Méthodes Spectrales et des Eléments Spectraux

Mejdi Azaïez, Monique Dauge, Yvon Maday

▶ **To cite this version:**

Mejdi Azaïez, Monique Dauge, Yvon Maday. Méthodes Spectrales et des Eléments Spectraux. DEA. Cours de DEA intensif décentralisé, Nantes, 1993, pp.87. cel-00702637v1

HAL Id: cel-00702637

https://cel.hal.science/cel-00702637v1

Submitted on 30 May 2012 (v1), last revised 14 Jul 2012 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes Spectrales et des Eléments Spectraux

Mejdi AZAIEZ, Monique DAUGE et Yvon MADAY

Mejdi AZAIEZ : *Laboratoire de Modélisation en Mécanique des Fluides, Université Paul Sabatier*
F–31062 Toulouse Cedex, France.

Monique DAUGE : *IRMAR — U.R.A. 305 du C.N.R.S. — Université de Rennes 1*
Campus de Beaulieu
F–35042 Rennes Cedex 03, France.

Yvon MADAY : *Analyse Numérique — C.N.R.S. et Université Pierre et Marie Curie*
Tour 55–65, 5ème étage, 4 place Jussieu
F–75252 Paris Cedex 05, France.

Table des Matières

1. Introduction **5**

2. Domaines **7**

3. Espaces de Sobolev **10**
3.a. Espaces à exposant entier 10
3.b. Espaces à exposant fractionnaire 11
3.c. Continuité 12
3.d. Traces 13

4. Problème de Dirichlet, approximation de Galerkin **17**
4.a. Problème exact 17
4.b. Approximation de Galerkin 18
4.c. Discrétisation 19

5. Polynômes et approximation polynomiale sur l'intervalle **21**
5.a. Les polynômes de Legendre 21
5.b. Domaine des puissances fractionnaires de A 23
5.c. Le projecteur π_N 25
5.d. Le projecteur π_N^{1*} 26
5.e. Le projecteur i_N 27

6. Polynômes et approximation polynomiale sur le carré **28**
6.a. Espaces associés 28
6.b. Le projecteur Π_N 30
6.c. Le projecteur $\Pi_N^{1,0}$ 30
6.d. Le projecteur $\mathcal{I}_N$ 32

7. Intégration numérique et méthode spectrale de collocation **33**
7.a. Intégration numérique 33
7.b. Méthode spectrale de collocation pour le problème de Dirichlet 36

8. Approximation par éléments spectraux sur le domaine Ω **39**
8.a. Eléments rectangulaires 39
8.b. Eléments courbes 42

9. Régularité des solutions **48**
9.a. Au voisinage d'un point régulier de la frontière 48
9.b. Au voisinage d'un coin "droit" 49
9.c. Au voisinage d'un coin "courbe" 55

10. Convergence des méthodes spectrales et d'éléments spectraux **57**
10.a. Sur un domaine régulier (méthode des éléments spectraux) 57
10.b. Sur un carré (méthode spectrale) 58
10.c. Sur un polygone curviligne 61

11. Formules de quadrature **64**
11.a. Calcul des points et de poids de Gauss-Legendre 64
11.b. Calcul des points et des poids de Gauss-Lobatto Legendre 66
11.c. Polynômes de Jacobi 68
11.d. Cas des polynômes de Tchebycheff 69
11.e. Cas des éléments spectraux 70

12. Ecriture du système algébrique **71**
12.a. Polynômes de Lagrange 71
12.b. Système algébrique à résoudre 71

13. Résolution par méthodes directes **76**
13.a. Méthode d'inversion directe 76
13.b. Méthode dite de diagonalisations successives 76

14. Résolution par méthodes itératives **78**
14.a. Gradient conjugué préconditionné 78
14.b. Exemples de préconditionneur 79
14.c. Résultats numériques 80

15. Résolution dans le cas des élément spectraux **82**
15.a. Cas monodimensionnel 82
15.b. Cas bidimensionnel 84
15.c. Résultats numériques 85

Références bibliographiques **86**

Chapitre 1.

Introduction

Le but de ce document est d'exposer sur un modèle simple (le problème de Dirichlet pour le Laplacien) mais représentatif, la résolution par la méthode des éléments spectraux d'un problème aux limites variationnel coercif sur un domaine plan Ω régulier ou polygonal.

Le problème "exact" est uniquement résoluble entre espaces "naturels" pour les données et les solutions : ces espaces sont des espaces de Sobolev sur le domaine Ω et sont de dimension infinie. Comme il est rare que des solutions analytiques soient accessibles, pour résoudre un tel problème, on passe par une discrétisation qui ramènera la résolution du problème continu à la résolution d'un système linéaire. Les méthodes de différences finies, d'éléments finis, la p-méthode, la méthode des éléments spectraux sont toutes des méthodes de discrétisation admissibles pour le problème considéré.

L'analyse numérique d'une méthode consiste à la décrire, mise en œuvre comprise, et aussi à évaluer dans quelle mesure la solution du problème discrétisé approche la véritable solution. Le but mathématique d'une telle analyse est de démontrer la stabilité de la méthode et la convergence des solutions approchées vers la solution quand la taille du système discrétisé tend vers l'infini. Le but numérique est d'optimiser le temps de calcul et la précision du résultat.

Dans la méthode des éléments spectraux que nous présentons, le problème est discrétisé par "collocation" en des points obtenus à partir des points de *Gauss-Lobatto* — qui sont les racines de polynômes dérivés des polynômes de Legendre. Cette discrétisation équivaut à un problème de Galerkin avec intégration numérique pour un espace de fonctions de type polynomial en monodomaine ou "polynomial par morceaux" en multidomaine. Le paramètre naturel de la discrétisation est le degré N de ces polynômes.

Après quelques préliminaires sur les domaines (Chapitre 2) et les espaces de Sobolev (Chapitre 3), nous abordons au Chapitre 4 la position du problème continu et celle du problème discrétisé dans un cadre abstrait — espace d'approximation et forme bilinéaire approchée.

