



Vibration des structures discrètes

Jean-Pierre Dalmont, Jean-Michel Génevaux, Sylvain Mezil, Jean-Claude
Pascal

► To cite this version:

Jean-Pierre Dalmont, Jean-Michel Génevaux, Sylvain Mezil, Jean-Claude Pascal. Vibration des structures discrètes. Engineering school. Licence professionnelle Ingénierie acoustique et vibratoire, Le Mans, 2012. cel-00697809

HAL Id: cel-00697809

<https://cel.hal.science/cel-00697809>

Submitted on 21 May 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Licence Professionnelle Ingenieurie Acoustique et Vibratoire

Mécanique :
Vibrations (systèmes discret)

[http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95](http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95)

Jean-Pierre Dalmont, Jean-Michel Génevaux, Sylvain Mézil, Jean-Claude Pascal

16 mai 2012

Table des matières

1	Méthode	3
2	dictionnaire	5
3	Examens des années précédentes	6
3.1	Avril 2012	6
3.1.1	butoir	6
3.1.2	pendule avec aimants répulsifs	6
3.1.3	ballade au Louvre	7
3.2	Avril 2011 : Le printemps est arrivé!	10
3.2.1	Recherche des équations du mouvement	10
3.2.2	Atterrissage d'un oiseau	11
3.3	Avril 2010 : méditations mécaniciennes au petit coin	11
3.3.1	A : mise en équation	12
3.3.2	B : Oscillations libres sans dissipation	12
3.3.3	C : Oscillations libres avec dissipation	12
4	Le cours	13
4.1	Les ceintures de vibration	13
4.2	Plan de progression dans cet enseignement	13
4.3	Unités et dimensions	13
4.3.1	Objectifs	13
4.3.2	Homogénéité, adimensionalisation	14
4.3.3	Adimensionalisation	14
4.3.4	Unités logarithmiques relatives ou absolues	14
4.3.5	Ordres de grandeurs	15
4.3.6	Brevets d'acquisition de connaissance	15
4.3.7	Brevets d'acquisition de compétence	15
4.3.8	Questionnaire d'auto-test	15
4.4	Vibration d'un système à 1 degré de liberté	16
4.4.1	Brevets d'acquisition de connaissance	19
4.4.2	Brevets d'acquisition de connaissance	23
4.4.3	Sytèmes à plusieurs degrés de liberté, liés entre eux par des conditions cinématiques	25
4.4.4	Brevets d'acquisition de connaissance	26
4.4.5	Brevets d'acquisition de connaissance	33
4.4.6	Brevets d'acquisition de connaissance	35
4.5	Mise en équation par Lagrange	36
4.6	Modes de fréquence nul	36
4.6.1	Brevets d'acquisition de connaissance	37
4.7	Vibrations forcées d'un système à 1 degré de libertés.	38
4.7.1	Brevets d'acquisition de connaissance	47
4.7.2	Brevets d'acquisition de connaissance	51
4.8	détermination des caractéristiques d'un système par la méthode de lissage par un cercle "circle fitting"	52

4.8.1	ammortissement structurel	52
4.8.2	ammortissement visqueux	53
4.8.3	Brevets d'acquisition de connaissance	56
4.8.4	Brevets d'acquisition de connaissance	58
4.8.5	Brevets d'acquisition de connaissance	62
4.8.6	Brevets d'acquisition de connaissance	66
4.8.7	Brevets d'acquisition de connaissance	67
4.9	Système à plusieurs degrés de liberté	68
4.9.1	Brevets d'acquisition de connaissance	72
4.9.2	Brevets d'acquisition de connaissance	74
4.9.3	Brevets d'acquisition de connaissance	76
4.9.4	Brevets d'acquisition de connaissance	84

Chapitre 1

Méthode

L'objectif de cet enseignement est de calculer les vibrations d'un corps solide indéformable à un seul degré de liberté, et d'étendre cette connaissance au cas de système ayant un nombre fini de degrés de liberté.

Ce polycopié est construit à partir du polycopié de cours de Jean-Claude Pascal. Les parties de texte encadrées sont directement tirées de son cours. Ce cours sera basé sur des nombreux exercices appelés *brevets* et testant une compétence particulière. Ils sont rassemblés dans un document appelé *banque de brevet*.

Chaque séance d'enseignement se déroulera comme suit :

- les 10 premières minutes sont consacrées à une lecture silencieuse du polycopié de cours,
- l'enseignant répond ensuite aux éventuelles questions afin d'éclaircir des points du cours,
- ceci fait, les étudiants, par groupe d'au maximum 4 personnes, essayent d'obtenir les brevets correspondants aux parties de cours déjà lues.

L'obtention d'un brevet doit témoigner de l'acquisition d'une connaissance. Les groupes pouvant avancer à des vitesses différentes, si vous avez l'impression de bien maîtriser un brevet, vous pouvez vous déclarer comme référent de ce brevet pour l'année en cours, et ainsi être sollicité par un autre étudiant qui a du mal à l'obtenir. La liste des référents des brevets est affichée dans la salle, ainsi que sur :

<http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>
rubrique "tableau des référents".

Il s'avère que lors de l'examen, les étudiants ont parfois du mal à réinvestir ces connaissances sur un autre exemple. Il leur faut transformer cette connaissance en compétence (capacité à appliquer une connaissance à un autre cas). La banque de brevet comporte donc des brevets bis qui sont à faire à la maison par chacun une fois le brevet obtenu.

Ce polycopié est divisé en plusieurs parties :

- Pour vérifier de façon individuelle que vous avez acquis les compétences nécessaires, des petits exercices ciblés, appelés brevets, sont disponibles dans le recueil *banque de brevets*. Ils ont été écrits suites aux erreurs rencontrées les plus fréquemment dans les copies d'examen. Cette banque de brevet concerne l'ensemble des trois années de formation à l'ENSIM. Un arbre des connaissances vous permet, en grisant les brevets dont vous êtes détenteur-trice de savoir où vous en êtes dans la formation proposée.
- Pour vous entraîner à manipuler les concepts et à prendre un peu de hauteur et vous approprier la démarche globale, des sujets de travaux dirigés et des sujets d'examens sont disponibles dans un polycopié spécifique. Les corrigés des td et examens sont disponibles sur UMTICE.
- Pour ceux qui le souhaitent, l'examen final classique de 1h15 sur une table n'aura pas lieu. Il peut être remplacé par le passage de ceintures (de blanche à noire) qui valident chacune une étape de la formation. Une ceinture est acquise lorsque :

- vous trouvez le(s) résultat(s),
- votre copie ne présente pas d'erreur d'homogénéité,
- les écritures de l'ensemble de votre copie sont complètes (vecteurs, bases, points d'expression d'un torseur, unités pour un résultat chiffré).

Vous pouvez tenter d'obtenir une ceinture lorsque vous vous sentez prêt-e à le faire. Elles sont passées de façon individuelle, dans l'ordre des couleurs. Vous ne pouvez passer qu'une ceinture par séance. Vous pouvez passer une ceinture autant de fois que vous le souhaitez (dans la réserve des places disponibles) jusqu'à obtention de celle-ci. Les passages de ceinture, s'arrêtent une semaine avant le jury de fin d'année. Pour s'inscrire au passage d'une ceinture,

- Vous complétez le fichier *inscription ceinture* disponible sur UMTICE, en inscrivant votre nom, la couleur de ceinture, le numéro de la tentative.
- Le jour choisi et à l'heure indiquée, vous vous présentez en salle td2.
- Vous écrivez sur votre copie la déclaration suivante : "*Je m'engage sur l'honneur à ne pas évoquer avec mes camarades le contenu du sujet de passage de ceinture.*". Cela permet à vos camarades de faire une mesure "libre et non faussée" de leurs savoirs scientifiques et non de leur compétence de mémorisation.
- L'enseignant vous donne le sujet.
- Vous répondez au sujet en respectant votre engagement.
- Vous allez déposer **le sujet et votre copie** dans le casier de JM Génévaux.

L'interfaçage avec les modalités de contrôle des connaissances qui nécessite une note sera fait par la formule $n = \frac{c}{n_c} * 20$, avec n la note, c le nombre de ceintures obtenues et n_c le nombre de ceintures disponibles.

Nous vous souhaitons une bonne collaboration entre vous. Au delà des nombreuses questions scientifiques, n'hésitez pas à nous faire part de vos remarques et suggestions pour améliorer cette méthode de travail.

Jean-Michel Génévaux, Sylvain Mézil, Jean-Pierre Dalmont
 jean-pierre.dalmont@univ-lemans.fr
 jmgenev@univ-lemans.fr
 sylvain.mezil@univ-lemans.fr

Attention ! Ne tentez pas d'obtenir les brevets de la banque de brevets dans l'ordre de leur numérotation mais en fonction du plan de formation qui apparaît au fil du photocopié.

Chapitre 2

dictionnaire

Il peut vous être utile de connaître les termes spécifiques à la mécanique en anglais. Voici donc une sélection de termes.

acéré	spiky
appuyé simplement	simply supported
coalescer	to coalesce
encastré	clamped
être à divergence nulle	to be divergence-less
isotherme	isothermal
l'abaque	the chart
la bobine	the coil
la dispersion	the scatter
la fréquence de pompage	the pump frequency
la fréquence de sonde	the imaging frequency
la fréquence supérieure	the overtone
la fuite	the leakage
la ligne nodale	the nodal line
la manche, la pochette, l'alésage	the sleeve
le moment quadratique d'une section droite	the flexural moment of inertia
la poutre	the beam
la pulsation	the angular frequency
la rainure	the groove
la rugosité	the ruggedness
la variable muette	the dummy variable
le flux entrant	the inward flow
le flux sortant	the outward flow
le jeu	the clearance
le module d'Young	the modulus of elasticity
le ventre de vibration	the antinode
les conditions aux limite	the boundary conditions
libre	free edge
se contracter	to shrink
serré	tight
tendu	taut

Chapitre 3

Examens des années précédentes

3.1 Avril 2012

Tout documents autorisés. Les trois exercices sont indépendants.

3.1.1 butoir

Une masse $m = 1$ kg est astreinte à se déplacer uniquement en translation dans la direction \vec{i} (figure 3.1). La pesanteur $g = 9.81$ m/s² est dans la direction $-\vec{j}$. En son point A, représentée par $\vec{OA} = x\vec{i}$, la masse est en contact avec un ressort de raideur $k = 120$ N/m, de longueur au repos $l_0 = 0.05$ m, sans y être attaché : le ressort n'exerce pas d'effort sur la masse si $x > l_0$. Le solide est en contact avec le plan horizontal ce qui introduit un frottement solide (de Coulomb) de coefficient $\mu = 0.2$. A l'instant $t = 0$, la masse est au repos avec $x = l_0$, lorsque cette masse subit un choc qui la propulse dans la direction $-\vec{i}$ à la vitesse $v_0 = 1.2$ m/s.

Pour un temps infini, qu'elle est la position de la masse ?

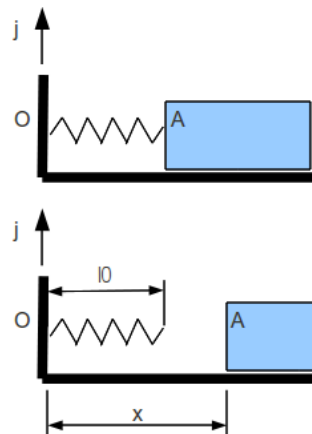


FIGURE 3.1 – Une masse contre un butoir.

3.1.2 pendule avec aimants répulsifs

Un pendule simple, dont l'une des extrémités est équipée d'un aimant, qui se balance en face d'un autre aimant orienté tel que la force soit répulsive entre ceux-ci présente deux positions d'équilibre si le second aimant est suffisamment proche du pendule (voir figure 3.2). Lorsque l'on effectue un essai de lâcher, on ne peut prévoir de quel côté le pendule va s'arrêter. La figure 3.3a présente les positions du pendule en fonction du temps. L'échelle de position est en volt, proportionnelle à l'angle. La position verticale ne correspond pas à une tension nulle. Un zoom figure 3.3b est fait

à proximité de l'instant où le pendule bascule d'un côté uniquement de l'aimant. Un zoom figure 3.3c est fait juste avant l'arrêt du pendule.

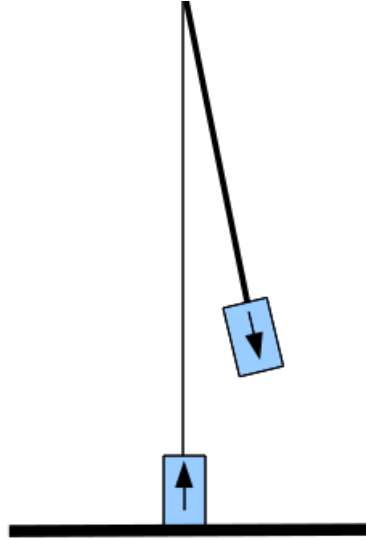


FIGURE 3.2 – Un pendule aimanté.

Les taux d'amortissement sont-ils les mêmes :

- ξ_1 juste après la bascule d'un côté de l'aimant (figure 3.3b) ,
- ξ_2 juste avant l'arrêt de celui-ci (figure 3.3c) ?

3.1.3 ballade au Louvre

Des travaux de percement d'un escalier sont menés actuellement au Louvre. Pour protéger des tableaux non déplaçables car de très grande taille (figure 3.4), ceux-ci sont mis sur des chariots, eux-même posés sur des ressorts (figure 3.5). L'un des chariots, dont la masse totale avec l'oeuvre est de 4200 kg, est posé sur 8 ressorts VIB1136-07 dont la hauteur à vide est $H = 0.142$ m et la hauteur sous une charge $F = 4800$ N est de $h = 0.120$ m.

- Si l'on souhaite qu'à une fréquence $f = 10$ Hz, le déplacement du chariot soit inférieur à 10% du déplacement du sol, quelle est la rigidité k_1 maximale de chacun des 8 ressorts ?
- Le choix des VIB1136-07 vérifie-t-il cette condition ?

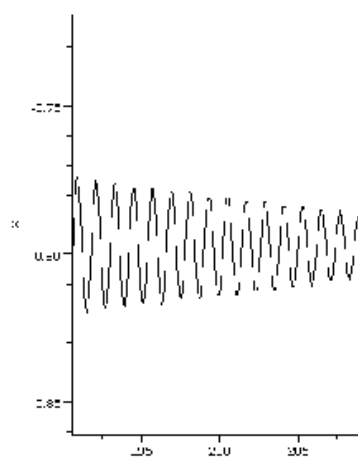


FIGURE 3.3 – Les oscillations du pendule.



FIGURE 3.4 – Les oeuvres sont déposées sur des chariots anti-vibratoires.



FIGURE 3.5 – Des systèmes anti-vibratoires.

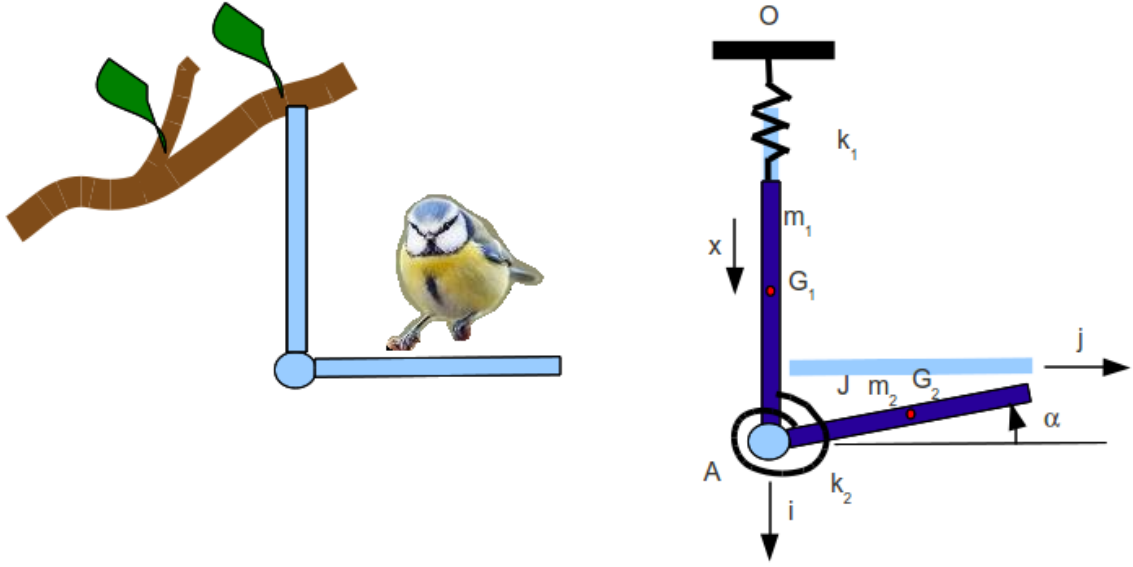


FIGURE 3.6 – Une mangeoire modélisée par deux solides.

3.2 Avril 2011 : Le printemps est arrivé !

Tout documents autorisés

Une mangeoire est modélisée par deux solides reliés entre eux par un ressort de rigidité en rotation k_2 en N.m/rad. Le solide de masse m_1 de centre de gravité G_1 est considéré comme guidé en translation dans la direction \vec{i} et relié au référentiel galiléen $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par un ressort de rigidité k_1 en N/m représentant la souplesse de la branche. Au repos, sous le poids propre des deux solides de centres de gravité G_1 et G_2 , les positions sont telles que $O\vec{G}_1 = \vec{0}$, $G_1\vec{A} = a\vec{i}$ et $A\vec{G}_2 = b\vec{j}$. Le mouvement des deux solides est paramétré par x et α , avec $O\vec{G}_1 = x\vec{i}$ et α l'angle de rotation du solide 2 autour de l'axe \vec{k} .

3.2.1 Recherche des équations du mouvement

1. Montrez que la vitesse du point G_2 par rapport au référentiel galiléen est

$$\vec{V}_{G_2/R_g} = (\dot{x} - b \cos \alpha \dot{\alpha}) \vec{i} - (b \sin \alpha \dot{\alpha}) \vec{j}. \quad (3.1)$$

2. Montrer que l'énergie cinétique T du système par rapport au référentiel galiléen, est :

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 ((\dot{x} - b \cos \alpha \dot{\alpha})^2 + (b \sin \alpha \dot{\alpha})^2) + \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2, \quad (3.2)$$

en précisant ce que représente J dans l'équation ci-dessus.

3. Montrer que l'énergie potentielle dans les deux ressorts est

$$V = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 \alpha^2. \quad (3.3)$$

4. On rappelle que le second membre de l'équation de Lagrange du mouvement par rapport au paramètre q_i peut s'écrire $-\frac{\partial V}{\partial q_i}$. Montrer que les équations de mouvement peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & -bm_2 \\ -bm_2 & J + m_2 b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Vous préciserez les hypothèses que vous avez dû faire pour obtenir ce système.

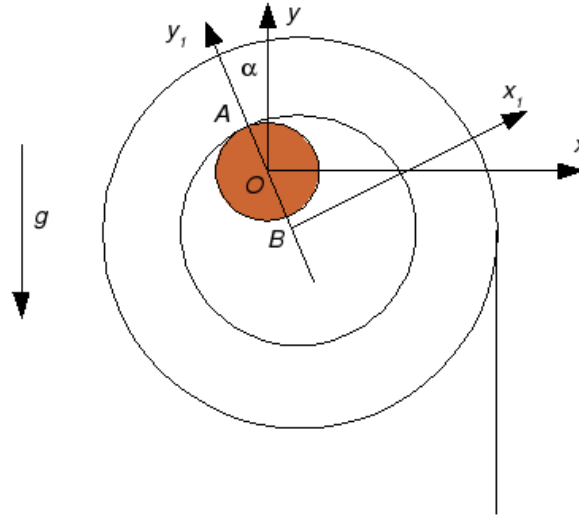


FIGURE 3.7 – Un rouleau de papier toilette oscillant sur son support.

5. En posant $\tilde{x} = x/b$, $\tilde{J} = J/(m_2 b^2)$, $\tilde{m} = m_1/m_2$, $\tilde{k} = k_2/(b^2 k_1)$, $\tilde{\omega} = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{k_1/m_2}$, on peut adimensionnaliser le système. Quelles sont, pour les valeurs $\tilde{k} = 2$, $\tilde{m} = 1$, $\tilde{J} = 2$, les deux premières pulsations propres adimensionnelles $\tilde{\omega}_1$ et $\tilde{\omega}_2$?
6. Quels sont les vecteurs propres \vec{v}_1 et \vec{v}_2 associés à ces pulsations propres ?
7. Dessinez les formes propres associées, en prenant un déplacement unitaire pour le solide 1.

3.2.2 Atterrissage d'un oiseau

Supposons qu'un oiseau de masse identique que solide 2 se pose au point G_2 .

1. Comment sont transformées les grandeurs adimensionnelles \tilde{m} , \tilde{J} , \tilde{k} , ainsi que la grandeur ω_0 ?
2. Quelles sont les nouvelles valeurs de pulsations adimensionnelles $\tilde{\omega}_{1o}$ et $\tilde{\omega}_{2o}$?
3. Les pulsations dimensionnelles ω_{1o} et ω_{2o} sont-elles différentes des pulsations avant que l'oiseau ne se pose ?
4. A l'arrivée de l'oiseau, du fait de son poids propre, donnez le type de chargement en fonction du temps, que subit le perchoir.
5. Comment cette force se répartit-elle sur les deux équations en x et α ?
6. Dessinez l'allure des mouvements $x(t)$ et $\alpha(t)$.
7. Comment peuvent être calculées les amplitudes de chaque mode ?

3.3 Avril 2010 : méditations mécaniciennes au petit coin

Un rouleau de papier toilette peut être modélisé par un cylindre d'axe $B\vec{z}$ creux de rayon extérieur $r_3 = 0.05$ m et de rayon intérieur $r_2 = 0.02$ m. L'inertie en rotation du rouleau autour de son axe est $J = 0.0002$ kgm². Sa masse (avant usage) est $m = 0.15$ kg. Sous l'effet de la pesanteur $g = 9.81$ ms⁻², le cylindre intérieur de ce rouleau est en contact sur une génératrice $A\vec{z}$ avec un cylindre de bois de rayon $r_1 = 0.01$ m qui est considéré fixe. Le repère (O, \vec{x}, \vec{y}) associé au cylindre de bois est considéré galiléen.

Si le cylindre de papier toilette est écarté de sa position d'équilibre, le mouvement de celui-ci peut être décrit par l'angle α sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de glissement entre rouleau et cylindre de bois (voir figure 3.7).

