



# Mécanique et théorie des poutres droites

Jean-Michel Génevaux

## ► To cite this version:

Jean-Michel Génevaux. Mécanique et théorie des poutres droites. Licence. Licence Acoustique et Vibrations, Le Mans, France. 2020. cel-00697806v3

**HAL Id: cel-00697806**

**<https://cel.hal.science/cel-00697806v3>**

Submitted on 20 Feb 2020 (v3), last revised 15 Dec 2023 (v5)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Licence Acoustique et Vibration  
2ième année

Mécanique, Résistance des matériaux  
Statique des poutres droites

<http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=403>



Ce(tte) œuvre est mise à disposition selon les termes de  
la [Licence Creative Commons Attribution - Pas  
d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes  
Conditions 3.0 France](#).

Jean-Michel Génevaux  
et les complicités des collègues et étudiants qui ont détecté  
les (trop) nombreuses fautes de grammaire et d'orthographe !

February 19, 2020



# Contents

<b>1</b>	<b>Méthode de travail</b>	<b>5</b>
1.1	Les objectifs . . . . .	5
1.2	La pédagogie utilisée . . . . .	5
1.2.1	Les phases de travail . . . . .	5
1.2.2	Conseils aux référents . . . . .	8
1.2.3	Les travaux pratiques . . . . .	8
1.3	Absence . . . . .	9
1.4	L'évaluation des compétences et objectifs pédagogiques. . . . .	9
1.5	Les ceintures de statique des poutres droites. . . . .	11
<b>2</b>	<b>Piqûres de rappel</b>	<b>13</b>
2.1	Outils mathématiques . . . . .	13
2.2	Solide indéformable . . . . .	14
2.3	L'outil de base franco-français : le torseur . . . . .	14
2.4	L'élasticité tridimensionnelle linéaire isotrope . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Mécanique du solide indéformable : de l'équilibre aux réactions aux liaisons</b>	<b>19</b>
3.1	Liaisons parfaites normalisée - torseur des efforts transmissibles . . . . .	19
3.2	Torseurs de chargement . . . . .	21
3.3	isostaticité - hyperstaticité . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Statique des poutres droites isostatiques homogènes dans l'épaisseur à matériau isotrope, alias "la résistance des matériaux"</b>	<b>27</b>
4.1	Sollicitation simple : traction-compression . . . . .	29
4.1.1	Isoler le tronçon de poutre . . . . .	29
4.1.2	Composantes du torseur des efforts intérieurs (et pour les allergiques forces et moments au sein de la poutre) . . . . .	30
4.1.3	Message aux allergiques à l'utilisation de torseur . . . . .	32
4.1.4	Loi de comportement . . . . .	33
4.1.5	Déplacement et rotation . . . . .	34
4.1.6	Lieu(x) de la contrainte maximale, limite d'élasticité. . . . .	35
4.2	Sollicitation simple : torsion . . . . .	36
4.2.1	Composantes du torseur des efforts intérieurs . . . . .	37
4.2.2	Contraintes locales dans la section droite . . . . .	37
4.2.3	Déplacement et rotation . . . . .	39
4.2.4	Correction de cisaillement . . . . .	40
4.2.5	Limite d'élasticité en torsion . . . . .	41
4.3	Travail pratique : une poutre en torsion . . . . .	41
4.4	Sollicitation simple : flexion pure . . . . .	41
4.4.1	Composantes du torseur des efforts intérieurs . . . . .	43
4.4.2	Loi de comportement . . . . .	44

4.4.3	Courbure . . . . .	46
4.4.4	Déplacement et rotation . . . . .	47
4.4.5	Chargement maximal en flexion pure. . . . .	49
4.5	Sollicitation simple : cisaillement . . . . .	51
4.5.1	Composantes du torseur des efforts intérieurs . . . . .	51
4.6	Sollicitation composée : flexion simple . . . . .	51
4.6.1	Composantes du torseur des efforts intérieurs . . . . .	52
4.6.2	Loi de comportement . . . . .	55
4.6.3	Déplacement et rotation . . . . .	55
4.6.4	Chargement maximal . . . . .	57
4.6.5	résolution par Maxima . . . . .	57
4.7	Travail pratique : une poutre en flexion . . . . .	59
4.8	Sollicitations composées : la totale ! . . . . .	60
4.8.1	Lieu(x) de la contrainte maximale . . . . .	61
4.8.2	Les déplacements et les rotations : formules de Bresse. . . . .	61
4.9	L'assemblage de poutres droites . . . . .	64
4.9.1	Le principe . . . . .	64
4.9.2	Un exemple . . . . .	64
4.10	Travail pratique : une poutre constituée de plusieurs segments. . . . .	71

# Chapter 1

## Méthode de travail

### 1.1 Les objectifs

Cet enseignement sera dispensé pendant les séances de CRAIEM ("Coopérons à notre Rythme d'Apprentissage Individualisé en Ecole Mutuelle"). Pour que vous puissiez organiser vos apprentissages, pour chacun des enseignements, un plan de travail personnel et pour l'année résume :

- les étapes de formation (brevets),
- les objectifs de formations (ceintures ou examen).
- le nombre de séances qu'il vous faut suivre.

### 1.2 La pédagogie utilisée

#### 1.2.1 Les phases de travail

Les séquences d'enseignement théoriques en présentiel (CRAIEM) sont divisées en six parties :


1. Lecture d'une partie du polycopié, visualisation de vidéos, sont faites à la maison en dehors des séances.
2. En entrant dans la salle, vous donnez à l'enseignant votre fiche d'entrée dans la salle(Fig. 1.1) et vous allez vous asseoir en cercle.
3. L'enseignant classe les questions par numéro de page, lit chacun à haute voix et y répond. Les réponses sont enregistrées en vidéo, puis sont indexées dans le polycopié aux lieux adéquats ce qui permet de les consulter en différé. La prise d'image est assurée par un étudiant-cameraman. Un étudiant-secrétaire, note les questions dans un fichier texte pour faciliter la mise à disposition ultérieure. Pendant cette phase de question-réponse, un étudiant fait circuler une feuille d'émargement : le nombre de signature doit correspondre au nombre de présents.
4. Un second temps peut être consacré au débat d'une durée maximale de 15 minutes. L'image du jour est affichée. Il vous est posé une question à laquelle vous répondrez en 3 temps : 2 minutes de réflexion personnelle, 4 minutes de confrontation d'idées par groupe de 4, mise en commun collective sous le format : "Je pense que ... et mes raisons sont les suivantes ...".
5. Une phase d'exercices (brevets) est alors faite à votre rythme. La banque de brevet regroupe l'ensemble des exercices. Afin que chacun puisse se concentrer sur son travail, si vous échangez avec vos voisins, merci de le faire en chuchotant. Pour cette phase vous pouvez avoir deux rôles : apprenant ou expert.

J'ai lu jusqu'à la page xxxx  
 Depuis la dernière séance,  
 j'ai regardé ... vidéos,  
 j'ai travaillé xxx heures.  
☐ 0 ☐ 0,5 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 4 ☐ 8

☐ Je n'ai pas de question.  
☐ Mes questions sont les suivantes :

Couleur ☐ j ☐ o ☐ b ☐ v ☐ m ☐ n  
 Page :

Suite au dos (si nécessaire) :

 courriel si tu souhaites  
 un rendez-vous

Librement inspiré par [samuel-jean.bassetto@polymtl.ca](mailto:samuel-jean.bassetto@polymtl.ca)

Figure 1.1: Fiche de travail personnel à compléter avant d'entrer dans la salle.

- Si vous avez reçu un mél pour être expert d'un brevet, en entrant dans la salle, vous regardez combien d'étudiants sont inscrits pour le brevet dont vous êtes l'encadrant, vous mettez autour du cou votre badge (Fig. 1.2), vous préparez un ou plusieurs pôles de 4 personnes. Après participation à la phase de question/réponse, vous récupérez une brique Lego de la couleur de votre groupe, vous vous tenez à disposition des étudiants qui travaillent sur votre brevet. Vous les aidez en respectant les règles d'aide notées au dos de votre badge. Attendez qu'ils appellent à l'aide pour intervenir : pendant ce temps continuez de travailler (seul) sur votre brevet d'apprenant. Si vous avez une difficulté pour expliquer, venez en parler à l'enseignant qui vous donnera un "coup de pouce". Parmi les apprenants avec lesquels vous travaillez pendant une séance, demandez à l'un d'entre eux de prendre ce rôle de référent pour ce brevet pour la séance suivante. Il note son mél sur le badge, et vous barrez le votre. Vous remettez les tables en position si nous sommes dans la salle d'examen de l'IUT ou la C05 de l'Ensim. Vous rendez le badge à l'enseignant.
  - Si vous êtes apprenant, vous récupérez une brique Lego de la couleur de votre groupe. Les brevets ont été écrits suite aux erreurs rencontrées les plus fréquemment dans les copies d'examen. Cette banque de brevets concerne l'ensemble des trois années de formation à l'ENSIM et certaines formations à l'UFR. Vous serez aidé soit par un expert, soit étudiant, soit enseignant s'il n'y a pas encore de référent étudiant de ce brevet. Pour un brevet que vous avez bien compris, vous pouvez en devenir le référent : votre rôle est alors d'aider les autres à l'obtenir. Un système de badge, que vous mettez autour du cou lors des séances suivantes, permet aux étudiants de vous identifier et de venir chercher de l'aide. Vous notez votre mél sur le badge, et le référent barre le sien.
6. Les trois dernières minutes d'une séquence sont utilisées pour poser votre brique Lego sur le graphe de progression à proximité de la tuile comportant le numéro du brevet sur lequel vous êtes en train de travailler. Ce plateau permet à l'enseignant de préparer la salle pour la séance suivante et de vous accompagner plus particulièrement si vous êtes derrière le peloton ou à galoper devant. Vous déposerez aussi une fiche de retour sur la séance 1.3 qui permet de mesurer si le fonctionnement est adéquat. Vous prenez une fiche de d'entrée dans la salle (Fig. 1.1) pour la séance suivante.

033
<b>Prenom.nom.etu :</b>

Figure 1.2: Exemple de badge de référent.

*Fiche librement inspirée d'après cette conque par  
samuel-jean.bassetto@polymtl.ca*

La phase de questions/réponse m'a permis de mieux comprendre.
  
La phase de débat scientifique m'a intéressé.
  
Durant les brevets, l'expert a respecté les consignes d'aide.
  
Demande de rendez vous :
Courriel : 

Figure 1.3: Fiche de retour d'information en fin de séance.



### 1.2.2 Conseils aux référents

Si vous êtes "expert", merci de veillez à respecter ces conseils. Si vous êtes "apprenant", merci de signaler à l'expert qu'il ne respecte pas ces conseils : vous l'aidez à prendre la bonne posture afin que vous appreniez le plus efficacement possible.

Quelques conseils à l'expert :

- Commence par demander "Tu en es où ? Qu'est ce que tu as déjà fait ? A quoi ça te fait penser ? Raconte ce que tu as compris du problème". Essaye de parler moins de 10% du temps. Cela permet de l'aider juste là où il en a besoin.
- Fais écrire l'étudiant plutôt que de le faire à sa place.
- Si tu dois faire l'exercice car l'étudiant n'écrit pas, essaye de le faire travailler sur un exercice jumeau : changer les fonctions, les conditions aux limites, les valeurs numériques... Par exemple en math, si l'étudiant doit dériver  $f(x) = 2x \cos(x)$ , lui faire dériver  $g(x) = 5x \sin(x)$ .
- Quand tu as expliqué quelque chose, demande à l'étudiant de réexpliquer ce que tu viens de faire.
- Se taire quand ils ont redémarré pour les laisser faire.

### 1.2.3 Les travaux pratiques

Les séquences d'enseignement pratique vous proposent de travailler sur 3 montages différents : *torsion*, *flexion* et *portique*. Un compte-rendu contient plusieurs étapes :

- la problématique et un exemple dans la vie réelle,
- la modélisation,
- la description de la procédure expérimentale,
- les mesures,
- l'exploitation des mesures,
- la comparaison entre théorie et mesures,
- la conclusion et les perspectives.

Le compte-rendu type pour la première manipulation, vous est fourni quasi complet avec quelques trous. Le second compte-rendu fourni vous laissera plus d'espace de travail. Le troisième compte-rendu fourni est quasi-vierge.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 249 273 274 292.

Faculté des Sciences & Techniques  
Le Mans Université

Vingt-trois euros -----

Payer contre ce chèque, non endossable, sauf au profit d'une banque ou de tout établissement admis à être endossable par la loi

à **Trésor Public** (pour remboursement des frais engagés)

Payable en France

1234567890

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Année : \_\_\_\_\_

Enseignement : \_\_\_\_\_

signature

23 euros

À rédiger exclusivement en euros

Figure 1.4: Chèque d'absence.

### 1.3 Absence

Il nous semble plus pertinent que l'obtention des compétences de base soit obligatoire pour justifier les 10 000 euros par an que la nation verse pour vous former grâce aux impôts que vous payez (sur le revenu, TVA, etc.) . Ne pas venir à une séance de 1h30, représente donc un gaspillage de 23 euros... sauf si vous travaillez à la maison et que vous atteignez les compétences de base.

Pour concrétiser ceci, la méthode suivante est utilisée :

- en début de séance, une feuille d'émargement circule : le nombre de signatures doit correspondre au nombre de présents,
- l'enseignant détecte les étudiants qui réapparaissent après une ou des absences et leur demande de compléter un chèque de 23 euros de ufr-sciences-banque par absence (Fig. 1.4),
- le jour de l'examen, les compétences acquises par chaque étudiant sont figées,
- pour un étudiant qui a donné un ou plusieurs chèques, s'il a les compétences de base, l'enseignant déchire les chèques,
- pour un étudiant qui a donné un ou plusieurs chèques, s'il n'a pas les compétences de base, l'enseignant lui rend les chèques et l'invite à faire un vrai chèque de remboursement du montant total au Trésor Public (ou à une association de son choix...).



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 069 065 062 223 073 255 256 257.

### 1.4 L'évaluation des compétences et objectifs pédagogiques.

L'évaluation est faite par la validation de compétences et objectifs pédagogiques (COP). Le chaînage des COP testées est indiqué en début du polycopié.

La validation des COP est faite soit par un examen, soit par des ceintures. Chacun choisit son type d'évaluation lors de la seconde séance d'enseignement de cette matière.

- Si vous optez pour une évaluation par un examen classique de 1h30, pour vous entraîner à manipuler les concepts, à prendre un peu de hauteur et vous approprier la démarche globale, des sujets de travaux dirigés, des sujets d'examens et leur corrigés sont disponibles sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=403>. Vous aurez à composer sur chacune des COP. Un taux de réussite  $t(i)$  est associé à chaque COP  $i$ .
- Si vous optez pour une évaluation par ceintures, une COP n'est acquise que lorsque
  - vous trouvez le(s) résultat(s),
  - votre réponse à cette COP ne présente pas d'erreur d'homogénéité,
  - votre réponse à cette COP utilise des écritures complètes (vecteurs, bases, points d'expression d'un torseur, unités pour un résultat chiffré).

Insistons : une COP n'est pas acquise par la méthode ceintures, si la démarche est juste, mais le résultat faux (erreur de calcul lors de cette COP, ou lors des COP parentes). Le taux de réussite  $t$  est donc soit 0% soit 100%. Vous pouvez tenter d'obtenir une ceinture lorsque vous vous sentez prêt-e à le faire. Vous ne pouvez tenter qu'une ceinture à la fois. Vous pouvez tenter une ceinture au maximum 3 fois. Si au bout de 3 tentatives, vous ne la détenez pas, vous pouvez tenter la ceinture  $n + 1$  suivante (3 fois). L'obtention de la ceinture de niveau  $n + 1$  vous attribue alors les ceintures de niveaux  $n + 1$  et  $n$ .

Le passage d'une ceinture se fait en deux phases :

- **phase continue** : Vous passez des ceintures en autonomie, à votre rythme, jusqu'au jour de l'examen.
  - vous envoyez un mél à [jmgenev@univ-lemans.fr](mailto:jmgenev@univ-lemans.fr) avec comme titre : "ufr, sdpd, couleur-de-la-compétence",
  - l'enseignant vous envoie par mél le sujet,
  - Sur votre copie (fournie), à côté de la déclaration suivante : *"Je m'engage sur l'honneur à n'évoquer avec personne le contenu du sujet de passage de cette ceinture. Cependant, dans le cas où je ne réussirais pas à l'obtenir, j'ai compris pouvoir discuter de mon travail avec les étudiants ayant acquis cette ceinture. Si l'enseignant à la preuve que je n'ai pas respecté mon engagement (j'ai admis le non-respect, je suis incapable de refaire la ceinture en mode surveillé...), un rapport de fraude est fait par l'enseignant et transmis au directeur de l'école ou au directeur de l'UFR qui transmet à la commission de discipline de l'université. L'enseignant y demandera que je ne puisse plus passer de ceintures en autonomie dans la matière concernée pour l'année universitaire en cours."*, vous écrivez "lu et approuvé" et vous signez. Cela permet à vos camarades de faire une mesure "libre et non faussée" de leurs savoirs scientifiques et non de leur COP de mémorisation... ou de (risquée) recopie.
  - Vous répondez au sujet en respectant votre engagement. Ceci peut être fait chez vous, dans une autre salle, informatique si nécessaire, au moment qui vous convient.
  - Vous apportez votre copie, sujet et brouillon, le tout agrafé dans cet ordre, à l'enseignant de la matière concernée pendant une séance d'enseignement du responsable de cette ceinture, que ce soit dans cette matière ou dans une autre, à l'Ensim ou à l'UFR Sciences. Pour trouver les heures et salles où le trouver, consultez ADSOFT filtre "genevaux".
  - l'enseignant jette un dé,
    - \* si vous ne possédez pas de jeton "non dopé", si le jet de dé correspond à un nombre anti-dopage qui dépend du niveau de la ceinture,

- \* si vous possédez un jeton "non dopé", si le jet de dé est "6", alors vous recomposez immédiatement en mode surveillé en n'ayant à votre disposition que un photocopié vierge.
- vous rendez votre nouvelle copie à l'enseignant.
- La ceinture est corrigée par l'enseignant. En cas de réussite, vous êtes informé par le passage au vert de la COP tentée sur <http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/compufr>. Vous pouvez alors tenter la COPs chaînée suivante. En cas d'échec, vous recevez par courriel le sujet de la tentative suivante. Vous pouvez tentez 3 fois la même COP. En cas de 3ième échec, vous pouvez tenter la COP chaînée suivante si elle existe. L'obtenir vous donne la COP mère ratée 3 fois.
- Si l'enseignant estime que votre erreur est minime, après consultation de votre copie en sa présence, il peut vous proposer d'utiliser un "jocker". Si vous l'utilisez, la ceinture est validée. Vous ne disposez que d'un joker par an.
- **phase terminale** : le jour de l'examen, vous êtes convoqué pour passer les ceintures restantes surveillées pendant une durée de 1h15, en même temps que les étudiants qui ont choisi une évaluation par examen. Les sujets vous sont fournis à l'entrée dans la salle. La validation se fait alors avec un taux de réussite de 0% à 100%. En cas d'absence, les procédures sont les mêmes que pour un examen. Si vous êtes détenteur de toutes les ceintures en autonomie, venez juste émarger.
- La date et l'heure de l'examen closent les rendus de ceintures.