Pour concrétiser cela dans le cadre des méthodes spectrales, nous étudions l'approximation polynomiale sur l'intervalle Λ (Chapitre 5) et sur le carré Λ^2 (Chapitre 6) — domaines qui sont respectivement les éléments de référence en dimension 1 et 2. Puis nous

introduisons les formules de quadrature (poids et nœuds associés) permettant l'intégration numérique. Nous montrons ensuite l'équivalence du problème de Galerkin avec un problème de collocation sur l'élément de référence (Chapitre 7 — méthode spectrale), et retournons sur le domaine Ω du problème initial (Chapitre 8 — méthode des éléments spectraux). Nous y montrons des résultats de convergence liant l'erreur entre solutions exacte et approchée, à la meilleure approximation de la solution dans l'espace discrétisé et à l'erreur d'interpolation aux nœuds de collocation sur le second membre de l'équation.

Au Chapitre 9, nous analysons la régularité des solutions en fonction de la géométrie du domaine : cette régularité suit de façon automatique celle du second membre lorsque le domaine a un bord régulier, elle admet au contraire une borne supérieure lorsque le domaine a une géométrie polygonale. De cette analyse, nous déduisons au Chapitre 10 des taux de convergence en puissances négatives de N — les estimations d'erreurs sur une solution sont d'autant meilleures que la solution est régulière.

Dans les Chapitres 11–15 de ce document, nous abordons la mise en œuvre, c'est-à-dire que nous présentons des méthodes de résolution pour le système algébrique issu de la discrétisation du problème du Laplacien par méthode spectrale de collocation en monodomaine et en multidomaine. Au Chapitre 11, nous montrons comment mettre en œuvre la formule d'intégration numérique du type Gauss et Gauss-Lobatto pour les polynômes de Legendre, et nous insisterons en particulier sur la recherche des poids et le calcul des nœuds présents dans ces formules de quadratures. Ensuite, au Chapitre 12 nous écrivons les matrices des dérivations première et seconde ainsi que le système algébrique à résoudre, quelques propriétées de la matrice de rigidité seront données et démontrées. Pour l'inversion de celle-ci deux techniques seront proposées.

- Une méthode dite de diagonalisations successives qui s'avère être efficace en domaine non courbe (Chapitre 13).
- Une méthode itérative utilisant un préconditionnement soit de type diagonal, soit par différences finies (Chapitre 14) ; cette méthode est assez générale car elle reste valable en multidomaine ainsi que dans des domaines courbes (Chapitre 15).

Concernant les différents aspects de cette étude nous nous basons sur les références suivantes :

- propriétés de régularité du problème exact ([14], [10]),
- problème approché, estimations d'erreur entre problème exact et problème approché ([8], [5], [16]),
- mise en œuvre du problème approché, estimation du nombre d'opérations, conditionnement ([8], [16], [3]).

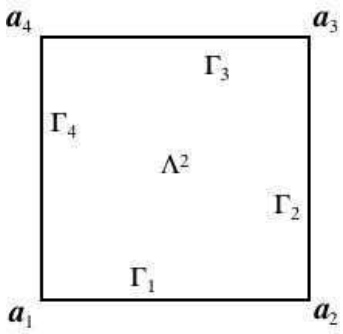
Dans ce document, nous allons décrire l'articulation des résultats entre eux et indiquer les démonstrations les plus caractéristiques.

Chapitre 2.

Domaines

En dimension 1, le domaine fondamental est l'intervalle $\Lambda =]-1,1[$. La coordonnée sera notée x (ou ζ, quand il s'agira du domaine de référence pour paramétriser des segments).

En dimension 2, l'élément fondamental est le carré Λ^2. Les coordonnées dans le carré sont notées (x,y) (ou (ζ,η), quand il s'agira de l'élément de référence pour paramétriser les éléments spectraux composant un domaine bidimensionnel Ω). Les 4 côtés du carré sont notés Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4 en tournant dans le sens trigonométrique et en commençant par celui contenu dans l'axe $y = -1$. Les sommets du carré sont notés $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$ en tournant dans le sens trigonométrique et en commençant par $(-1,-1)$.



Les domaines bi-dimensionnels les plus généraux Ω que l'on peut traiter par "éléments spectraux" sont constitués par des "unions disjointes" de *quadrilatères curvilignes* Ω_k. Il est bien entendu qu'un quadrilatère est un domaine connexe dont les 4 côtés sont des segments de courbes $\mathscr{C}^\infty$ non tangents 2 à 2.

Tout domaine Ω à frontière régulière peut se décomposer en une telle union disjointe (voir Fig. 1), de même que tout polygone curviligne à côtés $\mathscr{C}^\infty$ *et sans pointe effilée*.

Précisément, Ω désignera un ouvert connexe et borné dont le bord est formé par un nombre fini (éventuellement réduit à 1 !) de segments de courbes $\mathscr{C}^\infty$ (les *côtés* de Ω) et les éléments spectraux sont des quadrilatères curvilignes Ω_k 2 à 2 disjoints tels que

$$\bigcup_{k=1}^{K} \Omega_k \subset \Omega \subset \bigcup_{k=1}^{K} \overline{\Omega}_k. \tag{2.1}$$

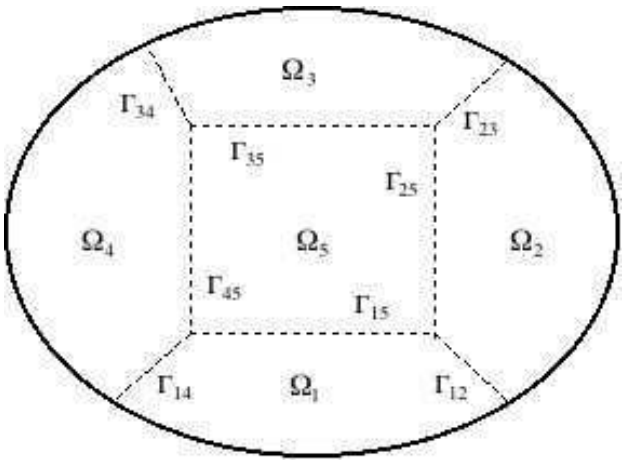


Figure 1

On a donné une partition d'un ouvert régulier
et indiqué les interfaces entre les différents quadrilatères.

