciproque est fautive* : des variations de variables d'état ne modifient pas nécessairement l'énergie interne : dans l'espace des états  $\mathbb{R}^m$ , les *isovaleurs de l'énergie interne* sont des hypersurfaces de dimension  $m - 1$  ; les courbes de  $\mathbb{R}^m$  tracées sur ces isovaleurs sont des évolutions de particules sans variation de l'énergie interne.

Le premier principe de la thermodynamique s'écrit donc classiquement ainsi :

$$(E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1)) + (E_{int}(t_2) - E_{int}(t_1)) = W_{t_1}^{t_2} + Q_{t_1}^{t_2} \quad (4.2)$$

où :

— la variation d'énergie cinétique  $E_{cin}(t_2) - E_{cin}(t_1)$  reflète (partiellement) la modification du mouvement du domaine matériel ;

— la variation d'énergie interne  $E_{int}(t_2) - E_{int}(t_1)$  du domaine matériel implique des modifications des variables d'état c'est-à-dire des changements d'état dans le domaine matériel ;

— le terme  $W_{t_1}^{t_2}$  désigne le travail mécanique (éventuellement négatif) reçu de l'extérieur par le système pendant l'évolution entre les instants  $t_1$  et  $t_2$  ;

— le terme  $Q_{t_1}^{t_2}$  désigne la chaleur (éventuellement négative) reçue de l'extérieur par le système pendant l'évolution entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ .

L'expression de la fonction d'état *énergie interne* en fonction des variables d'état *n'est pas précisée par le principe*. Cette fonction d'état est particulière à chaque système étudié. Dans le cas d'un domaine matériel de milieu continu, elle est particulière à chaque milieu continu (acier, eau, air, etc.).

*C'est en précisant d'une part la liste nécessaire et suffisante des variables d'état et d'autre part l'expression de l'énergie interne en fonction de ces variables d'état, que l'on construit un modèle de comportement du milieu continu.*

<sup>(24)</sup> Les thermodynamiciens disent *système fermé*. Pour l'instant, le domaine matériel n'est pas nécessairement un domaine de milieu (presque partout) continu, mais il est néanmoins en permanence constitué de la même matière.

<sup>(25)</sup> L'extensivité postulée de l'énergie interne est parfois appelée en thermodynamique : « principe de l'état local ».

<sup>(26)</sup> Par convention, on parle toujours de l'énergie reçue de l'extérieur par le domaine matériel. Si l'énergie « reçue » est négative, elle est cédée au milieu extérieur.

<sup>(27)</sup> Dans cet énoncé traditionnel, il est pratiquement sous-entendu que l'état des particules est uniforme dans l'espace.

« Équilibres » – Dans la plupart des ouvrages de thermodynamique, le premier principe de la thermodynamique est énoncé avec des systèmes supposés « à l'équilibre » aux instants  $t_1$  et  $t_2$ , sans définition claire de ce que signifie cet « équilibre » : tantôt les vitesses sont supposées nulles<sup>(28)</sup> (il n'y a donc pas de variation d'énergie cinétique) ou supposées constantes dans le temps (accélération nulle, « équilibre mécanique ») et/ou uniformes dans l'espace (pour l'observateur utilisé, le système est donc supposé en mouvement de translation); tantôt les champs de variables d'état dans le domaine sont supposés uniformes (« équilibre thermique » et autres<sup>(29)</sup>), et bien souvent plusieurs conditions à la fois, variant souvent selon le contexte. Comme on va le voir par la suite, cette condition floue d'« équilibre » est inutile, voire néfaste, et ne sera jamais utilisée dans la suite. Ces conditions soit-disant simplificatrices ne sont évoquées que parce que c'est dans ces conditions d'essai particulières que les vérifications expérimentales sont les plus faciles à faire !

Pendant l'évolution d'un système matériel (continu ou non), les vitesses ou les accélérations de ses particules se sont en général pas nulles<sup>(30)</sup>, les champs de variables d'état ne sont en général ni uniformes ni stationnaires et *le principe de la conservation de l'énergie n'en reste pas moins vrai*. Pour appliquer le premier principe de la thermodynamique exprimé avec de telles restrictions d'« équilibre », ces auteurs sont amenés à considérer les évolutions du système étudié comme une « succession d'états d'équilibre », éventuellement « infiniment lente » qui n'ont aucun sens physique.

#### 4.2.2 Formulation instantanée de la conservation de l'énergie dans l'évolution d'un système

L'énoncé traditionnel (4.2) [p. 65] est affirmé pour toutes les transformations, c'est-à-dire  $\forall t_1$  et  $\forall t_2$ , et donc en particulier pour toute sous-transformation entre deux instants «  $t$  et  $t + dt$  » aussi proches que l'on veut<sup>(31)</sup>. On va donner une formulation instantanée de l'équation (4.2) [p. 65] qui garantit la conservation de l'énergie dans toute sous-évolution :

$$\frac{d}{dt}E_{cin} + \frac{d}{dt}E_{int} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal}$$

où :

- $\mathcal{P}_{ext}^{mec}$  est la puissance mécanique *actuelle* des efforts extérieurs (à distance et de contact) ;
- $\mathcal{P}_{ext}^{cal}$  est la puissance calorifique *actuelle* reçue de l'extérieur (à distance et de contact).

Il est donc nécessaire de remanier l'énoncé traditionnel pour qu'il soit applicable à tout système matériel *en évolution*.

### 4.3 Premier principe de la thermodynamique pour un domaine matériel

Soit  $\mathcal{D}^m$  un domaine matériel (système « fermé »), on note  $\mathcal{D}_t^m$  sa position actuelle (si nécessaire on note  $\mathcal{D}_0^m$  sa position de référence à un instant de référence  $t_0$ ).

1. *Il existe une grandeur appelée énergie interne du domaine matériel telle que à tout instant de toute évolution du domaine matériel l'énergie se conserve :*

$$\frac{d}{dt}E_{cin} + \frac{d}{dt}E_{int} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} \quad (4.3)$$

où :

<sup>(28)</sup> Pour quel observateur ?

<sup>(29)</sup> Par exemple la température ou la pression sont supposés uniformes dans l'espace, ce qui évite de parler de champs matériels pour les variables d'état. Certains auteurs définissent aussi un « équilibre » par la stationnarité de certaines variables d'état ou la nullité de certains flux !

<sup>(30)</sup> Quel que soit l'observateur.

<sup>(31)</sup> Naturellement, tous les états intermédiaires d'une évolution ne sont pas « à l'équilibre » quel que soit le sens qu'on donne à ce mot.

- $\mathcal{P}_{ext}^{mec}$  est la puissance mécanique *actuelle* des efforts extérieurs (à distance et de contact) ;
- $\mathcal{P}_{ext}^{cal}$  est la puissance calorifique *actuelle* reçue de l'extérieur (à distance et de contact).

La dérivée temporelle de l'énergie reçue de l'extérieur du système (sous forme de puissance mécanique et de puissance calorifique), sert à modifier la dérivée temporelle de son énergie cinétique (modification du mouvement) et la dérivée temporelle de son énergie interne (modification de l'état du système).

2. L'énergie interne d'un domaine matériel est une grandeur extensive [déf. 1.5 p. 11], on peut donc définir une densité massique d'énergie interne, notée  $e^m$ , appelée *énergie interne massique*<sup>(32)</sup> (unité : J.kg<sup>-1</sup>). L'énergie interne actuelle d'un domaine matériel s'écrit donc [éq. (2.11) et (2.12) p. 23] :

$$E_{int}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} e_E^m \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E e_E^m \, dv_t \quad \left( = \int_{\mathcal{D}_0^m} e_L^m \, dm = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L e_L^m K_V \, dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 e_L^m \, dv_0 \right)$$

3. L'énergie interne massique est une fonction d'état [déf. 4.5 p. 60]. Il existe donc une application réelle  $f_e$  telle que :

$$e^m(P, t) = f_e(\boldsymbol{\chi}_1(P, t), \dots, \boldsymbol{\chi}_n(P, t)) \quad \text{où } \{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\} \text{ sont les variables d'état.}$$

La fonction  $f_e$  qui définit l'expression de l'énergie interne massique  $e^m$  d'une particule en fonction des variables d'état est caractéristique de chaque type de milieu continu, par la liste des variables d'état indépendantes  $\boldsymbol{\chi}_i$  et par l'application  $f_e$  elle-même (expression de l'énergie interne massique en fonction des variables d'état).

4. L'énergie interne d'un système est une grandeur scalaire objective, c'est-à-dire que tous les observateurs attribuent au système la même valeur actuelle pour son énergie interne. On en déduit que l'énergie interne massique  $e^m$  en une particule est aussi une grandeur objective. Puisque les variables d'état sont objectives, l'application  $f_e$  est donc une fonction isotrope de ses arguments tensoriels [th. 4.6 p. 61] et peut donc être ramenée à une fonction  $\bar{f}_e$  d'arguments scalaires [th. 4.8 p. 62] :

$$e^m(P, t) = \bar{f}_e(I_1(P, t), \dots, I_m(P, t))$$

où les variables d'état réduites scalaires  $\{I_1, \dots, I_m\}$  sont connues quand on connaît la liste des variables d'état tensorielles objectives  $\{\boldsymbol{\chi}_1, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ . La dérivée particulaire (objective) de l'énergie interne massique s'écrit donc :

$$\dot{e}^m(P, t) = \sum_{j=1}^m \partial_j \bar{f}_e \dot{I}_j \quad (\text{car les variables d'état réduites sont indépendantes}) \quad (4.4)$$

On est maintenant en mesure de détailler les différents termes du principe global instantané de la conservation de l'énergie dans toute évolution d'un domaine matériel [éq. (4.3) p. 66].

La dérivée temporelle de l'énergie cinétique est :

$$\frac{d}{dt} E_{cin}(\mathcal{D}^m, t) = \mathcal{P}_{cin}^{mec}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t \quad [\text{éq. (3.27) p. 38}]$$

La dérivée temporelle de l'énergie interne est :

$$\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^m} e_E^m \, dm = \int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{e}_E^m \, dm \quad [\text{éq. (2.14) p. 23 avec } \boldsymbol{\Psi} = e^m]$$

<sup>(32)</sup> Les thermodynamiciens disent aussi : « énergie interne spécifique ».

La puissance mécanique des efforts extérieurs (à distance et de contact) est :

$$\mathcal{P}_{ext}^{mec}(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{ext E}^v + \text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) dv_t \quad (\text{éq. (3.24) p. 38 avec } \boldsymbol{\sigma} \text{ symétrique})$$

La puissance calorifique reçue de l'extérieur est la somme de deux termes :

$$\mathcal{P}_{ext}^{cal}(\mathcal{D}^m, t) = \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^m} q_{ext E}^s ds_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{cal cont}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v dv_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{cal dist}}$$

Le terme  $\mathcal{P}_{ext}^{cal cont}$  est la puissance calorifique reçue de l'extérieur *par contact à la frontière* (conduction thermique à la frontière) et le terme  $\mathcal{P}_{ext}^{cal dist}$  est la puissance calorifique reçue à *distance* de l'extérieur.

- **Définition 4.14** – Le champ scalaire  $q_{ext}^s$  est appelé puissance calorifique *surfactive* reçue en une particule de la frontière (unité :  $\text{W.m}^{-2}$ ).

**Rappel** – On considère ici des domaines matériels. Aucune matière ne traverse la frontière, il n'y a donc pas d'apport de chaleur par convection à travers la frontière .

- **Définition 4.15** – Le champ scalaire  $r_{ext}^v$  est appelé puissance calorifique *volumique* à distance reçue de l'extérieur par une particule (unité :  $\text{W.m}^{-3}$ ).

**Commentaire** – On peut utiliser le terme  $r_{ext}^v$  pour modéliser une production de chaleur à l'intérieur du domaine due à un rayonnement d'origine extérieure qui cède une partie de son énergie sous forme de chaleur en traversant le domaine matériel par interaction avec la matière (par exemple un rayonnement micro-ondes traversant un milieu continu contenant des molécules d'eau).

Dans beaucoup d'applications, ce terme est nul soit parce que le milieu continu est transparent pour ce rayonnement (pas d'interaction), soit parce qu'il est opaque au rayonnement et que la chaleur n'est générée qu'à l'interface matérielle qui reçoit le rayonnement (rayonnement solaire par exemple), si cette interface matérielle fait partie de la frontière du domaine, la chaleur reçue est alors modélisée dans le terme  $q_{ext}^s$  [déf. 4.14 p. 68], soit enfin parce que l'on néglige ses apports thermiques ou que l'on suppose qu'il n'y a pas de rayonnement.

Le champ  $r_{ext}^v(P, t)$  d'origine extérieure n'apporte de la chaleur dans le milieu continu que quand il traverse un milieu continu semi-transparent au rayonnement considéré. La valeur de ce champ scalaire dépend de l'intensité et de la direction du rayonnement sur l'interface irradiée ainsi que des caractéristiques de semi-transparence de la matière pour ce rayonnement. Le champ  $r_{ext}^v(P, t)$  est généralement décroissant avec la pénétration du rayonnement dans la matière depuis l'interface irradiée. La valeur actuelle de la chaleur volumique  $r_{ext}^v(P, t)$ <sup>(33)</sup> est donc définie en tout point quel que soit le domaine ou le sous-domaine considéré ne contenant pas la source du rayonnement. Il sera donc possible d'utiliser le lemme fondamental [th. 1.10 p. 16] pour établir plus loin des équations locales [th. 4.19 p. 71 et th. 5.1 p. 82].

<sup>(33)</sup> La détermination de la valeur de ce champ sort du cadre de ce cours. On peut considérer le champ  $r_{ext}^v(P, t)$  comme une donnée issue d'un calcul en théorie du rayonnement.

Le principe de la conservation de l'énergie (4.3) [p. 66] pour un domaine matériel s'écrit donc :

$$\underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \mathbf{v}_E \cdot \boldsymbol{\gamma}_E \, dv_t}_{\frac{d}{dt} E_{cin}(\mathcal{D}_t^m, t)} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} \dot{e}_E^m \, dm}_{\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}_t^m, t)} = \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} \left( \mathbf{v}_E \cdot (\mathbf{f}_{ext E}^v + \mathbf{div}_E \boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \right) \, dv_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{mec}} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} q_{ext E}^s \, ds_t}_{\mathcal{P}_{ext}^{cal}}$$

Compte tenu de l'équation de mouvement [éq. (3.31) p. 39] et de éq. (3.30) [p. 39], il reste :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \dot{e}_E^m \, dv_t = - \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int E}^v \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \, dv_t}_{-\mathcal{P}_{int}^{mec} \text{ [éq. (3.37) p. 43]}} + \int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} q_{ext E}^s \, ds_t \quad (4.5)$$

**Rappel** – Dans les problèmes courants, la puissance des efforts intérieurs à distance  $\int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int E}^v \, dv_t$  est souvent négligée [hyp. 3.26 p. 44].

#### 4.4 Courant de chaleur dans un milieu continu

De la même manière qu'au chapitre précédent où l'on a démontré l'existence d'un champ matériel tensoriel des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$ , on va montrer l'existence d'un champ matériel vectoriel noté  $\mathbf{q}(P, t)$  et appelé *courant de chaleur*. Les deux théorèmes qui suivent sont souvent présentés comme des hypothèses ou des évidences.

- **Théorème 4.16** – Tous les sous-domaines matériels  $\mathcal{D}_1^m \subset \mathcal{D}_t^m$  dont la frontière contient la particule  $P$  et qui ont la même normale extérieure  $\mathbf{n}_t$ , reçoivent la même puissance calorifique surfacique actuelle en  $P$ .

**Démonstration** – La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème 3.11 [p. 32] pour les contraintes : on applique le principe global de la conservation de l'énergie (4.5) [p. 69] à un domaine compris entre les frontières des sous-domaines  $\mathcal{D}_1^m$ , leur plan tangent commun de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  et un cylindre d'axe  $\mathbf{n}_t$  de rayon  $r$  qui tend vers 0. Le détail de la démonstration est donné en annexe [th. A.2 p. 121].

Tous les sous-domaines  $\mathcal{D}_1^m$  de même normale extérieure  $\mathbf{n}_t$  en la particule  $P$  reçoivent la même puissance calorifique surfacique  $q^s$  ( $\text{W.m}^{-2}$ ). Cette puissance calorifique surfacique reçue par les sous domaines  $\mathcal{D}_1^m$  ne dépend donc que de la facette matérielle de normale unitaire  $\mathbf{n}_t$  autour de  $P$ . On en déduit l'existence d'une fonction  $f_q$  telle que

$$q^s = f_q(P, \mathbf{n}_t, t)$$

- **Théorème 4.17 – Existence du courant de chaleur.** En chaque particule d'un milieu continu et à chaque instant, il existe un vecteur appelé courant de chaleur actuel, noté  $\mathbf{q}$ , tel que la puissance calorifique surfacique reçue par conduction sur une facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  est donnée par :

$$q^s(P, \mathbf{n}_t, t) = -\mathbf{q}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t \quad (4.6)$$

**Démonstration** – La démonstration de l’existence du champ vectoriel courant de chaleur  $\mathbf{q}$  est analogue à celle de l’existence du champ tensoriel des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  : on applique le principe global de la conservation de l’énergie [éq. (4.5) p. 69] à un sous-domaine tétraédrique que l’on fait tendre vers un volume nul d’une certaine manière. Le détail de la démonstration est donné en annexe [th. A.3 p. 122].

**Attention** : Le signe «  $-$  » introduit dans l’équation (4.6) [p.69] se justifie par le fait que, dans le principe de la conservation de l’énergie, le scalaire  $q^s(P, \mathbf{n}_t, t)$  désigne une chaleur surfacique reçue par le domaine sur sa frontière. Le courant de chaleur  $\mathbf{q}(P, t)$  est un vecteur qui indique le sens de circulation de la chaleur (énergie calorifique). Puisque  $\mathbf{n}_t$  est par convention une normale extérieure aux domaines (c’est-à-dire une normale « sortante »), toute chaleur reçue à la frontière est donc l’opposé d’une chaleur sortante :  $q^s = \mathbf{q} \cdot (-\mathbf{n}_t)$ .

- **Théorème 4.18 – Condition thermique aux limites.** Soit  $\partial \mathcal{D}_t^m$  la frontière actuelle d’un domaine matériel, soit  $P'$  une particule générique de cette frontière et soit  $\mathbf{n}_t(P', t)$  la normale extérieure actuelle à la frontière en  $P'$ . On note  $q_{ext}^s(P', t)$  la puissance calorifique surfacique actuelle reçue de l’extérieur en  $P'$ . Le champ vectoriel courant de chaleur  $\mathbf{q}(P, t)$  doit satisfaire la condition à la frontière suivante :

$$\forall P' \in \partial \mathcal{D}_t^m, \quad \mathbf{q}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P', t) = -q_{ext}^s(P', t) \quad (4.7)$$

**Démonstration** – Considérons la famille de sous-domaines  $\mathcal{D}_1^m$  dont la frontière est tangente en  $P'$  à la frontière  $\partial \mathcal{D}_t^m$  du domaine matériel  $\mathcal{D}_t^m$ . En cette particule frontière, la puissance calorifique surfacique  $q^s(P', \mathbf{n}_t, t)$  sur un sous-domaine  $\mathcal{D}_1^m$  est égale à la puissance calorifique surfacique  $q_{ext}^s(P', t)$  reçue de l’extérieur du domaine  $\mathcal{D}_t^m$  sur sa frontière car en  $P'$ , les frontières  $\partial \mathcal{D}_1^m$  et  $\partial \mathcal{D}_t^m$  ont la même normale extérieure. On a donc  $q^s(P', \mathbf{n}_t, t) = q_{ext}^s(P', t)$ . Le théorème d’existence du champ vectoriel  $\mathbf{q}$  [th. 4.17 p. 69] entraîne l’égalité (4.7) [p. 70].

**Vocabulaire** – Une portion de frontière où l’on impose la condition  $q_{ext}^s = 0$  à tout instant est dite *adiabatique*.

Finalement, une dernière expression de la conservation de l’énergie sur un domaine matériel en évolution est :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \dot{e}_E^m dv_t &= -\mathcal{D}_{int}^{mec} + \int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} q_{ext E}^s ds_t \quad [\text{éq. (4.5) p. 69}] \\ &= -\mathcal{D}_{int}^{mec} + \int_{\mathcal{D}_t^m} r_{ext E}^v dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t ds_t \quad [\text{éq. (4.7) p. 70}] \\ \int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \dot{e}_E^m dv_t &= -\mathcal{D}_{int}^{mec} + \int_{\mathcal{D}_t^m} (r_{ext E}^v - \text{div}_E \mathbf{q}) dv_t \quad (\text{th. de la divergence}) \quad (4.8) \\ \text{où } \mathcal{D}_{int}^{mec} &= - \int_{\mathcal{D}_t^m} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E dv_t + \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t^m} \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int E}^v dv_t}_{(\text{souvent négligé [hyp.3.26 p.44]})} \quad [\text{éq. (3.37) p. 43}] \end{aligned}$$

**Écriture « lagrangienne »** – On laisse le soin au lecteur de vérifier que si on utilise des descriptions de Lagrange dans le domaine matériel, le principe de la conservation de l’énergie pour un domaine

matériel s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \dot{e}_L^m K_{vL} dv_0 &= -\mathcal{P}_{int}^{mec} + \int_{\mathcal{D}_0^m} r_{extL}^v K_{vL} dv_0 - \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \mathbf{q}_L \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \\ \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \dot{e}_L^m dv_0 &= -\mathcal{P}_{int}^{mec} + \int_{\mathcal{D}_0^m} r_{extL}^v K_{vL} dv_0 - \int_{\mathcal{D}_0^m} \text{div}_L(K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}) dv_0 \\ \text{où } \mathcal{P}_{int}^{mec} &= - \int_{\mathcal{D}_0^m} \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_L : \mathbf{D}_L K_{vL} dv_0 + \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_{intL}^v K_{vL} dv_0}_{\text{(souvent négligé)}} \end{aligned} \quad (4.9)$$

où  $K_v$  est la dilatation volumique actuelle dans une déformation dont la référence est  $\mathcal{D}_0^m$ .

Par changement de variable [Rappel p. 12] pour intégrer sur le domaine de référence  $\mathcal{D}_0^m$  et en utilisant l'identité  $\text{div}_E \boldsymbol{\Psi} = \text{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \mathbf{F}^{-T}$  l'équation (4.8) [p. 70] on trouve une autre forme de l'expression de la conservation de l'énergie pour un domaine matériel en évolution. C'est cette expression qui apparaît dans la résolution numérique par éléments finis d'un problème de thermomécanique des solides déformables :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 \dot{e}_L^m dv_0 &= -\mathcal{P}_{int}^{mec} + \int_{\mathcal{D}_0^m} (r_{extL}^v - \text{grad}_L \mathbf{q} : \mathbf{F}^{-T}) K_{vL} dv_0 \\ \text{où } \mathcal{P}_{int}^{mec} &= - \int_{\mathcal{D}_0^m} \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_L : \mathbf{D}_L K_{vL} dv_0 + \mathbf{v}_L \cdot \mathbf{f}_{intL}^v K_{vL} dv_0}_{\text{(souvent négligé)}} \end{aligned}$$

## 4.5 Forme locale du premier principe de la thermodynamique

- **Théorème 4.19 – Équation de la chaleur.** Le principe de la conservation de l'énergie est équivalent à l'équation différentielle suivante :

$$\rho \dot{e}^m = -\mathcal{P}_{int}^{vmec} + r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} \quad \text{où } \mathcal{P}_{int}^{vmec} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v}_{\text{(souvent négligé)}} \quad (4.10)$$

**Démonstration** – On obtient cette équation différentielle par le même procédé que pour les deux principes précédents (conservation de la masse et principe fondamental de la mécanique) : en utilisant le lemme fondamental [th. 1.10 p. 16] à partir de l'expression globale du principe de la conservation de l'énergie pour un domaine matériel (4.8) [p. 70], on obtient la forme locale de la conservation de l'énergie (4.10) dans laquelle on a enlevé les indices  $E$  inutiles car par définition  $\boldsymbol{\Psi}_E(\mathbf{x}_t, t) = \boldsymbol{\Psi}_L(\mathbf{x}_0, t) = \boldsymbol{\Psi}(P, t)$ . La réciproque est évidente.

**Rappel : interprétation de la divergence d'un champ vectoriel** – Si  $\text{div}_E \mathbf{q} < 0$ , la particule est « un puits de chaleur » ; si  $\text{div}_E \mathbf{q} > 0$ , la particule est une « source de chaleur » ; si  $\text{div}_E \mathbf{q} = 0$ , le champ  $\mathbf{q}$  est « localement conservatif » : la particule reçoit autant de chaleur qu'elle en cède.

Pour un milieu continu donné, la fonction  $\bar{f}_e$  et la liste des variables d'état réduites sont connues, l'équation de la chaleur [éq. (4.10) p. 71] s'écrit donc :

$$\rho \sum_{j=1}^m \partial_j \bar{f}_e \dot{I}_j = -\mathcal{P}_{int}^{vmec} + r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} \quad [\text{éq. (4.4) p. 67}] \quad (4.11)$$

**Écritures « lagrangiennes »** – En appliquant le lemme fondamental à l'équation (4.9) [p. 71] et en négligeant la puissance des efforts intérieurs à distance, il vient :

$$\underbrace{K_v \rho}_{\rho_0} \dot{e}^m = \underbrace{K_v \boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\tau}} : \mathbf{D} + K_v r_{ext}^v - \text{div}_L \underbrace{(K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q})}_{\mathbf{q}_0}$$



où  $\rho_0 = \rho(P, t_0)$  (masse volumique initiale) et où  $\boldsymbol{\tau}$  est le « tenseur des contraintes » de Kirchhoff déjà évoqué dans la remarque *Autres « tenseurs des contraintes »* [p. 41]. Le groupement de termes  $K_V \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}$ , parfois noté  $\mathbf{q}_0$  pour une ressemblance artificielle avec l'équation (4.10), est d'interprétation physique obscure. On peut aussi, si on le souhaite, développer la divergence.