Les COPs pratiques sont évaluées via les compte-rendus de travaux pratiques et fournissent un taux de réussite compris entre 0% et 100%.

Être détenteur d'une COP, implique qu'en tant qu'expert de celle-ci, vous aidiez vos camarades à l'obtenir, en les orientant sur les brevets afférents, en répondant à leur questions sur ces brevets, en insistant sur des points qui vous ont éventuellement fait rater la COP dans des tentatives précédentes, en inventant des exercices similaires, sans dévoiler le contenu du sujet de la COP ni les réponses. Nous transmettons les COPs que chacun d'entre vous a validées, aux collègues des enseignements à venir qui ont comme prérequis des COPs de ce module via <http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/compufr>.

Nous vous souhaitons une bonne découverte, une intéressante confrontation des modèles que nous développerons lors de cette formation à la réalité des essais effectués en travaux pratiques, et bien sûr... une bonne coopération entre vous, sauf pour le passage des ceintures.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 073 066 064 060 085 087 069 062 288.

## 1.5 Les ceintures de statique des poutres droites.

Les ceintures sont faites en autonomie. Vous pouvez télécharger la ceinture que vous souhaitez tenter sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=1849>. Merci de le faire dans l'ordre de celles-ci et en respectant les règles que vous avez acceptées en choisissant une évaluation par ceintures. Toute détection de non respect des règles implique les sanctions détaillées dans le paragraphe ci-dessus.

1. blanche de mécanique du solide indéformable (semestre 3), 0 pts, anti-dopage "5 et 6" : déterminer si un système est en équilibre et exprimer les réactions aux liaisons en fonction du chargement et des éventuelle inconnues hyperstatiques.
2. jaune, 4 pts, anti-dopage "6" : déterminer si une poutre est en traction, calculer la charge maximale et le déplacement d'un point.
3. orange, 4 pts, anti-dopage "5 et 6" : déterminer si une poutre est en torsion, calculer la charge maximale et la rotation d'un point.
4. verte, 4 pts, anti-dopage "4, 5 et 6" : déterminer si une poutre est en flexion, calculer la charge maximale et le déplacement ou la rotation d'un point.
5. bleue, 4 pts, anti-dopage "3, 4, 5 et 6" : déterminer pour un assemblage de poutres droites, la charge maximale et le déplacement ou la rotation d'un point.
6. marron, 4 pts : Établir et mener une campagne de mesure afin de comparer des résultats expérimentaux et théoriques pour un problème de résistance des matériaux.
7. noire, 4 pts : Présenter dans un document écrit, en respectant les règles de l'art, les résultats d'une campagne de mesure et de comparaison à une théorie, pour un problème de résistance des matériaux.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 093 084 088 086 067 066 064 607 604 602 603 269 287.

## Chapter 2

# Piqûres de rappel

Ce premier chapitre a pour objet de rappeler quelques éléments dont vous risquez d'avoir besoin au cours de cet enseignement.

### 2.1 Outils mathématiques

Nous supposons acquis, la dérivation d'une fonction, l'intégration d'une fonction, les concepts de grandeur scalaire et de vecteur, la multiplication d'une matrice par un vecteur, le calcul de la trace d'une matrice. Au même titre que si l'on vous demande de calculer  $\frac{\sqrt{23*54}}{23*\pi}$  aucun d'entre vous ne prendra un stylo et une feuille blanche, que vous préférerez utiliser une calculatrice, lorsque vous avez une dérivation ou une intégrale à faire vous utiliserez un ordinateur et un logiciel de calcul formel. Le logiciel libre *wxmaxima* est à votre disposition. fortement conseillée.



Si vous avez le moindre doute, je vous invite à faire chez vous les brevets 207, 208, 210, 217, 218, 219, 220, 216, 221, 225, 226 et 233. L'utilisation de *wxmaxima* est fortement conseillée.

Nous supposons acquis, la détection d'une inhomogénéité dans une équation et la recherche de la dimension d'une grandeur à partir d'une équation.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 268 270.



Si vous avez le moindre doute, je vous invite à faire chez vous les brevets 155, 212, 228, 808, 211, 213, 224 et 099.

## 2.2 Solide indéformable

Dans le cours de mécanique générale, il vous a été demandé de valider les COPs :

- Écrire les actions transmissibles à une liaison tridimensionnelle normalisée.
- Écrire les équations de mouvement d'un solide indéformable.

En effet, la mécanique générale permet d'obtenir les équations de mouvement à partir de la définition du système à isoler, du bilan des actions extérieures, du principe fondamental de la dynamique ou des équations de Lagrange.



Si vous avez des doutes sur vos COP, nous vous invitons à faire les brevets correspondants et sommes prêt à vous aider :

- les actions extérieures
- les liaisons cinématiques tridimensionnelles normalisées,
- les liaisons cinématiques bidimensionnelles,
- les torseurs cinématiques associés à ces liaisons,
- les torseurs d'inter-efforts associées à ces liaisons si elles sont parfaites ([brevets 036, 037, 038](#))
- les caractéristiques d'un solide : masse, centre de masse, tenseur d'inertie, ([brevets 006 bis partie 1, 020](#))
- le torseur dynamique d'un solide ([brevet 021](#))
- l'énergie cinétique d'un solide,
- les énergies potentielles ([brevets 034, 35](#))
- le principe fondamental de la dynamique ou les équations de Lagrange ([brevet 011, 019, 022, 023](#))



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés *026 027 246 000*.

## 2.3 L'outil de base franco-français : le torseur

Si vous êtes allergique à l'utilisation de torseurs, malgré leur efficacité en mécanique générale, vous pouvez ne pas les utiliser dans ce cours. Dans ce cas, vous pouvez continuer la lecture **en portant une attention particulière à ce qui est écrit en rouge, et qui vous est tout particulièrement dédié. Vous veillerez toujours à écrire deux grandeurs : rotation et déplacement, ou force et moment. Vous préciserez pour le déplacement de quel point vous parlez et par rapport à quel repère, pour le moment en quel point vous le calculez et par rapport à quel repère.**

Si les anglo-saxons manient les mêmes grandeurs

- force et moment pour une action extérieure,
- vitesse de rotation et vitesse de translation pour décrire la cinématique d'un solide,
- la masse multipliée par l'accélération de translation et le moment dynamique,

ils n'ont pas comme usage de regrouper ces grandeurs dans un seul et même objet que nous appellerons *torseur*.

Un torseur  $\tau$  est un regroupement entre deux grandeurs vectorielles exprimé en un point  $A$ . Si l'on souhaite changer de point où ce torseur est exprimé :

- si  $\vec{a}$  est un vecteur et  $\check{b}$  est un pseudo vecteur exprimés en un point  $A$  (cas des torseur d'inter-effort, torseur dynamique)

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \check{b}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \check{b}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \check{b}_A + \vec{a} \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B \quad (2.1)$$

- Si  $\check{a}$  est un pseudo-vecteur et  $\vec{b}$  est un vecteur exprimés en un point  $A$  (torseur de position, torseur de déplacement, torseur cinématique)

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \check{a} \\ \vec{b}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \check{a} \\ \vec{b}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \check{a} \\ \vec{b}_A + \check{a} \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B \quad (2.2)$$

Parfois un torseur linéique est appliqué en tout point  $P$  d'abscisse  $s$  d'un tronçon de longueur  $ds$  d'une poutre de longueur  $l$  entre les points  $A$  et  $B$ . Il sera noté dans ce cas

$$\{\tau\} = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}(s)ds \\ \check{c}(s)ds \end{array} \right\}_P = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}(s)ds \\ \check{c}(s)ds + \vec{p}(s)ds \wedge \vec{PC} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \int_A^B \vec{p}(s)ds \\ \int_A^B (\check{c}(s) + \vec{p}(s) \wedge \vec{PC})ds \end{array} \right\}_C \quad (2.3)$$

Attention dans la dernière égalité ci-dessus d'avoir exprimé  $\vec{p}$  et  $\check{c}$  dans une base fixe qui ne dépend pas de l'abscisse curviligne.

Pour les allergiques : Si vous calculez le moment d'une force en un point  $B$ , alors que la force et un moment sont appliqués en un point  $A$ , il vous faudra écrire :  $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{F} \wedge \vec{AB}$ . De même si vous calculez un déplacement en un point  $B$  dû à un déplacement et une rotation en un point  $A$ , vous écrirez :  $\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB}$ .

- **Erreur classique** : Il ne faut pas oublier de préciser, pour tout torseur, en quel point il est exprimé.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 241 250 251 252.





Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 002 019 033 et 031.

## 2.4 L'élasticité tridimensionnelle linéaire isotrope

L'objectif de ce cours n'est pas de résoudre les problèmes appliqués à des solides tridimensionnels, aussi seront simplement rappelés ici pour information, les équations nécessaires à la résolution de ceux-ci.

Dans le cas d'un solide déformable, il nous faut définir la *loi de comportement* qui relie les tenseurs des déformations au tenseur des contraintes. Nous appellerons :

- $E$  le module de Young du matériau (en Pa),
- $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau (sans unité),
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  le module de Coulomb du matériau (en Pa),

On admettra que

$$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\bar{\sigma}) \bar{I}_d, \quad (2.4)$$

ou

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\epsilon} + \lambda \text{trace}(\bar{\epsilon}) \bar{I}_d, \quad (2.5)$$

avec  $\sigma$  le tenseur des contraintes et  $\epsilon$  le tenseur des déformations. Ces deux équations étant équivalentes, il existe des relations entre module de Young et coefficients de Lamé :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \quad (2.6)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (2.7)$$

matériau	Mod. de Young 10 <sup>9</sup> Pa	Coeff. de Poisson	lim. élas. trac. 10 <sup>6</sup> Pa	lim. élast. compr. lim. élas. traction	masse vol. kg/m <sup>3</sup>
acier	210	0.285	20 à 60	1	7800
aluminium AU4G	75	0.33	20	1	2800
béton	14 à 21	0.3	30	11	1900
bronze	100	0.31	24	3	8400
cuiivre	100	0.33	18	1.3	8900
fonte	100	0.29	18 à 25	3.3	7100
laiton	92	0.33	20	1.4	7300
marbre	25	0.3	50	15	2800
plexiglass	2.9	0.4	8	1.2	1800
titane	100	0.34	20 à 47d	1	4510
verre	60	0.2 à 0.3	3 à 8	10	2530

Poser un problème d'élasticité revient à définir des conditions aux limites en déplacement et en contrainte sur la surface de ce solide, d'écrire la relation entre déplacements et déformations, écrire l'équilibre (ou le PFD) sur un élément de volume. Il reste alors à chercher une solution à ce système d'équations présenté tableau 2.1. Pour la lecture de ce tableau, on rappellera simplement que en coordonnées cartésiennes,

- le laplacien d'une fonction  $f(x, y, z)$  est  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ,
- la matrice identité (des 1 sur la diagonale des 0 ailleurs) est notée  $\bar{I}_d$ ,
- le gradient d'un scalaire  $f$  est  $\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{z}$ ,
- la trace d'un tenseur est la somme des termes sur sa diagonale.

	déplacements	déformations	contraintes
	$\vec{u}$	$\bar{\epsilon}$	$\bar{\sigma}$
condition aux limites en déplacement	$\vec{u} = \vec{u}_d$ sur $\Gamma_u$		
passage déplacements déformations	+ éq. compatibilité $\epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{kj,il} =$ $\epsilon_{il,jk} - \epsilon_{lj,ik}$ pour $i \neq j$ et $l \neq k$	$\bar{\epsilon} = 1/2 \left( \text{grad } \vec{u} + {}^T \text{grad } \vec{u} \right)$	+ éq. compatibilité (Beltrami) $(1 + \nu) \Delta \sigma_{ij} + \frac{\partial^2 (\text{trace } \bar{\sigma})}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ si $\text{grad } f = 0$
loi de comportement		$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\bar{\sigma}) \bar{I}_d$	$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\epsilon} + \lambda \text{trace}(\bar{\epsilon}) \bar{I}_d$
équations d'équilibre (statique)	éq. de Navier: $(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div} \vec{u})$ $+ \mu \text{div}(\text{grad} \vec{u}) + \rho \vec{u} = 0$		$\text{div} \bar{\sigma} + \rho \vec{f} = 0$ $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$ $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$ $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$
condition aux limites en contraintes			$\vec{T}(P, \vec{n}) = \bar{\sigma} \vec{n} = \vec{F}_d$ sur $\Gamma_f$
passage contrainte torseur			$N = \int_S \sigma_{xx} dS$ $T_y = \int_S \sigma_{xy} dS$ $T_z = \int_S \sigma_{xz} dS$ $M_x = \int_S \sigma_{\theta x} r dS$ $M_{fy} = \int_S \sigma_{xx} z dS$ $M_{fz} = - \int_S \sigma_{xx} z dS$

Table 2.1: Equations de la mécanique des solides déformables dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle



Exceptionnellement, aucun brevet ne vous est proposé pour ce paragraphe, car vous reviendrez sur les concepts de tenseurs pour les solides déformables dans le cours de L3.

Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés *216 061 058 074 053 244 015 016 018 003 004 253 254 258 259*.

## Chapter 3

# Mécanique du solide indéformable : de l'équilibre aux réactions aux liaisons

### 3.1 Liaisons parfaites normalisée - torseur des efforts transmissibles

Dans ce cours, la résultante du torseur des efforts transmissibles sera notée  $\vec{R}$ , le moment sera noté  $\check{M}$ . La liaison étant considérée parfaite, la puissance développée dans cette liaison doit être nulle quels que soient les déplacements et rotations éventuels possibles. Ceci implique que le travail d'une liaison soit nul. Il est calculé par le *comoment* des deux vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{c} \check{\omega} \\ \vec{u}_A \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \check{M}_A \end{array} \right\}_A = 0, \quad (3.1)$$

qui se développe en

$$\check{\omega} \cdot \check{M}_A + \vec{u}_A \cdot \vec{R} = 0. \quad (3.2)$$

Ci-dessous, sont donnés les torseurs d'efforts transmissibles. On peut les retrouver à partir des formules ci-dessus, en écrivant pour la liaison choisie le torseur cinématique associé (mouvements de translation et de rotation autorisés par la liaison), puis choisir un torseur d'inter-effort qui a a priori toutes les composantes en résultante et en moment, et écrire que le comoment est nul quelle que soit l'amplitude des mouvements possibles.

Les liaisons associées à un problème tridimensionnel sont normalisées. La symbolique est donc la même que celle que vous utilisez pendant la formation de Technologie-Mécanique. Utilisez les dessins associés !

- liaison tridimensionnelle encastrement :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \check{i} + C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle pivot d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle glissière d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \check{i} + C_j \check{j} + C_k \check{k} \end{array} \right\}_A$ ,



Figure 3.1: La symbolique des liaisons 2d utilisée dans ce cours (non normalisée) de gauche à droite : encastrement 2d, appui simple 2d, appui sur rouleau 2d, glissière 2d

- liaison tridimensionnelle hélicoïdale d'axe  $A\vec{i}$  de pas  $p$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{2\pi C_i}{p}\vec{i} + R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ C_i\vec{i} + C_j\vec{j} + C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle pivot glissant d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ C_j\vec{j} + C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle sphérique à doigt d'axe  $A\vec{i}$  et  $A\vec{j}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle sphérique en A :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ 0 \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle appui plan de normale  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} \\ C_j\vec{j} + C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle linéaire rectiligne de normale  $A\vec{j}$  de direction  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j\vec{j} \\ C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle linéaire annulaire d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ 0 \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle ponctuelle d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} \\ 0 \end{array} \right\}_A$ .

Les liaisons associées à un problème bidimensionnel ne sont pas normalisées. Faites attention à la signification de chaque symbole en fonction de l'ouvrage. Pour notre part, la symbolique présentée dans la figure 3.1 sera utilisée. Pour un problème dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  :

- liaison bidimensionnelle encastrement :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} \\ C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle appui simple :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle appui sur rouleaux de normale  $A\vec{j}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle glissière d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j\vec{j} \\ C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ .

• **Erreur classique** : Il ne faut pas, lorsque le problème est bidimensionnel, utiliser les liaisons tridimensionnelles (et inversement).

• **Erreur classique** : Lorsque 2 poutres (ou plus) de directions différentes se raccordent en un point B, il ne faut pas rajouter une liaison encastrement entre ce point B et le référentiel Galiléen : le point

B peut se déplacer, tourner... et toutes les poutres aboutissant à ce point B se déplacent et tournent au point B de la même valeur.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 037 et 038.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé 089 090 091 092.

## 3.2 Torseurs de chargement

Dans ce cours, la résultante sera notée  $\vec{F}$ , le moment sera noté  $\check{C}$ . Les différents torseurs de chargements sont :

- force concentrée au point A de direction  $\vec{i}$

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \check{0} \end{array} \right\}_A, \quad (3.3)$$

- couple concentré au point A de direction  $\vec{i}$

$$\{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \check{C} \end{array} \right\}_A, \quad (3.4)$$

- densité linéique de force  $p\vec{i}$  sur un segment de longueur  $ds$  au point  $P$

$$\{d\tau_3\} = \left\{ \begin{array}{c} p\vec{ds} \\ \check{0} \end{array} \right\}_P, \quad (3.5)$$

- densité linéique de couple  $c\check{i}$  sur un segment de longueur  $ds$  au point  $P$

$$\{d\tau_4\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ c\check{ds} \end{array} \right\}_P, \quad (3.6)$$

- torseur équivalent exprimé au point C, d'un chargement linéique sur un segment AB :

$$\{\tau_5\} = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} p\vec{ds} \\ c\check{ds} \end{array} \right\}_P = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} p\vec{ds} \\ c\check{ds} + p\vec{ds} \wedge \vec{PC} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \int_A^B p\vec{ds} \\ \int_A^B (c + p\vec{r} \wedge \vec{PC})ds \end{array} \right\}_C. \quad (3.7)$$

Attention dans la dernière égalité ci-dessus d'avoir exprimé  $\vec{p}$  et  $\check{c}$  dans une base fixe qui ne dépend pas de l'abscisse curviligne.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé *219 222*.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 039 et 090.

### 3.3 isostaticité - hyperstaticité

Avant de rechercher les efforts intérieurs à une poutre, il est parfois nécessaire de calculer les réactions qui transitent par les liaisons qui maintiennent cette poutre en contact avec les autres solides voisins.