3.3.1 A : mise en équation

1. Donnez l'expression de la vitesse du point B en fonction de r_1 , r_2 et $\dot{\alpha}$.
2. L'énergie cinétique T du cylindre est la somme de l'énergie de translation et de rotation. Donnez l'expression de T en fonction de m , r_1 , r_2 , $\dot{\alpha}$ et J .
3. Si l'on écrit cette énergie cinétique sous la forme $T = \frac{1}{2}J_t\dot{\alpha}^2$, donnez l'expression de cette inertie de rotation équivalente J_t .
4. Donnez la valeur numérique de J_t . Quelles sont ses unités ?
5. La force de rappel est due à la pesanteur. A partir de la position du point B , donnez l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur V en fonction de r_1 , r_2 , m , g et α .
6. Montrez en donnant l'expression de k en fonction de r_1 , r_2 , m , g , que l'équation de mouvement peut se mettre sous la forme,

$$J_t\ddot{\alpha} + k \sin \alpha = 0, \quad (3.5)$$

Donnez la valeur numérique de k . Quelles sont ses unités ?

7. Si les mouvements sont suffisamment petits, linéarisez cette équation.

3.3.2 B : Oscillations libres sans dissipation

1. Quelle est la pulsation propre ω_0 d'oscillation du rouleau ? Donnez sa valeur numérique en précisant les unités.
2. Quelle est la période T_0 d'oscillation du rouleau ? Donnez sa valeur numérique en précisant les unités.
3. Si le rouleau est écarté d'un angle $\pi/6$ et lâché sans vitesse initiale, donnez l'expression temporelle de α et tracez son évolution en fonction du temps.
4. En faisant un essai dans la salle d'examen, avec le matériel adéquat, ces valeurs sont-elles réalistes ?

3.3.3 C : Oscillations libres avec dissipation

On constate que le mouvement s'arrête au bout d'un certain temps. Ceci peut être dû à la résistance au roulement au contact entre les deux cylindres. On modélisera cette résistance au roulement en modifiant l'équation en mouvement en :

$$J_t\ddot{\alpha} + c\dot{\alpha} + k \sin \alpha = 0, \quad (3.6)$$

1. Quelle sont les unités du paramètre c ?
2. En faisant un essai dans la salle d'examen, avec le matériel adéquat, le mouvement est-il sous-amorti ?
3. La fonction suivante peut-elle être solution du mouvement que vous observez ?

$$\alpha(t) = Ae^{-\lambda t}e^{i\omega t}e^{\phi} \quad (3.7)$$

4. Quelle inéquation lie c , J_t et k pour que le mouvement soit sous-amorti ? Pour $c = 0.0005$ (pour les unités, voir votre réponse précédente), cette condition est-elle vérifiée ?
5. Quelles sont les expressions en fonction de c , J_t et k , de la pseudo pulsation ω , la pseudo période T et de λ ? Donnez leurs valeurs numériques en précisant les unités.
6. Pour les mêmes conditions initiales que précédemment, quelle sont les valeurs de A et de ϕ ? Vous préciserez les unités.
7. Si l'oeil ne distingue que des déplacement inférieurs au millimètre, au bout de combien de temps t_1 le cylindre paraîtra immobile ?
8. En faisant un essai dans la salle d'examen, avec le matériel adéquat, ce temps t_1 est-il réaliste ?

Chapitre 4

Le cours

4.1 Les ceintures de vibration

1. blanche : être venue une fois en cours de théorie des poutres pour récupérer le polycopié.
2. jaune : savoir calculer les vibrations libres d'un système à 1 degré de liberté.
3. orange : savoir calculer les vibrations forcées d'un système à 1 degré de liberté.
4. verte : savoir extraire les paramètres d'un système à partir de sa réponse forcée ou libre.
5. bleue : savoir calculer les vibrations libres d'un système à 2 degrés de liberté.
6. marron : savoir calculer les vibrations forcées d'un système à 2 degrés de liberté.
7. noire :

4.2 Plan de progression dans cet enseignement

Pour que vous veilliez à ne pas prendre du retard dans votre progression, veuillez compléter au fur et à mesure des séances les cases de la figure 4.1.

Plan de progression personnel en vibration

séances

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----

pages de cours

1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81
---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

brevets

211	212	60	155	213	224	36	143	144	135	136	137	138	145	147	146	148	149	150	603	157	156
			159	151	152	153	154	158	127	160	161	162	163	164	165	101	103	104	125	126	166

ceintures

blanche	jaune	orange	verte	bleue	marron	noire
---------	-------	--------	-------	-------	--------	-------

FIGURE 4.1 – Planning de progression.

4.3 Unités et dimensions

4.3.1 Objectifs

- Homogénéité d'une relation
 - Equation aux dimensions
 - Unités adimensionnelles.
- Unités angulaires : radian = unité physique. minutes et secondes d'arc.

- Unités logarithmiques relatives ou absolues, dimensionnées ou adimensionnées : dB, dBm, dBm - dBm = dB, dB/km, pH, octave, magnitude et niveau (visuelle, sismique), etc ...
- Ordres de grandeurs, échelles : de taille ; de masse ; de temps ; de puissance acoustique ; de puissance lumineuse ; débit d'information...
- Conversions des principales unités entre système métrique et système impérial

4.3.2 Homogénéité, adimensionalisation

Les grandeurs de part et d'autre d'une équation sont généralement de natures différentes. Par exemple, le principe fondamental de la dynamique en terme de résultante

$$\vec{F} = m\vec{\Gamma}_{G,S/R_0}, \quad (4.1)$$

exprime une relation entre un effort F , une masse m et l'accélération du centre de gravité d'un solide Γ (voir cours de "Mécanique Générale"). Cette écriture est intrinsèque : elle ne dépend pas du repère dans lequel les grandeurs sont exprimées (repère cartésien, cylindrique, sphérique, curviligne...). Vous devez vérifier pour chaque loi, que l'équation est homogène : que les dimensions sont les mêmes de part et d'autre d'un signe égalité. Dans l'exemple précédent, l'équation est homogène à une masse fois une longueur divisée par un temps au carré :

$$MLT^{-2}. \quad (4.2)$$

Les équations sont donc indépendantes de l'unité prise pour chaque grandeur (pour la longueur L : le mètre, le centimètre, le pouce...). Il suffit de choisir les mêmes unités de part et d'autre de l'équation. Lorsque vous sumez deux termes, ils doivent aussi être homogènes. Ajouter 1 carotte et un chou de fera pas 2 quelques choses, mais juste un début de pot-au-feu. Essayez d'additionner des km/h et des kg pour vous en convaincre. La norme internationale ISO 1000 (ICS 01 060) décrit les unités du Système international et les recommandations pour l'emploi de leurs multiples et de certaines autres unités. Le Système international compte sept unités de base : le mètre, le kilogramme, la seconde, l'ampère, le kelvin, la mole et la candela, censées quantifier des grandeurs physiques indépendantes.

4.3.3 Adimensionalisation

Des grandeurs sont sans dimension. Vous n'ignorez pas que le périmètre d'un cercle de rayon r est $p = 2\pi r$. Si on ne décrit qu'une partie du cercle une relation similaire lie la longueur de l'arc de cercle c au rayon : $c = \alpha r$. L'angle est donc $\alpha = c/r$ un rapport de deux longueurs : l'angle, exprimé en radian est sans dimension. De même, l'écoulement d'un fluide visqueux dépend du rapport entre les effets dynamiques et les effets visqueux. Lorsque l'on souhaite faire une maquette à échelle réduite, il faut conserver ce rapport entre les différentes forces : on conservera le nombre de Reynolds $Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{\rho vd}{\eta}$, avec d une dimension caractéristique de l'écoulement, v une vitesse caractéristique de l'écoulement, ν la viscosité cinématique, ρ la masse volumique et η la viscosité dynamique. L'adimensionalisation des équations est très utilisée en mécanique des fluides, beaucoup moins hélas en mécanique des solides. Ceci n'est en fait dû qu'à des habitudes différentes au sein des deux communautés. Adimensionaliser les équations à l'avantage de faire apparaître les groupements adimensionnels de paramètres qui régissent le comportement, mais présente l'inconvénient, en cas d'erreur de calcul par une omission d'un terme adimensionnel, de ne pas rendre l'équation non homogène, et donc enlève un moyen de vérifier le résultat final.

4.3.4 Unités logarithmiques relatives ou absolues

Des capteurs comme nos oreilles ne sont pas sensibles de façon linéaire au bruit. Il est donc intéressant de ne pas mesurer le niveau acoustique sur une échelle linéaire, mais logarithmique. De plus, prendre en compte le seuil d'audibilité pour définir l'échelle logarithmique amène à considérer un niveau de référence de pression de $P_{ref} = 10^{-12}$ Pa. On construit alors $L_p = 10 \log \left(\frac{p_{eff}^2}{p_{ref}^2} \right) = 20 \log \left(\frac{p_{eff}}{p_{ref}} \right)$ dont l'unité est alors le décibel noté dB, avec p_{eff} la pression efficace en Pa. Le choix

d'une échelle logarithmique dans la représentation graphique d'une relation entre deux grandeurs a et b peut être justifiée par :

- des répartitions des valeurs de a ou b de façon géométrique
- pour déterminer des coefficients lorsque la fonction liant a et b est non linéaire.

Prenons par exemple une relation théorique du type $b = a^{0.34}$. Si l'on cherche à vérifier expérimentalement l'exposant de cette relation, il est plus judicieux de tracer $\log b$ en fonction de $\log a$: la fonction théorique ($\log b = 0.34 \log a$) est une droite passant par l'origine, les points expérimentaux permettent de leur côté de déterminer la pente expérimentale (avec son incertitude) qui donne la valeur expérimentale du coefficient (avec son incertitude).

Si l'on soupçonne l'existence d'un modèle linéaire qui permette de simuler les points expérimentaux (et uniquement dans ce cas), il est intéressant de mesurer la pente moyenne donnée par ces points expérimentaux. Même si la loi théorique est linéaire $b = pa$, il est nécessaire de rechercher un modèle affine $b = pa + c$ pour ne pas forcer la droite à passer par le point de coordonnées (0,0), car les réglages de zéro sont souvent difficiles (frottements...). La droite dite **des moindres carrés** est donnée par la démarche suivante :

1. obtenir par essai N couples (a_i, b_i)
2. tracer la courbe et vérifier, à l'oeil, l'alignement des points (cela vous évitera d'essayer de faire passer une droite par des points voisins d'une parabole!).
3. calculer les estimateurs des coefficients de la droite des moindres carrés,

$$p = \frac{N \sum_{i=1}^N a_i b_i - \sum_{i=1}^N a_i \sum_{i=1}^N b_i}{N \sum_{i=1}^N a_i^2 - \left[\sum_{i=1}^N a_i \right]^2} \quad (4.3)$$

$$c = \frac{\sum_{i=1}^N b_i \sum_{i=1}^N a_i^2 - \sum_{i=1}^N a_i b_i \sum_{i=1}^N a_i}{N \sum_{i=1}^N a_i^2 - \left[\sum_{i=1}^N a_i \right]^2} \quad (4.4)$$

Les calculatrices et les programmes de traçage de courbes donnent souvent ces coefficients grâce à une courbe de tendance. La précision sur p et sur c ne sont pas reliées directement au coefficient de régression r souvent donné par les programmes. Ceci sera étudié en deuxième année de l'Ensim.

4.3.5 Ordres de grandeurs

Il ne suffit pas que votre mesure soit donnée dans des unités cohérentes, par exemple si votre capteur mesure la vitesse du cycliste en descente par la rupture de deux faisceaux lasers distants de 1 cm dans un intervalle de temps de $12.3 \cdot 10^{-2}$ s, encore faut-il que la valeur soit cohérente. Dans le cas de votre cycliste, il roule à 0,29 km/h ! On compte sur votre expérience.

4.3.6 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 211, 212, 60. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

4.3.7 Brevets d'acquisition de compétence

Pour vérifier que vous savez réinvestir cette connaissance sur un autre cas, je vous invite à obtenir les brevets 155, 213, 224, 224bis et 60 bis. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

4.3.8 Questionnaire d'auto-test

Pour vous auto-évaluer sur ce paragraphe, je vous invite à faire le qcm1a001 disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

4.4 Vibration d'un système à 1 degré de liberté

1 – SYSTEME MECANIQUE ELEMENTAIRE

Le **modèle** du système mécanique élémentaire considère le mouvement d'une masse (corps rigide) par rapport à une partie fixe. On parle de système à 1 **degré de liberté** (DDL) quand la masse unique a un mouvement dans une seule direction (translation ou rotation autour d'un axe). Si une ou plusieurs masses ont des mouvements de translation et de rotation dans plusieurs directions, il s'agit d'un système à plusieurs degrés de liberté. Malgré sa simplicité le système à 1 DDL peut représenter le **comportement dynamique** de systèmes très variés dans le domaine des basses fréquences. La **modélisation** considère une **masse équivalente** en mouvement qui possède des liaisons avec les parties fixes caractérisées par une **raideur équivalente** (souvent schématisé par un ressort).

1.1 - Equation du mouvement

Il existe principalement deux types de systèmes : les systèmes de translation et les systèmes de torsion.

1.1.1 – Systèmes avec mouvement de translation

Ils sont schématisés par le système masse – ressort : la masse m [en kg] est animée d'un mouvement de translation dans la direction x auquel s'oppose la force due à la raideur du ressort. Dans le domaine linéaire du ressort, le coefficient de raideur k [en N/m] est une constante et la force de réaction $F_k = -kx$.

Le principe d'Alembert permet d'écrire l'équilibre dynamique du système masse-ressort (Figure 1.1)

$$F_k(t) = F_i(t)$$

entre la **force dynamique** $F_i(t) = m \frac{d^2 x}{dt^2} = m\ddot{x}$
et la **force de réaction** exercée par le ressort $F_k(t) = -kx$
(le signe $-$ est du à la force qui s'oppose au déplacement)

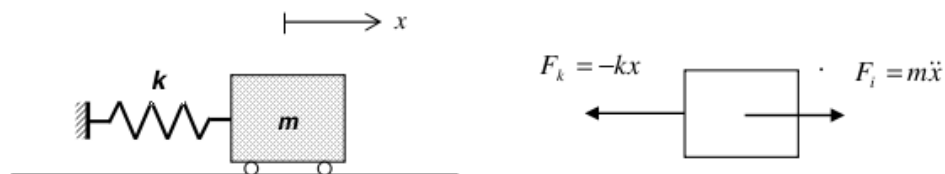


Figure 1.1 – Equilibre du système masse-ressort

L'équation différentielle du mouvement (homogène du second ordre) se déduit de l'équation d'équilibre précédente

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (1)$$

Sa solution (voir Annexe) est une fonction périodique pour le déplacement

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) \quad (2a)$$

A et ϕ sont l'amplitude et la phase qui dépendent des conditions initiales et ω est la pulsation (ou fréquence angulaire)

$$\text{vitesse : } \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x} = \omega A \cos(\omega t + \phi) \quad (2b)$$

$$\text{accélération : } \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \ddot{x} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) \quad (2c)$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$-m\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -kA \sin(\omega t + \phi)$$

La **pulsation naturelle** est la valeur de ω qui satisfait la relation

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad [\text{en rad/s}] \quad (3)$$

ω_0 ne dépend que des constantes mécaniques du système. Les constantes A et ϕ dépendent des conditions initiales (\ddot{x} est intégré deux fois pour obtenir x , d'où deux constantes d'intégration). Les conditions initiales sont le déplacement x_0 et la vitesse v_0 à l'instant $t=0$:

$$\begin{aligned} x_0 = x(0) &= A \sin(\omega_0 0 + \phi) = A \sin \phi & [\text{m}] \\ v_0 = \dot{x}(0) &= \omega_0 A \cos(\omega_0 0 + \phi) = \omega_0 A \cos \phi & [\text{m/s}] \end{aligned}$$

donc $\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2 = \omega_0^2 A^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)$ et $\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{\omega_0 x_0}{v_0}$, soit

$$A = \frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \phi = \arctan \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \quad (4)$$

Le déplacement

$$\boxed{x(t) = \frac{\sqrt{\omega_0^2 x_0^2 + v_0^2}}{\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \arctan \frac{\omega_0 x_0}{v_0}\right)} \quad (5)$$

est la **réponse libre** du système à 1 degré de liberté non-amorti.

C'est une fonction harmonique à la pulsation naturelle ω_0 dont l'amplitude est imposée par les conditions initiales. Cette amplitude reste constante car la modélisation n'a pas pris en compte le phénomène de dissipation d'énergie présent dans tout système mécanique. Dans la réalité, une décroissance de l'amplitude avec le temps sera observée.

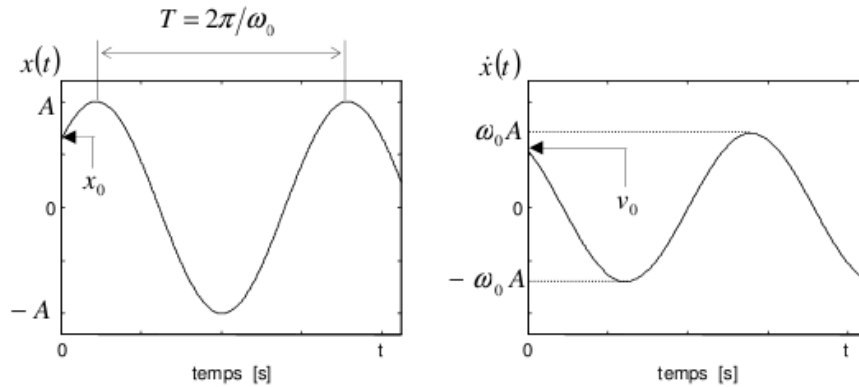


Figure 1.2 – Réponse libre du système à un degré de liberté (déplacement et vitesse) de pulsation propre $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Remarque 1

La solution de l'équation différentielle peut aussi s'exprimer par la somme d'une fonction sinus et d'une fonction cosinus :

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi) = A \sin \phi \cos \omega_0 t + A \cos \phi \sin \omega_0 t = B_1 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t$$

En utilisant cette forme de solution, les conditions initiales conduisent à

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t .$$

Il est aussi possible d'exprimer la solution à l'aide d'une seule fonction cosinus

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \theta) = A \cos \theta \cos \omega_0 t + A \sin \theta \sin \omega_0 t$$

A partir de l'expression précédente

$$A \cos \theta = x_0$$

$$A \sin \theta = -v_0 / \omega_0$$

ce qui permet de retrouver la même amplitude que précédemment

$$A = \sqrt{A^2 \cos^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta} = \sqrt{x_0^2 + v_0^2 / \omega_0^2}$$

et conduit à la phase

$$\theta = \arctan \frac{-v_0}{\omega_0 x_0}$$

On note qu'il existe une relation entre θ et ϕ l'angle de phase associée à la solution sinus car

$$\tan \theta = \frac{-v_0}{\omega_0 x_0} = -\cot \phi \quad \text{d'où} \quad \theta = \phi - \pi .$$

Remarque 2

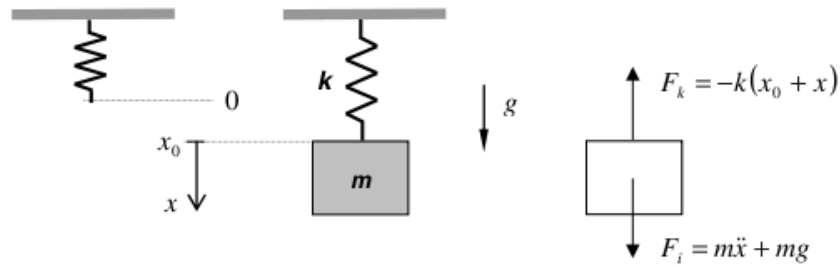


Figure 1.3 – Système masse-ressort suspendu

Système suspendu : au repos, la masse exerce une force de traction mg sur le ressort qui se traduit par un étirement initial x_0 . L'équation du mouvement s'obtient à partir de l'équilibre dynamique des forces appliquées à la masse : $F_k(t) - F_i(t) = 0$

$$m\ddot{x} + mg + kx + kx_0 = 0$$

Avec $mg = -kx_0$, on obtient la même équation du mouvement $x(t)$ que précédemment (centrée sur la position d'équilibre x_0).

4.4.1 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 36, 143, 144. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

1.1.2 – Systèmes de torsion

Un corps rigide oscille autour d'un axe (vibration de torsion).

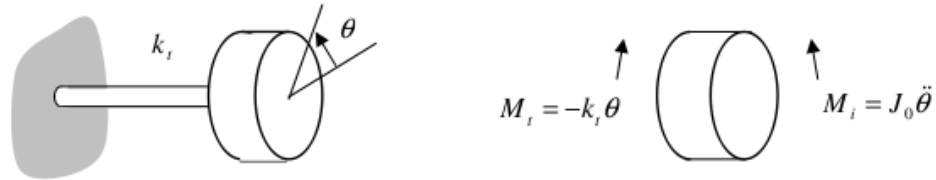


Figure 1.4 – Equilibre d'un système de torsion.

L'équilibre dynamique entre le moment dynamique $M_i(t) = J_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = J_0\ddot{\theta}$ et le moment de torsion $M_t(t) = -k_t\theta$ permet d'écrire l'équation du déplacement angulaire $\theta(t)$

$$J_0\ddot{\theta} + k_t\theta = 0 \quad (6)$$

J_0 moment d'inertie de la masse et k_t raideur de torsion [en Nm/rad].

La pulsation naturelle est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_t}{J_0}} \quad [\text{rad/s}] \quad (7)$$

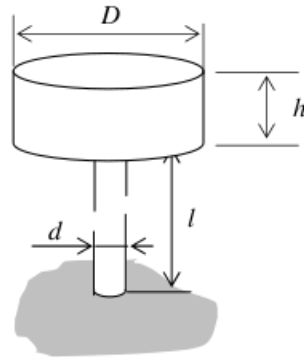
et la **réponse libre** du système non-amorti

$$\theta(t) = \frac{\sqrt{\omega_0^2 \theta_0^2 + \dot{\theta}_0^2}}{\omega_0} \sin\left(\omega_0 t + \arctan \frac{\omega_0 \theta_0}{\dot{\theta}_0}\right) \quad (8)$$

Exemple : pour un disque de diamètre D et d'épaisseur h , à l'extrémité d'un arbre de longueur l et de diamètre d

$$J_0 = \frac{mD^2}{8} \quad \text{et} \quad k_t = \frac{G\pi d^2}{32l}$$

avec la masse $m = \rho h \frac{\pi D^2}{4}$ et le module de cisaillement G .