Une autre expression « lagrangienne » de la conservation locale de l'énergie, sans introduction de « tenseur des contraintes » artificiel  $\boldsymbol{\tau}$  ni de  $\mathbf{q}_0$ , est déduite directement de l'équation (4.10) [p. 71] :

$$\rho \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \text{grad}_L \mathbf{q} : \mathbf{F}^{-\top} \quad (\text{car } \nabla \boldsymbol{\Psi}, \text{ div}_E \boldsymbol{\Psi} = \text{grad}_L \boldsymbol{\Psi} : \mathbf{F}^{-\top}) \quad (4.12)$$

C'est cette dernière expression qui apparaîtra dans la formulation intégrale des problèmes de thermo-mécanique des solides déformables.

#### 4.6 Premier principe de la thermodynamique pour un domaine géométrique

Soit un domaine géométrique dont la position actuelle est  $\mathcal{D}_t^g$ . En intégrant les termes de l'équation locale (4.10) [p. 71] sur la position actuelle  $\mathcal{D}_t^g$  du domaine géométrique, on obtient l'égalité :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \dot{e}_E^m dv_t &= - \int_{\mathcal{D}_t^g} \mathcal{P}_{int}^{v\text{mec}} dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} r_{ext E}^v dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div}_E \mathbf{q} dv_t \\ &= \int_{\mathcal{D}_t^g} \left( \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E - \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int E}^v + r_{ext E}^v - \text{div}_E \mathbf{q} \right) dv_t \quad [\text{éq. (3.36) p. 43}] \end{aligned} \quad (4.13)$$

En utilisant la dérivation des intégrales de masse sur un domaine géométrique [éq. (2.16) p. 24], l'équation (4.13) [p. 72] se récrit :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^g} e^m dm}_{\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^g, t)} = \int_{\mathcal{D}_t^g} \left( \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E - \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int E}^v}_{-\mathcal{P}_{int}^{v\text{mec}}} + \underbrace{r_{ext E}^v - \text{div}_E \mathbf{q}}_{\mathcal{P}_{ext}^{v\text{cal}}} \right) dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \rho_E \dot{e}^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t dt}_{\Phi_e} \quad (4.14)$$

où  $\Phi_e$  est le flux convectif entrant [déf. 1.8 p. 15] d'énergie interne à travers la frontière et où  $\mathbf{v}^f$  est la vitesse de la frontière du domaine géométrique.

**Interprétation en « bilan d'énergie interne »** – En comparant l'équation (4.14) [p. 72] avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.23) p. 17], la quantité  $\mathcal{P}_{ext}^{v\text{cal}} - \mathcal{P}_{int}^{v\text{mec}}$  peut être interprétée comme un taux de production interne d'énergie interne dans le domaine géométrique  $\mathcal{D}_t^g$  et son intégrande  $\tau_e = \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E - \mathbf{v}_E \cdot \mathbf{f}_{int E}^v + r_{ext E}^v - \text{div}_E \mathbf{q} = \mathcal{P}_{ext}^{v\text{cal}} - \mathcal{P}_{int}^{v\text{mec}}$  peut être interprété comme le taux de production volumique d'énergie interne en une particule.

**Interprétation en « bilan d'énergie totale »** – Certains auteurs préfèrent présenter le principe de la conservation de l'énergie comme un bilan d'« énergie totale ». En utilisant le théorème de la puissance cinétique sous forme de bilan d'énergie cinétique pour un domaine géométrique :

$$\frac{d}{dt} E_{cin}(\mathcal{D}^g, t) = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{int}^{mec} + \Phi_{E_{cin}} \quad [\text{éq. (3.47) p. 48}]$$

et en additionnant terme à terme avec le bilan d'énergie interne [éq. (4.14) p. 72], on fait disparaître le terme  $\mathcal{P}_{int}^{mec}$  :

$$\frac{d}{dt} E_{int}(\mathcal{D}^g, t) + \frac{d}{dt} E_{cin}(\mathcal{D}^g, t) = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{v\text{cal}} + \Phi_{E_{cin}} + \Phi_e$$

Ainsi, si on appelle « énergie totale » le terme  $E_{tot} = E_{cin} + E_{int}$ , il vient :

$$\frac{d}{dt} E_{tot} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal} + \Phi_{tot}$$

En comparant avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive [éq. (1.23) p. 17], le principe de la conservation de l'énergie peut être présenté comme un « bilan d'énergie totale », en interprétant  $\mathcal{P}_{ext}^{mec} + \mathcal{P}_{ext}^{cal}$  comme un taux production interne d'« énergie totale » dans le domaine géométrique.

## 4.7 Changements d'observateur

L'énergie interne actuelle  $E_{int}$  d'un domaine (matériel ou géométrique) et sa densité massique  $e^m$  sont par principe des grandeurs scalaires objectives.

- **Principe 4.20 – Objectivité de la chaleur transmise par conduction.** La puissance calorifique surfacique actuelle  $q_{ext}^s(P', t)$  reçue en une particule  $P'$  de la frontière actuelle  $\partial \mathcal{D}_t^m$  d'un domaine matériel est un scalaire objectif :

$$\forall \tilde{\mathcal{R}} \forall \mathcal{R}, \quad \tilde{q}_{ext}^s(P', t) = q_{ext}^s(P', t)$$

**Commentaire** – Quand un domaine reçoit de la chaleur à sa frontière, il est naturel de poser que la puissance calorifique surfacique  $q_{ext}^s$  reçue à la frontière a la même valeur pour tous les observateurs. Ce principe minimal est suffisant pour déduire les théorèmes d'objectivité qui suivent.

- **Théorème 4.21** – La puissance calorifique surfacique actuelle reçue par une facette matérielle en une particule  $P$  de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  est une grandeur scalaire objective.

$$\forall \tilde{\mathcal{R}} \forall \mathcal{R}, \quad \tilde{q}^s(P, \mathbf{n}_t) = q^s(P, \mathbf{n}_t)$$

**Démonstration** – Il suffit d'appliquer le principe 4.20 [p. 73] à tout sous-domaine  $\mathcal{D}_1$  du domaine matériel  $\mathcal{D}_t^m$  considéré et d'utiliser le théorème 4.16 [p. 69] pour aboutir au résultat.

- **Théorème 4.22 – Objectivité du courant de chaleur.** Le champ vectoriel courant de chaleur actuel  $\mathbf{q}$  est un champ vectoriel objectif.

**Démonstration** – Le théorème 4.21 [p. 73] et le théorème 4.17 [p. 69] (existence du courant de chaleur) impliquent l'égalité :

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}} \forall \mathbf{n}_t, \quad \tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_t &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t \quad [\text{principe 4.20 p. 73}] \\ \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}} \forall \mathbf{n}_t, \quad \tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_t \cdot \mathbf{n}_t &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t \quad [\text{éq. (3.50) p. 51}] \\ \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}}, \quad \tilde{\mathbf{q}} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_t &= \mathbf{q} \\ \forall \mathcal{R} \forall \tilde{\mathcal{R}}, \quad \tilde{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_t^\top = \tilde{\mathbf{Q}}_t \cdot \mathbf{q} \quad (\mathbf{q} \text{ est un vecteur}) \end{aligned} \quad (4.15)$$

ce qui est la formule de changement d'observateur d'une grandeur vectorielle objective.

- **Théorème 4.23 – Objectivité de la divergence eulérienne du courant de chaleur.** La divergence eulérienne du courant de chaleur est un champ scalaire objectif.

**Démonstration** – On sait de la cinématique que la divergence eulérienne d'un champ vectoriel objectif est un champ scalaire objectif<sup>(34)</sup>. Le courant de chaleur actuel  $\mathbf{q}$  étant un champ vectoriel objectif [th. 4.22 p. 73], sa divergence eulérienne est donc un scalaire objectif.

<sup>(34)</sup> Th. 3.14 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4].

- **Théorème 4.24 – Objectivité de la puissance calorifique volumique à distance.** La puissance calorifique volumique extérieure reçue actuelle  $r_{ext}^v$  est une grandeur scalaire objective.

**Démonstration** – L'équation de la chaleur (4.10) [p. 71] est :

$$\rho \dot{e}^m = -\mathcal{P}_{int}^{v\,mec} + r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q}$$

La masse volumique  $\rho$  est une grandeur objective [th. 2.5 p. 24], l'énergie interne massique  $e^m$  est une grandeur scalaire objective (par principe), sa dérivée particulaire  $\dot{e}^m$  est donc aussi une grandeur scalaire objective. La puissance volumique des efforts intérieurs  $\mathcal{P}_{int}^{v\,mec}$  est une grandeur objective [th. 3.32 p. 53] et la divergence eulérienne  $\text{div}_E \mathbf{q}$  est objective [th. 4.23 p. 73]. On en déduit que  $r_{ext}^v$  est la somme de grandeurs scalaires objectives.

En revanche, l'énergie cinétique actuelle, sa dérivée temporelle (la puissance cinétique) et la puissance actuelle des efforts extérieurs ne sont pas des grandeurs objectives, car la vitesse d'une particule n'est pas une grandeur objective. Si l'on récrit le principe de la conservation de l'énergie global [éq. (4.3) p. 66] pour un domaine matériel sous la forme :

$$\frac{d}{dt} E_{int} - \mathcal{P}_{ext}^{cal} = \mathcal{P}_{ext}^{mec} - \frac{d}{dt} E_{cin}$$

Le membre de gauche de cette égalité étant objectif, le membre de droite  $\mathcal{P}_{ext}^{mec} - \frac{d}{dt} E_{cin}$  l'est aussi. Bien que les termes du membre de droite soient une différence de deux termes non objectifs, leur différence est objective.

## 4.8 En bref...

Lorsqu'un domaine de milieu continu évolue au cours du temps, le point représentatif de l'état de chaque particule suit sa propre courbe d'évolution dans l'espace des états  $\mathbb{R}^m$  et a sa propre vitesse d'évolution.

Le premier principe de la thermodynamique postule la conservation de l'énergie dans l'évolution d'un domaine matériel (système « fermé ») via l'existence d'une *énergie interne* du domaine matériel qui est une fonction d'état scalaire extensive et objective par principe. On en déduit une équation différentielle locale de la conservation de l'énergie appelée *équation de la chaleur*<sup>(35)</sup>.

La fonction d'état objective *énergie interne massique* est caractéristique de chaque modèle de milieu continu par la liste des variables d'état objectives indépendantes retenues pour le modèle et par son expression en fonction de ces variables. Elle peut être identifiée empiriquement<sup>(36)</sup> ou bien cette fonction peut être définie *a priori* par une expression mathématique *physiquement motivée* avec des coefficients à ajuster aux mesures (procédure d'identification).

Pour un domaine géométrique (système « ouvert »), l'expression globale du principe de la conservation de l'énergie s'écrit en tenant compte du flux convectif d'énergie interne entrant par la frontière.

<sup>(35)</sup> Dans beaucoup d'ouvrages, ce qui est appelé « équation de la chaleur » est un cas particulier de celle donnée dans ce chapitre : on y suppose implicitement que la conduction de la chaleur est régie par la « loi » de Fourier (une loi de comportement thermique parmi d'autres possibles [sec. 5.7 p. 87]) et la puissance volumique mécanique des efforts intérieurs ( $-\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$ ) y est omise (pas de vitesse de déformation, mouvement de solide indéformable implicite).

<sup>(36)</sup> Il faudrait construire un abaque expérimental d'isovaleurs dans  $\mathbb{R}^m$  (aisé seulement si  $m = 2$ ) ou bien un tableau de valeurs expérimentales de l'énergie interne à  $m$  entrées.

---

L'énergie interne actuelle, sa densité massique actuelle, le champ vectoriel courant de chaleur actuel, les puissances calorifiques reçues actuelles et la puissance des efforts intérieurs actuelle sont des grandeurs objectives. En revanche, l'énergie cinétique actuelle, la puissance cinétique actuelle et la puissance actuelle des forces extérieures ne sont pas objectives.



# Second principe de la thermodynamique

## 5.1 Introduction

Les conséquences du second principe de la thermodynamique ne sont pas toujours exposées dans les cours de mécanique des milieux continus pour deux raisons :

1. Il est surtout utile lorsque l'on cherche à construire des nouveaux modèles de comportement de milieux continus thermodynamiquement admissibles (tous devraient l'être !).
2. Contrairement aux trois principes fondamentaux précédents, l'expression locale de ce principe ne conduit pas à des équations différentielles mais à des inéquations à satisfaire dans toute évolution.

Dans la résolution d'un problème de mécanique des milieux continus, on n'a pas à se soucier de ces inéquations dès lors que l'on a choisi un modèle de comportement thermodynamiquement admissible du milieu continu, c'est-à-dire qu'il satisfait les inéquations du second principe dans toute évolution.

La lecture de ce chapitre n'est donc indispensable qu'aux lecteurs qui liront les cours *Comportement élastique* et *Comportements inélastiques*, du même auteur,<sup>(1)</sup> dans lesquels on construit des modèles de comportement thermodynamiquement admissibles. Les modèles de comportement de fluides et de solides déformables qui sont classiquement proposés sans justification dans les cours élémentaires, satisfont normalement (mais pas toujours !) les inégalités du second principe de la thermodynamique dans toute évolution.

**Incitation à la lecture de ce chapitre** – Il n'est pas inutile de vérifier si les modèles de comportement classiquement proposés satisfont bien aux deux principes de la thermodynamique dans toute évolution. Il est aussi pédagogiquement intéressant de reconstruire les modèles classiques de milieux continus à partir du second principe de la thermodynamique, ne serait-ce que pour les justifier. À titre d'exemple, on reconstruira dans le chapitre 6 [p. 93] les modèles de comportement classiquement utilisés en mécanique des fluides.

Historiquement, les modèles de comportement classiques des fluides et des solides déformables ont été proposés sans se soucier de respecter le second principe de la thermodynamique dans toute évolution. On présente habituellement les lois de comportement comme des « équations de fermeture »<sup>(2)</sup> d'origine expérimentale. C'est donc un peu par chance que la plupart<sup>(3)</sup> des modèles de comportement traditionnels se trouvent être thermodynamiquement admissibles.

<sup>(1)</sup> Voir les liens dans les notes 20 et 21 [p. 85]

<sup>(2)</sup> On dit qu'il faut compléter le système d'équations formé par les principes précédents (masse, mécanique et énergie) par des équations complémentaires « pour que le nombre de champs inconnus soit égal au nombre d'équations » !

<sup>(3)</sup> L'oubli des conditions imposées par les principes de la thermodynamique a conduit à la proposition de modèles de milieux continus non thermodynamiquement admissibles comme la célèbre « élasticité » de Hooke et

Le second principe de la thermodynamique introduit une nouvelle variable d'état : la *température absolue*, ainsi qu'une nouvelle fonction d'état : l'*entropie*.

Il sort du cadre de ce cours de justifier l'énoncé du second principe de la thermodynamique par un exposé de l'évolution historique des idées en thermodynamique ou par des expériences de pensée sur les machines thermiques idéales de Carnot, comme il est couramment fait dans les cours de thermodynamique. L'auteur a résolument choisi de présenter ce principe comme dans les chapitres précédents, c'est-à-dire en l'énonçant comme un axiome et en déduisant ses conséquences.

Dans ce chapitre, on suivra la même démarche que dans les chapitres précédents : le principe est énoncé de manière globale pour un domaine matériel, on en déduira une expression locale puis une expression globale pour les domaines géométriques.

## 5.2 Énoncé traditionnel du second principe de la thermodynamique

Dans les cours de thermodynamique élémentaire, le second principe de la thermodynamique est généralement énoncé ainsi :

1. Il existe une variable d'état scalaire, positive, non extensive et objective appelée *température absolue*<sup>(4)</sup> (unité : le Kelvin de symbole K).
2. Un échange de chaleur (énergie thermique) par conduction entre deux corps en contact ne peut se faire que du corps à la plus haute température vers le corps à la plus basse température (on dit que « la chaleur va du chaud vers le froid »). Pour quantifier cette dissymétrie dans un échange d'énergie thermique par conduction, on dit que la « variation élémentaire »<sup>(5)</sup> d'entropie d'un corps à la température  $T$  au cours d'une « transformation élémentaire », est la « quantité de chaleur élémentaire »  $dQ$  reçue ou cédée par le corps divisée par la température  $T$  du corps au moment de cet échange :

$$dS = \frac{dQ}{T} \quad (\text{unité : J.K}^{-1})$$

3. L'entropie d'un système est une fonction d'état scalaire extensive et objective.
4. La variation d'entropie  $dS$  dans une « évolution infinitésimale » d'un système est due *en partie* aux apports d'entropie extérieure  $\frac{dQ_{ext}}{T}$ , où  $dQ_{ext}$  est la quantité de chaleur « élémentaire » reçue de l'extérieur « entre les instants  $t$  et  $t + dt$  » à la température  $T$  du système ; le reste de la variation de l'entropie du système  $dS_{int}$ , *non négative par principe*, est une augmentation

l'« hypoélasticité » pour lesquels les fonctions d'état énergie interne et entropie, dont l'existence est imposée par la thermodynamique, n'existent pas. On en trouve néanmoins toujours la trace dans la plupart des textes et des codes de calcul actuels (2023).

<sup>(4)</sup> L'affirmation de l'existence de la variable d'état *température absolue* est souvent présentée préalablement aux deux principes de la thermodynamique et donc ne faisant pas partie du second principe de la thermodynamique. Cet axiome est parfois appelé « principe zéro » de la thermodynamique. L'auteur a choisi de l'intégrer au second principe par commodité, puisque c'est seulement dans ce principe que l'on fait référence à la température. La seule chose importante est d'affirmer à un moment ou à un autre l'existence d'une température absolue.

<sup>(5)</sup> En thermodynamique, les variations « élémentaires » ou « infinitésimales » sont traditionnellement notées comme des différentielles avec des « d » ou des «  $\delta$  ». Le lecteur verra dans la suite du cours que l'auteur évite systématiquement ce genre de notations et qu'il n'y aura pas à distinguer entre des « différentielles exactes » et « inexactes ». À ce propos, l'auteur recommande vivement aux lecteurs qui ont des difficultés conceptuelles avec les « différentielles thermodynamiques » (voire physiques) de lire l'annexe C de l'ouvrage *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Jean-Michel BONY, Les éditions de l'École Polytechnique, Paris, 2004, ISBN 2-7302-0841-0.

de l'entropie du système due à des processus internes au système *non précisés par le principe*.

$$dS \geq \frac{dQ_{ext}}{T} \Leftrightarrow dS - \frac{dQ_{ext}}{T} = dS_{int} \geq 0$$

**Remarque** – Contrairement à l'énoncé traditionnel du premier principe [éq. (4.2) p. 65] qui est énoncé pour une transformation finie entre deux instants  $t_1$  et  $t_2$ , l'énoncé traditionnel du second principe de la thermodynamique est donné sous forme instantanée, c'est-à-dire pour une transformation « infinitésimale entre deux instants  $t$  et  $t + dt$  ».

**Exemple traditionnel de processus interne** – *Variation d'entropie due à un échange interne de chaleur par conduction.*

Si un corps à la température  $T$  reçoit de la chaleur ( $dQ_{ext} > 0$ ), son entropie augmente ( $dS > 0$ ); s'il cède de la chaleur ( $dQ_{ext} < 0$ ), son entropie diminue ( $dS < 0$ ) si aucun processus interne n'existe ( $dS_{int} = 0$ ).

Soit un corps  $A$  à la température  $T_A$  en contact avec un corps  $B$  à une température  $T_B < T_A$ , on note  $dQ_{ext}^B > 0$  la quantité de chaleur « élémentaire » reçue par le corps  $B$  dans une transformation « infinitésimale ». On suppose que les corps  $A$  et  $B$  n'échangent pas d'autres énergies mécaniques ou thermiques avec leur extérieur, que leur température n'évolue « pratiquement pas » car l'évolution est « infinitésimale » et enfin qu'il n'existe dans les corps  $A$  et  $B$  aucun des processus internes évoqués dans le principe.

Dans ces conditions, le principe de la conservation de l'énergie appliqué au système  $A \cup B$  impose que la chaleur reçue par le corps  $A$  est négative et vaut  $dQ_{ext}^A = -dQ_{ext}^B < 0$ . Les variations « infinitésimales » d'entropie des deux corps sont donc les suivantes :

$$dS_A = \frac{dQ_{ext}^A}{T_A} = -\frac{dQ_{ext}^B}{T_A} < 0 \quad \text{et} \quad dS_B = \frac{dQ_{ext}^B}{T_B} > 0$$

L'entropie étant une grandeur extensive, la variation d'entropie de l'ensemble  $A \cup B$  est la somme des variations d'entropie :

$$dS_A + dS_B = -\frac{dQ_{ext}^B}{T_A} + \frac{dQ_{ext}^B}{T_B} = dQ_{ext}^B \left( \frac{1}{T_B} - \frac{1}{T_A} \right) > 0 \quad \text{car } T_A > T_B$$

On en déduit que s'il se produit un échange de chaleur entre des parties  $A$  et  $B$  du système  $A \cup B$  isolé mécaniquement et thermiquement de son extérieur, l'entropie du système  $A \cup B$  augmente pendant cette évolution « infinitésimale » en raison de l'échange interne de chaleur qui se produit dans le système  $A \cup B$ . L'inconsistance de cet exemple, pourtant classiquement exposé dans beaucoup de cours de thermodynamique élémentaire, sera soulignée plus loin [note 7 p. 80].

**Processus internes dans un système** – Les causes et la valeur de l'augmentation d'entropie  $dS_{int}$  due à des processus internes à un système en évolution ne sont pas précisées par le principe. On a tenté dans l'exemple précédent d'illustrer un cas d'augmentation de l'entropie d'un système due à des échanges internes de chaleur<sup>(6)</sup>, mais il peut exister d'autres processus internes : par exemple, tout ou partie du système peut produire de la chaleur par frottement interne ; il peut aussi exister dans le système des productions ou des absorptions de chaleur dues à des changements de phase ou des réactions chimiques exothermiques ou endothermiques. Les phénomènes internes exothermiques tendent à augmenter l'entropie du système et les phénomènes internes endothermiques tendent à la diminuer. Mais quels que soient les phénomènes internes au système, la variation interne d'entropie  $dS_{int}$  dans tout le domaine matériel, due à la création ou l'absorption de chaleur *et* aux échanges thermiques internes, est non négative par principe. Ces considérations qualitatives sur les processus internes seront précisées rigoureusement lors de la définition des dissipations [déf. 5.4 et déf. 5.5 p. 84].

<sup>(6)</sup> À température temporellement constante !



Dans la présentation traditionnelle qui précède, on peut constater un certain nombre de difficultés et même d'incohérences :

1. Dans la définition de la variation d'entropie d'un système (axiome 4), on évoque la « température du système » ce qui signifierait que le système est à température uniforme. On ne pourrait donc pas définir la variation d'entropie d'un système à température non uniforme <sup>(7)</sup>.
2. N'envisager que des systèmes à température uniforme (« équilibre thermique » <sup>(8)</sup>) pour faire de la *thermodynamique* n'est pas physiquement sensé. Lorsqu'un système (ou un sous-système) échange de la chaleur avec son extérieur, il n'est jamais à l'« équilibre thermique » sauf éventuellement au bout d'un « temps infini », c'est-à-dire quand il n'y a plus d'échange thermique ! Il faudrait donc admettre que dans une évolution finie, les températures d'un système évoluent au cours du temps tout en restant uniformes dans l'espace (physiquement peu vraisemblable), ou bien qu'il faut attendre l'« équilibre thermique » à chaque instant intermédiaire (évolution « infiniment lente ») pour parler des entropies intermédiaires ou bien encore admettre que dans une évolution finie entre deux états à l'« équilibre thermique », l'entropie des états intermédiaires n'est pas définissable car la température (non uniforme) du système n'est pas définissable !

Sous la forme traditionnelle qui vient d'être rappelée, le second principe de la thermodynamique est inexploitable, voire incompréhensible, pour étudier des évolutions réelles <sup>(9)</sup>. Lors de l'évolution d'un système (milieu continu ou non), la température n'est jamais uniforme dans le système et la température des particules évolue avec le temps. L'énoncé traditionnel du second principe de la thermodynamique nécessite donc d'être reformulé de manière plus pertinente.

### 5.3 Second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel

Soit  $\mathcal{D}^m$  un domaine matériel <sup>(10)</sup> dont la position actuelle est  $\mathcal{D}_t^m$  (si nécessaire, on note  $\mathcal{D}_0^m$  la position de référence). Le second principe de la thermodynamique postule quatre axiomes :

1. Il existe une variable d'état *de particule*, notée  $T$ , scalaire, objective, positive et non extensive appelée *température absolue* <sup>(11)</sup>. L'état thermique actuel du domaine matériel est décrit par un *champ matériel*  $T(P,t)$  [déf. 4.2 p. 57].