**démarche** La procédure suivante est à suivre

1. Isolement du solide. Pour ce faire :
  - vous définissez le solide ou l'ensemble de solides que vous souhaitez isoler (pour nous ce sera la poutre considérée),
  - par la pensée, vous entourez ce domaine isolé par une fine peau,
  - à chaque endroit où cette fine peau intersecte une liaison, ou un chargement, un torseur doit être écrit
2. Bilan des actions. En chaque point où doit être écrit un torseur, vous écrivez : le point, le type de liaison (éventuellement précisez de quel axe), le torseur (d'effort transmissible ou de chargement). Vous rajoutez à cette liste les torseurs de chargement à distance (pesanteur, forces électromagnétiques, ...)
3. Principe fondamental de la statique. Si le domaine isolé est en équilibre, la somme de ces torseurs est nulle. En présence d'un chargement linéique ou surfacique, l'écriture de l'équilibre doit faire apparaître l'intégration de ce torseur sur le domaine d'intégration (intégrale simple ou double).
4. Écriture du système d'équations. Dans le cas d'un problème tridimensionnel, l'équilibre se traduit par l'écriture de 6 équations (trois de résultante, trois de moment). Dans le cas d'un problème bidimensionnel, l'équilibre se traduit par l'écriture de 3 équations (deux de résultante, une de moment autour d'un axe perpendiculaire au plan du problème).
5. Détermination du nombre d'inconnues hyperstatiques. Attention, **le calcul (nombre d'inconnues - nombre d'équations = degré d'hyperstatisme) est faux !** En effet, tout dépend comment les inconnues sont positionnées dans les équations. La méthode est la suivante :
  - Vous entourez en rouge les chargements. Ce sont les données du problème.
  - Parmi les réactions aux liaisons (les inconnues), vous entourez en bleu celles qui peuvent être déterminée en fonction des chargements.
  - Si toutes les inconnues sont déterminées : le système est dit isostatique.

- Si toutes les inconnues ne peuvent pas être déterminées (deux inconnues sur une même équation, et qui n'apparaissent pas ailleurs par exemple), le système est hyperstatique vis-à-vis de ce degré de liberté. Vous choisissez l'une de ces inconnues que nous appellerons *inconnue hyperstatique*, vous l'encadrez en vert, et vous la supposez connue (au même titre que les chargements en rouge) pour recherchez toutes les inconnues qui peuvent de ce fait être maintenant déterminées (vous les entourez en bleu). Vous pouvez être amené à choisir plusieurs inconnues hyperstatiques.
  - **Le degré d'hyperstatisme est le nombre minimal d'inconnues (entourées en vert) qui ont dues être choisies comme hyperstatiques.**
6. Vous écrivez l'expression de chaque inconnue déterminée (en bleu), en fonction du chargement (en rouge) et des inconnues hyperstatiques (en vert). Dans la suite du problème, chaque fois qu'une inconnue bleu apparaît, elle sera remplacée par son expression rouge et verte.

**Exemples** L'exemple de détermination du degré d'hyperstatisme d'un système tridimensionnel est présenté figure 3.2.

L'exemple de détermination du degré d'hyperstatisme d'un système bidimensionnel est présenté figure 3.3. On remarquera que l'équilibre est écrit au point  $D$ , mais qu'il aurait pu être écrit en un autre point, les équations qui auraient alors été obtenues seraient une combinaison linéaire des équations présentées dans l'exemple. L'inconnue hyperstatique choisie est l'inconnue  $R_2$ . Il aurait été possible de choisir  $R_3$  ou  $C_2$ . Quelque soit ce choix, le nombre d'inconnues hyperstatique reste de 1.

**Système isostatique associé** On appelle système isostatique associé, le système identique géométriquement, mais dont les liaisons aux points où des inconnues hyperstatiques ont été choisies, doivent être modifiées :

1. si l'inconnue hyperstatique est une force dans la direction  $\vec{i}$ , le degré de liberté associé, la translation dans la direction  $\vec{i}$ , est libérée. La liaison est donc remplacée par la liaison qui bloque les mêmes degrés de liberté sauf ce degré de liberté. Par exemple, si le problème est tridimensionnel, une liaison encastrement, sera transformée en une liaison glissière d'axe  $\vec{i}$ . Si le problème dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ , une liaison appuis simple sera remplacée par une liaison appuis sur rouleau de normale  $\vec{j}$ .
2. si l'inconnue hyperstatique est un couple dans la direction  $\vec{i}$ , le degré de liberté associé, la rotation dans la direction  $\vec{i}$ , est libérée. La liaison est donc remplacée par la liaison qui bloque les mêmes degrés de liberté sauf ce degré de liberté. Par exemple, si le problème est tridimensionnel, une liaison encastrement, sera transformée en une liaison pivot d'axe  $\vec{i}$ .

Ce système isostatique associé est considéré comme chargé par

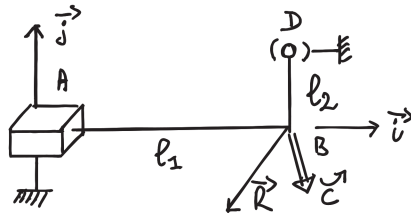
1. le même chargement extérieur que le système initial,
2. auquel on ajoute les inconnues hyperstatiques, qui sont alors considérées comme un chargement connu.

**Équation associée à une inconnue hyperstatique** Le problème isostatique associé peut donc être résolu complètement en fonction des données de chargement et des inconnues hyperstatiques. Appelons cette solution *solution 1*.

Pour retrouver le problème initial, l'inconnue hyperstatique assurait que le déplacement associé à celle-ci était nul. Il faut donc rajouter une équation cinématique par inconnue hyperstatique :

1. si l'inconnue hyperstatique est une force  $R\vec{i}$  au point  $B$ , le déplacement dans cette direction en ce point doit être nul :  $\vec{u}_B \cdot \vec{i} = 0$ .
2. si l'inconnue hyperstatique est un couple  $C\vec{i}$  au point  $B$ , la rotation dans cette direction en ce point doit être nulle :  $\vec{\omega}_B \cdot \vec{i} = 0$ .





— Données  
 ○ déterminable  
 ( ) déterminée  
 □ inconnue hyperstatique

Bilan des actions

+ liaison glissière 3D d'axe  $A\vec{i}$   $\left\{ \mathcal{L}_1 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R_{11}\vec{j} + R_{12}\vec{k} \\ C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k} \end{array} \right\}_A$

+ chargement en B (données du pb)  $\left\{ \mathcal{L}_2 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \\ \vec{C} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k} \\ C_4\vec{i} + C_5\vec{j} + C_6\vec{k} \end{array} \right\}_B$

+ liaison sphérique en D  $\left\{ \mathcal{L}_3 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R_3\vec{i} + R_4\vec{j} + R_5\vec{k} \\ \vec{O} \end{array} \right\}_D$

Equilibre

La somme des torseurs doit être nulle

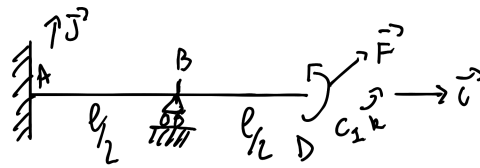
$$\sum \left\{ \mathcal{L} \right\} = \left\{ \vec{0} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11}\vec{j} + R_{12}\vec{k} \\ C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{l} F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k} \\ C_4\vec{i} + C_5\vec{j} + C_6\vec{k} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{l} R_3\vec{i} + R_4\vec{j} + R_5\vec{k} \\ (R_3\vec{i} + R_4\vec{j} + R_5\vec{k}) \wedge \vec{DB} \end{array} \right\}_B = \left\{ \vec{0} \right\} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \vec{AB} = l_1\vec{i} \\ \vec{DB} = -l_2\vec{j} \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{R_3} = -F_1 \\ \textcircled{R_4} + \textcircled{R_5} = -F_2 \\ \textcircled{R_2} + \textcircled{R_5} = -F_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \textcircled{C_1} + l_2 \textcircled{R_5} = -C_4 \\ \textcircled{C_2} + \textcircled{R_3} l_1 = -C_5 \\ \textcircled{C_3} - l_1 \textcircled{R_1} - l_2 \textcircled{R_3} = -C_6 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{hyperstatique} \\ \Rightarrow \text{de degré} \\ 2 \end{array}$$

hyperstatique en translation dans la direction  $\vec{j}$  et dans la direction  $\vec{k}$

Figure 3.2: Détermination du degré d'hyperstatisme pour un système 3D. (Numérisation fournie par Nicolas Pajusco. Merci à lui.)



problème plan

Bilan des actions

$$+ \text{chargement (donné)} \quad \{ \mathcal{C}_1 \} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{array} \right\}_D$$

$$+ \text{liaison encastrement 2D} \quad \{ \mathcal{C}_2 \} = \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ c_2 \vec{k} \end{array} \right\}_A$$

$$+ \text{liaison appui sur rouleur} \quad \{ \mathcal{C}_3 \} = \left\{ \begin{array}{c} R_3 \vec{j} \\ 0 \vec{k} \end{array} \right\}_B$$

$$\text{Equilibre} \quad \Sigma \{ \mathcal{C} \} = \{ 0 \}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ c_2 \vec{k} + (R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j}) \wedge \overrightarrow{AD} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_3 \vec{j} \\ 0 \vec{k} + R_3 \vec{j} \wedge \overrightarrow{BD} \end{array} \right\}_D = \{ 0 \}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ (c_2 - R_2 l) \vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_3 \vec{j} \\ -R_3 \frac{l}{2} \vec{k} \end{array} \right\}_D = \{ 0 \}$$

D'où les équations :

$$\begin{cases} \boxed{R_1} = -F_1 \\ \boxed{R_2} + \boxed{R_3} = -F_2 \\ \boxed{C_2} - \boxed{R_2} l - \boxed{R_3} \frac{l}{2} = -C_1 \end{cases}$$

- données

○ déterminable

⌊ déterminée

□ inconnue hyperstatique

Le système est hyperstatique d'ordre 1.

en translation dans la direction  $\vec{j}$ 

Figure 3.3: Détermination du degré d'hyperstatisme pour un système 2D. (Numérisation fournie par Nicolas Pajusco. Merci à lui.)

Ces équations supplémentaires, fournissent des relations entre les inconnues hyperstatiques et les chargements. Elle permettent donc de déterminer les inconnues hyperstatiques en fonction du chargement.

La solution complète du problème qui vérifie les conditions aux limites du problème de départ, exprimée en fonction uniquement du chargement du problème de départ, est alors connue en remplaçant les inconnues hyperstatiques par leur expressions en fonction du chargement dans la solution 1.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé *003 237 238 240 218 220 221 267 271*.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 013, 014, 015, 016, 091, 092 et 031.

## Chapter 4

# Statique des poutres droites isostatiques homogènes dans l'épaisseur à matériau isotrope, alias "la résistance des matériaux"

ou "L'histoire d'un haltérophile qui pêchait du pont de Millau en regardant une éolienne".

Attention : ce cours ne traite pas

- des poutres à fibre moyenne courbe,
- des systèmes hyperstatiques,
- du calcul des directions principales d'une section droite.

Pour plus de détails, veuillez consulter le cours fait à l'Ensim en quatrième année.

Un corps dont l'une des dimensions est bien plus grande que les deux autres sera appelé *poutre* uniquement dans le cas où, si il maintenu à l'une de ses extrémités horizontalement, il reste quasi-horizontale sous son poids propre. Dans le cas contraire, ce corps élancé sera appelé *corde*.

Le même jeu de relations observé en élasticité tridimensionnelle est présent dans le cas de la théorie des poutres (voir tableau 4.1), seules les grandeurs utilisées sont décrites à l'aide d'objets que l'on appelle *torseur*. Ce sont les mêmes êtres mathématiques que ceux que vous avez utilisé en mécanique des solides indéformables pour décrire leur mouvement. Ils seront ici simplement associés aux déplacement et rotation d'une section droite, aux déformations d'une section droite et aux efforts généralisés (résultante et moment) sur cette section.

Pour décrire ce système d'équations, nous allons considérer uniquement des poutres droites, c'est-à-dire dont la grande dimension est rectiligne dans la direction  $\vec{x}$ . Nous appellerons *sections droites* les coupes de cette poutre dans des plans perpendiculaires à  $\vec{x}$  et *fibre moyenne* l'ensemble des barycentres  $H$  de ces sections droites. On pourra représenter la poutre par sa fibre moyenne, qui sera orientée d'un point  $A$  à un point  $B$ .

Nous considérerons, une poutre de référence, de longueur  $l$ .



Sur <http://umotion.univ-emans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 001 05727 054 239 033 034.

	torseur des déplacements	torseur des déformations	torseur des efforts intérieurs
	$\{U\} = \begin{Bmatrix} \check{\omega} \\ \check{u} \end{Bmatrix}_H$	$\{Def\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z} \\ \epsilon_x \check{x} + \gamma_y \check{y} + \gamma_z \check{z} \end{Bmatrix}_H$	$\{\tau_{int}\} = \begin{Bmatrix} N \check{x} + T_y \check{y} + T_z \check{z} \\ M_x \check{x} + M_{fy} \check{y} + M_{fz} \check{z} \end{Bmatrix}_H$
condition aux limites en déplacement	$\{U\} = \{U\}_d$ au point $P_d$		
passage déplacements déformations	formules de Bresse (fonction de $\epsilon_x, \gamma_y, \dots$ )		
loi de comportement	formules de Bresse (fonction de $N, T_y, \dots$ )	$\alpha_x = M_x/GI_0^c$ $\alpha_y = M_{fy}/EI_{Hy}$ $\alpha_z = M_{fz}/EI_{Hz}$ $\epsilon_x = N/ES$ $\gamma_y = T_y/GS_y$ $\gamma_z = T_z/GS_z$	$M_x = \alpha_x GI_0^c$ $M_{fy} = \alpha_y EI_{Hy}$ $M_{fz} = \alpha_z EI_{Hz}$ $N = \epsilon_x ES$ $T_y = \gamma_y GS_y$ $T_z = \gamma_z GS_z$
équations d'équilibre (poutre droite)			$p_x + \frac{dN}{ds} = 0$ $p_y + \frac{dT_y}{ds} = 0$ $p_z + \frac{dT_z}{ds} = 0$ $c_x + \frac{dM_x}{ds} = 0$ $c_y + \frac{dM_{fy}}{ds} - T_z = 0$ $c_z + \frac{dM_{fz}}{ds} + T_y = 0$
condition aux limites en chargement			$-\{\tau_{s+}\} + \{\tau_{s-}\} = \{\tau_d\}$ au point $P_f$
passage  torseur contrainte			$\sigma_{xx} = N/S - \frac{M_{fy}\check{z}}{I_{Hy}} + \frac{M_{fz}\check{y}}{I_{Hz}}$ $\sigma_{yx} = \frac{T_y g_y(\check{y}, \check{z})}{S}$ $\sigma_{zx} = \frac{T_z g_z(\check{y}, \check{z})}{S}$ $\sigma_{yy} = 0$ $\sigma_{yz} = 0$ $\sigma_{zz} = 0$ $\sigma_{\theta x} = \frac{M_x \check{r} g_{\theta}(\check{y}, \check{z})}{I_0}$

Table 4.1: Equations de la mécanique des solides déformables dans le cas d'une modélisation unidimensionnelle.



Figure 4.1: Le viaduc de Millau.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 078.

## 4.1 Sollicitation simple : traction-compression

### 4.1.1 Isoler le tronçon de poutre

Si on s'intéresse à un poteau du viaduc de Millau (fig. 4.1), il faut l'isoler. Pour ce faire, vous entourez ce poteau par une feuille de cellophane et à chaque fois que vous coupez un autre solide, vous devez considérer un chargement ou une liaison.

On peut considérer qu'il est chargé à son extrémité supérieure par le tablier du pont et par la flèche au sommet de laquelle les câbles sont suspendus. Le modèle associé à ce poteau est donc constitué du point  $A$  milieu de la section droite à la base du poteau qui est encastré dans le roche, le point  $B$  point de raccordement avec le tablier et la flèche, une fibre moyenne droite qui va de  $A$  à  $B$ , on repérera un point  $H$  de cette fibre moyenne par son abscisse  $s$  ( $\vec{AH} = s\vec{x}$ ), une section de poteau que nous supposons rectangulaire de côté  $a(x)$  et  $b(x)$ .

Deux modèles de chargement peuvent être envisagés (fig. 4.2)

- une force concentrée  $-F\vec{x}$  au point  $B$ ,
- une force concentrée  $-F\vec{x}$  au point  $B$  et le poids propre du poteau par une force appliquée sur chaque tronçon de longueur  $dx$  au point  $P$   $dF = -\rho a(x)b(x)gdx$ , avec  $\rho$  la masse volumique du béton,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $dx$  la longueur d'un petit tronçon de poteau.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 235 219 262.

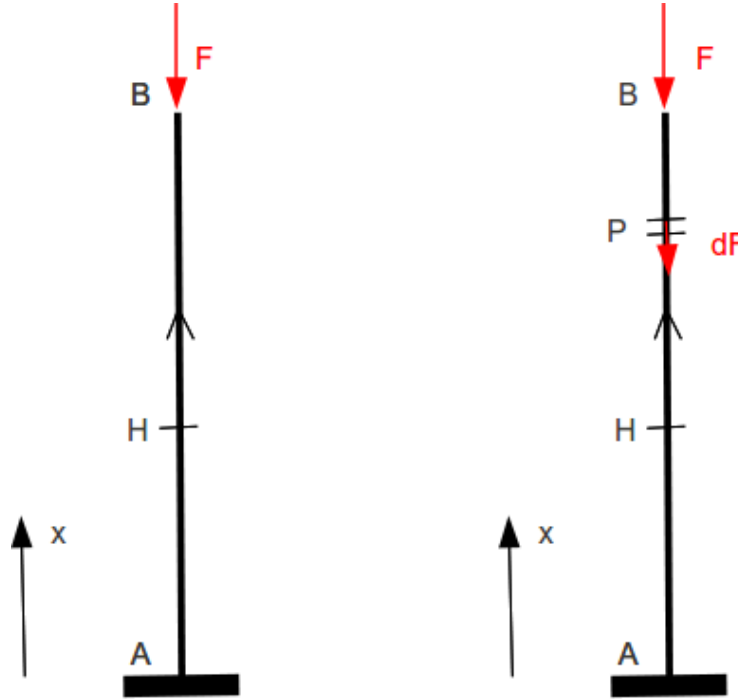


Figure 4.2: 2 modélisation d'un poteau du viaduc de Millau.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 820.

#### 4.1.2 Composantes du torseur des efforts intérieurs (et pour les allergiques forces et moments au sein de la poutre)

Nous nous intéressons à la manière dont est sollicité le poteau.

On notera  $seg+$  la demi poutre dont les abscisses sont supérieures à  $s$ . On notera  $seg-$  la demi poutre dont les abscisses sont inférieures à  $s$ .

