



# Mécanique et théorie des poutres droites

Jean-Michel Génevaux

## ► To cite this version:

Jean-Michel Génevaux. Mécanique et théorie des poutres droites. Licence. Licence Acoustique et Vibrations, Le Mans, France. 2020. cel-00697806v4

**HAL Id: cel-00697806**

**<https://cel.hal.science/cel-00697806v4>**

Submitted on 13 Jul 2023 (v4), last revised 15 Dec 2023 (v5)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Licence Acoustique et Vibration  
2ième année

Mécanique, Résistance des matériaux  
Statique des poutres droites

<https://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=9252>

”A quoi cela sert, la statiques des poutres ?”

.

La réponse est dans la vidéo 383, accessible via :  
<https://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=383>



Ce(tte) œuvre est mise à disposition selon les termes de  
la Licence Creative Commons Attribution - Pas  
d'Utilisation Commerciale - Partage dans les Mêmes  
Conditions 3.0 France.

Jean-Michel Génevaux, Maxime Lanoy, Rémi Mattéoli  
et les complicités des collègues et étudiants qui ont détecté  
les (trop) nombreuses fautes de grammaire et d'orthographe !

April 17, 2023



# Contents

<b>1</b>	<b>Évaluation de ce module par les étudiant-e-s en 2019-2020</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Les capacités de statique des poutres droites.</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Méthode de travail</b>	<b>13</b>
3.1	Pédagogie CRAIES . . . . .	13
3.1.1	Les phases de travail . . . . .	13
3.1.2	Conseils aux référents . . . . .	16
3.1.3	Les travaux pratiques . . . . .	16
3.2	Absence . . . . .	17
3.3	L'évaluation des compétences et objectifs pédagogiques. . . . .	17
<b>4</b>	<b>Le torseur et les caractéristiques de quelques matériaux</b>	<b>21</b>
4.1	Le torseur, un outil franco-français . . . . .	21
4.2	L'élasticité tridimensionnelle linéaire isotrope . . . . .	22
<b>5</b>	<b>De la statique du solide à la statique des poutres</b>	<b>27</b>
5.1	Équilibre d'un solide . . . . .	27
5.1.1	Principe fondamental de le statique et réactions aux liaisons. . . . .	27
5.1.2	Exemple isostatique . . . . .	28
5.1.3	lecture facultative : Liaisons parfaites normalisée - torseur des efforts transmissibles	29
5.1.4	lecture facultative : Torseurs de chargement . . . . .	32
5.2	lecture facultative : Isostaticité - hyperstaticité . . . . .	33
5.3	Torseur d'inter-effort entre deux solides dans un repère local . . . . .	37
5.4	Torseur d'inter-effort entre un solide et une poutre . . . . .	38
5.5	Torseur des efforts intérieurs . . . . .	39
5.5.1	Deux méthodes de calcul du torseur des efforts intérieurs . . . . .	41
5.5.2	Les composantes . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Statique des poutres droites isostatiques homogènes dans l'épaisseur à matériau isotrope, alias "la résis</b>	
6.1	Sollicitation simple : traction-compression . . . . .	47
6.1.1	Isoler le tronçon de poutre . . . . .	47
6.1.2	Composantes du torseur des efforts intérieurs (et pour les allergiques forces et moments au sein de la poutre)	47
6.1.3	Message aux allergiques à l'utilisation de torseur . . . . .	50
6.1.4	Loi de comportement . . . . .	51
6.1.5	Déplacement et rotation . . . . .	51
6.1.6	Lieu(x) de la contrainte maximale, limite d'élasticité. . . . .	53
6.2	Sollicitation simple : torsion . . . . .	56
6.2.1	Composantes du torseur des efforts intérieurs . . . . .	56
6.2.2	Contraintes locales dans la section droite . . . . .	57
6.2.3	Déplacement et rotation . . . . .	59
6.2.4	Correction de cisaillement . . . . .	60

6.2.5	Limite d'élasticité en torsion . . . . .	60
6.3	Travail pratique : une poutre en torsion . . . . .	61
6.4	Sollicitation simple : flexion pure . . . . .	63
6.4.1	Composantes du torseur des efforts intérieurs . . . . .	63
6.4.2	Loi de comportement . . . . .	65
6.4.3	Courbure . . . . .	67
6.4.4	Déplacement et rotation . . . . .	68
6.4.5	Chargement maximal en flexion pure. . . . .	70
6.5	Sollicitation simple : cisaillement . . . . .	71
6.5.1	Composantes du torseur des efforts intérieurs . . . . .	71
6.6	Sollicitation composée : flexion simple . . . . .	71
6.6.1	Composantes du torseur des efforts intérieurs . . . . .	72
6.6.2	Loi de comportement . . . . .	73
6.6.3	Déplacement et rotation . . . . .	73
6.6.4	Chargement maximal . . . . .	77
6.6.5	résolution par Maxima . . . . .	77
6.7	Travail pratique : une poutre en flexion . . . . .	79
6.8	Sollicitations composées : la totale ! . . . . .	82
6.8.1	Lieu(x) de la contrainte maximale . . . . .	82
6.8.2	Les déplacements et les rotations : formules de Bresse. . . . .	83
6.9	L'assemblage de poutres droites . . . . .	85
6.9.1	Le principe . . . . .	85
6.9.2	Un exemple . . . . .	85
6.10	Travail pratique : une poutre constituée de plusieurs segments assemblés. . . . .	92
<b>7</b>	<b>Mesures de votre comportement et de vos ressentis lors de séances "à son rythme".</b>	<b>93</b>

# Chapter 1

## Évaluation de ce module par les étudiant-e-s en 2019-2020

L'évaluation de cet enseignement est fait chaque année en fin de session. Cinq questions ouvertes sont posées, l'une sur la méthode CRAIES, l'autre sur les ceintures, la suivante sur les TP et la dernière sur le graphe des compétences et des objectifs pédagogiques. Les réponses détaillées et anonymes des étudiants sont accessibles via

*<http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/evamaine/evamsdpd2021.pdf>* .

Vous trouverez dans les figures 1.1, 1.2, 1.3, ?? et 1.4, les nuages de mots associés à chaque thème. Nous rappelons que dans un nuage de mots, plus le mot est gros, plus il a été cité.

Sauf pour les tp, les évaluations faites par les étudiants de 2020-2021 montrent une dégradation forte de votre ressenti de cet enseignement par rapport à l'année 2019-2020.

- Pour l'enseignement de type CRAIES, 3 modifications avaient été apportées entre ces deux années : les questions étaient posées à la maison et non oralement en début de séance ; les réponses étaient enregistrées par l'enseignant chez lui, diffusées par courriel et non faites oralement en début de séance ; les séances ont été faites en distanciel du fait des mesures sanitaires et non en présentiel.

Pour cette année 2022-2023, nous revenons donc aux phases de lecture silencieuses et questions/réponses en début de séance. Le nombre de vidéos a diminué grâce à vos évaluations de celles-ci.

- Pour l'évaluation par ceintures, aucune modification n'avait été faite entre ces deux années. Les règles de "non-dopage" sont décrites comme non respectées en 2020-2021 par un nombre important d'étudiants. Un sujet a heurté la sensibilité d'étudiants.

Pour cette année 2022-2023, nous réactivons l'évaluation par ceinture et contrôle anti-dopage.

- Pour les tp, aucune modification n'avait été faite entre ces deux années. Le reproche qui ressort est la difficulté du dernier tp. Des vidéos complémentaires explicatives vous sont mises à disposition. Le cours a été remanié avec la création d'un chapitre introductif qui mène à la compétence blanche.

- Pour le graphe des compétences et objectifs pédagogiques, aucune modification n'avait été faite entre ces deux années. Vos avis sont partagés.

Pour cette année 2021-2022, nous continuerons à le mettre à jour. L'enseignement ne se basera plus sur celui-ci, mais ceux que cela intéresse pourront le consulter.



Figure 1.1: Nuage de mots suite à l'évaluation par les étudiants de la méthode CRAIES.



Figure 1.2: Nuage de mots suite à l'évaluation par les étudiants de l'évaluation par ceintures.





Figure 1.3: Nuage de mots suite à l'évaluation par les étudiants des travaux pratiques.



Figure 1.4: Nuage de mots suite à l'évaluation par les étudiants du graphe des compétences et objectifs pédagogiques.



## Chapter 2

# Les capacités de statique des poutres droites.

1. blanche de mécanique du solide indéformable (semestre 3), 0 pts : Calculer en fonction du chargement, en un point qui coupe un solide en deux, le torseur des actions d'une partie sur l'autre.
2. jaune, 20/6 pts, antidopage "6" : déterminer si une poutre est en traction, calculer la charge maximale et le déplacement d'un point.
3. orange, 20/6 pts, antidopage "6 et "5" : déterminer si une poutre est en torsion, calculer la charge maximale et la rotation d'un point.
4. verte, 20/6 pts, antidopage "6" "5" et "4" : déterminer si une poutre est en flexion, calculer la charge maximale et le déplacement ou la rotation d'un point.
5. bleue, 20/6 pts, antidopage "6" "5" "4" et "3" : déterminer pour un assemblage de poutres droites, la charge maximale et le déplacement ou la rotation d'un point.
6. marron, 20/6 pts : Établir et mener une campagne de mesure afin de comparer des résultats expérimentaux et théoriques pour un problème de résistance des matériaux.
7. noire, 20/6 pts : Présenter dans un document écrit, en respectant les règles de l'art, les résultats d'une campagne de mesure et de comparaison à une théorie, pour un problème de résistance des matériaux.

*A quoi correspondent les couleurs blanche, jaune, etc. Cela correspond-t-il à quelque chose ?*  
La réponse est dans la vidéo 088 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

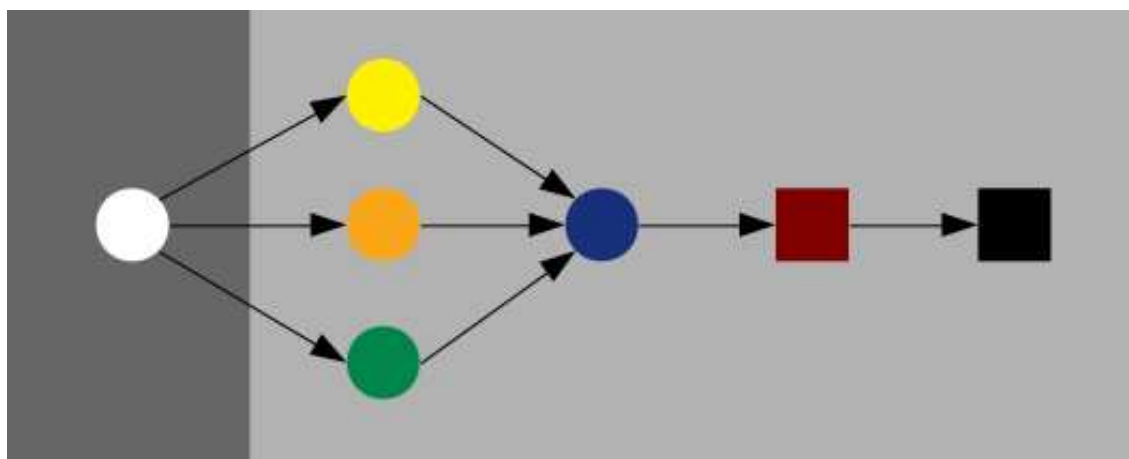


Figure 2.1: Parcours d'évaluation : chaque couleur correspond à une compétence ou un objectif pédagogique.

## Chapter 3

# Méthode de travail

*Présentation de l'école mutuelle couplée avec l'apprentissage à son rythme*

La réponse est dans la vidéo 311 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

### 3.1 Pédagogie CRAIES

Cet enseignement sera dispensé pendant les séances de CRAIES ("Coopérons à notre Rythme d'Apprentissage Individualisé Efficace et Sympathique"). Pour que vous puissiez organiser vos apprentissages, pour chacun des enseignements, un plan de travail personnel et pour l'année résume :

- les étapes de formation (brevets) (Fig. 3.1),
- les objectifs de formations qui sont chaînés (Fig. ??).

#### 3.1.1 Les phases de travail

Les séquences d'enseignement théoriques en présentiel (CRAIES) sont divisées en plusieurs phases :

- Avant la séance, vous lisez quelques pages du photocopié et visionnez les vidéos associées : vous continuez la lecture à la page où vous êtes arrêté la séance précédente. Avant la première séance, ce chapitre est à lire.
- A l'entrée de la salle, vous montrez à l'enseignant que vous avez complété les colonnes 2 à 4 du dernier tableau du photocopié. Ce tableau anonyme sera récolté en fin de la dernière séance, car la méthode pédagogique "à son rythme" est aussi utilisée dans d'autres sites universitaires et nous comparons les comportements des étudiants en fonction de leur niveau d'étude dans le cadre d'une recherche en pédagogie.
- En entrant dans la salle, vous allez vous asseoir à proximité du tableau.
- Vous lisez silencieusement le photocopié pendant 10 minutes.
- Débute alors la phase de questions/réponses : l'enseignant demande à chacune et chacun, s'il a une question. Les réponses sont enregistrées en vidéo, puis sont indexées dans le photocopié aux lieux adéquats ce qui permet de les consulter en différé. La prise d'image est assurée par un étudiant-cameraman. Un étudiant-secrétaire, note les questions dans un fichier texte pour faciliter la mise à disposition ultérieure. Pendant cette phase de question-réponse, un étudiant fait circuler une feuille d'émargement : le nombre de signature doit correspondre au nombre de présents.

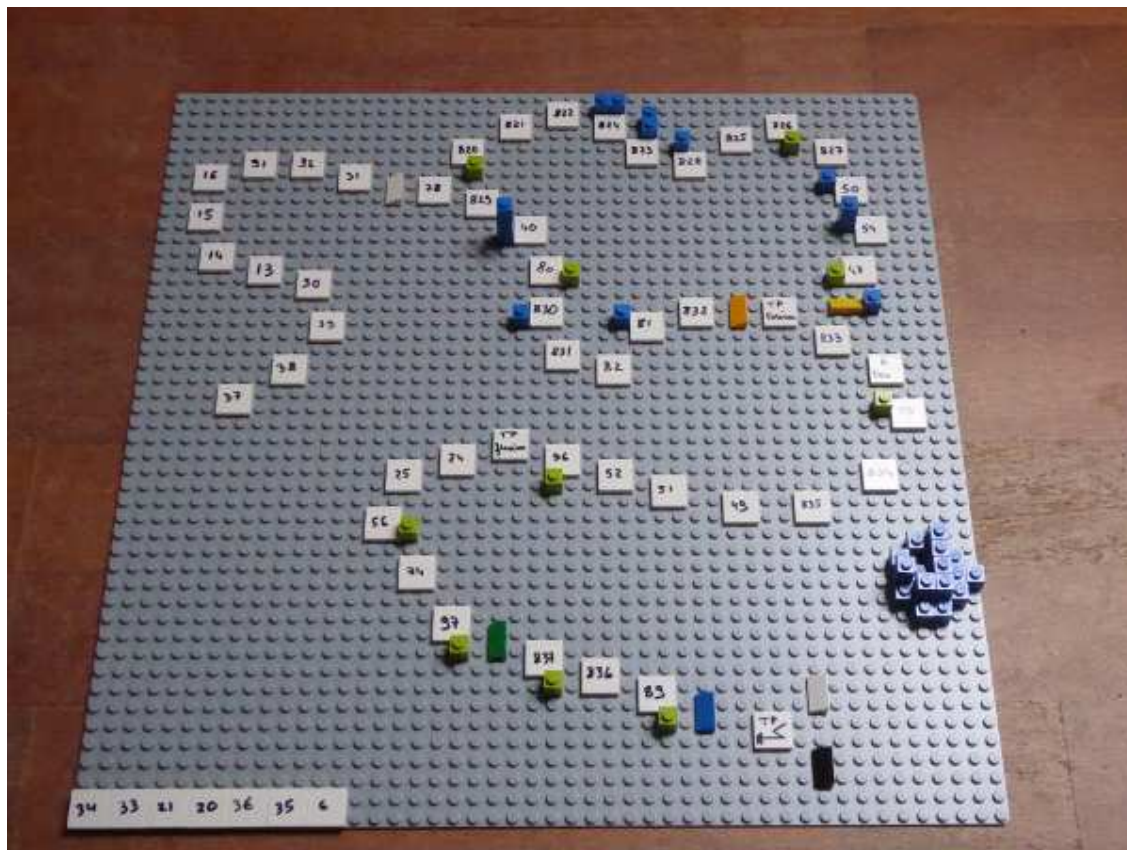


Figure 3.1: Parcours de formation : les numéros représentent les brevets, les tuiles inclinées les ceintures/COP, les briques bleues (groupe td1) et vertes (groupe td2) les positions des étudiants dans l'apprentissage.

- Deux fois, ce temps de question/réponses est remplacé par un débat scientifique d'une durée maximale de 15 minutes. L'image du jour est affichée. Il vous est posé une question à laquelle vous répondrez en 3 temps : 2 minutes de réflexion personnelle, 4 minutes de confrontation d'idées par groupe de 4, mise en commun collective sous le format : "Nous pensons que ... et nos raisons sont les suivantes ...". L'avis de l'enseignant vous est fourni à la séance suivante.
- Une phase de visualisation d'une vidéo est faite : vous tirez un numéro de vidéo, vous la regardez sur votre smartphone ou un pc avec un casque, vous la notez (de -2 à +2) sur la feuille de recueil de vos avis sur les vidéos (fin de poly).
- Une phase d'exercices (brevets) est alors faite, à votre rythme. Vous vous regroupez par 4 dans la rangée de l'amphi consacrée à cet exercice. Si vous êtes plus de 4, photographiez l'exercice avec votre smartphone et faites plusieurs groupes. Les réponses de chaque exercice sont consultable dans un fascicule présent dans la salle. La banque de brevet regroupe l'ensemble des exercices. Ils ont été écrits suite aux erreurs rencontrées les plus fréquemment dans les copies d'examen. Cette banque de brevets concerne l'ensemble des trois années de formation à l'ENSIM et certaines formations à l'UFR. Avant de vous asseoir à la table correspondant au brevet que vous tentez de faire, récupérez une brique LEGO de la couleur de votre groupe. Afin que chacun puisse se concentrer sur son travail, si vous échangez avec vos voisins, merci de le faire en chuchotant. Pour cette phase vous pouvez avoir deux rôles : apprenant ou référent.
  - Si vous êtes référent d'un brevet, votre prénom est indiqué sur le sujet de brevet pour que vos camarades puissent vous identifier. Vous les aidez en respectant les règles d'aide notées au dos de votre badge. Attendez qu'ils appellent à l'aide pour intervenir : pendant ce temps continuer de travailler (seul) sur votre brevet d'apprenant. Si vous avez une difficulté pour expliquer, venez en parler à l'enseignant qui vous donnera un "coup de pouce".
  - Si vous êtes apprenant, vous serez aidé soit par un référent, soit par l'enseignant s'il n'y a pas encore de référent. Pour un brevet que vous avez bien compris, vous pouvez en devenir le référent : votre rôle est alors d'aider les autres à l'obtenir. Vous notez votre mél sur le sujet de brevet. Vous ne pouvez être référent que d'un seul brevet (il faut en laisser pour les autres ! ...)
- Les trois dernières minutes d'une séquence sont utilisées pour compléter les colonnes 5 à 11 du dernier tableau du polycopié, et pour regrouper tout le matériel à votre disposition.
- En sortant de la salle, vous posez votre brique Lego sur le graphe de progression à proximité de la tuile comportant le numéro du brevet sur lequel vous êtes en train de travailler et vous montrez à l'enseignant que votre tableau est complété pour qu'il vous laisse sortir. Ce plateau Lego permet à l'enseignant aidé d'étudiants, de préparer la salle pour la séance suivante et de vous accompagner plus particulièrement si vous êtes derrière le peloton ou à galoper devant.

*Est-ce que vous allez faire cours ?*

La réponse est dans la vidéo 062 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Quand ferez-vous un cours magistral ?*

La réponse est dans la vidéo 249 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Comment s'abonne-t-on à la chaîne "statique des poutres" ?*

La réponse est dans la vidéo 292 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Progression d'un groupe d'étudiants dans le graphe des brevets*

La réponse est dans la vidéo 310 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Je n'ai pas fini de lire le polycopié. Est-ce grave ?*

La réponse est dans la vidéo 073 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Doit-on connaître toutes les formules du poly ?*

La réponse est dans la vidéo 060 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.



*A quelle vitesse doit-on avancer dans le polycopié, dans les exercices... ?*

La réponse est dans la vidéo 223 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Existe-t-il un polycopié pour les brevets ?*

La réponse est dans la vidéo 273 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Plusieurs séances de craies sont-elles proposées en parallèle ?*

La réponse est dans la vidéo 065 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

### 3.1.2 Conseils aux référents

Si vous êtes "référent", merci de veillez à respecter ces conseils. Si vous êtes "apprenant", merci de signaler au référent qu'il ne respecte pas ces conseils : vous l'aidez à prendre la bonne posture afin que vous appreniez le plus efficacement possible.

Quelques conseils au référent :

- Commence par demander "Tu en es où ? Qu'est ce que tu as déjà fait ? A quoi ça te fait penser ? Raconte ce que tu as compris du problème". Essaie de parler moins de 10% du temps. Cela permet de l'aider juste là où il en a besoin.
- Fais écrire l'étudiant plutôt que de le faire à sa place.
- Si tu dois faire l'exercice car l'étudiant n'écrit pas, essaie de le faire travailler sur un exercice jumeau : changer les fonctions, les conditions aux limites, les valeurs numériques... Par exemple en math, si l'étudiant doit dériver  $f(x) = 2x \cos(x)$ , lui faire dériver  $g(x) = 5x \sin(x)$ .
- Quand tu as expliqué quelque chose, demande à l'étudiant de réexpliquer ce que tu viens de faire.
- Se taire quand ils ont redémarré pour les laisser faire.

### 3.1.3 Les travaux pratiques

Les séquences d'enseignement pratique vous proposent de travailler sur 3 montages différents : *torsion*, *flexion* et *portique*. Avant de venir, vous devez regarder 2 vidéos :

- présentation du montage expérimental et de la manipulation,
- le kit de survie théorique sur ce thème.

Il ne vous sera pas demandé de compte-rendu, mais d'être prêt à répondre oralement aux objectifs pédagogiques des travaux pratiques, c'est à dire :

- la modélisation, sous forme de valeur théorique,
- les mesures, sous forme de courbes expérimentales,
- l'exploitation des mesures, sous forme de valeur expérimentale,
- la comparaison des valeurs théorique et expérimentale,
- la conclusion et les perspectives.

Les questions qui vous seront posées sont explicitées au début de chaque texte de tp. N'hésitez pas à en discuter avec l'encadrant pendant la séance de tp.

C'est lors de la séance suivante, que l'enseignant vous interrogera. La discussion prendra au maximum 15 minutes, chrono en main. Il lira une question, désignera un étudiant ou une étudiante pour la réponse. Les autres membres du trinôme doivent rester silencieux. A chaque fois que la personne interrogée préfère passer la question à une autre personne, les points associés à cette question sont divisés par deux. En cas de 2 passage de relai, les points sont divisés par 4. Nous vous invitons à préparer vos documents et réponses avant la séance, mais surtout d'être tous les 3 capables de répondre correctement aux questions, car prendre 8 minutes pour répondre à une question, implique que l'enseignant risque de ne pas avoir le temps de vous poser toutes les autres, et donc d'y avoir 0 points.

Faculté des Sciences & Techniques  
Le Mans Université

Vingt-trois euros -----

Payer contre ce chèque, non endossable, sauf au profit d'une banque ou de tout établissement admis à être endossable par la loi

à **Trésor Public** (pour remboursement des frais engagés)

Payable en France

1234567890

Nom : \_\_\_\_\_

Prénom : \_\_\_\_\_

Année : \_\_\_\_\_

Enseignement : \_\_\_\_\_

signature

23 euros

UFR Sciences et Techniques  
72000 Le Mans  
TEL. 0243833000

Figure 3.2: Chèque d'absence.

## 3.2 Absence

Il nous semble plus pertinent que l'obtention des compétences de base soit obligatoire pour justifier les 10 000 euros par an que la nation verse pour vous former grâce aux impôts que vous payez (sur le revenu, TVA, etc.) . Ne pas venir à une séance de 2h, représente donc un gaspillage de 23 euros... sauf si vous travaillez à la maison et que vous atteignez les compétences de base.

Pour concrétiser ceci, la méthode suivante est utilisée :

- en début de séance, une feuille d'émargement circule : le nombre de signatures doit correspondre au nombre de présents,
- l'enseignant détecte les étudiants qui réapparaissent après une ou des absences et leur demande de compléter un chèque de 23 euros de ufr-sciences-banque par absence (Fig. 3.2),
- le jour de l'examen, les compétences acquises par chaque étudiant sont figées,
- pour un étudiant qui a donné un ou plusieurs chèques, s'il a validé le module, l'enseignant déchire les chèques,
- pour un étudiant qui a donné un ou plusieurs chèques, s'il n'a pas validé le module, l'enseignant lui rend les chèques et l'invite à faire un vrai chèque de remboursement du montant total au Trésor Public (ou à une association de son choix...).