La liste des variables d'état indépendantes et objectives caractérisant l'état d'une particule s'écrira donc :  $\{T, \chi_2, \dots, \chi_n\}$  [notation 4.3 p. 58] et sa liste de variables d'état réduites est  $\{T, I_2, \dots, I_m\}$  [déf. 4.9 p. 62].

2. En toute particule, on a l'inégalité suivante :

$$\mathbf{q}(P,t) \cdot \mathbf{grad}_E T(P,t) \leq 0 \quad \text{où } \mathbf{q} \text{ est le } \textit{courant de chaleur} \text{ [th. 4.17 p. 69]} \quad (5.1)$$

Cette inégalité est l'expression mathématique locale de la phrase « dans une conduction thermique, la chaleur va du chaud vers le froid ».

<sup>(7)</sup> En particulier, dans *Exemple traditionnel de processus interne* [p. 79], le système est composé de deux parties à des températures  $T_A$  et  $T_B$  différentes ! Quelle est la « température du système »  $A \cup B$  qui doit servir à définir sa variation d'entropie ?

<sup>(8)</sup> Certains auteurs définissent parfois l'« équilibre thermique » par  $\dot{T} = 0$  (le champ de températures n'est pas uniforme mais il n'évolue plus) et non par  $\mathbf{grad}_E T = \mathbf{0}$  (le champ de températures est uniforme) et parfois les deux à la fois. Parfois encore, il est défini par  $\partial_t T(P,t) = 0$  (stationnarité des températures) [voir « *Équilibres* » p. 66].

<sup>(9)</sup> Pour donner des valeurs aux entropies intermédiaires d'un système en évolution, on invente traditionnellement des évolutions artificielles dites « polytropiques » de systèmes (le plus souvent des gaz) à température uniforme dans l'espace mais variables dans le temps.

<sup>(10)</sup> Éventuellement continu par morceaux [Remarques p. 55].

<sup>(11)</sup> Voir note 4 p. 78.

3. Il existe une *fonction d'état* scalaire extensive et objective, notée  $S(\mathcal{D}^m, t)$ , appelée *entropie* qui qualifie la chaleur (énergie thermique) détenue dans un système en rapportant cette chaleur à la température *non uniforme* à laquelle cette énergie thermique est localement détenue (unité :  $\text{J.K}^{-1}$ ). En vertu de l'axiome 2 [éq. (5.1) p. 80], cette énergie thermique locale ne pourra se transmettre par conduction que vers des régions de  $\mathcal{D}^m$  à température inférieure.

L'*extensivité* postulée de la fonction d'état *entropie* permet de définir une *entropie massique* <sup>(12)</sup> [th. 1.6 p. 11], notée  $s^m$ , qui est une quantité massique de chaleur rapportée à la température locale  $T$  (unité :  $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ). L'entropie actuelle  $S(\mathcal{D}^m, t)$  d'un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  s'écrit donc :

$$S(\mathcal{D}^m, t) = \int_{\mathcal{D}^m} s^m dm = \int_{\mathcal{D}^m} \rho_E s^m dv_t \quad \left( = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L s_L^m K_{vL} dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_0 s_L^m dv_0 = \int_{\mathcal{D}_0^m} s_L^m dm \right)$$

L'entropie d'un domaine matériel étant une fonction d'état scalaire *objective* et la masse étant une grandeur scalaire objective, sa densité massique  $s^m$  en une particule  $P$  est une fonction d'état [déf. 4.5 p. 60] scalaire *objective*. Les variables d'état étant objectives, il existe une fonction  $f_s$  isotrope [th. 4.6 p. 61] et donc une fonction  $\bar{f}_s$  telles que :

$$s^m = f_s(T, \boldsymbol{\chi}_2, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) = \bar{f}_s(T, I_2, \dots, I_m) \quad [\text{éq. (4.1) p. 62}]$$

où les fonctions *universelles*  $f_s$  ou  $\bar{f}_s$  sont caractéristiques de chaque modèle de milieu continu, par le choix de leurs variables (les variables d'état indépendantes) et par l'application elle-même (expression de l'entropie massique en fonction des variables d'état). La dérivée particulière de l'entropie massique en une particule s'écrit donc :

$$\dot{s}^m = \partial_T \bar{f}_s \dot{T} + \sum_{j=2}^m \partial_j \bar{f}_s \dot{I}_j \quad (\text{car les variables d'état réduites sont indépendantes}) \quad (5.2)$$

4. Pendant l'évolution d'un domaine matériel, la dérivée temporelle de l'entropie du domaine matériel, appelée *taux d'entropie* <sup>(13)</sup> du domaine matériel, est supérieure ou égale au taux d'entropie d'origine extérieure :

$$\frac{d}{dt} S(\mathcal{D}^m, t) \geq \int_{\mathcal{D}^m} \frac{r_{ext}^v E}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}^m} \frac{q_{ext}^s E}{T_E} ds_t \quad (5.3)$$

Le taux d'entropie d'origine extérieure au domaine matériel est dû à la puissance calorifique volumique reçue à distance de l'extérieur du domaine, représentée par  $r_{ext}^v$  [déf. 4.15 p. 68] et à la puissance calorifique surfacique  $q_{ext}^s(P', t)$  reçue à la frontière :

$$\forall P' \in \partial \mathcal{D}_t^m, \quad q_{ext}^s(P', t) = -\mathbf{q}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P', t), \quad [\text{th. 4.18 p. 70}]$$

Le taux d'entropie d'origine extérieure au domaine matériel est donc :

$$\frac{d}{dt} S_{ext}(\mathcal{D}_t^m, t) = \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{r_{ext}^v E}{T_E} dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^m} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} ds_t$$

<sup>(12)</sup> Les thermodynamiciens disent aussi « entropie spécifique ». Le postulat d'extensivité de l'entropie est parfois appelé « principe de l'état local ».

<sup>(13)</sup> Contrairement aux définitions données en cinématique à propos des vitesses de déformation, le mot « taux » signifie ici « dérivée temporelle » et non « dérivée temporelle logarithmique ». Cette dénomination malencontreuse semble consacrée par l'usage. Elle est néanmoins susceptible d'induire des confusions chez les apprenants.

**Rappel** – Il n’y a pas d’apport de chaleur par convection car le principe est posé pour un domaine matériel. Le cas des domaines géométriques sera envisagé en section 5.5 [p. 86].

L’inégalité (5.3) [p.81] montre qu’au cours d’une évolution, il existe à l’intérieur du domaine matériel un taux de production interne d’entropie  $\frac{d}{dt}S_{int}$  (unité :  $W.K^{-1}$ ), *non négatif* par principe, dû à des processus internes au domaine matériel, *non précisés par le principe* :

$$\frac{d}{dt}S_{int}(\mathcal{D}^m, t) = \frac{d}{dt}S(\mathcal{D}^m, t) - \underbrace{\int_{\mathcal{D}_t} \frac{r_{ext}^v E}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} ds_t}_{-\frac{d}{dt}S_{ext}(\mathcal{D}_t^m, t)} \geq 0 \quad [\text{éq. (5.3) p. 81}] \quad (5.4)$$

Avec cet énoncé global instantané du second principe de la thermodynamique, l’entropie actuelle d’un domaine matériel  $S(\mathcal{D}^m, t)$  en cours d’évolution est définie même quand les variables d’état (notamment la température  $T$ ) sont des champs non uniformes et en évolution temporelle.

**Remarque** – Cet énoncé est évidemment toujours valable dans les cas particuliers (irréalistes) où les champs des variables d’état (températures ou autres) seraient « en équilibre » quel que soit le sens que l’on donne à ce mot<sup>(14)</sup>. Il n’est pas nécessaire de parler de la « température d’un système ».

## 5.4 Forme locale du second principe de la thermodynamique

- **Théorème 5.1** – L’axiome 4 du second principe de la thermodynamique appliqué à un domaine matériel est équivalent à l’inégalité différentielle locale suivante :

$$\rho \dot{s}^m - \frac{r_{ext}^v}{T} + \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T} \geq 0 \quad \text{pour toute évolution de particule} \quad (5.5)$$

**Démonstration** – En utilisant la dérivée temporelle d’une intégrale de masse sur un domaine matériel [éq. (2.14) p. 23] et le théorème de la divergence, l’inégalité de l’axiome 4 du second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel [éq. (5.4) p. 82] s’écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_t^m} \rho_E \dot{s}_E^m dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^m} \frac{r_{ext}^v E}{T_E} dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^m} \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T} dv_t \geq 0$$

En utilisant le lemme fondamental [th. 1.10 p. 16], on obtient le résultat. Dans l’équation (5.5) [p. 82], on a supprimé les indices  $E$  inutiles car  $\Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t) = \Psi(P, t)$ .

**Écritures « lagrangiennes »** – Si on préfère utiliser la description de Lagrange des champs dans le domaine matériel  $\mathcal{D}^m$ , l’axiome 4 du second principe de la thermodynamique [éq. (5.4) p. 82] s’écrit :

$$\int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L \dot{s}_L^m K_{vL} dv_0 - \int_{\mathcal{D}_0^m} \frac{r_{ext}^v L}{T_L} K_{vL} dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^m} \frac{\mathbf{q}_L}{T_L} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0 K_{vL} ds_0 \geq 0$$

Le théorème de la divergence et le lemme fondamental [th. 1.10 p. 16] conduisent à l’équation différentielle :

$$\rho_0 \dot{s}^m - K_v \frac{r_{ext}^v}{T} + \text{div}_L \left( K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \geq 0$$

où  $\rho_0 = K_v \rho = \rho(P, t_0)$  est la masse volumique *initiale*. Comme dans l’écriture lagrangienne de la conservation de l’énergie, certains auteurs posent  $\mathbf{q}_0 = K_v \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}$ . La signification physique de ce groupement de termes est obscure.

Une autre écriture locale avec des opérateurs lagrangiens s’obtient directement à partir de l’équation (5.5) [p. 82] sans introduction d’un vecteur  $\mathbf{q}_0$  artificiel :

$$\rho \dot{s}^m - \frac{r_{ext}^v}{T} + (\mathbf{grad}_L \frac{\mathbf{q}}{T}) : \mathbf{F}^{-T} \geq 0 \quad (\text{car } \text{div}_E \Psi = \mathbf{grad}_L \Psi : \mathbf{F}^{-T}, \forall \Psi)$$

<sup>(14)</sup> Voir « Équilibres » p. 66.

En utilisant l'identité <sup>(15)</sup> :

$$\operatorname{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T} = \frac{\operatorname{div}_E \mathbf{q}}{T} + \mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}_E \frac{1}{T} = \frac{\operatorname{div}_E \mathbf{q}}{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\operatorname{grad}_E T}{T^2} \quad (5.6)$$

L'inégalité locale de l'axiome 4 du second principe [éq. (5.5) p. 82] s'écrit encore :

$$\rho \dot{s}^m - \frac{r_{ext}^v}{T} + \frac{\operatorname{div}_E \mathbf{q}}{T} - \mathbf{q} \cdot \frac{\operatorname{grad}_E T}{T^2} \geq 0 \quad \text{pour toute évolution de particule}$$

Puisque  $T > 0$ , on peut multiplier par  $T$  chaque membre de l'inégalité sans changer son sens <sup>(16)</sup>. L'inégalité locale de l'axiome 4 du second principe de la thermodynamique s'écrit donc encore :

$$\rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \operatorname{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad \text{pour toute évolution de particule} \quad (5.7)$$

- **Définition 5.2 – Dissipation.** On appelle dissipation, le champ matériel scalaire, noté  $\Phi$ , non négatif, défini par :

$$\Phi = \rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \operatorname{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad [\text{éq. (5.7) p. 83}] \quad (\text{unité : } \text{W} \cdot \text{m}^{-3}) \quad (5.8)$$

En utilisant l'équation de la chaleur [éq. (4.10) p. 71] dans l'équation (5.8) [p. 83], on obtient une autre expression utile de la dissipation en une particule :

$$\Phi = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) - \mathcal{P}_{int}^{v \text{ mec}} - \frac{\mathbf{q} \cdot \operatorname{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad \text{où} \quad \mathcal{P}_{int}^{v \text{ mec}} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v}_{(\text{souvent négligé})} \quad (5.9)$$

Avec la définition (5.8) [p. 83] de la dissipation, on peut reformuler le théorème 5.1 [p. 82] :

- **Théorème 5.3 – Non négativité de la dissipation.** Avec la définition de la dissipation  $\Phi$ , la forme locale de l'axiome 4 du second principe 5.1 [p. 82] de la thermodynamique s'écrit :

$$\Phi(P, t) \geq 0, \quad \text{dans toute évolution de particule} \quad (5.10)$$

Le second principe de la thermodynamique n'affirme rien *a priori* sur la nature des processus internes qui produisent cette dissipation. Toutefois, une partie de la dissipation (le terme  $-\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \operatorname{grad}_E T$ ) traduit la dissipation en une particule due à un échange thermique interne par conduction. Cette partie de la dissipation est non négative par principe en raison de l'axiome 2 du second principe de la thermodynamique [éq. (5.1) p. 80]. Le reste de la dissipation reflète donc la production ou la perte d'entropie due à des processus internes (exothermiques ou endothermiques) *autres que les échanges thermiques internes par conduction*. On sépare donc la dissipation en la somme de deux termes :

- **Définition 5.4 – Dissipation thermique.** On appelle dissipation thermique, la puissance volumique *non négative* (axiome 2) due aux échanges thermiques internes par conduction, définie par :

$$\Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \operatorname{grad}_E T \geq 0 \quad [\text{axiome 2, éq. (5.1) p. 80}] \quad (5.11)$$

<sup>(15)</sup> Voir la section 3.6.5 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 4 p. 3].

<sup>(16)</sup> Cette multiplication par  $T > 0$  n'ajoute rien au raisonnement. On la fait ici seulement pour aboutir à la définition traditionnelle des dissipations.

- **Définition 5.5 – Dissipation intrinsèque.** On appelle dissipation intrinsèque, le reste de la dissipation :

$$\Phi_{int} = \Phi - \Phi_{th} = \rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \text{div}_E \mathbf{q} \quad [\text{éq. (5.8) p. 83}] \quad (5.12)$$

$$= \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) - \mathcal{P}_{int}^{v\text{mec}} \quad [\text{éq. (5.9) p. 83}] \quad (5.13)$$

La dissipation intrinsèque est due à des productions/absorptions de chaleur en une particule *autres que les échanges thermiques par conduction* (frottement, changement de phase, réaction chimique, interaction avec un rayonnement éventuel).

Avec les définitions précédentes des différentes dissipations, on peut donner la forme locale complète du second principe de la thermodynamique :

- **Théorème 5.6 – Forme locale du second principe de la thermodynamique.** *Dans toute évolution de particule* on a nécessairement les deux inégalités locales suivantes :

$$\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th} \geq 0 \quad [\text{axiome 4}] \quad \text{et} \quad \Phi_{th} \geq 0 \quad [\text{axiome 2}] \quad (5.14)$$

Comme on peut le constater, le second principe de la thermodynamique n'impose pas que la dissipation intrinsèque  $\Phi_{int}$  en une particule soit non négative. Il impose seulement :

$$\Phi_{int} \geq -\Phi_{th} \quad \text{dans toute évolution de particule}$$

Quand la dissipation intrinsèque est négative, sa valeur absolue est néanmoins limitée par la dissipation thermique :

$$\text{si } \Phi_{int} < 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_{int} = -|\Phi_{int}| \geq -\Phi_{th} \quad \Rightarrow \quad |\Phi_{int}| \leq \Phi_{th}$$

**Commentaire –** Contrairement au taux de production interne d'entropie  $\frac{d}{dt} S_{int}$  évoqué dans l'équation globale (5.4) [p. 82] qui est dû à *tous les processus internes* se produisant actuellement dans le domaine matériel  $\mathcal{D}_t^m$ , la dissipation *intrinsèque* en une particule  $\Phi_{int}(P, t)$  n'est produite que par des processus internes locaux *autres que la conduction thermique interne*. Elle peut être négative s'il se produit en cette particule des processus internes *endothermiques* pendant son évolution, comme par exemple une fusion, une vaporisation, un changement de phase solide/solide endothermique ou une réaction chimique endothermique. La chaleur nécessaire à un processus interne endothermique en une particule ne peut être fournie que par un échange interne de chaleur de la particule avec ses voisines (conduction avec  $\text{div}_E \mathbf{q} < 0$ , la particule est un « puits de chaleur ») ou par un éventuel rayonnement d'origine extérieure  $r_{ext}^v$  traversant le milieu continu [éq. 5.12 p. 84].

En revanche, si aucun processus interne endothermique ne se produit pendant l'évolution de la particule, la dissipation intrinsèque  $\Phi_{int}$  en cette particule est non négative. Ce sera le cas dans les modèles de comportement développés dans la suite<sup>(17)</sup> car, dans ces modèles, on supposera qu'il ne se produit aucune réaction chimique ou changement de phase. De tels milieux continus seront dits *monoconstituants*<sup>(18)</sup>.

<sup>(17)</sup> C'est-à-dire au chapitre 6 [p. 93] et dans les cours *Comportement élastique* et *Comportements inélastiques*, du même auteur. Voir les liens dans les notes 20 et 21 p. 85

<sup>(18)</sup> La modélisation continue de milieux multiconstituant est plus compliquée : les variables d'état contiennent nécessairement les concentrations locales de chaque constituant (masses volumiques partielles). Le principe de la conservation de la masse doit donc être reformulé avec les masses volumiques partielles. De plus, la définition des contraintes dans un milieu continu multiconstituant ne semble pas faire consensus chez tous les auteurs.

L'expression de la dissipation [éq. (5.9) p. 83] montre que, pour un modèle de milieu continu donné (la liste des variables d'état et les fonctions d'état énergie interne massique et entropie massique sont connues), la dissipation actuelle en une particule en évolution dépend des paramètres suivants :

1. *l'état actuel de la particule* (au moins par  $\rho$  et  $T$ , mais aussi par d'éventuelles autres variables d'état) ;
2. *la vitesse d'évolution thermodynamique* actuelle de la particule [déf. 4.12 p. 64] (par les dérivées particulières des variables d'état) ;
3. *la cinématique du mouvement* (au moins par le tenseur des taux de déformation actuel  $\mathbf{D}$ , mais aussi par les dérivées particulières de variables d'état cinématiques) ;
4. *l'environnement thermique* actuel de la particule (par  $\mathbf{grad} T$ ).

Comme on le verra dans la suite, les deux inégalités  $\Phi \geq 0$  et  $\Phi_{th} \geq 0$  imposées par le second principe de la thermodynamique impliquent l'existence de lois de comportement<sup>(19)</sup>, sans toutefois préciser leur expression.

**Pseudo « potentiel de dissipation »** – Certains auteurs supposent l'existence d'un « potentiel de dissipation » dont la signification physique et l'utilité restent obscures pour l'auteur : l'évaluation de la dissipation thermique en une particule en évolution se fait avec la définition 5.4 [p. 83] et l'évaluation la dissipation intrinsèque en une particule en évolution se fait avec la définition 5.5 [p. 84].

- **Définition 5.7 – Modèle de milieu continu thermodynamiquement admissible.** Un modèle de milieu continu est thermodynamiquement admissible si le second principe est respecté, c'est-à-dire :

1. la fonction d'état *entropie massique* existe ;
2. les deux inégalités  $\Phi \geq 0$  et  $\Phi_{th} \geq 0$  sont satisfaites *dans toute évolution de particule envisageable* par le modèle de milieu continu.

Des exemples de construction de modèles classiques de milieux continus (les fluides simples) dont les lois de comportement sont thermodynamiquement admissibles, seront détaillés dans le chapitre 6 [p. 93]. D'autres modèles de comportement pour les solides déformables seront construits dans les cours *Comportement élastique*<sup>(20)</sup> et *Comportements inélastiques*<sup>(21)</sup>.

**Inégalité de Clausius-Duhem** – Cette inégalité, souvent évoquée dans les textes parlant de thermodynamique des milieux continus, n'est qu'une autre manière d'exprimer la non négativité de la dissipation. On introduit une nouvelle fonction d'état auxiliaire appelée *énergie libre de Helmholtz massique* définie par la combinaison des deux fonctions d'état fondamentales  $e^m$  et  $s^m$  et de la variables d'état  $T$  :

$$\psi^m = e^m - T s^m \quad \Leftrightarrow \quad e^m = \psi^m + T s^m \quad (5.15)$$

Sa dérivée particulière est donc :

$$\dot{\psi}^m = \dot{e}^m - s^m \dot{T} - T \dot{s}^m \quad \Leftrightarrow \quad \dot{e}^m = \dot{\psi}^m + s^m \dot{T} + T \dot{s}^m$$

<sup>(19)</sup> Des exemples de lois dont l'existence est impliquée par une inégalité est donné plus loin en section 5.7 [p. 87].

<sup>(20)</sup> <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/elas.html>  
ou bien <https://cel.hal.science/cel-00827790>

<sup>(21)</sup> <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/inelas.html>  
ou bien <https://cel.hal.science/cel-01744164>

En remplaçant  $e^m$  dans l'expression de la dissipation (5.9) [p. 83], on obtient une autre expression de la dissipation, ne faisant intervenir que les deux fonctions d'état  $\psi^m$  et  $s^m$ .

$$\Phi = \underbrace{-\rho (\psi^m + s^m \dot{T})}_{\Phi_{int}} - \underbrace{\mathcal{P}_{int}^{vmec}}_{\Phi_{th}} - \underbrace{\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T}_{\Phi_{th}} \geq 0 \quad \text{où} \quad \mathcal{P}_{int}^{vmec} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v}_{\text{(souvent négligé)}}$$

Sous cette forme, la non négativité de la dissipation est appelée *inégalité de Clausius-Duhem*.

En thermomécanique des solides déformables, le couple de fonctions d'état  $(\psi^m, s^m)$  est souvent préféré au couple fondamental  $(e^m, s^m)$  naturellement introduits par les deux principes de la thermodynamique, car le groupement de termes  $e^m - T s^m$  apparaît souvent dans les calculs. Il rend donc l'écriture de certaines formules plus concises<sup>(22)</sup>.

*Ces changements d'écriture ne sont pas essentiels* : avec la définition de la fonction d'état auxiliaire  $\Psi^m$  [éq. (5.15) p. 85], la connaissance du couple de fonctions d'état  $(\psi^m, s^m)$  est équivalente à la connaissance du couple de fonctions d'état fondamental  $(e^m, s^m)$ .

**Réinterprétation de l'équation de la chaleur** – L'expression locale du premier principe de la thermodynamique (équation de la chaleur) s'écrit :

$$\rho \dot{e}^m = -\mathcal{P}_{int}^{vmec} + r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} \quad [\text{éq. (4.10) p. 71}]$$

Le second principe de la thermodynamique introduit la notion de dissipation intrinsèque :

$$\Phi_{int} = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) - \mathcal{P}_{int}^{vmec} \quad [\text{éq. (5.13) p. 84}]$$

En reportant la valeur de  $\mathcal{P}_{int}^{vmec}$  dans l'équation de la chaleur, il vient :

$$\dot{s}^m = \frac{1}{\rho T} (r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} + \Phi_{int}) \quad (5.16)$$

Réécrite sous cette forme, l'équation de la chaleur illustre bien le fait que le taux d'entropie massique  $\dot{s}^m$  en une particule est dû à l'échange de chaleur avec l'extérieur de la particule (rayonnement  $r_{ext}^v$  et conduction thermique  $\text{div}_E \mathbf{q}$ ) et à la production/absorption de chaleur  $\Phi_{int}$  due aux autres processus internes en cette particule (dissipation intrinsèque) tels que frottement, changements de phase, réactions chimiques<sup>(23)</sup>.

## 5.5 Second principe de la thermodynamique pour un domaine géométrique

Soit  $\mathcal{D}^g$  un domaine géométrique de position actuelle  $\mathcal{D}_t^g$ . En intégrant sur le domaine géométrique l'inégalité locale (5.5) [p. 82], il vient :

$$\int_{\mathcal{D}_t^g} \rho_E \dot{s}_E^m dv_t - \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{r_{ext}^v E}{T_E} dv_t + \int_{\mathcal{D}_t^g} \text{div}_E \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) dv_t \geq 0$$

$$\int_{\mathcal{D}_t^g} \dot{s}_E^m dm - \int_{\mathcal{D}_t^g} \frac{r_{ext}^v E}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^g} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} dv_t \geq 0 \quad (\text{th. de la divergence})$$

<sup>(22)</sup> Toutefois, le qualificatif « libre » et l'interprétation physique du groupement de termes  $e - T s$  restent obscurs pour l'auteur, sauf peut-être dans certaines évolutions particulières de certains milieux continus. En revanche, les variations de l'énergie interne et de l'entropie ont un sens physique bien défini par les deux principes de la thermodynamique quel que soit le milieu continu et quelle que soit son évolution.

<sup>(23)</sup> Relire *Commentaire* p. 84.

En utilisant la dérivée d'une intégrale de masse sur un domaine géométrique (2.16) [p. 24], on fait apparaître le flux convectif d'entropie entrant par la frontière :

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}_t^s} s_E^m dm}_{\frac{dS}{dt}} \geq \int_{\mathcal{D}_t^s} \frac{r_{ext E}^v}{T_E} dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \frac{\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t}{T_E} dv_t + \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}_t^s} \rho_E s_E^m (\mathbf{v}^f - \mathbf{v}_E) \cdot \mathbf{n}_t ds_t}_{\phi_s} \quad (5.17)$$

Dans un domaine géométrique, le taux d'entropie est supérieur ou égal au taux d'entropie d'origine extérieure, c'est-à-dire par rayonnement, par conduction à la frontière et par flux convectif d'entropie entrant à la frontière.