1.2 – Raideurs équivalentes

Le modèle le plus simple pour représenter la raideur correspond au ressort suspendant une masse. En négligeant la masse du ressort, les forces agissant sur la masse sont

- la force de gravité $F = mg$
- la force de réaction du ressort $F_k = -kx$

Le travail effectué en déformant le ressort est stocké dans le système sous la forme d'une **énergie potentielle** (travail de la force: $F = kx$)

$$U = \int_0^x k\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} kx^2$$

Le coefficient de raideur k est une constante qui montre que la force de réaction est proportionnelle à la déformation (qui augmente avec la masse). Ce modèle est valide jusqu'à un certain point au-delà duquel k n'est plus constant.

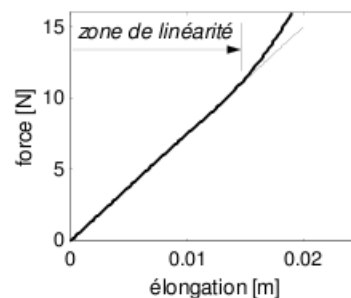
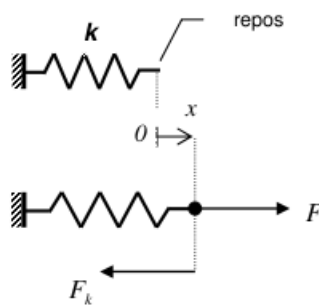


Figure 1.5 – Zone de comportement linéaire d'un ressort de constante $k = 750 \text{ N/m}$.

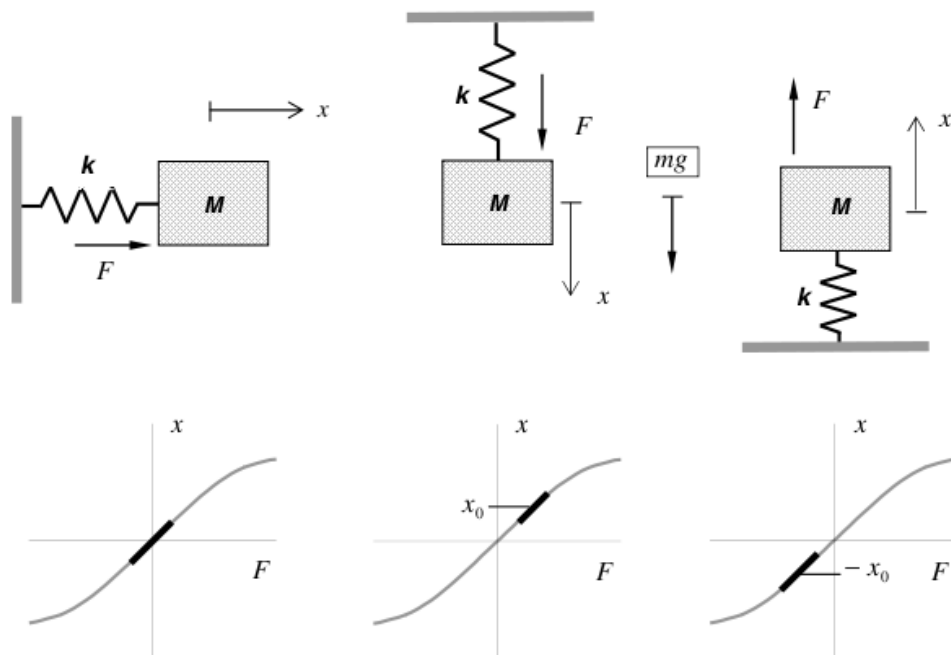


Figure 1.6 – Trois configurations pour un système masse ressort

1.2.1 – Raideurs en parallèle

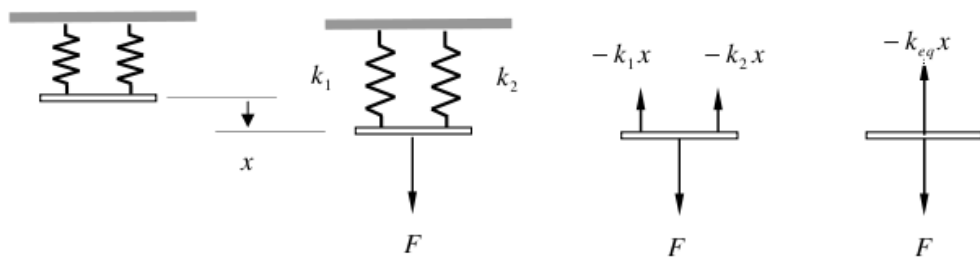


Figure 1.7 – Raideurs en parallèle

$$F = k_1x + k_2x = k_{eq}x$$

La raideur équivalente est la somme des raideurs k_1 et k_2

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

Ce résultat se généralise pour n raideurs en parallèle

$$k_{eq} = k_1 + k_2 + \dots + k_n \quad (10)$$

1.2.2 – Raideurs en série

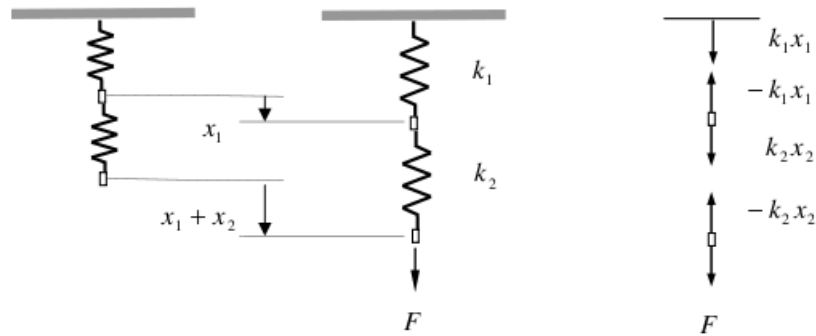


Figure 1.8 – Raideurs en série

L'équilibre des forces conduit aux relations suivantes :

$$k_1 x_1 = k_{eq} x \Rightarrow x_1 = \frac{k_{eq}}{k_1} x$$

$$k_2 x_2 = k_{eq} x \Rightarrow x_2 = \frac{k_{eq}}{k_2} x$$

L'élongation totale s'écrit alors $x = x_1 + x_2 \Rightarrow x = \left(\frac{k_{eq}}{k_1} + \frac{k_{eq}}{k_2} \right) x$

d'où

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}.$$

Ce résultat se généralise pour n raideurs en série

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}$$

Les exemples précédents considèrent que la rigidité k est une constante. Dans le cas où la rigidité k est fonction du déplacement x , le rigidité est dite non linéaire, et les solutions du mouvement écrites ci-dessus ne sont plus valables. On peut avoir ainsi, pour une excitation par une force à une fréquence f , une réponse à une autre fréquence f' . Dans le cas où f' est un multiple de f , on dit que f' est une harmonique de f , dans le cas où f est un multiple de f' on dit que f' est une sous-harmonique de f .

4.4.2 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 135, 136, 137, 138 et 145. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

1.2.3 – Raideurs de flexion

Dans l'ouvrage de Rao (*voir Références*), des raideurs de flexion (translation) et de torsion sont données pour quelques systèmes mécaniques simples. Elles peuvent être obtenues en utilisant les résultats du cours de RDM. Par exemple, la déformation statique d'une poutre sur appuis simples chargée par une masse M se calcule par

$$y(x) = \frac{Pbx}{6EIL} (L^2 - b^2 - a^2)$$

avec $L = a + b$

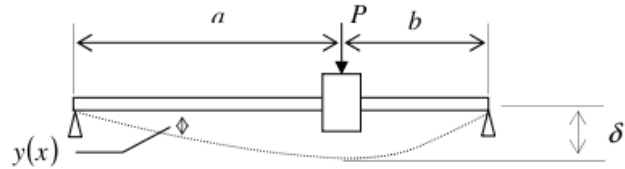


Figure 1.9 – Raideur équivalente d'un système masse-poutre

La **raideur équivalente** de la poutre s'obtient par ($k_{eq} \delta = Mg = P$)

$$k_{eq} = \frac{P}{\delta} = \frac{Mg}{\delta}$$

où $\delta = y(a) = \frac{Pa^2b^2}{3EIL}$ est la déflexion de la poutre à l'emplacement de la masse ($x = a$),
d'où

$$k_{eq} = \frac{P}{\delta} = \frac{3EIL}{a^2b^2}$$

1.3 – Masses équivalentes

Principe : Si T correspond à l'**énergie cinétique totale** de toutes les masses en mouvement (en translation et en rotation),

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 + \sum_j \frac{1}{2} J_j \dot{\theta}_j^2$$

la masse équivalente est définie par

$$T = \frac{1}{2} m_{eq} \dot{x}^2$$

\dot{x} est la vitesse au point où on veut calculer la masse équivalente (généralement, où se trouve définit la raideur équivalente).

Note :

- a) les masses en mouvement doivent être connectées rigidement entre elles sinon il s'agit d'un système à plusieurs degrés de liberté.
- b) pour les systèmes en mouvements de rotation, on considère le moment d'inertie équivalent

$$T = \frac{1}{2} J_{eq} \dot{\theta}^2$$

4.4.3 Systèmes à plusieurs degrés de liberté, liés entre eux par des conditions cinématiques

Soit un solide S_1 de masse m_1 , de rigidité k_1 par rapport à son mouvement repéré par une variable x_1 . Soit un autre solide S_2 de masse m_2 , de rigidité k_2 par rapport à son mouvement repéré par une variable x_2 . Si les deux solides sont indépendants et libres de tout effort extérieur, les équations du mouvement peuvent s'écrire :

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 = 0, \quad (4.5)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 = 0. \quad (4.6)$$

Si il existe une liaison cinématique qui implique une relation linéaire entre les deux variables, par exemple

$$x_2 = \alpha x_1, \quad (4.7)$$

alors le système des deux masses n'est qu'à un seul degré de liberté. Si l'on choisi x_1 comme degré de liberté "maitre" (x_2 est dit degré de liberté "esclave"), la seconde équation peut s'écrire,

$$m_2 \alpha \ddot{x}_1 + k_2 \alpha x_1 = 0, \quad (4.8)$$

et en sommant les deux équations,

$$(m_1 + m_2\alpha)\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2\alpha)x_1 = 0. \quad (4.9)$$

La grandeur $m = m_1 + m_2\alpha$ peut être appelée "masse apparente" du système, la grandeur $k = k_1 + k_2\alpha$, rigidité apparente du système.

Ceci peut aussi être déterminé par le calcul de l'énergie cinétique totale du système, que l'on écrit uniquement en fonction du degrés de liberté maître.

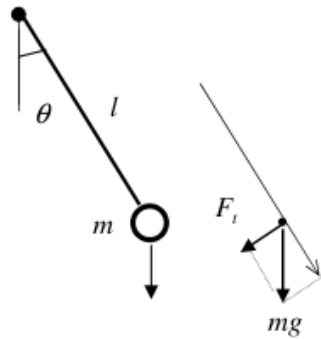
On peut donc réduire le un système à plusieurs degrés de liberté en un système à un seul degré de liberté, si ces degrés de liberté sont liés par une constante.

4.4.4 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 147, 146. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur [http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95](http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95).

1.4 – Linéarisation

1.4.1 – Pendule simple



$$J_0 \ddot{\theta} = M_t$$
$$M_t = F_t l = -mg l \sin \theta$$

Figure 1.10 – Pendule simple

Equation différentielle :

$$J_0 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0$$

Linéarisation pour les petits mouvements: $\sin \theta \approx \theta \Rightarrow J_0 \ddot{\theta} + mgl \theta = 0$

avec $J_0 = ml^2$

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \theta = 0$$

La pulsation propre du système est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

1.4.2 – Pendule composé

G : centre de gravité

$$J_0 \ddot{\theta} + Mgd \sin \theta = 0$$

$$J_0 \ddot{\theta} + Mgd \theta = 0 \quad (\text{Eq. linéarisée})$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{Mgd}{J_0}}$$

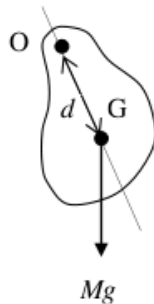
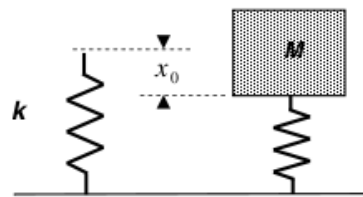


Figure 1.11 – Pendule composé

Longueur équivalente du pendule simple : $l = \frac{J_0}{Md}$

[APPLICATION 1] Détermination de la fréquence propre

Détermination de la fréquence propre à partir de l'écrasement x_0 du système de suspension



$$kx_0 = Mg$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{Mg/x_0}{M}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{x_0}}$$

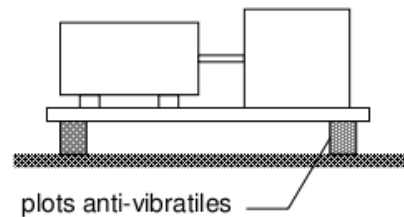


Figure 1.12 – Fréquence propre des plots anti-vibratiles

Ce principe s'applique également aux systèmes continus : ici une masse fixée sur une poutre. Si la masse de la poutre est négligeable devant la masse de l'ensemble, la poutre n'apportera que de la raideur au système (mouvement de flexion). La déflexion statique δ observée à l'emplacement de la masse permet d'obtenir la première fréquence propre du système

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta}}$$

Par exemple, pour le système de la Figure 1.9 : $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{3EIL}{M a^2 b^2}}$.

2 – AMORTISSEMENT VISQUEUX



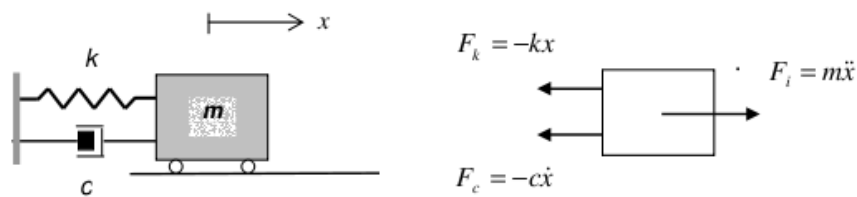
Figure 1.13 – Exemple d'amortisseur

L'amortisseur dissipe l'énergie. L'écoulement laminaire de l'huile crée une force de réaction proportionnelle à la vitesse du piston

$$F_c = -c \frac{dx(t)}{dt}$$

Le **coefficient d'amortissement** c dépend de la viscosité [en Ns/m]

Autre type d'amortisseur sensiblement proportionnel à la vitesse : un bloc de caoutchouc.



Equilibre des forces :

$$F_k + F_c - F_i = 0$$

d'où

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + c \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = 0$$

l'équation décrivant le mouvement d'un système amorti à 1 degré de liberté. En posant $x(t) = \alpha e^{rt}$, cette équation devient $(mr^2 + cr + k)\alpha e^{rt} = 0$. Puisque αe^{rt} ne peut pas être nul quel que soit t , c'est l'équation caractéristique suivante qui doit être vérifiée

$$mr^2 + cr + k = 0.$$

Ses solutions sont

$$\left. \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{c}{2m} \pm \frac{\sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

Plusieurs types de solutions sont envisageables en fonction de la valeur du discriminant $c^2 - 4km$: deux racines réelles, une racine double ou deux racines complexes.

Pour faciliter l'analyse, on définit le **coefficient d'amortissement critique** c_{cr}

$$c_{cr}^2 - 4km = 0 \quad \Rightarrow \quad c_{cr} = 2\sqrt{km} = 2m\omega_0$$

ω_0 pulsation naturelle non-amortie (fréquence ou pulsation propre)

Définition du **taux d'amortissement**

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} = \frac{c}{2m\omega_0}$$

Les racines de l'équation caractéristique peuvent donc s'écrire en fonction du taux d'amortissement

$$\left. \begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} \right\} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \quad x(t) = \alpha_1 e^{r_1 t} + \alpha_2 e^{r_2 t}$$

En fonction de la valeur de ζ , trois types de mouvement peuvent être observés :

- le mouvement sous-amorti (oscillations vibratoires amorties),
- le mouvement sur-amorti (retour à la position d'équilibre sans oscillations),
- le mouvement avec amortissement critique, qui correspond à la limite entre les deux cas précédents.

2.1 – Mouvement sous-amorti ($0 < \zeta < 1$)

$$r_1 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} \quad r_2 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

avec $j = \sqrt{-1}$ et $\sqrt{\zeta^2 - 1} = \sqrt{(-1)(1-\zeta^2)} = -j\sqrt{1-\zeta^2}$.

La solution de l'équation différentielle est de la forme

$$x(t) = \left(a_1 e^{j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t} + a_2 e^{-j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_0 t} \right) e^{-\zeta\omega_0 t}$$

a_1, a_2 sont des constantes complexes arbitraires

$$x(t) = A e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

où A et ϕ sont les constantes d'intégration et ω_d est la **pseudo-pulsation** (fréquence naturelle amortie)

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$$

Les conditions initiales permettent de déterminer les constantes

$$A = \sqrt{\frac{(v_0 + \zeta \omega_0 x_0)^2 + (x_0 \omega_d)^2}{\omega_d^2}}$$

$$\phi = \arctan \frac{x_0 \omega_d}{v_0 + \zeta \omega_0 x_0}.$$

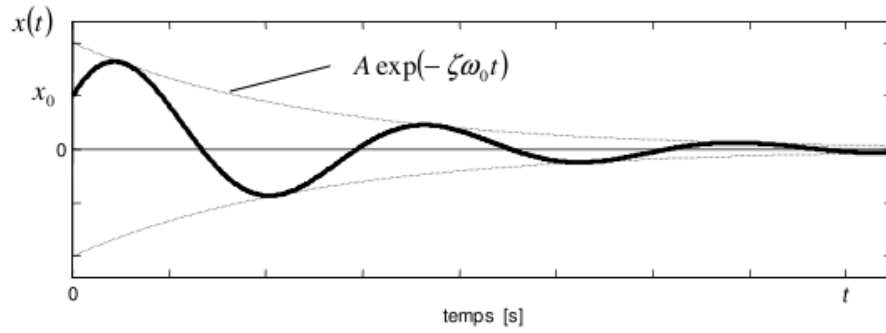


Figure 1.14 - Réponse libre d'un système sous-amorti ($\zeta < 1$)

2.2 – Mouvement sur-amorti ($\zeta > 1$)

$$r_1 = -\zeta \omega_0 + \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$r_2 = -\zeta \omega_0 - \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

La solution pour le déplacement est

$$x(t) = \left(a_1 e^{\sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_0 t} + a_2 e^{-\sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_0 t} \right) e^{-\zeta \omega_0 t}$$

a_1 et a_2 sont réels.

Les conditions initiales

$$x_0 = x(0) = a_1 + a_2$$

$$v_0 = \left. \frac{dx(t)}{dt} \right|_{t=0} = \left(-\zeta \omega_0 + \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) a_1 + \left(-\zeta \omega_0 - \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \right) a_2$$

conduisent à

$$a_1 = \frac{v_0 + \left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0 x_0}{2\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad \text{et} \quad a_2 = \frac{-v_0 + \left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_0 x_0}{2\omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

Un système sur-amorti n'est pas un oscillateur.

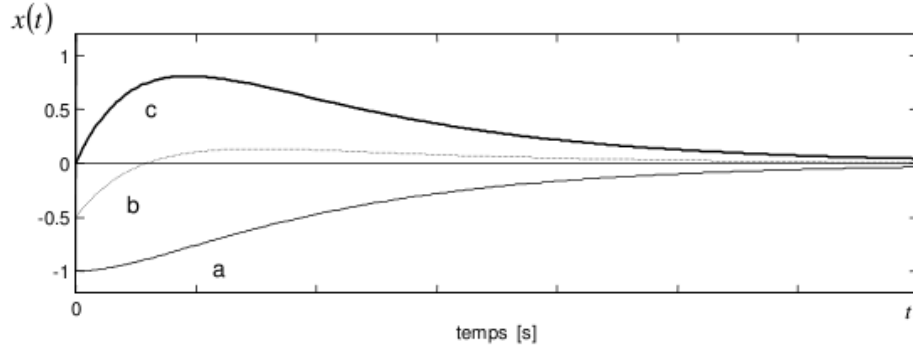


Figure 1.15 - Réponse libre d'un système sur-amorti ($\zeta > 1$)

a) $x_0 = -1$ et $v_0 = 0$, b) $x_0 = -0.5$ et $v_0 = 3$, c) $x_0 = 0$ et $v_0 = 5$.

2.3 – Mouvement avec amortissement critique ($\zeta = 1$)

C'est la valeur de ζ qui sépare le mouvement oscillant d'un mouvement non-oscillant. La racine double fournit une solution particulière

$$r_1 = r_2 = -\zeta\omega_0 = -\omega_0.$$

La solution générale de toute équation différentielle du second ordre est donnée par la combinaison linéaire de deux solutions particulières indépendantes. La première solution est

$$x_1 = e^{-\omega_0 t}$$

L'intégration complète de l'équation différentielle se fait en définissant une deuxième solution de la forme $x_2 = z(t) e^{-\omega_0 t} = (\alpha + \beta t) e^{-\omega_0 t}$, ce qui conduit à la solution générale

$$x(t) = x_1 + x_2 = (a_1 + a_2 t) e^{-\omega_0 t}$$

Les conditions initiales permettent d'identifier les constantes

$$x_0 = a_1$$

$$v_0 = \left(-\omega_0 a_1 + a_2 e^{-\omega_0 t} - \omega_0 a_2 t e^{-\omega_0 t} \right) \Big|_{t=0} = -\omega_0 a_1 + a_2$$

est d'obtenir la solution cherchée

$$x(t) = (x_0 + \omega_0 x_0 t + v_0 t) e^{-\omega_0 t}$$

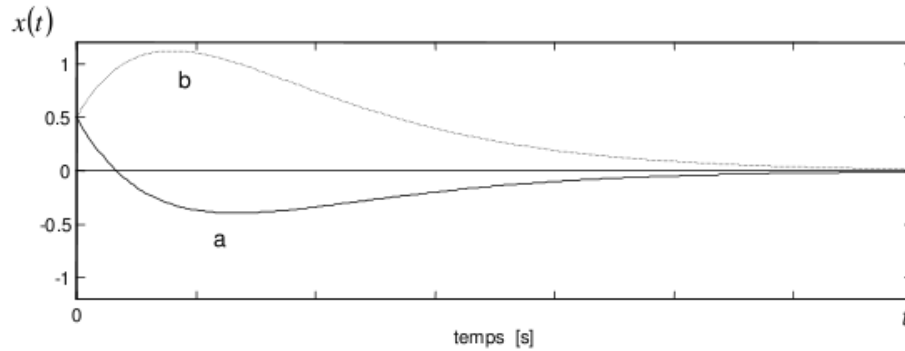


Figure 1.16 - Réponse libre d'un système ayant un amortissement critique ($\zeta = 1$)

a) $x_0 = 0.5$ et $v_0 = -4$, b) $x_0 = 0.5$ et $v_0 = 4$.