Prenons comme définition que le torseur des efforts intérieurs (alias "les forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) représente les actions de la partie  $seg+$  sur la partie  $seg-$ .

Si l'on isole le segment  $seg-$ , celui-ci est sollicité par des torseurs extérieurs de chargement ou de liaison (alias "des forces et des moments de chargement" pour les allergiques) sur le segment  $seg-$  et par le torseur des efforts intérieurs (alias "les forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques). Ce segment étant à l'équilibre, la somme des torseurs doit être nul, donc on obtient l'égalité,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = - \sum_{seg-} \{\tau_{ext \rightarrow seg-}\} \quad (4.1)$$

et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que :  $\vec{F}_{int} = - \sum_{seg-} \vec{F}_{ext}$ , et  $\vec{M}_{int} = - \sum_{seg-} \vec{M}_{ext}$ .

Nous aurions aussi pu isoler le segment  $seg+$ . Celui-ci est sollicité par des torseurs extérieurs de chargement ou de liaison (alias "des forces et des moments de chargement" pour les allergiques) sur le segment  $seg+$  et par un torseur (alias "une force et moment au sein de la poutre" pour les allergiques) qui est l'opposé du torseur des efforts intérieurs (alias "des forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) par le principe d'action et de réaction. Nous faisons ici l'hypothèse qu'au point de coupure

$H$  il n'y a pas de force concentrée. Ce segment étant à l'équilibre, la somme des torseurs doit être nul, donc on obtient l'égalité,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\} \quad (4.2)$$

et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que :  $\vec{F}_{int} = \sum_{seg+} F_{ext}$ , et  $\check{M}_{int} = \sum_{seg+} \check{M}_{ext}$ .

On note donc que nous disposons à chaque fois de deux manières de calculer le torseur des efforts intérieurs (alias "les forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques), en utilisant soit la partie seg+ soit la partie seg-. Les deux méthodes donnent le même résultat, car la poutre, dans sa globalité seg+ U seg- est en équilibre. C'est à vous de choisir le segment qui implique le moins de calcul. Par exemple, si sur l'un des segments il y a des liaisons et des chargements, et sur l'autre que des chargements (par définition connus), c'est ce dernier segment qu'il faut utiliser car cela vous évite d'avoir à calculer les inconnues aux liaisons, et donc de faire l'équilibre global de la structure, déterminer son degré d'hyperstatisme, and so on....

En général, la connaissance du torseur des efforts intérieurs (alias "des forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) est nécessaire sur l'ensemble de la poutre. Plusieurs cas doivent être étudiés en faisant varier le point  $H$ , car lorsque  $s$  croît, à chaque passage d'un chargement, le torseur de chargement (alias "la force ou le moment extérieur" pour les allergiques) passe du segment seg+ au segment seg-.

En l'appliquant à notre cas du viaduc de Millau, par rapport à  $H$  la partie seg+ est le segment  $HB$ , qui est chargé

- pour le modèle 1, par le torseur en  $B$ ,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \check{0} \end{array} \right\}_B, \quad (4.3)$$

(et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que :  $\vec{F}_{int} = -F\vec{x}$ , et  $\check{M}_{int} = \check{0}$  lorsque le moment est exprimé en B.)

que l'on transporte en  $H$  par la formule de changement de point,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \check{0} + -F\vec{x} \wedge B\vec{H} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \check{0} + -F\vec{x} \wedge (l-s)(-\vec{x}) \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \check{0} \end{array} \right\}_H \quad (4.4)$$

(et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que :  $\vec{F}_{int} = -F\vec{x}$ , et  $\check{M}_{int} = \check{0}$  lorsque le moment est exprimé en H.)

- pour le modèle 2, par le torseur en  $B$  (alias "la force ou le moment extérieur en B" pour les allergiques) et le chargement par unité de longueur

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \check{0} \end{array} \right\}_B + \int_{HB} \left\{ \begin{array}{c} -\rho g a(x)b(x)dx\vec{x} \\ \check{0} \end{array} \right\}_P \quad (4.5)$$

que l'on transporte en  $H$  par la formule de changement de point,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \check{0} \end{array} \right\}_H + \int_{x=s}^{x=l} \left\{ \begin{array}{c} -\rho g a(x)b(x)dx\vec{x} \\ \check{0} + (-\rho g a(x)b(x)dx\vec{x}) \wedge P\vec{H} \end{array} \right\}_H \quad (4.6)$$

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \check{0} \end{array} \right\}_H + \int_{x=s}^{x=l} \left\{ \begin{array}{c} -\rho g a(x)b(x)dx\vec{x} \\ \check{0} + (-\rho g a(x)b(x)dx\vec{x}) \wedge (x-s)(-\vec{x}) \end{array} \right\}_H \quad (4.7)$$

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx \\ \check{0} \end{array} \right\}_H. \quad (4.8)$$



(et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que :  $\vec{F}_{int} = -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx$ , et  $\vec{M}_{int} = \vec{0}$  lorsque le moment est exprimé en H. )

On notera dans ce dernier calcul qu'il faut écrire le torseur (alias "le moment" pour les allergiques) traduisant le chargement linéique en un point fixe  $H$ , avant de faire l'intégration.

Dans les deux modèles on remarque que le torseur des efforts intérieurs (alias "des forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) ne possède que une composante de résultante (alias "de force" pour les allergiques) dans la direction de la fibre moyenne  $\vec{x}$ . On dit que la poutre est soumise à un *effort normal*,

$$N = -F, \quad (4.9)$$

dans le cas du modèle 1, et

$$N = -F - \rho g \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx \quad (4.10)$$

dans le cas du modèle 2. L'effort normal est négatif : la poutre est en compression. Si l'effort normal était positif, la poutre serait en traction.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 821 et 822.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 221 208 024 260 303.

### 4.1.3 Message aux allergiques à l'utilisation de torseur

Vous avez sans doute remarqué que les calculs que vous effectuez sont exactement les mêmes que ceux effectués par les utilisateurs des torseurs :

- lorsque vous parlez "des efforts et moments intérieurs", ils parlent "de torseur des efforts intérieurs",
- lorsque vous écrivez deux grandeurs (force et moment), ils font de même, en les écrivant l'un au-dessus de l'autre,
- lorsque vous précisez en quel point vous calculez le moment, ils font de même en notant en dessous à droite du torseur le nom du point considéré,
- lorsque vous déplacez un moment entre deux points, ils utilisent aussi la formule de changement de point.

Lire un polycopié, avec plein d'insertions "pour les allergiques aux torseurs", est plus difficile. La suite du document arrête donc de vous proposer cette double lecture, et je vous invite, si votre allergie au torseur n'est pas encore passée à la lecture de ces lignes, de compléter la suite de ce document (une marge à droite a été laissée à cet effet) en remplaçant chaque écriture de torseur, par les deux équations de résultante et de moment. Par exemple, si vous lisez :

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx \\ \vec{0} \end{array} \right\}_H. \quad (4.11)$$

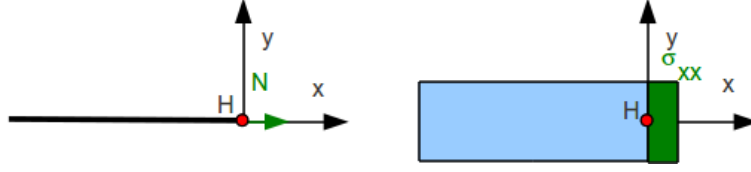


Figure 4.3: Correspondance entre effort normal et contrainte locale.

vous écrivez dans la marge de droite les deux équations,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{int} &= -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx, \\ \vec{M}_{int} &= \vec{0} \quad \text{au point H.} \end{aligned} \quad (4.12)$$

#### 4.1.4 Loi de comportement

La matière ignorant si elle est dans une poutre ou un solide massif, c'est la loi de comportement tridimensionnelle qui est la référence. Si l'on suppose que cet effort normal  $N$  se répartit uniformément sur la section droite  $a(s)b(s)$  passant par le point  $H$ , la contrainte est uniquement dans la direction  $\vec{x}$  (Fig. 4.3) :

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{a(s)b(s)}. \quad (4.13)$$

Le tenseur des contraintes en tout point de la section droite passant par  $H$  est donc,

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad (4.14)$$

soit,

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{N}{a(s)b(s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \quad (4.15)$$

Le tenseur des déformation, déduit de l'équation 2.4 est donc,

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{N}{Ea(s)b(s)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu N}{Ea(s)b(s)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu N}{Ea(s)b(s)} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \quad (4.16)$$

Si  $N$  est positif, tous les petits parallélépipèdes de dimension  $da$ ,  $db$ ,  $ds$  subissent un allongement dans la direction  $\vec{x}$  de valeur  $\frac{N}{Ea(s)b(s)}$ , et des contractions dans les directions perpendiculaires de valeur  $\frac{-\nu N}{Ea(s)b(s)}$ .

Dans le cas du pont de Millau,  $N$  est négatif : indépendant de  $s$  avec le modèle 1, de module croissant avec  $s$  avec le modèle 2.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 261 263.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 824, 823, 828 et 825.

#### 4.1.5 Déplacement et rotation

Si l'on appelle  $H'$  le point tel que  $H\vec{H}' = ds\vec{x}$ , et que l'on note  $u$  le déplacement dans la direction  $\vec{x}$ , alors comme le segment s'allonge sous l'effort normal on a,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)}. \quad (4.17)$$

Pour connaître les déplacements de tout point de la fibre moyenne, cette équation différentielle doit être intégrée,

$$\int_{AB} \frac{\partial u}{\partial s} ds = \int_{AB} \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)} ds, \quad (4.18)$$

soit,

$$u_B - u_A = \int_{AB} \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)} ds, \quad (4.19)$$

$$u_B = u_A + \int_{AB} \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)} ds. \quad (4.20)$$

On notera que le module de Young  $E$  peut aussi dépendre de  $s$ .

Dans le cas du pont de Millau, si les dimensions au pied et en haut du poteau sont  $a(0) = a_0$ ,  $a(l) = 2a_0/3$ ,  $b(0) = a_0$ ,  $b(l) = 2a_0/3$ , alors,

$$a(s) = a_0 \left(1 - \frac{s}{3l}\right) \quad (4.21)$$

$$b(s) = a_0 \left(1 - \frac{s}{3l}\right). \quad (4.22)$$

L'encastrement en  $A$  implique que  $u_A = 0$ , et il ne reste plus qu'à intégrer,

- pour le modèle 1,

$$u_B = \int_{AB} \frac{-F}{Ea_0^2 \left(1 - \frac{s}{3l}\right)^2} ds, \quad (4.23)$$

$$u_B = \frac{-F}{Ea_0^2} \int_{AB} \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{3l}\right)^2} ds. \quad (4.24)$$

$$(4.25)$$

Si la section était constante, nous obtiendrions,

$$u_B = \frac{-Fl}{Ea_0^2}. \quad (4.26)$$

- pour le modèle 2,

$$u_B = \int_{AB} \frac{-F - \rho g \int_{x=s}^{x=l} a_0^2 \left(1 - \frac{x}{3l}\right)^2 dx}{Ea_0^2 \left(1 - \frac{s}{3l}\right)^2} ds, \quad (4.27)$$

... légèrement plus compliqué à calculer... donc vous le ferez avec *wxmaxima*.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 056 264.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 826 et 827.

#### 4.1.6 Lieu(x) de la contrainte maximale, limite d'élasticité.

La contrainte (éq. 4.13 est une grandeur locale. Chercher son maximum dans un domaine borné nécessite de calculer la dérivée de cette fonction, et si elle ne s'annule pas dans le domaine, de calculer les deux valeurs extrêmes.

- Pour le modèle 1,

$$\sigma_{xx} = \frac{-F}{a_0^2 \left(1 - \frac{s}{3l}\right)^2}, \quad (4.28)$$

dont la dérivée ne s'annule pas pour  $s$  appartenant entre 0 et  $l$ , donc la contrainte est maximale en  $s = l$ , donc au point  $B$ .

- Pour le modèle 2,

$$\sigma_{xx} = \frac{-F - \rho g a_0^2 \int_{x=s}^{x=l} \left(1 - \frac{x}{3l}\right)^2 dx}{a_0^2 \left(1 - \frac{s}{3l}\right)^2}, \quad (4.29)$$

la recherche du point le plus sollicité nécessite le tracé de l'évolution de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $s$  (Fig 4.4 pour  $F = \rho g a_0^2 l$ ).

La structure sollicitée en traction/compression reste dans le domaine élastique, tant que la contrainte de traction reste inférieure à contrainte limite d'élasticité qui est donnée dans le tableau des matériaux de la section 2.4.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 081 029 265.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 50, 54 et 42.

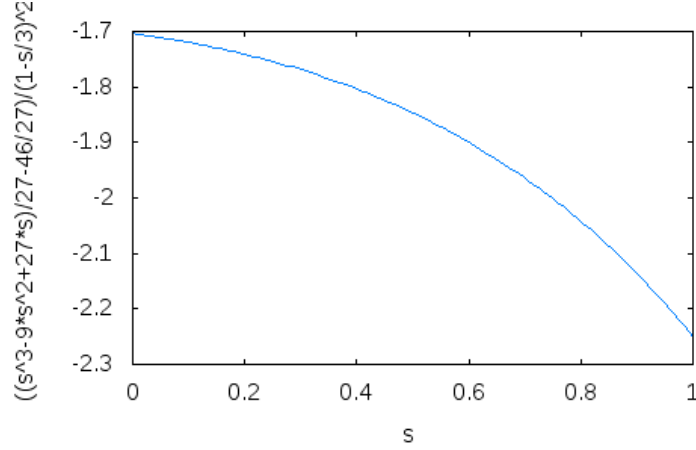


Figure 4.4: Exemple d'évolution des contraintes le long d'un poteau du viaduc de Millau (unités arbitraires).

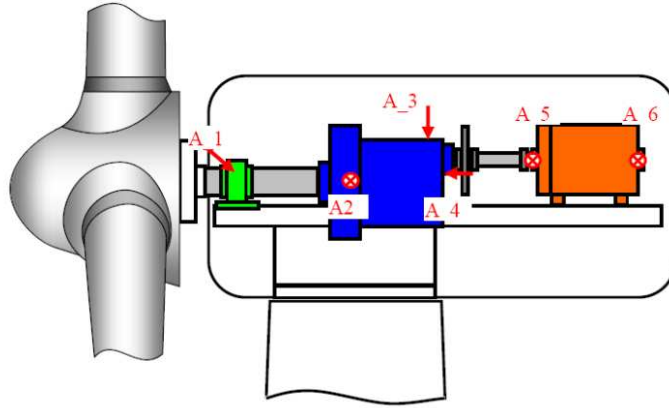


Figure 4.5: Schémat de l'intérieur d'une nacelle d'éolienne.

## 4.2 Sollicitation simple : torsion

Les éoliennes ont généralement des pales qui tournent à la vitesse de 30 tours / minute. Avant d'aborder l'alternateur qui fonctionne à 1500 tours / minutes, l'énergie passe par un multiplicateur de vitesse (en bleu Fig.4.5). Les pales sont reliées au multiplicateur de vitesse par un arbre de section circulaire de longueur  $l = 1.8$  m, de diamètre  $d = 0.5$  m, dont la fonction est de transmettre le couple dû au vent sur les pales, mais aussi de maintenir en position les pales. Nous ne nous intéresseront ici qu'au couple moteur des pales sur le multiplicateur de vitesse, soit entre les points A1 et A2 de la figure. Si l'éolienne est de 2 MW, le couple  $C$  est,

$$C = P/\omega, \quad (4.30)$$

$$= \frac{2 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 30/60} : \text{N.m}, \quad (4.31)$$

$$= 5.9 \cdot 10^5 \text{ N.m}. \quad (4.32)$$

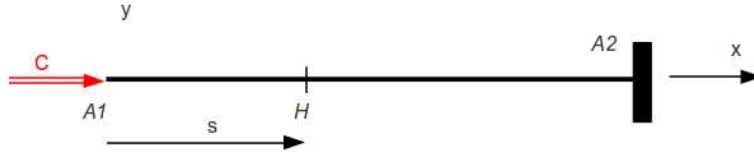


Figure 4.6: Modèle de l'arbre de transmission d'une éolienne avant le multiplicateur de vitesse.

### 4.2.1 Composantes du tenseur des efforts intérieurs

Si l'on appelle  $\vec{x}$  l'axe de rotation de l'arbre de transmission du couple, dans le cas où le multiplicateur est à l'arrêt et que le vent se lève, les pales exercent un couple  $C\vec{x}$  sur l'arbre au point  $A1$ . Un modèle de cet arbre est représenté sur la figure 4.6.

Soit le point  $H$  à la distance  $s$  du point  $A1$ . Si on oriente la poutre de  $A1$  vers  $A2$ , alors le tenseur des efforts intérieurs est,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\} \quad (4.33)$$

Or le tenseur au point  $A2$  n'est pas une donnée du problème. Il est donc plus intéressant de prendre l'autre définition du tenseur des efforts intérieurs :

$$\{\tau_{eff.int.}\} = - \sum_{seg-} \{\tau_{ext \rightarrow seg-}\} \quad (4.34)$$

$$= -\{\tau_{A1}\} \quad (4.35)$$

$$= -\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C\vec{x} \end{array} \right\}_{A1} \quad (4.36)$$

$$= -\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ C\vec{x} + \vec{0} \wedge A1\vec{H} \end{array} \right\}_H \quad (4.37)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -C\vec{x} \end{array} \right\}_H \quad (4.38)$$

car le tenseur en  $A1$  est une donnée du problème. Le tenseur des efforts intérieurs ne comporte qu'un couple autour de l'axe  $\vec{x}$  qui correspond à la direction de la fibre moyenne. On dira que l'arbre subit un *moment de torsion*,

$$M_x = -C. \quad (4.39)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 829.

### 4.2.2 Contraintes locales dans la section droite

Localement, pour créer ce moment de torsion sur l'ensemble de la section droite, faisons l'hypothèse que chaque petit élément d'aire  $d\vec{y} d\vec{z}$  autour d'un point  $P$  appartenant à la section droite passant par  $H$  tel que  $\vec{HP} = \vec{y}\vec{y} + \vec{z}\vec{z}$ , subit une contrainte dans le plan de la section droite et perpendiculaire au vecteur  $\vec{HP}$  (Fig. 4.7 image de gauche).