**Remarque** – On peut récrire l'équation (5.17) [p. 87] sous la forme :

$$\frac{dS}{dt} \geq \int_{\mathcal{D}_t^s} \left( \frac{r_{ext E}^v}{T_E} - \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T} \right) dv_t + \phi_s$$

En comparant avec l'équation de bilan d'une grandeur extensive pour un domaine géométrique [éq. (1.15) p. 16, avec  $\Psi = s$ ], l'intégrande  $\tau_s = \frac{r_{ext E}^v}{T_E} - \text{div}_E \frac{\mathbf{q}}{T}$  peut être interprété comme un « taux de production interne d'entropie massique d'origine extérieure », à bien distinguer de  $\frac{d}{dt} S_{int}$ .

## 5.6 Changements d'observateur

- **Théorème 5.8 – Objectivité du gradient eulérien des températures.** Le gradient eulérien du champ matériel des températures actuelles est un champ vectoriel objectif.

**Démonstration** – Le champ des températures est un champ matériel scalaire objectif par principe [axiome 1 p. 80]. Or, on montre en cinématique<sup>(24)</sup> que le gradient eulérien d'un champ scalaire objectif est un champ vectoriel objectif.

- **Théorème 5.9 – Objectivité des dissipations.** La dissipation totale, la dissipation thermique et la dissipation intrinsèque sont des champs matériels scalaires objectifs.

**Démonstration** – Les grandeurs qui interviennent dans les définitions de la dissipation [éq. (5.9) p. 83], de la dissipation thermique [éq. (5.11) p. 83] et de la dissipation intrinsèque [éq. (5.13) p. 84] sont toutes des grandeurs objectives. Ces trois dissipations sont donc des grandeurs scalaires objectives.

## 5.7 Nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique

L'axiome 2 de l'énoncé du second principe de la thermodynamique pour un domaine matériel de milieu continu donné en section 5.3 [p. 80] impose l'inégalité :

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T \leq 0 \quad \text{dans toute évolution de particule} \quad (5.18)$$

Cette inégalité doit être vraie en toutes situations, et notamment quel que soit l'environnement thermique actuel d'une particule représenté par le vecteur  $\mathbf{grad}_E T$ . On en déduit que le vecteur courant de chaleur  $\mathbf{q}$  doit être nécessairement au moins fonction du vecteur  $\mathbf{grad}_E T$  :

$$\forall \mathbf{grad}_E T, \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{f}_q \text{ tel que } \mathbf{q} = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, \dots)$$

<sup>(24)</sup> Th. 3.13 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4.]



La fonction  $\mathbf{f}_q$  est appelée *loi de comportement thermique* ou *loi de conduction thermique*. L'inégalité (5.18), vraie  $\forall \mathbf{grad}_E T$ , implique que la fonction  $\mathbf{f}_q$  existe, sans pour autant la préciser. Un large choix reste possible.

La loi la plus simple que l'on puisse choisir est la très populaire *loi de Fourier* :

$$\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}_E T \quad \text{avec} \quad \alpha \geq 0 \quad (5.19)$$

Le lecteur vérifiera aisément que si la conductivité thermique  $\alpha$  est un scalaire objectif non négatif, cette loi de comportement thermique satisfait bien la non négativité de la dissipation thermique et qu'elle est bien universelle<sup>(25)</sup>. Cette loi linéaire simple n'est *a priori* valable que pour des milieux continus isotropes, car aucune référence n'est faite à des directions matérielles d'anisotropie (la conductivité thermique  $\alpha$  est la même quelle que soit l'orientation de  $\mathbf{grad}_E T$  par rapport aux directions matérielles d'anisotropie).

On peut construire des lois de comportement thermiques isotropes plus évoluées : le scalaire  $\alpha$  peut être remplacé par toute fonction isotrope (au sens mathématique) à valeur non négative de la forme  $\alpha(\mathbf{grad}_E T, T, \boldsymbol{\chi}_i, \mathbf{D}, \dots)$ . On obtient ainsi des lois de conduction thermique isotropes plus réalistes.

**Remarques** – La conductivité thermique  $\alpha$  est normalement fonction de la température.

Quand on dit que la loi de conduction thermique est « non linéaire », cela signifie généralement que  $\alpha$  est aussi fonction que de  $\mathbf{grad}_E T$ .

Par ailleurs, il n'est pas déraisonnable de penser que la conductivité thermique d'un solide déformable puisse dépendre d'une variable d'état comme la déformation.

Enfin, les arguments de la fonction scalaire objective  $\alpha(\mathbf{grad}_E T, T, \boldsymbol{\chi}_i, \mathbf{D}, \dots)$  étant objectifs, la fonction  $\alpha$  est isotrope (au sens mathématique). Le théorème des fonctions isotropes implique qu'il existe une fonction  $\bar{\alpha}$  d'arguments scalaires telle que  $\alpha(\dots) = \bar{\alpha}(\dots)$  [éq. (4.1) p. 62].

On peut aussi construire des lois de conduction thermique pour des milieux continus anisotropes<sup>(26)</sup>. Par exemple, pour un milieu continu à une seule direction d'anisotropie<sup>(27)</sup> dont la direction actuelle d'anisotropie est le vecteur unitaire  $\mathbf{n}_t$  (ou la direction non orientée  $\mathbf{N}_t = \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t$ ), on peut prendre des lois de conduction thermique de la forme suivante :

$$\mathbf{q}_E = -\alpha_1(\dots) \underbrace{(\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t}_{\mathbf{grad}_E T \cdot (\mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t)} - \alpha_2(\dots) \left( \mathbf{grad}_E T - \underbrace{(\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t}_{\mathbf{grad}_E T \cdot (\mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t)} \right)$$

où  $\alpha_1$  est la conductivité thermique dans la direction d'anisotropie, et  $\alpha_2$  est la conductivité thermique transverse (c'est-à-dire perpendiculairement à la direction d'anisotropie). On laisse le soin au lecteur de vérifier que :

1. cette loi de conductivité thermique satisfait le second principe de la thermodynamique si les fonctions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont à valeur scalaire non négative ;
2. cette loi de conductivité thermique est universelle si les fonctions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont des fonctions non négatives isotropes de leurs arguments tensoriels objectifs.

<sup>(25)</sup> En utilisant l'objectivité du courant de chaleur  $\mathbf{q}$  [th. 4.22 p. 73] de et celle de  $\mathbf{grad}_E T$  [th. 5.8 p. 87], on vérifie aisément que la loi est la même pour un autre observateur  $\tilde{\mathcal{H}}$  :  $\tilde{\mathbf{q}} = -\alpha(\mathbf{grad}_E T)^\sim$  avec le même  $\alpha$ .

<sup>(26)</sup> En général ce sont des milieux continus solides déformables. Toutefois, certains fluides peuvent présenter des comportements anisotropes dans certaines situations (« cristaux liquides » dans un champ électrique).

<sup>(27)</sup> On les appelle milieux continus « isotropes transverses ». Ce sont, par exemple, des solides déformables fibreux ou feuilletés que l'on veut modéliser macroscopiquement comme des milieux continus.

## 5.8 Capacités thermiques locales dans une évolution

La *capacité thermique* <sup>(28)</sup> ( $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) (anciennement appelée chaleur massique <sup>(29)</sup> ou *capacité calorifique*), est traditionnellement définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 Kelvin 1 kg de matière dans une certaine transformation finie dont les états initiaux et finaux sont à température uniforme ( $\mathbf{grad}_E T_1 = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{grad}_E T_2 = \mathbf{0}$ ) mais différentes ( $T_2 - T_1 = 1$  K). On va en donner ici une définition équivalente mais locale (températures non uniformes) et instantanée <sup>(30)</sup>.

Dans un milieu continu en évolution, les puissances calorifiques volumiques reçues en une particule ont deux origines :

1. les sources extérieures à la particule (conduction thermique et rayonnement) ;
2. les productions absorbions dues aux processus internes autres que la conduction thermique en cette particule.

$$\mathcal{P}_{ext}^{v\,cal} = r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} = \rho \dot{e}^m + \mathcal{P}_{int}^{vmec} \quad [\text{conservation de l'énergie (4.10) p. 71}] \quad (5.20)$$

$$\text{et } \Phi_{int} = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) - \mathcal{P}_{int}^{vmec} \quad [\text{dissipation intrinsèque (5.13) p. 84}] \quad (5.21)$$

La somme des deux ( $\rho T \dot{s}^m$ ) est la puissance calorifique volumique totale actuelle reçue par une particule [éq. (5.16) p. 86].

On peut alors définir une capacité thermique locale actuelle  $C$  qui donne la vitesse d'échauffement  $\dot{T}$  d'une particule due à ces puissances calorifiques volumiques :

$$C \dot{T} = \frac{\mathcal{P}_{ext}^{v\,cal} + \Phi_{int}}{\rho} = T \dot{s}^m \quad [\text{éq. (5.20) + éq. (5.21)}]$$

$$C = \frac{T}{\dot{T}} \dot{s}^m = T \partial_T \bar{f}_s + T \sum_{j=2}^m \partial_j \bar{f}_s \frac{\dot{I}_j}{\dot{T}} \quad [\text{éq. (5.2) p. 81}]$$

- **Définition 5.10 – Capacité thermique.** La capacité thermique en une particule dans une évolution à température variable au cours du temps ( $\dot{T} \neq 0$ ) est définie par :

$$C = T \partial_T \bar{f}_s + T \sum_{j=2}^m \partial_j \bar{f}_s \frac{\dot{I}_j}{\dot{T}} \quad \text{où } \{T, I_2, \dots, I_m\} \text{ sont les variables d'état réduites} \quad (5.22)$$

La capacité thermique  $C$  dépend donc *a priori* à la fois de l'état actuel  $\{T, I_2, \dots, I_m\}$  et de la direction actuelle de la vitesse d'évolution  $\{\dot{\mathbf{I}}/\dot{T}\}$  de la particule dans l'espace des états  $\mathbb{R}^m$ .

On ne peut donc parler de capacité thermique que pour une certaine direction d'évolution dans l'espace des états  $\mathbb{R}^m$  <sup>(31)</sup>. Pour des vitesses d'évolution telles que  $\dot{T} = 0$  elle n'est évidemment pas définie. Contrairement à ce qui est parfois affirmé (ou sous entendu), *la capacité thermique n'est pas une caractéristique du milieu continu* : il faut préciser dans quel type d'évolution elle est mesurée.

<sup>(28)</sup> Il semble que ce soit la dénomination actuellement recommandée.

<sup>(29)</sup> Cette dénomination est trompeuse, elle suggère que l'unité est en  $\text{J.kg}^{-1}$ .

<sup>(30)</sup> L'apport de chaleur ne se fait pas dans une évolution thermodynamique qui serait une « succession d'états d'équilibre » et la variation de température dans les évolutions n'est pas de 1 Kelvin.

<sup>(31)</sup> Par exemple, en thermodynamique des gaz ( $m = 2$ , les variables d'état sont  $\{T, \rho\}$ ), on utilise couramment une capacité thermique dans une évolution à volume massique ( $v = \rho^{-1}$ ) constant notée  $C_v$  et une capacité thermique dans une évolution à pression constante notée  $C_p$  (une autre direction d'évolution dans l'espace des états  $\mathbb{R}^2$ ).

Bien noter que la définition de la capacité thermique (5.22) [p. 89] est valable pour tous les milieux continus (solides liquides ou gaz).

## 5.9 En bref...

L'expression globale de l'axiome 4 du second principe [éq. (5.3) p. 81] pour un domaine exprime que le taux d'entropie du domaine  $\frac{d}{dt}S(\mathcal{D}, t)$  n'est pas dû qu'à l'entropie reçue de l'extérieur<sup>(32)</sup> mais aussi à un taux de production interne d'entropie *non négatif* dû à des processus internes (conduction thermique interne et autres processus comme le frottement (exothermique), des réactions chimiques ou des changements de phase (endothermiques ou exothermiques)).

L'expression locale du second principe de la thermodynamique se résume en deux inégalités :  $\Phi_{th} \geq 0$  qui exprime que, lors de toute évolution la chaleur va du chaud vers le froid, et  $\Phi = \Phi_{th} + \Phi_{int} \geq 0$  qui exprime que dans toute évolution la dissipation en une particule est non négative.

Ces deux inégalités sont à respecter pour toute évolution de particule

- La dissipation thermique  $\Phi_{th}$ , due aux échanges thermiques internes, est toujours non négative.
- La dissipation intrinsèque  $\Phi_{int}$  (due à des processus internes *autres que les conductions thermiques internes*) est soumise à l'inégalité  $\Phi_{int} \geq -\Phi_{th}$ . Elle peut donc être négative. Toutefois, dans des milieux continus où le seul processus interne contribuant à la dissipation intrinsèque  $\Phi_{int}$  est le frottement (exothermique), on a l'inégalité  $\Phi_{int} \geq 0$ .

**Remarques** – Même en l'absence de dissipation intrinsèque ( $\Phi_{int} = 0$ ), c'est-à-dire pas de frottement (est-ce bien raisonnable ?) ni de changement de phase ni de réaction chimique, la nullité de la dissipation totale  $\Phi$  dans une évolution est complètement irréaliste : pour que la dissipation thermique  $\Phi_{th}$  soit aussi nulle, il faudrait que toutes les particules d'un domaine en évolution partent d'une température uniforme ( $\mathbf{grad} T = \mathbf{0}$  partout) et que la vitesse d'échauffement  $\dot{T}$  soit la même pour toutes les particules pour garder  $\mathbf{grad} T = \mathbf{0}$  partout à chaque instant !

L'inégalité  $\Phi_{th} \geq 0$  conduit à la nécessité d'existence d'une loi de comportement thermique. De même, dans la construction de modèles de comportement de milieux continus où le seul processus interne contribuant à la dissipation intrinsèque  $\Phi_{int}$  est le frottement, l'inégalité  $\Phi_{int} \geq 0$  conduira à la nécessité d'existence d'une loi de comportement mécanique. Non seulement ces lois de comportement (thermique et mécanique) existent nécessairement, mais elles doivent satisfaire les inégalités locales du second principe *pour toute évolution de particule*. Les choix possibles restent néanmoins très larges. Des lois de comportement ainsi construites sont *thermodynamiquement admissibles*.

On verra des exemples de construction de modèles de comportement thermodynamiquement admissible pour les fluides simples dans le chapitre suivant. D'autres exemples de modèles de comportement thermodynamiquement admissibles pour les solides déformables seront construits dans les cours *Comportement élastique* et *Comportements inélastiques*<sup>(33)</sup>, du même auteur.

Dans la résolution d'un problème de thermomécanique des milieux continus dans lequel les lois de comportement (mécanique et thermique) sont données, le second principe de la thermodynamique n'apparaît pas explicitement dans les équations à résoudre car il est normalement automatiquement satisfait dans toute évolution par le modèle de comportement utilisé. En effet, pour ne pas être thermodynamiquement absurde, toute loi de comportement (mécanique ou thermique) se doit d'être thermodynamiquement admissible !

<sup>(32)</sup> Par conduction, convection et rayonnement pour les domaines géométriques ; par conduction et rayonnement seulement pour les domaines matériels.

<sup>(33)</sup> Voir les liens dans la note 20 [p. 85] et la note 21 [p. 85].

**Remarque finale** – Le lecteur averti aura sans doute remarqué que les vocables « évolution réversible » ou « évolution irréversible » n’ont pas été employés dans ce chapitre traitant du second principe de la thermodynamique. Dans ses lectures, l’auteur a trouvé presque autant de « définitions » de la réversibilité que d’auteurs. Ces différentes « définitions » sont pour la plupart non équivalentes, elles varient même souvent dans un même texte suivant le contexte, voire ce « concept » n’est « défini » que par des exemples d’expériences bien souvent idéalisées. On parle aussi parfois d’une « renversabilité » qui serait différente de la « réversibilité ».

Une évolution réversible est-elle équivalente ou implique-t-elle l’isentropie ou l’isentropie adiabatique ? L’implication inverse est-elle vraie ? est-ce une notion globale ou locale ? Est-ce une « succession d’états d’équilibre » éventuellement « infiniment lente » ? Quoi qu’il en soit, l’introduction de ces vocables (qui suggèrent peut-être par leur terminologie des idées fausses) n’ont pas paru nécessaires à l’auteur dans les développements de ce chapitre.



# Le modèle fluide simple

L'objet de ce chapitre est d'illustrer comment on peut construire des modèles thermodynamiquement admissibles de fluides simples. On verra comment les deux inégalités du second principe de la thermodynamique impliquent l'existence d'une loi de comportement mécanique et d'une loi de comportement thermique, que ces lois ne peuvent pas être choisies arbitrairement et qu'enfin le modèle classique *fluide newtonien* est le plus simple d'entre eux.

Il est tout à fait possible d'ignorer ce chapitre et de poser arbitrairement la loi de comportement mécanique traditionnelle des fluides newtoniens ainsi que la loi de comportement thermique de Fourier en se contentant de vérifier une fois pour toutes qu'elles sont bien thermodynamiquement admissibles. Nonobstant, la démarche de construction des lois de comportement exposée dans ce chapitre est pédagogiquement intéressante<sup>(1)</sup> : elle montre comment le modèle *fluide newtonien* peut se construire à partir du second principe de la thermodynamique et elle ouvre la voie à la construction de modèles de comportement thermodynamiquement admissibles de fluides simples non newtoniens.

## 6.1 Définition d'un fluide simple

- **Définition 6.1 – Fluide simple.** On appelle fluide simple, un milieu continu dont les deux variables d'état indépendantes sont la température  $T$  et la masse volumique  $\rho$  [item 1 p. 59]. De plus, dans ce modèle, on néglige la puissance volumique des efforts intérieurs à distance<sup>(2)</sup>. La puissance mécanique volumique des efforts intérieurs dans un fluide simple se réduit donc à :

$$\mathcal{P}_{int}^{vmec} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (3.56) p. 54}]$$

La présence de la température dans les variables d'état est imposée par l'item 1 [p. 80] du second principe de la thermodynamique. Le choix de la masse volumique comme seule autre variable d'état traduit l'intention de ne pas distinguer l'état de deux particules de fluide simple ayant la même température autrement que par la densité volumique de masse actuelle, sans référence à une déformation par rapport à une forme particulière ni à une éventuelle direction d'anisotropie. Les fluides simples n'ont pas de forme propre qui pourrait donner un sens physique à un tenseur de déformation par rapport à une forme propre. Avec seulement deux variables d'état scalaires indépendantes et objectives, un fluide simple est un des modèles de milieux continus les plus simples que l'on puisse construire.

<sup>(1)</sup> La démarche suivie dans ce chapitre n'est pas la démarche historique. Historiquement la plupart des lois de comportement usuelles ont été proposées en idéalisant des constatations expérimentales *sans se soucier si elles étaient thermodynamiquement admissibles ou non*. C'est donc un peu par chance que la plupart le sont.

<sup>(2)</sup> Autogravitation, etc.

N'ayant que deux variables d'état scalaires indépendantes, l'espace des états [déf. 4.10 p. 63] d'un fluide simple est de dimension 2 ( $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^2$ ).

Les deux fonctions d'état fondamentales *énergie interne massique*  $e^m$  et *entropie massique*  $s^m$  sont donc des fonctions des deux variables d'état indépendantes  $(T, \rho)$  :

$$e^m(P, t) = f_e(T(P, t), \rho(P, t)) \quad ; \quad s^m(P, t) = f_s(T(P, t), \rho(P, t))$$

et leurs dérivées particulières s'écrivent :

$$\dot{e}^m = \partial_T f_e \dot{T} + \partial_\rho f_e \dot{\rho} \quad ; \quad \dot{s}^m = \partial_T f_s \dot{T} + \partial_\rho f_s \dot{\rho}$$

Les expressions des deux fonctions d'état fondamentales  $f_e$  et  $f_s$  en fonction des variables d'état  $(T, \rho)$  sont caractéristiques de chaque fluide simple.

## 6.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique

D'une manière générale, la dissipation dans un milieu continu s'écrit [éq. (5.9) p. 83] :

$$\Phi = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad \text{pour toute évolution de toute particule}$$

En détaillant les dérivées particulières  $\dot{s}^m$  et  $\dot{e}^m$  pour un fluide simple, il vient :

$$\Phi = \rho (T \partial_T f_s - \partial_T f_e) \dot{T} + \rho (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) \dot{\rho} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad (6.1)$$

Cette inégalité doit être satisfaite *pour toute évolution de toute particule*, c'est-à-dire :

- pour toute vitesse d'évolution actuelle dans l'espace des états :  $\forall \dot{T} \forall \dot{\rho}$ ,
- pour tout mouvement actuel :  $\forall \mathbf{D}$ ,
- pour tout état actuel de particule :  $\forall T > 0 \forall \rho > 0$ ,
- pour tout environnement thermique actuel de la particule :  $\forall \mathbf{grad}_E T$ .

Or la dérivée particulière  $\dot{\rho}$  et le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  ne peuvent pas varier indépendamment : ces deux grandeurs sont liées par le principe de la conservation de la masse :

$$\dot{\rho} = -\rho \operatorname{tr} \mathbf{D} \quad [\text{éq. (2.4) p. 20}] \quad (6.2)$$

Afin d'exploiter correctement les deux conditions  $\forall \dot{\rho}$  et  $\forall \mathbf{D}$ , on va éliminer la condition  $\forall \dot{\rho}$  en décomposant le tenseur  $\mathbf{D}$  en partie sphérique et de trace nulle :

$$\mathbf{D} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}}{3} \mathbf{G} + \mathbf{dev} \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \frac{\operatorname{tr} \mathbf{D}}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{G} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{dev} \mathbf{D} = -\frac{\dot{\rho}}{3\rho} \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{dev} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{dev} \mathbf{D}$$

Après élimination de  $\dot{\rho}$ , la non négativité de la dissipation (6.1) [p. 94] devient :

$$\rho (T \partial_T f_s - \partial_T f_e) \dot{T} - \rho^2 \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2} \right) \operatorname{tr} \mathbf{D} + \mathbf{dev} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{dev} \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (6.3)$$

- $\forall \dot{T}$  (vitesse actuelle d'évolution de la température de la particule),
- $\forall \mathbf{D}$  (taux de déformation actuel), c'est-à-dire :  $\forall \operatorname{tr} \mathbf{D}$  et  $\forall \mathbf{dev} \mathbf{D}$ ,
- $\forall \mathbf{grad}_E T$  (environnement thermique actuel de la particule),

où chaque grandeur  $\dot{T}$ ,  $\text{tr}\mathbf{D}$ ,  $\text{dev}\mathbf{D}$  et  $\text{grad}_E T$  peut prendre *indépendamment* une valeur arbitraire.

On considère les deux « vecteurs généralisés »  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{V}_3^{\otimes sd} \times \mathbb{V}_3$  suivants <sup>(3)</sup> :

$$\mathbf{x} = \left\{ \rho \left( T \partial_T f_s - \partial_T f_e \right), -\rho^2 \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\text{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2} \right), \text{dev}\boldsymbol{\sigma}, -\frac{\mathbf{q}}{T} \right\}$$

$$\mathbf{y} = \left\{ \dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \text{grad}_E T \right\}$$

Avec ces définitions, la non négativité de la dissipation (6.3) [p. 94] se résume sous la forme :

$$\forall \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \bullet \mathbf{y} \geq 0 \quad \text{où « } \bullet \text{ » est un « produit scalaire généralisé » dans } \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{V}_3^{\otimes sd} \times \mathbb{V}_3$$

Le vecteur  $\mathbf{x}$  est donc nécessairement au moins fonction du vecteur  $\mathbf{y}$ . On en déduit la *nécessité de l'existence* des quatre fonctions  $f_1 \in \mathbb{R}$ ,  $f_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{f}_3 \in \mathbb{V}_3^{\otimes 2sd}$  et  $\mathbf{f}_4 \in \mathbb{V}_3$  suivantes :

$$x_1 = f_1(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow \rho (T \partial_T f_s - \partial_T f_e) = f_1(\dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots) \quad (6.4)$$

$$x_2 = f_2(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow -\rho^2 \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e - \frac{\text{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3\rho^2} \right) = f_2(\dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots) \quad (6.5)$$

$$\mathbf{x}_3 = \mathbf{f}_3(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow \text{dev}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_3(\dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots) \quad (6.6)$$

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{f}_4(\mathbf{y}, \dots) \Leftrightarrow -\frac{\mathbf{q}}{T} = \mathbf{f}_4(\dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \text{grad}_E T, \dots) \quad (6.7)$$

où les arguments supplémentaires ( $\dots$ ) peuvent être toute variable indépendante des « composantes » du vecteur  $\mathbf{y}$ , notamment les variables d'état indépendantes  $T$  et  $\rho$ .

La non négativité de la dissipation (6.3) [p. 94] s'écrit donc :

$$\forall \dot{T} \forall \text{tr}\mathbf{D} \forall \text{dev}\mathbf{D} \forall \text{grad}_E T, \quad f_1 \dot{T} + f_2 \text{tr}\mathbf{D} + \mathbf{f}_3 : \text{dev}\mathbf{D} + \mathbf{f}_4 \cdot \text{grad}_E T \geq 0 \quad (6.8)$$

Il reste à *choisir* les quatre fonctions  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $\mathbf{f}_3$  et  $\mathbf{f}_4$  dont l'existence est nécessaire, telles que l'inégalité (6.8) [p. 95] soit respectée pour toute évolution à partir de tout état, c'est-à-dire  $\forall \dot{T}, \forall \text{tr}\mathbf{D}, \forall \text{dev}\mathbf{D}, \forall \text{grad}_E T, \forall T, \forall \rho$  afin que le modèle de fluide que l'on va construire soit *thermodynamiquement admissible*.