2.4 – Equation normalisée d'un système à 1 degré de liberté

L'équation différentielle du mouvement d'un système à 1 ddl est souvent représentée avec des termes normalisés par rapport à la masse m :

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

En considérant $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ et puisque $\zeta = \frac{c}{2m\omega_0}$, on obtient la relation $\frac{c}{m} = 2\omega_0\zeta$ qui conduit à la forme normalisée de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

4.4.5 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 148 et 149. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

[APPLICATION 2] *Mesure du taux d'amortissement*

Le coefficient d'amortissement ou le taux d'amortissement sont les plus délicats à déterminer. Si la masse et la raideur peuvent être déterminées par des tests statistiques, l'amortissement nécessite une mesure dynamique.

Une approche consiste à mesurer la décroissance de l'enveloppe pour un système **sous-amorti** : les points de mesure $x(t_1)$ et $x(t_2)$ correspondent à $A e^{-\zeta \omega_0 t_1}$ et à $A e^{-\zeta \omega_0 t_2}$.

Cette approche conduit au concept de **décément logarithmique** :

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}$$

avec $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ la pseudo-période d'oscillation.

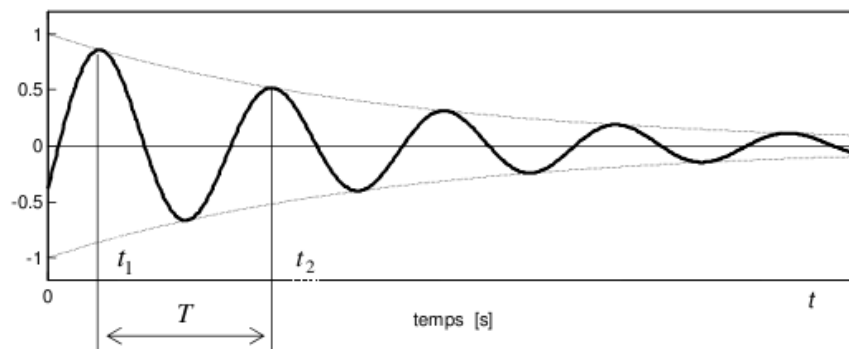


Figure 1.17 – Réponse libre amortie

avec $x(t) = A e^{-\zeta \omega_0 t} \sin(\omega_d t + \phi)$. Puisque $\omega_d T = 2\pi$,

$$x(t+T) = A e^{-\zeta \omega_0 (t+T)} \sin(\omega_d t + \omega_d T + \phi) = A e^{-\zeta \omega_0 t} e^{-\zeta \omega_0 T} \sin(\omega_d t + \phi)$$

on obtient

$$\delta = \ln e^{\zeta \omega_0 T} = \zeta \omega_0 T.$$

En posant $T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\zeta^2}}$, le décrement logarithmique s'écrit $\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ et

permet d'exprimer le taux d'amortissement

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$$

Le décrement est obtenu par des mesures en t_1 et t_2 par $\delta = \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)}$. Connaissant m , k et ζ il est aussi possible de calculer le coefficient d'amortissement

$$c = 2\zeta \sqrt{km}.$$

4.4.6 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 150. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

4.5 Mise en équation par Lagrange

Ce paragraphe présente une autre méthode d'obtention des équations de mouvement, que d'utiliser le principe fondamental de la dynamique. Il n'est donc là qu'à titre informatif, et nous conseillons aux étudiants dans un premier temps, sauter la lecture de celui-ci et de passer au paragraphe suivant.

Si on considère un système fait de deux solides S_1 et S_2 , liés entre eux et subissant un torseur d'effort extérieur en un point B appartenant au solide S_1 . Supposons que les positions des solides soient repérés par rapport à un repère galiléen R_0 par deux paramètres q_i avec $i=1$ ou 2 .

Le principe fondamental de la dynamique, qui égale des termes d'inertie et des termes de force ou moment, peut être approché par une méthode se basant sur l'énergie : les termes d'inertie sont obtenus à partir de l'énergie cinétique, les termes de force ou moment, par la puissance des actions extérieures.

La procédure à suivre est la suivante :

- Calcul de l'énergie cinétique du système. Dans notre cas,

$$T = T_{1/R_0} + T_{2/R_0}, \quad (4.10)$$

avec,

$$T_{k/R_0} = \frac{1}{2} m_k v_{G_k/R_0}^2 + \frac{1}{2} J_{G_k} \omega_{k/R_0}^2, \quad (4.11)$$

où m_k est la masse du solide S_k , G_k son centre de gravité, \vec{v}_{G_k/R_0} la vitesse de ce point par rapport à R_0 , $\check{\omega}_{k/R_0}$ la vitesse de rotation de ce solide autour de son axe de rotation instantané et J_{G_k} l'inertie de ce solide autour de cet axe.

- on calcule alors

$$A_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i}. \quad (4.12)$$

Attention, dans ces calculs on considère que \dot{q}_i et q_i sont des variables indépendantes.

- On calcule la puissance des actions extérieures que l'on aura identifiées en isolant le système. Dans notre cas où un torseur $\{\tau\}$ de résultante \vec{F} et de moment \check{M} au point B est appliqué

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}_{B/R_0} + \check{M} \cdot \check{\omega}_{B/R_0}. \quad (4.13)$$

L'expression obtenue est fonction des vitesses des deux paramètres. On la met sous la forme :

$$P = Q_1 \dot{q}_1 + Q_2 \dot{q}_2, \quad (4.14)$$

Ce qui permet de trouver les deux valeurs Q_i .

- On égale alors A_i et Q_i . Dans notre cas on obtient une équation de Lagrange pour chaque paramètre :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i. \quad (4.15)$$

4.6 Modes de fréquence nul

Nous présentons cette étude pour un système à plusieurs degrés de liberté, mais il est aussi valable pour un système à un seul degré de liberté : les matrices sont dans ce cas des scalaires.

Soit un système à plusieurs degrés de liberté x_i dont les équations de mouvement peuvent s'écrire,

$$M \ddot{\vec{x}} + K \vec{x} = \vec{F}(t), \quad (4.16)$$

avec M la matrice de masse du système, \vec{x} le vecteur des degrés de liberté x_i , K la matrice de rigidité associée et $F(t)$ le vecteur chargement. La recherche des vibrations libres de ce système, donc pour $F(t) = 0$, est équivalente à la recherche des pulsations ω telles que,

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0, \quad (4.17)$$

avec \det le déterminant. Si l'une des solutions $\omega_j = 0$, pour cette valeur propre, le système précédent est équivalent à

$$\det(K) = 0. \quad (4.18)$$

La matrice est singulière. Si on la diagonalise en l'exprimant dans la base dite principale, son expression dans cette nouvelle base présente donc une valeur 0 sur l'une des colonnes. Appelons cette colonne la colonne k . Le système présente une rigidité nulle dans cette direction k , donc une souplesse infinie pour ce degré de liberté. Cela signifie que si la k ième composante du vecteur $\vec{F}(t)$ exprimé dans la base principale n'est pas nul, le degré de liberté k tends vers l'infini les autres restants nuls.

Dans l'exemple ci-dessous, d'un système à 3 degrés de liberté, c'est le second degré de liberté qui est de souplesse infinie.

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

Si l'on exprime le champs de déplacement induit par u_2 dans la base initiale par le calcul des composantes x_i du mouvement associé, il existe une relation linéaire (via u_2) entre ces composantes. Cela caractérise un mouvement de solide rigide.

4.6.1 Brevets d'acquisition de connaissance

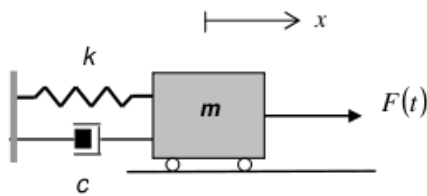
Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 603. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

4.7 Vibrations forcées d'un système à 1 degré de libertés.

1 – REPONSE A UNE EXCITATION HARMONIQUE

On étudie la réponse d'un système amorti à 1 ddl à une excitation harmonique sinusoïdale produite par une force extérieure au système. Ce type d'excitation se rencontre fréquemment dans l'industrie (machines tournantes, ventilateurs, moteurs, pompes ...). Les résultats obtenus avec une excitation sinusoïdale pourront s'étendre à des excitations harmoniques plus complexes représentées par des séries de Fourier, en appliquant le principe de superposition. On suppose donc qu'il s'agit de systèmes linéaires.

1.1 – Excitation d'un système non-amorti



Dans un premier temps, l'amortissement est considéré comme négligeable ($c = 0$). La force d'excitation harmonique est

$$F(t) = F \cos \omega t$$

F amplitude crête, ω pulsation de l'excitation ou pulsation forcée.

Equation du mouvement en x

$$m \ddot{x}(t) + k x(t) = F \cos \omega t$$

normalisée par rapport à la masse

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F}{m} \cos \omega t = f \cos \omega t$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire non-homogène et sa solution est la somme de la solution de l'équation homogène ($f = 0$) et d'une solution particulière. La solution particulière peut souvent être obtenue en supposant qu'elle a même forme que la fonction d'excitation

$$x_p = A \cos \omega t.$$

En l'introduisant dans l'équation du mouvement on obtient

$$-\omega^2 A \cos \omega t + \omega_0^2 A \cos \omega t = f \cos \omega t$$

d'où on tire

$$A = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{tant que} \quad \omega \neq \omega_0.$$

En ajoutant cette solution particulière de l'équation non-homogène à la solution générale de l'équation homogène, la solution générale du système est

$$x(t) = A_1 \sin \omega_0 t + A_2 \cos \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Les coefficients A_1 et A_2 sont déterminés à partir des conditions initiales

$$x(0) = x_0 = A_2 + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = \omega_0 A_1.$$

La réponse forcée est donc

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + \left(x_0 - \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) \cos \omega_0 t + \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Le mouvement est très dépendant des conditions initiales, comme le montre la figure ci-dessous.

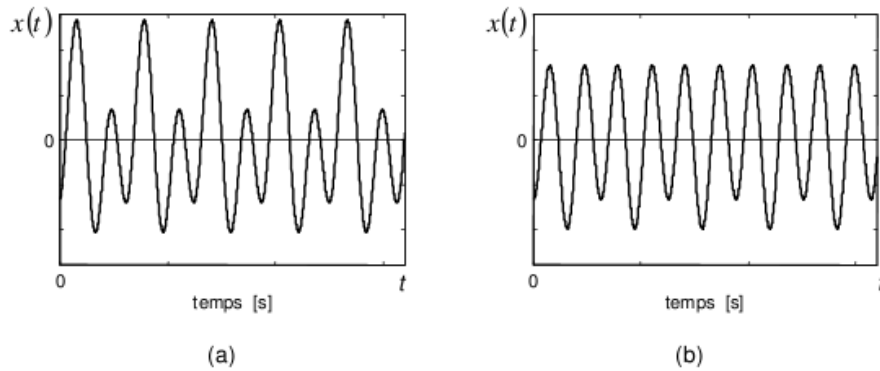


Figure 2.1 – Réponse du système non-amorti à une excitation harmonique dont la pulsation est le double de sa pulsation naturelle : (a) conditions initiales x_0 et v_0 non nulles, (b) condition initiale v_0 nulle.

Quand la **pulsation d'excitation** ω tend vers ω_0 un phénomène de **battement** apparaît (à partir de l'expression précédente du déplacement, il est possible de montrer qu'il peut s'écrire comme le produit de deux fonctions harmoniques des pulsations $\omega + \omega_0$ et $\omega - \omega_0$).

Remarque

Quand la pulsation d'excitation ω est exactement **égale** à la **pulsation propre** du système, la solution utilisée précédemment n'est plus valide. Le choix de la fonction $A_0 \cos \omega t$ comme solution particulière n'est pas possible car elle est aussi une solution de l'équation homogène. La théorie des équations différentielles propose une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = t A_0 \sin \omega t$$

(cette solution peut aussi être obtenue en faisant tendre ω vers ω_0 : vers TD)

En reportant cette expression dans l'équation $\ddot{x}_p + \omega^2 x_p = f \cos \omega t$ avec

$$\dot{x}_p = A_0 \sin \omega t + t \omega A_0 \cos \omega t$$

$$\ddot{x}_p = \omega A_0 \cos \omega t + \omega A_0 \cos \omega t - t \omega^2 A_0 \sin \omega t$$

on obtient

$$2 \omega A_0 \cos \omega t = f \cos \omega t$$

et l'expression suivante pour la solution particulière

$$x_p(t) = \frac{f}{2\omega} t \sin \omega t$$

La solution totale et sa dérivée sont de la forme

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t + \frac{f}{2\omega} t \sin \omega t$$

$$\dot{x}(t) = A_1 \omega \cos \omega t - A_2 \omega \sin \omega t + \frac{f}{2\omega} \sin \omega t + \frac{f t \omega}{2\omega} \cos \omega t$$

Les conditions initiales

$$x_0 = x(0) = A_2$$

$$v_0 = \dot{x}(0) = A_1 \omega$$

permettent de déterminer complètement la solution

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t + \frac{f}{2\omega} t \sin \omega t$$

La figure 2.2 illustre le phénomène de résonance pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ quand $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$. Si le déplacement initial et/ou la vitesse initiale ne sont pas nuls, une oscillation libre viendra se superposer à cette réponse forcée. *L'accroissement constant de l'amplitude avec le temps montre le caractère artificiel de cette modélisation qui ne prend pas en compte l'amortissement.*

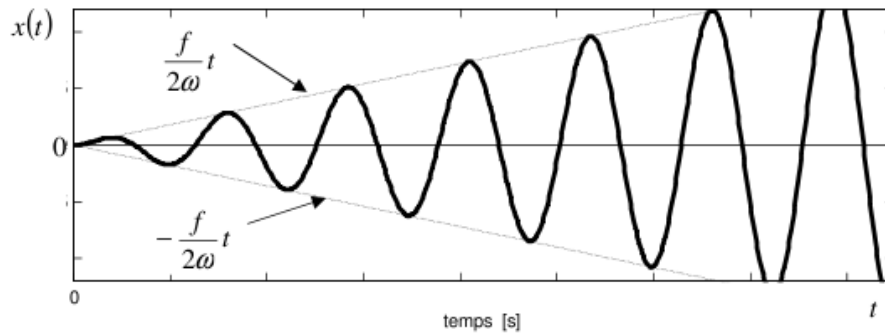


Figure 2.2 – Réponse du système non-amorti à une excitation harmonique dont la pulsation correspond sa pulsation naturelle (phénomène de résonance).

1.2 – Notation complexe

Résultant d'une double dérivation, l'accélération se trouve pour un mouvement harmonique en opposition de phase avec le déplacement et s'écrit $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$. Pour un système non amorti, la solution particulière du déplacement sera donc toujours en phase avec la force d'excitation en dessous de la pulsation naturelle du système et en opposition de phase au dessus. Dans le cas des systèmes amortis, l'équation du mouvement devient

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = F \cos \omega t$$

Le terme lié à l'amortissement introduit une composante en quadrature (proportionnelle à la vitesse) qui se traduit par un retard de phase du déplacement par rapport à la force d'excitation. La réponse d'un système amorti (solution particulière) est ainsi une fonction harmonique à la même pulsation que l'excitation mais avec une phase différente :

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega t - \phi)$$

La même méthode de recherche des solutions que pour le cas non amorti peut être employée¹. Cependant, la méthode complexe permet d'alléger considérablement les calculs. Si on écrit pour le second membre de l'équation du mouvement

$$F(t) = F \cos \omega t = \operatorname{Re}\{F e^{j\omega t}\}$$

la solution particulière peut se mettre sous la forme

$$x_p(t) = \operatorname{Re}\{X e^{j\omega t}\}$$

avec l'**amplitude complexe** $X = A_0 e^{-j\phi}$ qui contient l'information de phase (le signe moins introduit devant la phase met en évidence le retard de phase). Vitesse et accélération peuvent donc s'écrire

$$\dot{x}_p(t) = \operatorname{Re}\{j\omega X e^{j\omega t}\} \quad \text{et} \quad \ddot{x}_p(t) = \operatorname{Re}\{-\omega^2 X e^{j\omega t}\}$$

En omettant $\operatorname{Re}\{\}$, l'équation du mouvement devient

$$(-\omega^2 m + j\omega + k)X e^{j\omega t} = F e^{j\omega t}$$

ce qui permet d'obtenir facilement la solution particulière complexe

$$X = A_0 e^{-j\phi} = \frac{F}{-\omega^2 m + j\omega + k}$$

Pour écrire $x_p(t)$ on calcule le module et la phase de X

$$A_0 = |X| = \sqrt{\operatorname{Re}^2\{X\} + \operatorname{Im}^2\{X\}} \quad \text{et} \quad \phi = -\arctan \frac{\operatorname{Im}\{X\}}{\operatorname{Re}\{X\}}$$

Par exemple, en considérant la forme (u complexe)

$$\frac{1}{u} = \frac{e^{-j\phi}}{|u|} \quad \text{où} \quad u = a + jb \quad \text{et} \quad |u| = \sqrt{u u^*} = \sqrt{(a + jb)(a - jb)} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{et} \quad \phi = \arctan \frac{b}{a}$$

Cette démarche est illustrée par la section suivante.

¹ par exemple dans D.J. Inman, *Engineering vibrations*, Prentice-Hall, 1996.

Remarque

Une variante consiste à utiliser des **variables complexes** $\underline{F} = F e^{j\omega t}$ et $\underline{x}_p = X e^{j\omega t}$ (donc tel que $F(t) = \text{Re}\{\underline{F}\}$ et $x_p(t) = \text{Re}\{\underline{x}_p\}$). Vitesse et accélération s'écrivent

$\dot{\underline{x}}_p = j\omega \underline{x}_p$ et $\ddot{\underline{x}}_p = -\omega^2 \underline{x}_p$ et l'équation différentielle

$$\ddot{\underline{x}} + 2\zeta\omega_0\dot{\underline{x}} + \omega_0^2 \underline{x} = \frac{\underline{F}}{m}$$

1.3 – Excitation harmonique des systèmes amortis

Sous la forme normalisée par rapport à la masse, l'équation du mouvement en excitation forcée s'écrit

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = \frac{F(t)}{m}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\zeta = c/(2m\omega_0)$. En notant comme précédemment la force et la solution particulière sous la forme

$$F(t) = \text{Re}\{F e^{j\omega t}\} \quad \text{et} \quad x_p(t) = \text{Re}\{X e^{j\omega t}\}$$

on obtient l'équation différentielle

$$(-\omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2)X = \frac{F}{m}$$

et à partir de cette dernière relation, l'amplitude complexe de la solution particulière

$$X = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega}$$

avec

$$|X| = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}} = A_0 \quad \text{et} \quad \phi = \arctan \frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

La **solution particulière** $x_p(t) = A_0 \cos(\omega t - \phi)$ est donc de la forme

$$x_p(t) = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

La **solution générale** est la somme de cette solution particulière et de la solution générale du système homogène.

Pour le cas **sous-amorti** ($0 < \zeta < 1$)

$$x(t) = A e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_d t + \theta) + A_0 \cos(\omega t - \phi)$$

où A_0 et ϕ sont les coefficients qui viennent d'être déterminés et A et θ sont obtenus à l'aide des conditions initiales (on distingue bien la pulsation naturelle ω_0 et la pseudo-pulsation ω_a).

Pour les valeurs importantes de t , le premier terme disparaît et la solution totale correspond à la solution particulière : c'est la **réponse stationnaire** (le premier terme correspond à la réponse transitoire).

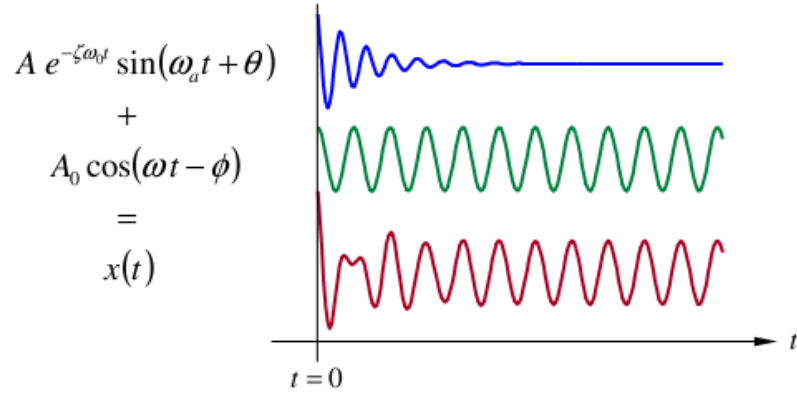


Figure 2.3 – Solution générale du système sous-amorti à une excitation harmonique : réponse transitoire (ou libre : solution générale du système homogène) et réponse stationnaire (solution particulière)

A et θ dépendent de x_0 et v_0 comme pour le système libre mais aussi de F : les coefficients sont donc différents du système libre.

Dans un grand nombre de cas on s'intéresse à la réponse stationnaire du système, sauf dans le cas où le système est soumis à une excitation par choc.

En factorisant par $\omega_0^2 = k/m$, le module $|X|$ s'exprime sous la forme

$$|X| = \frac{\omega_0^2 F/k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}} = x_{\text{stat}} D,$$

avec

- le **déplacement statique** $x_{\text{stat}} = F/k$
- l'**amplification dynamique** $D = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$ avec la fréquence

réduite $r = \omega/\omega_0$.

La phase s'exprime alors par $\phi = \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2}$.