Si Ω n'est pas régulier, les extrémités des côtés de Ω constituent les *sommets* $\mathcal{O}_j$ de Ω, $j = 1, \ldots, J$. Les arcs $\Gamma_j = \mathcal{O}_j\mathcal{O}_{j+1}$ sont alors les côtés de Ω. L'ouverture de l'angle intérieur à Ω au voisinage de $\mathcal{O}_j$ est notée ω_j. L'hypothèse que Ω n'a pas de pointe effilée signifie que les ω_j ne sont jamais nuls. Par contre, dans le cas de fissures, ils peuvent avoir pour valeur 2π.

Un sommet étant fixé, on oubliera l'indice j et on notera $\mathcal{O}$ ce sommet, ω l'ouverture de l'angle correspondant et $(r, \theta) : r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$, les coordonnées polaires centrées en $\mathcal{O}$ telles que
• la demi-droite $\theta = 0$ est tangente à l'un des côtés adjacents en $\mathcal{O}$,
• la demi-droite $\theta = \omega$ est tangente à l'autre côté adjacent en $\mathcal{O}$,
• au voisinage de $\mathcal{O}$, Ω est situé entre $\theta = 0$ et $\theta = \omega$ en tournant dans le sens trigonométrique.

Autrement dit, si l'on note G_ω le secteur infini

$$G_\omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0,\ 0 < \theta < \omega\},$$

Ω est tangent avec G_ω au voisinage de $\mathcal{O}$. Si Ω est un polygone droit (i.e. à côtés droits), Ω coïncide avec G_ω au voisinage de $\mathcal{O}$.

On note enfin (X, Y) les coordonnées cartésiennes telles que
• $\mathcal{O}$ coïncide avec l'origine $(0, 0)$,
• le demi-axe $X > 0, Y = 0$ coïncide avec la demi-droite $\theta = 0$. On a donc

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \begin{cases} \arccos \frac{X}{r} & \text{si } Y \geq 0, \\ 2\pi - \arccos \frac{X}{r} & \text{si } Y < 0. \end{cases}$$

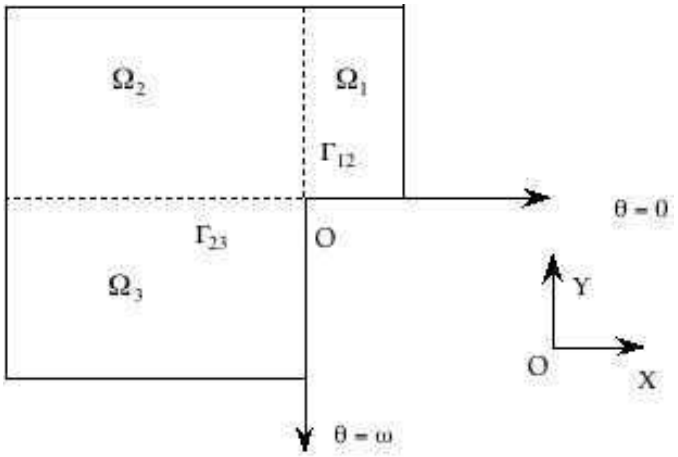


Figure 2

On a donné une partition d'un polygone en L
et indiqué les coordonnées locales au sommet d'ouverture $3\pi/2$.

Chapitre 3.

Espaces de Sobolev

Nous indiquons quelques démonstrations significatives. Pour plus de détails, nous renvoyons à Adams [1] et Lions & Magenes [15].

3.a. Espaces à exposant entier

Le moyen le plus ordinaire de déterminer la régularité d'une fonction est d'examiner sa continuité et celle de ses dérivées. Toutefois les espaces $\mathscr{C}^m$ sont mal adaptés aux problèmes aux limites elliptiques, pour lesquels l'usage des espaces de Sobolev H^m donne par contre des résultats optimaux.

La dérivée d'une fonction (ou d'une distribution) u définie sur $\mathbb{R}$ ou Λ sera notée u' ou $d_x u$; la dérivée d'ordre $\ell \in \mathbb{N}$ est notée $d_x^\ell u$. La dérivée partielle par rapport à x, resp. y, d'une fonction (ou d'une distribution) u définie sur $\mathbb{R}^2$, Λ^2 ou Ω est notée $\partial_x u$, resp. $\partial_y u$. Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$ la dérivée d'ordre α_1 en x et d'ordre α_2 en y est notée $\partial_x^{\alpha_1}\partial_y^{\alpha_2} u$. On note $|\alpha|$ la longueur de α, i.e. $\alpha_1 + \alpha_2$. Ainsi $|\alpha|$ est l'ordre de la dérivée ci-dessus.

L'espace $L^2(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions mesurables u telles que

$$\| u \|_{L^2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} u^2(x)\, dx \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{3.1}$$

Pour tout entier positif m, $H^m(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions u dans $L^2(\mathbb{R})$ telles que leurs dérivées jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^2(\mathbb{R})$, il est muni de la semi-norme

$$| u |_{H^m(\mathbb{R})} = \| d_x^m u \|_{L^2(\mathbb{R})}, \tag{3.2}$$

et de la norme

$$\| u \|_{H^m(\mathbb{R})} = \left(\sum_{\ell=0}^{m} \| d_x^\ell u \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Sur Λ, les définitions sont analogues.