Les trois sous-sections qui suivent exposent les conséquences de l'existence des quatre fonctions  $f_1$ ,  $f_2$ ,  $\mathbf{f}_3$  et  $\mathbf{f}_4$  introduites dans les équations (6.4), (6.5), (6.6) et (6.7) [p. 95].

### 6.2.1 Relation de Helmholtz

Dans l'équation (6.4) [p. 95], le terme de gauche  $\rho (T \partial_T f_s - \partial_T f_e)$  est une fonction d'état, c'est-à-dire fonction des seules variables d'état. On en déduit que la fonction  $f_1$  est nécessairement aussi une fonction d'état, donc ayant pour seuls arguments les variables d'état  $T$  et  $\rho$ . Elle n'est donc pas fonction de ses quatre premiers arguments. L'équation (6.4) [p. 95] ne peut être que de la forme :

$$\rho (T \partial_T f_s - \partial_T f_e) = f_1(T, \rho)$$

De plus, dans l'inégalité (6.8) [p. 95], vraie  $\forall \dot{T}$ , la fonction d'état  $f_1$  ne pouvant être fonction de  $\dot{T}$ , elle est nécessairement nulle. On en déduit le théorème suivant :

<sup>(3)</sup> L'espace  $\mathbb{V}_3^{\otimes sd}$  est l'espace vectoriel des tenseurs du second ordre symétriques et de trace nulle (« déviateurs »). Il est de dimension 5. Par ailleurs, on rappelle que le produit doublement contracté est un produit scalaire de cet espace.



- **Théorème 6.2 – Relation de Helmholtz.** Dans un fluide simple, les fonctions d'état énergie interne massique et entropie massique sont liées par l'équation différentielle <sup>(4)</sup> :

$$T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \quad (6.9)$$

Pour définir le comportement thermodynamique d'un fluide simple, il suffit donc de se donner une seule fonction d'état :  $f_e$  ou  $f_s$  ; l'autre se déduit de la relation (différentielle) de Helmholtz.

**Autre expression de la relation de Helmholtz** – Si on préfère utiliser le couple de fonctions d'état  $(\psi^m, s^m)$  à la place du couple  $(e^m, s^m)$  où  $\psi^m = e^m - T s^m$ , en dérivant par rapport à  $T$  il vient :

$$\partial_T f_e = \partial_T f_\psi + f_s + T \partial_T f_s$$

La relation de Helmholtz (6.9) [p. 96] s'écrit alors :

$$f_s = -\partial_T f_\psi \quad (6.10)$$

Compte tenu de la relation de Helmholtz [éq. (6.9) p. 96], la non négativité de la dissipation [éq. (6.8) p. 95] se réduit donc à :

$$\forall \text{tr} \mathbf{D} \forall \text{dev} \mathbf{D} \forall \mathbf{grad}_E T, \quad f_2 \text{tr} \mathbf{D} + \mathbf{f}_3 : \text{dev} \mathbf{D} + \mathbf{f}_4 \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad (6.11)$$

### 6.2.2 Loi de comportement mécanique

Les deux équations (6.5) et (6.6) [p. 95] prouvent la nécessité de l'existence de deux lois de comportement mécanique reliant le tenseur des contraintes aux autres grandeurs :

$$\frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} = \rho^2 \underbrace{\left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e \right)}_{-p} + f_2(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad [\text{éq. (6.5) p. 95}] \quad (6.12)$$

$$\text{dev} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_3(\dot{T}, \text{tr} \mathbf{D}, \text{dev} \mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad [\text{éq. (6.6) p. 95}] \quad (6.13)$$

L'équation (6.12) [p. 96] définit la partie sphérique du tenseur des contraintes, et l'équation (6.13) [p. 96] définit sa partie de trace nulle (dite « déviatorique »).

- **Définition 6.3 – Pression thermodynamique.** On appelle pression thermodynamique d'un fluide simple la fonction d'état définie par :

$$p = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) \quad \left( = \rho^2 \partial_\rho f_\psi \right) \quad [\text{éq. (6.12) p. 96}] \quad (6.14)$$

- **Définition 6.4 – Pression mécanique.** On appelle pression mécanique l'opposé du tiers de la trace du tenseur des contraintes. Pour un fluide simple, elle vaut :

$$p_m = -\frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} = p - f_2 \quad [\text{éq. (6.12) p. 96}]$$

- **Théorème 6.5 – Comportement mécanique d'un fluide simple.** La loi de comportement mécanique d'un fluide simple est de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{sph} \boldsymbol{\sigma} + \text{dev} \boldsymbol{\sigma} = (-p + f_2) \mathbf{G} + \mathbf{f}_3 = -p_m \mathbf{G} + \mathbf{f}_3$$

où  $p$  est la pression thermodynamique [déf. 6.3 p. 96] et  $p_m$  la pression mécanique [déf. 6.4 p. 96].

<sup>(4)</sup> Cette relation est parfois appelée « postulat » de Helmholtz. En fait il est inutile de la postuler : pour les fluides simples, elle est une conséquence du second principe de la thermodynamique.

**Démonstration** – La décomposition en partie sphérique et de trace nulle du tenseur  $\boldsymbol{\sigma}$  étant unique, on peut rassembler les deux lois (6.12) [p.96] et (6.13) [p.96] en une seule loi tensorielle.

Il reste à *choisir* la fonction scalaire  $f_2(\dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots)$  et la fonction vectorielle  $\mathbf{f}_3(\dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots)$  de telle façon que l'inégalité de la dissipation (6.11) [p. 96] soit respectée dans toute évolution. Quelques choix possibles sont présentés plus loin en section 6.3 [p. 98].

### 6.2.3 Loi de comportement thermique

La dernière équation (6.7) [p. 95] affirme la nécessité d'existence d'une loi de comportement thermique, encore appelée loi de conduction thermique :

$$\mathbf{q} = -T \mathbf{f}_4(\dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (6.15)$$

Il reste à *choisir* la fonction vectorielle  $\mathbf{f}_4(\dot{T}, \text{tr}\mathbf{D}, \text{dev}\mathbf{D}, \mathbf{grad}_E T, \dots)$  de telle façon que l'inégalité de la dissipation (6.8) [p. 95] soit respectée dans toute évolution. Quelques choix possibles sont présentés plus loin en section 6.3 [p. 98].

**Remarque** – On retrouve la nécessité de l'existence d'une loi de conduction thermique déduite de la condition  $\Phi_{th} \geq 0$  imposée par l'axiome 2 du second principe de la thermodynamique [section 5.7 p. 87]. L'équation (6.7) [p. 95] n'est que la répétition de cette nécessité d'existence.

### 6.2.4 Résumé des conséquences de la non négativité de la dissipation

1. Les deux fonctions d'état fondamentales  $f_e$  et  $f_s$  sont liées par la relation de Helmholtz :

$$f_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \quad [\text{éq. (6.9) p. 96}]$$

2. L'inégalité de la dissipation pour les fluides simples [éq. (6.11) p. 96] se réduit à :

$$\underbrace{\forall \text{tr}\mathbf{D} \forall \text{dev}\mathbf{D} \forall \mathbf{grad}_E T}_{\Leftrightarrow \forall \mathbf{D}}, \quad \Phi = \underbrace{f_2 \text{tr}\mathbf{D} + \mathbf{f}_3 : \text{dev}\mathbf{D}}_{\Phi_{me}} + \underbrace{\mathbf{f}_4 \cdot \mathbf{grad}_E T}_{\Phi_{th} \geq 0} \geq 0 \quad (6.16)$$

Hormis la nécessité de leur existence, le second principe ne nous apprend rien sur l'expression des fonctions  $f_2$ ,  $\mathbf{f}_3$  et  $\mathbf{f}_4$  en fonction de leurs arguments. Toutefois :

- Les fonctions  $f_2$ ,  $\mathbf{f}_3$  précisent la forme de la loi de comportement mécanique [th. (6.5) p. 96] ;
- la fonction  $\mathbf{f}_4$  précise la forme de la loi de comportement thermique [éq. (6.15) p. 97].

**Remarque** – Les deux lois de comportement mécanique et thermique ne sont donc pas de simples « lois de fermeture » pour que « le nombre d'équations soit égal au nombre d'inconnues » comme on les présente souvent : le second principe de la thermodynamique prouve la nécessité de leur existence et précise leurs arguments possibles.

Il reste à *choisir* les deux lois de comportement (mécanique et thermique) telles que l'inégalité (6.16) soit respectée dans toute évolution de toute particule.

### 6.3 Fluides simples newtoniens

Pour continuer la modélisation d'un fluide simple, il faut *choisir* les trois fonctions dissipatives  $f_2$ ,  $f_3$  et  $f_4$  telles que la dissipation dans un fluide simple (6.16) [p. 97] soit non négative pour toute évolution de toute particule, c'est-à-dire  $\forall \mathbf{D}, \forall \mathbf{grad}_E T, \forall T, \forall \rho$ .

■ **Hypothèse 6.6** – On choisit les fonctions dissipatives  $f_2$ ,  $f_3$  et  $f_4$  suivantes :

1.  $f_2 = k(T, \rho) \operatorname{tr} \mathbf{D}$  avec  $k(T, \rho) \geq 0$   
Le coefficient  $k(T, \rho) \geq 0$  est appelé *viscosité de volume*.
2.  $f_3 = 2\mu(T, \rho) \operatorname{dev} \mathbf{D}$  avec  $\mu(T, \rho) \geq 0$   
Le coefficient  $\mu(T, \rho)$ <sup>(5)</sup> est appelé *viscosité isovolume* ou *viscosité de cisaillement*<sup>(6)</sup> ou encore « viscosité dynamique »<sup>(7)</sup>.
3.  $f_4 = \frac{\alpha(T, \rho)}{T} \mathbf{grad}_E T$  avec  $\alpha(T, \rho) \geq 0$   
Avec ce choix pour  $f_4$ , on retrouve la loi de Fourier linéaire isotrope présentée en éq. (5.19) [p. 88]. Le coefficient  $\alpha(T, \rho)$  est appelé *coefficient de conductibilité thermique*.

Comme on peut le constater, ces choix simples ne sont pas nécessaires mais ils sont suffisants pour que l'inégalité du second principe de la thermodynamique soit respectée en toutes situations. En effet, avec ces choix, la dissipation (6.16) [p. 97] est la somme de trois termes non négatifs séparément :

$$\Phi = \underbrace{k(T, \rho) (\operatorname{tr} \mathbf{D})^2}_{\Phi_{int}} + 2\mu(T, \rho) \|\operatorname{dev} \mathbf{D}\|^2 + \underbrace{\alpha(T, \rho) T^{-1} \|\mathbf{grad} T\|^2}_{\Phi_{th}} \geq 0$$

**Remarque** – Bien souvent, les fonctions non négatives  $k(T, \rho)$ ,  $\mu(T, \rho)$  et  $\alpha(T, \rho)$  sont choisies constantes, c'est-à-dire indépendantes de l'état actuel, ou bien seulement fonctions de la température.

■ **Définition 6.7 – Fluide newtonien.** On appelle fluide newtonien un fluide simple dont la loi de comportement mécanique [th. 6.5 p. 96] est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{(-p + k \operatorname{tr} \mathbf{D})}_{-p_m} \mathbf{G} + 2\mu \operatorname{dev} \mathbf{D} = \left( -p + \left( k - \frac{2\mu}{3} \right) \operatorname{tr} \mathbf{D} \right) \mathbf{G} + 2\mu \mathbf{D} \quad (6.17)$$

où la pression thermodynamique  $p = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e)$  [déf. 6.3 p. 96] est une fonction d'état caractéristique de chaque fluide simple newtonien et où les fonctions  $k$  et  $\mu$  sont les viscosités non négatives choisies par les hypothèses 6.6 [p. 98].

**Fluides de Stokes** – Dans un fluide newtonien, la *pression mécanique*  $p_m = -\frac{\operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma}}{3} = p + k \operatorname{tr} \mathbf{D}$  et la *pression thermodynamique*  $p$  ne sont égales que si la viscosité de volume  $k$  est nulle. Quand on suppose  $k = 0$ , ces fluides simplifiés sont appelés *fluides de Stokes*. Une telle « simplification » devrait être justifiée par une vérification expérimentale.

La loi de comportement thermique généralement choisie pour les fluides newtoniens est celle de Fourier :  $\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}_E T$  avec bien souvent  $\alpha$  invariant en fonction de l'état actuel  $(T, \rho)$ .

<sup>(5)</sup> Le coefficient 2 introduit dans le choix de la fonction  $f_3$  est traditionnel. L'auteur se conforme à cette habitude pour que la définition de la viscosité isovolume soit identique à celle donnée classiquement dans les cours de mécanique des fluides.

<sup>(6)</sup> Un mouvement de cisaillement est un mouvement isovolume particulier.

<sup>(7)</sup> Cette dénomination curieuse est très populaire. Le rapport  $\mu/\rho$  est aussi appelé « viscosité cinématique ».

Les choix faits dans les hypothèses 6.6 [p. 98] pour les fonctions  $f_2$ ,  $f_3$  et  $f_4$  sont les plus simples que l'on puisse faire pour assurer la non négativité de la dissipation ( $\Phi \geq 0$ ) dans toute évolution de toute particule.

Le lecteur vérifiera aisément avec les formules de changement d'observateur des deux tenseurs objectifs  $\mathbf{D}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  [éq. (3.52) p. 52], que la loi de comportement mécanique des fluides newtoniens [éq. 6.17 p. 98] est bien une loi universelle, c'est-à-dire que pour un observateur  $\tilde{\mathcal{R}}$ , la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = (-\tilde{p} + k \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{D}}) \mathbf{G} + 2\mu \operatorname{dev} \tilde{\mathbf{D}} \quad \text{avec les mêmes viscosités objectives } k \text{ et } \mu.$$

**Fluides simples non newtoniens** – Plutôt que de se limiter aux choix très simples des fluides newtoniens [hyp. 6.6 p. 98], on peut construire des lois de comportement non newtoniennes de fluides simples en donnant aux trois fonctions scalaires non négatives  $k$ ,  $\mu$  et  $\alpha$  une liste d'arguments plus complète, comme le gradient de température  $\operatorname{grad} T$ , le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  etc.

On laisse le soin au lecteur de vérifier que l'universalité des loi de comportement mécanique et thermique implique que les fonctions scalaires  $k(\dots)$ ,  $\mu(\dots)$  et  $\alpha(\dots)$  sont nécessairement des fonctions isotropes de leurs arguments tensoriels. On peut donc les ramener à une liste d'arguments scalaires (th. des fonctions isotropes).

Si le tenseur des taux de déformation  $\mathbf{D}$  fait partie des arguments des viscosités  $k$  et  $\mu$ , selon le signe de leur dérivée en fonction de certains invariants de  $\mathbf{D}$ <sup>(8)</sup>, ces fluides sont dits *rhéofluidifiants* ou bien *rhéoépaississants*.

Si la conductibilité thermique  $\alpha$  dépend de  $\operatorname{grad} T$ , on dit que la loi de comportement thermique est « non linéaire ».

Pour compléter la modélisation du fluide simple (newtonien ou non), il reste maintenant préciser l'expression de l'une des fonctions d'état  $p$ ,  $f_e$ ,  $f_s$  ou  $f_\psi$ <sup>(9)</sup> en fonction des variables d'état  $(T, \rho)$ . Ces fonctions d'état sont caractéristiques de chaque fluide simple. Les sections qui suivent donnent quelques exemples de fluides simples.

## 6.4 Gaz parfaits

Les gaz parfaits sont traditionnellement définis en donnant l'expression de la fonction d'état *pression thermodynamique*  $p(T, \rho)$  [déf. 6.3 p. 96] en fonction des variables d'état  $T$  et  $\rho$ . Cette expression est appelée *loi de Mariotte*<sup>(10)</sup> :

$$p = r \rho T$$

où  $r$  est une constante caractéristique du gaz parfait.

La définition de la pression thermodynamique  $p$  [éq. (6.14) p.96] et la relation de Helmholtz [éq. (6.9) p. 96] conduisent au système différentiel suivant, qui permet de déterminer les deux fonctions d'état fondamentales  $f_e$  et  $f_s$  :

$$-\rho^2 \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e \right) = r \rho T \quad [\text{éq. (6.14) p.96}] \quad \text{et} \quad T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \quad [\text{éq. (6.9) p. 96}]$$

<sup>(8)</sup> Notamment  $\operatorname{tr} \mathbf{D}$  et le taux de distorsion stérique (section 5.5 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4]).

<sup>(9)</sup> Les autres fonctions d'état seront déterminées par leur définition et par la relation de Helmholtz.

<sup>(10)</sup> Ou de *Mariotte Gay-Lussac*. Cette « loi » macroscopique peut aussi bien être considérée comme d'origine expérimentale ou bien suggérée par la physique statistique.

La solution générale de ce système différentiel est :

$$f_s = -r \ln \rho + f_1(T) \quad ; \quad f_e = \int_{T_0}^T T f_1'(T) dT + C$$

**Remarque** – Noter que l'on retrouve ici un résultat classique, parfois postulé : l'énergie interne massique d'un gaz parfait n'est fonction que de la température.

La fonction inconnue  $f_1(T)$  peut être déterminée par des mesures expérimentales, par exemple la mesure de la capacité thermique  $C_v(T)$  à  $\rho$  constant ( $\dot{\rho} = 0$ ), appelée *capacité thermique à volume constant* [déf. 5.10 p. 89]. Pour les gaz parfaits elle s'écrit :

$$C_v(T) = T \partial_T f_s + T \partial_\rho f_s \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = T f_1'(T) \quad \Rightarrow \quad f_1(T) = \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C'$$

Finalement, les deux fonctions d'état fondamentales  $f_e$  et  $f_s$  d'un gaz parfait sont :

$$f_s = -r \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C' \quad ; \quad f_e = \int_{T_0}^T C_v(T) dT + C \quad (6.18)$$

L'énergie interne massique et l'entropie massique d'un gaz parfait sont chacune définies à une constante près, ce qui est sans importance car seules leurs dérivées interviennent dans les lois de comportement et dans la dissipation. On peut toujours choisir un état de référence  $(T_0, \rho_0)$  dans lequel elles sont déclarées nulles ou égales à une valeur de référence  $s_0^m$  et  $e_0^m$ .

**Remarque** – L'une quelconque de ces fonctions d'état peut être prise comme définition (peu intuitive) des gaz parfaits, la relation de Helmholtz et la définition de la pression thermodynamique permettraient de retrouver la loi de Mariotte.

**Relation de Mayer** – Pour les gaz, il est possible de définir une *capacité thermique à pression thermodynamique constante*, notée  $C_p$ . Pour un gaz parfait :

$$p = r \rho T \quad \Rightarrow \quad \dot{p} = r T \dot{\rho} + r \rho \dot{T}$$

Dans une évolution à pression thermodynamique constante, on a donc :

$$\dot{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = -\frac{\rho}{T}$$

À pression thermodynamique constante, la capacité thermique [éq. (5.22) p. 89] pour un gaz parfait s'écrit donc :

$$C_p = T \partial_T f_s + \partial_\rho f_s \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = C_v + T \frac{r}{\rho} \frac{\dot{\rho}}{\dot{T}} = C_v + r \quad [\text{éq. (6.18) p. 100}]$$

Cette relation est connue sous le nom de *relation de Mayer* pour les gaz parfaits.

En conclusion, les gaz parfaits sont les fluides simples tels que la pression thermodynamique est définie par la loi de Mariotte. Ils sont complètement caractérisés par la mesure de la constante  $r$ , la mesure d'une capacité thermique ( $C_p(T)$  ou  $C_v(T)$ ) et la donnée des trois fonctions de dissipation  $f_2$ ,  $f_3$  et  $f_4$ . Pour les gaz parfaits newtoniens, il suffit de préciser la viscosité de volume  $k$ , la viscosité isovolume  $\mu$  et la conductivité thermique  $\alpha$ .

Il est possible de construire un modèle de gaz plus proche des gaz réels en suivant la même démarche, mais en remplaçant la loi de Mariotte par celle de van der Waals.

## 6.5 Liquides idéaux

Les liquides idéaux sont des fluides simples parfaitement incompressibles ( $\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0$ ). La variable d'état  $\rho$  est donc une constante. On peut construire un modèle de liquide idéal (visqueux ou non) en imposant que la fonction d'état *pression thermodynamique* d'un liquide idéal est indépendante des variables d'état  $T$  et  $\rho$  :

$$\partial_T p = 0 \text{ et } \partial_\rho p = 0 \quad \Rightarrow \quad p(T, \rho) = p \quad (6.19)$$

**Remarque** – La définition (6.19) d'un liquide idéal implique qu'il est à la fois incompressible car  $\partial_\rho p = 0$  et indilatable car  $\partial_T p = 0$  (pas de variation de pression dans une variation de température à  $\rho$  constant<sup>(11)</sup>).

La définition de la pression thermodynamique  $p$  [éq. (6.14) p. 96] et la relation de Helmholtz [éq. (6.9) p. 96] conduisent au système différentiel de fonctions inconnues  $f_e$  et  $f_s$  :

$$-\rho^2 \left( T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e \right) = p \quad [\text{éq. (6.14) p. 96}] \quad \text{et} \quad T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \quad [\text{éq. (6.9) p. 96}]$$

dont la solution générale est :

$$f_s = \int_{T_0}^T \frac{g'(T)}{T} dT + C_1 \quad ; \quad f_e = -\frac{p}{\rho_0} + g(T)$$

La fonction  $g(T)$  peut se déterminer par une mesure de capacité thermique (nécessairement à volume constant car  $\dot{\rho} = 0$ ) :

$$C_v(T) = T \frac{df_s}{dT} = g'(T) \quad [\text{éq. (5.22) p. 89}] \quad \Rightarrow \quad g(T) = \int_{T_0}^T C_v(T) dT$$

Les deux fonctions d'état  $f_e$  et  $f_s$  du liquide idéal sont donc :

$$f_s = \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT + C_1 \quad ; \quad f_e = -\frac{p}{\rho_0} + \int_{T_0}^T C_v(T) dT + C_2$$

**Remarque** – Dans un liquide idéal, la fonction d'état pression thermodynamique  $p$  en une particule n'est pas fonction des variables d'état de la particule par définition [éq. (6.19) p. 101]. Néanmoins, dans un domaine de fluide simple en évolution, la pression thermodynamique est différente d'une particule à l'autre et évolue dans le temps. Dans un liquide idéal, la pression thermodynamique  $p$  est un champ matériel  $p(P, t)$ .

Le champ matériel  $p(P, t)$  est déterminé par les équations générales des milieux continus :

— *La conservation de la masse* [th. 2.3 p. 20] pour un liquide idéal s'écrit :

$$\tau_v = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} = \text{tr} \mathbf{D} = \text{div}_E \mathbf{v} = 0$$

La loi de comportement mécanique d'un liquide idéal newtonien se réduit donc à :

$$\boldsymbol{\sigma}(P, t) = -p(P, t) \mathbf{G} + 2\mu(T) \text{dev} \mathbf{D}(P, t) \quad [\text{éq. (6.17) p. 98}] \quad (6.20)$$

<sup>(11)</sup> Les thermodynamiciens préfèrent dire à volume massique  $v = \rho^{-1}$  constant.

- *L'équation de mouvement.* On laisse le soin au lecteur de vérifier, avec un peu de calcul tensoriel, que compte tenu de la loi de comportement mécanique d'un liquide idéal [éq. (6.20) p. 101], l'équation de mouvement (3.31) [p. 39] d'un liquide idéal newtonien devient :

$$\begin{aligned}\rho_0 \boldsymbol{\gamma} &= \rho_0 f^m - \mathbf{grad}_E p + \mu(T) \Delta_E \mathbf{v} + 2 \mathbf{dev} \mathbf{D} \cdot \mathbf{grad}_E \mu(T) \\ \rho_0 \dot{\mathbf{v}} &= \rho_0 f^m - \mathbf{grad}_E p + \mu(T) \Delta_E \mathbf{v} + 2 \mu'(T) \mathbf{dev} \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_E T\end{aligned}$$

- *L'équation de la chaleur.* Si on choisit la loi de Fourier (5.19) [p. 88] comme loi de comportement thermique, on laisse le soin au lecteur d'établir que l'équation de la chaleur (4.10) [p. 71] pour un liquide idéal devient :

$$-\dot{p} + \int_{T_0}^T C'_v(T) \dot{T} dT = 2 \mu(T) \mathbf{dev} \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{dev} \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} + r_{ext}^v + \alpha \Delta_E T$$

### Équation de Navier Stokes pour les fluides incompressibles –

Comme on peut le constater, l'équation de continuité, l'équation de mouvement et l'équation de la chaleur sont des équations différentielles couplées dont les inconnues sont le champ de pression, le champ de vitesse et le champ de température. Dans les cours élémentaires de mécanique des fluides incompressibles, pour espérer obtenir des solutions analytiques, on simplifie ces équations en supposant que la viscosité isovolume  $\mu$ , la capacité thermique à volume constant  $C_v$  et la conductivité thermique  $\alpha$  ne dépendent pas de la température :  $\mu(T) = \mu_0$ ,  $C'_v(T) = 0$ ,  $\alpha = \alpha_0$  et qu'il n'y a pas de source de chaleur par rayonnement :  $r_{ext}^v = 0$ . Sous ces hypothèses simplificatrices, pour un liquide idéal, il reste :

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_E \mathbf{v} &= 0 && \text{(équation de la conservation de la masse, dite de « continuité »)} \\ \rho_0 \dot{\mathbf{v}} &= \rho_0 f^m - \mathbf{grad}_E p + \mu_0 \Delta_E \mathbf{v} && \text{(équation de mouvement, dite de Navier-Stokes)} \\ -\dot{p} &= 2 \mu_0 \underbrace{\mathbf{dev} \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v} : \mathbf{dev} \mathbf{sym} \mathbf{grad}_E \mathbf{v}}_{\mathbf{dev} \mathbf{D} : \mathbf{dev} \mathbf{D}} + \alpha_0 \Delta_E T && \text{(équation de la chaleur)} \\ \text{où } \dot{\mathbf{v}} &= \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} && \text{et } \dot{p} = \partial_t p + \mathbf{grad}_E p \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

Comme on peut le constater, ces hypothèses simplificatrices supplémentaires sont insuffisantes pour découpler l'équation de conservation de l'énergie. On arrive néanmoins à trouver quelques solutions analytiques *stationnaires*<sup>(12)</sup> particulières<sup>(13)</sup> des deux premières équations dont les seuls champs inconnus sont la pression  $p(P,t)$  et la vitesse  $\mathbf{v}(P,t)$ . Dès que les champs  $p$  et  $\mathbf{v}$  sont connus, la résolution de l'équation de la chaleur donne le champ de températures  $T(P,t)$ . La résolution analytique de cette dernière équation est rarement accessible.