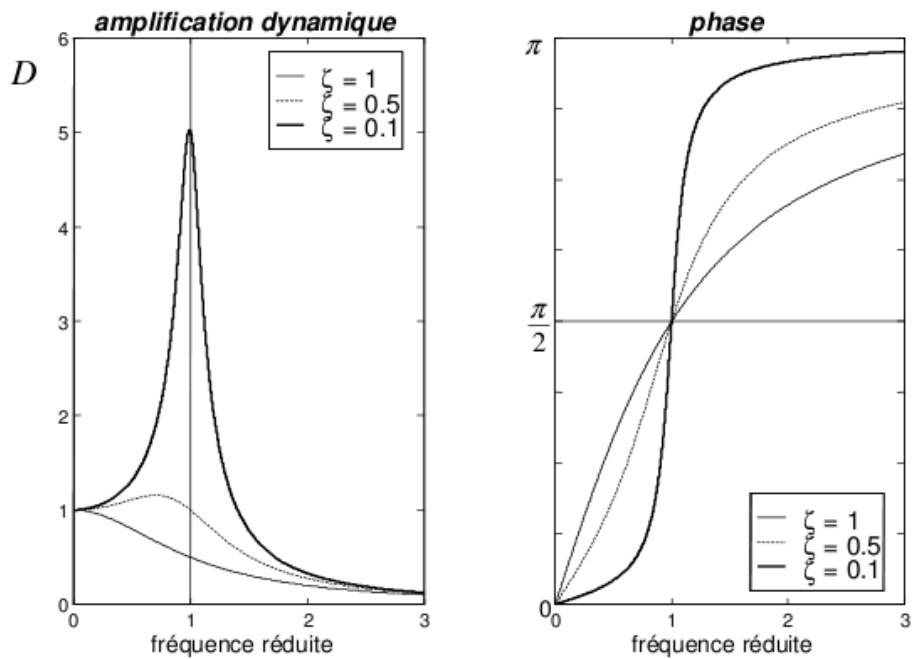


Figure 2.4 – Réponse du système sous-amorti à une excitation harmonique.

Pour $r = 1$ ($\omega = \omega_0$), c'est la **résonance** et la réponse dépend de l'amortissement

$$D = \frac{1}{2\zeta} \quad \text{et} \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

mais quand $r \ll 1$ alors $D \approx 1$ et quand $r \gg 1$ alors $D \approx \frac{1}{r^2}$. En utilisant des échelles logarithmiques pour l'amplitude et la fréquence, on obtient la représentation de la figure 2.5.

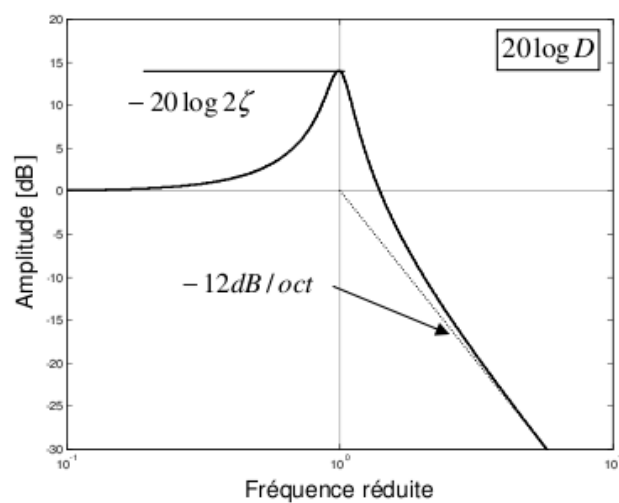


Figure 2.5 – Réponse forcée d'un système à un degré de liberté en représentation logarithmique.

Il est important de noter que par principe la **résonance** apparaît par définition quand $\omega = \omega_0$ (fréquence naturelle du système non-amorti), ce qui correspond à une rotation de phase de 90° . Toutefois, pour un système amorti ω_0 ne correspond pas exactement à la fréquence où la réponse en régime stationnaire est **maximale**. Ainsi

$$|X| = \frac{F/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}} \quad \text{avec} \quad r = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

La valeur maximale de $|X|$ apparaît à la valeur $r = r_{\max}$ qui correspond à l'annulation de sa première dérivée

$$\begin{aligned} \frac{d|X|}{dr} &= \frac{F}{k} \frac{d}{dr} \left(\left[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right) = 0 \\ -\frac{1}{2} \left[(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} [2(1-r^2)(-2r) + 8\zeta^2 r] &= 0 \Rightarrow -4r(1-r^2 - 2\zeta^2) = 0 \end{aligned}$$

donc
$$r_{\max} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} < 1$$

Cette relation n'est valable que pour $\zeta < 1/\sqrt{2}$. Pour des valeurs supérieures de ζ , la courbe ne présente pas de maximums car $\sqrt{1 - 2\zeta^2}$ devient un nombre imaginaire. La valeur du maximum est

$$|X|_{r=r_{\max}} = \frac{F/k}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

La **fonction de transfert** complexe $H(j\omega)$ ou $H(\omega)$ se définit comme

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{X}{F} = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega)} \\ H(\omega) &= \frac{X}{F} = \frac{1}{(k - m\omega^2) + jc\omega} \\ H(\omega) &= \frac{X}{F} = \frac{1}{k(1 - r^2 + j2\zeta r)} \end{aligned}$$

avec $c = 2\zeta\sqrt{km}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $r = \omega/\omega_0$.

La fonction de transfert $H(\omega)$ peut se décomposer en une **amplitude** et une **phase** ou en une **partie réelle** et **imaginaire** comme le montre la Figure 2.6.

Si la fonction $H(\omega)$ est représentée dans un espace à trois dimensions (Figure 2.7a), les Figures 2.6c et 2.6d correspondent sa projection sur deux plans perpendiculaires. La projection de cette courbe sur le troisième plan (**plan de Nyquist**) est reportée sur la Figure 2.7b. Au voisinage de ω_0 , le lieu de Nyquist est assimilable à un cercle

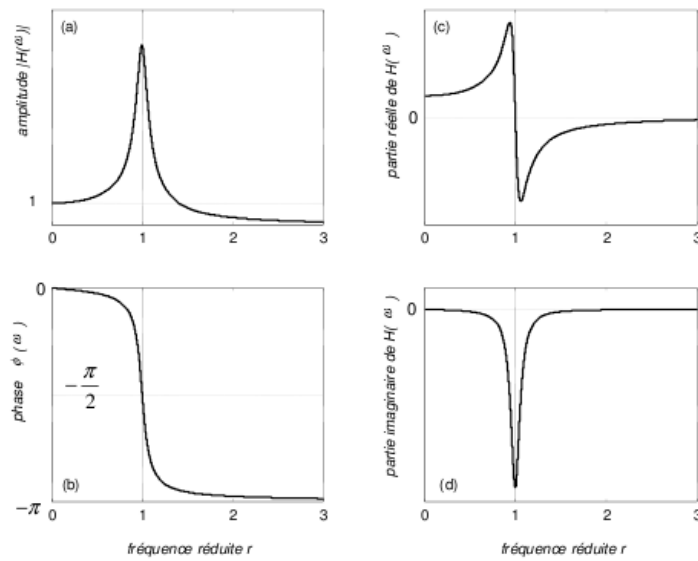


Figure 2.6 - Différentes représentations de la fonction de transfert $H(\omega)$: amplitude (a) et phase (b) ou partie réelle (c) et partie imaginaire (d).

Paramètres du cercle dans le plan de Nyquist :

$$\text{Centre : } \left\{ \frac{1}{k} \left(\frac{1+\zeta^2}{4} \right), \frac{1}{k} \left(\frac{-1+\zeta^2/2}{4\zeta} \right) \right\}$$

$$\text{Diamètre : } \frac{1}{k} \left(\frac{1+\zeta^2}{2\zeta} \right)$$

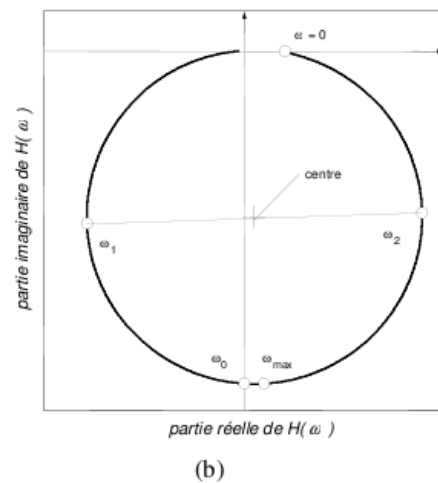
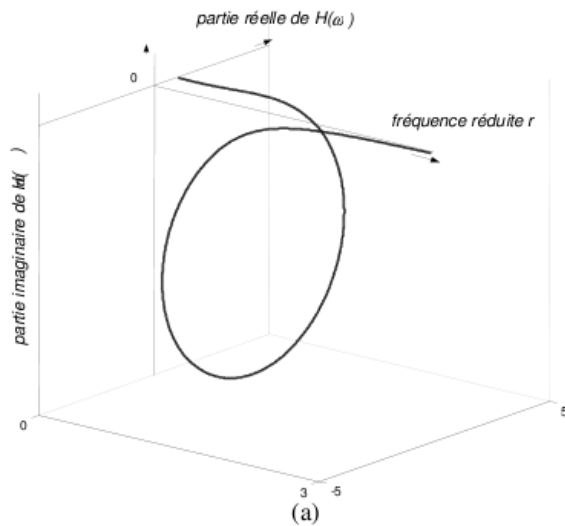


Figure 2.7 - (a) Fonction de transfert dans un espace de représentation à 3 dimensions. (b) projection de la fonction de transfert sur le plan de Nyquist ($\text{Re}\{H\}, \text{Im}\{H\}$)

Les pulsations aux lieux des tangentes verticales sont ω_1 et ω_2 auxquelles correspondent les amplitudes $|H(\omega_1)|$ et $|H(\omega_2)|$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \omega_{\max}(1 - \zeta) & \text{et} & & |H(\omega_1)| &= |H(\omega_{\max})|/\sqrt{2} \\ \omega_2 &= \omega_{\max}(1 + \zeta) & \text{et} & & |H(\omega_2)| &= |H(\omega_{\max})|/\sqrt{2}\end{aligned}$$

où $\omega_{\max} = \omega_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}$ est la pulsation correspondant à l'amplitude maximale.

Ces caractéristiques permettent de déterminer le taux d'amortissement à partir du diamètre du cercle ou encore par la méthode de la 'bande passante à -3dB ' présentée en fin de chapitre (Application 5).

4.7.1 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 157. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

1.4 – Excitation par la base

Souvent une structure est excitée par l'intermédiaire des plots de suspension (machine excitée par les supports, automobile excitée par la route par l'intermédiaire des suspensions)

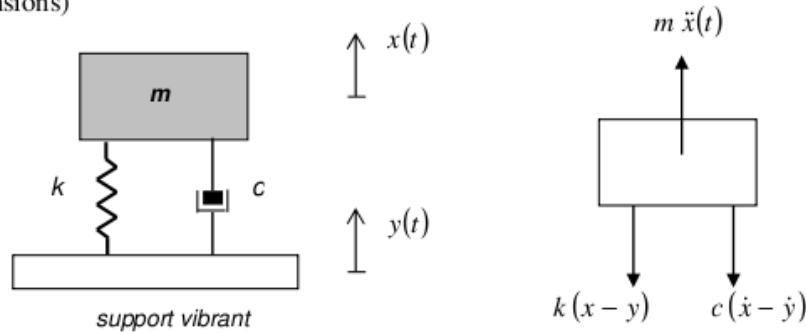


Figure 2.8 – Excitation d'une masse suspendue par la base (support vibrant)

En sommant les forces qui s'exercent sur la masse m , on obtient l'équation

$$m\ddot{x}(t) + c[\dot{x}(t) - \dot{y}(t)] + k[x(t) - y(t)] = 0$$

qui peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle avec second membre

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = c\dot{y}(t) + ky(t)$$

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = 2\zeta\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2y(t)$$

On suppose que le support possède un déplacement harmonique

$$y(t) = Y \cos \omega t = \operatorname{Re}\{Y e^{j\omega t}\}, \quad Y \text{ amplitude réelle}$$

et on cherche une solution particulière de la forme

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega t - \phi) = \operatorname{Re}\{X e^{j\omega t}\} \quad \text{avec} \quad X = A_0 e^{-j\phi} \text{ amplitude complexe}$$

En reportant cette expression dans l'équation différentielle précédente

$$(-\omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2)X = (j2\zeta\omega_0\omega + \omega_0^2)Y$$

il est possible d'obtenir l'expression de l'amplitude complexe du déplacement de la masse

$$X = A_0 e^{-j\phi} = \frac{\omega_0(\omega_0 + j2\zeta\omega)Y}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_0\omega}$$

Pour calculer A_0 et ϕ , on pose $X = A_0 e^{-j\phi} = \frac{\alpha}{\beta}$ (α, β complexes)

$$A_0 = |X| = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)} = \frac{|\alpha|}{|\beta|} = \omega_0 Y \frac{\sqrt{\omega_0^2 + (2\zeta\omega)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}}$$

$$A_0 e^{-j\phi} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{|\alpha| e^{j\phi_\alpha}}{|\beta| e^{j\phi_\beta}} = |X| e^{-j(\phi_\beta - \phi_\alpha)} \text{ donc } \phi = \phi_\beta - \phi_\alpha = \arctan \frac{2\zeta\omega_0\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} - \arctan \frac{2\zeta\omega}{\omega_0}$$

soit

$$x_p(t) = \omega_0 Y \left[\frac{\omega_0^2 + (2\zeta\omega)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2} \right]^{\frac{1}{2}} \cos(\omega t - \phi)$$

On a vu que la solution particulière pouvait représenter seule la solution stationnaire. En utilisant la fréquence réduite $r = \omega/\omega_0$, on appelle **transmissibilité en déplacement** le rapport des amplitudes des déplacements

$$\frac{|X|}{|Y|} = \left[\frac{1 + (2\zeta r)^2}{(1 - r^2)^2 + (2\zeta r)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Ce rapport décrit comment le mouvement se transmet de la base vers la masse, en fonction de la fréquence réduite r (voir Figure 2.9). La transmissibilité est inférieure à 1 quand $r > \sqrt{2}$. A la résonance elle dépend de ζ .

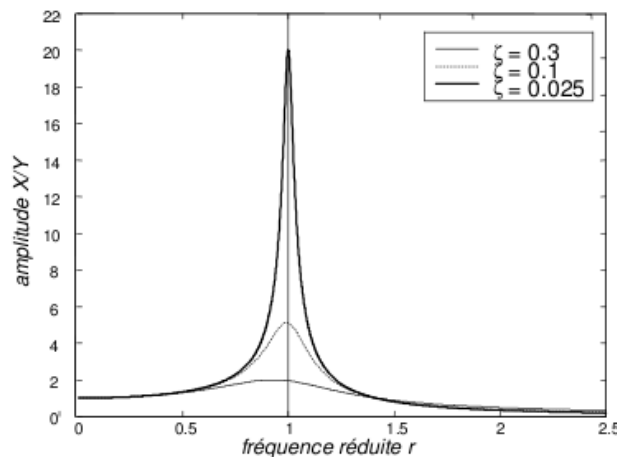


Figure 2.9 – Rapport de transmissibilité en déplacement en fonction de la fréquence réduite et pour différentes valeurs du rapport d'amortissement.

[APPLICATION 5] Mesure de l'amortissement 2

Les propriétés mises en évidence dans les sections 1.2 et 1.3 ont conduit à deux méthodes de détermination du facteur d'amortissement (qui viennent s'ajouter à la méthode du décrément logarithmique) valables pour les faibles valeurs d'amortissement ($\zeta < 10\%$) et largement employées en analyse modale expérimentale : la méthode de la bande passante à 3 dB et la méthode d'identification du cercle. Ces deux méthodes utilisent des fonctions de transfert obtenues expérimentalement. C'est l'admittance $Y(\omega) = \frac{x(\omega)}{F(\omega)} = -\frac{A(\omega)}{\omega^2}$ qui est employée, mais on voit comment elle peut se calculer facilement à partir de la fonction de transfert accélération/force $H_{Fa}(\omega) = A(\omega)$.

Méthode de la bande passante à 3dB

Le module

$$|Y(\omega)| = \frac{1}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega)^2}}$$

présente une valeur maximale à la pulsation $\omega_{\max} = \omega_0\sqrt{1 - 2\zeta^2}$ (voir section 1.2). Pour les faibles amortissements que l'on rencontre dans les structures métalliques (inférieur au 1%), $\omega_{\max} \cong \omega_0$ et $Y_{\max} = \left[m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{\max}^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_{\max})^2} \right]^{-1} \cong 1/(2m\zeta\omega_0^2)$. Une atténuation de 3 dB de part et d'autre de cette valeur maximale correspond à la "bande passante" du système. On a remarqué que cette bande passante s'élargissait quand l'amortissement augmentait. Si on appelle ω_1 et ω_2 les pulsations de part et d'autre de ω_{\max} qui correspondent à une atténuation de 3 dB de $|Y(\omega)|$, on constate que

$$20 \log_{10} \frac{|Y(\omega_1)|}{Y_{\max}} = 20 \log_{10} \frac{|Y(\omega_2)|}{Y_{\max}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -10 \log_{10} 2 = -3 \text{ dB}$$

Cette relation permet d'écrire pour $\omega_i = \omega_1$ ou $\omega_i = \omega_2$

$$\sqrt{2}/Y_{\max} = 1/|Y(\omega_i)| \Rightarrow \sqrt{2}(2\zeta\omega_0^2) = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_i^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_i)^2}$$

qui en portant les deux membres au carré conduit à une équation du second degré en ω_i^2

$$\omega_i^4 - 2\omega_0^2\omega_i^2(1 - 2\zeta^2) + \omega_0^4(1 - 8\zeta^2) = 0,$$

dont les racines sont

$$\omega_i^2 = \omega_0^2 \left[(1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2} \right].$$

De petites valeurs de ζ permettent d'écrire, en négligeant les termes en ζ^4

$$\left(1 + \frac{\zeta^2}{2} \right)^2 = 1 + \frac{\zeta^4}{4} + \zeta^2 \approx 1 + \zeta^2 \text{ d'où } \sqrt{1 + \zeta^2} \approx 1 + \frac{\zeta^2}{2}$$

ce qui conduit aux approximations suivantes

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_0^2 \left[(1 - 2\zeta^2) - 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2} \right] \approx \omega_0^2 (1 - 2\zeta) \\ \omega_2^2 &= \omega_0^2 \left[(1 - 2\zeta^2) + 2\zeta\sqrt{1 + \zeta^2} \right] \approx \omega_0^2 (1 + 2\zeta) \end{aligned} \Rightarrow \omega_2^2 - \omega_1^2 = 4\zeta\omega_0^2$$

En considérant que $\omega_0 \cong \omega_{\max}$ et que

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = (\omega_2 + \omega_1)(\omega_2 - \omega_1) \approx 2\omega_0(\omega_2 - \omega_1) \approx 2\omega_{\max}(\omega_2 - \omega_1),$$

on obtient alors $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\omega_{\max}\zeta$. La méthode consiste à faire varier la fréquence de part et d'autre du lieu de la valeur maximale pour noter les fréquences f_1 et f_2 qui correspondent à une atténuation de 3 dB, ce qui permet de calculer

$$\frac{f_2 - f_1}{(f_2 + f_1)/2} = \frac{\Delta f}{f_{\max}} = \frac{\Delta\omega}{\omega_{\max}} = 2\zeta$$

On définit aussi Q le **facteur de surtension** comme $\frac{\Delta\omega}{\omega_{\max}} = 2\zeta = \frac{1}{Q}$

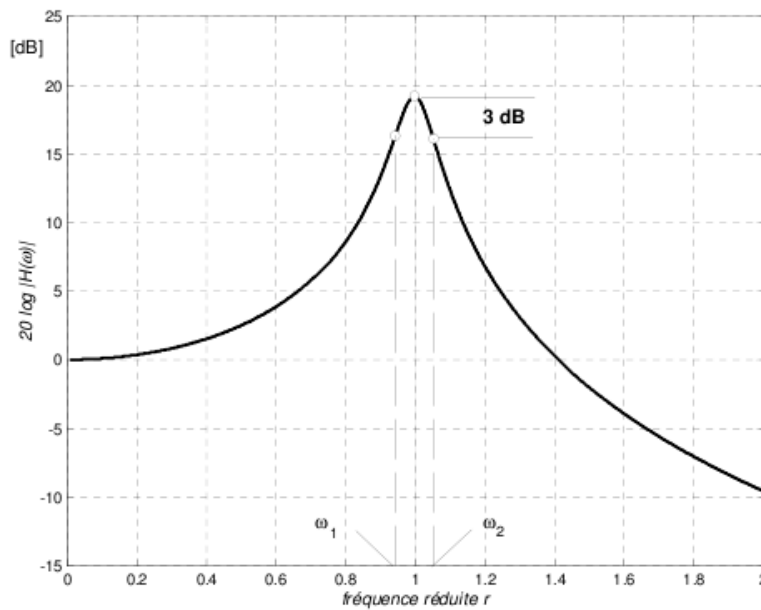


Figure 2.34 - Méthode de la bande passante à 3 dB

4.7.2 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 156. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

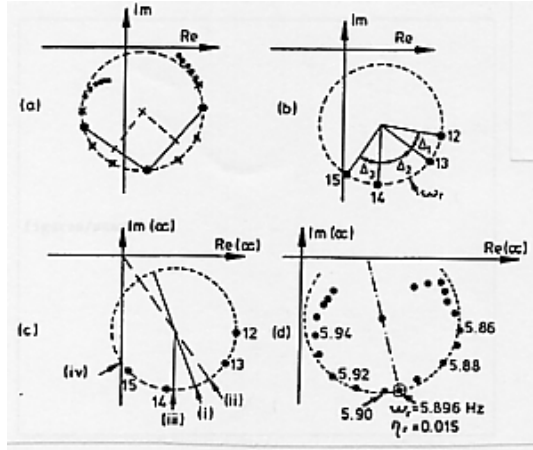


FIGURE 4.2 – Diagrammes de Nyquist de la fonction $\tilde{\alpha}(\omega)$, d'après Ewins p36

4.8 détermination des caractéristiques d'un système par la méthode de lissage par un cercle "circle fitting"

Nous supposons valide l'hypothèse d'existence locale d'un seul mode. Etudions les cas de l'amortissement structural, et de l'amortissement visqueux.

4.8.1 amortissement structural

Si nous faisons l'hypothèse d'un **amortissement structural**, la fonction complexe représentée par un cercle est la mobilité,

$$\alpha(\omega) = \frac{A}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta\omega_r^2} \quad (4.20)$$

La grandeur A , a pour objet de donner par son module, la taille du cercle, par sa phase, l'angle de ce cercle avec l'axe de référence. Une recherche du cercle passant au mieux des points sélectionnés sera utilisée à cet effet.