*Que sont les chèques de 23 euros ? ;*

La réponse est dans la vidéo 255 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Je m'étonne que vous osiez demander de l'argent à un étudiant, par un chèque de 23 euros !*

La réponse est dans la vidéo 256 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Quand on est malade, doit-on aussi payer 23 euros ?*

La réponse est dans la vidéo 257 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

## 3.3 L'évaluation des compétences et objectifs pédagogiques.

L'évaluation est faite par la validation de compétences et objectifs pédagogiques (COP) appelés aussi "capacités". Le chaînage des COP testées est indiqué figure 2.1.

La validation des COP est faite par le passage de ceintures sauf demande express de votre part, pour passer un examen.

Si vous optez pour une évaluation par ceintures, une capacité n'est pas acquise si l'une des conditions suivantes est fautive :

- vous avez détaillé la démarche,
- vous avez détaillé quelques résultats intermédiaires chiffrés (avec les unités précisées),
- vous trouvez le(s) résultat(s) (avec les unités précisées),
- toutes vos équations sont homogènes,
- les scalaires sont égaux à des scalaires,
- les vecteurs sont égaux à des vecteurs,
- les torseurs sont égaux à des torseurs,
- les tenseurs sont égaux à des tenseurs,
- votre copie de réponse à cette capacité utilise des écritures complètes, bases, points d'expression d'un torseur,
- vos résultats chiffrés sont suivis par des unités,
- si vos deux copies (rendu à la maison et surveillée) sont différentes.

Insistons : une capacité n'est pas acquise par la méthode ceintures, si la démarche est juste, mais le résultat faux (erreur de calcul lors de cette capacité, ou lors des capacités parentes). Le taux de réussite  $t(i)$  est donc soit 0% soit 100%. Vous pouvez tenter d'obtenir une ceinture lorsque vous vous sentez prêt-e à le faire. Vous ne pouvez tenter qu'une ceinture à la fois. Vous pouvez tenter une ceinture au maximum 3 fois. Si au bout de 3 tentatives, vous ne la détenez pas, vous pouvez tenter la ceinture  $n + 1$  suivante (3 fois). L'obtention de la ceinture de niveau  $n + 1$  vous attribue alors les ceintures de niveaux  $n + 1$  et  $n$ .

Le passage d'une ceinture se fait en deux phases :

- **phase continue** : Vous passez des ceintures en autonomie, à votre rythme, jusqu'au jour de l'examen. Pour ce faire,
  - vous envoyez un mél à [jmgenev@univ-lemans.fr](mailto:jmgenev@univ-lemans.fr) avec comme titre : "ufr, sdpd, blanche",
  - l'enseignant vous envoie par mél le sujet,
  - Sur votre copie (fournie), à côté de la déclaration suivante : *"Je m'engage sur l'honneur à n'évoquer avec personne le contenu du sujet de passage de cette ceinture. Cependant, dans le cas où je ne réussirais pas à l'obtenir, j'ai compris pouvoir discuter de mon travail avec les étudiants ayant acquis cette ceinture. Si l'enseignant à la preuve que je n'ai pas respecté mon engagement (j'ai admis le non-respect, je suis incapable de refaire la ceinture en mode surveillé...), un rapport de fraude est fait par l'enseignant et transmis au directeur de l'école qui transmet à la commission de discipline de l'université. L'enseignant y demandera que je ne puisse plus passer de ceintures en autonomie dans la matière concernée pour l'année universitaire en cours."*, vous écrivez "lu et approuvé" et vous signez. Cela permet à vos camarades de faire une mesure "libre et non faussée" de leurs savoirs scientifiques et non de leur "capacité de mémorisation"... ou de (risquée) recopie.
  - vous composez de façon individuelle en dehors des séances d'enseignement,
  - vous photographiez votre sujet et copie, construisez un document pdf comportant les images dans cet ordre et le déposez sur la page umtice de rendu de ceintures (voir page de garde). Mot de passe "nuit".
  - Lors de la séance suivante d'enseignement, vous jetez un dé,
    - \* si vous ne possédez pas de jeton "non dopé", si le jet de dé correspond à un nombre anti-dopage qui dépend du niveau de la ceinture,

\* si vous possédez un jeton "non dopé", si le jet de dé est "6",

alors vous recomposez immédiatement en mode surveillé en n'ayant à votre disposition que un photocopie vierge. Vous rendez votre nouvelle copie à l'enseignant.

- Si l'enseignant estime que votre erreur est minime, il peut vous proposer d'utiliser un "joker". Si vous l'utilisez, la ceinture est validée. Vous ne disposez que d'un joker par an.
- Une date, précisée sur la copie de rendu de ceinture clot l'évaluation.

*Des ceintures ? Des quoi ?* // La réponse est dans la vidéo 540 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=496>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Comment, techniquement, peut-on passer une ceinture ?* // La réponse est dans la vidéo 496 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=496>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Comment obtient-on un jeton "non dopé" ?* // La réponse est dans la vidéo 497 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=497>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Le jet de dé est un système super-hasardeux...* // La réponse est dans la vidéo 086 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=086>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Pourriez-vous nous renseigner sur l'utilisation de Wxmaxima ? Et nous préciser si on peut l'utiliser dans le cadre des ceintures.* // La réponse est dans la vidéo 306 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=306>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

*Comment récupère-t-on les ceintures échouées et corrigées ?* // La réponse est dans la vidéo 288 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr/search/?q=288>. Regarde-la, puis évalue son intérêt.

Vos validations/échecs aux capacités vous seront transmises par courriel avec le sujet suivant.

Être détenteur d'une capacité, implique qu'en tant qu'expert de celle-ci, tout comme l'enseignant, vous aidiez vos camarades à l'obtenir. Votre dialogue doit porter sur un exemple similaire proposé par le demandeur d'aide. Il ne doit pas porter sur l'exemple qu'il a à résoudre. Vous l'orientez sur les brevets afférents, en répondant à leur questions sur ces brevets, en insistant sur des points qui vous ont éventuellement fait rater cette capacité dans des tentatives précédentes. Vous ne dévoilez pas le contenu du sujet de la capacité ni les réponses.

"C'est arrivé près de chez vous" : L'exemple d'étudiants qui "travaillent à 3 pour résoudre un sujet de capacité, recopie chacun sur une feuille la réponse qu'ils ont élaborée collectivement, rendent le même jour à la même heure leur feuilles en espérant ne pas faire 6", ne respectent pas les règles. En cas de détection par l'enseignant, le passage par ceintures est arrêté pour eux et dans le reste de leur scolarité, ils feront des examens dans les modules à venir.

Les pratiques sont évaluées via les compte-rendus de travaux pratiques et fournissent un taux de réussite compris entre 0% et 100%. Une grille critériée vous sera donnée avant les TP, pour que vous optimisiez votre travail.



## Chapter 4

# Le torseur et les caractéristiques de quelques matériaux

Merci de ne pas lire ce chapitre et passer au chapitre suivant. En effet, ce ne sont que des rappels que tu pourras consulter si d'aventure, tu as du mal avec les concepts.

### 4.1 Le torseur, un outil franco-français

Si vous êtes allergique à l'utilisation de torseurs, malgré leur efficacité en mécanique générale, vous pouvez ne pas les utiliser dans ce cours. Dans ce cas, vous pouvez continuer la lecture **en portant une attention particulière à ce qui est écrit en rouge, et qui vous est tout particulièrement dédié. Vous veillerez toujours à écrire deux grandeurs : rotation et déplacement, ou force et moment. Vous préciserez pour le déplacement de quel point vous parlez et par rapport à quel repère, pour le moment en quel point vous le calculez et par rapport à quel repère.**

Si les anglo-saxons manient les mêmes grandeurs

- force et moment pour une action extérieure,
- vitesse de rotation et vitesse de translation pour décrire la cinématique d'un solide,
- la masse multipliée par l'accélération de translation et le moment dynamique,

ils n'ont pas comme usage de regrouper ces grandeurs dans un seul et même objet que nous appellerons *torseur*.

Un torseur  $\tau$  est un regroupement entre deux grandeurs vectorielles exprimé en un point  $A$ . Si l'on souhaite changer de point où ce torseur est exprimé :

- si  $\vec{a}$  est un vecteur et  $\vec{b}$  est un pseudo vecteur exprimés en un point  $A$  (cas des torseur d'inter-effort, torseur dynamique)

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{b}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{b}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{b}_A + \vec{a} \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B \quad (4.1)$$

- Si  $\vec{a}$  est un pseudo-vecteur et  $\vec{b}$  est un vecteur exprimés en un point  $A$  (torseur de position, torseur de déplacement, torseur cinématique)

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{b}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{b}_B \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{a} \\ \vec{b}_A + \vec{a} \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B \quad (4.2)$$

*Qu'est-ce que le moment d'une force ?*

La réponse est dans la vidéo 241 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Un torseur a une résultante et un moment... comment les utiliser ?*

La réponse est dans la vidéo 250 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*C'est quoi un pseudo-vecteur ?*

La réponse est dans la vidéo 251 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Parfois un torseur linéique est appliqué en tout point P d'abscisse  $s$  d'un tronçon de longueur  $ds$  d'une poutre de longueur  $l$  entre les points A et B. Il sera noté dans ce cas

$$\{\tau\} = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}(s)ds \\ \check{c}(s)ds \end{array} \right\}_P = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}(s)ds \\ \check{c}(s)ds + \vec{p}(s)ds \wedge \vec{PC} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \int_A^B \vec{p}(s)ds \\ \int_A^B (\check{c}(s) + \vec{p}(s) \wedge \vec{PC})ds \end{array} \right\}_C \quad (4.3)$$

Attention dans la dernière égalité ci-dessus d'avoir exprimé  $\vec{p}$  et  $\check{c}$  dans une base fixe qui ne dépend pas de l'abscisse curviligne.

*Comment calculer la somme de charges réparties ?*

La réponse est dans la vidéo 252 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Pour les allergiques : Si vous calculez le moment d'une force en un point B, alors que la force et un moment sont appliqués en un point A, il vous faudra écrire :  $\check{M}_B = \check{M}_A + \vec{F} \wedge \vec{AB}$ . De même si vous calculez un déplacement en un point B dû à un déplacement et une rotation en un point A, vous écrirez :  $\vec{u}_B = \vec{u}_A + \check{\omega} \wedge \vec{AB}$ .

- **Erreur classique :** Il ne faut pas oublier de préciser, pour tout torseur, en quel point il est exprimé.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 002 033 et 031.

## 4.2 L'élasticité tridimensionnelle linéaire isotrope

L'objectif de ce cours n'est pas de résoudre les problèmes appliqués à des solides tridimensionnels, aussi seront simplement rappelés ici pour information, les équations nécessaires à la résolution de ceux-ci.

Dans le cas d'un solide déformable, il nous faut définir la *loi de comportement* qui relie les tenseurs des déformations au tenseur des contraintes dans le cas orthotrope. Nous appellerons :

- $E$  le module de Young du matériau (en Pa),
- $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau (sans unité),
- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  le module de Coulomb du matériau (en Pa),

*Qu'est ce qu'un matériau orthotrope ?*

La réponse est dans la vidéo 244 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Que représente le module de Coulomb noté "G" ?*

La réponse est dans la vidéo 018 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

On admettra que

$$\bar{\epsilon} = \frac{1+\nu}{E} \bar{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\bar{\sigma}) \bar{I}_d, \quad (4.4)$$

ou

$$\bar{\sigma} = 2\mu \bar{\epsilon} + \lambda \text{trace}(\bar{\epsilon}) \bar{I}_d, \quad (4.5)$$

avec  $\sigma$  le tenseur des contraintes et  $\epsilon$  le tenseur des déformations.

*Que signifient les 2 barres au dessus du terme epsilon ?*

La réponse est dans la vidéo 253 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Qu'est-ce qu'un tenseur ?*

La réponse est dans la vidéo 058 et 074 disponibles sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-les.

*Qu'est ce que la trace d'un tenseur ?*

La réponse est dans la vidéo 053 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Comment différenciez-vous un tenseur et une matrice ?*

La réponse est dans la vidéo 258 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Que représente un terme hors diagonale dans la matrice des contraintes ?*

La réponse est dans la vidéo 294 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Ces deux équations étant équivalentes, il existe des relations entre module de Young et coefficients de Lamé :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G, \quad (4.6)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (4.7)$$

matériau	Mod. de Young 10 <sup>9</sup> Pa	Coeff. de Poisson	lim. élas. trac. 10 <sup>6</sup> Pa	lim. élast. compr. lim. élas. traction	masse vol. kg/m <sup>3</sup>
acier	210	0.285	240	1	7800
aluminium AU4G	75	0.33	80	1	2800
béton	14 à 21	0.3	30	11	1900
bronze	100	0.31	24	3	8400
cuivre	100	0.33	18	1.3	8900
fonte	100	0.29	18 à 25	3.3	7100
laiton	92	0.33	20	1.4	7300
marbre	25	0.3	50	15	2800
plexiglass	2.9	0.4	8	1.2	1800
titane	100	0.34	20 à 47d	1	4510
verre	60	0.2 à 0.3	3 à 8	10	2530

Poser un problème d'élasticité revient à définir des conditions aux limites en déplacement et en contrainte sur la surface de ce solide, d'écrire la relation entre déplacements et déformations, écrire l'équilibre (ou le PFD) sur un élément de volume. Il reste alors à chercher une solution à ce système d'équations présenté tableau 4.1. Pour la lecture de ce tableau, on rappellera simplement que en coordonnées cartésiennes,

- le laplacien d'une fonction  $f(x, y, z)$  est  $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ,
- la matrice identité (des 1 sur la diagonale des 0 ailleurs) est notée  $\bar{I}_d$ ,
- le gradient d'un scalaire  $f$  est  $\vec{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{z}$ ,
- la trace d'un tenseur est la somme des termes sur sa diagonale.



	déplacements	déformations	contraintes
	$\vec{u}$	$\vec{\bar{\epsilon}}$	$\vec{\bar{\sigma}}$
condition aux limites en déplacement	$\vec{u} = \vec{u}_d$ sur $\Gamma_u$		
passage déplacements	+ éq. compatibilité $\epsilon_{ik,jl} - \epsilon_{kj,il} =$ $\epsilon_{il,jk} - \epsilon_{lj,ik}$ pour $i \neq j$ et $l \neq k$	$\vec{\bar{\epsilon}} = 1/2 \left( \text{grad } \vec{u} + {}^T \text{grad } \vec{u} \right)$	+ éq. compatibilité (Beltrami) $(1 + \nu) \Delta \sigma_{ij} + \frac{\partial^2 (\text{trace } \vec{\bar{\sigma}})}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ si $\text{grad } f = 0$
déformations			
loi de comportement		$\vec{\bar{\epsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \vec{\bar{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \text{trace}(\vec{\bar{\sigma}}) \vec{I}_d$	$\vec{\bar{\sigma}} = 2\mu \vec{\bar{\epsilon}} + \lambda \text{trace}(\vec{\bar{\epsilon}}) \vec{I}_d$
équations d'équilibre (statique)	éq. de Navier: $(\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div } \vec{u})$ $+ \mu \text{div}(\text{grad } \vec{u}) + \rho \vec{u} = 0$		$\text{div } \vec{\bar{\sigma}} + \rho \vec{f} = 0$ $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + f_x = 0$ $\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + f_y = 0$ $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$
condition aux limites en contraintes			$\vec{T}(P, \vec{n}) = \vec{\bar{\sigma}} \vec{n} = \vec{F}_d$ sur $\Gamma_f$
passage contrainte torseur			$N = \int_S \sigma_{xx} dS$ $T_y = \int_S \sigma_{xy} dS$ $T_z = \int_S \sigma_{xz} dS$ $M_x = \int_S \sigma_{\theta x} r dS$ $M_{fy} = \int_S \sigma_{xx} z dS$ $M_{fz} = - \int_S \sigma_{xx} z dS$

Table 4.1 : Equations de la mécanique des solides déformables dans le cas d'une modélisation tridimensionnelle

*Pouvez-vous faire un schéma des déformations de cisaillement ?*

La réponse est dans la vidéo 061 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Que représentent les équations de compatibilité ?*

La réponse est dans la vidéo 015 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Que représentent les équations de Beltrami ?*

La réponse est dans la vidéo 016 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Pour la déformation d'un solide, vous avez parlé de cisaillement, mais pas de torsion et de rotation.*

*Pourquoi ?*

La réponse est dans la vidéo 254 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

.

Formation à la compétence blanche de mécanique du solide indéformable.

## Chapter 5

# De la statique du solide à la statique des poutres

Uniquement pour les étudiantes et étudiants qui ne sont pas détentrices ou détenteurs de la capacité blanche évaluée lors de la première question du second exercice de l'examen de Dynamique de décembre 2022 proposé par Catherine Potel, merci de commencer la lecture du cours à ce chapitre et de ne revenir au chapitre précédent qu'en cas de difficultés.

### 5.1 Équilibre d'un solide

#### 5.1.1 Principe fondamental de la statique et réactions aux liaisons.

L'équilibre d'un solide  $S_1$  dans un repère galiléen est

$$\sum \{\tau\} = \{0\}, \quad (5.1)$$

Les torseurs  $\{\tau\}$  sont ceux

- de chargement : des forces et/ou couples appliqués en des points précis, ou des chargement répartis sur des lignes ou des surfaces (pression par exemple) ou à distance (pesanteur, champs magnétique...),
- de réaction aux liaisons entre le solide et le monde extérieur.

En général, les chargements sont des données du problème, les réactions aux liaisons sont des inconnues. Les liaisons tridimensionnelles sont normalisées : à chaque liaison, et donc mouvement possible entre deux solides, est associé un torseur de liaison qui a plusieurs composantes, en force et en couples, qui, à part celles qui sont nulles, sont des inconnues.

Résoudre un problème de statique des poutres permet de rechercher les inconnues aux liaisons.

- Si toutes les inconnues aux liaisons sont déterminables en fonction des chargements, le problème est isostatique.
- Si une ou plusieurs inconnues aux liaisons ne sont pas déterminables en fonction des chargements car il reste plus d'inconnues que d'équations indépendantes, le problème est hyperstatique.
- Si sur une équation, il manque des inconnues et la somme n'est pas égale à 0, l'équilibre n'est pas vérifié, le problème est hypostatique.

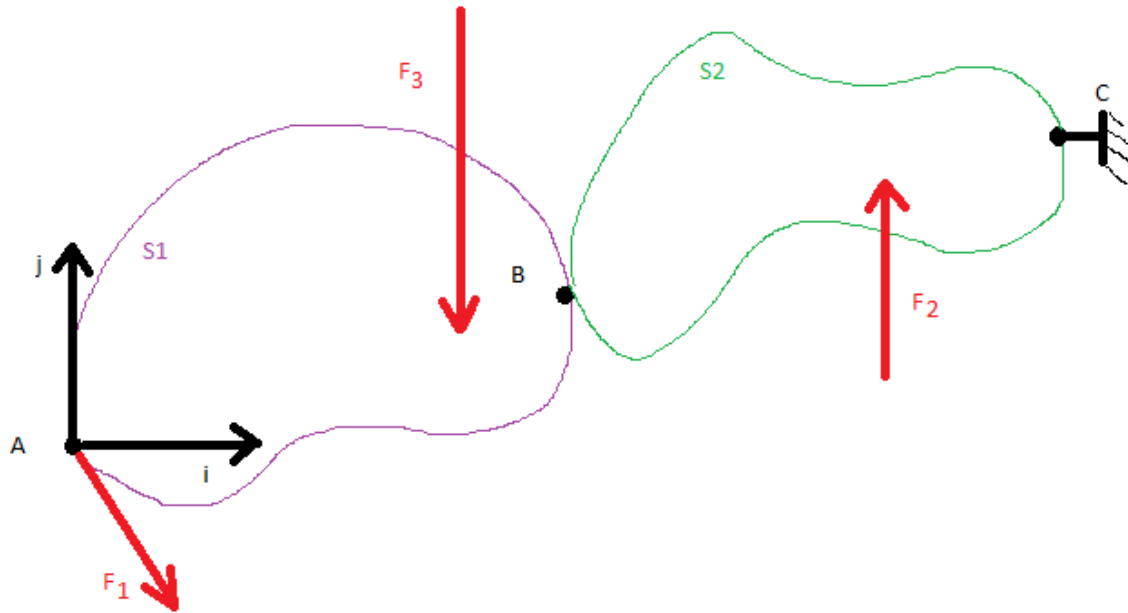


Figure 5.1: Deux solides en contact, reliés au monde extérieur par un encastrement et chargés.

*Qu'est-ce qu'un système isostatique ?*

La réponse est dans la vidéo 239 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Je n'ai pas compris comment on détermine le degré d'hyperstatisme ?*

La réponse est dans la vidéo 033 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Comment compte-t-on le nombre d'inconnues hyperstatique ?*

La réponse est dans la vidéo 034 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

### 5.1.2 Exemple isostatique

Soient deux solides (Fig. 5.1) soudés entre eux au point B liés par un encastrement en C au monde extérieur et subissant trois forces ponctuelles connues.

**Si l'on souhaite calculer les réactions à la liaison encastrement**, on isole l'ensemble S1 et S2. Le principe fondamental de la statique donne, si l'on fait l'hypothèse que le problème est dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ ,

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{1i}\vec{i} - F_{1j}\vec{j} \\ + 0\vec{k} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} F_{2j}\vec{j} \\ + 0\vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} -F_{3j}\vec{j} \\ + 0\vec{k} \end{array} \right\}_E + \left\{ \begin{array}{c} R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ + C_1\vec{k} \end{array} \right\}_C = \{0\}. \quad (5.2)$$

*Equation 5.2 : notation d'un moment d'un torseur ?*

La réponse est dans la vidéo 500 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la et évalue son intérêt à la dernière page de ce photocopié.

On exprime tous ces torseurs en un même point, par exemple C,

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{1i}\vec{i} - F_{1j}\vec{j} \\ (F_{1i}\vec{i} - F_{1j}\vec{j}) \wedge \vec{AC} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} F_{2j}\vec{j} \\ F_{2j}\vec{j} \wedge \vec{DC} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -F_{3j}\vec{j} \\ -F_{3j}\vec{j} \wedge \vec{EC} \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ +C_1\vec{k} \end{array} \right\}_C = \{0\}. \quad (5.3)$$

L'écriture des deux équations de résultantes sur  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et de l'équation de moment autour de l'axe  $C\vec{k}$  nous permet de trouver les trois inconnues  $R_1$ ,  $R_2$  et  $C_1$ .



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevet 179 .

Si l'on souhaite calculer les actions de S2 sur S1 au point B, on isole l'ensemble S1.

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{1i}\vec{i} - F_{1j}\vec{j} \\ +0\vec{k} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} -F_{3j}\vec{j} \\ +0\vec{k} \end{array} \right\}_E + \left\{ \begin{array}{c} R_3\vec{i} + R_4\vec{j} \\ +C_2\vec{k} \end{array} \right\}_B = \{0\}. \quad (5.4)$$

On exprime tous ces torseurs en un même point, évidemment B,

$$\left\{ \begin{array}{c} F_{1i}\vec{i} - F_{1j}\vec{j} \\ (F_{1i}\vec{i} - F_{1j}\vec{j}) \wedge \vec{AB} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} -F_{3j}\vec{j} \\ -F_{3j}\vec{j} \wedge \vec{EB} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} R_3\vec{i} + R_4\vec{j} \\ +C_2\vec{k} \end{array} \right\}_B = \{0\}. \quad (5.5)$$

L'écriture des deux équations de résultantes sur  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  et de l'équation de moment autour de l'axe  $B\vec{k}$ ,

$$F_{1i} + R_3 = 0, \quad (5.6)$$

$$-F_{1j} - F_{3j} + R_4 = 0, \quad (5.7)$$

$$F_{1i}a_2 + F_{1j}a_1 - F_{3j}b_1 + C_2 = 0, \quad (5.8)$$

avec  $\vec{AB} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$  et  $\vec{EB} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ , nous permet de trouver les trois inconnues  $R_3$ ,  $R_4$  et  $C_2$ . Les 3 inconnues à la liaison en B étant trouvées en fonction des chargements supposés connus, ce problème est dit isostatique.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevet 181 .

### 5.1.3 lecture facultative : Liaisons parfaites normalisée - torseur des efforts transmissibles

Merci de ne lire cette section que si vous avez eu du mal à faire les brevets 179 et 181 précédents.

Dans ce cours, la résultante du torseur des efforts transmissibles sera notée  $\vec{R}$ , le moment, qui est un pseudo-vecteur, sera noté  $\vec{M}$ .