Le but de ces remarques n'est pas de dénigrer les quelques solutions analytiques stationnaires qui sont présentées dans les cours de mécanique des fluides incompressibles (ces solutions sont d'un indéniable intérêt pédagogique), mais seulement de souligner leur coût en hypothèses simplificatrices, coût qui n'est pas toujours mis suffisamment en évidence pour susciter la circonspection idoine.

## 6.6 Fluides simples compressibles et dilatables

On se propose de construire un modèle de fluide simple compressible et dilatable tel que :

$$\boldsymbol{\tau}_v = -\chi_T(T, \rho) \dot{p} + \alpha_p(T, \rho) \dot{T} \quad (6.21)$$

où :

<sup>(12)</sup> C'est-à-dire  $\partial_t \boldsymbol{\Psi}_E(\mathbf{x}_t, t) = \mathbf{0}$ . On a donc  $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_E$  et  $\dot{p} = \mathbf{grad}_E p \cdot \mathbf{v}_E$ .

<sup>(13)</sup> On cherche des écoulements particuliers dans lesquels on suppose  $\mathbf{grad}_E \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_E = \mathbf{0}$  (écoulements laminaires), ce qui linéarise en  $\mathbf{v}$  l'équation de mouvement et rend sa solution unique.

- $\tau_v$  est le taux de dilatation volumique ( $\text{tr}\mathbf{D}$ );
- $p$  est la pression thermodynamique;
- $\chi_T > 0$  est la compressibilité à température constante<sup>(14)</sup> (unité :  $\text{Pa}^{-1}$ );
- $\alpha_p$  est la dilatabilité à pression thermodynamique constante (unité :  $\text{K}^{-1}$ ).

Si un tel fluide existe, la condition (6.21) [p. 102] montre que le taux de dilatation volumique  $\tau_v$  en une particule dépend des deux dérivées particulières  $\dot{p}$  (compressibilité) et  $\dot{T}$  (dilatabilité).

**Remarque** – Les notions de compressibilité isotherme  $\chi_T$  et de dilatabilité isobare  $\alpha_p$  sont couramment employées dans les cours de thermodynamique. Avec les écritures différentielles familières aux thermodynamiciens<sup>(15)</sup>, l'équation (6.21) [p. 102] s'écrirait :

$$\frac{dv}{v} = -\chi_T dp + \alpha_p dT \quad \text{où } v = \rho^{-1} \text{ est le volume massique.}$$

**Commentaires** – On vérifie aisément que pour  $\chi_T = T^{-1}$  et  $\alpha_p = p^{-1}$ , l'équation (6.21) est la *dérivée particulière* de la loi de Mariotte. De même, pour  $\chi_T = 0$  et  $\alpha_p = 0$  (le fluide est incompressible et indilatable), l'équation (6.21) [p. 102] est la *dérivée particulière* de la définition du liquide idéal :  $\tau_v = 0 \Leftrightarrow \dot{p} = 0$  [éq. (2.4) p. 20].

La condition (6.21) [p. 102] n'est pas la définition d'une fonction d'état d'un fluide simple : elle ne pose qu'une condition portant sur la *dérivée particulière* de la fonction d'état pression thermodynamique  $p$  du modèle de fluide simple que l'on cherche à construire. En effet, on peut la réécrire sous la forme :

$$\dot{p}(T, \rho) = -\frac{1}{\chi_T(T, \rho)} (\tau_v - \alpha_p(T, \rho) \dot{T}) = \frac{1}{\chi_T(T, \rho)} \left( \frac{\dot{p}}{\rho} + \alpha_p(T, \rho) \dot{T} \right) \quad [\text{éq. (2.4) p. 20}] \quad (6.22)$$

Contrairement à ce qui a été fait pour définir les gaz parfaits et les liquides idéaux, le fluide que l'on veut modéliser ici n'est pas défini par l'expression d'une fonction d'état en fonction des variables d'état, mais seulement par la condition (6.22) imposée à la *dérivée particulière* de la fonction d'état pression thermodynamique  $p$  [déf. 6.3 p. 96], ce qui ne définit pas la pression thermodynamique elle-même. Il n'est pas certain qu'il existe une fonction d'état  $p(T, \rho)$  dont la dérivée particulière satisfasse cette condition<sup>(16)</sup>.

*D'une manière générale, il est imprudent de tenter de définir un modèle de milieu continu seulement par la donnée de la dérivée particulière d'une fonction d'état.*

**Remarques** – La connaissance de la fonction d'état pression thermodynamique n'est pas suffisante pour connaître le tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  [éq. (6.17) p. 98] dans un fluide newtonien : il faut préciser en plus la viscosité de volume  $k(T, \rho)$  et la viscosité isovolume  $\mu(T, \rho)$ .

Par ailleurs, dans leurs développements, les thermodynamiciens ont souvent tendance à affirmer implicitement que l'on ne peut fournir du travail à un domaine de fluide compressible qu'unique-ment par l'intermédiaire de forces de pression («  $dW = p dv$  », les contraintes aux frontières sont implicitement normales, le tenseur des contraintes dans le fluide compressible est implicitement sphérique); en outre la pression mécanique [déf. 6.4 p. 96] est le plus souvent confondue avec la pression thermodynamique ( $f_2 = 0$ , pas de viscosité de volume). Lorsque les thermodynamiciens veulent tenir compte de la viscosité isovolume, l'énergie dépensée pour la vaincre est souvent appelée « travail de transvasement » sans que sa valeur soit clairement précisée.

<sup>(14)</sup> On rappelle qu'il faut en général des échanges thermiques avec l'extérieur pour maintenir la température constante pendant une compression ou une détente isothermes.

<sup>(15)</sup> Ici, les « différentielles »  $dx$  signifient « petites variations de  $x$  dans une évolution infinitésimale entre  $t$  et  $t + dt$  ».

<sup>(16)</sup> Si la fonction d'état pression thermodynamique  $p$  n'existe pas, alors les deux fonctions d'état fondamentales  $f_e$  et  $f_s$  qui s'en déduisent n'existent pas non plus. Un tel modèle ne serait donc pas thermodynamiquement admissible. Dans *Attention!* [p. 104], on donne un cas où les fonctions d'état n'existent pas. On verra un autre cas en mécanique des solides déformables à propos du pseudo modèle de comportement « hypoélastique ».



La conservation de la masse [éq. (2.7) p. 21] et la définition de la pression thermodynamique [éq. (6.14) p.96] s'écrivent :

$$\tau_v = -\frac{\dot{\rho}}{\rho} \quad ; \quad p = -\rho^2(T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) = \rho^2 \partial_\rho f_\psi$$

où pour abrégier les écritures on a introduit dans la seconde égalité l'énergie libre massique de Helmholtz  $\psi^m = e^m - T s^m$ . La condition (6.21) [p. 102] s'écrit donc :

$$\begin{aligned} -\frac{\dot{\rho}}{\rho} &= -\chi_T (\rho^2 \partial_\rho f_\psi) \cdot + \alpha_p \dot{T} \\ &= -\chi_T (2\rho \dot{\rho} \partial_\rho f_\psi + \rho^2 \partial_{\rho\rho} f_\psi \dot{\rho} + \rho^2 \partial_{\rho T} f_\psi \dot{T}) + \alpha_p \dot{T} \\ 0 &= \dot{\rho} \left( \frac{1}{\rho} - \chi_T (2\rho \partial_\rho f_\psi + \rho^2 \partial_{\rho\rho} f_\psi) \right) + \dot{T} \left( -\chi_T \rho^2 \partial_{\rho T} f_\psi + \alpha_p \right) \end{aligned}$$

Cette condition sur  $f_\psi$  doit être satisfaite pour toute vitesse d'évolution à partir de tout état, c'est-à-dire  $\forall \dot{T}$  et  $\forall \dot{\rho}$ , où les termes entre parenthèses sont des fonctions d'état. On en déduit les deux équations différentielles que doit satisfaire la fonction d'état *énergie libre de Helmholtz*  $f_\psi$  d'un fluide respectant la condition (6.21) [p. 102] :

$$0 = \frac{1}{\rho} - \chi_T (2\rho \partial_\rho f_\psi + \rho^2 \partial_{\rho\rho} f_\psi) \quad \text{et} \quad 0 = -\chi_T \rho^2 \partial_{\rho T} f_\psi + \alpha_p \quad (6.23)$$

**Attention!** – La seconde équation ci-dessus montre que si un fluide simple satisfaisant la condition la condition (6.21) [p. 102] est incompressible ( $\chi_T = 0$ ) alors il est nécessairement indilatable ( $\alpha_p = 0$ ). Un fluide supposé incompressible ( $\chi_T = 0$ ) et dilatable ( $\alpha_p \neq 0$ ) serait thermodynamiquement absurde car ce système d'équations différentielles en  $\psi^m$  n'aurait pas de solution.

Si le système d'équations différentielles (6.23) [p. 104] n'a pas de solution en  $f_\psi$  avec certaines fonctions  $\alpha_p(T, \rho)$  et  $\chi_T(T, \rho)$  qui seraient d'origine expérimentale (éventuellement idéalisées), toutes les autres fonctions d'état, notamment les deux fonctions d'état fondamentales énergie interne massique  $e^m$  et entropie massique  $s^m$ , dont l'existence est postulée par deux les principes de la thermodynamique, n'existeraient pas !

La fonction d'état *énergie libre massique de Helmholtz*  $\Psi^m = f_\psi(T, \rho)$  du modèle fluide que l'on cherche à construire est donc solution des deux équations différentielles suivantes :

$$2\partial_\rho f_\psi + \rho \partial_{\rho\rho} f_\psi = \frac{1}{\rho^2 \chi_T} \quad ; \quad \partial_{\rho T} f_\psi = \frac{\alpha_p}{\rho^2 \chi_T} \quad (6.24)$$

où les deux coefficients  $\chi_T(T, \rho)$  et  $\alpha_p(T, \rho)$  peuvent être identifiées par des mesures expérimentales de compression à température constante et de dilatation thermique à pression constante. Selon l'expression des deux fonctions empiriques  $\chi_T(T, \rho)$  et  $\alpha_p(T, \rho)$ , *l'existence de solutions en  $f_\psi$  n'est pas assurée!*

**Remarque** – En dérivant par rapport à  $T$  la première équation (6.24) et en tenant compte la seconde équation (6.24), on en déduit une équation différentielle du troisième ordre que doit satisfaire la fonction d'état  $f_\psi$  :

$$\frac{2\alpha_p}{\rho^2 \chi_T} + \rho \partial_{\rho\rho T} f_\psi = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial_T \chi_T}{\chi_T^2} \Leftrightarrow \partial_{\rho\rho T} f_\psi = -\frac{1}{\rho^3 \chi_T} \left( \frac{\partial_T \chi_T}{\chi_T} + 2\alpha_p \right) \quad (6.25)$$

dont la solution doit satisfaire les deux conditions (6.24).

### 6.6.1 Fluide simple à compressibilité et dilatabilité constantes

- **Hypothèse 6.8** – Afin d’obtenir un modèle simple et facile à identifier, on suppose que la compressibilité à température constante  $\chi_T$  et la dilatation thermique à pression constante  $\alpha_p$  sont les mêmes quel que soit l’état actuel :  $\chi_T(T, \rho) = \chi_0$  et  $\alpha_p(T, \rho) = \alpha_0$ , sous réserve que ces hypothèses simplificatrices soient expérimentalement justifiées et que sous ces hypothèses une fonction  $f_\psi$  existe.

**Remarques** – Dans les liquides et les gaz, la compressibilité à température constante  $\chi_T$  est toujours non négative (le volume diminue toujours avec la pression).

En revanche, la dilatation thermique à pression constante  $\alpha_p$  n’est pas toujours positive. Par exemple, on sait expérimentalement que pour l’eau à la pression atmosphérique et à des températures entre 273,15 K (0 C) et 277,15 K, (4 C) le coefficient de dilatation à pression constante est négatif, nul à 277,15 K (4 C), puis positif pour des températures supérieures. On ne peut donc pas modéliser le comportement de l’eau avec l’hypothèse simplificatrice  $\alpha_p = \alpha_0$ , sauf peut-être loin de cette anomalie.

Il se trouve que, sous les hypothèses simplificatrices 6.8 [p. 105], le système d’équations différentielles (6.24) [p 104] a une solution. La solution générale est :

$$f_\psi = -\frac{1}{\rho \chi_0} (\ln \rho + \alpha_0 T + 1) - \frac{C}{\rho} + g(T) \quad (6.26)$$

La pression thermodynamique [éq. (6.14) p. 96] est alors :

$$p = \frac{1}{\chi_0} (\ln \rho + \alpha_0 T) + C$$

Pour un état de référence  $\rho = \rho_0$  et  $T = T_0$ , on pose  $p = p_0$ . La constante  $C$  est alors :

$$C = p_0 - \frac{1}{\chi_0} (\ln \rho_0 + \alpha_0 T_0)$$

Finalement, la fonction d’état pression thermodynamique d’un fluide simple dilatable et compressible satisfaisant à la condition (6.21) [p. 102] et aux hypothèses simplificatrices 6.8 [p. 105] est :

$$p = \frac{1}{\chi_0} \left( \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \alpha_0 (T - T_0) \right) + p_0$$

**Distinction liquide/gaz** – La distinction entre liquide et gaz est souvent exprimée en disant qu’« un gaz occupe tout le volume dont il dispose », contrairement aux liquides. Cette définition est inexploitable mathématiquement. Pour les modèles de comportement, l’auteur propose de faire la distinction entre liquide et gaz en observant la limite de la masse volumique quand la pression tend vers 0 : pour les gaz, la masse volumique tend vers 0 (le vide)<sup>(17)</sup> et pour les liquides elle tend vers une limite finie non nulle. Cette distinction est évidemment théorique car chacun sait qu’en dessous de la pression de vapeur saturante tout liquide se vaporise et le modèle du milieu continu change (notamment ses coefficients  $\chi_T$ ,  $\alpha_p$  et  $C_v$ ); le comportement de la vapeur n’est plus représenté par les mêmes fonctions d’état. La validité de tout modèle de liquide est donc limitée par  $p > p_{sat}(T)$ . Néanmoins, l’étude de cette limite en supposant qu’il n’y a pas vaporisation est instructive.

Dans le cas du modèle simple qui a été développé dans cette section avec les hypothèses simplificatrices 6.8 [p. 105], lorsque la pression thermodynamique est nulle ( $p = 0$ ), la masse volumique est :

$$\rho_{(p=0)} = \rho_0 e^{-\alpha_0 (T - T_0) - \chi_0 p_0} \quad \text{où } p_0 \text{ est la pression à un état de référence } (T_0, \rho_0).$$

<sup>(17)</sup> Il est facile de vérifier que les gaz parfaits satisfont à cette condition (loi de Mariotte).

La valeur  $\rho_{(p=0)}$  n'est donc jamais nulle quelle que soit la température  $T > 0$ . Du point de vue du critère proposé dans cette remarque, le modèle construit ici est donc un modèle de liquide compressible.

L'énergie libre massique de Helmholtz est donc [éq. (6.26) p. 105] :

$$f_\psi = -\frac{1}{\rho \chi_0} \left( 1 + \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \alpha_0 (T - T_0) \right) - \frac{p_0}{\rho} + g(T)$$

L'entropie massique se déduit de la relation de Helmholtz [éq. (6.10) p. 96] :

$$f_s = -\partial_T f_\psi = \frac{\alpha_0}{\rho \chi_0} - g'(T)$$

L'énergie interne massique se déduit de la définition de l'énergie libre de Helmholtz :

$$f_e = f_\psi + T f_s = -\frac{1}{\rho \chi_0} \left( 1 + \ln \frac{\rho}{\rho_0} - \alpha_0 T_0 \right) - \frac{p_0}{\rho} + g(T) - T g'(T)$$

La fonction indéterminée  $g(T)$  peut se déterminer avec une mesure de la capacité thermique [éq. (5.22) p. 89]  $C_v(T)$  à volume constant ( $\dot{\rho} = 0$ ) :

$$C_v(T) = T \partial_T f_s = -T g''(T) \quad \Rightarrow \quad g(T) = -\int_{T_0}^T \left( \int_{T_0}^T \frac{C_v(T)}{T} dT \right) dT + C_1 T + C_2$$

**Remarque** – On constate que dans ce modèle avec les hypothèses simplificatrices 6.8 [p. 105], la capacité thermique à volume constant  $C_v$  n'est fonction que de la température. Si l'expérience le contredisait, il faudrait remettre en question les hypothèses simplificatrices 6.8 [p. 105].

- **Hypothèse 6.9** – Pour simplifier encore plus le modèle thermodynamiquement admissible qui vient d'être construit, on suppose en plus que la capacité thermique à volume constant est indépendante de la température :

$$C_v(T) = C_{v0}$$

Sous cette hypothèse, la fonction  $g(T)$  est solution de l'équation différentielle :

$$g' = -C_{v0} \ln T + C_1 \quad \text{dont la solution est : } g = -C_{v0}(T \ln T - T) + C_1 T + C_2$$

Finalement, sous les hypothèses  $\chi_T = \chi_0$ ,  $\alpha_p = \alpha_0$  et  $C_v = C_{v0}$ , et en posant  $f_s(T_0, \rho_0) = s_0$  et  $f_e(T_0, \rho_0) = e_0$  pour déterminer les constantes  $C_1$  et  $C_2$ , les fonctions d'état de ce modèle de liquide compressible dilatable simplifié deviennent :

$$\begin{aligned} f_s &= \frac{\alpha_0}{\rho_0 \chi_0} \left( \frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right) + C_{v0} \ln \frac{T}{T_0} + s_0 \\ f_e &= -\frac{1}{\rho \chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left( \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0 \chi_0} - \frac{T_0 \alpha_0}{\rho_0 \chi_0} \right) + C_{v0} (T - T_0) + e_0 \\ p &= \frac{1}{\chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \frac{\alpha_0}{\chi_0} (T - T_0) + p_0 \\ f_\psi &= -\frac{1}{\rho \chi_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} + \left( 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left( \frac{p_0}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_0 \chi_0} + \frac{\alpha_0 (T - T_0)}{\rho_0 \chi_0} \right) + C_{v0} \left( T - T_0 - T \ln \frac{T}{T_0} \right) + e_0 - T s_0 \end{aligned}$$

Sous les hypothèses simplificatrices additionnelles 6.9 [p. 106], ce modèle est complètement identifié par des mesures expérimentales des constantes  $\chi_0$ ,  $\alpha_0$  et  $C_{v0}$ .

**Relation de Mayer pour ce modèle** – Dans une évolution à pression constante, le comportement choisi en éq. (6.21) [p. 102] implique :

$$-\frac{\dot{p}}{\rho} = \alpha_0 \dot{T} \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{p}}{\dot{T}} = -\rho \alpha_0$$

La capacité thermique à pression constante [éq. (5.22) p. 89] est donc :

$$C_p = T \partial_T f_s + T \partial_\rho f_s \frac{\dot{p}}{\dot{T}} = C_v + T \partial_\rho f_s \frac{\dot{p}}{\dot{T}} = C_v + \frac{\alpha_0^2 T}{\chi_0 \rho} \quad \Rightarrow \quad C_p - C_v = \frac{\alpha_0^2 T}{\chi_0 \rho}$$

On peut appeler cette équation « relation de Mayer » pour ce modèle de liquide compressible dilatable (sous les hypothèses  $\chi_T = \chi_0$ ,  $\alpha_p = \alpha_0$  et  $C_v = C_{v0}$ ).

**Remarque** – La capacité thermique à pression constante  $C_p$  est plus aisée à mesurer expérimentalement que la capacité thermique à volume constant  $C_v$ . Sous les hypothèses simplificatrices de ce modèle (notamment  $C_v(T) = C_{v0}$ ), l'équation ci-dessus montre que la capacité thermique à pression constante  $C_p$  est nécessairement une fonction de la température actuelle et de la masse volumique actuelle. Si l'expérience le contredit, il faut renoncer aux hypothèses simplificatrices 6.8 [p. 105] en donnant des lois  $\chi_T(T, \rho)$  et  $\alpha_p(T, \rho)$  plus réalistes suggérées par des mesures, puis reprendre l'intégration du système différentiel (6.24) [p. 104] en espérant qu'il ait des solutions.

## 6.7 En bref ...

Les fluides simples sont les fluides dont les deux variables d'état indépendantes sont la température absolue  $T$  (imposée par le second principe de la thermodynamique) et la masse volumique  $\rho$ .

Le second principe local de la thermodynamique ( $\Phi \geq 0$ ) appliqué aux fluides simples implique :

1. La *relation de Helmholtz* qui est une relation entre les deux fonctions d'état fondamentales *énergie interne massique*  $e^m$  et *l'entropie massique*  $s^m$  dont l'existence est imposée par les deux principes de la thermodynamique. Une seule fonction d'état suffit donc pour définir un fluide simple.
2. *L'existence d'une loi de comportement mécanique* faisant intervenir une fonction d'état (pour les fluides simples, c'est la pression thermodynamique  $p$ ) et des fonctions dissipatives *thermodynamiquement admissibles*.
3. *L'existence d'une loi de comportement thermique* (ou loi de conduction thermique) garantissant la non négativité de la dissipation thermique.

Pour définir complètement le modèle fluide simple, il faut :

- préciser (choisir) l'expression des fonctions dissipatives qui assurent la non négativité de la dissipation dans toute évolution ;
- préciser une expression de l'une des fonctions d'état ( $f_e, f_s, f_\psi$ , ou  $p$ ) en fonction des variables d'état. Cette expression devrait être *physiquement motivée* afin de ne pas conduire à des lois de comportements déraisonnables.

Si les deux fonctions d'état fondamentales  $f_e$  et  $f_s$  postulées par les deux principes de la thermodynamique existent et si la dissipation est non négative dans toute évolution de particule, alors le modèle de milieu continu construit est thermodynamiquement admissible.

Un choix simple pour des fonctions dissipatives satisfaisant la non négativité de la dissipation a conduit à la définition des *fluides newtoniens* dont la loi de comportement mécanique est :

$$\boldsymbol{\sigma} = (-p + k \operatorname{tr} \mathbf{D}) \mathbf{G} + 2\mu \operatorname{dev} \mathbf{D} = \left( -p + \left( k - \frac{2\mu}{3} \right) \operatorname{tr} \mathbf{D} \right) \mathbf{G} + 2\mu \mathbf{D}$$

où :

- $p = -\rho^2 (T \partial_\rho f_s - \partial_\rho f_e) = \rho^2 \partial_\rho f_\psi$  est une *fonction d'état* caractéristique du fluide simple appelée *pression thermodynamique*;
- $k(T, \rho)$  est la *viscosité de volume*, souvent considérée comme invariante en fonction des variables d'état ou seulement fonction de la température ou même parfois nulle (fluides de Stokes);
- $\mu(T, \rho)$  est la *viscosité isovolume* (ou viscosité de cisaillement ou encore « viscosité dynamique »), souvent considérée comme invariante en fonction des variables d'état ou seulement fonction de la température ou même parfois nulle (fluides non visqueux<sup>(18)</sup>);
- $\mathbf{D}$  est le tenseur des taux de déformation qui a été défini en cinématique.

La loi de comportement thermique (ou loi de conduction thermique) choisie pour les fluides newtoniens et qui garantit l'admissibilité thermodynamique, est bien souvent la loi de Fourier, mais on peut en construire d'autres.

Pour les fluides simples, suivant le choix de l'expression de la fonction d'état pression thermodynamique  $p$  *physiquement motivée* en fonction des variables d'état, a conduit à la construction complète de trois modèles de fluides simples (visqueux ou non) et *thermodynamiquement admissibles* : les gaz parfaits, les liquides idéaux (incompressibles et indilatables) et un liquide compressible dilatable.