L'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$ est l'espace des fonctions mesurables u telles que

$$\| u \|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}^2} u^2(x,y)\, dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty. \tag{3.4}$$

Pour tout entier positif m, $H^m(\mathbb{R}^2)$ est l'espace des fonctions u dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ telles que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre m appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^2)$, il est muni de la semi-norme

$$| u |_{H^m(\mathbb{R}^2)} = \Big(\sum_{\alpha,\, |\alpha|=m} \| \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.5}$$

et de la norme

$$\| u \|_{H^m(\mathbb{R}^2)} = \Big(\sum_{\alpha,\, |\alpha|\le m} \| \partial_x^{\alpha_1} \partial_y^{\alpha_2} u \|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.6}$$

Sur Λ^2 et Ω, les définitions sont analogues.

3.b. Espaces à exposant fractionnaire

La transformation de Fourier est définie pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} u(x)\, dx. \tag{3.7}$$

Il résulte immédiatement de la définition que :

$$H^m(\mathbb{R}) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}) \quad | \quad \xi \mapsto (1+\xi^2)^{m/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \}, \tag{3.8}$$

la fonctionnelle $u \mapsto \| (1+\xi^2)^{m/2} \hat{u}(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R})}$ constituant une norme équivalente à (3.3). Ainsi, on construit une chaîne complète d'espaces pour tout $s \ge 0$ en définissant :

$$H^s(\mathbb{R}) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}) \quad | \quad \xi \mapsto (1+\xi^2)^{s/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \}. \tag{3.9}$$

On définit $H^s(\Lambda)$ comme l'espace des restrictions à Λ de fonctions dans $H^s(\mathbb{R})$.

Remarque 3.1. *Il existe une caractérisation "interne" de $H^s(\Lambda)$. Pour $s \in]0,1[$, elle s'écrit :*

$$H^s(\Lambda) = \{ u \in L^2(\Lambda) \quad | \quad \Big(\int_\Lambda \int_\Lambda \frac{|u(x)-u(x')|^2}{|x-x'|^{2s+1}}\, dx\, dx' \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty \},$$

et pour $s \ge 0$ quelconque, soit $[s]$ la partie entière de s et $\{s\} = s - [s]$; on a alors

$$H^s(\Lambda) = \{ u \in H^{[s]}(\Lambda) \quad | \quad d_x^{[s]} u \in H^{\{s\}}(\Lambda) \}.$$

La norme naturellement déduite de cette écriture est équivalente à la norme associée à la définition (3.9).

De manière analogue, la transformation de Fourier est définie pour $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ par :

$$\hat{u}(\xi_1, \xi_2) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i(x\xi_1 + y\xi_2)} u(x,y)\, dx\, dy. \tag{3.10}$$

En notant $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ et $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$, on a :

$$H^m(\mathbb{R}^2) = \{ u \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad | \quad \xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{m/2} \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^2) \}, \tag{3.11}$$

la fonctionnelle $u \mapsto \| (1+|\xi|^2)^{m/2}\hat{u}(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$ constituant une norme équivalente à (3.6). On définit pour tout $s \geq 0$ les espaces intermédiaires :

$$H^s(\mathbb{R}^2) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad | \quad \xi \mapsto (1+|\xi|^2)^{s/2}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^2)\}. \tag{3.12}$$

Avec cette définition, il est assez immédiat que pour tout $t \geq 0$, avec $t \leq s$:

$$H^s(\mathbb{R}^2) \ \subset \ H^t(\mathbb{R}, H^{s-t}(\mathbb{R})). \tag{3.13}$$

On définit $H^s(\Lambda^2)$ comme l'espace des restrictions à Λ^2 des fonctions dans $H^s(\mathbb{R}^2)$. Si Ω ne possède pas de fissures, $H^s(\Omega)$ est défini pareillement et l'espace $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ jusqu'au bord de Ω est dense dans $H^s(\Omega)$. Si Ω est fissuré, on le recouvre par un nombre fini d'ouverts non fissurés $\mathcal{U}_i$: $\Omega = \cup_i \mathcal{U}_i$ et $H^s(\Omega)$ est défini comme l'espace des fonctions dans $L^2(\Omega)$ dont les restrictions aux $\mathcal{U}_i$ sont dans $H^s(\mathcal{U}_i)$ pour tout i.

3.c. Continuité

Sous certaines conditions liant la dimension du domaine et l'exposant de régularité s, les éléments de H^s sont continus *jusqu'au bord* du domaine :

Théorème 3.2.
(i.a) Pour tout $s > \frac{1}{2}$, les éléments de $H^s(\mathbb{R})$ sont continus sur $\mathbb{R}$ et les éléments de $H^s(\Lambda)$ sont continus jusqu'au bord de Λ :

$$H^s(\Lambda) \subset \mathscr{C}^0(\overline{\Lambda}),$$

avec l'estimation, où $c > 0$ ne dépend pas de u :

$$\| u \|_{L^\infty(\Lambda)} \leq c \| u \|_{H^s(\Lambda)}.$$

(i.b) On a aussi l'inégalité de **Gagliardo & Nirenberg** *pour $u \in H^1(\Lambda)$:*

$$\| u \|_{L^\infty(\Lambda)} \leq c \left(\| u \|_{H^1(\Lambda)} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\| u \|_{L^2(\Lambda)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Pour tout $s > 1$, les éléments de $H^s(\Lambda^2)$ sont continus jusqu'au bord de Λ^2 :

$$H^s(\Lambda^2) \subset \mathscr{C}^0(\overline{\Lambda}^2),$$

avec l'estimation, où $c > 0$ ne dépend pas de u :

$$\| u \|_{L^\infty(\Lambda^2)} \leq c \| u \|_{H^s(\Lambda^2)}$$

et les résultats correspondants pour Ω quand il ne possède pas de fissure.

PREUVE. *(i.a)* Soit $u \in H^s(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. On a

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \frac{1}{2\pi} \Big| \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \, \hat{u}(\xi) \, d\xi \Big| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)| \, d\xi \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \Big(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}} \times \ \Big(\int_{\mathbb{R}} (1+\xi^2)^{-s} \, d\xi \Big)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et comme $s > \frac{1}{2}$, l'intégrale de droite converge. Donc la norme uniforme est majorée par la norme H^s. Par densité, on en déduit que $H^s(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et par restriction, on démontre le résultat sur Λ.