*Qu'est-ce que le moment d'une force ?*

La réponse est dans la vidéo 241 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Un torseur a une résultante et un moment... comment les utiliser ?*

La réponse est dans la vidéo 250 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*C'est quoi un pseudo-vecteur ?*

La réponse est dans la vidéo 251 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Pourquoi parle-t-on de pseudo-vecteur, pour l'un des termes du torseur ?*

La réponse est dans la vidéo 002 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Les couples sont représentés par des pseudo-vecteurs car ils n'obéissent pas aux mêmes règles en cas de plan de symétrie. La figure est peu claire pour le comprendre.*

La réponse est dans la vidéo 019 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

La liaison étant considérée parfaite, la puissance développée dans cette liaison doit être nulle quels que soient les déplacements et rotations éventuels possibles. Ceci implique que le travail d'une liaison soit nul. Il est calculé par le *comoment* des deux vecteurs :

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{\omega} \\ \vec{u}_A \end{array} \right\}_A \otimes \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A = 0, \quad (5.9)$$

qui se développe en

$$\vec{\omega} \cdot \vec{M}_A + \vec{u}_A \cdot \vec{R} = 0. \quad (5.10)$$

Ci-dessous, sont donnés les torseurs d'efforts transmissibles. On peut les retrouver à partir des formules ci-dessus, en écrivant pour la liaison choisie le torseur cinématique associé (mouvements de translation et de rotation autorisés par la liaison), puis choisir un torseur d'inter-effort qui a a priori toutes les composantes en résultante et en moment, et écrire que le comoment est nul quelle que soit l'amplitude des mouvements possibles.

*Comment trouve-t-on les termes non nuls des liaisons d'inter-effort ?*

La réponse est dans la vidéo 222 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Que signifie le fait que la puissance développée est nulle pour une liaison parfaite ?*

La réponse est dans la vidéo 091 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Qu'est-ce que le principe des travaux virtuels ?*

La réponse est dans la vidéo 238 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Les liaisons associées à un problème tridimensionnel sont normalisées. La symbolique est donc la même que celle que vous utilisez pendant la formation de Technologie-Mécanique. Utilisez les dessins associés !

- liaison tridimensionnelle encastrement :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \vec{i} + C_j \vec{j} + C_k \vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle pivot d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_j \vec{j} + C_k \vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle glissière d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \vec{i} + C_j \vec{j} + C_k \vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle hélicoïdale d'axe  $A\vec{i}$  de pas  $p$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{2\pi C_i}{p} \vec{i} + R_j \vec{j} + R_k \vec{k} \\ C_i \vec{i} + C_j \vec{j} + C_k \vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,



Figure 5.2: La symbolique des liaisons 2d utilisée dans ce cours (non normalisée) de gauche à droite : encastrement 2d, appui simple 2d, appui sur rouleau 2d, glissière 2d

- liaison tridimensionnelle pivot glissant d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ C_j\vec{j} + C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle sphérique à doigt d'axe  $A\vec{i}$  et  $A\vec{j}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle sphérique en A :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle appui plan de normale  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} \\ C_j\vec{j} + C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle linéaire rectiligne de normale  $A\vec{j}$  de direction  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j\vec{j} \\ C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle linéaire annulaire d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j\vec{j} + R_k\vec{k} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison tridimensionnelle ponctuelle d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ .

Les liaisons associées à un problème bidimensionnel ne sont pas normalisées. Faites attention à la signification de chaque symbole en fonction de l'ouvrage. Pour notre part, la symbolique présentée dans la figure 5.2 sera utilisée. Pour un problème dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$  :

- liaison bidimensionnelle encastrement :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} \\ C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle appui simple :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_i\vec{i} + R_j\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle appui sur rouleaux de normale  $A\vec{j}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j\vec{j} \\ 0\vec{k} \end{array} \right\}_A$ ,
- liaison bidimensionnelle glissière d'axe  $A\vec{i}$  :  $\{\tau\}_A = \left\{ \begin{array}{c} R_j\vec{j} \\ C_k\vec{k} \end{array} \right\}_A$ .

*Les torseurs sont écrits en certains points. A quel moment doit-on effectuer le changement de point et comment le choisir ?*

La réponse est dans la vidéo 221 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.



• **Erreur classique :** Il ne faut pas, lorsque le problème est bidimensionnel, utiliser les liaisons tridimensionnelles (et inversement).

• **Erreur classique :** Lorsque 2 poutres (ou plus) de directions différentes se raccordent en un point B, il ne faut pas rajouter une liaison encastrement entre ce point B et le référentiel Galiléen : le point B peut se déplacer, tourner... et toutes les poutres aboutissant à ce point B se déplacent et tournent au point B de la même valeur.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 031, 037 et 038. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur le discord.

#### 5.1.4 lecture facultative : Torseurs de chargement

Merci de ne lire cette section que si vous avez eu du mal à faire les brevets 179 et 181 précédents.

Dans ce cours, la résultante sera notée  $\vec{F}$ , le moment sera noté  $\check{C}$ . Les différents torseurs de chargements sont :

- force concentrée au point A de direction  $\vec{i}$

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \check{0} \end{array} \right\}_A, \quad (5.11)$$

- couple concentré au point A de direction  $\vec{i}$

$$\{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \check{C} \end{array} \right\}_A, \quad (5.12)$$

- densité linéique de force  $p\vec{i}$  sur un segment de longueur  $ds$  au point P

$$\{d\tau_3\} = \left\{ \begin{array}{c} p\vec{i}ds \\ \check{0} \end{array} \right\}_P, \quad (5.13)$$

- densité linéique de couple  $c\check{i}$  sur un segment de longueur  $ds$  au point P

$$\{d\tau_4\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ c\check{i}ds \end{array} \right\}_P, \quad (5.14)$$

- torseur équivalent exprimé au point C, d'un chargement linéique sur un segment AB :

$$\{\tau_5\} = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}ds \\ \check{c}ds \end{array} \right\}_P = \int_A^B \left\{ \begin{array}{c} \vec{p}ds \\ \check{c}ds + \vec{p}ds \wedge \vec{PC} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \int_A^B \vec{p}ds \\ \int_A^B (\check{c} + \vec{p} \wedge \vec{PC})ds \end{array} \right\}_C. \quad (5.15)$$

Attention dans la dernière égalité ci-dessus d'avoir exprimé  $\vec{p}$  et  $\check{c}$  dans une base fixe qui ne dépend pas de l'abscisse curviligne.

*Qu'est ce qu'un chargement linéique ?*

La réponse est dans la vidéo 513 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la et note-la.

*Comment calculer la somme de charges réparties ?*

La réponse est dans la vidéo 252 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la et note-la.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 039 et 090. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur le discord.

## 5.2 lecture facultative : Isostaticité - hyperstaticité

Merci de ne lire cette section que si vous avez eu du mal à faire les brevets 179 et 181 précédents.

Avant de rechercher les efforts intérieurs à une poutre, il est parfois nécessaire de calculer les réactions qui transitent par les liaisons qui maintiennent cette poutre en contact avec les autres solides voisins.

**démarche** La procédure suivante est à suivre

1. Isolement du solide. Pour ce faire :
  - vous définissez le solide ou l'ensemble de solides que vous souhaitez isoler (pour nous ce sera la poutre considérée),
  - par la pensée, vous entourez ce domaine isolé par une fine peau,
  - à chaque endroit où cette fine peau intersecte une liaison, ou un chargement, un torseur doit être écrit
2. Bilan des actions. En chaque point où doit être écrit un torseur, vous écrivez : le point, le type de liaison (éventuellement précisez de quel axe), le torseur (d'effort transmissible ou de chargement). Vous rajoutez à cette liste les torseurs de chargement à distance (pesanteur, forces électromagnétiques, ...)
3. Principe fondamental de la statique. Si le domaine isolé est en équilibre, la somme de ces torseurs est nulle. En présence d'un chargement linéique ou surfacique, l'écriture de l'équilibre doit faire apparaître l'intégration de ce torseur sur le domaine d'intégration (intégrale simple ou double).
4. Écriture du système d'équations. Dans le cas d'un problème tridimensionnel, l'équilibre se traduit par l'écriture de 6 équations (trois de résultante, trois de moment). Dans le cas d'un problème bidimensionnel, l'équilibre se traduit par l'écriture de 3 équations (deux de résultante, une de moment autour d'un axe perpendiculaire au plan du problème).
5. Détermination du nombre d'inconnues hyperstatiques. Attention, **le calcul (nombre d'inconnues - nombre d'équations = degré d'hyperstatisme) est faux !** En effet, tout dépend comment les inconnues sont positionnées dans les équations. La méthode est la suivante :
  - Vous entourez en rouge les chargements. Ce sont les données du problème.
  - Parmi les réactions aux liaisons (les inconnues), vous entourez en bleu celles qui peuvent être déterminée en fonction des chargements.

- Si toutes les inconnues sont déterminées : le système est dit isostatique.
  - Si toutes les inconnues ne peuvent pas être déterminées (deux inconnues sur une même équation, et qui n'apparaissent pas ailleurs par exemple), le système est hyperstatique vis-à-vis de ce degré de liberté. Vous choisissez l'une de ces inconnues que nous appellerons *inconnue hyperstatique*, vous l'encadrez en vert, et vous la supposez connue (au même titre que les chargements en rouge) pour recherchez toutes les inconnues qui peuvent de ce fait être maintenant déterminées (vous les entourez en bleu). Vous pouvez être amené à choisir plusieurs inconnues hyperstatiques.
  - **Le degré d'hyperstatisme est le nombre minimal d'inconnues (entourées en vert) qui ont dues être choisies comme hyperstatiques.**
6. Vous écrivez l'expression de chaque inconnue déterminée (en bleu), en fonction du chargement (en rouge) et des inconnues hyperstatiques (en vert). Dans la suite du problème, chaque fois qu'une inconnue bleu apparaît, elle sera remplacée par son expression rouge et verte.

*le calcul du "nombre d'inconnus - nombre d'équations = degré d'hyperstatisme" est faux, pourquoi? Un exemple?*

La réponse est dans la vidéo 267 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Que veut dire "hyperstatique" ?*

La réponse est dans la vidéo 499 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

**Exemples** L'exemple de détermination du degré d'hyperstatisme d'un système tridimensionnel est présenté figure 5.3.

L'exemple de détermination du degré d'hyperstatisme d'un système bidimensionnel est présenté figure 5.4. On remarquera que l'équilibre est écrit au point  $D$ , mais qu'il aurait pu être écrit en un autre point, les équations qui auraient alors été obtenues seraient une combinaison linéaire des équations présentées dans l'exemple. L'inconnue hyperstatique choisie est l'inconnue  $R_2$ . Il aurait été possible de choisir  $R_3$  ou  $C_2$ . Quelque soit ce choix, le nombre d'inconnues hyperstatique reste de 1.

*Quelle conséquence a le choix d'une inconnue hyperstatique ?*

La réponse est dans la vidéo 237 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Lorsque l'on choisi une inconnue hyperstatique, on la considère connue... mais alors, comment peut-on la déterminer ?*

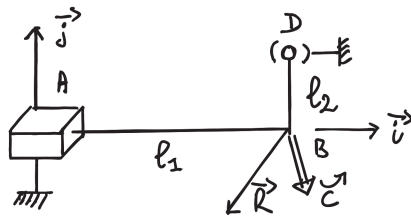
La réponse est dans la vidéo 218 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Comment identifie-t-on une force dans une certaine direction, lorsque l'on choisi une inconnue hyperstatique ?*

La réponse est dans la vidéo 220 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

**Système isostatique associé** On appelle système isostatique associé, le système identique géométriquement, mais dont les liaisons aux points où des inconnues hyperstatiques ont été choisies, doivent être modifiées :

1. si l'inconnue hyperstatique est une force dans la direction  $\vec{i}$ , le degré de liberté associé, la translation dans la direction  $\vec{i}$ , est libérée. La liaison est donc remplacée par la liaison qui bloque les mêmes degrés de liberté sauf ce degré de liberté. Par exemple, si le problème est tridimensionnel, une liaison encastrement, sera transformée en une liaison glissière d'axe  $\vec{i}$ . Si le problème dans le plan  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ , une liaison appuis simple sera remplacée par une liaison appuis sur rouleau de normale  $\vec{j}$ .
2. si l'inconnue hyperstatique est un couple dans la direction  $\vec{i}$ , le degré de liberté associé, la rotation dans la direction  $\vec{i}$ , est libérée. La liaison est donc remplacée par la liaison qui bloque les mêmes



— Données  
 ○ déterminable  
 ( ) déterminée  
 □ inconnue hyperstatique

Bilan des actions

+ liaison glissière 3D d'axe  $A\vec{i}$   $\left\{ \mathcal{L}_1 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R_{11}\vec{j} + R_{12}\vec{k} \\ C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k} \end{array} \right\}_A$

+ chargement en B (données du pb)  $\left\{ \mathcal{L}_2 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} \\ \vec{C} \end{array} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{l} F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k} \\ C_4\vec{i} + C_5\vec{j} + C_6\vec{k} \end{array} \right\}_B$

+ liaison sphérique en D  $\left\{ \mathcal{L}_3 \right\} = \left\{ \begin{array}{l} R_3\vec{i} + R_4\vec{j} + R_5\vec{k} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D$

Equilibre

La somme des torseurs doit être nulle

$$\sum \left\{ \mathcal{L} \right\} = \left\{ \vec{0} \right\}$$

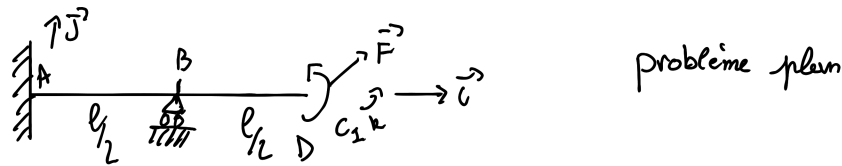
$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11}\vec{j} + R_{12}\vec{k} \\ C_1\vec{i} + C_2\vec{j} + C_3\vec{k} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{l} F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k} \\ C_4\vec{i} + C_5\vec{j} + C_6\vec{k} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{l} R_3\vec{i} + R_4\vec{j} + R_5\vec{k} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_D = \left\{ \vec{0} \right\}$$

avec  $\vec{AB} = l_1\vec{i}$   
 $\vec{DB} = -l_2\vec{j}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{R_3} = -F_1 \\ \boxed{R_4} + \boxed{R_5} = -F_2 \\ \boxed{R_2} + \boxed{R_5} = -F_3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \boxed{C_1} + l_2 \boxed{R_5} = -C_4 \\ \boxed{C_2} + \boxed{R_3} l_1 = -C_5 \\ \boxed{C_3} - l_1 \boxed{R_1} - l_2 \boxed{R_3} = -C_6 \end{array} \right. \Rightarrow \text{hyperstatique de degré 2}$$

hyperstatique en translation dans la direction  $\vec{j}$  et dans la direction  $\vec{k}$

Figure 5.3: Détermination du degré d'hyperstatisme pour un système 3D. (Numérisation fournie par Nicolas Pajusco. Merci à lui.)



Bilan des actions

$$+ \text{chargement (donné)} \quad \{ \mathcal{C}_1 \} = \left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{array} \right\}_D$$

$$+ \text{liaison encastrement 2D} \quad \{ \mathcal{C}_2 \} = \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ c_2 \vec{k} \end{array} \right\}_A$$

$$+ \text{liaison appui sur roulement} \quad \{ \mathcal{C}_3 \} = \left\{ \begin{array}{c} R_3 \vec{j} \\ 0 \vec{k} \end{array} \right\}_B$$

Equilibre  $\Sigma \{ \mathcal{C} \} = \{ 0 \}$

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ c_2 \vec{k} + (R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j}) \wedge \overrightarrow{AD} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_3 \vec{j} \\ 0 \vec{k} + R_3 \vec{j} \wedge \overrightarrow{BD} \end{array} \right\}_D = \{ 0 \}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} F_1 \vec{i} + F_2 \vec{j} \\ c_1 \vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{i} + R_2 \vec{j} \\ (c_2 - R_2 l) \vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_3 \vec{j} \\ -R_3 \frac{l}{2} \vec{k} \end{array} \right\}_D = \{ 0 \}$$

D'où les équations :

$$\begin{array}{l} \boxed{R_1} = -F_1 \\ \boxed{R_2} + \boxed{R_3} = -F_2 \\ \boxed{C_2} - \boxed{R_2} l - \boxed{R_3} \frac{l}{2} = -C_1 \end{array}$$

- données

○ déterminable

⌊ déterminée

□ inconnue hyperstatique

Le système est hyperstatique d'ordre 1.

en translation dans la direction  $\vec{j}$

Figure 5.4: Détermination du degré d'hyperstatisme pour un système 2D. (Numérisation fournie par Nicolas Pajusco. Merci à lui.)

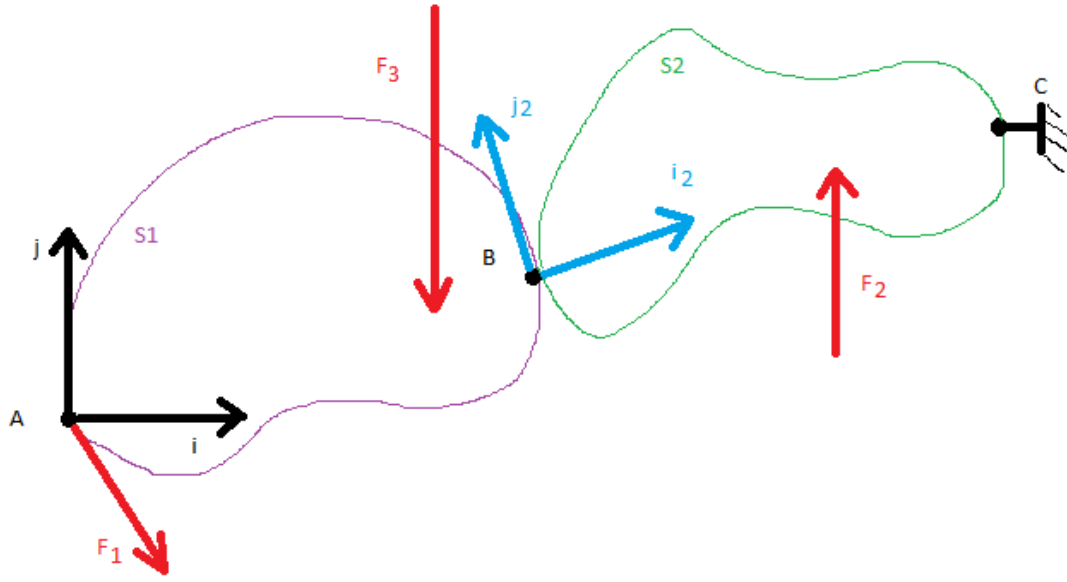


Figure 5.5: Deux solides en contact avec un plan tangent et une direction normale, reliés au monde extérieur par un encastrement et chargés.

degrés de liberté sauf ce degré de liberté. Par exemple, si le problème est tridimensionnel, une liaison encastrement, sera transformée en une liaison pivot d'axe  $\vec{i}$ .

Ce système isostatique associé est considéré comme chargé par

1. le même chargement extérieur que le système initial,
2. auquel on ajoute les inconnues hyperstatiques, qui sont alors considérées comme un chargement connu.

### 5.3 Torseur d'inter-effort entre deux solides dans un repère local

Nous avons calculé dans 5.1.2 les réactions aux liaisons. Les réactions aux liaisons sont exprimées dans le repère global. Pourtant, il apparaît un plan tangent et une direction normale  $\vec{i}_2$  entre les deux solides au point B. Intéressons nous à ces réactions dans ce repère local.

Sur l'exemple ci-dessus, on peut calculer le repère local en fonction du repère global,

$$\vec{i}_2 = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}, \quad (5.16)$$

$$\vec{j}_2 = -\sin \alpha \vec{i} + \cos \alpha \vec{j}, \quad (5.17)$$

$$\vec{k}_2 = \vec{k}. \quad (5.18)$$

mais aussi calculer le repère global en fonction du repère local,

$$\vec{i} = \cos \alpha \vec{i}_2 - \sin \alpha \vec{j}_2, \quad (5.19)$$

$$\vec{j} = \sin \alpha \vec{i}_2 + \cos \alpha \vec{j}_2, \quad (5.20)$$

$$\vec{k} = \vec{k}_2. \quad (5.21)$$

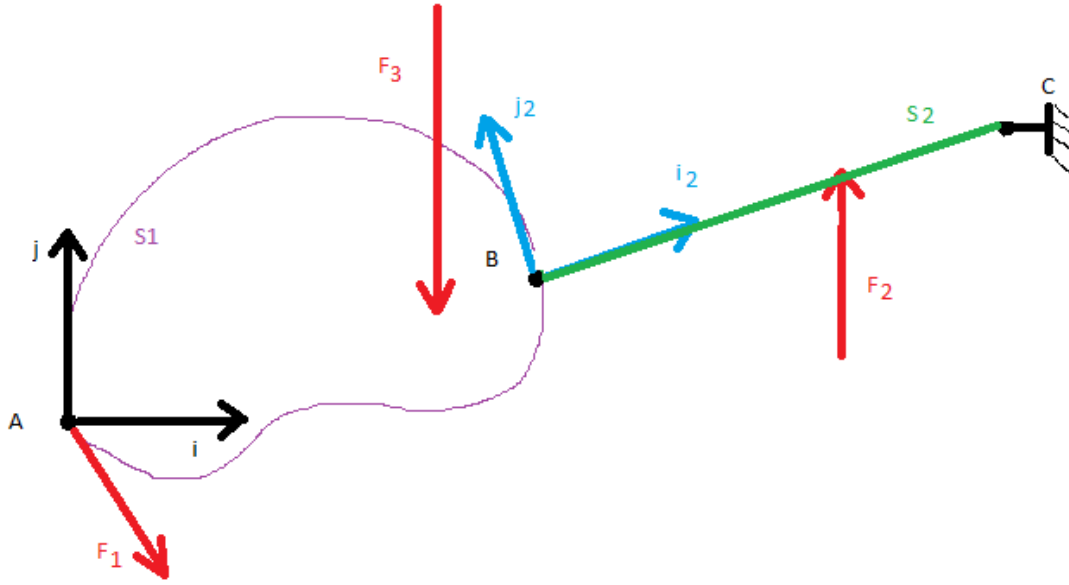


Figure 5.6: Un solide en contact avec une poutre, reliés au monde extérieur par un encastrement et chargés.

Lorsque l'on injecte ces dernières équations dans le torseur des actions de S2 sur S1, on trouve les composantes de ce torseur dans le repère local.

$$\{\tau_{21}\} = \begin{Bmatrix} R_3 \vec{i} + R_4 \vec{j} \\ + C_2 \vec{k} \end{Bmatrix}_B \quad (5.22)$$

$$= \begin{Bmatrix} R_3(\cos \alpha \vec{i}_2 - \sin \alpha \vec{j}_2) + R_4(\sin \alpha \vec{i}_2 + \cos \alpha \vec{j}_2) \\ + C_2 \vec{k} \end{Bmatrix}_B \quad (5.23)$$

$$= \begin{Bmatrix} (R_3 \cos \alpha + R_4 \sin \alpha) \vec{i}_2 + (-R_3 \sin \alpha + R_4 \cos \alpha) \vec{j}_2 \\ + C_2 \vec{k} \end{Bmatrix}_B, \quad (5.24)$$

$$= \begin{Bmatrix} R_5 \vec{i}_2 + R_6 \vec{j}_2 \\ + C_2 \vec{k}_2 \end{Bmatrix}_B, \quad (5.25)$$

$$(5.26)$$

avec  $R_5 = R_3 \cos \alpha + R_4 \sin \alpha$ ,  $R_6 = -R_3 \sin \alpha + R_4 \cos \alpha$  et  $C_2 = C_1$ .

## 5.4 Torseur d'inter-effort entre un solide et une poutre

Imaginons maintenant que le solide S2 soit un solide élancé, c'est à dire avec une dimension bien plus grande que les deux autres (Fig. 5.6).