Une fois A estimé, il faut trouver la fréquence de résonance ω_r ainsi que l'amortissement η . Construisons figure 4.2 le cercle représentatif de,

$$\tilde{\alpha}(\omega) = \frac{1}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta\omega_r^2} \quad (4.21)$$

Un point à la fréquence ω est caractérisé par l'angle γ ou l'angle θ ,

$$\tan(\gamma) = \frac{\eta_r}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}} \quad (4.22)$$

$$\tan(\theta/2) = \tan(\pi/2 - \gamma) = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{\eta_r} \quad (4.23)$$

On recherche ω . La deuxième équation donne,

$$\omega^2 = \omega_r^2(1 - \tan(\theta/2)\eta_r). \quad (4.24)$$

Si l'on calcule la vitesse de variation de ω^2 par rapport à θ ,

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} = (-\omega_r^2\eta_r/2) \left(1 + \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{\eta_r^2} \right), \quad (4.25)$$

on note qu'elle est maximale pour ω_r . Ceci peut donner un critère de détection de ω_r . Une mesure de l'amortissement est aussi possible car en ce point ω_r ,

$$\frac{d\omega^2}{d\theta} = (-\omega_r^2 \eta_r / 2), \quad (4.26)$$

et donc,

$$\eta_r = 2 \frac{\frac{d\omega^2}{d\theta}}{-\omega_r^2}, \quad (4.27)$$

Cette méthode est bien adaptée, mais encore faut-il avoir à l'esprit que la description expérimentale du cercle est discrète et non continue. Il faut donc pouvoir s'appuyer sur une évaluation de cette dérivée $\frac{d\omega^2}{d\theta}$ à partir de la connaissance que de certains points.

Soient les valeurs $\alpha(\omega_a)$ et $\alpha(\omega_b)$ mesurées de part et d'autre de la fréquence de résonance. La formule 4.23 donne pour a et b ,

$$\tan(\theta_a/2) = \frac{1 - \frac{\omega_a^2}{\omega_r^2}}{\eta_r} \quad (4.28)$$

$$\tan(\theta_b/2) = \frac{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_r^2}}{\eta_r} \quad (4.29)$$

De ces deux équations à deux inconnues η_r et ω_r , on tire,

$$\eta_r = \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{\omega_r^2} \frac{1}{\tan(\theta_a/2) - \tan(\theta_b/2)}. \quad (4.30)$$

Si l'amortissement est faible, on peut assimiler,

$$\frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{\omega_r^2} \simeq 2 \frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_r} \quad (4.31)$$

D'autre part, si l'on choisi les points a et b comme les points à 1/2 puissance,

$$\theta_1/2 = \pi/2 \quad (4.32)$$

$$\theta_2/2 = -\pi/2 \quad (4.33)$$

$$\tan(\theta_1/2) = 1 \quad (4.34)$$

$$\tan(\theta_2/2) = -1 \quad (4.35)$$

et l'amortissement (formule 4.30) se simplifie en,

$$\eta_r = \frac{\omega_b^2 - \omega_a^2}{\omega_r^2} \frac{1}{2}. \quad (4.36)$$

4.8.2 amortissement visqueux

Dans le cas d'un **amortissement visqueux**, on utilise la mobilité,

$$Y(\omega) = \frac{i\omega}{k - m\omega^2 + i c \omega}. \quad (4.37)$$

Les parties réelles et imaginaires s'écrivent,

$$Re(Y) = \frac{c\omega^2}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2} \quad (4.38)$$

$$Im(Y) = \frac{\omega(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + c^2\omega^2}, \quad (4.39)$$

et fournissent l'angle,

$$\tan(\theta/2) = \frac{\omega(k - m\omega^2)}{c\omega^2} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{2\zeta\omega/\omega_r} \quad (4.40)$$

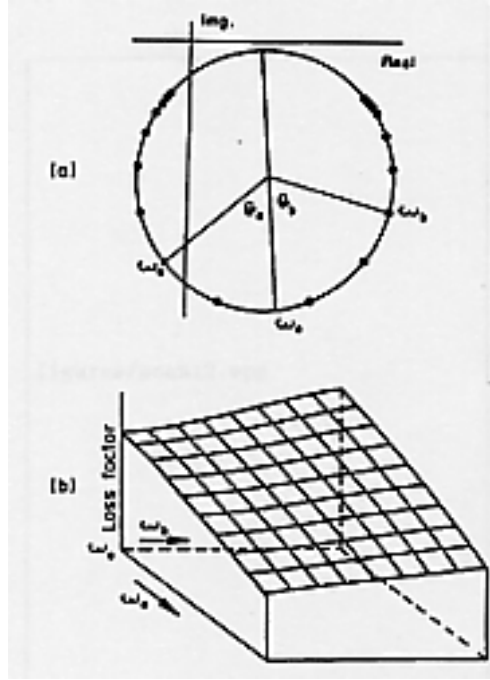


FIGURE 4.3 – Sensibilité de la valeur trouvée de l’amortissement avec le choix des points a et b , d’après Ewins p168

Par l’utilisation des points 1 et 2 comme précédemment, on obtient, mais cette fois-ci de façon exacte,

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_r^2} \quad (4.41)$$

Dans les deux cas d’amortissement, pour trouver ω_r , on pourra prendre le milieu des deux points qui donnent la variation la plus grande de θ , ou évaluer sa position à partir des formules 4.28 en en faisant le ratio,

$$\frac{\tan(\theta_a/2)}{\tan(\theta_b/2)} = \frac{1 - \frac{\omega_a^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega_b^2}{\omega_r^2}} \quad (4.42)$$

soit en factorisant ω_r^2 ,

$$\omega_r^2 (\tan(\theta_a/2) - \tan(\theta_b/2)) = \omega_b^2 \tan(\theta_a/2) - \omega_a^2 \tan(\theta_b/2) \quad (4.43)$$

d’où,

$$\omega_r^2 = \frac{\omega_b^2 \tan(\theta_a/2) - \omega_a^2 \tan(\theta_b/2)}{\tan(\theta_a/2) - \tan(\theta_b/2)} \quad (4.44)$$

Il s’avère que si la précision sur ω_r est de l’ordre de 0.1 fois l’écart en pulsation entre deux points, la valeur de l’amortissement trouvée est sensible au choix des deux points a et b (figure 4.3).

récapitulatif La démarche de lissage de cercle passe donc par les étapes suivantes :

- sélection des points à utiliser : il faut qu’ils couvrent au moins une variation de θ de l’ordre de π .
- lissage des points par un cercle : cela fournit la grandeur complexe A (voir figure 4.4)
- localisation de la fréquence de résonance et calcul de l’amortissement.
- multiples évaluations de l’amortissement en vue d’estimer la précision sur cette mesure. Si les variations sont de l’ordre de 5% l’analyse est validée, si elle est de l’ordre de 30% c’est que l’hypothèse d’unicité du pic est peut-être à remettre en cause.

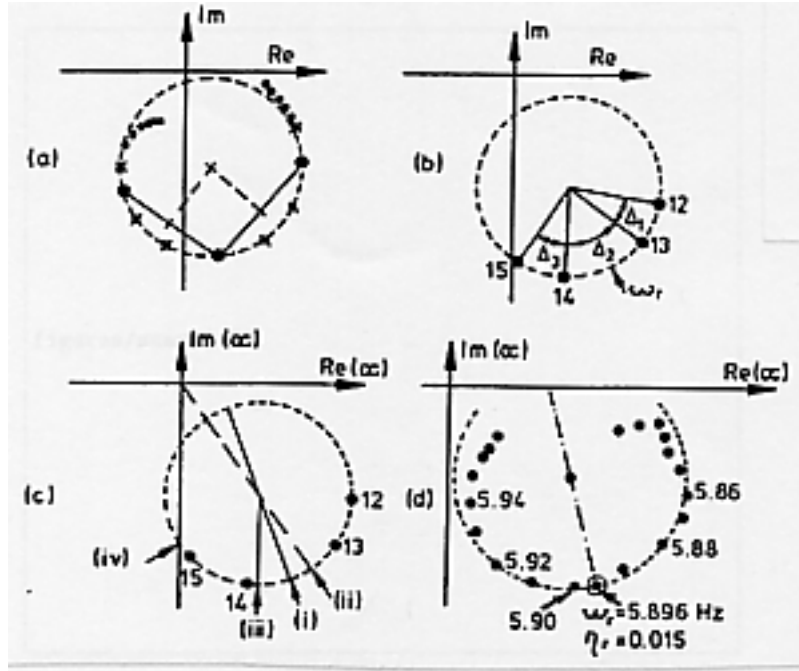


FIGURE 4.4 – Lissage du cercle pour déterminer A , d'après Ewins p166

– détermination des constantes modale : m, k .

Appliquons cette méthode aux mêmes jeu de points engendrés précédemment par "exer20.m" avec un intervalle en pulsation de 0.23 rad s^{-1} . Le cercle passant au mieux des points est trouvé par "exer23.m". On veillera à initialiser l'optimisation non-linéaire par des valeurs approximatives. On trouve un centre du cercle en $(0.128, -1.25)$ et un rayon de 1.26. On note que la non nullité de la partie réelle du centre du cercle ne peut être expliquée par le modèle (voir formule ??). Ce décalage est explicable par la mauvaise définition des points du cercle si la discrétisation en pulsation est trop faible. Par contre on accède à la grandeur h relative à l'amortissement,

$$\frac{1}{2h} = 0.125 \quad (4.45)$$

$$h = 0.397 \quad (4.46)$$

On détermine la pulsation de résonnance, lieu de partie imaginaire maximale. Ce point est à la verticale du centre déterminé précédemment,

$$\omega_r = 3.00 \quad (4.47)$$

On détermine les deux points à l'horizontale du centre, par une procédure similaire,

$$\omega_1 = 2.69 \quad (4.48)$$

$$\omega_2 = 3.20 \quad (4.49)$$

$$\eta = 0.843 \quad (4.50)$$

$$\zeta = 0.422 \quad (4.51)$$

Si l'on utilise la même méthode avec plusieurs niveaux de discrétisation, on obtient le tableau suivant,

$\Delta\omega$	h	ω_r	ζ
0.91	0.40	3.24	0.04
0.30	0.40	2.97	0.10
0.09	0.40	2.99	0.098
0.03	0.40	2.98	0.099

On observe que la convergence des résultats est plus rapide qu'avec la première méthode de l'amplitude du pic. La convergence de ζ vers la bonne valeur est elle aussi plus rapide. La méthode de lissage de cercle utilise les composantes réelles et imaginaires, et non pas le module qui est une information moins riche, dégradée.

4.8.3 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 159. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur [http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95](http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95).

1.5 – Excitation par déséquilibre dynamique en rotation

Les machines tournantes constituent des sources de vibrations très courantes. De petites irrégularités dans la distribution des masses des parties en rotation causent des niveaux vibratoires importants. On schématise une machine de masse m comportant une masse m_0 en rotation à une distance l de son centre. Un guidage sans friction autorise seulement un mouvement dans la direction x (voir Figure 2.10). En supposant la vitesse de rotation ω_R constante

$$x_R(t) = l \sin \omega_R t$$

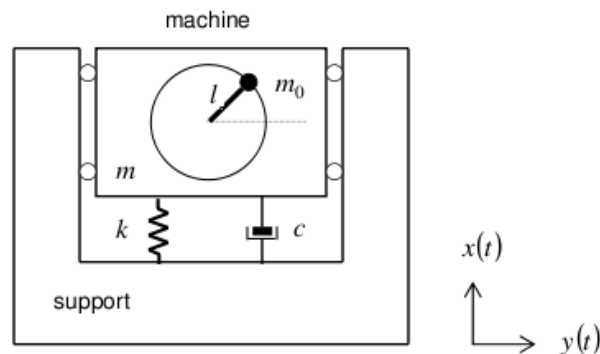


Figure 2.10 – Excitation d'une machine suspendue par une masse en rotation

La force de réaction générée par la rotation de la masse a une composante dans la direction x qui est proportionnelle à m_0 et à l'accélération \ddot{x}_R . Cette force agit sur la masse m de la machine (les forces dans la direction y ne sont pas considérées). L'équilibre des forces par rapport au référentiel du support s'écrit (m_0 fait partie de la masse m de la machine)

$$(m - m_0) \ddot{x}(t) + m_0 [\ddot{x}(t) + \ddot{x}_R(t)] = -kx(t) - c\dot{x}(t)$$

ce qui conduit à l'équation

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = -m_0\ddot{x}_R(t).$$

Le terme au second membre est la force $F(t) = -m_0\ddot{x}_R(t)$ qui excite le système. Ce dernier peut s'écrire en normalisant l'équation par rapport à la masse

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta\omega_0 \dot{x}(t) + \omega_0^2 = \frac{F(t)}{m}$$

avec la force qui s'exprime par

$$F(t) = -m_0 \ddot{x}_R(t) = -l m_0 \frac{d^2}{dt^2} (\sin \omega_R t) = l m_0 \omega_R^2 \sin \omega_R t$$

La méthode d'obtention de la solution particulière est semblable à celle des problèmes précédents en utilisant la notation complexe, pour la force

$$F(t) = l m_0 \omega_R^2 \sin \omega_R t = \operatorname{Re} \left\{ -j l m_0 \omega_R^2 e^{j\omega_R t} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ F e^{j\omega_R t} \right\}$$

donc l'amplitude complexe est $F = -j m_0 \omega_R^2$ et pour l'expression de la solution particulière recherchée

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega_R t - \phi) = \operatorname{Re}\{X e^{j\omega_R t}\} \quad \text{avec} \quad X = A_0 e^{-j\phi}$$

ce qui conduit à

$$X = \frac{-j m_0 l \omega_R^2}{m (\omega_0^2 - \omega_R^2 + j 2 \zeta \omega_0 \omega_R)}$$

ou, avec $r = \omega_R / \omega_0$

$$A_0 = |X| = \frac{m_0 l}{m} \frac{r^2}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta r)^2}}$$

et

$$\phi = -\arctan \frac{\operatorname{Im}\{X\}}{\operatorname{Re}\{X\}} = -\arctan \frac{1-r^2}{2\zeta r} = \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2} - \frac{\pi}{2}.$$

Finalement la solution particulière s'écrit

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega_R t - \phi) = A_0 \cos\left(\omega_R t - \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2} + \frac{\pi}{2}\right) = -A_0 \sin\left(\omega_R t - \arctan \frac{2\zeta r}{1-r^2}\right)$$

L'amplitude de déplacement en régime stationnaire est une fonction de la vitesse de rotation (Figure 2.11). Quand $r \gg 1$, la valeur normalisée du déplacement tend vers 1 indépendamment de ζ . Pour les machines tournantes, la suspension sera calculée pour que ω_0 soit en dehors de la gamme de fonctionnement.

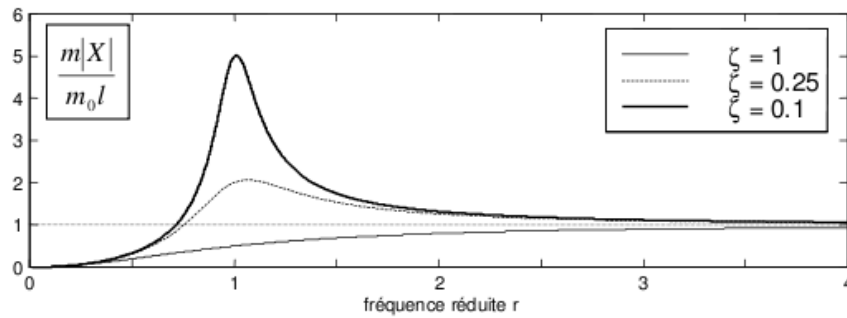


Figure 2.11 – Réponse du système à 1 ddl à une excitation par une masse tournante.

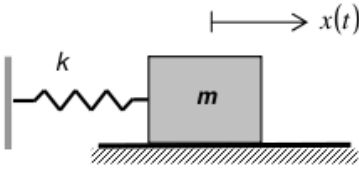
4.8.4 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 151 et 152. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

2 – DIFFERENTES FORMES D'AMORTISSEMENT

2.1 – Amortissement par frottement solide (ou amortissement de Coulomb)

L'amortissement de Coulomb est l'amortissement par frottement solide. Il est difficile de donner une forme mathématique correcte pour modéliser un amortissement. Contrairement à la masse et à la raideur, l'amortissement ne peut pas être déterminé par des tests statiques. L'amortissement visqueux en $c\dot{x}$ est la forme la plus courante mais l'amortissement par frottement solide se rencontre fréquemment dans les mécanismes. Il est défini par la relation

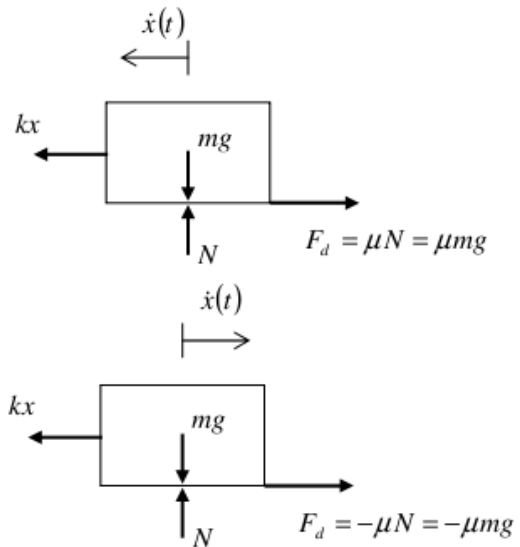


$$F_d = F_d(\dot{x}) = \begin{cases} -\mu N & \dot{x} > 0 \\ 0 & \dot{x} = 0 \\ \mu N & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

F_d force de dissipation,
 N force normale,
 μ coefficient de frottement.

Figure 2.24 – Frottement solide : notation

La force F_d est toujours **opposée à la direction du mouvement** (son signe est contraire à celui de \dot{x})



$$m\ddot{x} + kx = \mu N \quad \text{pour } \dot{x} < 0$$

$$m\ddot{x} + kx = -\mu N \quad \text{pour } \dot{x} > 0$$

Figure 2.25 – Décomposition de l'équation du mouvement pour un frottement solide. Dans ce cas particulier, la masse est posée sur le plan et $N = mg$.

C'est le signe de \dot{x} qui détermine la direction de la force de frottement

$$m\ddot{x} + \mu N \operatorname{sign}(\dot{x}) + kx = 0$$

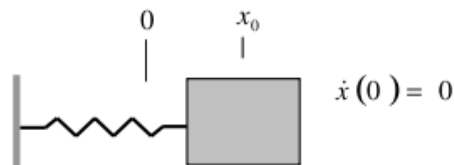
avec la fonction 'signe'

$$\text{sign}(u) = \begin{cases} 1 & \text{quand } u > 0 \\ 0 & \text{quand } u = 0 \\ -1 & \text{quand } u < 0 \end{cases}$$

Cette équation ne peut pas se résoudre directement par les méthodes employées précédemment car c'est une équation différentielle non-linéaire. Pour obtenir la **réponse libre** du système, on va considérer séparément les **tronçons temporels entre les changements de direction** de \dot{x} .

Conditions initiales : $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$

x_0 se trouve à droite du point d'équilibre et la force kx_0 est plus forte que F_d



Déplacement vers la gauche : $\dot{x} < 0$

La masse se déplace vers la gauche et l'équation valable pour $\dot{x} < 0$ a une solution de la forme

$$x(t) = A_1 \cos \omega_0 t + B_1 \sin \omega_0 t + \frac{\mu N}{k}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. A_1 et B_1 sont des constantes qui sont déterminées à l'aide des conditions initiales

$$\begin{aligned} x(0) = A_1 + \frac{\mu N}{k} = x_0 & \Rightarrow A_1 = x_0 - \frac{\mu N}{k} \\ \dot{x}(0) = \omega_0 B_1 = 0 & \Rightarrow B_1 = 0 \end{aligned}$$

Le mouvement vers la gauche à partir du point de départ x_0 est donc

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \cos \omega_0 t + \frac{\mu N}{k}$$

et il se poursuit jusqu'à l'instant t_1 où la vitesse $\dot{x} = 0$

$$\dot{x}(t_1) = -\omega_0 \left(x_0 - \frac{\mu N}{k} \right) \sin \omega_0 t_1 = 0$$

c'est à dire à $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$. Ensuite, à condition que $|kx| > \mu N$, la masse se déplace vers la droite.

Déplacement vers la droite : $\dot{x} > 0$

L'équation différentielle correspond au cas où $\dot{x} > 0$ et a pour solution

$$x(t) = A_2 \cos \omega_0 t + B_2 \sin \omega_0 t - \frac{\mu N}{k}$$

pour $\frac{\pi}{\omega_0} < t < t_2$. Les conditions initiales pour cette équation sont fournies par l'équation précédente à t_1 :

$$\begin{aligned} x\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) &= \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \cos \pi + \frac{\mu N}{k} = \frac{2\mu N}{k} - x_0 \\ \dot{x}\left(\frac{\pi}{\omega_0}\right) &= -\omega_0 \left(x_0 - \frac{\mu N}{k}\right) \sin \pi = 0 \end{aligned}$$

ce qui conduit à

$$A_2 = x_0 - \frac{3\mu N}{k} \quad B_2 = 0$$

La solution pour le second intervalle de temps est

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{3\mu N}{k}\right) \cos \omega_0 t - \frac{\mu N}{k}, \quad \frac{\pi}{\omega_0} < t < \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Arrêt du mouvement

Cette procédure se répète jusqu'à ce que le mouvement s'arrête. Cet événement se produit quand

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \text{et} \quad |kx| \leq \mu N$$

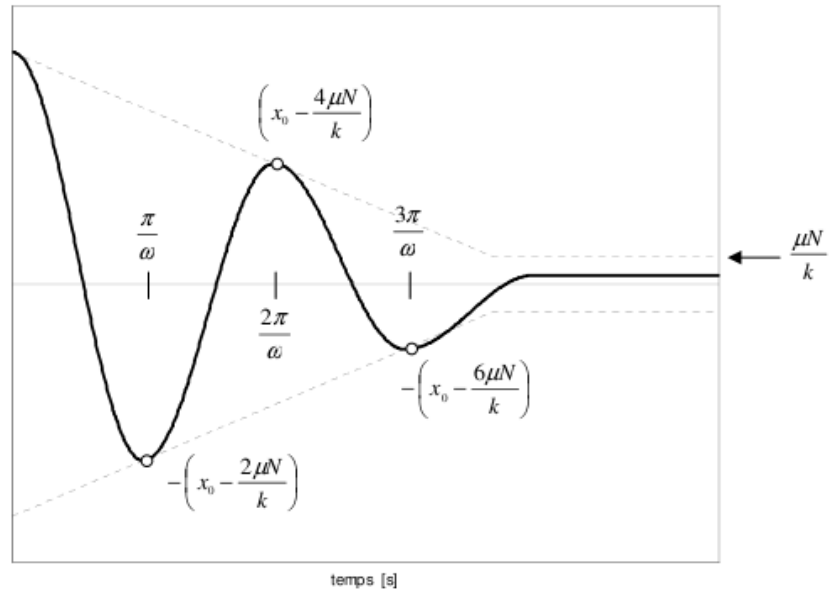


Figure 2.26 - Oscillation libre avec frottement solide

Remarques :

a) L'amplitude des oscillations décroît linéairement comme

$$x_0 - \frac{2\mu N\omega}{\pi k} t$$

b) La fréquence d'oscillation du système amorti par frottement solide est la même que pour le système non amorti.

c) La position d'arrêt peut être différente de la position d'équilibre initial.