On définit pour tout point  $P$  un repère local  $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , la contrainte locale est alors considérée comme proportionnelle à la distance  $r = \vec{HP} \cdot \vec{e}_r$  :

$$\sigma_{\theta x} = kr. \quad (4.40)$$

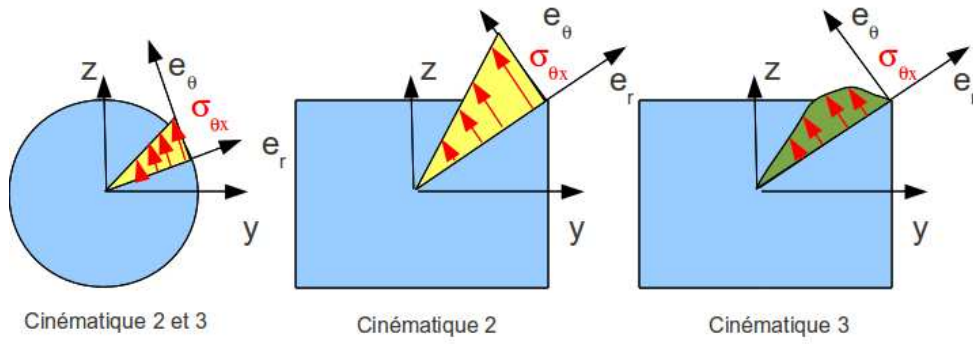


Figure 4.7: Répartition des contraintes de cisaillement dues à une sollicitation de torsion, en fonction de la forme de la section droite et de la cinématique choisie. La répartition de contraintes de l'image centrale n'est pas admissible.

Le tenseur des contraintes en un point peut donc s'écrire,

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\theta x} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta) \otimes (\bar{x}, \bar{e}_r, \bar{e}_\theta)}, \quad (4.41)$$

Pour identifier la valeur du coefficient de proportionnalité  $k$ , il faut intégrer sur l'ensemble de la surface afin de retrouver le moment de torsion  $M_x$  :

$$M_x = \int_{\tilde{y}} \left( \int_{\tilde{z}} \sigma_{\theta x} r d\tilde{z} \right) d\tilde{y}, \quad (4.42)$$

$$= \int_{\tilde{y}} \left( \int_{\tilde{z}} k r r d\tilde{z} \right) d\tilde{y}, \quad (4.43)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{r=0}^{d/2} k r^2 r dr \right) d\theta, \quad (4.44)$$

$$= k \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{r=0}^{d/2} r^2 r dr \right) d\theta, \quad (4.45)$$

$$= k I_0, \quad (4.46)$$

avec  $I_0$  le moment polaire de la section droite,

$$I_0 = \int_S r^2 dS, \quad (4.47)$$

qui dans le cas d'une section circulaire s'écrit,

$$I_0 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{d/2} r^2 r dr d\theta, \quad (4.48)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d^4}{64} d\theta, \quad (4.49)$$

$$= 2\pi \frac{d^4}{64}, \quad (4.50)$$

$$= \frac{\pi d^4}{32}. \quad (4.51)$$

Pour l'éolienne, le moment polaire est donc,

$$I_0 = \frac{\pi 0.5^4}{32} \text{ m}^4, \quad (4.52)$$

$$= 6.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4. \quad (4.53)$$

$$(4.54)$$

Le coefficient de proportionalité est donc,

$$k = \frac{M_x}{I_0}, \quad (4.55)$$

ce qui permet de calculer la contrainte tangentielle en tout point  $P$  de la section droite à la distance  $r$  de  $H$ ,

$$\sigma_{\theta x} = \frac{M_x r}{I_0}. \quad (4.56)$$

La contrainte maximale se situe donc sur la surface du cylindre, pour  $r = d/2$ .



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 040, 080 et 830.

### 4.2.3 Déplacement et rotation

Sous l'effet de ce moment de torsion, la section droite passant par un point  $H'$  à la coordonnée  $s'$ , va tourner d'un angle  $\alpha_x(s' - s)$  par rapport à la section droite passant par un point  $H$  à la coordonnée  $s$ . Si le solide est élastique de module de Young  $E$  et de coefficient de poisson  $\nu$ , les déformations de cisaillement sont reliées aux contraintes de cisaillement par,

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \epsilon_{xy}, \quad (4.57)$$

$$= G \epsilon_{xy}, \quad (4.58)$$

avec  $G$  le module de Coulomb,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.59)$$

Le tenseur des déformation, déduit de l'équation 2.4 est donc,

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sigma_{xy}}{E} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

$(\vec{x}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \otimes (\vec{x}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

La déformation tangentielle d'un petit parallélogramme joignant les points  $P$  et  $p'$ , à la surface du cylindre et appartenant respectivement aux sections passant par  $H$  et  $H'$  sera donc,

$$\epsilon_{\theta x} = \frac{M_x d 2(1+\nu)}{2I_0 E}, \quad (4.61)$$

$$= \frac{M_x d(1+\nu)}{I_0 E}. \quad (4.62)$$



Cette déformation implique un déplacement relatif du point  $P'$  par rapport au point  $P$  dans la direction tangentielle de module,

$$u'_P = \epsilon_{\theta x}(s' - s) \quad (4.63)$$

$$= \frac{M_x d(1 + \nu)(s' - s)}{I_0 E}, \quad (4.64)$$

ce qui correspond à une rotation de la section en  $H'$  telle que,

$$\tan(\alpha_x(s' - s)) = \frac{u_P}{d/2}. \quad (4.65)$$

L'angle étant petit,

$$\alpha_x(s' - s) = \frac{u'_P}{d/2}, \quad (4.66)$$

$$= \frac{M_x 2(1 + \nu)(s' - s)}{I_0 E}, \quad (4.67)$$

d'où,

$$\alpha_x = \frac{M_x 2(1 + \nu)}{I_0 E}, \quad (4.68)$$

$$= \frac{M_x}{GI_0}. \quad (4.69)$$

$\alpha_x$  est un angle par unité de longueur dont les unités dans le système international est donc  $\text{m}^{-1}$ .

Dans le cas de l'arbre de transmission de l'éolienne, on obtient donc un angle entre le point  $A_2$  et le point  $A_1$  qui vaut,

$$\alpha_x(s' - s) = \frac{C 2(1 + \nu)(s' - s)}{I_0 E}, \quad (4.70)$$

$$= \frac{5.9 \cdot 10^5 \cdot 2(1 + 0.3) \cdot 1.8}{6.1 \cdot 10^{-3} \cdot 2.1 \cdot 10^{11}} \text{ rad}, \quad (4.71)$$

$$= 2.16 \cdot 10^{-4} \text{ rad}. \quad (4.72)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 831 et 082.

## 4.2.4 Correction de cisaillement

La répartition de contrainte présentée ci-dessus n'est valable que si la section droite est circulaire. Dans le cas d'une section droite non circulaire, la répartition des contraintes tangentielles est plus complexe (Fig. 4.7 droite).

Par exemple, la valeur maximale de la contrainte de cisaillement pour une section carrée de côté  $a$  est

$$\sigma_{x\theta} = 1.6 \frac{M_x a/2}{I_0}, \quad (4.73)$$

avec  $I_0 = a^4/6$ .

Le calcul de ces corrections n'est pas faite dans ce cours. Sachez simplement que le moment polaire doit être corrigé,

$$I_0^c = k_t I_0, \quad (4.74)$$

avec  $k_t$  un coefficient de correction de section qui dépend de la forme de la section droite. Par exemple, pour une section carrée,  $k_t = 0.85$ .



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 081.

#### 4.2.5 Limite d'élasticité en torsion

Une contrainte de cisaillement  $\sigma_{x\theta}$  sur une section droite d'une poutre implique que si la coupure de la section avait été faite non orthogonale à l'axe de la poutre, cette contrainte aurait une composante de traction et une composante de cisaillement.

On peut donc calculer une contrainte de traction équivalent à cette contrainte de cisaillement,

$$\sigma_{eq} = 2\sigma_{x\theta}, \quad (4.75)$$

qui provient du concept de *cercle de Mohr* qui sera vu en L3.

La limite d'élasticité est atteinte lorsque,

$$\sigma_{eq} = \sigma_{ce}, \quad (4.76)$$

avec  $\sigma_{ce}$  qui dépend du matériau (section 2.4). Donc

$$\sigma_{x\theta} = \frac{\sigma_{ce}}{2}. \quad (4.77)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 832.

### 4.3 Travail pratique : une poutre en torsion



Avant de venir pour ce travail pratique, je vous invite à regarder la vidéo 266 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>.

Le compte-rendu type à trous qui vous sera fourni à l'entrée dans la salle est relativement complet. Vous ne serez évalués sur votre manière de compléter ce compte-rendu, qu'en terme de compétences et objectifs pédagogiques marron et noire.

Une grille critériée vous est fournie afin que vous puissiez optimiser votre travail.

### 4.4 Sollicitation simple : flexion pure

187 kg ! C'est ce qu'a soulevé Vencelas Dabaya-Tientcheu lors des jeux olympiques de 2008 (Fig 4.8). Si on s'intéresse à la barre, on peut considérer qu'elle est chargée à ses deux extrémités par deux forces  $F = mg$  égales et que les mains de l'haltérophile exercent deux forces  $R_1$  et  $R_2$  sur la barre. Le modèle associé à cette barre (Fig. 4.9) est donc constitué d'une fibre moyenne droite qui va de  $A$  à  $D$ , on repèrera un point  $H$  de cette fibre moyenne par son abscisse  $s$  ( $\vec{AH} = s\vec{x}$ ), une section de poteau que nous supposons circulaire de rayon  $r = 0.015$  m. Les distances seront notées  $\vec{AB} = a\vec{x}$ ,  $\vec{BC} = b\vec{x}$ ,  $\vec{CD} = a\vec{x}$ , avec  $a = 0.3$  m,  $b = 0.8$  m,  $m = 93.5$  kg,  $g = 9.81$  m.s<sup>-2</sup>.



Figure 4.8: 187 kg à bout de bras.

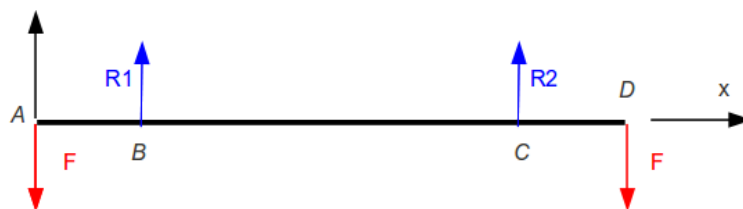


Figure 4.9: Modélisation des efforts sur la barre de l'haltérophile.

### 4.4.1 Composantes du torseur des efforts intérieurs

Nous nous intéressons à la manière dont est sollicitée la barre entre les points  $B$  et  $C$ .

Nous orientons la barre de  $A$  vers  $D$ . La définition du torseur des efforts intérieurs,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\} \quad (4.78)$$

implique que en un point  $H$ ,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D. \quad (4.79)$$

On remarquera que lors du calcul du torseur des efforts intérieurs, on ne s'arrête pas au premier torseur rencontré. Dans le problème posé, une difficulté apparaît : les valeurs de la réaction  $R_2$  ne sont pas données. Il est donc nécessaire dans ce cas de faire l'équilibre du système total pour déterminer les réactions aux liaisons, ici  $R_1$  et  $R_2$ .

Le solide isolé est la barre. Elle est soumise à 4 torseurs,

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A, \quad (4.80)$$

$$\{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B, \quad (4.81)$$

$$\{\tau_3\} = \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C, \quad (4.82)$$

$$\{\tau_4\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D. \quad (4.83)$$

L'équilibre se traduit par la somme des torseurs nulle, soit,

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D. \quad (4.84)$$

Pour qu'une somme de torseurs soit possible, il faut les exprimer au même point. Vous pouvez choisir le point que vous voulez, cela ne change pas la solution. Choisissons le point  $B$ .

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ -F \vec{y} \wedge a \vec{x} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ R_2 \vec{y} \wedge (-b \vec{x}) \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ -F \vec{y} \wedge -(b+a) \vec{x} \end{array} \right\}_B. \quad (4.85)$$

d'où,

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} + R_1 \vec{y} + R_2 \vec{y} - F \vec{y} \\ (Fa + R_2 b - F(b+a)) \vec{z} \end{array} \right\}_B. \quad (4.86)$$

D'où le système de deux équations à deux inconnues,

$$R_1 + R_2 = 2F \quad (4.87)$$

$$R_2 b = Fb, \quad (4.88)$$

et les valeurs des deux réactions,

$$R_1 = F \quad (4.89)$$

$$R_2 = F. \quad (4.90)$$

Le torseur des efforts intérieurs peut donc maintenant être calculé en fonction uniquement du chargement,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D, \quad (4.91)$$

soit, si on l'exprime au point  $H$ ,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{y} \\ F\vec{y} \wedge (-(a+b-s)\vec{x}) \end{array} \right\}_H + \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F\vec{y} \wedge (-(a+b+a-s)\vec{x}) \end{array} \right\}_D, \quad (4.92)$$

d'où,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -Fa\vec{z} \end{array} \right\}_H. \quad (4.93)$$

On remarquera que la résultante de force est nulle et que seul un moment autour de l'axe  $\vec{z}$  est présent. On dira que la barre est sollicitée par un *moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{z}$* . De plus, dans notre cas particulier, ce moment fléchissant est indépendant de l'abscisse  $s$  entre les points  $B$  et  $C$  :

$$Mf_z = Fa. \quad (4.94)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 833.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 294 295.

#### 4.4.2 Loi de comportement

Comme pour la sollicitation précédente, il nous faut faire une hypothèse de répartition de contraintes dans la section droite de cette poutre en flexion. La forme générale de la poutre entre les deux mains de l'haltérophile est légèrement incurvée. On peut faire l'hypothèse que la surface supérieure de la poutre est tendue, et que la surface inférieure de la barre est comprimée. La contrainte n'est donc pas constante lorsque l'on parcourt la section droite. Considérons l'hypothèse (Fig. 4.10) que la contrainte est linéaire en fonction de la distance  $\tilde{y}$  à la fibre moyenne dans la direction  $\vec{y}$ ,

$$\sigma_{xx}(\tilde{y}) = k\tilde{y}, \quad (4.95)$$

avec  $k$  un coefficient à déterminer. Le tenseur des contraintes en un point peut donc s'écrire,

$$\bar{\sigma} = \left[ \begin{array}{ccc} \sigma_{xx}(\tilde{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad (4.96)$$

Il faut vérifier que l'intégrale de ces contraintes sur la section droite redonnent les composantes du torseur des efforts intérieurs. Pour la résultante, nous obtenons une valeur nulle,

$$\vec{R} = \int_S \sigma_{xx}(\tilde{y}) \vec{x} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (4.97)$$

$$\vec{R} = \vec{x} \int_S k\tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (4.98)$$

$$\vec{R} = k\vec{x} \int_S \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (4.99)$$

$$\vec{R} = k\vec{x}0, \quad (4.100)$$

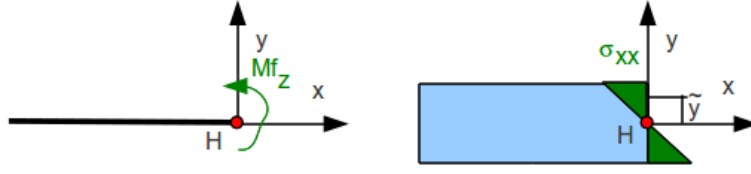


Figure 4.10: Correspondance entre moment fléchissant et contrainte locale.

car H est le barycentre de la section droite. La grandeur

$$m_z = \int_S \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z} \quad (4.101)$$

est appelée *moment statique de la section droite autour de l'axe  $\vec{z}$* . On définira de même le moment statique autour de l'axe  $H\vec{y}$  :

$$m_y = \int_S \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad (4.102)$$

Pour le moment,

$$\check{M} = \int_S \sigma_{xx}(\tilde{y}) \vec{x} \wedge P\vec{H} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (4.103)$$

$$\check{M} = \int_S k \tilde{y} \vec{x} \wedge (-\tilde{y}\vec{y} - \tilde{z}\vec{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (4.104)$$

$$\check{M} = -k\tilde{z} \int_S \tilde{y}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} + k\tilde{y} \int_S \tilde{y}\tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (4.105)$$

$$\check{M} = -k\tilde{z} I_{Hz} + k\check{y} 0, \quad (4.106)$$

car H est le barycentre de la section droite, et en appelant  $I_{Hz}$  le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe  $H\vec{z}$ :

$$I_{Hz} = \int_S \tilde{y}^2 d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad (4.107)$$

De même, on définira  $I_{Hy}$  le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe  $H\vec{y}$ :

$$I_{Hy} = \int_S \tilde{z}^2 d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (4.108)$$

ainsi que le *produit quadratique* de la section droite par rapport aux axes  $H\vec{y}$  et  $H\vec{z}$  :

$$P_{Hyz} = - \int_S \tilde{y}\tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad (4.109)$$

La nullité du produit quadratique d'une section droite permet de définir les axes principaux de cette section droite. Si la section droite possède une ligne de symétrie alors cette ligne et sa perpendiculaire sont les axes principaux de cette section droite.

L'équation 4.106 permet de trouver,

$$M_{fz} = -k I_{Hz}, \quad (4.110)$$

$$k = -\frac{M_{fz}}{I_{Hz}}, \quad (4.111)$$

d'où,

$$\sigma_{xx}(\tilde{y}) = -\frac{M_{fz}\tilde{y}}{I_{Hz}}. \quad (4.112)$$

Par la formule ci-dessus, on peut donc calculer les contraintes locale dûes à un moment fléchissant. De même on aura,

$$\sigma_{xx}(\tilde{z}) = \frac{M_{fy}\tilde{z}}{I_{Hy}}. \quad (4.113)$$

Le changement de signe est à relié avec le fait que le repère est direct entre  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$ .

Pour l'exemple de la barre de l'haltérophile, on a donc les contraintes qui valent,

$$\sigma_{xx}(\tilde{y}) = \frac{Fa\tilde{y}}{I_{Hy}}, \quad (4.114)$$

avec,

$$I_{Hz} = \int_S \tilde{y}^2 d\tilde{y}d\tilde{z}, \quad (4.115)$$

$$= \int_S (r' \cos \theta)^2 r' dr' d\theta, \quad (4.116)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{r'=0}^r r'^3 dr' \right) (\cos \theta)^2 d\theta, \quad (4.117)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \frac{r^4}{4} \right) (\cos \theta)^2 d\theta, \quad (4.118)$$

$$= \frac{r^4}{4} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta, \quad (4.119)$$

$$= \frac{r^4}{4} \pi, \quad (4.120)$$

$$= \frac{d^4}{64} \pi, \quad (4.121)$$

$$= \frac{\pi d^4}{64}, \quad (4.122)$$

avec  $d$  le diamètre de la barre. La contrainte maximale de tension est pour la valeur  $\tilde{y} = r$ , soit,

$$\sigma_{xx}(s, \tilde{y} = r, \tilde{z} = 0) = \frac{287\,9.81\,0.3\,0.015\,12}{2\pi\,0.03^4} \text{ Pa}, \quad (4.123)$$

$$= 9.05\,10^6 \text{ Pa}. \quad (4.124)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 006ter.