Nous utiliserons dans ce cours le vecteur unitaire  $\vec{i}_2$  pour indiquer la direction de la poutre, et  $\vec{j}_2$  et  $\vec{k}_2$  les deux directions perpendiculaires à  $\vec{i}_2$  telles que  $(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2)$  soit une base orthonormée directe. Les actions de la poutre sur le solide S1 peuvent être calculées en appliquant la démarche précédente qui est inchangée, car elle ne dépend pas de la forme du solide S2. Le torseur des actions de S2 sur S1, exprimé dans le repère local est donc :

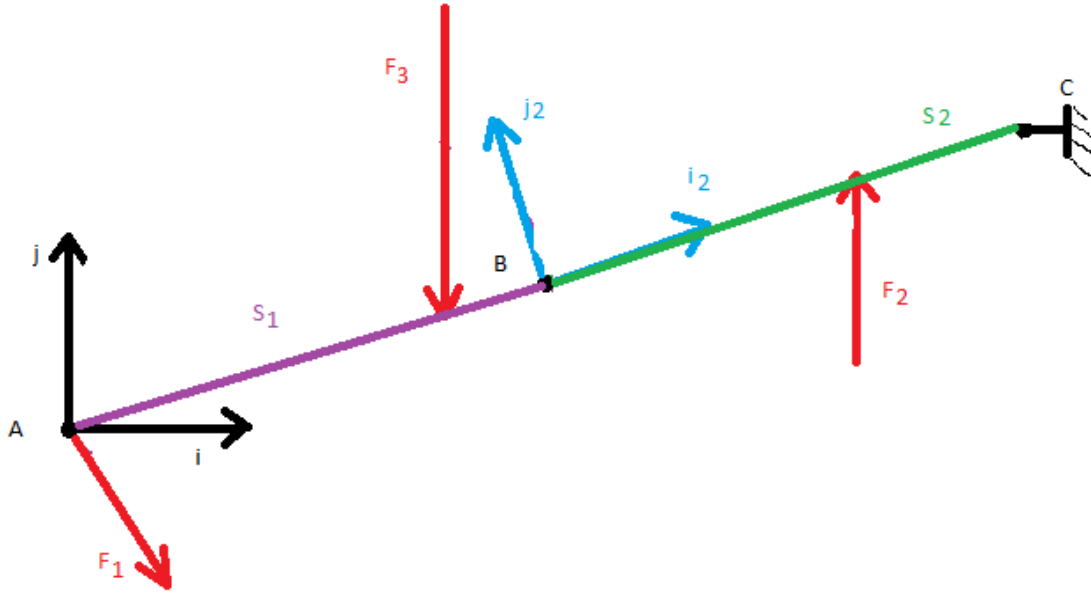


Figure 5.7: Deux poutres soudées entre elles au point B, reliées au monde extérieur par un encastrement et chargées.

$$\{\tau_{21}\} = \left\{ \begin{array}{c} R_5 \vec{i}_2 + R_6 \vec{j}_2 \\ + C_2 \vec{k}_2 \end{array} \right\}_B \quad (5.27)$$

$$(5.28)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevet 180 .

## 5.5 Torseur des efforts intérieurs

Imaginons maintenant que le solide S1 soit aussi une poutre ayant la même direction que la poutre S2 (Fig. 5.7).

Si l'on s'intéresse aux actions de la poutre S2 sur la poutre S1, dans le repère local, rien n'est changé :

$$\{\tau_{21}\} = \left\{ \begin{array}{c} R_5 \vec{i}_2 + R_6 \vec{j}_2 \\ + C_2 \vec{k}_2 \end{array} \right\}_B \quad (5.29)$$

$$(5.30)$$

Si maintenant on s'intéresse au torseur des actions de S1 sur S2, du fait du principe des actions et réactions, le résultat est l'opposé du torseur des actions de S2 sur S1 :

$$\{\tau_{12}\} = -\{\tau_{21}\} \quad (5.31)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -R_5 \vec{i}_2 - R_6 \vec{j}_2 \\ -C_2 \vec{k}_2 \end{array} \right\}_B \quad (5.32)$$



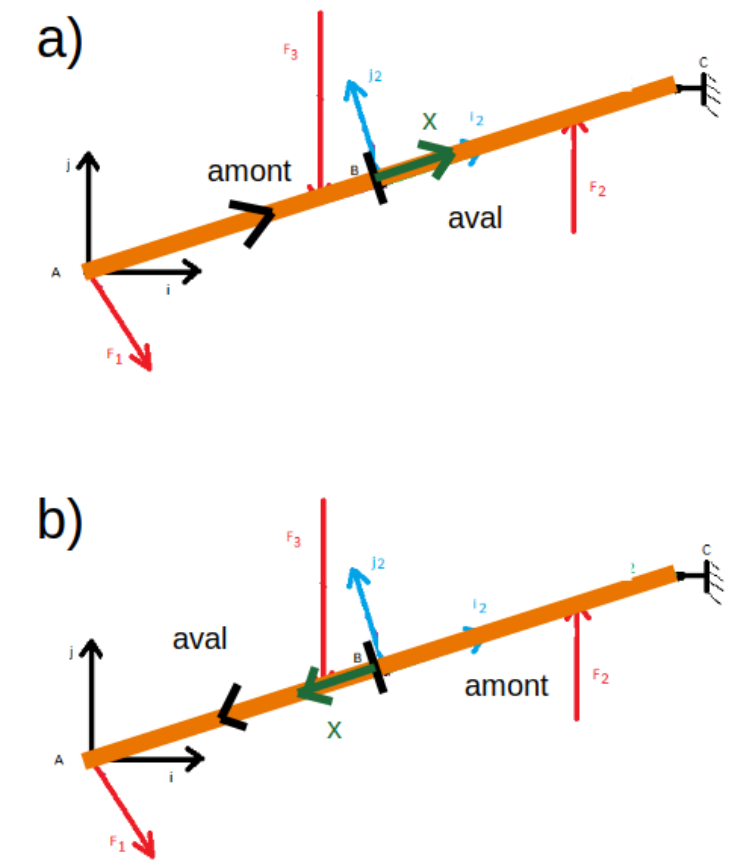


Figure 5.8: L'orientation de la poutre permet de définir les secteurs amont et aval, donc le vecteur  $\vec{x}$ , donc le torseur des efforts intérieurs (actions de l'aval sur l'amont).

*Comment fonctionne le principe d'action et de réaction ?*

La réponse est dans la vidéo 004 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Comme les poutres S1 et S2 sont liées par un encastrement entre elles, considérons maintenant la poutre S qui est l'union de ces deux poutres S1 et S2. Si l'on souhaite connaître les efforts et couples à l'intérieur de cette poutre au point B, il faut choisir l'un des deux torseurs : actions de S2 sur S1 ou actions S1 sur S2 ? Pour choisir, il est nécessaire d'orienter la poutre, par exemple de A vers C (Fig. 5.8a). On notera  $\vec{x}$  le vecteur tangent à la poutre dans le sens de l'orientation de celle-ci. Sur l'exemple, on aura  $\vec{x} = \vec{i}_2$ . Le segment AB sera l'amont de la poutre au point B et le segment BC sera l'aval au point B. Par convention, nous appellerons torseur des efforts intérieurs, les actions de l'aval sur l'amont. Si la poutre avait été orientée de C vers A (Fig. 5.8b), alors  $\vec{x} = -\vec{i}_2$ .

*Les actions des efforts intérieurs se font-elles de l'amont vers l'aval ?*

La réponse est dans la vidéo 511 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la et note-la.

*Comment déterminer si on a un effort tranchant ou un effort normal ?*

La réponse est dans la vidéo 512 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la et note-la.

### 5.5.1 Deux méthodes de calcul du torseur des efforts intérieurs

Pour le calculer on peut :

- Faire l'équilibre de l'amont :

$$\sum \{\tau_{ext \rightarrow amont}\} + \{\tau_{effint}\} = \{0\}, \quad (5.33)$$

où  $\sum \{\tau_{ext \rightarrow amont}\}$  désigne la somme de tous les torseurs extérieurs agissant sur l'amont, d'où,

$$\{\tau_{effint}\} = - \sum \{\tau_{ext \rightarrow amont}\}. \quad (5.34)$$

Pour notre exemple, dans le cas où l'on choisi l'orientation de A vers C, cela fourni :

$$\{\tau_{effint}\} = - \left\{ \begin{array}{c} F_{1i}\vec{i} + F_{1j}\vec{j} \\ +0\vec{k} \end{array} \right\}_A - \left\{ \begin{array}{c} -F_{3j}\vec{j} \\ +0\vec{k} \end{array} \right\}_E. \quad (5.35)$$

On remarquera que les deux torseurs extérieurs sont des données du problème. Le calcul du torseur des efforts intérieurs est donc faisable directement.

- Faire l'équilibre de l'aval :

$$\sum \{\tau_{ext \rightarrow aval}\} - \{\tau_{effint}\} = \{0\}, \quad (5.36)$$

où  $\sum \{\tau_{ext \rightarrow aval}\}$  désigne la somme de tous les torseurs extérieurs agissant sur l'aval, d'où,

$$\{\tau_{effint}\} = \sum \{\tau_{ext \rightarrow aval}\}. \quad (5.37)$$

Pour notre exemple, dans le cas où l'on choisi l'orientation de A vers C, cela fourni :

$$\{\tau_{effint}\} = \left\{ \begin{array}{c} F_{2j}\vec{j} \\ +0\vec{k} \end{array} \right\}_D + \left\{ \begin{array}{c} R_1\vec{i} + R_2\vec{j} \\ +C_1\vec{k} \end{array} \right\}_C. \quad (5.38)$$

On remarquera que le torseurs extérieur en D est connu car c'est une donnée du problème, mais que le torseur de réactions en C n'est pas a priori connu. Il faut donc faire l'équilibre global de la structure pour le déterminer comme cela est fait dans la section 5.1.2. Le calcul du torseur des efforts intérieurs est donc plus long... pour un résultat qui est évidemment identique.

Nous vous conseillons donc,

- de choisir le segment où tous les torseurs sont connus, sans avoir à faire l'équilibre globale de la structure,
- s'il y a des liaisons sur les secteurs amont et aval, de choisi le segment où il y a le moins de torseurs à calculer.

### 5.5.2 Les composantes

Ce torseur des efforts intérieurs au point B peut être exprimé dans la base locale orthonormée directe  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Par définition nous noterons,

$$\{\tau_{effint}\} = \left\{ \begin{array}{c} N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} \\ M_x\vec{x} + M_{fy}\vec{y} + M_{fz}\vec{z} \end{array} \right\}_B, \quad (5.39)$$

avec  $N$  l'effort normal,  $T_y$  l'effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$ ,  $T_z$  l'effort tranchant dans la direction  $\vec{z}$ ,  $M_x$  le moment de torsion autour de l'axe  $B\vec{x}$ ,  $M_{fy}$  le moment fléchissant autour de l'axe  $B\vec{y}$  et  $M_{fz}$  le moment fléchissant autour de l'axe  $B\vec{z}$ .

*Pourquoi est-il indispensable de calculer le torseur des efforts intérieurs dans une base locale ?*

La réponse est dans la vidéo 303 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la et note-la.

*Quelle est la différence entre un repère local et un repère global ?*

La réponse est dans la vidéo 516 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la et note-la.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevet 182 .

## Chapter 6

# Statique des poutres droites isostatiques homogènes dans l'épaisseur à matériau isotrope, alias "la résistance des matériaux"

ou "L'histoire d'un haltérophile qui pêchait du pont de Millau en regardant une éolienne".

Attention : ce cours ne traite pas

- des poutres à fibre moyenne courbe,
- des systèmes hyperstatiques,
- du calcul des directions principales d'une section droite.

Pour plus de détails, veuillez consulter le cours fait à l'Ensim en quatrième année.

Un corps dont l'une des dimensions est bien plus grande que les deux autres sera appelé *poutre* uniquement dans le cas où, si il est maintenu à l'une de ses extrémités horizontalement, il reste quasi-horizontale sous son poids propre. Dans le cas contraire, ce corps élancé sera appelé *corde*.

*Qu'est-ce que la fibre moyenne d'une poutre ?*

La réponse est dans la vidéo 054 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.  
*toto*

La réponse est dans la vidéo n°54 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Le même jeu de relations observé en élasticité tridimensionnelle est présent dans le cas de la théorie des poutres (voir tableau 6.1), seules les grandeurs utilisées sont décrites à l'aide d'objets que l'on appelle *torseur*. Ce sont les mêmes êtres mathématiques que ceux que vous avez utilisés en mécanique des solides indéformables pour décrire leur mouvement. Ils seront ici simplement associés aux déplacements et rotation d'une section droite, aux déformations d'une section droite et aux efforts généralisés (résultante et moment) sur cette section.

Pour décrire ce système d'équations, nous allons considérer uniquement des poutres droites, c'est-à-dire dont la grande dimension est rectiligne dans la direction  $\vec{x}$ . Nous appellerons *sections droites* les coupes de cette poutre dans des plans perpendiculaires à  $\vec{x}$  et *fibre moyenne* l'ensemble des barycentres  $H$  de ces sections droites. On pourra représenter la poutre par sa fibre moyenne, qui sera orientée d'un point  $A$  à un point  $B$ .

	torseur des déplacements	torseur des déformations	torseur des efforts intérieurs
	$\{U\} = \begin{Bmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{u} \end{Bmatrix}_H$	$\{Def\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x \tilde{x} + \alpha_y \tilde{y} + \alpha_z \tilde{z} \\ \epsilon_x \tilde{x} + \gamma_y \tilde{y} + \gamma_z \tilde{z} \end{Bmatrix}_H$	$\{\tau_{int}\} = \begin{Bmatrix} N \tilde{x} + T_y \tilde{y} + T_z \tilde{z} \\ M_x \tilde{x} + M_f y \tilde{y} + M_f z \tilde{z} \end{Bmatrix}_H$
condition aux limites en déplacement	$\{U\} = \{U\}_d$ au point $P_d$		
passage déplacements déformations	formules de Bresse (fonction de $\epsilon_x, \gamma_y, \dots$ )		
loi de comportement	formules de Bresse (fonction de $N, T_y, \dots$ )	$\alpha_x = M_x/GI_0^c$ $\alpha_y = M_{fy}/EI_{Hy}$ $\alpha_z = M_{fz}/EI_{Hz}$ $\epsilon_x = N/ES$ $\gamma_y = T_y/GS_y$ $\gamma_z = T_z/GS_z$	$M_x = \alpha_x GI_0^c$ $M_{fy} = \alpha_y EI_{Hy}$ $M_{fz} = \alpha_z EI_{Hz}$ $N = \epsilon_x ES$ $T_y = \gamma_y GS_y$ $T_z = \gamma_z GS_z$
équations d'équilibre (poutre droite)			$p_x + \frac{dN}{ds} = 0$ $p_y + \frac{dT_y}{ds} = 0$ $p_z + \frac{dT_z}{ds} = 0$ $c_x + \frac{dM_x}{ds} = 0$ $c_y + \frac{dM_{fy}}{ds} - T_z = 0$ $c_z + \frac{dM_{fz}}{ds} + T_y = 0$
condition aux limites en chargement			$-\{\tau_{s+}\} + \{\tau_{s-}\} = \{\tau_d\}$ au point $P_f$
passage torseur contrainte			$\sigma_{xx} = N/S - \frac{M_{fy} \tilde{z}}{I_{Hy}} + \frac{M_{fz} \tilde{y}}{I_{Hz}}$ $\sigma_{yx} = \frac{T_y y_u(\tilde{y}, \tilde{z})}{S}$ $\sigma_{zx} = \frac{T_z y_z(\tilde{y}, \tilde{z})}{S}$ $\sigma_{yy} = 0$ $\sigma_{yz} = 0$ $\sigma_{zz} = 0$ $\sigma_{\theta x} = \frac{M_x \tilde{r} q_{\theta}(\tilde{y}, \tilde{z})}{I_0}$

Table 6.1 : Equations de la mécanique des solides déformables dans le cas d'une modélisation unidimensionnelle.

Nous considérerons, une poutre de référence, de longueur  $l$ .

*Pourquoi fait-on la théorie des poutres avant de faire l'élasticité ?*

La réponse est dans la vidéo 057 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 078.

.

**Formation à la compétence jaune de statique des poutres droites.**

Tu es détentrice ou détenteur de la capacité blanche évaluée par Catherine Potel dans l'examen ou par la validation d'une ceinture par Jean-Michel Gènevaux : bravo ! Ce chapitre est fait pour toi.



Figure 6.1: Le viaduc de Millau.

## 6.1 Sollicitation simple : traction-compression

### 6.1.1 Isoler le tronçon de poutre

Si on s'intéresse à un poteau du viaduc de Millau (fig. 6.1), il faut l'isoler. Pour ce faire, vous entourez ce poteau par une feuille de cellophane et à chaque fois que vous coupez un autre solide, vous devez considérer un chargement ou une liaison.

On peut considérer qu'il est chargé à son extrémité supérieure par le tablier du pont et par la flèche au sommet de laquelle les câbles sont suspendus. Le modèle associé à ce poteau est donc constitué du point  $A$  milieu de la section droite à la base du poteau qui est encastré dans le roche, le point  $B$  point de raccordement avec le tablier et la flèche, une fibre moyenne droite qui va de  $A$  à  $B$ , on repérera un point  $H$  de cette fibre moyenne par son abscisse  $s$  ( $\vec{AH} = s\vec{x}$ ), une section de poteau que nous supposons rectangulaire de côté  $a(x)$  et  $b(x)$ .

Deux modèles de chargement peuvent être envisagés (fig. 6.2)

- une force concentrée  $-F\vec{x}$  au point  $B$ ,
- une force concentrée  $-F\vec{x}$  au point  $B$  et le poids propre du poteau par une force appliquée sur chaque tronçon de longueur  $dx$  au point  $P$   $dF = -\rho a(x)b(x)gdx$ , avec  $\rho$  la masse volumique du béton,  $g$  l'accélération de la pesanteur,  $dx$  la longueur d'un petit tronçon de poteau.

*Pourquoi y a-t-il deux modèles de chargement ?*

La réponse est dans la vidéo 262 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Peut-on avoir en un même point, une liaison et un chargement ?*

La réponse est dans la vidéo 219 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 820.

### 6.1.2 Composantes du torseur des efforts intérieurs (et pour les allergiques forces et moments au sein de la poutre)

Nous nous intéressons à la manière dont est sollicité le poteau.

On notera  $seg+$  la demi poutre dont les abscisses sont supérieures à  $s$ . On notera  $seg-$  la demi poutre dont les abscisses sont inférieures à  $s$ .



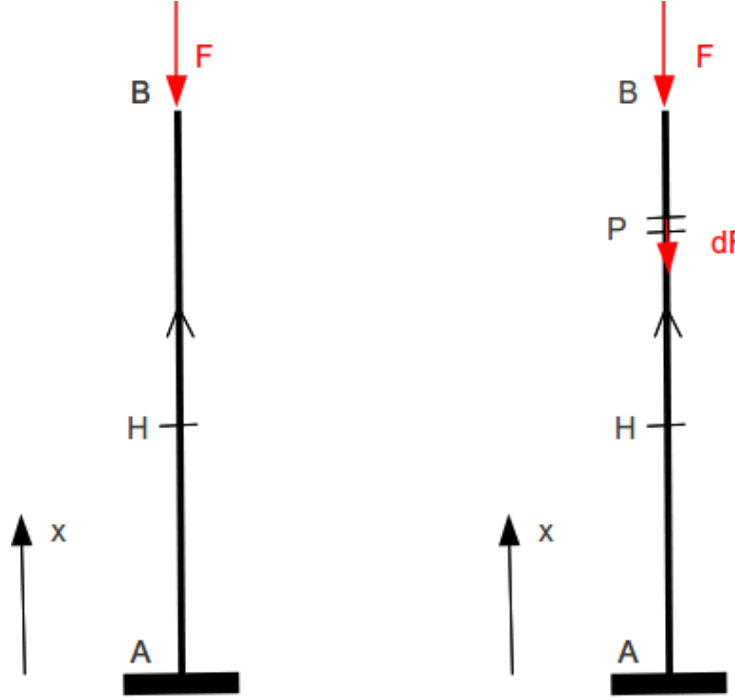


Figure 6.2: 2 modélisation d'un poteau du viaduc de Millau.

Prenons comme définition que le torseur des efforts intérieurs (alias "les forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) représente les actions de la partie seg+ sur la partie seg-.

Si l'on isole le segment seg-, celui-ci est sollicité par des torseurs extérieurs de chargement ou de liaison (alias "des forces et des moments de chargement" pour les allergiques) sur le segment seg- et par le torseur des efforts intérieurs (alias "les forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques). Ce segment étant à l'équilibre, la somme des torseurs doit être nul, donc on obtient l'égalité,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = - \sum_{seg-} \{\tau_{ext \rightarrow seg-}\} \quad (6.1)$$

et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que :  $\vec{F}_{int} = - \sum_{seg-} F_{ext}$ , et  $\vec{M}_{int} = - \sum_{seg-} \vec{M}_{ext}$ .

Nous aurions aussi pu isoler le segment seg+. Celui-ci est sollicité par des torseurs extérieurs de chargement ou de liaison (alias "des forces et des moments de chargement" pour les allergiques) sur le segment seg+ et par un torseur (alias "une force et moment au sein de la poutre" pour les allergiques) qui est l'opposé du torseur des efforts intérieurs (alias "des forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) par le principe d'action et de réaction. Nous faisons ici l'hypothèse qu'au point de coupure H il n'y a pas de force concentrée. Ce segment étant à l'équilibre, la somme des torseurs doit être nul, donc on obtient l'égalité,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\} \quad (6.2)$$

et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que :  $\vec{F}_{int} = \sum_{seg+} F_{ext}$ , et  $\vec{M}_{int} = \sum_{seg+} \vec{M}_{ext}$ .

On note donc que nous disposons à chaque fois de deux manières de calculer le torseur des efforts intérieurs (alias "les forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques), en utilisant soit la

partie seg+ soit la partie seg-. Les deux méthodes donnent le même résultat, car la poutre, dans sa globalité seg+ U seg- est en équilibre. C'est à vous de choisir le segment qui implique le moins de calcul. Par exemple, si sur l'un des segments il y a des liaisons et des chargements, et sur l'autre que des chargements (par définition connus), c'est ce dernier segment qu'il faut utiliser car cela vous évite d'avoir à calculer les inconnues aux liaisons, et donc de faire l'équilibre global de la structure, déterminer son degré d'hyperstatisme, and so on....

En général, la connaissance du torseur des efforts intérieurs (alias "des forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) est nécessaire sur l'ensemble de la poutre. Plusieurs cas doivent être étudiés en faisant varier le point  $H$ , car lorsque  $s$  croît, à chaque passage d'un chargement, le torseur de chargement (alias "la force ou le moment extérieur" pour les allergiques) passe du segment seg+ au segment seg-.

En l'appliquant à notre cas du viaduc de Millau, par rapport à  $H$  la partie seg+ est le segment  $HB$ , qui est chargé

- pour le modèle 1, par le torseur en  $B$ ,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \curvearrowright \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B, \quad (6.3)$$

(et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que :  $\vec{F}_{int} = -F\vec{x}$ , et  $\vec{M}_{int} = \vec{0}$  lorsque le moment est exprimé en B.)

que l'on transporte en  $H$  par la formule de changement de point,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \curvearrowright + -F\vec{x} \wedge \vec{BH} \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \curvearrowright + -F\vec{x} \wedge (l-s)(-\vec{x}) \end{array} \right\}_H = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \curvearrowright \\ \vec{0} \end{array} \right\}_H \quad (6.4)$$

(et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que :  $\vec{F}_{int} = -F\vec{x}$ , et  $\vec{M}_{int} = \vec{0}$  lorsque le moment est exprimé en H. )

*Les torseurs sont écrits en certains points. A quel moment doit-on effectuer le changement de point et comment le choisir ?*

La réponse est dans la vidéo 221 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

- pour le modèle 2, par le torseur en  $B$  (alias "la force ou le moment extérieur en B" pour les allergiques) et le chargement par unité de longueur

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \curvearrowright \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B + \int_{HB} \left\{ \begin{array}{c} -\rho g a(x)b(x)dx\vec{x} \\ \curvearrowright \\ \vec{0} \end{array} \right\}_P \quad (6.5)$$

que l'on transporte en  $H$  par la formule de changement de point,

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \curvearrowright \\ \vec{0} \end{array} \right\}_H + \int_{x=s}^{x=l} \left\{ \begin{array}{c} -\rho g a(x)b(x)dx\vec{x} \\ \curvearrowright + (-\rho g a(x)b(x)dx\vec{x}) \wedge \vec{PH} \end{array} \right\}_H \quad (6.6)$$

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} \\ \curvearrowright \\ \vec{0} \end{array} \right\}_H + \int_{x=s}^{x=l} \left\{ \begin{array}{c} -\rho g a(x)b(x)dx\vec{x} \\ \curvearrowright + (-\rho g a(x)b(x)dx\vec{x}) \wedge (x-s)(-\vec{x}) \end{array} \right\}_H \quad (6.7)$$

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx \\ \curvearrowright \\ \vec{0} \end{array} \right\}_H. \quad (6.8)$$

(et pour les allergiques une force et un moment au sein de la poutre tels que :  $\vec{F}_{int} = -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx$ , et  $\vec{M}_{int} = \vec{0}$  lorsque le moment est exprimé en H. )

On notera dans ce dernier calcul qu'il faut écrire le torseur (alias "le moment" pour les allergiques) traduisant le chargement linéique en un point fixe  $H$ , avant de faire l'intégration.