(i.b) Pour tout x et y dans $\overline{\Lambda}$, on a

$$u(y)^2 - u(x)^2 = 2\int_x^y u(t)\,u'(t)\,dt \;\leq\; 2\|\,u\,\|_{L^2(\Lambda)} \times \|\,u'\,\|_{L^2(\Lambda)},$$

d'où, en intégrant en x sur Λ :

$$\forall y \in \overline{\Lambda}, \qquad 2u(y)^2 \;\leq\; \|\,u\,\|_{L^2(\Lambda)} \times \Big(\|\,u\,\|_{L^2(\Lambda)} + 4\|\,u'\,\|_{L^2(\Lambda)}\Big),$$

ce qui donne le résultat.

(ii) On a l'inclusion, cf (3.13), $H^s(\Lambda^2) \subset H^{\frac{s}{2}}(\Lambda, H^{\frac{s}{2}}(\Lambda))$, d'où l'on déduit que pour $s > 1$, $H^s(\Lambda^2)$ est contenu dans $L^\infty(\Lambda^2)$.

Remarque 3.3. L'inégalité de Gagliardo & Nirenberg exprime que les fonctions continues sur $\overline{\Lambda}$ sont en quelque sorte à mi-chemin entre H^1 et L^2. Mais pourtant, les fonctions dans $H^{1/2}(\Lambda)$ — qui sont aussi à mi-chemin entre H^1 et L^2, *cf* Remarque?.? — ne sont pas continues en général, de même que les fonctions dans $H^1(\Lambda^2)$ ne sont pas continues en général. Un contre-exemple est fourni par la fonction $u(x,y) = \log|\log(x^2+y^2)|$ qui est dans $H^1(\Lambda^2)$ mais non bornée en 0. Sa trace en $y = 0$ est dans $H^{1/2}(\Lambda)$ (on a anticipé sur le théorème de traces ci-dessous) mais n'est pas bornée non plus. ■

Remarque 3.4. Si Ω a une fissure, on a encore l'injection de $H^s(\Omega)$ dans $\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ pour $s > 1$ à condition de donner un sens correct à $\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$: il s'agit des fonctions qui se prolongent continuement de chaque côté de la fissure, tout en coïncidant au fond de la fissure. ■

3.d. Traces

Il résulte immédiatement du Th. 3.2 que toute fonction u qui est dans $H^s(\mathbb{R})$ pour un $s > \frac{1}{2}$ a une "trace" en 0, c'est-à-dire une valeur bien déterminée en 0, avec continuité par rapport à $H^s(\mathbb{R})$. Voici le résultat correspondant pour la dimension 2 :

Théorème 3.5. *Soit $s > \frac{1}{2}$. L'application trace de $\mathbb{R}^2$ sur l'axe $y = 0$:*

$$\gamma \;:\; u \longmapsto \Big(x \mapsto u(x,0)\Big)$$

est bien définie pour $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$ et continue de $H^s(\mathbb{R}^2)$ sur $H^{s-1/2}(\mathbb{R})$. De plus, γ est surjective.

Preuve. D'après le Th. 3.2, on a pour $v \in H^s(\mathbb{R})$ l'estimation

$$|v(0)|^2 \leq c\,\|\,v\,\|^2_{H^s(\mathbb{R})}. \tag{3.14}$$

Soit $t > 0$. Définissons w par $w(y) = v(ty)$. Si l'on définit la norme $H^s(\mathbb{R})$ par

$$\| w \|^2_{H^s(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi_2^{2s})\, \hat{w}(\xi_2)^2 \, d\xi_2,$$

on obtient que

$$\| w \|^2_{H^s(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} (\frac{1}{t} + t^{2s-1}\, \xi_2^{2s})\, \hat{v}(\xi_2)^2 \, d\xi_2. \tag{3.15}$$

Notant que $v(0) = w(0)$ et appliquant (3.14) pour w, on déduit de (3.15) que pour tout $t > 0$

$$t^{1-2s}\, |v(0)|^2 \leq c \int_{\mathbb{R}} (t^{-2s} + \xi_2^{2s})\, \hat{v}(\xi_2)^2 \, d\xi_2. \tag{3.16}$$

Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Soit v la transformée de Fourier partielle de u par rapport à x : $v(\xi_1, y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi_1} u(x, y)\, dx$. Appliquant l'inégalité (3.16) à $v(\xi_1, \cdot)$ pour $t = \frac{1}{|\xi_1|}$, on obtient

$$|\xi_1|^{2s-1}\, |v(\xi_1, 0)|^2 \leq c \int_{\mathbb{R}} (\xi_1^{2s} + \xi_2^{2s})\, \hat{u}(\xi_1, \xi_2)^2 \, d\xi_2.$$

La fonction $v(\xi_1, 0)$ n'étant rien d'autre que la transformée de Fourier de la trace de u, l'intégration par rapport à ξ_1 de la dernière inégalité permet de déduire l'existence et la continuité de l'opérateur trace.