La démarche de construction de modèles de milieux continus qui a été suivie pour les fluides simples (les variables d'état sont  $T$  et  $\rho$ ) sera la même pour la construction de modèles de solides déformables : conséquences du second principe puis construction d'une fonction d'état *physiquement motivée*<sup>(19)</sup>, mais évidemment avec des variables d'état différentes. Cette démarche est développée dans les deux cours *Comportement élastique* et *Comportements inélastiques*<sup>(20)</sup>, du même auteur.

<sup>(18)</sup> Les fluides non visqueux sont parfois appelés « fluides parfaits ». Cette dénomination est peu recommandable car elle induit une confusion avec les *gaz parfaits* dont la définition (la loi de Mariotte) n'implique absolument pas qu'ils soient non visqueux. Suivant le contexte le qualificatif « parfait » aurait deux significations différentes !

<sup>(19)</sup> Certains mécaniciens des solides déformables se sont cru libres de proposer des fonctions d'état (notamment l'énergie libre de Helmholtz) dont l'expression en fonction des variables d'état n'est pas *physiquement motivée*, mais qui les arrangent pour des raisons diverses plus ou moins avouables (simplifier des calculs ou aboutir à certaines formules). Les fonctions d'état proposées, bien que thermodynamiquement admissibles, conduisent à des lois de comportement mécanique physiquement peu vraisemblables. On en trouvera des exemples dans la section 2.4 du cours *Comportement élastique*, du même auteur.

<sup>(20)</sup> Voir les liens notes 20 et 21 [p. 85].

# Synthèse sur les équations générales

Dans les chapitres de ce cours, on a exprimé les conséquences des quatre principes fondamentaux de la physique classique sur les milieux continus non magnétiques<sup>(1)</sup>. Ces principes ont été exprimés sous forme globale pour des domaines matériels ou géométriques, ainsi que sous une forme locale.

Les formes locales du principe de la conservation de la masse, du principe fondamental de la mécanique et du premier principe de la thermodynamique sont des équations différentielles aux dérivées partielles, qui doivent être satisfaites en tout point et à tout instant de l'évolution de tout milieu continu. En revanche, les inéquations locales du second principe de la thermodynamique sont normalement automatiquement satisfaites lorsque l'on utilise un modèle de milieu continu dont les lois de comportement mécanique et thermique sont *thermodynamiquement admissibles*, c'est-à-dire qu'elles respectent le second principe dans toute évolution de particule. Ces inéquations n'apparaissent donc pas dans la résolution d'un problème de thermomécanique des milieux continus quand un modèle de comportement a été choisi.

En revanche, les inéquations locales du second principe de la thermodynamique sont d'importance cruciale lorsque l'on cherche à construire des modèles de comportement, afin d'éviter qu'ils soient thermodynamiquement absurdes. Toutefois, *l'admissibilité thermodynamique d'un modèle de comportement n'est pas suffisante* ; il faut aussi que l'expression *construite* d'une fonction d'état en fonction des variables d'état soit physiquement motivée afin d'aboutir à des lois de comportement physiquement sensées et corroborées par l'expérience. C'est cette démarche qui a été suivie dans le chapitre 6 [p. 93] pour construire des modèles de fluides simples. C'est aussi la démarche qui sera suivie dans les deux cours qui suivent pour des modèles de comportement de milieux continus solides déformables : *Comportement élastique* et *Comportements inélastiques*<sup>(2)</sup> du même auteur.

---

<sup>(1)</sup> Il n'y a pas de vecteur magnétique « attaché » aux particules. Le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 5 p. 4], n'a analysé que les variations des *positions* des particules, sans analyser les variations des *directions des vecteurs* (rotations) « attachés aux particules ». Une telle cinématique a été initiée par les frères Eugène et François COSSERAT qui attachaient à chaque particule un *trièdre orthonormé*, sans que le sens physique de ce trièdre soit clairement précisé pour les milieux continus tridimensionnels (ils semblaient avoir en vue l'étude des poutres et ses coques) [*Théorie des corps déformables*, Hermann, janvier 1909, (réédité en 2009, ISBN 9782705669201)]

<sup>(2)</sup> Voir les liens notes 20 et 21 [p. 85].

## 7.1 Le problème de mécanique des milieux continus

Les équations différentielles locales des trois premiers principes sont :

$$\dot{\rho} = -\rho \operatorname{tr} \mathbf{D} \quad (\text{principe de la conservation de la masse, équation de « continuité »})$$

$$\operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_0^m = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (\text{principe fondamental de la mécanique, équation de mouvement})$$

$$\rho \dot{e}^m = -\mathcal{P}_{int}^{v\,mec} + r_{ext}^v - \operatorname{div}_E \mathbf{q} \quad (\text{principe de conservation de l'énergie, équation de la chaleur})$$

où

— le tenseur  $\mathbf{D} = \operatorname{sym} \operatorname{grad}_E \mathbf{v}$  est le tenseur des taux de déformation ;

— le scalaire  $\mathcal{P}_{int}^{v\,mec}$  est la puissance volumique des efforts intérieurs de contact et à distance :

$$\mathcal{P}_{int}^{v\,mec} = -\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v \quad \text{où } \mathcal{P}_{int}^{v\,dist} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_{int}^v \text{ est souvent négligé.}$$

Ces équations générales, valables pour tout milieu continu, sont insuffisantes pour déterminer l'évolution d'un domaine (matériel ou géométrique) donné, rempli d'un milieu continu donné (acier, eau, air...) et sous l'action de sollicitations extérieures données. Il faut compléter ces équations différentielles par :

1. **Un modèle de comportement** thermodynamiquement admissible du milieu continu et qui modélise correctement le comportement réel de la matière, c'est-à-dire :

(a) la liste des variables d'état *objectives et indépendantes* (ou la liste des variables d'état réduites) nécessaires et suffisantes pour définir un état de particule du modèle ;

(b) l'expression des fonctions d'état en fonction des variables d'état modélisant correctement le comportement réel de la matière (énergie interne massique, capacités thermiques, dilatation, etc.). De ces fonctions d'état et d'un choix thermodynamiquement admissible de fonctions dissipatives on déduit :

— la loi de comportement mécanique :  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\text{état actuel}, \text{vitesse d'évolution})$  ;

— la loi de comportement thermique :  $\mathbf{q} = \mathbf{f}(\operatorname{grad}_E T, \text{état actuel}, \text{vitesse d'évolution})$ .

2. **Une description des sollicitations extérieures** sur le domaine étudié : ce sont les *conditions aux limites aux frontières* (mécaniques et thermiques), les *conditions initiales* (mécaniques et thermiques) et les champs d'*actions à distance* (mécaniques et thermiques) qui apparaissent dans l'équation (vectorielle) de mouvement et dans l'équation (scalaire) de la chaleur.

— **Les conditions aux limites mécaniques** sont :

(a) soit des conditions cinématiques (déplacements ou vitesses imposés sur la frontière) :

$$\mathbf{u}(P', t) = \mathbf{u}_{imp}(P', t) \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}(P', t) = \mathbf{v}_{imp}(P', t)$$

(b) soit des conditions sthéniques (contraintes imposées sur la frontière) :

$$\boldsymbol{\sigma}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t(P') = \mathbf{f}_{imp}^s(P', t)$$

(c) soit des conditions mécaniques mixtes (relations entre contraintes et déplacements ou vitesses imposés sur la frontière).

— **Les actions mécaniques à distance** sont représentées par un champ de force massique  $\mathbf{f}_0^m(P, t)$  ou volumique  $\mathbf{f}_0^v(P, t)$ , défini sur tout le domaine (bien souvent, on ne prend en compte que la gravitation terrestre, voire on la néglige en mécanique des solides déformables).

— **Les conditions aux limites thermiques** sont :

(a) soit des températures imposées sur la frontière :

$$T(P', t) = T_{imp}(P', t)$$

(b) soit des puissances calorifiques surfaciques imposées sur la frontière :

$$\mathbf{q}(P', t) \cdot \mathbf{n}_t = q_{imp}^s(P', t)$$

(c) soit des conditions thermiques mixtes (relation entre température et puissances calorifiques surfaciques imposées).

— **Les actions thermiques à distance** sont représentées un champ de puissance calorifique volumique  $r_{ext}^v(P, t)$  défini sur tout le domaine (bien souvent, il est inexistant ou négligé).

Les conditions aux limites et les actions à distance (mécaniques et thermiques) doivent modéliser de façon aussi réaliste que possible les actions de l'extérieur sur le domaine étudié. Elles sont essentielles pour la qualité de la solution.

3. **Une description des conditions initiales**, c'est-à-dire les valeurs initiales des champs à un instant  $t_0$ . Ces conditions initiales ne sont utiles que pour la résolution des problèmes transitoires (c'est-à-dire que l'on cherche l'évolution temporelle des champs). Lors de la recherche de solutions stationnaires ( $\forall \boldsymbol{\Psi}, \partial_t \boldsymbol{\Psi}_E = \mathbf{0}$ ), on ne pose pas de conditions initiales.

L'ensemble de ces équations étant posé, la description du problème est complète. Les champs matériels à déterminer sont : les champs des variables d'état, des fonctions d'état, des vitesses, des positions (ou des déplacements), des contraintes, des déformations, des taux de déformation etc. pour toute particule (et à tout instant pour les problèmes instationnaires). On peut aussi bien rechercher la description de Lagrange ou la description d'Euler de ces champs matériels.

En mécanique des milieux continus (solides ou fluides), il arrive bien souvent que l'on ne recherche qu'une solution stationnaire<sup>(3)</sup> (si elle existe). Dans ce cas, le temps disparaît des équations différentielles et on ne pose pas de conditions initiales. Le problème s'en trouve quelque peu simplifié.

## 7.2 La résolution

La résolution analytique d'un système d'équations aussi complexe est rarement possible sauf dans quelques problèmes académiques extrêmement simplifiés (mais pédagogiquement intéressants). Les causes des difficultés de résolution sont :

- la complexité du système différentiel (équations couplées, bien souvent non linéaires);
- la non unicité éventuelle des solutions, leur instabilité éventuelle, la présence éventuelle de bifurcations (en nombre fini voire infini);
- la complexité de la forme du domaine étudié;
- la complexité des conditions aux limites modélisant correctement les actions mécaniques et thermiques de l'extérieur sur le domaine étudié.

Dans la plupart des problèmes industriels, le recours à une méthode de résolution numérique est incontournable pour la résolution du problème exposé en section 7.1 [p. 110].

Ces méthodes numériques sont précieuses mais il ne faut jamais perdre de vue que :

1. Un résultat numérique est toujours approché pour trois raisons :

<sup>(3)</sup> C'est-à-dire une solution telle que pour toute grandeur  $\boldsymbol{\Psi}(P, t)$ , on ait  $\partial_t \boldsymbol{\Psi}_E = \mathbf{0}$ . Les mécaniciens des solides déformables disent qu'ils cherchent une « solution d'équilibre »; les mécaniciens des fluides disent qu'ils cherchent un « mouvement permanent ».



- (a) les calculs sont nécessairement approchés car la représentation des nombres dans les calculateurs est nécessairement finie, donc tronquée, et les erreurs de troncature se propagent en croissant dans les calculs successifs <sup>(4)</sup> ;
  - (b) la méthode de résolution numérique est par elle-même approchée car l'espace des fonctions dans lequel on cherche une solution approchée est un sous-ensemble de l'ensemble de toutes les fonctions possibles définies sur le domaine étudié <sup>(5)</sup> ;
  - (c) la « convergence numérique » apparente de l'implémentation d'un algorithme sur une machine n'est jamais une preuve de sa convergence mathématique. Inversement l'implémentation d'un algorithme théoriquement convergent ne converge pas nécessairement numériquement sur un ordinateur en raison de l'imperfection des calculs.
2. Pour étudier l'influence d'un paramètre, on ne peut que refaire le calcul pour différentes valeurs numériques du paramètre en espérant que cette influence est suffisamment régulière entre deux valeurs successives pour s'autoriser à faire des interpolations.
  3. Dans les problèmes non linéaires, dans lesquels on est rarement assuré de l'unicité de la solution ou de l'absence de bifurcations voire de solutions chaotiques, un résultat numérique est toujours sujet à caution et doit toujours être considéré avec circonspection car on maîtrise rarement la (les) branche(s) suivie(s) par un algorithme aboutissant à un résultat en cas de solutions multiples.

**Remarque** – Dans les problèmes stationnaires, on peut néanmoins obtenir analytiquement des résultats partiels intéressants en utilisant les trois premiers principes, non pas sous leur forme locale, mais sous une forme globale (sur un domaine matériel ou géométrique précis) avec quelques hypothèses simplificatrices raisonnables sur les frontières. Par exemple, il est souvent possible d'évaluer des valeurs intégrées sur des parties de frontière (débits, forces résultantes, moments résultants, quantités de chaleur échangée), mais sans information sur le détail de leur répartition.

### 7.3 Conclusion

Les applications de la mécanique des milieux continus concernent trois disciplines : la mécanique des fluides, la mécanique des solides déformables et l'acoustique. La distinction est justifiée par le fait que les préoccupations dans les trois spécialités sont différentes :

**En mécanique des fluides**, les variables d'état des fluides simples  $(T, \rho)$  sont généralement suffisantes. Les lois de comportement ne font pas référence à un tenseur de déformation, mais seulement au tenseur des taux de déformation. La loi de comportement des fluides simples newtoniens est satisfaisante pour modéliser bon nombre de fluides réels.

On cherche le mouvement inconnu dans un domaine géométrique décidé *a priori*. Les champs et le mouvement sont donc décrits par la méthode d'Euler. On cherche la description d'Euler des vitesses actuelles, des masses volumiques actuelles et des températures actuelles et de toutes autres grandeurs qui s'en déduisent.

<sup>(4)</sup> On connaît pourtant bien les méthodes d'évaluation des incertitudes dues aux troncatures et à l'incertitude des données, mais force est de constater que pratiquement aucun logiciel de calcul scientifique ne s'en préoccupe, soit en raison du surcoût en calcul et en mémoire, soit par crainte d'avoir à afficher des surprises désagréables sur l'incertitude du résultat final.

<sup>(5)</sup> Contrairement aux erreurs de troncature, on ne sait pas évaluer quantitativement cette erreur. On ne peut s'en faire qu'une vague idée en refaisant un calcul avec un maillage plus fin. Les « estimateurs d'erreurs » parfois proposés reposent sur des procédés d'estimation de l'erreur peu dignes de confiance.

Les difficultés de la mécanique des fluides résident essentiellement dans la complexité de l'équation de la mécanique des fluides newtoniens<sup>(6)</sup>, dont les solutions sont fréquemment instables (turbulence). Les hypothèses simplificatrices courantes sont la recherche de solutions stationnaires, l'incompressibilité, l'isothermie et la simplification du comportement mécanique (viscosités et/ou dilatabilité constantes voire nulles).

**En mécanique des solides**, les variables d'état des solides déformables contiennent toujours la température et un tenseur de déformation, mais aussi souvent des directions d'anisotropie et parfois aussi des variables d'état mnésiques qui résument l'histoire de la particule. Les modèles de comportement des solides déformables sont donc beaucoup plus divers qu'en mécanique des fluides (élasticité, viscoélasticité, plasticité, endommagement, fatigue etc.).

On cherche le mouvement inconnu d'un domaine *matériel* (le solide déformable). Ce mouvement est plus commodément décrit par la méthode de Lagrange<sup>(7)</sup> car la forme actuelle du domaine matériel est *a priori* inconnue<sup>(8)</sup>. On cherche donc la description de Lagrange du champ des positions actuelles (ou du champ des déplacements actuels), des champs actuels des variables d'état, du champ tensoriel des contraintes et de toutes autres grandeurs qui s'en déduisent.

Les difficultés de la mécanique des solides résident aussi principalement dans la complexité de l'équation de la mécanique, essentiellement dûe à la complexité de la loi de comportement mécanique. Les instabilités des solutions existent aussi (flambement), mais de manière moins cruciale qu'en mécanique des fluides. Les hypothèses simplificatrices courantes sont la recherche de solutions en équilibre mécanique (pas d'accélération), l'élasticité (pas de dissipation intrinsèque), l'isothermie (pas de dissipation thermique) et les petites déformations.

**En acoustique**, on étudie la propagation des sons dans les milieux matériels. Son champ d'investigation concerne donc à la fois les fluides et les solides. Les sons étant de petites perturbations de contraintes autour d'un état moyen, la modélisation du comportement des fluides et des solides autour d'un état moyen est le plus souvent linéarisée.

Le souhait de l'auteur est que ce cours ainsi que celui de cinématique des milieux continus, au delà des résultats généraux qui y sont exposés, améliorent la communication entre les praticiens de ces trois applications de la mécanique des milieux continus.

---

<sup>(6)</sup> L'équation de mouvement des fluides newtoniens à viscosité constante prend le nom d'équation de *Navier-Stokes*.

<sup>(7)</sup> On rappelle que les deux descriptions du mouvement sont équivalentes.

<sup>(8)</sup> Contrairement aux domaines géométriques utilisés en mécanique des fluides dont la forme est connue *a priori*.



# Démonstrations

## A.1 Lemme fondamental pour les intégrales de volume

Soit  $g(M)$  un champ scalaire défini dans  $\mathcal{E}_3$  et soit un domaine connexe  $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}_3$ . Il faut montrer l'équivalence :

$$\forall \mathcal{D}, \int_{\mathcal{D}} g(M) \, dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall M, g(M) = 0$$

L'implication  $g(M) = 0 \Rightarrow \int_{\mathcal{D}} g(M) \, dv = 0$  est triviale. Il suffit donc de prouver l'implication réciproque :

$$\forall \mathcal{D}, \int_{\mathcal{D}} g(M) \, dv = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall M, g(M) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Pour générer des domaines connexes  $\mathcal{D}$  arbitraires, on considère un domaine connexe  $\mathcal{D}_0$  arbitraire de point courant  $M_0$  et une application  $f : \mathcal{E}_3 \rightarrow \mathcal{E}_3$  arbitraire et différentiable en tout point  $M_0$  telle que :

$$M = f(M_0)$$

Avec les applications  $f$  différentiables arbitraires, on génère tous les domaines connexes  $\mathcal{D} \in \mathcal{E}_3$  <sup>(1)</sup> :

$$\mathcal{D} = \{M \mid M = f(M_0), M_0 \in \mathcal{D}_0\}$$

Par changement de variable, on ramène l'intégrale sur  $\mathcal{D}$  de (A.1) à une intégrale sur  $\mathcal{D}_0$  :

$$\int_{\mathcal{D}} g(M) \, dv = \int_{\mathcal{D}_0} g(f(M_0)) K(M_0) \, dv_0$$

où  $K = \frac{dv}{dv_0} = \det \mathbf{grad} f > 0$  <sup>(2)</sup>. La proposition à démontrer (A.1) se réécrit donc :

$$\forall f, \int_{\mathcal{D}_0} g(f(M_0)) K(M_0) \, dv_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall M_0 \in \mathcal{D}_0, g(f(M_0)) = 0 \quad (\text{A.2})$$

On note  $\mathbb{H}_{\mathcal{D}_0}^2$  l'ensemble des fonctions scalaires définies sur le domaine  $\mathcal{D}_0$  et de carré intégrable sur  $\mathcal{D}_0$ .

**Rappel d'analyse fonctionnelle** – On démontre en analyse fonctionnelle que l'ensemble de fonctions  $\mathbb{H}_{\mathcal{D}_0}^2$  est un espace vectoriel de fonctions, dit *espace de Hilbert*, de dimension infinie, sur lequel on peut définir un produit scalaire de deux fonctions noté  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_{\mathcal{D}_0} f_1(M_0) f_2(M_0) \, dv_0 \quad (\text{produit scalaire de deux fonctions de } \mathbb{H}_{\mathcal{D}_0}^2)$$

<sup>(1)</sup> La différentiabilité de  $f$  est nécessaire pour garantir la connexité des domaines  $\mathcal{D}$ .

<sup>(2)</sup> En cinématique  $K(M_0)$  serait la description de Lagrange de la dilatation volumique dans la transformation  $f$ .

La prémisse de l'implication à démontrer (A.2) [p. 115] s'écrit donc :

$$\forall f \text{ et } K = \det \mathbf{grad} f, \quad \langle g \circ f, K \rangle = 0$$

La fonction  $f$  étant arbitraire, la fonction  $K = \det \mathbf{grad} f$  l'est aussi. La prémisse de (A.2) [p. 115] implique donc :

$$\forall K, \quad \langle g \circ f, K \rangle = 0$$

Si un vecteur de  $\mathbb{H}_{\mathcal{D}_0}^2$  est orthogonal à tout vecteur de cet espace (ici la fonction  $K$ ), alors ce vecteur est nul. On en déduit que :

$$g \circ f = 0 \quad \text{soit encore} \quad g(f(M_0)) = 0$$

La fonction  $f$  étant arbitraire, le point  $M = f(M_0)$  est quelconque. La fonction  $g$  est donc nulle quel que soit son argument  $M$ , c'est-à-dire :

$$\forall M, \quad g(M) = 0$$

L'implication (A.2) [p. 115], réécriture de l'implication (A.1) [p. 115], est donc vraie.

*Il convient d'insister sur le fait que le champ scalaire  $g(M)$  doit être défini sur tout l'espace  $\mathcal{E}_3$  pour que l'on puisse écrire une intégrale  $\int_{\mathcal{D}} g(M) dv$  quel que soit le domaine  $\mathcal{D}$ .*

On généralise sans difficulté ce résultat à des champs vectoriels ou tensoriels  $\Psi(M)$  définis sur tout l'espace  $\mathcal{E}_3$  : il suffit d'appliquer le résultat précédent aux composantes du champ  $\Psi(M)$  qui sont des fonctions  $g(M)$ . On a donc :

$$\forall \mathcal{D}, \quad \int_{\mathcal{D}} \Psi(M) dv = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \forall M, \quad \Psi(M) = \mathbf{0}$$

## A.2 Démonstration de l'« hypothèse » de Cauchy

Considérons un sous-domaine  $\mathcal{D}_1$  inclus dans un domaine de milieu continu tel que ceux qui sont définis dans l'énoncé du théorème 3.11 [p. 32] pour définir les contraintes sur la frontière d'un sous-domaine  $\mathcal{D}_1$  [déf. 3.10 p. 32].

Soit  $P$  une particule de la frontière  $\partial \mathcal{D}_1$ , soit  $\mathcal{P}$  le plan tangent en  $P$  à la frontière  $\partial \mathcal{D}_1$  et soit  $\mathbf{n}$  la normale unitaire extérieure au sous-domaine  $\mathcal{D}_1$  au point  $P$ .

- **Hypothèse A.1 – Régularité minimale de la frontière.** On suppose qu'à la particule  $P$  de la frontière  $\partial \mathcal{D}_1$ , la courbure gaussienne de la frontière est finie.

**Rappels de géométrie des surfaces** – En tout point d'une surface, il existe deux plans normaux (c'est-à-dire des plans contenant le vecteur normal  $\mathbf{n}$ ) tels que l'intersection de ces plans avec la surface sont des courbes de courbure minimale et maximale. Ces deux plans sont orthogonaux et les courbures minimales et maximales sont appelées *courbures normales principales* de la surface en ce point.

On note  $\frac{1}{R_1} > \frac{1}{R_2}$  ces deux courbures normales principales. La courbure gaussienne est par définition le produit de ces deux courbures. Quand la courbure gaussienne est positive, la surface est localement située d'un seul côté du plan tangent (point dit *elliptique*); quand la courbure gaussienne est négative,

la surface est localement située des deux côtés du plan tangent (point dit *hyperbolique*)<sup>(3)</sup>. Lorsque la courbure gaussienne est nulle, l'une ou les deux courbures principales sont nulles<sup>(4)</sup>.

Autrement dit, on suppose qu'au point  $P$ , la frontière  $\partial \mathcal{D}_1$  n'est pas « anguleuse » et que son plan tangent  $\mathcal{P}$  est unique.

Dans ces conditions, on peut toujours enfermer localement la surface  $\partial \mathcal{D}_1$  entre deux paraboloides de révolution  $\mathcal{P}^+$  et  $\mathcal{P}^-$  d'axe  $\mathbf{n}$  dont la courbure au sommet est  $\frac{1}{R} > \max(\frac{1}{|R_1|}, \frac{1}{|R_2|})$  (voir fig. A.1 [p. 117]). Les équations des deux paraboloides de révolution dans un système de coordonnées cylindriques d'axe  $\mathbf{n}$  sont :

$$z = \pm \frac{r^2}{2R} \quad \text{où } M \text{ est un point du paraboloides, } z = \mathbf{PM} \cdot \mathbf{n} \text{ et } r = \|\mathbf{PM} - z\mathbf{n}\| \geq 0$$

On considère un cylindre  $\mathcal{C}$  d'axe  $\mathbf{n}$  et de rayon  $r$ . Ce cylindre détermine un domaine  $\mathcal{V}$  de volume  $V$  entre le plan  $\mathcal{P}$  et la frontière  $\partial \mathcal{D}_1$  (en gris sur la figure A.1 [p. 117]) et un autre domaine  $\mathcal{V}'$  de volume  $V'$  entre les deux paraboloides de révolution  $\mathcal{P}^+$  et  $\mathcal{P}^-$  [fig. A.1 p. 117].