4.8.5 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 153. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur [http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95](http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95).

2.2 – Energie dissipée par cycle et amortissement équivalent

La **réponse harmonique forcée** d'un système avec amortissement de par frottement solide est la solution de l'équation

$$m\ddot{x} + \mu N \operatorname{sign}(\dot{x}) + kx = F \cos \omega t$$

Plutôt que de résoudre cette équation directement, on recherche une solution approchée en considérant la solution du système à amortissement visqueux qui dissipe la même **énergie par cycle**. C'est une hypothèse raisonnable tant que la force d'excitation est bien plus importante que la force de friction ($F \gg \mu N$).

On suppose une réponse stationnaire de la forme

$$x(t) = X \sin \omega t$$

L'énergie dissipée par cycle ΔE par un système dont le coefficient d'**amortissement visqueux** vaut c est

$$\Delta E_v = \int_{\text{cycle}} F_d dx = \int_0^{2\pi/\omega} \left(c\dot{x} \frac{dx}{dt} \right) dt = \int_0^{2\pi/\omega} c\dot{x}^2 dt$$

avec $\dot{x}(t) = \omega X \cos \omega t$

$$\Delta E_v = \int_0^{2\pi/\omega} c\omega^2 X^2 \cos^2 \omega t dt = \int_0^{2\pi/\omega} \frac{c}{2} \omega^2 X^2 dt = \pi c \omega X^2$$

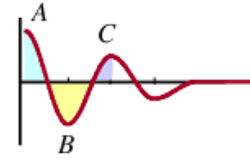
(car $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega t$)

Par ailleurs, l'énergie dissipée par cycle par **frottement solide** est

$$\Delta E_s = \int_{\text{cycle}} F_d dx = \int_0^{2\pi/\omega} \left(\mu N \operatorname{sign}(\dot{x}) \frac{dx}{dt} \right) dt = \mu N \int_0^{2\pi/\omega} \operatorname{sign}(\dot{x}) \dot{x} dt$$

$$\Delta E_s = \mu N \omega X \left[\int_0^{\pi/2\omega} \cos \omega t dt - \int_{\pi/2\omega}^{3\pi/2\omega} \cos \omega t dt + \int_{3\pi/2\omega}^{2\pi/\omega} \cos \omega t dt \right]$$

$$= 4\mu N \omega X \int_0^{\pi/2\omega} \cos \omega t dt = 4\mu N X$$



(en considérant $\frac{1}{\omega} \int_0^{\pi} \cos u du = \frac{1}{\omega} [\sin u]_0^{\pi} = \frac{1}{\omega}$).

Pour qu'un système à amortissement visqueux dissipe la même énergie qu'un système à amortissement par frottement solide : $\Delta E_v = \Delta E_s$, il faut qu'il ait un coefficient d'amortissement visqueux équivalent

$$c_{eq} = \frac{4\mu N}{\pi \omega X},$$

ou en terme de rapport d'amortissement équivalent

$$\zeta_{eq} = \frac{c_{eq}}{2m\omega_0} = \frac{2\mu N / m}{\pi \omega_0 \omega X}$$

On constate qu'il dépend de l'**amplitude** et de la **fréquence** d'excitation. Ainsi le système à frottement visqueux dont le mouvement est décrit par

$$\ddot{x} + 2\zeta_{eq}\omega_0 \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \omega t,$$

dissipera la même énergie par cycle que le système à frottement solide. Sa solution est de la forme $x(t) = X \cos(\omega t - \phi)$, X amplitude *réelle*

$$X = \frac{F/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta_{eq}r)^2}} = \frac{F/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (4\mu N / \pi k X)^2}}$$

En résolvant cette expression pour X

$$X^2 \left[(1-r^2)^2 + \frac{1}{X^2} \left(\frac{4\mu N}{\pi k} \right)^2 \right] = \left(\frac{F}{k} \right)^2$$

on obtient pour l'amplitude

$$X = \frac{F}{k} \frac{\sqrt{1 - (4\mu N / \pi F)^2}}{|1-r^2|}$$

Par ailleurs, la phase s'écrit

$$\phi = \arctan \frac{2\zeta_{eq}r}{1-r^2} = \arctan \frac{4\mu N}{\pi k X (1-r^2)}$$

En substituant dans cette dernière équation l'expression de X

$$\phi = \arctan \frac{\pm 4\mu N}{\pi F \sqrt{1 - (4\mu N / \pi F)^2}} \quad (\text{le signe } \pm \text{ dépend de } |1 - r^2|)$$

ainsi quand $r < 1 \Rightarrow \phi > 0$ et quand $r > 1 \Rightarrow \phi < 0$.

Remarque

Contrairement au système à amortissement visqueux, à la résonance ($r = 1$), le modèle de système à frottement solide présente une amplitude infinie et une discontinuité pour la phase.

Les expressions pour la réponse sont valables seulement dans le cas où $4\mu N < \pi F$, ce qui confirme l'hypothèse de départ.

L'amplitude du système n'est pas une fonction linéaire de la force d'excitation et sa phase dépend de F . Il ne satisfait pas au principe de superposition. C'est un **système non-linéaire**.

2.3 – Amortissement hystérétique (ou structural)

Nous avons vu qu'il est intéressant d'étudier les mécanismes d'amortissement en examinant l'énergie dissipée par cycle définie par l'équation

$$\Delta E = \int_{\text{cycle}} F_d dx, \quad F_d : \text{force d'amortissement}$$

On définit une capacité d'amortissement spécifique par le rapport de l'énergie perdue par cycle sur la valeur crête de l'énergie potentielle $\Delta E / U_{\max}$. Le **facteur de perte** est l'expression précédente normalisée par 2π

$$\eta = \frac{\Delta E}{2\pi U_{\max}},$$

U_{\max} est l'énergie potentielle au maximum du déplacement.

Pour un système à amortissement **visqueux**

$$\eta = \frac{\pi c \omega X^2}{2\pi \left(\frac{1}{2} k X^2\right)} = \frac{c \omega}{k}$$

A la fréquence de résonance $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$, le facteur de perte est le **double** du rapport d'amortissement :

$$\eta = \frac{c}{\sqrt{km}} = 2\zeta.$$

Si on considère la force nécessaire pour déplacer la masse d'un système à amortissement visqueux

$$F = kx + c\dot{x}$$

avec $x = X \sin \omega t$ et $\dot{x} = \omega X \cos \omega t$. Avec $\cos \omega t = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \omega t}$, il est possible d'écrire

$$F = kx \pm c\omega\sqrt{X^2 - x^2}$$

Dans le plan (F, x) , cette relation est représentée par l'ellipse de la Figure 2.27a. C'est une boucle d'hystérésis dont l'aire correspond à l'énergie perdue par cycle $\Delta E_v = \pi c \omega X^2$. Pour $c = 0$, l'ellipse devient la droite $F = kx$.

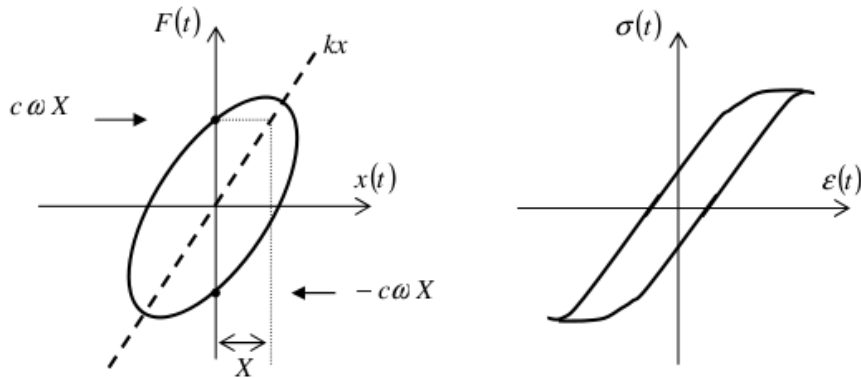


Figure 2.27 - (a) Ellipse représentant la boucle d'hystérésis dans le cas d'un amortissement visqueux. (b) Boucle d'hystérésis dans le cas d'un amortissement structural.

En mesurant les contraintes et les déformations de matériaux excités par des efforts harmoniques, il apparaît également des boucles d'hystérésis semblables. Elles sont dues à des dissipations d'énergie appelées **amortissement hystérétique** ou amortissement structural. L'aire fermée dans la boucle correspond à la perte d'énergie par cycle

$$\Delta E_H = \pi k \beta X^2$$

qui est proportionnelle à la raideur, au carré de l'amplitude et à β la constante d'amortissement hystérétique (β est indépendant de la fréquence). Si on compare cette dernière expression à celle de la perte d'énergie par cycle par amortissement visqueux

$$\Delta E_v = \Delta E_H \Rightarrow \pi c_{eq} \omega X^2 = \pi k \beta X^2$$

le coefficient d'amortissement équivalent d'un système à amortissement visqueux qui dissiperait la même énergie par cycle

$$c_{\text{eq}} = \frac{k\beta}{\omega}$$

β étant déterminé expérimentalement à partir de la courbe d'hystérésis. L'équation du mouvement d'un tel système est

$$m\ddot{x} + \frac{\beta k}{\omega} \dot{x} + kx = F \cos \omega t.$$

Si la réponse en régime stationnaire est de la forme $x(t) = X \cos(\omega t - \phi)$, on obtient le même type de solution que précédemment

$$X = \frac{F/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\zeta_{\text{eq}}r)^2}} \quad \text{et} \quad \phi = \arctan \frac{2\zeta_{\text{eq}}r}{1-r^2}$$

où $\zeta_{\text{eq}} = c_{\text{eq}} / 2\sqrt{km} = \beta\omega_0 / 2\omega = \beta/2r$, soit

$$X = \frac{F/k}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \beta^2}} \quad \text{et} \quad \phi = \arctan \frac{\beta}{1-r^2}.$$

Contrairement au cas de l'amortissement visqueux, on observe que l'amplitude maximale de Xk/F à lieu à la fréquence de résonance $r=1$. Autre particularité, la réponse n'est jamais en phase avec la force d'excitation.

En utilisant des **variables complexes** (voir la remarque de la section 1.2)

$$m\ddot{\underline{x}} + \frac{\beta k}{\omega} \dot{\underline{x}} + k\underline{x} = F e^{j\omega t}$$

avec $\underline{x} = X e^{j\omega t}$ et $\dot{\underline{x}} = j\omega X e^{j\omega t} = j\omega \underline{x}$, d'où

$$m\ddot{\underline{x}} + k(1 + j\beta)\underline{x} = F e^{j\omega t}$$

L'amortissement hystérétique (ou structural) peut donc être pris en compte sous la forme d'une **raideur complexe**

$$\underline{k} = k(1 + j\beta).$$

4.8.6 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 154. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-le Mans.fr/course/view.php?id=95>.

3 – REPONSE FORCEE A UNE EXCITATION QUELCONQUE

3.1 – Réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle d'un système à un degré de liberté se définit comme la réponse à une excitation de la forme $F(t) = F_0 \delta(t)$ où $\delta(t)$ est la fonction de Dirac :

$$x(t) = F_0 h(t)$$

La **réponse impulsionnelle** est donc

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{pour } t < 0 \\ \frac{1}{m\omega_a} \exp(-\zeta\omega_0 t) \sin \omega_a t, & \text{pour } t \geq 0 \end{cases}$$

avec la pseudo-pulsation $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$,

La réponse impulsionnelle est donnée pour une impulsion unitaire $\delta(t)$ appliquée à $t = 0$. Une excitation impulsionnelle² appliquée à l'instant $t = t_1$

$$F(t) = I_0 \delta(t - t_1)$$

aura pour réponse

$$x(t) = I_0 h(t - t_1) = \frac{I_0}{m\omega_a} e^{-\zeta\omega_0(t-t_1)} \sin \omega_a(t - t_1)$$

pour $t \geq t_1$ et $x(t) = 0$ pour $t < t_1$. Cette solution s'entend au sens d'une solution particulière, une solution générale viendrait s'ajouter si les conditions initiales n'étaient pas nulles (existence d'un mouvement pour $t \leq 0$).

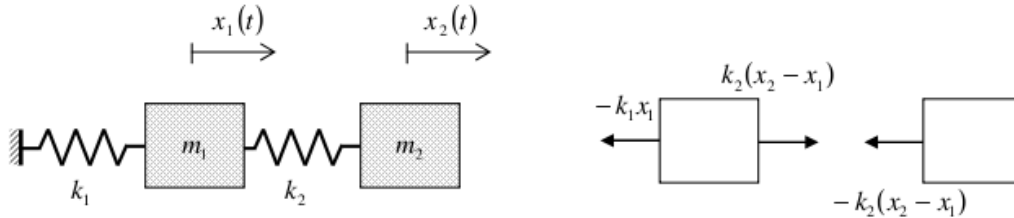
4.8.7 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 158. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

4.9 Système à plusieurs degrés de liberté

1 – SYSTEME A DEUX DEGRES DE LIBERTE

1.1 – Modèle non-dissipatif (non-amorti)



En sommant les forces qui s'exercent sur chaque masse, on obtient

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) \end{aligned}$$

où encore sous la forme de deux équations différentielles du second ordre **couplées**

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 = 0 \end{cases}$$

A ces équations correspondent **4 conditions initiales**

$$x_1(0) = x_{10}, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}, \quad x_2(0) = x_{20}, \quad \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}$$

Pour résoudre ce problème, on utilise une représentation matricielle qui présente l'avantage de pouvoir se généraliser à un nombre quelconque de degrés de liberté.

Des vecteurs **colonnes** sont utilisés pour décrire déplacements, vitesses et accélérations

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix}$$

La **matrice des masses** $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$ permet d'écrire l'équation dynamique

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \ddot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$

La **matrice des raideurs** permet d'exprimer les forces qui s'appliquent sur les masses

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 \\ -k_2x_1 + k_2x_2 \end{bmatrix}$$

Le système d'équations qui décrit le système à deux degrés de liberté peut donc s'écrire sous forme matricielle

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Les matrices de masses et des raideurs sont symétriques

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{M} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}^T = \mathbf{K}$$

On suppose une solution harmonique **complexe** de la forme $\mathbf{x}(t) = \mathbf{X} e^{j\omega t}$ avec \mathbf{X} le vecteur des amplitudes indépendant de t (dans ce chapitre on omet volontairement de prendre explicitement la partie réelle : $\mathbf{x}(t)$ est donc une variable complexe). L'équation s'écrit

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{X} e^{j\omega t} = \mathbf{0}$$

Comme en général $e^{j\omega t}$ doit être différent de 0, l'équation précédente devient

$$(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{D} \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

\mathbf{D} est nommée **matrice dynamique**.

Une solution triviale correspond à $\mathbf{D}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{X} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}$, (\mathbf{D}^{-1} inverse de \mathbf{D}), c'est à dire que $x_1 = x_2 = 0$. La solution non-triviale correspond au cas où la matrice \mathbf{D} est singulière (son déterminant est nul et elle n'a pas d'inverse).

Rappel : si $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ alors $\det(\mathbf{D}) = ad - bc$ et $\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{D})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

La condition de singularité est appliquée à la matrice dynamique pour obtenir une solution indépendante de \mathbf{X} :

$$\det(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) = 0$$

permet de déterminer l'inconnue ω^2

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{D}) &= \det \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix} \\ &= m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_2 + m_2 k_1 + m_2 k_2) \omega^2 + k_1 k_2 = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré en ω^2 qui fournit **deux solutions** ω_1^2 et ω_2^2 , soit $\pm \omega_1$ et $\pm \omega_2$. En reportant cette solution dans l'équation matricielle, il est possible de déterminer deux vecteurs (vecteurs propres) \mathbf{X}

$$\begin{aligned}(-\omega_1^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{X}_1 &= \mathbf{0} \\(-\omega_2^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{X}_2 &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Les vecteurs \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 ne sont connus qu'à un facteur multiplicateur près. La solution de $\mathbf{x}(t)$ est une combinaison linéaire des termes $\mathbf{X}_1 e^{\pm j\omega_1 t}$ et $\mathbf{X}_2 e^{\pm j\omega_2 t}$

$$\mathbf{x}(t) = (B_1 e^{j\omega_1 t} + B_2 e^{-j\omega_1 t}) \mathbf{X}_1 + (B_3 e^{j\omega_2 t} + B_4 e^{-j\omega_2 t}) \mathbf{X}_2$$

où les coefficients B_1 à B_4 dépendent des conditions initiales $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = [x_{10} \quad x_{20}]^T$ et $\dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(0) = [\dot{x}_{10} \quad \dot{x}_{20}]^T$. La solution peut aussi s'écrire sous la forme

$$\mathbf{x}(t) = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \mathbf{X}_1 + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \mathbf{X}_2$$

où les amplitudes et les phases dépendent des conditions initiales.

Chaque masse oscille aux deux fréquences ω_1 et ω_2 appelées **fréquences naturelles** du système. Si les conditions initiales sont choisies telles que $A_2 = 0$, alors les deux masses oscillent uniquement à ω_1 et leurs positions relatives dépendent du vecteur \mathbf{X}_1 appelé **déformée du premier mode**. Réciproquement si les conditions initiales sont choisies pour que $A_1 = 0$.

NB : les fréquences naturelles du système couplé à deux degrés de liberté ne correspondent pas à celle des systèmes isolés ou bloqués.

1.2 – Exemple

Soit le système précédent avec $m_1 = 9$, $m_2 = 1$, $k_1 = 24$, $k_2 = 3$. L'équation caractéristique

$$\det(\mathbf{D}) = \omega^4 - 6\omega^2 + 8 = (\omega^2 - 2)(\omega^2 - 4) = 0$$

conduit aux solutions $\omega_1^2 = 2$ et $\omega_2^2 = 4$.

Premier vecteur \mathbf{X}_1 correspondant à $\omega^2 = \omega_1^2 = 2$

$$(-\omega_1^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 27 - 9(2) & -3 \\ -3 & 3 - (2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'équation précédente fournit deux équations $9x_{11} - 3x_{12} = 0$ et $-3x_{11} + x_{12} = 0$ qui sont dépendantes et conduisent donc à la même solution

$$x_{11} = \frac{1}{3}x_{12} \text{ donc le vecteur est défini à une constante multiplicative près } \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Deuxième vecteur \mathbf{X}_2 correspondant à $\omega^2 = \omega_2^2 = 4$

$$\begin{aligned} (-\omega_2^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})\mathbf{X}_2 &= \begin{bmatrix} 27-9(4) & -3 \\ -3 & 3-(4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ -9x_{21} - 3x_{22} &= 0 \text{ soit } x_{21} = -\frac{1}{3}x_{22} \text{ donc } \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Solution pour le mouvement des deux masses

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = A_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix} + A_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

avec $\omega_1 = \sqrt{2}$ et $\omega_2 = 2$. A_1 , A_2 , ϕ_1 et ϕ_2 sont déterminés à partir des conditions initiales.

Solution correspondant à des vitesses initiales nulles : $\dot{\mathbf{x}}_0 = \begin{bmatrix} \dot{x}_{10} \\ \dot{x}_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 0 = \omega_1 A_1 \cos \phi_1 x_{11} + \omega_2 A_2 \cos \phi_2 x_{21} \\ 0 = \omega_1 A_1 \cos \phi_1 x_{12} + \omega_2 A_2 \cos \phi_2 x_{22} \end{cases} \Rightarrow \omega_1 A_1 \cos \phi_1 \left(\frac{x_{11}}{x_{21}} - \frac{x_{12}}{x_{22}} \right) = 0$$

d'où $\cos \phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = \frac{\pi}{2}$. De la même manière, on obtiendra $\phi_2 = \frac{\pi}{2}$. En prenant en compte les valeurs du déplacement initial, il est alors possible d'obtenir A_1 et A_2

$$\begin{cases} x_{10} = A_1 \sin \phi_1 x_{11} + A_2 \sin \phi_2 x_{21} \\ x_{20} = A_1 \sin \phi_1 x_{12} + A_2 \sin \phi_2 x_{22} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{10} = A_1 x_{11} + A_2 x_{21} \\ x_{20} = A_1 x_{12} + A_2 x_{22} \end{cases}$$

soit $A_1 = \frac{x_{10}x_{22} - x_{20}x_{21}}{x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21}}$ et $A_2 = \frac{x_{10}x_{12} - x_{20}x_{11}}{x_{21}x_{12} - x_{22}x_{11}}$

et finalement avec $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$, l'équation du mouvement dans ce cas particulier est

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} A_1 \cos(\sqrt{2} t) - \frac{1}{3} A_2 \cos(2 t) \\ A_1 \cos(\sqrt{2} t) + A_2 \cos(2 t) \end{bmatrix}$$

Remarque : Si on veut mettre en évidence seulement le premier mode (à $\omega_1 = \sqrt{2}$), il faut que $A_2 = 0$ (c'est à dire $x_{10}x_{12} = x_{20}x_{11}$), donc que les déplacements initiaux vérifient la

relation $\frac{x_{10}}{x_{20}} = \frac{x_{11}}{x_{12}}$.

Il en sera de même pour le deuxième mode (à $\omega_2 = 2$), pour lequel $A_1 = 0$ conduit à

$$\frac{x_{10}}{x_{20}} = \frac{x_{21}}{x_{22}}.$$

Donc pour obtenir un mouvement correspondant à un mode unique, il faut que le déplacement initial soit proportionnel à la **déformée modale** du mode si les vitesses initiales sont nulles.

4.9.1 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 127. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur [http ://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95](http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95).