Dans les deux modèles on remarque que le torseur des efforts intérieurs (alias "des forces et moments au sein de la poutre" pour les allergiques) ne possède que une composante de résultante (alias "de force" pour les allergiques) dans la direction de la fibre moyenne  $\vec{x}$ . On dit que la poutre est soumise à un *effort normal*,

$$N = -F, \quad (6.9)$$

dans le cas du modèle 1, et

$$N = -F - \rho g \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx \quad (6.10)$$

dans le cas du modèle 2. L'effort normal est négatif : la poutre est en compression. Si l'effort normal était positif, la poutre serait en traction.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 821 et 822.

### 6.1.3 Message aux allergiques à l'utilisation de torseur

Vous avez sans doute remarqué que les calculs que vous effectuez sont exactement les mêmes que ceux effectués par les utilisateurs des torseurs :

- lorsque vous parlez "des efforts et moments intérieurs", ils parlent "de torseur des efforts intérieurs",
- lorsque vous écrivez deux grandeurs (force et moment), ils font de même, en les écrivant l'un au-dessus de l'autre,
- lorsque vous précisez en quel point vous calculez le moment, ils font de même en notant en dessous à droite du torseur le nom du point considéré,
- lorsque vous déplacez un moment entre deux points, ils utilisent aussi la formule de changement de point.

Lire un polycopié, avec plein d'insertions "pour les allergiques aux torseurs", est plus difficile. La suite du document arrête donc de vous proposer cette double lecture, et je vous invite, si votre allergie au torseur n'est pas encore passée à la lecture de ces lignes, de compléter la suite de ce document (une marge à droite a été laissée à cet effet) en remplaçant chaque écriture de torseur, par les deux équations de résultante et de moment. Par exemple, si vous lisez :

$$\{\tau_H\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx \\ \vec{0} \end{array} \right\}_H. \quad (6.11)$$

vous écrivez dans la marge de droite les deux équations,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{int} &= -F\vec{x} - \rho g \vec{x} \int_{x=s}^{x=l} a(x)b(x)dx, \\ \vec{M}_{int} &= \vec{0} \quad \text{au point H.} \end{aligned} \quad (6.12)$$

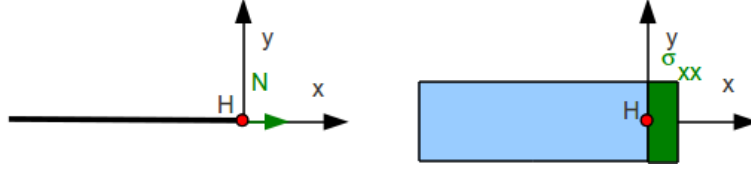


Figure 6.3: Correspondance entre effort normal et contrainte locale.

### 6.1.4 Loi de comportement

La matière ignorant si elle est dans une poutre ou un solide massif, c'est la loi de comportement tridimensionnelle qui est la référence. Si l'on suppose que cet effort normal  $N$  se répartit uniformément sur la section droite  $a(s)b(s)$  passant par le point  $H$ , la contrainte est uniquement dans la direction  $\vec{x}$  (Fig. 6.3) :

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{a(s)b(s)}. \quad (6.13)$$

Le tenseur des contraintes en tout point de la section droite passant par  $H$  est donc,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad (6.14)$$

soit,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{N}{a(s)b(s)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \quad (6.15)$$

*Explication sur la loi de comportement et la notation  $(x,y,z)x(x,y,z)$ !*

La réponse est dans la vidéo 263 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Le tenseur des déformation, déduit de l'équation 4.4 est donc,

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \frac{N}{Ea(s)b(s)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu N}{Ea(s)b(s)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu N}{Ea(s)b(s)} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \quad (6.16)$$

Si  $N$  est positif, tous les petits parallélépipèdes de dimension  $da$ ,  $db$ ,  $ds$  subissent une déformation dans la direction  $\vec{x}$  de valeur  $\frac{N}{Ea(s)b(s)}$ , et des contractions dans les directions perpendiculaires de valeur  $\frac{-\nu N}{Ea(s)b(s)}$ .

Dans le cas du pont de Millau,  $N$  est négatif : indépendant de  $s$  avec le modèle 1, de module croissant avec  $s$  avec le modèle 2.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 824 et 823.

### 6.1.5 Déplacement et rotation

Si l'on appelle  $H'$  le point tel que  $H\vec{H}' = ds\vec{x}$ , et que l'on note  $u$  le déplacement dans la direction  $\vec{x}$ , alors comme le segment s'allonge sous l'effort normal on a,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)}. \quad (6.17)$$

Pour connaître les déplacements de tout point de la fibre moyenne, cette équation différentielle doit être intégrée,

$$\int_{AB} \frac{\partial u}{\partial s} ds = \int_{AB} \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)} ds, \quad (6.18)$$

soit,

$$u_B - u_A = \int_{AB} \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)} ds, \quad (6.19)$$

$$u_B = u_A + \int_{AB} \frac{N(s)}{Ea(s)b(s)} ds. \quad (6.20)$$

On notera que le module de Young  $E$  peut aussi dépendre de  $s$ .

Dans le cas du pont de Millau, si les dimensions au pied et en haut du poteau sont  $a(0) = a_0$ ,  $a(l) = 2a_0/3$ ,  $b(0) = a_0$ ,  $b(l) = 2a_0/3$ , alors,

$$a(s) = a_0 \left(1 - \frac{s}{3l}\right) \quad (6.21)$$

$$b(s) = a_0 \left(1 - \frac{s}{3l}\right). \quad (6.22)$$

L'encastrement en  $A$  implique que  $u_A = 0$ , et il ne reste plus qu'à intégrer,

- pour le modèle 1,

$$u_B = \int_{AB} \frac{-F}{Ea_0^2 \left(1 - \frac{s}{3l}\right)^2} ds, \quad (6.23)$$

$$u_B = \frac{-F}{Ea_0^2} \int_{AB} \frac{1}{\left(1 - \frac{s}{3l}\right)^2} ds. \quad (6.24)$$

$$(6.25)$$

Si la section était constante, nous obtiendrions,

$$u_B = \frac{-Fl}{Ea_0^2}. \quad (6.26)$$

- pour le modèle 2,

$$u_B = \int_{AB} \frac{-F - \rho g \int_{x=s}^{x=l} a_0^2 \left(1 - \frac{x}{3l}\right)^2 dx}{Ea_0^2 \left(1 - \frac{s}{3l}\right)^2} ds, \quad (6.27)$$

... légèrement plus compliqué à calculer... donc vous le ferez avec *wxmaxima*.

*Qu'est-ce qu'un torseur des déplacements ?*

La réponse est dans la vidéo 056 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Comment calculez-vous le déplacement et la rotation ?*

La réponse est dans la vidéo 264 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 826 et 827.

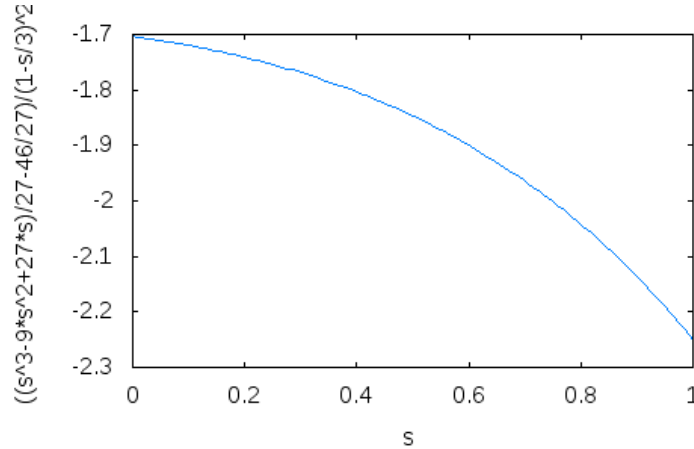


Figure 6.4: Exemple d'évolution des contraintes le long d'un poteau du viaduc de Millau (unités arbitraires).

### 6.1.6 Lieu(x) de la contrainte maximale, limite d'élasticité.

La contrainte (équ. 6.13 est une grandeur locale. Chercher son maximum dans un domaine borné nécessite de calculer la dérivée de cette fonction, et si elle ne s'annule pas dans le domaine, de calculer les deux valeurs extrêmes.

- Pour le modèle 1,

$$\sigma_{xx} = \frac{-F}{a_0^2 \left(1 - \frac{s}{3l}\right)^2}, \quad (6.28)$$

dont la dérivée ne s'annule pas pour  $s$  appartenant entre 0 et  $l$ , donc la contrainte est maximale en  $s = l$ , donc au point  $B$ .

- Pour le modèle 2,

$$\sigma_{xx} = \frac{-F - \rho g a_0^2 \int_{x=s}^{x=l} \left(1 - \frac{x}{3l}\right)^2 dx}{a_0^2 \left(1 - \frac{s}{3l}\right)^2}, \quad (6.29)$$

la recherche du point le plus sollicité nécessite le tracé de l'évolution de  $\sigma_{xx}$  en fonction de  $s$  (Fig 6.4 pour  $F = \rho g a_0^2 l$ ).

La structure sollicitée en traction/compression reste dans le domaine élastique, tant que la contrainte de traction reste inférieure à contrainte limite d'élasticité qui est donnée dans le tableau des matériaux de la section 4.2.

*Qu'est-ce que la limite d'élasticité ?*

La réponse est dans la vidéo 081 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Comment chercher le point le plus sollicité ?*

La réponse est dans la vidéo 265 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Pourquoi faut-il être loin des points de chargement et de variation brusque de section ?*

La réponse est dans la vidéo 029 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la et note-la.

*A quoi ressemblerait  $\sigma_{xx}$  si l'effort n'est pas réparti uniformément ? Si l'effort est réparti uniformément sur la surface a-t-on la même force partout ?*

La réponse est dans la vidéo 514 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la et note-la.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 828, 825, 050, 054 et 042.

.

Formation à la compétence orange de statique des poutres droites.



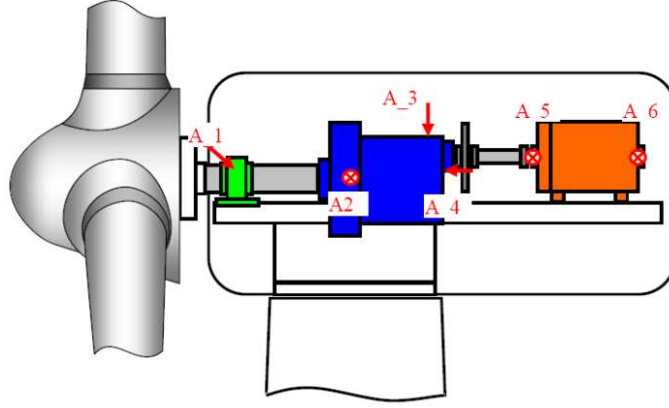


Figure 6.5: Schémat de l'intérieur d'une nacelle d'éolienne.

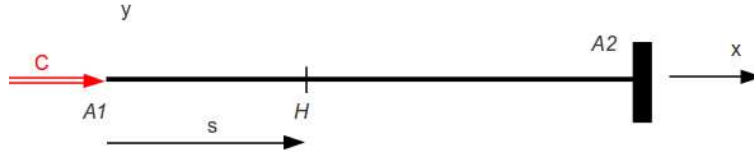


Figure 6.6: Modèle de l'arbre de transmission d'une éolienne avant le multiplicateur de vitesse.

## 6.2 Sollicitation simple : torsion

Les éoliennes ont généralement des pales qui tournent à la vitesse de 30 tours / minute. Avant d'aborder l'alternateur qui fonctionne à 1500 tours / minutes, l'énergie passe par un multiplicateur de vitesse (en bleu Fig.6.5). Les pales sont reliées au multiplicateur de vitesse par un arbre de section circulaire de longueur  $l = 1.8$  m, de diamètre  $d = 0.5$  m, dont la fonction est de transmettre le couple dû au vent sur les pales, mais aussi de maintenir en position les pales. Nous ne nous intéresseront ici qu'au couple moteur des pales sur le multiplicateur de vitesse, soit entre les points  $A_1$  et  $A_2$  de la figure. Si l'éolienne est de 2 MW, le couple  $C$  est,

$$C = P/\omega, \quad (6.30)$$

$$= \frac{2 \cdot 10^6}{2\pi \cdot 30/60} : \text{N.m}, \quad (6.31)$$

$$= 5.9 \cdot 10^5 \text{ N.m}. \quad (6.32)$$

### 6.2.1 Composantes du torseur des efforts intérieurs

Si l'on appelle  $\vec{x}$  l'axe de rotation de l'arbre de transmission du couple, dans le cas où le multiplicateur est à l'arrêt et que le vent se lève, les pales exercent un couple  $C\vec{x}$  sur l'arbre au point  $A_1$ . Un modèle de cet arbre est représenté sur la figure 6.6.

Soit le point  $H$  à la distance  $s$  du point  $A_1$ . Si on oriente la poutre de  $A_1$  vers  $A_2$ , alors le torseur des efforts intérieurs est,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\} \quad (6.33)$$

Or le torseur au point  $A_2$  n'est pas une donnée du problème. Il est donc plus intéressant de prendre

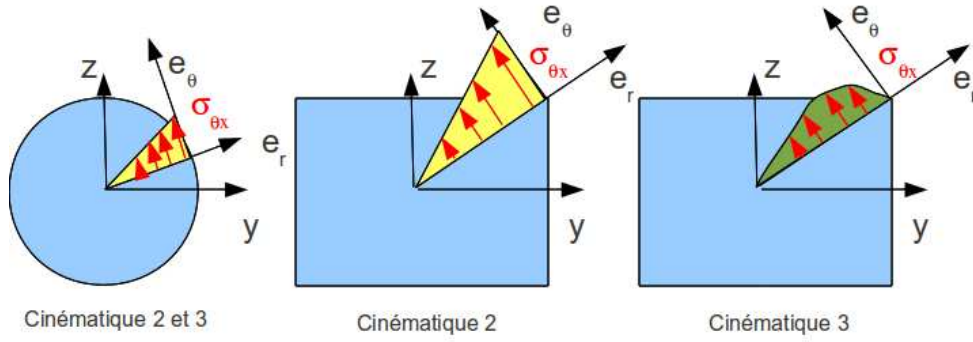


Figure 6.7: Répartition des contraintes de cisaillement dues à une sollicitation de torsion, en fonction de la forme de la section droite et de la cinématique choisie. La répartition de contraintes de l'image centrale n'est pas admissible.

l'autre définition du torseur des efforts intérieurs :

$$\{\tau_{eff.int.}\} = - \sum_{seg-} \{\tau_{ext \rightarrow seg-}\} \quad (6.34)$$

$$= -\{\tau_{A_1}\} \quad (6.35)$$

$$= -\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C\vec{x} \end{matrix} \right\}_{A_1} \quad (6.36)$$

$$= -\left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ C\vec{x} + \vec{0} \wedge A_1\vec{H} \end{matrix} \right\}_H \quad (6.37)$$

$$= \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ -C\vec{x} \end{matrix} \right\}_H \quad (6.38)$$

car le torseur en  $A_1$  est une donnée du problème. Le torseur des efforts intérieurs ne comporte qu'un couple autour de l'axe  $\vec{x}$  qui correspond à la direction de la fibre moyenne. On dira que l'arbre subit un *moment de torsion*,

$$M_x = -C. \quad (6.39)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 829.

### 6.2.2 Contraintes locales dans la section droite

Localement, pour créer ce moment de torsion sur l'ensemble de la section droite, faisons l'hypothèse que chaque petit élément d'aire  $d\vec{y} d\vec{z}$  autour d'un point  $P$  appartenant à la section droite passant par  $H$  tel que  $\vec{HP} = \vec{y}\vec{y} + \vec{z}\vec{z}$ , subit une contrainte dans le plan de la section droite et perpendiculaire au vecteur  $\vec{HP}$  (Fig. 6.7 image de gauche).

On définit pour tout point  $P$  un repère local  $(P, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ , la contrainte locale est alors considérée comme proportionnelle à la distance  $r = \vec{HP} \cdot \vec{e}_r$  :

$$\sigma_{\theta x} = kr. \quad (6.40)$$

Le tenseur des contraintes en un point peut donc s'écrire,

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{x\theta} \\ 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{\theta x} & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \otimes (\vec{x}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)}, \quad (6.41)$$

Pour identifier la valeur du coefficient de proportionnalité  $k$ , il faut intégrer sur l'ensemble de la surface afin de retrouver le moment de torsion  $M_x$  :

$$M_x = \int_{\tilde{y}} \left( \int_{\tilde{z}} \sigma_{\theta x} r d\tilde{z} \right) d\tilde{y}, \quad (6.42)$$

$$= \int_{\tilde{y}} \left( \int_{\tilde{z}} k r r d\tilde{z} \right) d\tilde{y}, \quad (6.43)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{r=0}^{d/2} k r^2 r dr \right) d\theta, \quad (6.44)$$

$$= k \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{r=0}^{d/2} r^2 r dr \right) d\theta, \quad (6.45)$$

$$= k I_0, \quad (6.46)$$

avec  $I_0$  le moment polaire de la section droite,

$$I_0 = \int_S r^2 dS, \quad (6.47)$$

qui dans le cas d'une section circulaire s'écrit,

$$I_0 = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{d/2} r^2 r dr d\theta, \quad (6.48)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d^4}{64} d\theta, \quad (6.49)$$

$$= 2\pi \frac{d^4}{64}, \quad (6.50)$$

$$= \frac{\pi d^4}{32}. \quad (6.51)$$

Pour l'éolienne, le moment polaire est donc,

$$I_0 = \frac{\pi 0.5^4}{32} \text{ m}^4, \quad (6.52)$$

$$= 6.1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4. \quad (6.53)$$

$$(6.54)$$

Le coefficient de proportionnalité est donc,

$$k = \frac{M_x}{I_0}, \quad (6.55)$$

ce qui permet de calculer la contrainte tangentielle en tout point  $P$  de la section droite à la distance  $r$  de  $H$ ,

$$\sigma_{\theta x} = \frac{M_x r}{I_0}. \quad (6.56)$$

La contrainte maximale se situe donc sur la surface du cylindre, pour  $r = d/2$ . On notera que si cette poutre est creuse avec un trou de rayon intérieur  $r_i$ , le moment polaire va diminuer car on ne fera l'intégrale que de  $r_i$  à  $r_e$  (le rayon extérieur), mais que la formule 6.56 reste valable avec uniquement  $r$  au numérateur : la figure 6.7 qui montre la proportionnalité de la contrainte avec le rayon  $r$  reste valable.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 040, 080 et 830.

### 6.2.3 Déplacement et rotation

Sous l'effet de ce moment de torsion, la section droite passant par un point  $H'$  à la coordonnée  $s'$ , va tourner d'un angle  $\alpha_x(s' - s)$  par rapport à la section droite passant par un point  $H$  à la coordonnée  $s$ . Si le solide est élastique de module de Young  $E$  et de coefficient de poisson  $\nu$ , les déformations de cisaillement sont reliées aux contraintes de cisaillement par,

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1 + \nu)} \epsilon_{xy}, \quad (6.57)$$

$$= G 2 \epsilon_{xy}, \quad (6.58)$$

avec  $G$  le module de Coulomb. Si l'on nomme  $\gamma_{xy}$  la variation angulaire entre deux faces d'un cube, alors

$$\sigma_{xy} = G \gamma_{xy}. \quad (6.59)$$

Le tenseur des déformation, déduit de l'équation 4.4 est donc,

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\sigma_{xy}}{E} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{E} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

$(\vec{x}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \otimes (\vec{x}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

*Pourquoi la contrainte peut être notée  $\sigma_{xy}$ ... puis dans la matrice des déformations, elle est notée  $\sigma_{\theta x}$  ?*

La réponse est dans la vidéo 515 disponibles sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la et note-la.

La déformation tangentielle d'un petit parallélogramme joignant les points  $P$  et  $p'$ , à la surface du cylindre et appartenant respectivement aux sections passant par  $H$  et  $H'$  sera donc,

$$\epsilon_{\theta x} = \frac{M_x \frac{d}{2} (1 + \nu)}{I_0 E}, \quad (6.61)$$

$$2\epsilon_{\theta x} = \frac{M_x \frac{d}{2} 2(1 + \nu)}{I_0 E}, \quad (6.62)$$

$$2\epsilon_{\theta x} = \frac{M_x \frac{d}{2}}{I_0 G}, \quad (6.63)$$

$$(6.64)$$

Cette déformation implique un déplacement relatif du point  $P'$  par rapport au point  $P$  dans la direction tangentielle de module,

$$u'_P = 2\epsilon_{\theta x}(s' - s) \quad (6.65)$$

$$= \frac{M_x \frac{d}{2}}{I_0 G}(s' - s), \quad (6.66)$$

ce qui correspond à une rotation de la section en  $H'$  telle que,

$$\tan(\alpha_x(s' - s)) = \frac{u_P}{d/2}. \quad (6.67)$$

L'angle étant petit,

$$\alpha_x(s' - s) = \frac{u'_P}{d/2}, \quad (6.68)$$

$$= \frac{M_x(s' - s)}{I_0 G}, \quad (6.69)$$

d'où,

$$\alpha_x = \frac{M_x}{I_0 G}. \quad (6.70)$$

$\alpha_x$  est un angle par unité de longueur dont les unités dans le système international est donc  $\text{m}^{-1}$ .

Dans le cas de l'arbre de transmission de l'éolienne, on obtient donc un angle entre le point  $A_2$  et le point  $A_1$  qui vaut,

$$\alpha_x(s' - s) = \frac{C \, 2(1 + \nu)(s' - s)}{I_0 E}, \quad (6.71)$$

$$= \frac{5.9 \, 10^5 \, 2 \, (1 + 0.3) \, 1.8}{6.1 \, 10^{-3} \, 2.1 \, 10^{11}} \text{ rad}, \quad (6.72)$$

$$= 2.16 \, 10^{-4} \text{ rad}. \quad (6.73)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 831 et 082.

### 6.2.4 Correction de cisaillement

La répartition de contrainte présentée ci-dessus n'est valable que si la section droite est circulaire. Dans le cas d'une section droite non circulaire, la répartition des contraintes tangentielles est plus complexe (Fig. 6.7 droite).

Par exemple, la valeur maximale de la contrainte de cisaillement pour une section carrée de côté  $a$  est

$$\sigma_{x\theta} = 1.6 \frac{M_x a/2}{I_0}, \quad (6.74)$$

avec  $I_0 = a^4/6$ .

Le calcul de ces corrections n'est pas faite dans ce cours. Sachez simplement que le moment polaire doit être corrigé,

$$I_0^c = k_t \, I_0, \quad (6.75)$$

avec  $k_t$  un coefficient de correction de section qui dépend de la forme de la section droite. Par exemple, pour une section carrée,  $k_t = 0.85$ .



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 081.

### 6.2.5 Limite d'élasticité en torsion

Une contrainte de cisaillement  $\sigma_{x\theta}$  sur une section droite d'une poutre implique que si la coupure de la section avait été faite non orthogonale à l'axe de la poutre, cette contrainte aurait une composante de traction et une composante de cisaillement.

On peut donc calculer une contrainte de traction équivalent à cette contrainte de cisaillement,

$$\sigma_{eq} = 2\sigma_{x\theta}, \quad (6.76)$$

qui provient du concept de *cercle de Mohr* qui sera vu en L3.

La limite d'élasticité est atteinte lorsque,

$$\sigma_{eq} = \sigma_{ce}, \quad (6.77)$$

avec  $\sigma_{ce}$  qui dépend du matériau (section 4.2). Donc

$$\sigma_{x\theta} = \frac{\sigma_{ce}}{2}. \quad (6.78)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 832.

## 6.3 Travail pratique : une poutre en torsion

Avant de venir pour ce travail pratique, je vous invite à regarder les vidéos suivantes

*Présentation du banc de tp sur le thème "torsion"*

accessible dans la vidéo 266 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Le kit de survie en modélisation sur le thème "torsion"*

accessible dans la vidéo 492 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Le compte-rendu type à trous qui est accessible via

[http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/l2/tp\\_tors.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/l2/tp_tors.pdf)

est relativement complet. Vous ne serez évalués sur votre manière de compléter ce compte-rendu, qu'en terme de compétences et objectifs pédagogiques marron et noire.

Une grille critériée vous est fournie afin que vous puissiez optimiser votre travail. Elle est accessible via

<http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/l2>

.

*Quelle est la façon la plus pertinente de présenter un tableau de mesure ?*

La réponse est dans les vidéos 330 et 331 disponibles sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Comment savoir combien de mesures sont à faire et dans quel ordre ?*

La réponse est dans les vidéos 332 et 333 disponibles sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Comment tracer une courbe de façon la plus pertinente ?*

La réponse est dans les vidéos 334 et 335 disponibles sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*336 et 337: Comment faire la répétabilité d'une mesure ?*

La réponse est dans les vidéos 336 et 337 disponibles sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Comment comparer une mesure à la théorie ?*

La réponse est dans les vidéos 338, 339, 340 et 341 disponibles sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Comment calculer l'incertitude sur la réponse d'un modèle ?*

La réponse est dans les vidéos 343 et 344 disponibles sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

.