### 4.4.3 Courbure

La figure 4.10 montre que les contraintes sont proportionnelles à la distance à la fibre moyenne. Si le matériau est élastique, cela implique que les chaque "fibre" à la distance  $\tilde{y}$  de la fibre moyenne, reliant un point d'une section droite de centre  $H$  à l'abscisse  $s$  au point correspondant de la section droite de centre  $H$  à la coordonnée  $s'$ , va s'allonger d'une grandeur  $\epsilon_{xx}(s' - s)$  proportionnelle à la contrainte  $\sigma_{xx}(\tilde{y})$  qu'elle subit :

$$\epsilon_{xx}(s' - s) = \frac{\sigma_{xx}(\tilde{y})(s' - s)}{E}, \quad (4.125)$$

avec  $E$  le module de Young du matériau exprimé en Pa dans le système international, et  $\epsilon_{xx}$  la déformation qui est une grandeur adimensionnelle. En effet, le tenseur des déformation, déduit de l'équation 2.4 est

donc,

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu\sigma_{xx}}{E} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \quad (4.126)$$

Une section droite de centre  $H'$  à l'abscisse  $s'$  va donc tourner d'un angle  $\alpha_z(s' - s)$  autour de l'axe  $H\vec{z}$  par rapport à la section droite de centre  $H$  à la coordonnée  $s$ .

$$\tan(\alpha_z(s' - s)) = -\frac{\epsilon_{xx}(s' - s)}{\tilde{y}}, \quad (4.127)$$

$$(4.128)$$

Pour des petites déformations, donc des petits angles, l'angle et la tangente sont assimilées,

$$\alpha_z(s' - s) = -\frac{\epsilon_{xx}(s' - s)}{\tilde{y}}, \quad (4.129)$$

$$= -\frac{\sigma_{xx}(s' - s)}{E\tilde{y}}, \quad (4.130)$$

$$= -\frac{-M_{fz}\tilde{y}(s' - s)}{EI_{Hz}\tilde{y}}, \quad (4.131)$$

$$= \frac{M_{fz}(s' - s)}{EI_{Hz}}, \quad (4.132)$$

$$\alpha_z = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}}, \quad (4.133)$$

avec  $\alpha_z$  l'angle de rotation par unité de longueur de poutre : c'est une courbure.

Pour notre barre d'athlète en acier,

$$\alpha_z = \frac{-287 \, 9.81 \, 0.3 \, 12}{2.1 \, 10^{11} \, \pi \, 0.03^4} \text{m}^{-1}, \quad (4.134)$$

$$\alpha_z = -19.0 \, 10^{-3} \text{m}^{-1}, \quad (4.135)$$

la courbure est négative.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 296.

#### 4.4.4 Déplacement et rotation

Si l'on prend comme repère les deux mains de l'athlète, et que l'on note  $u_y(s)$  le déplacement d'un point  $H$  à la coordonnée  $s$  dans la direction  $\vec{y}$  par rapport à la droite joignant les deux mains, la courbure est reliée à la dérivée seconde de  $u_y(s)$  :

$$\frac{d^2 u_y(s)}{ds^2} = \alpha_z, \quad (4.136)$$

$$\frac{d^2 u_y(s)}{ds^2} = \frac{M_{fz}(s)}{E(s)I_{Hz}(s)}. \quad (4.137)$$



L'équation ci-dessus est une équation locale : elle est valable en tout point de coordonnée  $s$ .

Pour connaître le déplacement en tout point, il suffit d'intégrer deux fois, sans oublier les constantes :

$$\frac{du_y(s)}{ds} = \int_{s'=a}^s \frac{M_{fz}(s')}{E(s')I_{Hz}(s')} ds' + A, \quad (4.138)$$

$$u_y(s) = \int_{s''=a}^s \left( \int_{s'=a}^{s''} \frac{M_{fz}(s')}{E(s')I_{Hz}(s')} ds' \right) ds'' + As + B, \quad (4.139)$$

avec  $A$  et  $B$  deux constantes que l'on détermine avec les conditions aux limites.

Pour le cas de l'haltérophile, la barre est de section constante et de matériau constant, le moment est constant, donc on peut sortir les termes de l'intégrale,

$$u_y(s) = \int_{s''=a}^s \left( \int_{s'=a}^{s''} \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} ds' \right) ds'' + As + B, \quad (4.140)$$

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \int_{s''=a}^s \left( \int_{s'=a}^{s''} ds' \right) ds'' + As + B, \quad (4.141)$$

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \int_{s''=a}^s (s'' - a) ds'' + As + B, \quad (4.142)$$

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{s^2 - a^2}{2} - a(s - a) \right) + As + B, \quad (4.143)$$

avec les deux conditions aux limites,

$$u_y(a) = 0, \quad (4.144)$$

$$u_y(a + b) = 0. \quad (4.145)$$

La première équation donne,

$$0 = Aa + B, \quad (4.146)$$

$$B = -Aa. \quad (4.147)$$

La seconde équation donne,

$$0 = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{(a+b)^2 - a^2}{2} - a(b + a - a) \right) + A(b + a) + B, \quad (4.148)$$

$$= \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2}{2} - ab \right) + A(b + a) - Aa, \quad (4.149)$$

$$= \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{b^2}{2} \right) + Ab, \quad (4.150)$$

$$(4.151)$$

d'où,

$$A = -\frac{M_{fz}b}{2EI_{Hz}}. \quad (4.152)$$

La déformée de la barre de l'haltérophile est donc,

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{s^2 - a^2}{2} - a(s - a) \right) - \frac{M_{fz}b}{2EI_{Hz}}(s - a), \quad (4.153)$$

$$= \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{s^2 - a^2}{2} - a(s - a) - \frac{b}{2}(s - a) \right). \quad (4.154)$$

$$(4.155)$$

Avec les données du problème, on obtient la courbe 4.11.

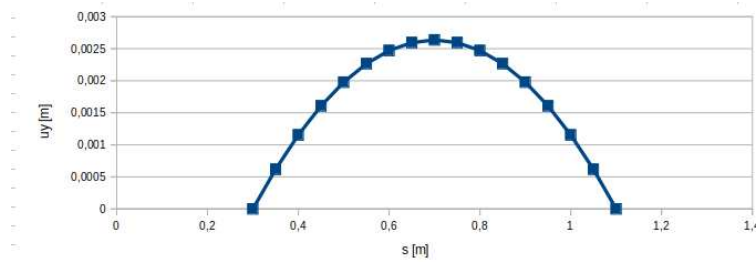


Figure 4.11: Déformée de la barre entre les deux mains de l'haltérophile.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 005 007 079, 039 et 834.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 305 298 299 297.

#### 4.4.5 Chargement maximal en flexion pure.

La flexion implique que les valeurs maximales ou minimales de la contrainte sont sur les fibres les plus éloignées de la fibre moyenne. Il est donc nécessaire de calculer

- si la poutre est de section constante,
  - la section  $s$  où le moment fléchissant est le plus grand,
  - les deux contraintes extrêmes dans cette section,
  - les comparer à la limite d'élasticité  $\sigma_{ce}$ .
- si la poutre n'est pas de section constante,
  - les contraintes extrêmes dans toutes les sections (ce sont des fonctions de  $s$ ),
  - les comparer à la limite d'élasticité  $\sigma_{ce}$ .

A titre d'exemple, supposons une poutre droite en acier de section droite circulaire de diamètre  $d = 0.02$  m passant par les points A B et D de coordonnées respectives exprimées en mètres dans un repère direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$   $(0,0,0)$ ,  $(0,0,0.3)$  et  $(0,0,0.8)$ . Le point A est encastré, au point B agit un couple extérieur  $\vec{C}_1 = 0.7 \vec{i}$  N.m et au point D un couple extérieur  $\vec{D}_1 = -1.2 \vec{i}$  N.m. On souhaite savoir si la poutre reste dans le domaine de comportement élastique.

- On dessine le modèle (voir figure 4.12),
- on calcule les torseurs d'efforts intérieurs dans chacun des tronçons, Pour un point  $H_1$  appartenant à AB, tel que  $A\vec{H}_1 = s_1 \vec{k}$ . On oriente la poutre de A vers D. Le torseur des efforts intérieurs est

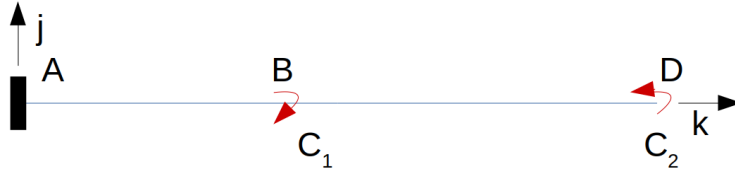


Figure 4.12: Modèle d'une poutre en flexion pure.

calculé à l'aide de la partie avale,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ 0.7\check{i} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -1.2\check{i} \end{array} \right\}_D, \quad (4.156)$$

avec les couples exprimés en N.m. On les transfère au point  $H_1$  à l'aide de la formule de changement de point en remarquant que la résultante de chaque torseur est nul dans le cas traité,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ 0.7\check{i} \end{array} \right\}_{H_1} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -1.2\check{i} \end{array} \right\}_{H_1}, \quad (4.157)$$

et

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -0.5\check{i} \end{array} \right\}_{H_1}. \quad (4.158)$$

On passe dans le repère local avec  $\vec{k} = \vec{x}$  et  $\vec{i} = -\vec{z}$ .

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ 0.5\check{z} \end{array} \right\}_{H_1}. \quad (4.159)$$

On remarque que dans ce cas, le moment fléchissant est constant entre A et B.

Le même travail est effectué pour  $H_2$  appartenant à BD, tel que  $A\vec{H}_2 = s_2\vec{k}$ . Seul le torseur extérieur en D appartient à la partie avale et on trouve aussi une valeur constante dans

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -1.2\check{z} \end{array} \right\}_{H_2}. \quad (4.160)$$

- on recherche la section de moment fléchissant le plus grand : le moment fléchissant est le plus grand pour  $s_2$  quelconque entre 0.3 m et 0.8 m.
- on calcule les contraintes extrêmes dans cette section, sur la fibre supérieure

$$\sigma = \frac{-1.2 \cdot 0.02/2}{\pi 0.02^4/64} \text{Pa} = -1.5 \text{MPa}, \quad (4.161)$$

et sur la fibre inférieure,

$$\sigma = \frac{-1.2 \cdot (-0.02/2)}{\pi 0.02^4/64} \text{Pa} = 1.5 \text{MPa}. \quad (4.162)$$

- on compare ces valeurs à la limite d'élasticité de l'acier  $\sigma_{ce} = 60 \text{ MPa}$ . La structure reste donc élastique.

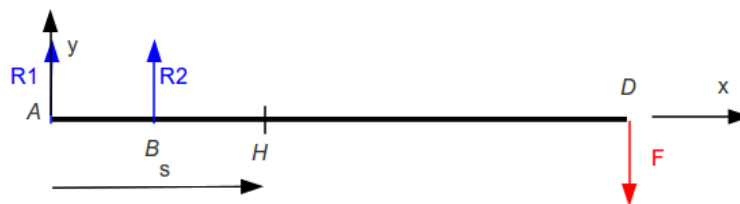


Figure 4.13: Modèle de canne à pêche.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 835.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 291.

## 4.5 Sollicitation simple : cisaillement

### 4.5.1 Composantes du torseur des efforts intérieurs

Si le cisaillement est présent dans une poutre, il est indiscociable d'une flexion (au moins pour les points voisins), aussi l'étude du cisaillement est faite dans le cas de la flexion simple, au paragraphe suivant.

## 4.6 Sollicitation composée : flexion simple

Le poisson vient de mordre et le pêcheur ferre. Si l'on considère la cane à pêche de longueur  $l = 3$  m comme une poutre de diamètre se réduisant linéairement d'un diamètre  $d_1 = 2$  cm à un diamètre  $d_2 = 0.5$  cm, elle subit à son extrémité  $D$  l'effort  $\vec{F}$  exercée par poisson sur la canne et des efforts  $\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$  exercés par les deux mains du pêcheur (points  $A$  et  $B$  distants de  $a = 0.3$  m). Si l'on suppose que ces efforts sont perpendiculaires à la direction de la fibre moyenne de la canne à pêche, le modèle associé peut être représenté figure 4.13.

### 4.6.1 Composantes du torseur des efforts intérieurs

On oriente la poutre des mains du pêcheur vers l'autre extrémité, donc de  $A$  vers  $D$ . Si on définit le point  $H_1$  à la distance  $s$  du point  $A$ , le torseur des efforts intérieurs en ce point, si  $s > a$  est donné par,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\}, \quad (4.163)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \check{0} \end{array} \right\}_D, \quad (4.164)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \check{0} - F\vec{y} \wedge D\vec{H}_1 \end{array} \right\}_{H_1}, \quad (4.165)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F(l-s)\vec{z} \end{array} \right\}_{H_1}. \quad (4.166)$$

Ce torseur a deux composantes : un moment de flexion autour de l'axe  $H_1\vec{z}$ ,  $Mf_z = -F(l-s)$  et un effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$ ,  $T_y = -F$ .

Les contraintes, les déplacements et les rotations dus au moment fléchissant ont été déjà décrit dans le paragraphe 4.4. Il nous reste à traiter les contraintes, les déplacements et les rotations dus à l'effort tranchant.

#### Les contraintes de cisaillement sont constantes dans la section droite : le gros mensonge !

La première hypothèse est que dans une section droite de la poutre, induites par un effort tranchant  $T_y$ , les contraintes  $\sigma_{yx}$  soit constantes :

$$\sigma_{yx} = \frac{T_y}{S}, \quad (4.167)$$

avec  $S$  l'aire de la section droite.

Ceci n'est en fait pas possible, car du fait de la symétrie du tenseur des contraintes,  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ , donc sur la fibre supérieure de la poutre, le vecteur contraintes

$$\vec{T}(P, \vec{y}) = \vec{\sigma} \cdot \vec{y}, \quad (4.168)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad (4.169)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \quad (4.170)$$

Or le vecteur  $\vec{T}(P, \vec{y})$  correspond aux actions de l'air sur la poutre si le point  $P$  est sur la fibre supérieure, actions qui sont considérées comme nulles.

#### Les contraintes de cisaillement sont non constantes dans la section droite

Donc la contrainte de cisaillement est nécessairement nulle sur les fibres supérieure et inférieure de la poutre. Néanmoins, leur intégrale sur la surface doit valoir  $T_y$ , donc une évolution de cette contrainte en fonction de la distance  $\tilde{y}$  entre le point considéré et le point  $H$  doit être calculée. Ces évolutions dépendent de la forme de la section droite comme le montre les tableaux présentés figure 4.14 et 4.15.

On retiendra donc que la contrainte de cisaillement est dépendante de la position  $\tilde{y}$  du point  $P$  dans la section droite, dans le cas d'un effort tranchant  $T_y$  :

$$\sigma_{yx}(\tilde{y}) = g(\tilde{y}) \frac{T_y}{S}, \quad (4.171)$$

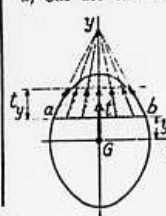
avec  $g(\tilde{y})$  une fonction adimensionnelle donnée par les tableaux 4.14 et 4.15 dans les dernières colonnes.

TABLEAU II. — EFFORT TRANCHANT - CONTRAINTES DE CISAILEMENT

TABLEAU II, 2. — SECTIONS USUELLES - CONTRAINTES DE CISAILEMENT ET DÉFORMATION DUES A L'EFFORT TRANCHANT - FORMULES APPROCHÉES

Les formules approchées, donnant pour les sections usuelles les valeurs des contraintes de cisaillement et la valeur de la section réduite  $S_y$  (intervenant dans le calcul des déformations), ont été déterminées à partir des hypothèses mentionnées dans le tableau II, 1 et des hypothèses supplémentaires suivantes :

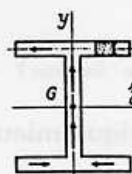
a) Cas des sections pleines.



Le long d'une ligne parallèle à l'axe d'inertie  $Gz$  d'ordonnée  $y$ , coupant le contour de la section aux deux points  $a$  et  $b$  :

1. les contraintes de cisaillement,  $t$ , passent toutes par le point de concours des deux tangentes en  $a$  et  $b$  au contour de la section.
2. la composante  $t_y$  suivant  $Gy$  des contraintes de cisaillement  $t$  est constante.

b) Cas des sections minces (fermées ou ouvertes).



La contrainte de cisaillement est tangente en chaque point à la ligne moyenne du profil.

SECTION	CROQUIS	CONTRAINTE DE CISAILEMENT				DÉFORMATION
		Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	Valeur de $S_y$
Triangle isocèle			$t_y = \frac{6T}{S} \left( \frac{1}{3} + \frac{y}{h} \right) \left( \frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right)$ $S = \frac{bh}{2}$	$t_y = 1,5 \frac{T}{S}$ pour $y = \frac{h}{6}$		
Rectangle			$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \left[ 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right]$ $S = bh$	$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S}$ pour $y = 0$		$S_y = \frac{5}{6} S$
Losange			$t_y = \frac{T}{S} \left[ 1 + \frac{y}{h} - \frac{2y^2}{h^2} \right]$ $t_x = t_y \sqrt{1 + \frac{a^2}{4h^2}}$ $S = a \cdot h$	$t_y = \frac{9}{8} \frac{T}{S}$ pour $y = \frac{h}{4}$		$S_y = \frac{30}{31} S$
Carré évidé				$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \frac{1 + k + k^2}{1 + k^2}$ pour $mm$		

Figure 4.14: Effet du cisaillement p1 : notations utilisées  $T = T_y$ ,  $t_y = \sigma_{yx}$ ,  $y = \tilde{y}$ ,  $t_y = g(\tilde{y})$ ,  $S_y = k_y S$



Tableau II. 2. — Sections usuelles - Contraintes de cisaillement et déformation dues à l'effort tranchant - Formules approchées (suite)

SECTION	CROQUIS	CONTRAINTE DE CISAILLEMENT				DÉFOR- MATION
		Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	Valeur de $S_x$
Hexagone			$t_y = \frac{T}{2,88 h^4} \frac{(h-y)(zh^2 + 2yh - y^2)}{(zh - y)}$ $S = 3,464 h^3$	$t_y = 1,46 \frac{T}{S}$ point A direction $\perp AB$		
Cercle			$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$ $t \text{ en A} = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}$ $S = \pi R^2$	$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ le long de CD		$S_x = \frac{9}{10} S$
Ellipse			$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$ $S = \pi a b$	$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ le long de CD		
Section en I			$t_1 = \frac{6 T e (h - e)}{b h^3 - (b - b') (h - 2e)^3}$ $t_2 = t_1 (b / b')$ $t_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{b' h} \frac{b - (b - b') \left(1 - \frac{2e}{h}\right)^2}{b - (b - b') \left(1 - \frac{2e}{h}\right)^3}$	$t_y = t_2$		
Section circulaire mince			$t_H = \frac{2T}{S} \cos \varphi$ $S = 2 \pi R e$	$t_A = t_B = \frac{2T}{S}$		$S_x = 0,5 S$
Profil mince en I			$t_{2(A)} = \frac{T}{I} (b - z) h$ $t_{2(Ame)} = \frac{T}{I e} \left[ 2 b e' h + \frac{e}{2} (h^2 - y^2) \right]$ $S = 2 h e$ $S' = 2 b e' h = \frac{S}{\lambda}$ $I = \frac{h^3}{3} (S + 6 S')$	$t_{2(A)} = \frac{T}{I} b h$ $t_{2(B)} = \frac{T}{S} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{6}}$ $t_{2(C)} = \frac{T}{S} \frac{1 + \frac{\lambda}{4}}{1 + \frac{\lambda}{6}}$		$S_x = 2 h e$

Figure 4.15: Effet du cisaillement p2 : notations utilisées  $T = T_y$ ,  $t_y = \sigma_{yx}$ ,  $y = \tilde{y}$ ,  $t_y = g(\tilde{y})$ ,  $S_y = k_y S$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 049 244 240.