Soit $g \in H^{s-1/2}(\mathbb{R})$. Fixons une fonction $y \mapsto v_0(y) \in H^s(\mathbb{R})$ qui vaut 1 en $y = 0$. Définissons u comme la transformée de Fourier inverse par rapport à ξ_1 de la fonction $(\xi_1, y) \mapsto \hat{g}(\xi_1)\, v_0((1+|\xi_1|)y)$. Grâce à l'égalité (3.15) appliquée cette fois-ci pour $t = 1+|\xi_1|$, on obtient que l'application $g \mapsto u$ est un inverse à droite de γ. ∎

Il résulte aussi du Th. 3.2 que toute fonction u qui est dans $H^s(\Lambda)$ pour un $s > \frac{1}{2}$ a des "traces" aux extrémités -1 et $+1$ de l'intervalle Λ. On déduit du Théorème ci-dessus le résultat suivant d'existence et de continuité des traces pour le carré :

Théorème 3.6. *Soit $s > \frac{1}{2}$. L'application trace du carré sur le côté $\Gamma_1 = [-1, 1] \times \{-1\}$:*

$$\gamma_1 \ : \ u \longmapsto \Big(x \mapsto u(x, -1) \Big)$$

est bien définie pour $u \in H^s(\Lambda^2)$ et continue de $H^s(\Lambda^2)$ sur $H^{s-1/2}(\Lambda)$. En particulier, elle est continue de $H^1(\Lambda^2)$ sur $H^{1/2}(\Lambda)$. On a les résultats correspondants pour les traces

$$\gamma_2 \ : \ u \longmapsto \Big(y \mapsto u(1, y) \Big) \qquad \gamma_3 \ : \ u \longmapsto \Big(x \mapsto u(x, 1) \Big) \qquad \gamma_4 \ : \ u \longmapsto \Big(y \mapsto u(-1, y) \Big)$$

sur les autres côtés Γ_2, Γ_3 et Γ_4 de Λ^2.

Ainsi l'application trace γ sur tout le bord $\partial\Lambda^2$ est continue de $H^s(\Lambda^2)$ dans le produit $\prod_{j=1}^4 H^{s-1/2}(\Gamma_j)$.

De même l'application trace γ sur tout le bord $\partial\Omega$ de Ω est continue de $H^s(\Omega)$ dans $H^{s-1/2}(\partial\Omega)$ si Ω est régulier, et, si Ω est un polygone curviligne de côtés Γ_j, l'application trace γ est continue de $H^s(\Omega)$ dans le produit $\prod_{j=1}^J H^{s-1/2}(\Gamma_j)$. On peut donc définir

$$H^1_0(\Omega) = \{ u \in H^1(\Omega) \quad | \quad u = 0 \text{ sur le bord } \partial\Omega \text{ de } \Omega \}. \tag{3.17}$$

Il est bien connu que $H^1_0(\Omega)$ est aussi l'adhérence de l'espace $\mathscr{C}^\infty_0(\Omega)$ des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ à support compact à l'intérieur de Ω, dans $H^1(\Omega)$ et que, puisque Ω est borné on a l'inégalité de Poincaré — équivalence de la norme et de la semi-norme H^1 sur $H^1_0(\Omega)$:

$$\exists\, c_\Omega > 0, \quad \forall u \in H^1_0(\Omega), \qquad \| u \|_{H^1(\Omega)} \;\leq\; c_\Omega \, \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.18}$$

Contrairement au cas des domaines à bord régulier, γ n'est pas surjective en général sur le carré : dans l'énoncé suivant, on indique quelles sont les conditions que doit remplir une fonction donnée sur chacun des Γ_j pour être la trace d'une fonction de $H^s(\Lambda^2)$.

Théorème 3.7. *Soit $s > \frac{1}{2}$.*
(i) Si $s < 1$, l'application $\gamma : H^s(\Lambda^2) \to \prod_{j=1}^4 H^{s-1/2}(\Gamma_j)$ est surjective.
(ii) Si $s > 1$, la condition nécessaire et suffisante pour que $(g_1, g_2, g_3, g_4) \in \prod_{j=1}^4 H^{s-1/2}(\Gamma_j)$ soit la trace d'un élément de $H^s(\Lambda^2)$ est :

$$g_4(\boldsymbol{a}_1) = g_1(\boldsymbol{a}_1), \quad g_1(\boldsymbol{a}_2) = g_2(\boldsymbol{a}_2), \quad g_2(\boldsymbol{a}_3) = g_3(\boldsymbol{a}_3), \quad g_3(\boldsymbol{a}_4) = g_4(\boldsymbol{a}_4), \tag{3.19}$$

(conditions de compatibilité aux coins).
(iii) Si $s = 1$, les conditions de compatibilité ne sont plus ponctuelles mais intégrales : entre g_4 et g_1 la condition s'écrit

$$\int_0^1 |g_4(\zeta - 1) - g_1(\zeta - 1)|^2 \, \frac{d\zeta}{\zeta} < +\infty \tag{3.20}$$

et de façon analogue entre g_1 et g_2, g_2 et g_3, g_3 et g_4.

Preuve pour $s = 1$. Par partition de l'unité, on isole chacun des sommets. Ainsi, on se localise au voisinage d'un sommet du carré, $\boldsymbol{a}_1$ pour fixer les idées. L'idée est d'aplatir le coin du carré pour se ramener au demi-plan pour lequel on connaît le théorème de relèvement de traces (qui se déduit immédiatement du Th. 3.5 : si $g \in H^{s-1/2}(\mathbb{R})$, il existe $v \in H^s(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$ tel que $v(x, 0) = g(x)$.

Il existe une application bi-lipschitzienne Φ qui transforme ce voisinage $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{a}_1$ en un voisinage $\mathcal{V}$ de 0 dans le demi-plan $\Pi = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$: on peut prendre $\Phi(x, y) = (\tilde{x}, \tilde{y})$ où, si (r, θ) désigne les coordonnées polaires de (x, y) centrées en $\boldsymbol{a}_1$ comme indiqué au §2, $(\tilde{x}, \tilde{y})$ a pour coordonnées polaires $(r, 2\theta)$. La transformation de fonctions $u \mapsto v = u \circ \Phi^{-1}$ est continue de $H^1(\mathcal{U})$ dans $H^1(\mathcal{V})$ — et aussi, d'ailleurs, de $H^s(\mathcal{U})$ dans $H^s(\mathcal{V})$ pour tout $0 \leq s < 2$.