**Formation à la compétence verte de statique des poutres droites.**



Figure 6.8: 187 kg à bout de bras.

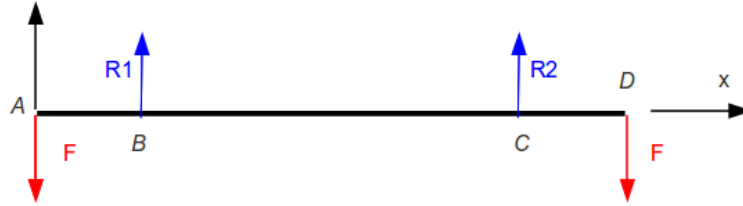


Figure 6.9: Modélisation des efforts sur la barre de l'haltérophile.

## 6.4 Sollicitation simple : flexion pure

187 kg ! C'est ce qu'a soulevé Vencelas Dabaya-Tientcheu lors des jeux olympiques de 2008 (Fig 6.8). Si on s'intéresse à la barre, on peut considérer qu'elle est chargée à ses deux extrémités par deux forces  $F = mg$  égales et que les mains de l'haltérophile exercent deux forces  $R_1$  et  $R_2$  sur la barre. Le modèle associé à cette barre (Fig. 6.9) est donc constitué d'une fibre moyenne droite qui va de  $A$  à  $D$ , on repèrera un point  $H$  de cette fibre moyenne par son abscisse  $s$  ( $\vec{AH} = s\vec{x}$ ), une section de poteau que nous supposons circulaire de rayon  $r = 0.015$  m. Les distances seront notées  $\vec{AB} = a\vec{x}$ ,  $\vec{BC} = b\vec{x}$ ,  $\vec{CD} = a\vec{x}$ , avec  $a = 0.3$  m,  $b = 0.8$  m,  $m = 93.5$  kg,  $g = 9.81$  m.s<sup>-2</sup>.

### 6.4.1 Composantes du torseur des efforts intérieurs

Nous nous intéressons à la manière dont est sollicité la barre entre les points  $B$  et  $C$ .

Nous orientons la barre de  $A$  vers  $D$ . La définition du torseur des efforts intérieurs,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\} \quad (6.79)$$

implique que en un point  $H$ ,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_D. \quad (6.80)$$

On remarquera que lors du calcul du torseur des efforts intérieurs, on ne s'arrête pas au premier torseur rencontré. Dans le problème posé, une difficulté apparaît : les valeurs de la réaction  $R_2$  ne sont pas



données. Il est donc nécessaire dans ce cas de faire l'équilibre du système total pour déterminer les réactions aux liaisons, ici  $R_1$  et  $R_2$ .

Le solide isolé est la barre. Elle est soumise à 4 torseurs,

$$\{\tau_1\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_A, \quad (6.81)$$

$$\{\tau_2\} = \left\{ \begin{array}{c} R_1\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_B, \quad (6.82)$$

$$\{\tau_3\} = \left\{ \begin{array}{c} R_2\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_C, \quad (6.83)$$

$$\{\tau_4\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_D. \quad (6.84)$$

L'équilibre se traduit par la somme des torseurs nulle, soit,

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} R_1\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} R_2\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_D. \quad (6.85)$$

Pour qu'une somme de torseurs soit possible, il faut les exprimer au même point. Vous pouvez choisir le point que vous voulez, cela ne change pas la solution. Choisissons le point  $B$ .

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F\vec{y} \wedge a\vec{x} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} R_1\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} R_2\vec{y} \\ R_2\vec{y} \wedge (-b\vec{x}) \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F\vec{y} \wedge -(b+a)\vec{x} \end{array} \right\}_B. \quad (6.86)$$

d'où,

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} + R_1\vec{y} + R_2\vec{y} - F\vec{y} \\ (Fa + R_2b - F(b+a))\curvearrowright \vec{z} \end{array} \right\}_B. \quad (6.87)$$

D'où le système de deux équations à deux inconnues,

$$R_1 + R_2 = 2F \quad (6.88)$$

$$R_2b = Fb, \quad (6.89)$$

et les valeurs des deux réactions,

$$R_1 = F \quad (6.90)$$

$$R_2 = F. \quad (6.91)$$

Le torseur des efforts intérieurs peut donc maintenant être calculé en fonction uniquement du chargement,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_C + \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_D, \quad (6.92)$$

soit, si on l'exprime au point  $H$ ,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} F\vec{y} \\ F\vec{y} \wedge -(a+b-s)\vec{x} \end{array} \right\}_H + \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F\vec{y} \wedge -(a+b+a-s)\vec{x} \end{array} \right\}_D, \quad (6.93)$$

d'où,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -Fa\curvearrowright \vec{z} \end{array} \right\}_H. \quad (6.94)$$

On remarquera que la résultante de force est nulle et que seul un moment autour de l'axe  $H\vec{z}$  est présent. On dira que la barre est sollicitée par un *moment fléchissant autour de l'axe  $H\vec{z}$* . De plus, dans notre cas particulier, ce moment fléchissant est indépendant de l'abscisse  $s$  entre les points  $B$  et  $C$  :

$$Mf_z = Fa. \quad (6.95)$$

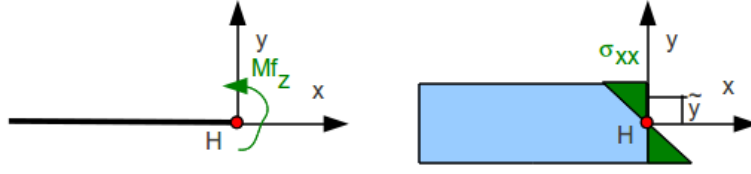


Figure 6.10: Correspondance entre moment fléchissant et contrainte locale.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 833.

### 6.4.2 Loi de comportement

Comme pour la sollicitation précédente, il nous faut faire une hypothèse de répartition de contraintes dans la section droite de cette poutre en flexion. La forme générale de la poutre entre les deux mains de l'haltérophile est légèrement incurvée. On peut faire l'hypothèse que la surface supérieure de la poutre est tendue, et que la surface inférieure de la barre est comprimée. La contrainte n'est donc pas constante lorsque l'on parcourt la section droite. Considérons l'hypothèse (Fig. 6.10) que la contrainte est linéaire en fonction de la distance  $\tilde{y}$  à la fibre moyenne dans la direction  $\vec{y}$ ,

$$\sigma_{xx}(\tilde{y}) = k\tilde{y}, \quad (6.96)$$

avec  $k$  un coefficient à déterminer. Le tenseur des contraintes en un point peut donc s'écrire,

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}(\tilde{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad (6.97)$$

Il faut vérifier que l'intégrale de ces contraintes sur la section droite redonnent les composantes du torseur des efforts intérieurs. Pour la résultante, nous obtenons une valeur nulle,

$$\vec{R} = \int_S \sigma_{xx}(\tilde{y}) \vec{x} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (6.98)$$

$$\vec{R} = \vec{x} \int_S k\tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (6.99)$$

$$\vec{R} = k\vec{x} \int_S \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (6.100)$$

$$\vec{R} = k\vec{x}0, \quad (6.101)$$

car H est le barycentre de la section droite. La grandeur

$$m_z = \int_S \tilde{y} d\tilde{y} d\tilde{z} \quad (6.102)$$

est appelée *moment statique de la section droite autour de l'axe  $\vec{z}$* . On définira de même le moment statique autour de l'axe  $H\vec{y}$  :

$$m_y = \int_S \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad (6.103)$$

*Détermination du barycentre, question sur la démonstration ?*

La réponse est dans la vidéo 235 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Pour le moment,

$$\check{M} = \int_S \sigma_{xx}(\tilde{y}) \tilde{x} \wedge P \vec{H} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (6.104)$$

$$\check{M} = \int_S k \tilde{y} \tilde{x} \wedge (-\tilde{y} \vec{y} - \tilde{z} \vec{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (6.105)$$

$$\check{M} = -k \check{z} \int_S \tilde{y}^2 d\tilde{y} d\tilde{z} + k \check{y} \int_S \tilde{y} \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (6.106)$$

$$\check{M} = -k \check{z} I_{Hz} + k \check{y} 0, \quad (6.107)$$

car H est le barycentre de la section droite, et en appelant  $I_{Hz}$  le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe  $H\vec{z}$ :

$$I_{Hz} = \int_S \tilde{y}^2 d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad (6.108)$$

De même, on définira  $I_{Hy}$  le moment quadratique de la section droite par rapport à l'axe  $H\vec{y}$ :

$$I_{Hy} = \int_S \tilde{z}^2 d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (6.109)$$

ainsi que le *produit quadratique* de la section droite par rapport aux axes  $H\vec{y}$  et  $H\vec{z}$  :

$$P_{Hyz} = - \int_S \tilde{y} \tilde{z} d\tilde{y} d\tilde{z}. \quad (6.110)$$

La nullité du produit quadratique d'une section droite permet de définir les axes principaux de cette section droite. Si la section droite possède une ligne de symétrie alors cette ligne et sa perpendiculaire sont les axes principaux de cette section droite.

L'équation 6.107 permet de trouver,

$$M_{fz} = -k I_{Hz}, \quad (6.111)$$

$$k = -\frac{M_{fz}}{I_{Hz}}, \quad (6.112)$$

d'où,

$$\sigma_{xx}(\tilde{y}) = -\frac{M_{fz} \tilde{y}}{I_{Hz}}. \quad (6.113)$$

Par la formule ci-dessus, on peut donc calculer les contraintes locale dûes à un moment fléchissant. De même on aura,

$$\sigma_{xx}(\tilde{z}) = \frac{M_{fy} \tilde{z}}{I_{Hy}}. \quad (6.114)$$

Le changement de signe est à relié avec le fait que le repère est direct entre  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ .

Pour l'exemple de la barre de l'haltérophile, on a donc les contraintes qui valent,

$$\sigma_{xx}(\tilde{y}) = \frac{F a \tilde{y}}{I_{Hy}}, \quad (6.115)$$

avec,

$$I_{Hz} = \int_S \tilde{y}^2 d\tilde{y} d\tilde{z}, \quad (6.116)$$

$$= \int_S (r' \cos \theta)^2 r' dr' d\theta, \quad (6.117)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{r'=0}^r r'^3 dr' \right) (\cos \theta)^2 d\theta, \quad (6.118)$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \frac{r^4}{4} \right) (\cos \theta)^2 d\theta, \quad (6.119)$$

$$= \frac{r^4}{4} \int_{\theta=0}^{2\pi} (\cos \theta)^2 d\theta, \quad (6.120)$$

$$= \frac{r^4}{4} \pi, \quad (6.121)$$

$$= \frac{d^4}{64} \pi, \quad (6.122)$$

$$= \frac{\pi d^4}{64}, \quad (6.123)$$

avec  $d$  le diamètre de la barre. La contrainte maximale de tension est pour la valeur  $\tilde{y} = r$ , soit,

$$\sigma_{xx}(s, \tilde{y} = r, \tilde{z} = 0) = \frac{287.9.81.0.3.0.015.12}{2\pi.0.03^4} \text{ Pa}, \quad (6.124)$$

$$= 9.05 \cdot 10^6 \text{ Pa}. \quad (6.125)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 006ter.

### 6.4.3 Courbure

La figure 6.10 montre que les contraintes sont proportionnelles à la distance à la fibre moyenne. Si le matériau est élastique, cela implique que les chaque "fibre" à la distance  $\tilde{y}$  de la fibre moyenne, reliant un point d'une section droite de centre  $H$  à l'abscisse  $s$  au point correspondant de la section droite de centre  $H$  à la coordonnée  $s'$ , va s'allonger d'une grandeur  $\epsilon_{xx}(s' - s)$  proportionnelle à la contrainte  $\sigma_{xx}(\tilde{y})$  qu'elle subit :

$$\epsilon_{xx}(s' - s) = \frac{\sigma_{xx}(\tilde{y})(s' - s)}{E}, \quad (6.126)$$

avec  $E$  le module de Young du matériau exprimé en Pa dans le système international, et  $\epsilon_{xx}$  la déformation qui est une grandeur adimensionnelle. En effet, le tenseur des déformation, déduit de l'équation 4.4 est donc,

$$\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\nu\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\nu\sigma_{xx}}{E} \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \quad (6.127)$$

Une section droite de centre  $H'$  à l'abscisse  $s'$  va donc tourner d'un angle  $\alpha_z(s' - s)$  autour de l'axe  $H\vec{z}$  par rapport à la section droite de centre  $H$  à la coordonnée  $s$ .

$$\tan(\alpha_z(s' - s)) = -\frac{\epsilon_{xx}(s' - s)}{\tilde{y}}, \quad (6.128)$$

$$(6.129)$$

Pour des petites déformations, donc des petits angles, l'angle et la tangente sont assimilées,

$$\alpha_z(s' - s) = -\frac{\epsilon_{xx}(s' - s)}{\tilde{y}}, \quad (6.130)$$

$$= -\frac{\sigma_{xx}(s' - s)}{E\tilde{y}}, \quad (6.131)$$

$$= -\frac{M_{fz}\tilde{y}(s' - s)}{EI_{Hz}\tilde{y}}, \quad (6.132)$$

$$= \frac{M_{fz}(s' - s)}{EI_{Hz}}, \quad (6.133)$$

$$\alpha_z = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}}, \quad (6.134)$$

avec  $\alpha_z$  l'angle de rotation par unité de longueur de poutre : c'est une courbure.

Pour notre barre d'haltérophile en acier,

$$\alpha_z = \frac{-287 \, 9.81 \, 0.3 \, 12}{2.1 \, 10^{11} \, \pi \, 0.03^4} \text{m}^{-1}, \quad (6.135)$$

$$\alpha_z = -19.0 \, 10^{-3} \text{m}^{-1}, \quad (6.136)$$

la courbure est négative.

#### 6.4.4 Déplacement et rotation

Si l'on prend comme repère les deux mains de l'haltérophile, et que l'on note  $u_y(s)$  le déplacement d'un point H à la coordonnée  $s$  dans la direction  $\vec{y}$  par rapport à la droite joignant les deux mains, la courbure est reliée à la dérivée seconde de  $u_y(s)$  :

$$\frac{d^2 u_y(s)}{ds^2} = \alpha_z, \quad (6.137)$$

$$\frac{d^2 u_y(s)}{ds^2} = \frac{M_{fz}(s)}{E(s)I_{Hz}(s)}. \quad (6.138)$$

L'équation ci-dessus est une équation locale : elle est valable en tout point de coordonnée  $s$ .

Pour connaître le déplacement en tout point, il suffit d'intégrer deux fois, sans oublier les constantes :

$$\frac{du_y(s)}{ds} = \int_{s'=a}^s \frac{M_{fz}(s')}{E(s')I_{Hz}(s')} ds' + A, \quad (6.139)$$

$$u_y(s) = \int_{s''=a}^s \left( \int_{s'=a}^{s''} \frac{M_{fz}(s')}{E(s')I_{Hz}(s')} ds' \right) ds'' + As + B, \quad (6.140)$$

avec  $A$  et  $B$  deux constantes que l'on détermine avec les conditions aux limites.

Pour le cas de l'haltérophile, la barre est de section constante et de matériau constant, le moment est constant, donc on peut sortir les termes de l'intégrale,

$$u_y(s) = \int_{s''=a}^s \left( \int_{s'=a}^{s''} \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} ds' \right) ds'' + As + B, \quad (6.141)$$

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \int_{s''=a}^s \left( \int_{s'=a}^{s''} ds' \right) ds'' + As + B, \quad (6.142)$$

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \int_{s''=a}^s (s'' - a) ds'' + As + B, \quad (6.143)$$

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{s^2 - a^2}{2} - a(s - a) \right) + As + B, \quad (6.144)$$

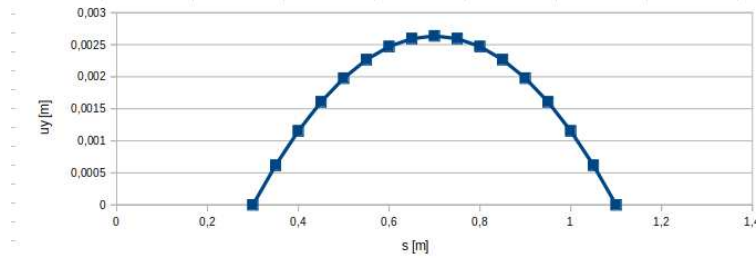


Figure 6.11: Déformée de la barre entre les deux mains de l'haltérophile.

avec les deux conditions aux limites,

$$u_y(a) = 0, \quad (6.145)$$

$$u_y(a+b) = 0. \quad (6.146)$$

La première équation donne,

$$0 = Aa + B, \quad (6.147)$$

$$B = -Aa. \quad (6.148)$$

La seconde équation donne,

$$0 = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{(a+b)^2 - a^2}{2} - a(b+a-a) \right) + A(b+a) + B, \quad (6.149)$$

$$= \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2}{2} - ab \right) + A(b+a) - Aa, \quad (6.150)$$

$$= \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{b^2}{2} \right) + Ab, \quad (6.151)$$

$$(6.152)$$

d'où,

$$A = -\frac{M_{fz}b}{2EI_{Hz}}. \quad (6.153)$$

La déformée de la barre de l'haltérophile est donc,

$$u_y(s) = \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{s^2 - a^2}{2} - a(s-a) \right) - \frac{M_{fz}b}{2EI_{Hz}}(s-a), \quad (6.154)$$

$$= \frac{M_{fz}}{EI_{Hz}} \left( \frac{s^2 - a^2}{2} - a(s-a) - \frac{b}{2}(s-a) \right). \quad (6.155)$$

$$(6.156)$$

Avec les données du problème, on obtient la courbe 6.11.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 005, 079, 039 et 834.

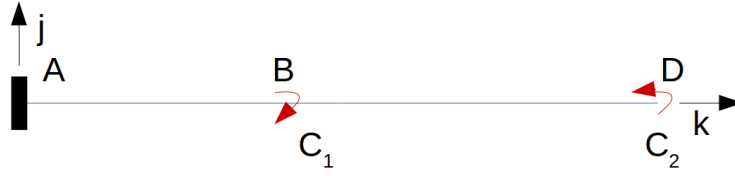


Figure 6.12: Modèle d'une poutre en flexion pure.

### 6.4.5 Chargement maximal en flexion pure.

La flexion implique que les valeurs maximales ou minimales de la contrainte sont sur les fibres les plus éloignées de la fibre moyenne. Il est donc nécessaire de calculer

- si la poutre est de section constante,
  - la section  $s$  où le moment fléchissant est le plus grand,
  - les deux contraintes extrêmes dans cette section,
  - les comparer à la limite d'élasticité  $\sigma_{ce}$ .
- si la poutre n'est pas de section constante,
  - les contraintes extrêmes dans toutes les sections (ce sont des fonctions de  $s$ ),
  - les comparer à la limite d'élasticité  $\sigma_{ce}$ .

*Où sont les fibres supérieure et inférieure ?*

La réponse est dans la vidéo 291 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

A titre d'exemple, supposons une poutre droite en acier de section droite circulaire de diamètre  $d = 0.02$  m passant par les points A B et D de coordonnées respectives exprimées en mètres dans un repère direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$   $(0,0,0)$ ,  $(0,0,0.3)$  et  $(0,0,0.8)$ . Le point A est encastré, au point B agit un couple extérieur  $\vec{C}_1 = 0.7 \vec{i}$  N.m et au point D un couple extérieur  $\vec{D}_1 = -1.2 \vec{i}$  N.m. On souhaite savoir si la poutre reste dans le domaine de comportement élastique.

- On dessine le modèle (voir figure 6.12),
- on calcule les torseurs d'efforts intérieurs dans chacun des tronçons, Pour un point  $H_1$  appartenant à AB, tel que  $A\vec{H}_1 = s_1 \vec{k}$ . On oriente la poutre de A vers D. Le torseur des efforts intérieurs est calculé à l'aide de la partie avale,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ 0.7 \vec{i} \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -1.2 \vec{i} \end{array} \right\}_D, \quad (6.157)$$

avec les couples exprimés en N.m. On les transfère au point  $H_1$  à l'aide de la formule de changement de point en remarquant que la résultante de chaque torseur est nul dans le cas traité,

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ 0.7 \vec{i} \end{array} \right\}_{H_1} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -1.2 \vec{i} \end{array} \right\}_{H_1}, \quad (6.158)$$

et

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -0.5 \vec{i} \end{array} \right\}_{H_1}. \quad (6.159)$$

On passe dans le repère local avec  $\vec{k} = \vec{x}$  et  $\vec{i} = -\vec{z}$ .

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ 0.5\vec{z} \end{array} \right\}_{H_1}. \quad (6.160)$$

On remarque que dans ce cas, le moment fléchissant est constant entre A et B.

Le même travail est effectué pour  $H_2$  appartenant à BD, tel que  $A\vec{H}_2 = s_2\vec{k}$ . Seul le torseur extérieur en D appartient à la partie avale et on trouve aussi une valeur constante dans

$$\{\tau\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ -1.2\vec{z} \end{array} \right\}_{H_2}. \quad (6.161)$$

- on recherche la section de moment fléchissant le plus grand : le moment fléchissant est le plus grand pour  $s_2$  quelconque entre 0.3 m et 0.8 m.
- on calcule les contraintes extrêmes dans cette section, sur la fibre supérieure

$$\sigma = \frac{-1.2 \cdot 0.02/2}{\pi 0.02^4/64} \text{Pa} = -1.5 \text{MPa}, \quad (6.162)$$

et sur la fibre inférieure,

$$\sigma = \frac{-1.2 \cdot (-0.02/2)}{\pi 0.02^4/64} \text{Pa} = 1.5 \text{MPa}. \quad (6.163)$$

- on compare ces valeurs à la limite d'élasticité de l'acier  $\sigma_{ce} = 60 \text{ MPa}$ . La structure reste donc élastique.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 835.

## 6.5 Sollicitation simple : cisaillement

### 6.5.1 Composantes du torseur des efforts intérieurs

Si le cisaillement est présent dans une poutre, il est indiscociable d'une flexion (au moins pour les points voisins), aussi l'étude du cisaillement est faite dans le cas de la flexion simple, au paragraphe suivant.

## 6.6 Sollicitation composée : flexion simple

Le poisson vient de mordre et le pêcheur ferre. Si l'on considère la canne à pêche de longueur  $l = 3 \text{ m}$  comme une poutre de diamètre se réduisant linéairement d'un diamètre  $d_1 = 2 \text{ cm}$  à un diamètre  $d_2 = 0.5 \text{ cm}$ , elle subit à son extrémité  $D$  l'effort  $\vec{F}$  exercée par poisson sur la canne et des efforts  $\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$  exercés par les deux mains du pêcheur (points  $A$  et  $B$  distants de  $a = 0.3 \text{ m}$ ). Si l'on suppose que ces efforts sont perpendiculaires à la direction de la fibre moyenne de la canne à pêche, le modèle associé peut être représenté figure 6.13.



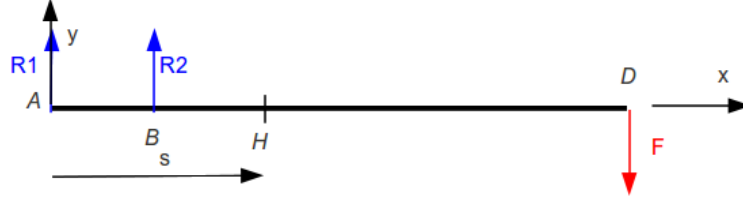


Figure 6.13: Modèle de canne à pêche.

### 6.6.1 Composantes du torseur des efforts intérieurs

On oriente la poutre des mains du pêcheur vers l'autre extrémité, donc de  $A$  vers  $D$ . Si on définit le point  $H_1$  à la distance  $s$  du point  $A$ , le torseur des efforts intérieurs en ce point, si  $s > a$  est donné par,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\}, \quad (6.164)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \underset{\sim}{0} \end{array} \right\}_D, \quad (6.165)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ \underset{\sim}{0} - F\vec{y} \wedge D\vec{H}_1 \end{array} \right\}_{H_1}, \quad (6.166)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} -F\vec{y} \\ -F(l-s)\vec{z} \end{array} \right\}_{H_1}. \quad (6.167)$$

Ce torseur a deux composantes : un moment de flexion autour de l'axe  $H_1\vec{z}$ ,  $Mf_z = -F(l-s)$  et un effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$ ,  $T_y = -F$ .

Les contraintes, les déplacements et les rotations dus au moment fléchissant ont été déjà décrit dans le paragraphe 6.4. Il nous reste à traiter les contraintes, les déplacements et les rotations dus à l'effort tranchant.

#### Les contraintes de cisaillement sont constantes dans la section droite : le gros mensonge !

La première hypothèse est que dans une section droite de la poutre, induites par un effort tranchant  $T_y$ , les contraintes  $\sigma_{yx}$  soit constantes :

$$\sigma_{yx} = \frac{T_y}{S}, \quad (6.168)$$

avec  $S$  l'aire de la section droite.