1.3 - Réponse forcée

Des forces d'excitation $F_1(t)$ et $F_2(t)$ sont appliquées aux deux masses. L'équilibre des forces conduit au système d'équations

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$$

Le second membre est le vecteur des forces $\mathbf{F}(t) = [F_1(t) \ F_2(t)]^T$. Pour des excitations complexes $F_1(t) = \underline{F}_1 e^{j\omega t}$ et $F_2(t) = \underline{F}_2 e^{j\omega t}$ (\underline{F}_1 et \underline{F}_2 sont des nombres complexes dont les phases représentent celles de l'excitation). Au vecteur complexe $\mathbf{F}(t) = \underline{\mathbf{F}} e^{j\omega t}$ correspondra une réponse également complexe $\mathbf{x}(t) = \underline{\mathbf{x}} e^{j\omega t}$. Le système d'équations peut alors s'écrire

$$\mathbf{D} \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{F}}$$

avec la matrice dynamique (réelle dans le cas d'un système non-amorti)

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -\omega^2 m_2 + k_2 \end{bmatrix}$$

La solution particulière s'écrit

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{D}^{-1} \underline{\mathbf{F}}$$

où \mathbf{D}^{-1} est l'inverse de la matrice dynamique \mathbf{D}

$$\mathbf{D}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{D})} \begin{bmatrix} -\omega^2 m_2 + k_2 & k_2 \\ k_2 & -\omega^2 m_1 + k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

en dehors des fréquences naturelles ω_1 et ω_2 où $\det(\mathbf{D}) = 0$ les réponses complexes sont définies par

$$\underline{x}_1 = \frac{(-\omega^2 m_2 + k_2) \underline{F}_1 + k_2 \underline{F}_2}{\det(\mathbf{D})} \quad \text{et} \quad \underline{x}_2 = \frac{k_2 \underline{F}_1 + (-\omega^2 m_1 + k_1 + k_2) \underline{F}_2}{\det(\mathbf{D})}$$

avec $\det(\mathbf{D}) = (k_2 - \omega^2 m_2)(k_1 + k_2 - \omega^2 m_1) - k_2^2$.

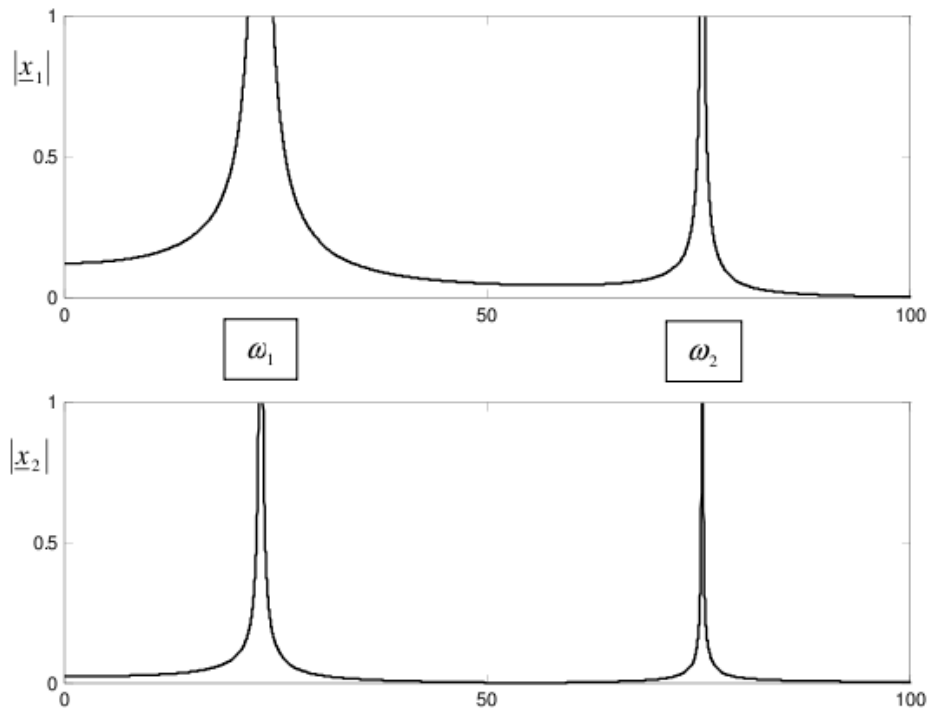


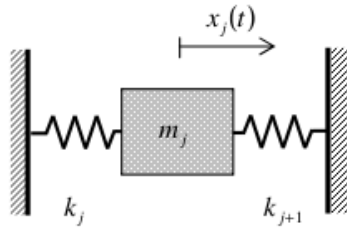
Figure 3.1 - Réponse en fréquence d'un système à deux degrés de liberté

4.9.2 Brevets d'acquisition de connaissance

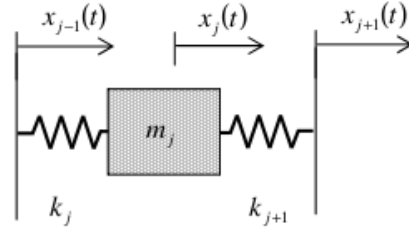
Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le 160, 161, 162, 163, 164 et 165. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

2 - GENERALISATION AUX SYSTEMES A PLUSIEURS DEGRES DE LIBERTE

Pour un système à n degrés de liberté, le vecteur déplacement devient un vecteur colonne $n \times 1$ et les matrices de masse et de raideur sont des matrices carrées $n \times n$. En considérant une masse j , l'équation d'équilibre s'écrit :



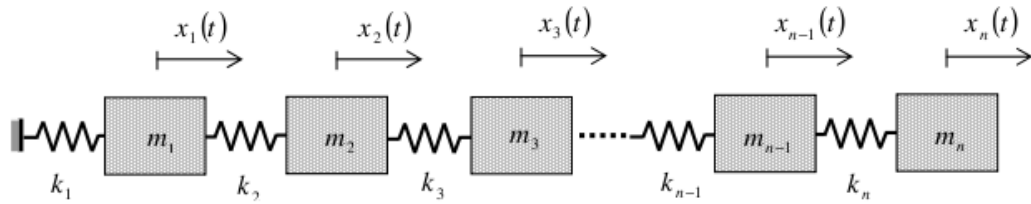
(a) pour les masses $j-1$ et $j+1$ bloquées



(b) pour les masses $j-1$ et $j+1$ en mouvement

$$m_j \ddot{x}_j = -k_j x_j - k_{j+1} x_j$$

$$m_j \ddot{x}_j = -k_j (x_j - x_{j-1}) - k_{j+1} (x_j - x_{j+1})$$



En généralisant au système complet :

$$\begin{aligned} m_j \ddot{x}_j &= -k_j (x_j - x_{j-1}) + k_{j+1} (x_{j+1} - x_j) \\ &= k_j x_{j-1} - (k_j + k_{j+1}) x_j + k_{j+1} x_{j+1} \end{aligned} \quad \text{pour } j = 1, \dots, n$$

avec $x_0 = 0$, $k_{n+1} = 0$. L'ensemble de ces équations peut se mettre sous la forme d'un système linéaire

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

avec

$$\mathbf{M} = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, \dots, m_{n-1}, m_n)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -k_3 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & -k_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix}$$

où $\mathbf{M} = \text{diag}(m_j)$ matrice diagonale $n \times n$ pour un système à n masses.

\mathbf{K} matrice symétrique $n \times n$ des raideurs

$$\mathbf{M}^T = \mathbf{M} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}^T = \mathbf{K} \quad (\text{symétrie})$$

Remarque: Dans le cas où la dernière masse est connectée par une raideur k_{n+1} à une partie fixe, le dernier élément sur la diagonale de la matrice de raideur devient $K_{nn} = k_n + k_{n+1}$.

4.9.3 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 101. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.

2.1 - Méthode de la base modale : réponse libre

L'objectif est de ramener l'étude à celle d'un système à 1 DDL

- en normalisant l'équation du mouvement par rapport à la masse,
- en réalisant une transformation de coordonnées pour se placer dans la "base modale" où les équations du mouvement sont découplées.

Soit le système à plusieurs degrés de liberté défini par

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

dont on veut déterminer la **réponse libre** pour les conditions initiales:

$\mathbf{x}(0)$ vecteur des déplacements initiaux à $t = 0$,

$\dot{\mathbf{x}}(0)$ vecteur des vitesses initiales à $t = 0$.

Première étape : Normalisation par rapport à la masse

La matrice des masses peut s'écrire $\mathbf{M} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{M}^{1/2}$ où

$$\mathbf{M}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{m_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{m_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{m_n} \end{bmatrix} = \text{diag}(\sqrt{m_j}).$$

Il est possible d'exprimer $\mathbf{M}^{-1/2} = \text{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{m_j}}\right)$ et de remplacer \mathbf{x} par (premier changement de variable)

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{q}$$

Le système d'équation du mouvement devient

$$\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

et en multipliant à gauche par $\mathbf{M}^{-1/2}$

$$\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1/2}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

On remarque que

$$\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1/2} = \mathbf{I} : \text{ matrice unitaire}$$

$\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} = \tilde{\mathbf{K}} : \text{ matrice symétrique normalisée de la raideur}$
ce qui conduit à l'équation dynamique normalisée

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q} = 0$$

Si $\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{q}$ alors $\mathbf{q} = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{x}$ et les **nouvelles valeurs initiales** sont:

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{M}^{1/2} \mathbf{x}(0) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{M}^{1/2} \dot{\mathbf{x}}(0)$$

Deuxième étape : calcul des valeurs propres et vecteurs propres

En cherchant une solution de la forme $\mathbf{q}(t) = \mathbf{v} e^{j\omega t}$ l'équation du mouvement devient

$$(-\omega^2 \mathbf{I} + \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{v} e^{j\omega t} = 0$$

Après rejet de la solution triviale $\mathbf{v} = 0$ et en posant $\lambda = \omega^2$, on est ramené à un **problème** typique **de recherche de valeurs propres** :

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

- a) à chaque valeur propre λ_i correspond un vecteur propre \mathbf{v}_i ,
- b) $\tilde{\mathbf{K}}$ est une matrice carrée $n \times n$ qui a n valeurs propres et n vecteurs propres,
- c) $\tilde{\mathbf{K}}$ est une matrice symétrique alors les λ_i sont réels et les \mathbf{v}_i sont composées d'éléments réels,
- d) les n valeurs propres sont obtenues en cherchant les solutions λ de l'équation caractéristique

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{K}}) = 0,$$

- e) les n vecteurs propres sont les solutions des n équations associées à chaque valeur propre λ_i

$$(\lambda_i \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{K}}) \mathbf{v}_i = 0$$

- f) les vecteurs propres forment un ensemble de vecteurs linéairement indépendants qui peuvent être normés. La norme du vecteur \mathbf{v} est définie par

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \left[\sum_{j=1}^n v_j^2 \right]^{1/2}$$

Pour normer le vecteur \mathbf{v} , on recherche le scalaire α tel que $\mathbf{u} = \alpha \mathbf{v}$ ait une norme unitaire, donc

$$(\alpha \mathbf{v}^T)(\alpha \mathbf{v}) = 1 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$$

d'où
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

g) Les vecteurs normés \mathbf{u}_i satisfont la relation d'orthogonalité

$$\mathbf{u}_i^T \mathbf{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

et peuvent définir une **matrice orthogonale** (les vecteurs \mathbf{u}_i sont dits orthonormaux)

$$\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n]$$

telle que $\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} = \text{diag}(\lambda_i)$.

Conséquence : $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$ (voir Annexe)

Troisième étape : projection dans la base modale

La matrice orthogonale \mathbf{P} est utilisée pour effectuer un nouveau changement de variable : on pose

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P} \mathbf{r}(t)$$

et on multiplie à gauche par \mathbf{P}^T

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{P}^T \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{P} \mathbf{r}(t) = 0$$

En tenant compte des propriétés énoncées plus haut et en considérant $\lambda_i = \omega_i^2$, cette transformation conduit à l'expression suivante

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{r}}(t) + \text{diag}(\omega_i^2) \mathbf{r}(t) = 0$$

qui représente un système de n **équations indépendantes** (*découplées*) :

$$\ddot{r}_1(t) + \omega_1^2 r_1(t) = 0$$

...

$$\ddot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = 0$$

...

$$\ddot{r}_n(t) + \omega_n^2 r_n(t) = 0$$

En exprimant les conditions initiales dans la base modale

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{P} \mathbf{r}(t) \Rightarrow \mathbf{r}(t) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{q}(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{q}(t)$$

d'où

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{P}^T \mathbf{q}(0) \quad \text{et} \quad \dot{\mathbf{r}}(0) = \mathbf{P}^T \dot{\mathbf{q}}(0)$$

la **solution** pour $r_i(t)$ est celle du **système à un degré de liberté**

$$r_i(t) = \frac{\sqrt{\omega_i^2 r_{i0}^2 + \dot{r}_{i0}^2}}{\omega_i} \sin\left(\omega_i t + \arctan \frac{\omega_i r_{i0}}{\dot{r}_{i0}}\right)$$

(r_{i0} et \dot{r}_{i0} sont les éléments des vecteurs $\mathbf{r}(0)$ et $\dot{\mathbf{r}}(0)$)

Quatrième étape : calcul des déplacements des masses (transformation inverse)

En utilisant les équations précédentes, il est possible de calculer le vecteur des déplacements \mathbf{x} à partir des solutions dans la base modale \mathbf{r} . Puisque $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{q}(t)$ et $\mathbf{q}(t) = \mathbf{P} \mathbf{r}(t)$

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{q} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{P} \mathbf{r} = \mathbf{S} \mathbf{r}$$

La matrice $\mathbf{S} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{P}$ où $\mathbf{P} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_n]$ est donc constituée de vecteurs colonnes

$$\mathbf{S} = [\Phi_1, \dots, \Phi_i, \dots, \Phi_n]$$

$$\text{tels que } \Phi_i = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} (u_i)_1 / \sqrt{m_1} \\ (u_i)_2 / \sqrt{m_2} \\ \vdots \\ (u_i)_n / \sqrt{m_n} \end{bmatrix}.$$

Φ_i est le vecteur de la **déformée modale** du mode i , c'est à dire le vecteur des déplacements unitaires $(\Phi_i)_j$ de chaque masse j .

Les déplacements peuvent s'écrire

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S} \mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) \Phi_i, \quad \text{avec } \Phi_i = \begin{bmatrix} \phi_{1i} \\ \phi_{2i} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

soit pour une masse j

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) (\Phi_i)_j = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \phi_{ji}$$

avec $A_i = \frac{\sqrt{\omega_i^2 r_{i0}^2 + \dot{r}_{i0}^2}}{\omega_i}$ et $\varphi_i = \arctan \frac{\omega_i r_{i0}}{\dot{r}_{i0}}$

Resumé de la démarche

Première étape : Normalisation par rapport à la masse et premier changement de variable :
 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{q}$

Deuxième étape : recherche des valeurs propres $\lambda_i = \omega_i^2$ et des vecteurs propres \mathbf{v}_i .
 Les vecteurs normalisés \mathbf{u}_i obtenus à partir des vecteurs \mathbf{v}_i permettent de construire une matrice orthogonale \mathbf{P}

Troisième étape : projection dans la base modale
 La matrice \mathbf{P} est utilisée pour effectuer un changement de base qui conduit au deuxième changement de variable :

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{r}$$

Le système d'équations obtenu correspond à n équations différentielles indépendantes de systèmes à un degré de liberté dont les solutions $r_i(t)$ peuvent être facilement calculées en employant les conditions initiales ($\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{q}_0 \rightarrow \mathbf{r}_0$, $\dot{\mathbf{x}}_0 \rightarrow \dot{\mathbf{q}}_0 \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_0$).

Quatrième étape : calcul des déplacements dans la base physique (*transformation inverse*)
 Pour cela le changement de variable inverse est effectué :

$$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{x}$$

Le déplacement $x_j(t)$ de chaque masse est une combinaison linéaire des solutions $r_i(t)$ de la base modale :

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) (\phi_i)_j = \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\omega_i^2 r_{i0}^2 + \dot{r}_{i0}^2}}{\omega_i} \sin\left(\omega_i + \arctan \frac{\omega_i r_{i0}}{\dot{r}_{i0}}\right) \frac{(u_i)_j}{\sqrt{m_j}}$$

2.2 - Systèmes avec amortissement visqueux

Les systèmes réels sont amortis mais on ne connaît pas bien dans la plupart des cas le modèle d'amortissement. Souvent, le modèle d'amortissement visqueux est utilisé pour des raisons de simplicité. La méthode consiste à considérer un **taux d'amortissement modal** $\zeta_i < 1$ inclus dans les équations découplées de la base modale

$$\ddot{r}_i(t) + 2\zeta_i \omega_i \dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = 0$$

La solution est (voir système à 1 ddl)

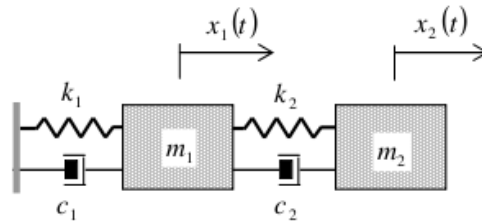
$$r_i(t) = A_i \exp(-\zeta_i \omega_i t) \sin(\omega_{ai} t + \phi_i)$$

avec

$$\omega_{ai} = \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}, \quad A_i = \sqrt{\frac{(\dot{r}_{i0} + \zeta_i \omega_i r_{i0})^2 + (r_{i0} \omega_{ai})^2}{\omega_{ai}^2}} \quad \text{et} \quad \phi_i = \arctan \frac{r_{i0} \omega_{ai}}{\dot{r}_{i0} + \zeta_i \omega_i r_{i0}}$$

Le taux d'amortissement modal ζ_i devra être estimé expérimentalement, soit être identifié à partir de la matrice des coefficients d'amortissement qui entre dans le système d'équations du mouvement :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$



Par exemple, pour un système à 2 ddl

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Cette équation pose problème car la décomposition modale ne peut pas être réalisée par la procédure décrite précédemment car les coefficients d'amortissement créent un couplage supplémentaire entre les équations du mouvement. Plusieurs méthodes numériques sont utilisables pour résoudre ce problème. Cependant, dans bon nombre de cas, il sera possible d'approcher la matrice \mathbf{C} par une combinaison linéaire de matrices de masse et de raideur

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad \alpha \text{ et } \beta \text{ constants.}$$

Cette forme d'amortissement est appelé **amortissement proportionnel**

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + [\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}] \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$$

En posant $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{q}(t)$ et en multipliant à gauche par $\mathbf{M}^{-1/2}$, il vient

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}}(t) + [\alpha \mathbf{I} + \beta \tilde{\mathbf{K}}] \dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}$$

puis en posant $\mathbf{q}(t) = \mathbf{P} \mathbf{r}(t)$ et en multipliant à gauche par \mathbf{P}^T

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{r}}(t) + [\alpha \mathbf{I} + \beta \text{diag}(\omega_i^2)] \dot{\mathbf{r}}(t) + \text{diag}(\omega_i^2) \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$$

Cette dernière équation ne comporte que des matrices diagonales donc correspondant à n équations modales découplées

$$\ddot{r}_i(t) + [\alpha + \beta\omega_i^2] \dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = 0$$

En rapprochant cette équation de celle utilisant le taux d'amortissement modal ζ_i , on obtient l'équivalence $2\zeta_i\omega_i = \alpha + \beta\omega_i^2$, d'où

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}.$$

2.3 - Réponses forcées

L'équation se met sous la forme

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t)$$

$\mathbf{F}(t)$ est le vecteur des forces appliquées à chaque masse

$$\mathbf{F}(t) = [F_1(t) \quad F_2(t) \quad \dots \quad F_n(t)]^T$$

En suivant toujours la même démarche : on pose $\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{q}(t)$ et on multiplie à gauche par $\mathbf{M}^{-1/2}$

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}}(t) + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q}(t) = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{F}(t)$$

avec $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{M}^{-1/2}$, puis on pose $\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}\mathbf{r}(t)$ et on multiplie à gauche par \mathbf{P}^T

$$\mathbf{I}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \text{diag}(2\zeta_i\omega_i)\dot{\mathbf{r}}(t) + \text{diag}(\omega_i^2)\mathbf{r}(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t)$$

où ζ_i est obtenu par exemple par la méthode de l'amortissement proportionnel.

$\mathbf{f}(t) = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{F}(t)$ est le vecteur des **forces modales** (généralisées), dont les éléments $f_i(t)$ sont des combinaisons linéaires des forces $F_i(t)$. Finalement, l'équation modale découplée est de la forme

$$\ddot{r}_i(t) + 2\zeta_i\omega_i \dot{r}_i(t) + \omega_i^2 r_i(t) = f_i(t)$$

dont la solution complète est celle du système à 1 ddl de déplacement $r_i(t)$

$$\begin{aligned} r_i(t) &= A_i \exp(-\zeta_i\omega_i t) \sin(\omega_{ai}t + \phi_i) + f_i(t) * h_i(t) \\ &= A_i \exp(-\zeta_i\omega_i t) \sin(\omega_{ai}t + \phi_i) + \frac{1}{\omega_{ai}} \exp(-\zeta_i\omega_i t) \int_0^t f_i(\tau) e^{\zeta_i\omega_i \tau} \sin \omega_{ai}(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

Les coefficients A_i et ϕ_i de la solution générale sont déterminés en utilisant les conditions initiales.

En **régime stationnaire** (harmonique permanent), la solution particulière pour $F_j(t) = F_{j0} \cos(\omega t + \varphi_j)$ est dans la base modale

$$r_i(t) = \frac{f_{i0}}{\sqrt{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + (2\omega \omega_i \zeta_i)^2}} \cos\left(\omega t - \arctan \frac{2\omega \omega_i \zeta_i}{\omega_i^2 - \omega^2} + \theta_i\right)$$

avec $\underline{f}_0 = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-1/2} \underline{\mathbf{F}}_0 = \mathbf{S}^T \underline{\mathbf{F}}_0$ où $\mathbf{S}^T = (\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{P})^T = \mathbf{P}^T \mathbf{M}^{-1/2}$.

\underline{f}_0 est le vecteur des forces modales généralisées complexes dont chaque élément est $\underline{f}_{i0} = f_{i0} e^{j\theta_i}$. Il est calculé à partir du vecteur $\underline{\mathbf{F}}_0$ des forces complexes appliquées à chaque nœud (masse) du système et dont chaque élément s'écrit $\underline{F}_{j0} = F_{j0} e^{j\varphi_j}$. L'utilisation d'un vecteur complexe est nécessaire pour représenter les **déphasages** φ_j différents pour chaque force.

Le vecteur déplacement s'écrit comme précédemment par

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{S} \mathbf{r}(t) = \sum_{i=1}^n r_i(t) \Phi_i$$

NB : En utilisant la fonction de transfert modale complexe $L_i(\omega) = \frac{1}{(\omega_i^2 - \omega^2) + 2j\omega \omega_i \zeta_i}$,

la solution dans la base modale s'exprime simplement par $r_i(t) = \text{Re}\left\{\underline{f}_{i0} L_i(\omega) e^{j\omega t}\right\}$.

4.9.4 Brevets d'acquisition de connaissance

Pour vérifier que vous avez assimilé ce paragraphe, je vous invite à obtenir le brevet 103, 104, 125, 126, 166. Si vous avez des difficultés, je vous invite à contacter le référent du brevet correspondant, dont le mél est disponible sur <http://umtice.univ-lemans.fr/course/view.php?id=95>.