### 4.6.2 Loi de comportement

De part la présence de ces contraintes de cisaillement non uniformes dans chaque section droite sous l'effet de l'effort tranchant, la section droite ne reste pas plane et se voile. On peut néanmoins montrer que le déplacement du point  $H'$  d'abscisse  $s'$  par rapport au point  $H$  d'abscisse  $s$  est une translation dans la direction de l'effort tranchant,

$$\vec{u}(s') - \vec{u}(s) = \frac{T_y}{Gk_y S} \vec{y}. \quad (4.172)$$

Non seulement, ce déplacement fait apparaître une correction de section par un coefficient  $k_y < 1$  donnée dans les tableaux 4.14 et 4.14, mais de plus, ces déplacements sont toujours négligeables devant les déplacements dus au moment fléchissant.

*On pourra toujours négliger les déplacements dus aux efforts tranchants, devant les déplacements dus aux moments fléchissants.* C'est ce que montre la comparaison des résultats des deux brevets suivants.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 051, 052.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 031.

### 4.6.3 Déplacement et rotation

Les formules obtenues pour la flexion pure restent valables puisque l'on néglige les déplacements dus aux efforts tranchant. On veillera néanmoins lors des intégrations successives, à bien prendre en compte le fait que le moment fléchissant est maintenant dépendant de l'abscisse  $s$ .

$$\frac{d^2 u_y(s)}{ds^2} = \frac{M_{fz}(s)}{E(s)I_{Hz}(s)}. \quad (4.173)$$

Pour le cas de notre canne à pêche, si elle n'est pas creuse,

$$I_{Hz}(s) = \pi \frac{(d_1 + \frac{s}{l}(d_2 - d_1))^4}{64}, \quad (4.174)$$

$$(4.175)$$

si le module de Young est constant  $E = 1 \cdot 10^{10}$  (bois) et si l'on considère les deux mains fixes,

$$u_y(0) = 0, \quad (4.176)$$

$$u_y(a) = 0, \quad (4.177)$$



il est nécessaire de connaître aussi l'évolution du moment fléchissant entre les points  $A$  et  $B$ .

Pour un point  $H_2$  d'abscisse  $s$  comprise entre 0 et  $a$ , le torseur des efforts intérieurs est donné par,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\}, \quad (4.178)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D. \quad (4.179)$$

Ceci nécessite de connaître la réaction  $R_2$  en fonction du chargement  $F$ . Il faut faire l'équilibre de la canne à pêche, en écrivant que la somme des torseurs est nulle :

$$\left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad (4.180)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ R_2 \vec{y} \wedge (-a \vec{x}) \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ -F \vec{y} \wedge (-l \vec{x}) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad (4.181)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (R_1 + R_2 - F) \vec{y} \\ (aR_2 - lF) \vec{z} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \quad (4.182)$$

d'où,

$$R_2 = \frac{l}{a} F, \quad (4.183)$$

$$R_1 = \left(1 - \frac{l}{a}\right) F. \quad (4.184)$$

Le torseur au point  $H_2$  avec  $s$  entre 0 et  $a$  est donc,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\}, \quad (4.185)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \frac{l}{a} F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D, \quad (4.186)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \frac{l}{a} F \vec{y} \\ \frac{l}{a} F \vec{y} \wedge (s-a) \vec{x} \end{array} \right\}_{H_2} + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ -F \vec{y} \wedge (s-l) \vec{x} \end{array} \right\}_{H_2}, \quad (4.187)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{l}{a} - 1\right) F \vec{y} \\ F \left(\frac{l}{a}(a-s) + (s-l)\right) \vec{z} \end{array} \right\}_{H_2} \quad (4.188)$$

Pour connaître le déplacement en tout point, il suffit d'intégrer deux fois, mais en faisant cela pour chaque tronçon, puisque les expressions des moments fléchissants changent. Pour le tronçon entre  $A$  et  $B$  :

$$u_{y2}(s) = \int_{s''=0}^s \left( \int_{s'=0}^{s''} \frac{F \left( \frac{l}{a}(a-s') + (s'-l) \right)}{E\pi \frac{(d_1 + \frac{s'}{4}(d_2-d_1))^4}{64}} ds' \right) ds'' + A_2 s + B_2. \quad (4.189)$$

Pour le tronçon entre  $B$  et  $D$  :

$$u_{y1}(s) = \int_{s''=a}^s \left( \int_{s'=a}^{s''} \frac{F(s'-l)}{E\pi \frac{(d_1 + \frac{s'}{4}(d_2-d_1))^4}{64}} ds' \right) ds'' + A_1 s + B_1. \quad (4.190)$$

Les 4 constantes sont déterminées par les 4 conditions :

$$u_{y2}(0) = 0, \quad (4.191)$$

$$u_{y2}(a) = 0, \quad (4.192)$$

$$u_{y1}(a) = u_{y2}(a), \quad (4.193)$$

$$\frac{du_{y1}}{ds}(a) = \frac{du_{y2}}{ds}(a), \quad (4.194)$$

avec les deux dernières équations qui traduisent le raccordement des deux fonctions : les déplacements et les pentes doivent être les mêmes.

La résolution, certes compliquée des intégrales, peut être faite à l'aide de maxima.

#### 4.6.4 Chargement maximal

Le moment fléchissant induit des contraintes  $\sigma_{xx}$  qui sont maximales en module sur les fibres supérieure et inférieure. En ces fibres, les contraintes de cisaillement  $\sigma_{yx}$  sont nulles. En ces fibres, la charge maximale admissible  $F_{max,flex}$  pour ne pas dépasser la limite d'élasticité est donc calculable avec les formules obtenues en flexion pure.

Le moment fléchissant induit des contraintes  $\sigma_{xx}$  qui sont nulle sur la fibre moyenne. En cette fibre pour une section symétrique, les contraintes de cisaillement  $\sigma_{yx}$  sont maximales. En ces fibres, la charge maximale admissible  $F_{max,cisa}$  pour ne pas dépasser la limite d'élasticité est donc calculable avec les formules obtenues en cisaillement pur.

Pour des poutres de section rectangulaire, ou circulaire, ou possédant un plan de symétrie dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ ,  $F_{max,flex} < F_{max,cisa}$ . Donc les contraintes limitantes apparaissent sur les fibres supérieure et inférieures.

Vous calculerez le chargement critique dans le cas de la flexion simple, avec les formules du chargement critique en flexion pure.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevet 096.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 210.

#### 4.6.5 résolution par Maxima

```
(%i1) restart;
f1(s):=(1*(3/0.3*(0.3-s)+(s-3))/(1e10*pi*(0.02+s/3*(0.005-0.02))^4/64));
f2(s):=(1*(s-3)/(1e10*pi*(0.02+s/3*(0.005-0.02))^4/64));
```

```
(%o1) restart
```

```
(%o2)
```

$$f1(s) := \frac{1 \left( \frac{3}{0.3} (0.3 - s) + (s - 3) \right)}{\frac{1.0 \cdot 10^{10} \pi \left( 0.02 + \frac{s}{3} (0.005 - 0.02) \right)^4}{64}}$$

```
(%o3)
```

$$f2(s) := \frac{1 (s - 3)}{\frac{1.0 \cdot 10^{10} \pi \left( 0.02 + \frac{s}{3} (0.005 - 0.02) \right)^4}{64}}$$

```
(%i4) truc01:integrate(f1(s),s);
truc02:subst(s1,s,truc01)-subst(0,s,truc01)+A2;
truc03:integrate(truc02,s1);
truc04:subst(s2,s1,truc03)-subst(0,s1,truc03)+B2;
```

*rat : replaced 0.02 by 1/50 = 0.02* *rat : replaced -0.005 by -1/200 = -0.005* *rat : replaced 10.0 by 10/1 = 10.0* *rat : replaced 0.3 by 3/10 = 0.3*

$$(\%o4) \quad \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (7200000000 s - 9600000000)}{\pi (s^3 - 12 s^2 + 48 s - 64)}$$

$$(\%o5) \quad A2 + \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (7200000000 s1 - 9600000000)}{\pi (s1^3 - 12 s1^2 + 48 s1 - 64)} - \frac{0.96}{\pi}$$

$$(\%o6) \quad s1 A2 - \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (7200000000 s1 - 19200000000)}{\pi (s1^2 - 8 s1 + 16)} - \frac{0.96 s1}{\pi}$$

$$(\%o7) \quad B2 + s2 A2 - \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (7200000000 s2 - 19200000000)}{\pi (s2^2 - 8 s2 + 16)} - \frac{0.96 s2}{\pi} - \frac{7.6800000000000001}{\pi}$$

```
(%i8) truc05:integrate(f2(s),s);
truc06:subst(s1,s,truc05)-subst(0.3,s,truc05)+A1;
truc07:integrate(truc06,s1);
truc08:subst(s2,s1,truc07)-subst(0.3,s1,truc07)+B1;
```

*rat : replaced 0.02 by 1/50 = 0.02* *rat : replaced -0.005 by -1/200 = -0.005*

$$(\%o8) \quad -\frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (2400000000 s - 8000000000)}{\pi (3 s^3 - 36 s^2 + 144 s - 192)}$$

$$(\%o9) \quad A1 - \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (2400000000 s1 - 8000000000)}{\pi (3 s1^3 - 36 s1^2 + 144 s1 - 192)} + \frac{0.30660901953816}{\pi}$$

$$(\%o10) \quad s1 A1 + \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (2400000000 s1 - 8800000000)}{\pi (3 s1^2 - 24 s1 + 48)} + \frac{0.30660901953816 s1}{\pi}$$

$$(\%o11) \quad B1 + s2 A1 - 0.3 A1 + \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (2400000000 s2 - 8800000000)}{\pi (3 s2^2 - 24 s2 + 48)} + \frac{0.30660901953816 s2}{\pi} + \frac{1.167135872176048}{\pi}$$

conditions aux limites

```
(%i12) subst(0,s2,truc04)=0;
subst(0.3,s2,truc04)=0;
subst(0.3,s2,truc04)=subst(0.3,s2,truc08);
subst(0.3,s1,truc02)=subst(0.3,s1,truc06);
```

```
(%o12)                                     B2 = 0

(%o13)                                     B2 + 0.3 A2 -  $\frac{0.0018933528122718}{\pi}$  = 0

(%o14)                                     B2 + 0.3 A2 -  $\frac{0.0018933528122718}{\pi}$  = B1

(%o15)                                     A2 -  $\frac{0.019956962075297}{\pi}$  = A1

(%i16) B2s:0;
A2s:0.0018933528122718/pi/0.3;
B1s:0;
A1s:A2s-0.019956962075297/pi;

(%o16)                                     0

(%o17)                                      $\frac{0.006311176040906}{\pi}$ 

(%o18)                                     0

(%o19)                                      $-\frac{0.013645786034391}{\pi}$ 

fonctions solutions

(%i52) truc09:float(subst(B2s,B2,subst(A2s,A2,truc04)));
truc10:float(subst(B1s,B1,subst(A1s,A1,truc08)));

(%o52)

$$-\frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (7.2 \cdot 10^9 s^2 - 1.92 \cdot 10^{10})}{\pi (s^2 - 8.0 s^2 + 16.0)} - \frac{0.95368882395909 s^2}{\pi} - \frac{7.6800000000000001}{\pi}$$


(%o53)

$$\frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (2.4 \cdot 10^9 s^2 - 8.8 \cdot 10^9)}{\pi (3.0 s^2 - 24.0 s^2 + 48.0)} + \frac{0.29296323350377 s^2}{\pi} + \frac{1.171229607986365}{\pi}$$

```

fin de résolution par Maxima On peut alors tracer la déformée de la canne à pêche figure 4.16.

## 4.7 Travail pratique : une poutre en flexion



Avant de venir pour ce travail pratique, je vous invite à regarder la vidéo 281 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>.

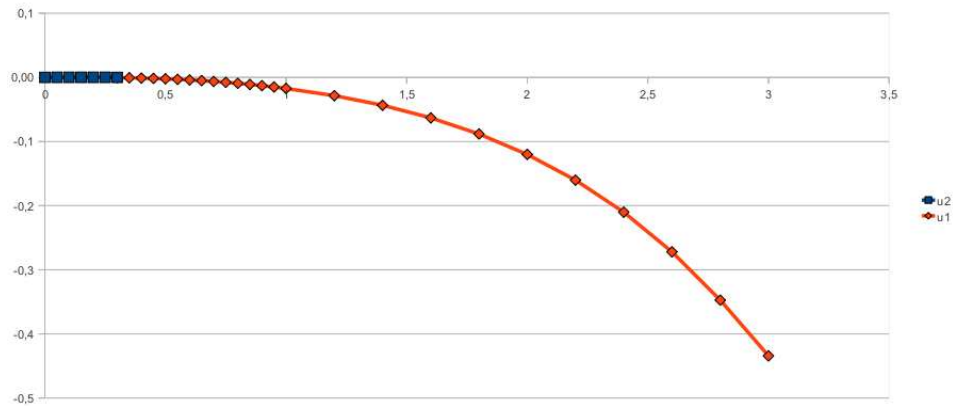


Figure 4.16: déformée d'une canne à pêche pour une force de 1 N en bout de canne.

Le compte-rendu type à trous qui vous sera fourni à l'entrée dans la salle n'est complété qu'à moitié. Vous ne serez évalués sur votre manière de compléter l'autre moitié de ce compte-rendu, qu'en terme de compétences et objectifs pédagogiques marron et noire.

Une grille critériée vous est fournie afin que vous puissiez optimiser votre travail.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 293.

## 4.8 Sollicitations composées : la totale !

La théorie décrite dans ce cours est linéaire. Lorsque le torseur des efforts intérieurs comporte plusieurs composantes (effort normal, efforts tranchants suivant  $\vec{y}$ , efforts tranchants suivant  $\vec{z}$ , moment de torsion, moment fléchissant autour de  $H\vec{y}$ , moment fléchissant autour de  $H\vec{z}$ ) les effets de chacun s'additionnent. Il est donc possible de résoudre chacun des problèmes de base, puis de sommer leurs contributions en terme de rotation, déplacement et contraintes.

Néanmoins, une vérification à posteriori doit être faite. Le torseur des efforts intérieurs a été calculé en considérant la poutre dans sa configuration initiale sans chargement. Une fois les déplacements de tous les points obtenus, il est possible de recalculer le torseur des efforts intérieurs dans la configuration finale avec chargement.

- Si les deux évaluations des composantes du torseur des efforts intérieurs sont proches, la théorie linéaire est suffisante.
- Si en un point, les deux évaluations des composantes du torseur des efforts intérieurs diffèrent fortement, la théorie linéaire n'est pas suffisante. Il faut recalculer les déplacements et rotation par rapport à cette nouvelle configuration... et itérer jusqu'à convergence. Cette modélisation *en grands déplacements et rotations* n'est pas l'objet de ce cours. Vous étudierez les systèmes non-linéaires en M2.

### 4.8.1 Lieu(x) de la contrainte maximale

La limite d'élasticité est une grandeur locale. Si le chargement de la structure augmente, il existe un point  $P$  de la poutre où la limite sera dépassée. La structure peut donc devenir plastique (acier, alu...) ou rompre (fonte...).

Nous avons vu que

- l'effort normal  $N$  crée une contrainte  $\sigma_{xx} = N/S$ , sur toute la section droite
- le moment fléchissant  $M_{fy}$  crée une contrainte  $\sigma_{xx} = M_{fy}\tilde{z}/I_{Hy}$  maximale sur les bords de la section droite dans la direction  $\vec{z}$ ,
- le moment fléchissant  $M_{fz}$  crée une contrainte  $\sigma_{xx} = M_{fz}\tilde{y}/I_{Hz}$  maximale sur les bords de la section droite dans la direction  $\vec{y}$ ,
- le moment de torsion  $M_x$  crée une contrainte  $\sigma_{\theta x} = M_x r/I_0$  maximale sur les bords de la section droite si elle est circulaire.
- les efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$  créent des contraintes  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$  respectivement qui sont nulles sur les bords de la section droite.

On admettra que pour une structure de type poutre, c'est toujours sur la surface externe que la limite d'élasticité est dépassée en premier et non au coeur de celle-ci. Le dimensionnement se fera en prenant en compte traction, flexions et torsion. On appellera contrainte équivalente,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{\theta x}^2}, \quad (4.195)$$

cherchera le point  $P$  de coordonnées  $(s, \tilde{y}, \tilde{z})$  où cette contrainte équivalente est maximale. Pour cela, on rappelle que

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S} + \frac{M_{fy}\tilde{z}}{I_{Hy}} - \frac{M_{fz}\tilde{y}}{I_{Hz}}, \quad (4.196)$$

$$\sigma_{\theta x} = \frac{M_x r}{I_0} \text{ (pour une poutre de section circulaire)}. \quad (4.197)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 24, 25.

### 4.8.2 Les déplacements et les rotations : formules de Bresse.

Une attention toute particulière doit être portée sur les directions de déplacements :

- un effort normal implique des déplacement dans la direction de la fibre  $\vec{x}$ ,
- un effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$  implique des déplacement dans la direction  $\vec{y}$ ,
- un effort tranchant dans la direction  $\vec{z}$  implique des déplacement dans la direction  $\vec{z}$ ,
- un moment de torsion implique une rotation autour de la direction  $\vec{x}$ ,
- un moment fléchissant autour de l'axe  $\vec{y}$  implique une rotation autour de la direction  $\vec{y}$  et un déplacement dans la direction  $\vec{z}$ ,
- un moment fléchissant autour de l'axe  $\vec{z}$  implique une rotation autour de la direction  $\vec{z}$  et un déplacement dans la direction  $-\vec{y}$ .

On peut soit caculer chacun des termes, leur associer à chacun une direction (ou un axe pour les rotations), puis sommer. Une autre solution est de calculer tous les termes à l'aide des formules de Bresse qui peuvent être construites par approche successive.

Soit une poutre reliant un point A à un point B, orientée de A vers B, le point courant étant noté H.