Si g_1 et g_4 sont dans $H^{1/2}$, le changement de variables Φ appliqué à g_4 et g_1 (tronquées) donne, après prolongement par 0, une fonction g définie sur $\mathbb{R}$, telle que sa restriction g_- à $\mathbb{R}_-$ est dans $H^{1/2}(\mathbb{R}_-)$ et sa restriction g_+ à $\mathbb{R}_+$ est dans $H^{1/2}(\mathbb{R}_+)$. Donc $g \in L^2(\mathbb{R})$. Si, selon la Remarque 3.1, on utilise la définition de la norme $H^{1/2}$ à l'aide d'une intégrale double, on obtient

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|g(x) - g(x')|^2}{|x - x'|^2} \, dx \, dx' = 2 \int_{-1}^0 \int_0^1 \frac{|g_+(x) - g_-(x')|^2}{|x - x'|^2} \, dx \, dx' + \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 \frac{|g_-(x) - g_-(x')|^2}{|x - x'|^2} \, dx \, dx' + \int_0^1 \int_0^1 \frac{|g_+(x) - g_+(x')|^2}{|x - x'|^2} \, dx \, dx'.$$

Les deux dernières intégrales sont finies puisque g_+ et g_- sont dans $H^{1/2}$. La première intégrale est égale à

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|g_+(x) - g_-(-x')|^2}{|x + x'|^2} \, dx \, dx'$$

et se majore par

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|g_+(x) - g_+(x')|^2}{|x + x'|^2} \, dx \, dx' + \int_0^1 \int_0^1 \frac{|g_+(x') - g_-(-x')|^2}{|x + x'|^2} \, dx \, dx'$$

qui, elle-même se majore par, avec une constante $c > 0$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{|g_+(x) - g_+(x')|^2}{|x - x'|^2} \, dx \, dx' + c \int_0^1 \frac{|g_+(x') - g_-(-x')|^2}{|x'|} \, dx'$$

La première intégrale se majore par la norme $H^{1/2}$ de g_+ et la deuxième coïncide avec l'intégrale (3.20).

Remarque 3.8. On notera $H^{1/2}(\partial\Lambda^2)$ l'espace des fonctions g telles que la restriction g_j de g à Γ_j soit dans $H^{1/2}(\Gamma_j)$ pour $j = 1, 2, 3, 4$ et satisfasse la condition de compatibilité (3.20). Grâce à l'interpolation fonctionnelle entre espaces de Hilbert, on peut montrer que pour tout $g \in H^{1/2}(\partial\Lambda^2)$ tel que les g_j soient dans $H^1(\Gamma_j)$, on a l'estimation, avec une constante $c > 0$ indépendante de g :

$$\| g \|_{H^{1/2}(\partial\Lambda^2)} \ \leq \ c \Big(\sum_{j=1}^4 \| g \|_{L^2(\Gamma_j)} \Big)^{1/2} \times \Big(\sum_{j=1}^4 \| g \|_{H^1(\Gamma_j)} \Big)^{1/2}. \tag{3.21}$$

Vérifier l'inégalité correspondante sur $\mathbb{R}$ par transformation de Fourier et constater la ressemblance avec l'inégalité de Gagliardo & Nirenberg. ■

Chapitre 4.

Problème de Dirichlet, approximation de Galerkin

4.a. Problème exact

Le "problème exact" que nous considérons est le "prototype" des problèmes aux limites elliptiques, à savoir le problème de Dirichlet pour le Laplacien $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

où f est dans le dual de $H_0^1(\Omega)$, que l'on note $H^{-1}(\Omega)$, et g est la trace sur $\partial\Omega$ d'un élément $u_0 \in H^1(\Omega)$. L'inconnue u est cherchée dans $H^1(\Omega)$. Le changement d'inconnue $u \to u - u_0$ et de données $f \to f - \Delta u_0$ permet de se ramener au problème de Dirichlet homogène :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.2}$$

L'opérateur Δ est continu de $H_0^1(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

La formulation variationnelle du problème (4.2) est :

$$\begin{cases} \forall v \in H_0^1(\Omega), & \displaystyle\int_\Omega \partial_x u(x,y)\, \partial_x v(x,y) + \partial_y u(x,y)\, \partial_y v(x,y)\, dx\, dy = (f, v) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

où $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ désigne le produit de dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$, qui est l'extension du produit $L^2(\Omega)$. Le gradient (∂_x, ∂_y) se notant ∇, on écrira la formulation variationnelle sous la forme

$$\begin{cases} \forall v \in H_0^1(\Omega), & \displaystyle\int_\Omega \nabla u(x,y) \cdot \nabla v(x,y)\, dx\, dy = (f, v) \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{4.3}$$

Comme Ω est borné, le théorème de Poincaré, *cf* (3.18), donne que la forme bilinéaire $a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)$ est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ et le théorème de Lax-Milgram donne la résolution unique du problème (4.3), ce qui montre que l'opérateur Δ est un isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ sur $H^{-1}(\Omega)$.

4.b. Approximation de Galerkin

Si l'on se donne un sous-espace de dimension finie X_N de $H_0^1(\Omega)$, où N est un paramètre entier dont on va préciser la signification ultérieurement, le problème discret :

$$\begin{cases} \forall v_N \in X_N, \quad \displaystyle\int_\Omega \nabla u_N(x,y) \cdot \nabla v_N(x,y)\, dx\, dy = (f, v_N) \\ u_N \in X_N, \end{cases} \tag{4.4}$$

est lui aussi uniquement résoluble, pour les mêmes raisons que pour le problème continu.

On a une estimation de l'erreur entre solutions exacte et approchée grâce au fameux

Lemme de Céa.