Ceci n'est en fait pas possible, car du fait de la symétrie du tenseur des contraintes,  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ , donc sur la fibre supérieure de la poutre, le vecteur contraintes

$$\vec{T}(P, \vec{y}) = \bar{\sigma} \cdot \vec{y}, \quad (6.169)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \otimes (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}, \quad (6.170)$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{xy} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}. \quad (6.171)$$

Or le vecteur  $\vec{T}(P, \vec{y})$  correspond aux actions de l'air sur la poutre si le point  $P$  est sur la fibre supérieure, actions qui sont considérées comme nulles.

### Les contraintes de cisaillement sont non constantes dans la section droite

Donc la contrainte de cisaillement est nécessairement nulle sur les fibres supérieure et inférieure de la poutre. Néanmoins, leur intégrale sur la surface doit valoir  $T_y$ , donc une évolution de cette contrainte en fonction de la distance  $\tilde{y}$  entre le point considéré et le point  $H$  doit être calculée. Ces évolutions dépendent de la forme de la section droite comme le montre les tableaux présentés figure 6.14 et 6.15.

On retiendra donc que la contrainte de cisaillement est dépendante de la position  $\tilde{y}$  du point  $P$  dans la section droite, dans le cas d'un effort tranchant  $T_y$  :

$$\sigma_{yx}(\tilde{y}) = g(\tilde{y}) \frac{T_y}{S}, \quad (6.172)$$

avec  $g(\tilde{y})$  une fonction adimensionnelle donnée par les tableaux 6.14 et 6.15 dans les dernières colonnes.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 049.

### 6.6.2 Loi de comportement

De part la présence de ces contraintes de cisaillement non uniformes dans chaque section droite sous l'effet de l'effort tranchant, la section droite ne reste pas plane et se voile. On peut néanmoins montrer que le déplacement du point  $H'$  d'abscisse  $s'$  par rapport au point  $H$  d'abscisse  $s$  est une translation dans la direction de l'effort tranchant,

$$\vec{u}(s') - \vec{u}(s) = \frac{T_y}{Gk_y S} \vec{y}. \quad (6.173)$$

Non seulement, ce déplacement fait apparaître une correction de section par un coefficient  $k_y < 1$  donnée dans les tableaux 6.14 et 6.14, mais de plus, ces déplacements sont toujours négligeables devant les déplacements dus au moment fléchissant.

*On pourra toujours négliger les déplacements dus aux efforts tranchants, devant les déplacements dus aux moments fléchissants.* C'est ce que montre la comparaison des résultats des deux brevets suivants.

*Pourquoi dit-on que la section droite peut se voiler ?*

La réponse est dans la vidéo 031 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevets 051, 052.

### 6.6.3 Déplacement et rotation

Les formules obtenues pour la flexion pure restent valables puisque l'on néglige les déplacements dus aux efforts tranchant. On veillera néanmoins lors des intégrations successives, à bien prendre en compte le fait que le moment fléchissant est maintenant dépendant de l'abscisse  $s$ .

$$\frac{d^2 u_y(s)}{ds^2} = \frac{M_{fz}(s)}{E(s)I_{Hz}(s)}. \quad (6.174)$$

Pour le cas de notre canne à pêche, si elle n'est pas creuse,

$$I_{Hz}(s) = \pi \frac{(d_1 + \frac{s}{l}(d_2 - d_1))^4}{64}, \quad (6.175)$$

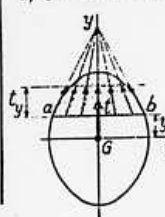
$$(6.176)$$

TABLEAU II. — EFFORT TRANCHANT - CONTRAINTES DE CISAILEMENT

TABLEAU II, 2. — SECTIONS USUELLES - CONTRAINTES DE CISAILEMENT ET DÉFORMATION DUES A L'EFFORT TRANCHANT - FORMULES APPROCHÉES

Les formules approchées, donnant pour les sections usuelles les valeurs des contraintes de cisaillement et la valeur de la section réduite  $S_y$  (intervenant dans le calcul des déformations), ont été déterminées à partir des hypothèses mentionnées dans le tableau II, 1 et des hypothèses supplémentaires suivantes :

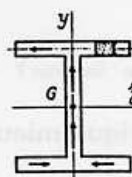
a) Cas des sections pleines.



Le long d'une ligne parallèle à l'axe d'inertie  $Gz$  d'ordonnée  $y$ , coupant le contour de la section aux deux points  $a$  et  $b$  :

1. les contraintes de cisaillement,  $t$ , passent toutes par le point de concours des deux tangentes en  $a$  et  $b$  au contour de la section.
2. la composante  $t_y$  suivant  $Gy$  des contraintes de cisaillement  $t$  est constante.

b) Cas des sections minces (fermées ou ouvertes).



La contrainte de cisaillement est tangente en chaque point à la ligne moyenne du profil.

SECTION	CROQUIS	CONTRAINTE DE CISAILEMENT				DÉFORMATION
		Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	Valeur de $S_y$
Triangle isocèle			$t_y = \frac{6T}{S} \left( \frac{1}{3} + \frac{y}{h} \right) \left( \frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right)$ $S = \frac{bh^2}{2}$	$t_y = 1,5 \frac{T}{S}$ pour $y = \frac{h}{6}$		
Rectangle			$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \left[ 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right]$ $S = bh$	$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S}$ pour $y = 0$		$S_y = \frac{5}{6} S$
Losange			$t_y = \frac{T}{S} \left[ 1 + \frac{y}{h} - \frac{2y^2}{h^2} \right]$ $t_x = t_y \sqrt{1 + \frac{a^2}{4h^2}}$ $S = a \cdot h$	$t_y = \frac{9}{8} \frac{T}{S}$ pour $y = \frac{h}{4}$		$S_y = \frac{30}{31} S$
Carré évidé				$t_y = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \frac{1 + h + h^2}{1 + h^2}$ pour mm		

Figure 6.14: Effet du cisaillement p1 : notations utilisées  $T = T_y$ ,  $t_y = \sigma_{yx}$ ,  $y = \tilde{y}$ ,  $t_y = g(\tilde{y})$ ,  $S_y = k_y S$

Tableau II. 2. — Sections usuelles - Contraintes de cisaillement et déformation dues à l'effort tranchant - Formules approchées (suite)

SECTION	CROQUIS	CONTRAINTE DE CISAILLEMENT				DÉFOR- MATION
		Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	Valeur de $S_x$
Hexagone			$t_y = \frac{T}{2,88 h^4} \frac{(h-y)(zh^2 + 2yh - y^2)}{(zh - y)}$ $S = 3,464 h^3$	$t_y = 1,46 \frac{T}{S}$ point A direction $\Lambda B$		
Cercle			$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right)$ $t_{\text{en A}} = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}$ $S = \pi R^3$	$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ le long de CD		$S_x = \frac{9}{10} S$
Ellipse			$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)$ $S = \pi a b$	$t_y = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ le long de CD		
Section en I			$t_1 = \frac{6 T e (h - e)}{b h^3 - (b - b') (h - 2e)^3}$ $t_2 = t_1 (b / b')$ $t_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{b' h} \frac{b - (b - b') \left(1 - \frac{2e}{h}\right)^2}{b - (b - b') \left(1 - \frac{2e}{h}\right)^3}$	$t_y = t_2$		
Section circulaire mince			$t_M = \frac{2T}{S} \cos \varphi$ $S = 2 \pi R e$	$t_A = t_B = \frac{2T}{S}$		$S_x = 0,5 S$
Profil mince en I			$t_{2(A)} = \frac{T}{I} (b - z) h$ $t_{2(A)} = \frac{T}{I e} \left[ 2 b e' h + \frac{e}{2} (h^2 - y^2) \right]$ $S = 2 h e$ $S' = 2 b e' h = \frac{S}{\lambda}$ $I = \frac{h^3}{3} (S + 6 S')$	$t_{2(A)} = \frac{T}{I} b h$ $t_{2(B)} = \frac{T}{S} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{6}}$ $t_{2(C)} = \frac{T}{S} \frac{1 + \frac{\lambda}{4}}{1 + \frac{\lambda}{6}}$		$S_x = 2 h e$

Figure 6.15: Effet du cisaillement p2 : notations utilisées  $T = T_y$ ,  $t_y = \sigma_{yx}$ ,  $y = \tilde{y}$ ,  $t_y = g(\tilde{y})$ ,  $S_y = k_y S$

si le module de Young est constant  $E = 1 \cdot 10^{10}$  (bois) et si l'on considère les deux mains fixes,

$$u_y(0) = 0, \quad (6.177)$$

$$u_y(a) = 0, \quad (6.178)$$

il est nécessaire de connaître aussi l'évolution du moment fléchissant entre les points  $A$  et  $B$ .

Pour un point  $H_2$  d'abscisse  $s$  comprise entre 0 et  $a$ , le torseur des efforts intérieurs est donné par,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\}, \quad (6.179)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_D. \quad (6.180)$$

Ceci nécessite de connaître la réaction  $R_2$  en fonction du chargement  $F$ . Il faut faire l'équilibre de la canne à pêche, en écrivant que la somme des torseurs est nulle :

$$\left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_D = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\} \quad (6.181)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} R_1 \vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} R_2 \vec{y} \\ R_2 \vec{y} \wedge (-a \vec{x}) \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ -F \vec{y} \wedge (-l \vec{x}) \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\} \quad (6.182)$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (R_1 + R_2 - F) \vec{y} \\ (aR_2 - lF) \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\} \quad (6.183)$$

d'où,

$$R_2 = \frac{l}{a} F, \quad (6.184)$$

$$R_1 = \left(1 - \frac{l}{a}\right) F. \quad (6.185)$$

Le torseur au point  $H_2$  avec  $s$  entre 0 et  $a$  est donc,

$$\{\tau_{eff.int.}\} = \sum_{seg+} \{\tau_{ext \rightarrow seg+}\}, \quad (6.186)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \frac{l}{a} F \vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_B + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \curvearrowright \\ 0 \end{array} \right\}_D, \quad (6.187)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \frac{l}{a} F \vec{y} \\ \frac{l}{a} F \vec{y} \wedge (s-a) \vec{x} \end{array} \right\}_{H_2} + \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ -F \vec{y} \wedge (s-l) \vec{x} \end{array} \right\}_{H_2}, \quad (6.188)$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} \left(\frac{l}{a} - 1\right) F \vec{y} \\ F \left(\frac{l}{a}(a-s) + (s-l)\right) \curvearrowright \end{array} \right\}_{H_2} \quad (6.189)$$

Pour connaître le déplacement en tout point, il suffit d'intégrer deux fois, mais en faisant cela pour chaque tronçon, puisque les expressions des moments fléchissants changent. Pour le tronçon entre  $A$  et  $B$  :

$$u_{y2}(s) = \int_{s''=0}^s \left( \int_{s'=0}^{s''} \frac{F \left( \frac{l}{a}(a-s') + (s'-l) \right)}{E \pi \frac{(d_1 + \frac{s'}{t}(d_2-d_1))^4}{64}} ds' \right) ds'' + A_2 s + B_2. \quad (6.190)$$

Pour le tronçon entre  $B$  et  $D$  :

$$u_{y1}(s) = \int_{s''=a}^s \left( \int_{s'=a}^{s''} \frac{F(s'-l)}{E \pi \frac{(d_1 + \frac{s'}{t}(d_2-d_1))^4}{64}} ds' \right) ds'' + A_1 s + B_1. \quad (6.191)$$



Les 4 constantes sont déterminées par les 4 conditions :

$$u_{y2}(0) = 0, \quad (6.192)$$

$$u_{y2}(a) = 0, \quad (6.193)$$

$$u_{y1}(a) = u_{y2}(a), \quad (6.194)$$

$$\frac{du_{y1}}{ds}(a) = \frac{du_{y2}}{ds}(a), \quad (6.195)$$

avec les deux dernières équations qui traduisent le raccordement des deux fonctions : les déplacements et les pentes doivent être les mêmes.

La résolution, certes compliquée des intégrales, peut être faite à l'aide de Maxima.

### 6.6.4 Chargement maximal

Le moment fléchissant induit des contraintes  $\sigma_x x$  qui sont maximales en module sur les fibres supérieure et inférieure. En ces fibres, les contraintes de cisaillement  $\sigma_{yx}$  sont nulles. En ces fibres, la charge maximale admissible  $F_{max,flex}$  pour ne pas dépasser la limite d'élasticité est donc calculable avec les formules obtenues en flexion pure.

Le moment fléchissant induit des contraintes  $\sigma_x x$  qui sont nulle sur la fibre moyenne. En cette fibre pour une section symétrique, les contraintes de cisaillement  $\sigma_{yx}$  sont maximales. En ces fibres, la charge maximale admissible  $F_{max,cisa}$  pour ne pas dépasser la limite d'élasticité est donc calculable avec les formules obtenues en cisaillement pur.

Pour des poutres de section rectangulaire, ou circulaire, ou possédant un plan de symétrie dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ ,  $F_{max,flex} < F_{max,cisa}$ . Donc les contraintes limitantes apparaissent sur les fibres supérieure et inférieures.

Vous calculerez le chargement critique dans le cas de la flexion simple, avec les formules du chargement critique en flexion pure.

*détermination du chargement maximal !*

La réponse est dans la vidéo 210 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir les brevet 096.

### 6.6.5 résolution par Maxima

```
(%i1) restart;
f1(s):=(1*(3/0.3*(0.3-s)+(s-3))/(1e10*pi*(0.02+s/3*(0.005-0.02))^4/64));
f2(s):=(1*(s-3)/(1e10*pi*(0.02+s/3*(0.005-0.02))^4/64));
```

```
(%o1) restart
```

$$f1(s) := \frac{1 \left( \frac{3}{0.3} (0.3 - s) + (s - 3) \right)}{\frac{1.0 \cdot 10^{10} \pi \left( 0.02 + \frac{s}{3} (0.005 - 0.02) \right)^4}{64}}$$

$$f2(s) := \frac{1 (s - 3)}{\frac{1.0 \cdot 10^{10} \pi \left( 0.02 + \frac{s}{3} (0.005 - 0.02) \right)^4}{64}}$$

```
(%i4) truc01:integrate(f1(s),s);
truc02:subst(s1,s,truc01)-subst(0,s,truc01)+A2;
truc03:integrate(truc02,s1);
truc04:subst(s2,s1,truc03)-subst(0,s1,truc03)+B2;
```

$rat : replaced 0.02 by 1/50 = 0.02$   $rat : replaced -0.005 by -1/200 = -0.005$   $rat : replaced 10.0 by 10/1 = 10.0$   $rat : replaced 0.3 by 0.3$

$$(\%o4) \quad \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (7200000000 s - 9600000000)}{\pi (s^3 - 12 s^2 + 48 s - 64)}$$

$$(\%o5) \quad A2 + \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (7200000000 s1 - 9600000000)}{\pi (s1^3 - 12 s1^2 + 48 s1 - 64)} - \frac{0.96}{\pi}$$

$$(\%o6) \quad s1 A2 - \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (7200000000 s1 - 19200000000)}{\pi (s1^2 - 8 s1 + 16)} - \frac{0.96 s1}{\pi}$$

$$(\%o7) \quad B2 + s2 A2 - \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (7200000000 s2 - 19200000000)}{\pi (s2^2 - 8 s2 + 16)} - \frac{0.96 s2}{\pi} - \frac{7.6800000000000001}{\pi}$$

```
(%i8) truc05:integrate(f2(s),s);
truc06:subst(s1,s,truc05)-subst(0.3,s,truc05)+A1;
truc07:integrate(truc06,s1);
truc08:subst(s2,s1,truc07)-subst(0.3,s1,truc07)+B1;
```

$rat : replaced 0.02 by 1/50 = 0.02$   $rat : replaced -0.005 by -1/200 = -0.005$

$$(\%o8) \quad -\frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (2400000000 s - 8000000000)}{\pi (3 s^3 - 36 s^2 + 144 s - 192)}$$

$$(\%o9) \quad A1 - \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (2400000000 s1 - 8000000000)}{\pi (3 s1^3 - 36 s1^2 + 144 s1 - 192)} + \frac{0.30660901953816}{\pi}$$

$$(\%o10) \quad s1 A1 + \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (2400000000 s1 - 8800000000)}{\pi (3 s1^2 - 24 s1 + 48)} + \frac{0.30660901953816 s1}{\pi}$$

$$(\%o11) \quad B1 + s2 A1 - 0.3 A1 + \frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (2400000000 s2 - 8800000000)}{\pi (3 s2^2 - 24 s2 + 48)} + \frac{0.30660901953816 s2}{\pi} + \frac{1.167135872176048}{\pi}$$

conditions aux limites

```
(%i12) subst(0,s2,truc04)=0;
subst(0.3,s2,truc04)=0;
subst(0.3,s2,truc04)=subst(0.3,s2,truc08);
subst(0.3,s1,truc02)=subst(0.3,s1,truc06);
```

```
(%o12)                                     B2 = 0

(%o13)                                     B2 + 0.3 A2 -  $\frac{0.0018933528122718}{\pi}$  = 0

(%o14)                                     B2 + 0.3 A2 -  $\frac{0.0018933528122718}{\pi}$  = B1

(%o15)                                     A2 -  $\frac{0.019956962075297}{\pi}$  = A1

(%i16) B2s:0;
A2s:0.0018933528122718/pi/0.3;
B1s:0;
A1s:A2s-0.019956962075297/pi;

(%o16)                                     0

(%o17)                                      $\frac{0.006311176040906}{\pi}$ 

(%o18)                                     0

(%o19)                                     -  $\frac{0.013645786034391}{\pi}$ 

fonctions solutions

(%i52) truc09:float(subst(B2s,B2,subst(A2s,A2,truc04)));
truc10:float(subst(B1s,B1,subst(A1s,A1,truc08)));

(%o52)
-  $\frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (7.2 \cdot 10^9 s^2 - 1.92 \cdot 10^{10})}{\pi (s^2 - 8.0 s^2 + 16.0)}$  -  $\frac{0.95368882395909 s^2}{\pi}$  -  $\frac{7.6800000000000001}{\pi}$ 

(%o53)  $\frac{6.4000000000000002 \cdot 10^{-9} (2.4 \cdot 10^9 s^2 - 8.8 \cdot 10^9)}{\pi (3.0 s^2 - 24.0 s^2 + 48.0)}$  +  $\frac{0.29296323350377 s^2}{\pi}$  +  $\frac{1.171229607986365}{\pi}$ 
```

**fin de résolution par Maxima** On peut alors tracer la déformée de la canne à pêche figure 6.16.

## 6.7 Travail pratique : une poutre en flexion

Avant de venir pour ce travail pratique, je vous invite à regarder les vidéos suivantes

*Présentation du banc de tp sur le thème "flexion".*

accessible dans la vidéo 281 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Le kit de survie en modélisation sur le thème "flexion"*

accessible dans la vidéo 493 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Le compte-rendu type à trous qui est accessible via

[http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/l2/tp\\_flex.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/l2/tp_flex.pdf)



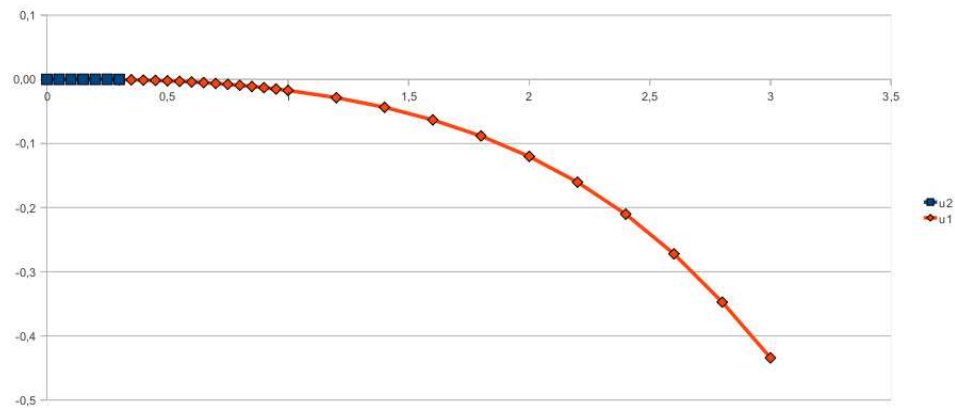


Figure 6.16: déformée d'une canne a pêche pour une force de 1 N en bout de canne.

n'est complété qu'à moitié. Vous ne serez évalués sur votre manière de compléter l'autre moitié de ce compte-rendu, qu'en terme de compétences et objectifs pédagogiques marron et noire.

Une grille critériée vous est fournie afin que vous puissiez optimiser votre travail via

<http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/12>.

*Lors d'un tp, comment faire lorsque le tracé des points  $b(V)$  en fonction de  $a(m)$ , complété comme il se doit par les incertitudes, met en évidence des incertitudes très petites qui empêchent de tracer avec précision la pente maximale et la pente minimale ?*

La réponse est dans la vidéo 293 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

.

Formation à la compétence bleue de statique des poutres droites.

## 6.8 Sollicitations composées : la totale !

La théorie décrite dans ce cours est linéaire. Lorsque le torseur des efforts intérieurs comporte plusieurs composantes (effort normal, efforts tranchants suivant  $\vec{y}$ , efforts tranchants suivant  $\vec{z}$ , moment de torsion, moment fléchissant autour de  $H\vec{y}$ , moment fléchissant autour de  $H\vec{z}$ ) les effets de chacun s'additionnent. Il est donc possible de résoudre chacun des problèmes de base, puis de sommer leurs contributions en terme de rotation, déplacement et contraintes.

Néanmoins, une vérification à posteriori doit être faite. Le torseur des efforts intérieurs a été calculé en considérant la poutre dans sa configuration initiale sans chargement. Une fois les déplacements de tous les points obtenus, il est possible de recalculer le torseur des efforts intérieurs dans la configuration finale avec chargement.

- Si les deux évaluations des composantes du torseur des efforts intérieurs sont proches, la théorie linéaire est suffisante.
- Si en un point, les deux évaluations des composantes du torseur des efforts intérieurs diffèrent fortement, la théorie linéaire n'est pas suffisante. Il faut recalculer les déplacements et rotation par rapport à cette nouvelle configuration... et itérer jusqu'à convergence. Cette modélisation *en grands déplacements et rotations* n'est pas l'objet de ce cours. Vous étudierez les systèmes non-linéaires en M2.

### 6.8.1 Lieu(x) de la contrainte maximale

La limite d'élasticité est une grandeur locale. Si le chargement de la structure augmente, il existe un point  $P$  de la poutre où la limite sera dépassée. La structure peut donc devenir plastique (acier, alu...) ou rompre (fonte...).

Nous avons vu que

- l'effort normal  $N$  crée une contrainte  $\sigma_{xx} = N/S$ , sur toute la section droite
- le moment fléchissant  $M_{fy}$  crée une contrainte  $\sigma_{xx} = M_{fy}\tilde{z}/I_{Hy}$  maximale sur les bords de la section droite dans la direction  $\vec{z}$ ,
- le moment fléchissant  $M_{fz}$  crée une contrainte  $\sigma_{xx} = M_{fz}\tilde{y}/I_{Hz}$  maximale sur les bords de la section droite dans la direction  $\vec{y}$ ,
- le moment de torsion  $M_x$  crée une contrainte  $\sigma_{\theta x} = M_x r/I_0$  maximale sur les bords de la section droite si elle est circulaire.
- les efforts tranchants  $T_y$  et  $T_z$  créent des contraintes  $\sigma_{yx}$  et  $\sigma_{zx}$  respectivement qui sont nulles sur les bords de la section droite.

On admettra que pour une structure de type poutre, c'est toujours sur la surface externe que la limite d'élasticité est dépassée en premier et non au coeur de celle-ci. Le dimensionnement se fera en prenant en compte traction, flexions et torsion. On appellera contrainte équivalente,

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + 4\sigma_{\theta x}^2}, \quad (6.196)$$

cherchera le point  $P$  de coordonnées  $(s, \tilde{y}, \tilde{z})$  où cette contrainte équivalente est maximale. Pour cela, on rappelle que

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{S} + \frac{M_{fy}\tilde{z}}{I_{Hy}} - \frac{M_{fz}\tilde{y}}{I_{Hz}}, \quad (6.197)$$

$$\sigma_{\theta x} = \frac{M_x r}{I_0} \text{ (pour une poutre de section circulaire).} \quad (6.198)$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 24, 25.