- Supposons que cette poutre soit infiniment rigide. Si le point A subit un torseur de déplacement composé d'un angle de rotation  $\check{\omega}_A$  et d'une translation  $\vec{u}_A$ , alors le torseur de déplacement au point B est obtenu par la formule de changement de point.

$$\check{\omega}_B = \check{\omega}_A, \quad (4.198)$$

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \check{\omega}_A \wedge \vec{AB}. \quad (4.199)$$

- Supposons cette fois que le point A est immobile mais que seul se déforme un petit tronçon HH' de longueur  $ds$  à partir du point H. Le torseur de déplacement de H' est composé de  $\check{\omega}_{H'} = (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z})ds$  et d'une translation  $\vec{u}_{H'} = (\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z})ds$ . La déformation de ce petit segment implique un torseur de déplacement au point B :

$$\check{\omega}_B = (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z})ds, \quad (4.200)$$

$$\vec{u}_B = (\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z})ds + (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z})ds \wedge \vec{HB}. \quad (4.201)$$

- Supposons cette fois que le point A est mobile et que toute la poutre se déforme. Il suffit de faire la somme des torseurs : du premier et du second que l'on aura intégré le long de toute la poutre AB. On obtient les formules de Bresse ci-dessous.

Soit une poutre dont l'orientation de la fibre moyenne est de  $P_{deb}$  à  $P_{fin}$ , si le torseur des déformations est noté,

$$\{Def_H\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z} \\ \epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z} \\ N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z} \end{array} \right\}_H, \quad (4.202)$$

avec le module de Coulomb  $G$  donné par (Eq. ??)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (4.203)$$

Alors le torseur de déplacement au point  $P_{fin}$  par rapport au torseur de déplacement du point  $P_{deb}$  est,

$$\begin{aligned} \{U_{P_{fin}}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega}_{P_{fin}} \\ \vec{u}_{P_{fin}} \end{array} \right\}_{P_{fin}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega}_{P_{deb}} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z})ds \\ \vec{u}_{P_{deb}} + \check{\omega}_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z})ds \\ \quad + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (\alpha_x \check{x} + \alpha_y \check{y} + \alpha_z \check{z}) \wedge \vec{HP}_{fin} ds \end{array} \right\}_{P_{fin}} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} \check{\omega}_{P_{deb}} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z})ds \\ \vec{u}_{P_{deb}} + \check{\omega}_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z})ds \\ \quad + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{HP}_{fin} ds \end{array} \right\}_{P_{fin}} \end{aligned} \quad (4.204)$$

Les formules de Bresse ci-dessus sont relatifs à la cinématique 3. Nous rappelons ci-dessous, les formules de Bresse pour la cinématique 2, qui ne diffèrent que par 3 termes :

$$\begin{aligned}
\{U_{Pfin}\} &= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_{Pfin} \\ \vec{u}_{Pfin} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{l} \check{\omega}_{Pdeb} + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (M_x/GI_0 \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) ds \\ \vec{u}_{Pdeb} + \check{\omega}_{Pdeb} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\ + \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pfin}} (M_x/GI_0 \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \end{array} \right\}_{Pfin} \quad (4.205)
\end{aligned}$$

• **Erreur classique :** Une fois les formules de Bresse utilisées, votre résultat ne doit plus faire apparaître les coordonnées du point  $H$ . Si c'est le cas, c'est que vous n'avez pas effectué l'intégration entre les abscisses  $s_{Pdeb}$  et  $s_{Pfin}$ .

• **Erreur classique :** Si dans un problème donné, le déplacement en  $P_{fin}$  est connu et que vous recherchez le déplacement en  $P_{deb}$ , écrivez la formule de Bresse comme ci-dessus, puis passer le termes complémentaires à  $\vec{u}_{Pfin}$  de l'autre coté de l'égalité.

• **Erreur classique :** Si vous utilisez les formules de Bresse entre un point  $s_{Pdeb}$  et  $s_{Pfin}$  et que vous devez couper l'intégrale en deux en passant par un point  $s_{Pint}$  (comme "intermédiaire", la formule de Bresse en déplacement s'écrit :

$$\begin{aligned}
\vec{u}_{Pfin} &= \vec{u}_{Pdeb} + \check{\omega}_{Pdeb} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} \\
&+ \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pint}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\
&+ \int_{s_{Pdeb}}^{s_{Pint}} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \\
&+ \int_{s_{Pint}}^{s_{Pfin}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\
&+ \int_{s_{Pint}}^{s_{Pfin}} (M_x/GI_0^c \check{x} + Mf_y/EI_{Hy} \check{y} + Mf_z/EI_{Hz} \check{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds. \quad (4.206)
\end{aligned}$$

Vous noterez bien que le vecteur après le produit vectoriel reste  $\vec{H} \vec{P}_{fin}$  dans les deux intégrales.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une question sur cette partie. Le fichier est nommé 008.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 056, 074 et 097.



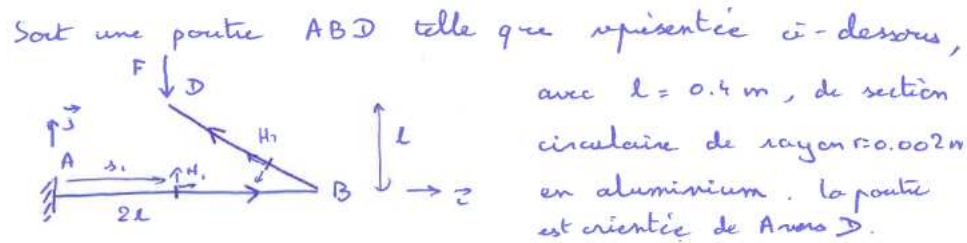


Figure 4.17: Une poutre constituée de deux segments de droite.

## 4.9 L'assemblage de poutres droites

Supposons, dans un repère direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , qu'une poutre soit faite de deux segments AB et BC, dont les directions de fibre moyenne ne sont pas les mêmes.

### 4.9.1 Le principe

Le calcul du torseur des efforts intérieurs dans chaque segment AB et BC se fait comme précédemment. Le produit vectoriel pour le calcul du moment peut simplement faire apparaître deux composantes dans chacune des directions  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ . Pour le calcul du chargement maximal, la recherche de la contrainte maximale est faite comme précédemment.

Pour les déplacements et les rotations, les formules de Bresse précédentes peuvent être utilisées : vous veillerez tout particulièrement à exprimer les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , dans le repère global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 030.

### 4.9.2 Un exemple

Soit la poutre modélisable telle que montré figure 4.17

Soit  $H_1 \in [A, B]$  avec  $\overrightarrow{AH_1} = s_1 \vec{e}$

$$\left\{ \mathcal{C}_{eff}^{int}_{H_1} \right\} = \sum_{seg} \left\{ \mathcal{C}_{seg} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -F \vec{J} \\ 0 \end{matrix} \right\}_D = \left\{ \begin{matrix} -F \vec{J} \\ -F \vec{J} \cdot \overrightarrow{DH_1} \end{matrix} \right\}_{H_1}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} -F \vec{J} \\ -F \vec{J} \cdot [(-l+s_1) \vec{e} - l \vec{J}] \end{matrix} \right\}_{H_1} = \left\{ \begin{matrix} -F \vec{J} \\ +F(s_1-l) \vec{e} \end{matrix} \right\}_{H_1}$$

On passe dans le repère local pour identifier les composantes :  $\vec{e} = \vec{x}$  ;  $\vec{J} = \vec{y}$  ;  $\vec{z} = \vec{z}$

$$= \left\{ \begin{matrix} -F \vec{y} \\ F(s_1-l) \vec{z} \end{matrix} \right\}_{H_1}$$

donc : effet tranchant dans la direction  $\vec{y}$   $T_{y_1} = -F$

moment fléchissant autour de l'axe  $\vec{z}$   $M_{z_1} = F(s_1-l)$

la contrainte maximale dans AB est en fibre supérieure ou inférieure

$$\sigma_{max} = - \frac{M_{z_1}(s_1) \cdot r}{I_{H_3}} = (\pm) \frac{F(l-s_1) r}{\frac{\pi r^4}{4}}$$

$$= (\pm) \frac{F(l-s_1) 4}{\pi r^3}$$

Comme  $s_1 \in [0, 2l]$ , le maximum est obtenu en  $s_1=0$  ou  $s_1=2l$

$$\sigma_{max} = \frac{4Fl}{\pi r^3}$$

Figure 4.18: Contraintes au point H1 pour une poutre constituée de deux segments de droite.

**La sollicitation maximale** On doit la calculer dans chacun des tronçons de poutre. Pour le tronçon AB, voir figure 4.18.

Pour le tronçon BD, voir figure 4.19.

Soit  $H_2 \in \mathcal{BD}$  avec  $\overrightarrow{BH_2} = s_2 \left( \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \right)$

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{e}_{eff} \right\}_{H_2} &= \sum_{seg+} \left\{ \vec{e}_{seg+} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -F\vec{j} \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\}_{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{matrix} -F\vec{j} \\ -F\vec{j} \cdot \overrightarrow{DH_2} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{H_2} \\ &= \left\{ \begin{matrix} -F\vec{j} \\ -F\vec{j} \cdot n(\sqrt{2}l - s_2) \left( \frac{\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} \right) \\ 0 \end{matrix} \right\}_{H_2} = \left\{ \begin{matrix} -F\vec{j} \\ F(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}) \vec{k} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{H_2} \end{aligned}$$

On passe dans le repère local pour identifier les composantes :  $\vec{n} = \left( \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \right)$  ; ... c'est dans l'autre sens dont on en a besoin

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \frac{+\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} ; \quad \vec{k} = \vec{j} \\ &= \left\{ \begin{matrix} +\frac{F}{\sqrt{2}} \vec{i} + \frac{F}{\sqrt{2}} \vec{j} \\ F(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}) \vec{j} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{H_2} \end{aligned}$$

donc : effort normal :  $N_2 = -\frac{F}{\sqrt{2}}$  (compression si  $F > 0$ )

effort tranchant  $T_{32} = \frac{F}{\sqrt{2}}$

moment fléchissant autour de l'axe  $\vec{3}$  :  $M_{32} = F(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}})$

La contrainte dans une section droite est

$$\sigma = -\frac{M_{32}(s_2)(\pm r)}{\frac{\pi r^4}{4}} + \frac{N_2(s_2)}{\pi r^2}$$

Pour  $s_2 \in [0, \sqrt{2}l]$ ,  $(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}) \in [l, 0]$ ,  $M_{32} \in [Fl, 0]$

La valeur maximale du moment fléchissant est obtenue

en  $s_2 = 0$  et est positive. la valeur maximale de la contrainte due à l'effort normal est  $\frac{-F}{\sqrt{2}\pi r^2}$

qui est négative. la contrainte due au moment fléchissant est négative ~~pour~~ pour  $y = +r$  donc

$$\sigma_{m\mathcal{BD}} = -\frac{Fl^4}{\pi r^3} - \frac{F}{\sqrt{2}\pi r^2}$$

Figure 4.19: Contraintes au point H2 pour une poutre constituée de deux segments de droite.

Pour l'aluminium, la limite d'élasticité en traction est la même que celle en compression.  
le cas le plus défavorable est  $\sigma_{mD}$

$$\begin{aligned}\sigma_{mD} &> -\sigma_{ce} \\ F \left[ -\frac{24}{\pi r^3} + \frac{1}{\sqrt{2} \pi r^2} \right] &> -\sigma_{ce} \\ F &< \sigma_{ce} \left[ \frac{\pi r^2}{4l/r + 1/\sqrt{2}} \right] \\ F &< 20 \cdot 10^6 \left[ \frac{\pi \cdot 0.002^2}{4 \cdot 0.4/0.002 + 1/\sqrt{2}} \right] \text{ [N]} \\ F &< 156 \text{ N}\end{aligned}$$

Figure 4.20: Contraintes maximale pour une poutre constituée de deux segments de droite.

On recherche alors le cas le plus défavorable pour calculer le chargement maximal, voir figure 4.20.

$$\vec{\omega}_D = \vec{\omega}_A + \int_A^B \frac{M_{3z}(s_1)}{EI_{H_3}} ds_1 \vec{3} + \int_B^D \frac{M_{3z}(s_2)}{EI_{H_3}} ds_2 \vec{3}$$

$$\vec{u}_D = \vec{u}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AD} + \int_A^B \frac{M_{3z}(s_1)}{EI_{H_3}} \vec{3} \wedge \vec{H_1D} ds_1$$

$$+ \int_B^D \frac{M_{3z}(s_2)}{EI_{H_3}} \vec{3} \wedge \vec{H_2D} ds_2 + \int_B^D \frac{N_2(s_2)}{ES} \vec{x} ds_2$$

Figure 4.21: Rotation d'un point d'une poutre constituée de deux segments de droite.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 837.

**Une rotation** Pour un chargement 100 fois inférieur au chargement limite, on peut calculer la rotation du point D avec les formules de Bresse. La démarche est présentée figure 4.21 et le calcul est fait sous *wxmaxima* ci-dessous.

```
(% i5) kill(all);Ty1(s1):=-F;mfz1(s1):=F*(s1-l);
      N2(s2):=-F/sqrt(2); Ty2(s2):=F/sqrt(2);mfz2(s2):=F*(l-s2/sqrt(2));
```

```
done (% o0)
```

```
Ty1(s1) := -F (% o1)
```

```
mfz1(s1) := F(s1 - l) (% o2)
```

```
N2(s2) := -F/sqrt(2) (% o3)
```

```
Ty2(s2) := F/sqrt(2) (% o4)
```

```
mfz2(s2) := F(l - s2/sqrt(2)) (% o5)
```

```
(% i6) Ihz:%pi*(2*r)^4/64;
```

```
pi*r^4
-----
4
(Ihz)
```

```
(% i10) omed:integrate(mfz1(s1)/(E*Ihz),s1,0,2*l)
      +integrate(mfz2(s2)/(E*Ihz),s2,0,sqrt(2)*l);
```

```
2^(3/2)*F*l^2
-----
pi*E*r^4
(omed)
```

```
(% i21) omedf:ev(omed,F=1.56,l=0.4,E=75e9,r=0.002);float(omedf);
```

```
0.2082^(3/2)
-----
pi
(omedf)
```

```
0.1872657937606781 (% o21)
```



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 836.

**Un déplacement** Pour un chargement 100 fois inférieur au chargement limite, on peut calculer le déplacement du point D avec les formules de Bresse dans chacune des directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . La démarche est présentée figures 4.22 et 4.23 et le calcul est fait sous *wxmaxima* ci-dessous.

$$\begin{aligned}
\vec{u}_D &= \vec{0} + \vec{0} \wedge \vec{AD} + \int_A^B \frac{M_{31}(s_1)}{EI_{H_3}} \vec{k} \wedge ((l-s_1)\vec{i} + l\vec{j}) ds_1 \\
&+ \int_B^D \frac{M_{32}(s_2)}{EI_{H_3}} \vec{k} \wedge \left[ \left(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right)(-\vec{i}) + \left(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right)\vec{j} \right] ds_2 \\
\vec{u}_D &= \int_B^D \frac{N_2(s_2)}{ES} \left( \vec{0} - \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}} \right) ds_2 \\
\vec{u}_D \cdot \vec{i} &= \int_A^B \frac{M_{31}}{EI_{H_3}} (-1) + \int_B^D \frac{M_{32}}{EI_3} \left(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right) (-1) ds_2 \\
&+ \int_B^D \frac{N_2}{ES} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) ds_2
\end{aligned}$$

Figure 4.22: Déplacement dans la direction  $\vec{i}$  d'un point d'une poutre constituée de deux segments de droite.

$$\begin{aligned}
\vec{u}_D \cdot \vec{j} &= \int_A^B \frac{M_{31}(s_1)}{EI_{H_3}} (l-s_1) ds_1 + \int_B^D \frac{M_{32}}{EI_{H_3}} \left(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right) (-1) ds_2 \\
&+ \int_B^D \frac{N_2}{ES} \frac{1}{\sqrt{2}} ds_2
\end{aligned}$$

Figure 4.23: Déplacement dans la direction  $\vec{j}$  d'un point d'une poutre constituée de deux segments de droite.

(% i22) S:%pi\*r^2;

$$\pi r^2 \quad (\text{S})$$

(% i23) udi:integrate(mfz1(s1)/(E\*IHz)\*(-1),s1,0,2\*l)+integrate(mfz2(s2)/(E\*Ihz)\*(l-s2/sqrt(2))\*(-1),s2,0,2\*l)+integrate(N2(s2)/(E\*S)\*(-1/sqrt(2)),s2,0,sqrt(2)\*l);

$$\frac{Fl}{\sqrt{2}\pi E r^2} + \frac{4 \left(32^{\frac{3}{2}} - 10\right) F l^3}{3\pi E r^4} \quad (\text{udi})$$

(% i25) udif:ev(udi,F=1.56,l=0.4,E=75e9,r=0.002);float(udif);

$$\frac{0.1109333333333333 \left(32^{\frac{3}{2}} - 10\right)}{\pi} + \frac{2.0810^{-6}}{\sqrt{2}\pi} \quad (\text{udif})$$

$$-0.05348602889164912 \quad (\% \text{ o25})$$

(% i26) udj:integrate(mfz1(s1)/(E\*Ihz)\*(l-s1),s1,0,2\*l)+integrate(mfz2(s2)/(E\*Ihz)\*(l-s2/sqrt(2))\*(-1),s2,0,2\*l)+integrate(N2(s2)/(E\*S)\*(1/sqrt(2)),s2,0,sqrt(2)\*l);

$$-\frac{Fl}{\sqrt{2}\pi E r^2} + \frac{4 \left(32^{\frac{3}{2}} - 10\right) F l^3}{3\pi E r^4} - \frac{8F l^3}{3\pi E r^4} \quad (\text{udj})$$

(% i30) udjf:ev(udj,F=1.56,l=0.4,E=75e9,r=0.002);float(udjf);

$$\frac{0.1109333333333333 \left(32^{\frac{3}{2}} - 10\right)}{\pi} - \frac{2.0810^{-6}}{\sqrt{2}\pi} - \frac{0.2218666666666666}{\pi} \quad (\text{udjf})$$

$$-0.1241093186352616 \quad (\% \text{ o30})$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 089.



Sur <http://umotion.univ-lemans.fr>, vous pouvez visualiser la réponse à une des questions sur cette partie. Les fichiers sont nommés 209.

## 4.10 Travail pratique : une poutre constituée de plusieurs segments.





Avant de venir pour ce travail pratique, je vous invite à regarder la vidéo <sup>248</sup> disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>.

Le compte-rendu type à trous qui vous sera fourni à l'entrée dans la salle est quasiment vide. Vous serez évalués sur votre manière de compléter ce compte-rendu, qu'en terme de compétences et objectifs pédagogiques marron et noire.

Une grille critériée vous est fournie afin que vous puissiez optimiser votre travail.