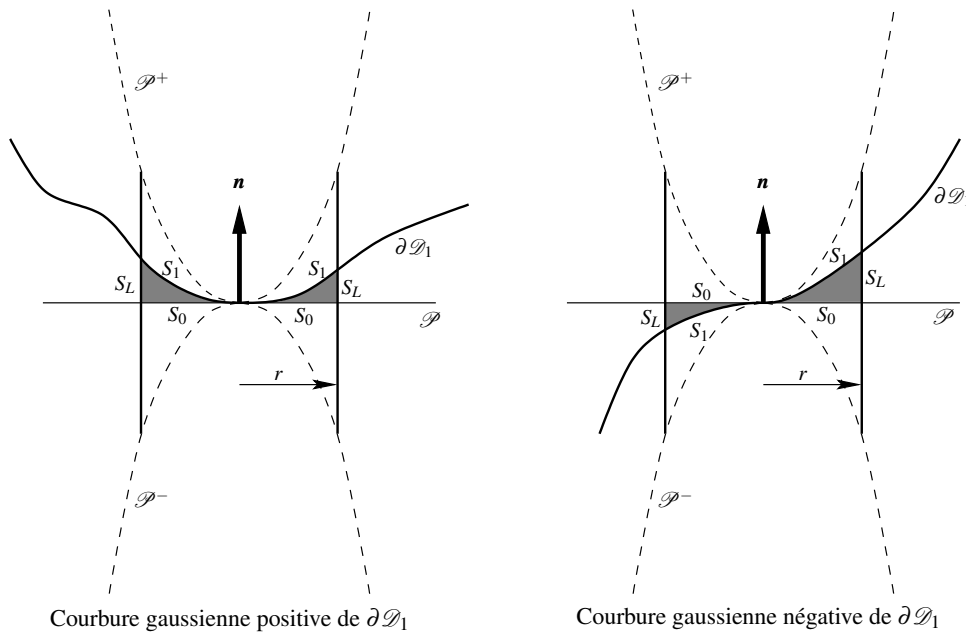


FIGURE A.1 – Coupes par un plan normal en  $P$  de la frontière  $\partial \mathcal{D}_1$  et de son plan tangent

Par construction, on a toujours :

$$V' > V \quad \text{où} \quad V' = 2 \int_0^r 2\pi r z \, dr = 2 \int_0^r 2\pi r \frac{r^2}{2R} \, dr = \frac{\pi r^4}{2R}$$

<sup>(3)</sup> Pour les points elliptiques, la surface a localement la forme d'un ellipsoïde. Pour les points hyperboliques, la surface a localement la forme d'une selle de cheval. Les dénominations *elliptiques* et *hyperboliques* proviennent de l'allure de la courbe d'intersection de la surface avec un plan parallèle proche du plan tangent.

<sup>(4)</sup> Si une seule courbure principale est nulle la surface a localement la forme d'un cylindre ; si les deux courbures principales sont nulles la surface a localement la forme d'un plan.

On note  $\mathbf{c}$  le champ de contrainte [déf. 3.10 p. 32] sur la frontière  $\partial\mathcal{D}_1$  et on applique le théorème de la résultante dynamique [th. 3.4 p. 29] au domaine  $\mathcal{V}$  :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E dv &= \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}_E^v dv + \int_{\partial\mathcal{V}} \mathbf{c}_E ds \\ \int_{\mathcal{V}} (\rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{f}_E^v) dv &= \int_{S_0} \mathbf{c}_E ds + \int_{S_1} \mathbf{c}_E ds + \int_{S_L} \mathbf{c}_E ds \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où  $S_0 \subset \mathcal{P}$ ,  $S_1 \subset \partial\mathcal{D}_1$  et  $S_L \subset \mathcal{C}$  [fig. A.1 p. 117] constituent la frontière du domaine  $\mathcal{V}$ .

On définit les valeurs moyennes des quatre intégrales de éq. (A.3) :

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{V} (\rho_E \boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{f}_E^v) dv \quad ; \quad \bar{\mathbf{c}}_0 = \frac{1}{S_0} \int_{S_0} \mathbf{c}_E ds \quad ; \quad \bar{\mathbf{c}}_1 = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \mathbf{c}_E ds \quad ; \quad \bar{\mathbf{c}}_L = \frac{1}{S_L} \int_{S_L} \mathbf{c}_E ds$$

L'équation (A.3) s'écrit alors :

$$\bar{\mathbf{f}} V = \bar{\mathbf{c}}_0 S_0 + \bar{\mathbf{c}}_1 S_1 + \bar{\mathbf{c}}_L S_L \quad \text{où} \quad V < V' = \frac{\pi r^4}{2R} \quad ; \quad S_0 = \pi r^2 \quad ; \quad S_L < 4\pi r z = \frac{2\pi r^3}{R}$$

soit encore :

$$\bar{\mathbf{c}}_0 + \bar{\mathbf{c}}_1 \frac{S_1}{S_0} = \bar{\mathbf{f}} \frac{V}{S_0} - \bar{\mathbf{c}}_L \frac{S_L}{S_0} \quad (\text{car } S_0 = \pi r^2) \quad (\text{A.4})$$

$\underbrace{\qquad}_{< \frac{r^2}{2R}} \qquad \underbrace{\qquad}_{< \frac{2r}{R}}$

Lorsque  $r \rightarrow 0$ , les coefficients positifs  $\frac{V}{S_0}$  et  $\frac{S_L}{S_0}$  des vecteurs  $\bar{\mathbf{f}}$  et  $\bar{\mathbf{c}}_L$  tendent vers 0 car ils sont inférieurs à des quantités qui tendent vers 0 ; la contrainte moyenne  $\bar{\mathbf{c}}_0$  sur  $S_0$  tend vers la contrainte  $\mathbf{c}_0(P)$ , la contrainte moyenne  $\bar{\mathbf{c}}_1$  sur  $S_1 \subset \partial\mathcal{D}_1$  tend vers la contrainte  $\mathbf{c}_1(P)$  et enfin le rapport  $\frac{S_1}{S_0}$  tend vers 1. On a donc :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \bar{\mathbf{c}}_0 + \lim_{r \rightarrow 0} \left( \bar{\mathbf{c}}_1 \frac{S_1}{S_0} \right) = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 \lim_{r \rightarrow 0} \frac{S_1}{S_0} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 = \mathbf{0}$$

Ainsi, la contrainte  $\mathbf{c}_1$  en  $P$  s'exerçant sur la frontière  $\partial\mathcal{D}_1$  est opposée à la contrainte  $\mathbf{c}_0$  s'exerçant en  $P$  sur la surface plane  $S_0$ . Ce résultat est vrai quelle que soit la frontière  $\partial\mathcal{D}_1$  comprise entre les deux paraboloides de révolution  $\mathcal{P}_+$  et  $\mathcal{P}_-$ .

*Tous les sous-domaines  $\mathcal{D}_1$  dont la frontière  $\partial\mathcal{D}_1$  contient  $P$  et qui ont le même plan tangent  $\mathcal{P}$  (et donc la même normale extérieure  $\mathbf{n}$ ) ont donc la même contrainte  $\mathbf{c}_1 = -\mathbf{c}_0$ .*

Bien noter que la démonstration précédente ne fournit pas la valeur de la contrainte  $\mathbf{c}_1(P)$  : on sait seulement elle est égale à  $-\mathbf{c}_0(P)$  qui est la contrainte en  $P$  d'un sous-domaine dont la frontière en  $P$  serait le plan  $\mathcal{P}$  et de normale extérieure  $-\mathbf{n}$  (normale extérieure en  $P$  à la frontière du domaine  $\mathcal{V}$ ).

Le résultat précédent est valable quelle que soit la plus grande courbure en  $P$  de la frontière  $\partial\mathcal{D}_1$  du sous-domaine  $\mathcal{D}_1$ , c'est-à-dire pour :

$$\max\left(\frac{1}{|R_1|}, \frac{1}{|R_2|}\right) < \infty$$

### A.3 Existence du tenseur des contraintes (de Cauchy)

Considérons un sous-domaine matériel dont la position actuelle est le tétraèdre  $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}_t^m$ , défini par les particules sommets  $P_0, P_1, P_2$  et  $P_3$ , et dont les faces planes  $P_0P_2P_3, P_0P_3P_1$  et  $P_0P_1P_2$  sont orthogonales [voir fig. A.2 p. 119].

Les normales unitaires de la frontière du domaine tétraédrique  $\mathcal{T}$  sont notées respectivement  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  et  $\mathbf{n}_3$ , elles forment un trièdre orthonormé. On note  $\mathbf{n}$  la normale unitaire à la face inclinée  $P_1P_2P_3$  (non dessinée sur la figure).

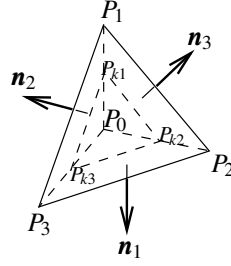


FIGURE A.2 – Un sous-domaine matériel actuellement tétraédrique  $\mathcal{T} \subset \mathcal{D}_t^m$

On note  $S_i$  ( $i = 0 \dots 3$ ) les aires des faces ( $S_0$  est l'aire de la face inclinée). Le lecteur vérifiera aisément que la géométrie de ce tétraèdre permet d'écrire :

$$\forall i \in [1, 2, 3], \quad \frac{S_i}{S_0} = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_i \quad (\text{A.5})$$

Comme pour tout domaine matériel, les efforts extérieurs [section 3.2 p. 30] qui s'appliquent sur le sous-domaine matériel tétraédrique  $\mathcal{T}$  sont :

1. un champ de forces massiques à distance  $\mathbf{f}_{\mathcal{T}}^m$  (gravitation, forces d'inertie etc.) agissant sur chaque particule du sous domaine tétraédrique  $\mathcal{T}$ ,
2. un champ de contraintes sur chaque face de la frontière :  $\mathbf{c}_i$  sur la face  $S_i$ .

Le théorème de la résultante dynamique [th. 3.4 p. 29] appliqué au domaine matériel  $\mathcal{T}$  s'écrit :

$$\int_{\mathcal{T}} (\boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{f}_{\mathcal{T}E}^m) \rho_E \, dv = \sum_{i=0}^3 \int_{S_i} \mathbf{c}_{iE} \, ds$$

On définit les valeurs moyennes de chacune de ces intégrales :

$$\bar{\mathbf{f}} = \frac{1}{V_{\mathcal{T}}} \int_{\mathcal{T}} \rho_E (\boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{f}_{\mathcal{T}E}^m) \, dv \quad \text{et} \quad \forall i \in [0, 1, 2, 3], \quad \bar{\mathbf{c}}_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} \mathbf{c}_{iE} \, ds$$

Le théorème de la résultante dynamique sur le domaine matériel  $\mathcal{T}$  s'écrit donc encore :

$$\bar{\mathbf{f}} V_{\mathcal{T}} = \bar{\mathbf{c}}_0 S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_i S_i$$

On définit maintenant d'autres sous-domaines matériels actuels  $\mathcal{T}_k$  par homothétie de centre  $P_0$  et de rapport  $k$  appliquée au tétraèdre  $\mathcal{T}$ . Les tétraèdres  $\mathcal{T}_k$  obtenus ont le même sommet  $P_0$ , les autres étant  $P_{1k}, P_{2k}$  et  $P_{3k}$  [fig. A.2 p. 119]. Dans cette homothétie, les aires sont multipliées



par  $k^2$  et les volumes par  $k^3$ . Les faces des tétraèdres  $\mathcal{T}_k$  sont parallèles à celles de  $\mathcal{T}$  et leurs normales unitaires  $\mathbf{n}_i$  sont donc invariantes dans l'homothétie. Le théorème de la résultante dynamique appliqué aux sous-domaines  $\mathcal{T}_k$  s'écrit comme précédemment :

$$\bar{\mathbf{f}}_k V_{\mathcal{T}_k} = \bar{\mathbf{c}}_{0k} S_{0k} + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_{ik} S_{ik}$$

où, comme précédemment,

$$\bar{\mathbf{f}}_k = \frac{1}{V_{\mathcal{T}_k}} \int_{\mathcal{T}_k} \rho_E (\boldsymbol{\gamma}_E - \mathbf{f}_{\mathcal{T}_k}^m) dv \quad ; \quad \bar{\mathbf{c}}_{ik} = \frac{1}{S_{ik}} \int_{S_{ik}} \mathbf{c}_{ikE} ds$$

Compte tenu de l'homothétie,  $V_{\mathcal{T}_k} = k^3 V_{\mathcal{T}}$  et  $S_{ik} = k^2 S_i$ , le théorème de la résultante dynamique appliqué aux sous-domaines  $\mathcal{T}_k$  se réécrit :

$$\bar{\mathbf{f}}_k k^3 V_{\mathcal{T}} = \bar{\mathbf{c}}_{0k} k^2 S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_{ik} k^2 S_i \quad \Rightarrow \quad \bar{\mathbf{f}}_k k V_{\mathcal{T}} = \bar{\mathbf{c}}_{0k} S_0 + \sum_{i=1}^3 \bar{\mathbf{c}}_{ik} S_i$$

En faisant tendre le rapport d'homothétie  $k$  vers 0, on obtient <sup>(5)</sup> :

$$\mathbf{0} = S_0 \lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{c}}_{0k} + \sum_{i=1}^3 S_i \lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{c}}_{ik}$$

Dans cette limite, les valeurs des contraintes moyennes sur chacune des faces tendent (par définition de la contrainte) respectivement vers les contraintes en  $P_0$  pour les directions de ces faces dont les normales sont de direction constante dans l'homothétie :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \bar{\mathbf{c}}_{ik} = \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t), \quad \forall i \in [0, 1, 2, 3]$$

Le passage à la limite  $k \rightarrow 0$  conduit donc à :

$$\mathbf{0} = S_0 \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}, t) + \sum_{i=1}^3 S_i \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t)$$

La contrainte en la particule  $P_0$  pour la facette de normale  $\mathbf{n}$  est donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}, t) &= - \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{S_0} \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) = \sum_{i=1}^3 \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}) \quad [\text{éq. (A.5) p. 119}] \\ &= \underbrace{\left( \sum_{i=1}^3 (\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}_i, t) \otimes \mathbf{n}_i) \right)}_{\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t)} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{algèbre tensorielle}) \end{aligned}$$

Pour toute direction  $\mathbf{n}$ , la contrainte actuelle  $\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}, t)$  est donc une fonction linéaire de  $\mathbf{n}$ , car le tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t)$  est indépendant de  $\mathbf{n}$ .

Cependant, le tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\sigma}$  est encore *a priori* une fonction des trois directions unitaires  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  et  $\mathbf{n}_3$ . Pour montrer qu'elle en est indépendante, on fait le même raisonnement

<sup>(5)</sup> Noter que dans le passage à la limite  $k \rightarrow 0$ , les intégrales de volume (les forces à distance et les accélérations) disparaissent.

avec un autre domaine tétraédrique  $\mathcal{T}'$ , de même sommet  $P_0$  dont les normales unitaires aux faces sont  $\mathbf{n}$  (identique au précédent), et trois autres normales unitaires orthogonales *différentes*  $\mathbf{n}'_1$ ,  $\mathbf{n}'_2$  et  $\mathbf{n}'_3$ . Le même calcul que précédemment conduit à une autre expression de la contrainte actuelle  $\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}, t)$  :

$$\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}, t) = \underbrace{\left( \sum_{i=1}^3 \mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}'_i, t) \otimes \mathbf{n}'_i \right)}_{\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t)} \cdot \mathbf{n}$$

On a donc :  $\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t) \cdot \mathbf{n}$ . Cette égalité étant vraie pour toute direction  $\mathbf{n}$ , les deux tenseurs suivants sont égaux :

$$\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t)$$

Cette dernière égalité est vraie pour tout ensemble de directions orthonormées  $\{\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3\}$ . On en déduit que l'opérateur  $\boldsymbol{\sigma}$  n'est pas fonction du choix des orientations des faces  $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ , et on peut écrire :

$$\boldsymbol{\sigma}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, t)$$

Il existe donc en chaque particule  $P_0$  d'un milieu continu un tenseur du second ordre  $\boldsymbol{\sigma}(P_0, t)$  tel que la contrainte actuelle sur une facette matérielle de normale  $\mathbf{n}$  est donnée par :

$$\mathbf{c}(P_0, \mathbf{n}, t) = \boldsymbol{\sigma}(P_0, t) \cdot \mathbf{n}$$

La démonstration précédente *ne prouve que l'existence* du champ matériel tensoriel du second ordre  $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$  appelé *tenseur des contraintes* (de Cauchy) sans préciser sa distribution dans l'espace ni son évolution dans le temps.

**Remarque** – Contrairement à ce qui est parfois écrit dans certains textes, pour prouver l'existence du champ de tenseurs des contraintes dans un milieu continu, il n'est pas nécessaire de négliger les accélérations et les forces de volume extérieures à distance agissant sur les tétraèdres (autogravitation, forces d'inerties etc.) qui sont *intérieures* au domaine  $\mathcal{D}$  contenant le tétraèdre : elles disparaissent dans le passage à la limite  $k \rightarrow 0$ .

#### A.4 Existence du vecteur courant de chaleur

Pour analyser la conduction de la chaleur à l'intérieur d'un milieu continu, on procède de la même manière que pour l'analyse des efforts intérieurs.

On considère un domaine matériel  $\mathcal{D}^m$  dont la position actuelle est  $\mathcal{D}_t^m$ . La puissance calorifique surfacique extérieure actuelle reçue à sa frontière est un champ scalaire noté  $q_s(P, t)$  ( $\text{W.m}^{-2}$ ) défini sur la frontière  $\partial \mathcal{D}_t^m$  [déf. 4.14 p. 68].

Pour étudier les échanges de chaleur à l'intérieur du domaine, on procède comme pour la définition des efforts intérieurs à un milieu continu [sec. 3.3 p. 32] : on considère des sous-domaines  $\mathcal{D}_1$  et leurs échanges thermiques avec leur extérieur  $(\mathcal{D} - \mathcal{D}_1) \cup \text{ext}(\mathcal{D})$ , dont une partie sont des échanges thermiques intérieurs à  $\mathcal{D}_1^m$ .

- **Théorème A.2** – Tous les sous-domaines  $\mathcal{D}_1$  dont la frontière contient la particule  $P$  et dont la normale extérieure  $\mathbf{n}_t$  est commune reçoivent la même puissance calorifique surfacique actuelle  $q_s$ .

**Démonstration** – La démonstration est analogue à celle de « l'hypothèse de Cauchy » [sec. A.2 p. 116]. Soit un sous-domaine  $\mathcal{D}_1$  et soit une particule  $P$  de sa frontière; le plan  $\mathcal{P}$  est le plan tangent en la particule  $P$  et  $\mathbf{n}$  est la normale unitaire extérieure en  $P$  à la frontière  $\partial\mathcal{D}_1$ . On note  $\mathcal{P}^+$  et  $\mathcal{P}^-$  deux paraboloides de révolution de courbure au sommet suffisante pour encadrer localement la frontière  $\partial\mathcal{D}_1$  et on note  $\mathcal{C}$  un cylindre d'axe  $\mathbf{n}$  et de rayon  $r$  [voir fig. A.1 p. 117]. On applique le principe de la conservation de l'énergie [éq. (4.5) p. 69] au domaine  $\mathcal{V}$  délimité par la frontière  $\partial\mathcal{D}_1$ , le plan tangent  $\mathcal{P}$  et le cylindre  $\mathcal{C}$  (domaine grisé sur la figure A.1 [p. 117]).

En étudiant la limite  $r \rightarrow 0$ , on trouve<sup>(6)</sup> que tous les sous-domaines dont la frontière contient la particule  $P$  et dont  $\mathcal{P}$  est le plan tangent reçoivent la même puissance calorifique surfacique  $q_{ext}^s = -q_0$ , où  $q_{ext}^s$  est la chaleur surfacique reçue par le domaine  $\mathcal{V}$  sur sa partie de frontière incluse dans  $\partial\mathcal{D}_1$  (de normale extérieure  $\mathbf{n}$ ) et où  $-q_0$  est la chaleur surfacique reçue par le domaine  $\mathcal{V}$  sur sa partie de frontière  $S_0$  (de normale extérieure  $-\mathbf{n}$ ).

Tous les sous-domaines  $\mathcal{D}_1$  dont la frontière  $\partial\mathcal{D}_1$  contient  $P$  et qui ont le même plan tangent  $\mathcal{P}$  (et donc la même normale extérieure  $\mathbf{n}$ ) reçoivent de l'extérieur une chaleur surfacique  $q_{ext}^s = -q_0$  qui ne dépend que de  $\mathbf{n}$ .

Il existe donc une fonction  $f_q$  telle que  $q^s = f_q(P, \mathbf{n}, t)$  où  $P$  est une particule et  $\mathbf{n}$  est la normale actuelle à une facette matérielle.

- **Théorème A.3 – Existence du courant de chaleur.** Dans tout milieu continu, il existe un champ vectoriel  $\mathbf{q}(P, t)$  tel que la puissance calorifique surfacique actuelle reçue sur une facette matérielle en une particule  $P$  et de normale actuelle  $\mathbf{n}_t$  est donnée par :

$$q^s(P, \mathbf{n}_t, t) = \mathbf{q}(P, t) \cdot \mathbf{n}_t$$

**Démonstration** – Pour démontrer ce théorème, on applique le principe de la conservation de l'énergie [éq. (4.5) p. 69] au sous-domaine matériel tétraédrique utilisé dans la démonstration d'existence du tenseur des contraintes de Cauchy [voir fig. A.2 p. 119] :

$$\int_{\mathcal{T}} \dot{e}_E^m \, dm = \int_{\mathcal{T}} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E \, dv_t + \int_{\mathcal{T}} r_{extE}^v \, dv_t - \sum_{i=0}^3 \int_{S_i} q_E^s \, ds_t$$

On définit ensuite les valeurs moyennes des intégrales suivantes :

$$\bar{I}_v = \frac{1}{V_{\mathcal{T}}} \int_{\mathcal{T}} (\rho_E \dot{e}_E^m - \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E - r_{extE}^v) \, dv_t \quad ; \quad \bar{I}_i = \frac{1}{S_i} \int_{S_i} q_E^s \, ds_t$$

où  $V_{\mathcal{T}}$  est le volume du tétraèdre  $\mathcal{T}$  et  $S_i$  l'aire des faces. Le principe global de la conservation de l'énergie sur le domaine matériel  $\mathcal{T}$  s'écrit alors :

$$V_{\mathcal{T}} \bar{I}_v + \sum_{i=0}^3 S_i \bar{I}_i = 0$$

Le principe de la conservation de l'énergie appliqué à des tétraèdres  $\mathcal{T}_k$  homothétiques de  $\mathcal{T}$  de centre  $P_0$  et de rapport  $k$  s'écrit :

$$k^3 V_{\mathcal{T}} \bar{I}_{vk} + k^2 \sum_{i=0}^3 S_i \bar{I}_{ik} = 0 \quad \Rightarrow \quad k V_{\mathcal{T}} \bar{I}_{vk} + \sum_{i=0}^3 S_i \bar{I}_{ik} = 0$$

où  $\bar{I}_{vk}$  et  $\bar{I}_{ik}$  sont les valeurs moyennes des intégrales de volume et de surface sur le tétraèdre  $\mathcal{T}_k$ .

<sup>(6)</sup> Les intégrales de volume et l'intégrale sur la surface latérale  $S_L$  disparaissent dans le passage à la limite pour les mêmes raisons que dans l'équation (A.4) [p. 118] (les contraintes sont à remplacer par des chaleurs surfaciques reçues sur chaque partie de frontière).

Lorsqu'on fait tendre  $k$  vers 0, les normales  $n_i$  sont de direction constante et il reste :

$$S_0 q_0^s = - \sum_{i=1}^3 S_i q_i^s$$

$$q_0^s = - \sum_{i=1}^3 \frac{S_i}{S_0} q_i^s = \sum_{i=1}^3 q_i^s n_i \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \cdot \mathbf{n} \quad [\text{éq. (A.5) p. 119}]$$

où :

$$q_i^s = \lim_{k \rightarrow 0} \bar{I}_{ik} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{S_{ik}} \int_{\mathcal{S}_k} q_E^s ds_t$$

ce qui est la définition de la puissance calorifique surfacique traversant la facette matérielle en  $P_0$  de normale actuelle  $\mathbf{n}_i$ . On en déduit que *pour toute facette matérielle de normale actuelle  $\mathbf{n}$ , la puissance calorifique surfacique actuelle entrant par cette facette est une fonction linéaire de la direction  $\mathbf{n}$*  :

$$q_{s0}(t) = \mathbf{q}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) \cdot \mathbf{n}$$

On termine la démonstration de la même manière que dans la section précédente : on considère d'autres tétraèdres, de même sommet  $P_0$ , de même normale  $\mathbf{n}$  mais dont les autres normales orthogonales sont différentes :  $\mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2$  et  $\mathbf{n}'_3$ . En refaisant le calcul précédent, on en déduit que :

$$q_{s0}(t) = \mathbf{q}(P_0, \mathbf{n}'_1, \mathbf{n}'_2, \mathbf{n}'_3, t) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}(P_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, t) \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{n}'_1 \forall \mathbf{n}'_2 \forall \mathbf{n}'_3 \text{ orthogonales.}$$

Le champ vectoriel  $\mathbf{q}$  ne dépend donc pas des directions  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$  et  $\mathbf{n}_3$  :

$$q_{s0}(t) = \mathbf{q}(P_0, t) \cdot \mathbf{n}$$

Comme pour l'existence du tenseur des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , cette démonstration *ne prouve que l'existence* du champ matériel vectoriel *courant de chaleur*  $\mathbf{q}(P, t)$  sans préciser ni sa distribution dans l'espace ni son évolution dans le temps.