### 6.8.2 Les déplacements et les rotations : formules de Bresse.

Une attention toute particulière doit être portée sur les directions de déplacements :

- un effort normal implique des déplacement dans la direction de la fibre  $\vec{x}$ ,
- un effort tranchant dans la direction  $\vec{y}$  implique des déplacement dans la direction  $\vec{y}$ ,
- un effort tranchant dans la direction  $\vec{z}$  implique des déplacement dans la direction  $\vec{z}$ ,
- un moment de torsion implique une rotation autour de la direction  $\vec{x}$ ,
- un moment fléchissant autour de l'axe  $\vec{y}$  implique une rotation autour de la direction  $\vec{y}$  et un déplacement dans la direction  $\vec{z}$ ,
- un moment fléchissant autour de l'axe  $\vec{z}$  implique une rotation autour de la direction  $\vec{z}$  et un déplacement dans la direction  $-\vec{y}$ .

On peut soit calculer chacun des termes, leur associer à chacun une direction (ou un axe pour les rotations), puis sommer. Une autre solution est de calculer tous les termes à l'aide des formules de Bresse qui peuvent être construites par approche successive.

Soit une poutre reliant un point A à un point B, orientée de A vers B, le point courant étant noté H.

- Supposons que cette poutre soit infiniment rigide. Si le point A subit un torseur de déplacement composé d'un angle de rotation  $\vec{\omega}_A$  et d'une translation  $\vec{u}_A$ , alors le torseur de déplacement au point B est obtenu par la formule de changement de point.

$$\vec{\omega}_B = \vec{\omega}_A, \quad (6.199)$$

$$\vec{u}_B = \vec{u}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AB}. \quad (6.200)$$

- Supposons cette fois que le point A est immobile mais que seul se déforme un petit tronçon HH' de longueur  $ds$  à partir du point H. Le torseur de déplacement de H' est composé de  $\vec{\omega}_{H'} = (\alpha_x \vec{x} + \alpha_y \vec{y} + \alpha_z \vec{z})ds$  et d'une translation  $\vec{u}_{H'} = (\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z})ds$ . La déformation de ce petit segment implique un torseur de déplacement au point B :

$$\vec{\omega}_B = (\alpha_x \vec{x} + \alpha_y \vec{y} + \alpha_z \vec{z})ds, \quad (6.201)$$

$$\vec{u}_B = (\epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z})ds + (\alpha_x \vec{x} + \alpha_y \vec{y} + \alpha_z \vec{z})ds \wedge \vec{HB}. \quad (6.202)$$

- Supposons cette fois que le point A est mobile et que toute la poutre se déforme. Il suffit de faire la somme des torseurs : du premier et du second que l'on aura intégré le long de toute la poutre AB. On obtient les formules de Bresse ci-dessous.

Soit une poutre dont l'orientation de la fibre moyenne est de  $P_{deb}$  à  $P_{fin}$ , si le torseur des déformations est noté,

$$\{Def_H\} = \left\{ \begin{array}{c} \alpha_x \vec{x} + \alpha_y \vec{y} + \alpha_z \vec{z} \\ \epsilon_x \vec{x} + \gamma_y \vec{y} + \gamma_z \vec{z} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} M_x/GI_0^c \vec{x} + M_y/EI_{Hy} \vec{y} + M_z/EI_{Hz} \vec{z} \\ N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z} \end{array} \right\}_H, \quad (6.203)$$

avec le module de Coulomb  $G$  donné par (Eq. ??)

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (6.204)$$

Pourquoi doit-on utiliser dans les formules de Bresse, les valeurs corrigées des aires des sections et du moment polaire ?

La réponse est dans la vidéo 008 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Alors le torseur de déplacement au point  $P_{fin}$  par rapport au torseur de déplacement du point  $P_{deb}$  est,

$$\begin{aligned}
 \{U_{P_{fin}}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\omega}_{P_{fin}} \\ \tilde{u}_{P_{fin}} \end{array} \right\}_{P_{fin}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\omega}_{P_{deb}} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (\alpha_x \tilde{x} + \alpha_y \tilde{y} + \alpha_z \tilde{z}) ds \\ \tilde{u}_{P_{deb}} + \omega_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (\epsilon_x \tilde{x} + \gamma_y \tilde{y} + \gamma_z \tilde{z}) ds \\ \quad + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (\alpha_x \tilde{x} + \alpha_y \tilde{y} + \alpha_z \tilde{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \end{array} \right\}_{P_{fin}} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\omega}_{P_{deb}} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/GI_0^c \tilde{x} + Mf_y/EI_{Hy} \tilde{y} + Mf_z/EI_{Hz} \tilde{z}) ds \\ \tilde{u}_{P_{deb}} + \tilde{\omega}_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (N/ES \tilde{x} + T_y/GS_y \tilde{y} + T_z/GS_z \tilde{z}) ds \\ \quad + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/GI_0^c \tilde{x} + Mf_y/EI_{Hy} \tilde{y} + Mf_z/EI_{Hz} \tilde{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \end{array} \right\}_{P_{fin}} \quad (6.205)
 \end{aligned}$$

Les formules de Bresse ci-dessus sont relatifs à la cinématique 3. Nous rappelons ci-dessous, les formules de Bresse pour la cinématique 2, qui ne diffèrent que par 3 termes :

$$\begin{aligned}
 \{U_{P_{fin}}\} &= \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\omega}_{P_{fin}} \\ \tilde{u}_{P_{fin}} \end{array} \right\} \\
 &= \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\omega}_{P_{deb}} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/G\mathbf{I_0} \tilde{x} + Mf_y/EI_{Hy} \tilde{y} + Mf_z/EI_{Hz} \tilde{z}) ds \\ \tilde{u}_{P_{deb}} + \tilde{\omega}_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (N/ES \tilde{x} + T_y/G\mathbf{S_y} \tilde{y} + T_z/G\mathbf{S_z} \tilde{z}) ds \\ \quad + \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/G\mathbf{I_0} \tilde{x} + Mf_y/EI_{Hy} \tilde{y} + Mf_z/EI_{Hz} \tilde{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \end{array} \right\}_{P_{fin}} \quad (6.206)
 \end{aligned}$$

• **Erreur classique :** Une fois les formules de Bresse utilisées, votre résultat ne doit plus faire apparaître les coordonnées du point  $H$ . Si c'est le cas, c'est que vous n'avez pas effectué l'intégration entre les abscisses  $s_{P_{deb}}$  et  $s_{P_{fin}}$ .

• **Erreur classique :** Si dans un problème donné, le déplacement en  $P_{fin}$  est connu et que vous recherchez le déplacement en  $P_{deb}$ , écrivez la formule de Bresse comme ci-dessus, puis passez les termes complémentaires à  $\tilde{u}_{P_{fin}}$  de l'autre côté de l'égalité.

• **Erreur classique :** Si vous utilisez les formules de Bresse entre un point  $s_{P_{deb}}$  et  $s_{P_{fin}}$  et que vous devez couper l'intégrale en deux en passant par un point  $s_{P_{int}}$  (comme "intermédiaire", la formule de Bresse en déplacement s'écrit :

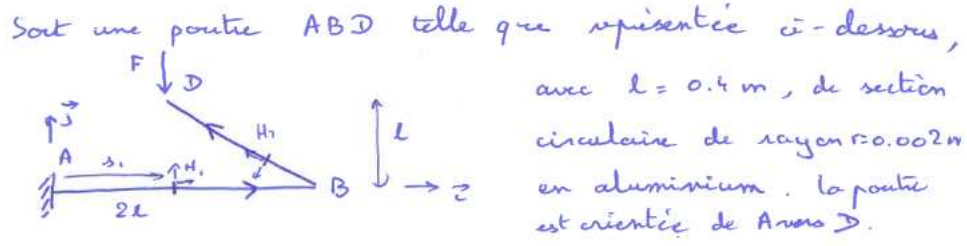


Figure 6.17: Une poutre constituée de deux segments de droite.

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_{P_{fin}} &= \vec{u}_{P_{deb}} + \vec{\omega}_{P_{deb}} \wedge P_{deb} \vec{P}_{fin} \\
 &+ \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{int}}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\
 &+ \int_{s_{P_{deb}}}^{s_{P_{int}}} (M_x/GI_0^c \vec{x} + M_{f_y}/EI_{Hy} \vec{y} + M_{f_z}/EI_{Hz} \vec{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds \\
 &+ \int_{s_{P_{int}}}^{s_{P_{fin}}} (N/ES \vec{x} + T_y/GS_y \vec{y} + T_z/GS_z \vec{z}) ds \\
 &+ \int_{s_{P_{int}}}^{s_{P_{fin}}} (M_x/GI_0^c \vec{x} + M_{f_y}/EI_{Hy} \vec{y} + M_{f_z}/EI_{Hz} \vec{z}) \wedge \vec{H} \vec{P}_{fin} ds. \quad (6.207)
 \end{aligned}$$

Vous noterez bien que le vecteur après le produit vectoriel reste  $\vec{H} \vec{P}_{fin}$  dans les deux intégrales.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 056, 074 et 097.

## 6.9 L'assemblage de poutres droites

Supposons, dans un repère direct  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , qu'une poutre soit faite de deux segments AB et BC, dont les directions de fibre moyenne ne sont pas les mêmes.

### 6.9.1 Le principe

Le calcul du torseur des efforts intérieurs dans chaque segment AB et BC se fait comme précédemment. Le produit vectoriel pour le calcul du moment peut simplement faire apparaître deux composantes dans chacune des directions  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ . Pour le calcul du chargement maximal, la recherche de la contrainte maximale est faite comme précédemment.

Pour les déplacements et les rotations, les formules de Bresse précédentes peuvent être utilisées : vous veillerez tout particulièrement à exprimer les repères locaux  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , dans le repère global  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

### 6.9.2 Un exemple

Soit la poutre modélisable telle que montré figure 6.17

Soit  $H_1 \in [A, B]$  avec  $\overrightarrow{AH_1} = s_1 \vec{e}$

$$\left\{ \mathcal{C}_{eff}^{int}_{H_1} \right\} = \sum_{seg} \left\{ \mathcal{C}_{seg} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -F \vec{j} \\ 0 \end{matrix} \right\}_D = \left\{ \begin{matrix} -F \vec{j} \\ -F \vec{j} \cdot \overrightarrow{DH_1} \end{matrix} \right\}_{H_1}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} -F \vec{j} \\ -F \vec{j} \cdot [(-l+s_1) \vec{e} - l \vec{j}] \end{matrix} \right\}_{H_1} = \left\{ \begin{matrix} -F \vec{j} \\ +F(s_1-l) \vec{k} \end{matrix} \right\}_{H_1}$$

On passe dans le repère local pour identifier les composantes :  $\vec{e} = \vec{x}$  ;  $\vec{j} = \vec{y}$  ;  $\vec{k} = \vec{z}$

$$= \left\{ \begin{matrix} -F \vec{y} \\ F(s_1-l) \vec{z} \end{matrix} \right\}_{H_1}$$

donc : effet tranchant dans la direction  $\vec{y}$   $T_{y_1} = -F$

moment fléchissant autour de l'axe  $\vec{z}$   $M_{z_1} = F(s_1-l)$

la contrainte maximale dans AB est en fibre supérieure ou inférieure

$$\sigma_{max} = - \frac{M_{z_1}(s_1)(\pm r)}{I_{H_3}} = (\pm) \frac{F(l-s_1) r}{\frac{\pi r^4}{4}}$$

$$= (\pm) \frac{F(l-s_1) 4}{\pi r^3}$$

Comme  $s_1 \in [0, 2l]$ , le maximum est obtenu en  $s_1=0$  ou  $s_1=2l$

$$\sigma_{max} = \frac{4Fl}{\pi r^3}$$

Figure 6.18: Contraintes au point H1 pour une poutre constituée de deux segments de droite.

**La sollicitation maximale** On doit la calculer dans chacun des tronçons de poutre. Pour le tronçon AB, voir figure 6.18.

Pour le tronçon BD, voir figure 6.19.

Soit  $H_2 \in BD$  avec  $\overrightarrow{BH_2} = s_2 \left( \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \right)$

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{E}_{\text{int } H_2} \right\} &= \sum_{\text{seg}+} \left\{ \mathcal{E}_{\text{seg}+} \right\} = \left\{ \begin{matrix} -F\vec{j} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{\mathcal{D}} = \left\{ \begin{matrix} -F\vec{j} \\ -F\vec{j} \cdot \overrightarrow{DH_2} \end{matrix} \right\}_{H_2} \\ &= \left\{ \begin{matrix} -F\vec{j} \\ -F\vec{j} \cdot n(\sqrt{2}l - s_2) \left( \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \right) \end{matrix} \right\}_{H_2} = \left\{ \begin{matrix} -F\vec{j} \\ F(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}) \vec{k} \end{matrix} \right\}_{H_2} \end{aligned}$$

On passe dans le repère local pour identifier les composantes :  $\vec{n} = \left( \frac{-\vec{i} + \vec{j}}{\sqrt{2}} \right)$  ; on s'est dans l'autre sens dont on en a besoin

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \frac{+\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{2}} ; \quad \vec{k} = \vec{z} \\ &= \left\{ \begin{matrix} +\frac{F}{\sqrt{2}} \vec{v} + \frac{F}{\sqrt{2}} \vec{j} \\ F(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}) \vec{y} \end{matrix} \right\}_{H_2} \end{aligned}$$

donc : effort normal,  $N_2 = -\frac{F}{\sqrt{2}}$  (compression si  $F > 0$ )

effort tranchant  $T_{32} = \frac{F}{\sqrt{2}}$

moment fléchissant autour de l'axe  $\vec{z}$  :  $M_{32} = F(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}})$

la contrainte dans une section droite est

$$\sigma = -\frac{M_{32}(s_2) \left( \frac{+r}{4} \right)}{\frac{\pi r^4}{4}} + \frac{N_2(s_2)}{\pi r^2}$$

Pour  $s_2 \in [0, \sqrt{2}l]$ ,  $(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}) \in [l, 0]$ ,  $M_{32} \in [Fl, 0]$

la valeur maximale du moment fléchissant est obtenue

en  $s_2 = 0$  et est positive. la valeur maximale de la contrainte due à l'effort normal est  $\frac{-F}{\sqrt{2}\pi r^2}$

qui est négative. la contrainte due au moment fléchissant est négative ~~pour~~ pour  $\vec{y} = +r$  donc

$$\sigma_{mBD} = -\frac{Fl^4}{\pi r^3} - \frac{F}{\sqrt{2}\pi r^2}$$

Figure 6.19: Contraintes au point H2 pour une poutre constituée de deux segments de droite.



Pour l'aluminium, la limite d'élasticité en traction est la même que celle en compression.  
le cas le plus défavorable est  $\sigma_{max}$

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &> -\sigma_{ce} \\ F \left[ -\frac{24}{\pi r^3} + \frac{1}{\sqrt{2}\pi r^2} \right] &> -\sigma_{ce} \\ F &< \sigma_{ce} \left[ \frac{\pi r^2}{4l/r + 1/\sqrt{2}} \right] \\ F &< 20 \cdot 10^6 \left[ \frac{\pi \cdot 0.002^2}{4 \cdot 0.4/0.002 + 1/\sqrt{2}} \right] [N] \\ F &< 156 \text{ N}\end{aligned}$$

Figure 6.20: Contraintes maximale pour une poutre constituée de deux segments de droite.

*A quoi sert le repère local par rapport au repère global ?*

La réponse est dans la vidéo 030 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

On recherche alors le cas le plus défavorable pour calculer le chargement maximal, voir figure 6.20.

$$\vec{\omega}_D = \vec{\omega}_A + \int_A^B \frac{M_{y3z}(s_1)}{EI_{H_3}} ds_1 \vec{3} + \int_B^D \frac{M_{y3z}(s_2)}{EI_{H_3}} ds_2 \vec{3}$$

$$\vec{u}_D = \vec{u}_A + \vec{\omega}_A \wedge \vec{AD} + \int_A^B \frac{M_{y3z}(s_1)}{EI_{H_3}} \vec{3} \wedge \vec{H_1D} ds_1$$

$$+ \int_B^D \frac{M_{y3z}(s_2)}{EI_{H_3}} \vec{3} \wedge \vec{H_2D} ds_2 + \int_B^D \frac{N_z(s_2)}{ES} \vec{z} ds_2$$

Figure 6.21: Rotation d'un point d'une poutre constituée de deux segments de droite.



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 837.

**Une rotation** Pour un chargement 100 fois inférieur au chargement limite, on peut calculer la rotation du point D avec les formules de Bresse. La démarche est présentée figure 6.21 et le calcul est fait sous *wmaxima* ci-dessous.

```
(% i5) kill(all);Ty1(s1):=-F;mfz1(s1):=F*(s1-l);
      N2(s2):=-F/sqrt(2); Ty2(s2):=F/sqrt(2);mfz2(s2):=F*(l-s2/sqrt(2));
```

```
done (% o0)
```

```
Ty1(s1) := -F (% o1)
```

```
mfz1(s1) := F(s1 - l) (% o2)
```

```
N2(s2) := -F/sqrt(2) (% o3)
```

```
Ty2(s2) := F/sqrt(2) (% o4)
```

```
mfz2(s2) := F(l - s2/sqrt(2)) (% o5)
```

```
(% i6) Ihz:=pi*(2*r)^4/64;
```

```
pi*r^4 (% Ihz)
4
```

```
(% i10) omed:integrate(mfz1(s1)/(E*Ihz),s1,0,2*l)
      +integrate(mfz2(s2)/(E*Ihz),s2,0,sqrt(2)*l);
```

```
2^(3/2)*F*l^2 (% omed)
pi*E*r^4
```

```
(% i21) omedf:ev(omed,F=1.56,l=0.4,E=75e9,r=0.002);float(omedf);
```

```
0.2082^(3/2) (% omedf)
pi
```

```
0.1872657937606781 (% o21)
```



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 836.

**Un déplacement** Pour un chargement 100 fois inférieur au chargement limite, on peut calculer le déplacement du point D avec les formules de Bresse dans chacune des directions  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ . La démarche est présentée figures 6.22 et 6.23 et le calcul est fait sous *wxmaxima* ci-dessous.

$$\begin{aligned}
\vec{u}_D &= \vec{0} + \vec{0} \wedge \vec{AD} + \int_A^B \frac{M_{31}(s_1)}{EI_{H_3}} \vec{k} \wedge ((l-s_1)\vec{i} + l\vec{j}) ds_1 \\
&+ \int_B^D \frac{M_{32}(s_2)}{EI_{H_3}} \vec{k} \wedge \left[ \left(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right)(-\vec{i}) + \left(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right)\vec{j} \right] ds_2 \\
\vec{u}_D &= \int_B^D \frac{N_2(s_2)}{ES} \left( \vec{0} - \frac{\vec{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\vec{j}}{\sqrt{2}} \right) ds_2 \\
\vec{u}_D \cdot \vec{i} &= \int_A^B \frac{M_{31}(s_1)}{EI_{H_3}} (-1) + \int_B^D \frac{M_{32}(s_2)}{EI_{H_3}} \left(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right) (-1) ds_2 \\
&+ \int_B^D \frac{N_2(s_2)}{ES} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) ds_2
\end{aligned}$$

Figure 6.22: Déplacement dans la direction  $\vec{i}$  d'un point d'une poutre constituée de deux segments de droite.

$$\begin{aligned}
\vec{u}_D \cdot \vec{j} &= \int_A^B \frac{M_{31}(s_1)}{EI_{H_3}} (l-s_1) ds_1 + \int_B^D \frac{M_{32}(s_2)}{EI_{H_3}} \left(l - \frac{s_2}{\sqrt{2}}\right) (-1) ds_2 \\
&+ \int_B^D \frac{N_2(s_2)}{ES} \frac{1}{\sqrt{2}} ds_2
\end{aligned}$$

Figure 6.23: Déplacement dans la direction  $\vec{j}$  d'un point d'une poutre constituée de deux segments de droite.

Détermination du torseur de déplacement en un point

La réponse est dans la vidéo 209 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

(% i22) S:%pi\*r^2;

$$\pi r^2 \quad (\text{S})$$

(% i23) udi:integrate(mfz1(s1)/(E\*IHz)\*(-1),s1,0,2\*l)+integrate(mfz2(s2)/(E\*Ihz)\*(l-s2/sqrt(2))\*(-1),s2,0,2\*l)+integrate(N2(s2)/(E\*S)\*(-1/sqrt(2)),s2,0,sqrt(2)\*l);

$$\frac{Fl}{\sqrt{2}\pi E r^2} + \frac{4 \left( 32^{\frac{3}{2}} - 10 \right) F l^3}{3\pi E r^4} \quad (\text{udi})$$

(% i25) udif:ev(udi,F=1.56,l=0.4,E=75e9,r=0.002);float(udif);

$$\frac{0.1109333333333333 \left( 32^{\frac{3}{2}} - 10 \right)}{\pi} + \frac{2.0810^{-6}}{\sqrt{2}\pi} \quad (\text{udif})$$

$$-0.05348602889164912 \quad (\% \text{ o25})$$

(% i26) udj:integrate(mfz1(s1)/(E\*Ihz)\*(l-s1),s1,0,2\*l)+integrate(mfz2(s2)/(E\*Ihz)\*(l-s2/sqrt(2))\*(-1),s2,0,2\*l)+integrate(N2(s2)/(E\*S)\*(1/sqrt(2)),s2,0,sqrt(2)\*l);

$$-\frac{Fl}{\sqrt{2}\pi E r^2} + \frac{4 \left( 32^{\frac{3}{2}} - 10 \right) F l^3}{3\pi E r^4} - \frac{8 F l^3}{3\pi E r^4} \quad (\text{udj})$$

(% i30) udjf:ev(udj,F=1.56,l=0.4,E=75e9,r=0.002);float(udjf);

$$\frac{0.1109333333333333 \left( 32^{\frac{3}{2}} - 10 \right)}{\pi} - \frac{2.0810^{-6}}{\sqrt{2}\pi} - \frac{0.2218666666666666}{\pi} \quad (\text{udjf})$$

$$-0.1241093186352616 \quad (\% \text{ o30})$$



Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 089.

## 6.10 Travail pratique : une poutre constituée de plusieurs segments assemblés.

Avant de venir pour ce travail pratique, je vous invite à regarder les vidéos suivantes

*Présentation du banc de tp sur le thème "poutre non droite".*

accessible dans la vidéo 248 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

*Le kit de survie en modélisation sur le thème "assemblage de poutres droites"*

accessible dans la vidéo 494 disponible sur <http://umotion.univ-lemans.fr>. Regarde-la.

Le compte-rendu type à trous qui est accessible via

[http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/12/tp\\_asse.pdf](http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/12/tp_asse.pdf)

est quasiment vide. Vous serez évalués sur votre manière de compléter ce compte-rendu, qu'en terme de compétences et objectifs pédagogiques marron et noire.

Une grille critériée vous est fournie afin que vous puissiez optimiser votre travail via

<http://perso.univ-lemans.fr/~jmgenev/12>.

## Chapter 7

# Mesures de votre comportement et de vos ressentis lors de séances ”à son rythme”.

Merci de compléter ce tableau. Il permet un recueil de données pour une recherche en pédagogie.

numéro de séance	entre la séance précédente et la séance de ce jour ...			nombre de capacités détenues blanche 1, jaune 2, orange 3, verte 4, bleue 5	ressenti pendant cette séance				n° brevet actuellement travaillé
	nb d'heures travaillées	nb de vidéos regardées	n° de page lue		efficacité phase de questions/réponses ou débat scientifique	efficacité travail sur brevet	plaisir ressenti	entraide	
					(entourer : -2, nulle, -1, faible, 0 normale, 1 bonne, 2 extra)				
1					-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
2					-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
3					-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
4					-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
5					-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
6					-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
7					-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
8					-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
9					-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	
10					-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	-2/-1/0/1/2	

Figure 7.1: Grille de recueil de données pour la méthode CRAIES en L2.

Merci de compléter ce second tableau. Il permet de détecter les vidéos sans grand intérêt pour vous, mais aussi de recueil de données pour une recherche en pédagogie.



pseudo :					
nb de vidéos regardées depuis le début					
Séance 1				Séance 6	
Séance 2				Séance 7	
Séance 3				Séance 8	
Séance 4				Séance 9	
Séance 5				Séance 10	

numéro de vidéo	sans intérêt	peu d'intérêt	ok	intéressante	très intéressante
88					
311					
62					
249					
292					
310					
73					
60					
223					
273					
65					
255					
256					
257					
86					
306					
288					
241					
250					
251					
252					
244					
18					
253					
58					
74					
53					
258					
294					
61					
15					
16					
254					
239					
33					
34					
241					
250					
251					
2					
19					
222					
91					
238					

Figure 7.2: Grille de recueil de données pour la consultation de vidéos en L2.

numéro de vidéo	sans intérêt	peu d'intérêt	ok	intéressante	très intéressante
221					
252					
267					
237					
218					
220					
4					
303					
54					
57					
262					
219					
221					
263					
56					
264					
81					
265					
29					
266					
492					
330					
331					
332					
333					
334					
335					
336					
337					
338					
339					
340					
341					
343					
344					
235					
291					
31					
210					
281					
493					
293					
8					
30					
209					
248					
493					

Figure 7.3: Grille de recueil de données pour la consultation de vidéos en L2.