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{w_N \in X_N} \| u - w_N \|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.5}$$

Preuve. Notons $< \nabla u, \nabla v >$ l'intégrale sur Ω du produit $\nabla u \cdot \nabla v$. Il résulte de (4.3) et (4.4) que

$$\forall v_N \in X_N, \qquad < \nabla u - \nabla u_N, \nabla v_N > = 0. \tag{4.6}$$

Soit $w_N \in X_N$. On a

$$\begin{aligned} < \nabla u - \nabla u_N, \nabla u - \nabla u_N > = & < \nabla u - \nabla u_N, \nabla u - \nabla w_N > + \\ & < \nabla u - \nabla u_N, \nabla w_N - \nabla u_N > . \end{aligned}$$

Le deuxième terme étant nul d'après (4.6), on en déduit que

$$\| \nabla u - \nabla u_N \|^2_{L^2(\Omega)} \leq \| \nabla u - \nabla u_N \|_{L^2(\Omega)} \times \| \nabla u - \nabla w_N \|_{L^2(\Omega)}.$$

Le théorème de Poincaré permet de conclure. ∎

On obtient de meilleures estimations en norme L^2 en injectant (4.5) dans la

Méthode de dualité d'Aubin-Nitsche.

$$\| u - u_N \|_{L^2(\Omega)} \leq c \| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \cdot \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{\inf_{\psi_N \in X_N} \| \psi^g - \psi_N \|_{H^1(\Omega)}}{\| g \|_{L^2(\Omega)}}, \tag{4.7}$$

où $\psi^g \in H_0^1(\Omega)$ est l'unique solution du problème de Dirichlet avec second membre g : $-\Delta \psi^g = g$.

Preuve. On part de

$$\| u - u_N \|_{L^2(\Omega)} = \sup_{g \in L^2(\Omega)} \frac{(u - u_N, g)}{\| g \|_{L^2(\Omega)}}.$$

Par définition de ψ^g, on a $<\nabla \psi^g, \nabla v> = (g, v)$ pour tout v dans $H_0^1(\Omega)$. Ainsi donc on a l'égalité $(g, u - u_N) = <\nabla \psi^g, \nabla (u - u_N)>$ et comme, d'après (4.6) $< \nabla \psi_N, \nabla (u - u_N) > = 0$ pour tout ψ_N appartenant à X_N, on obtient

$$(u - u_N, g) = < \nabla (\psi^g - \psi_N), \nabla (u - u_N) >$$

d'où l'on déduit l'estimation (4.7). ∎

Nous allons prendre comme espaces X_N des espaces de fonctions v_N qui sont homéomorphes par morceaux à des polynômes de degré (partiel) $\leq N$. Les zones sur lesquelles les fonctions v_N sont homéomorphes à des polynômes ne dépendent pas du degré : ce sont les quadrilatères Ω_k qui constituent la partition, fixée, du domaine Ω. C'est le degré N que l'on fait tendre vers l'infini (au moins en théorie !)

4.c. Discrétisation

Le problème de Galerkin (4.4) est théoriquement un problème en dimension finie, à condition de savoir évaluer exactement les intégrales

$$\int_\Omega \nabla u_N(x,y)\cdot\nabla v_N(x,y)\,dx\,dy \quad \text{et} \quad \int_\Omega f(x,y)\,v_N(x,y)\,dx\,dy,$$

pour u_N et v_N parcourant une base de l'espace X_N. Ceci est rarement le cas et on est amené à remplacer les intégrales ci-dessus par des approximations numériques : c'est ce qu'on appelle l'intégration numérique.

Ainsi la forme bilinéaire exacte $a(u,v) = <\nabla u, \nabla v>$ sera remplacée sur $X_N \times X_N$ par une forme bilinéaire approchée a_N et le produit scalaire (f,v) sera remplacé par un produit scalaire approché $(f,v)_N$ défini pour $v \in X_N$ et pour f dans un sous-espace F de $H^{-1}(\Omega)$.

On obtient ainsi un nouveau problème discret :

$$\begin{cases} \forall v_N \in X_N, \quad a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N \\ u_N \in X_N, \end{cases} \tag{4.8}$$

dont on sera amené à étudier la coercivité.

Le Lemme de Céa et la méthode de dualité d'Aubin-Nitsche admettent des extensions à cette situation, comportant de nouveaux termes qui tiennent compte de l'erreur commise par intégration numérique.

Théorème 4.1 (type Céa). *On suppose que la forme a_N est coercive et soit α_N sa constante d'ellipticité, c'est-à-dire la plus grande constante > 0 telle que pour tout $v_N \in X_N$ on ait $\alpha_N \|v_N\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a_N(v_N, v_N)$. Alors pour tout $f \in F$ on a l'estimation d'erreur entre la solution u du problème (4.2) et la solution u_N du problème (4.8) :*

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + \frac{1}{\alpha_N}) \left(\inf_{v_N \in X_N} \Big(\| u - v_N \|_{H^1(\Omega)} + \sup_{z_N \in X_N} \frac{|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)|}{\| z_N \|_{H^1(\Omega)}} \Big) + \sup_{z_N \in X_N} \frac{|(f, z_N) - (f, z_N)_N|}{\| z_N \|_{H^1(\Omega)}} \right).$$

Preuve. Pour tout $v_N \in X_N$, on a

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \leq \| u - v_N \|_{H^1(\Omega)} + \| u_N - v_N \|_{H^1(\Omega)}. \tag{4.9}$$

Fixons $v_N \in X_N$ et posons $w_N = u_N - v_N$. L'ellipticité de la forme a_N nous donne :

$$\alpha_N \| u_N - v_N \|_{H^1(\Omega)} \times \| w_N \|_{H^1(\Omega)} \leq a_N(u_N - v_N, w_N). \tag{4.10}$$

Comme u_N est solution du problème (4.8), on a :

$$a_N(u_N - v_N, w_N) = (f, w_N)_N - a_N(v_N, w_N).$$

Similairement, comme u est solution du problème (4.3), on a :

$$a(u - v_N, w_N) = (f, w_N) - a(v_N, w_N).$$

Mettant bout à bout les deux dernières identités, on obtient :

$$a_N(u_N - v_N, w_N) = a(u - v_N, w_N) + (f, w_N)_N - (f, w_N) + a(v_N, w_N) - a_N(v_N, w_N).$$

Combinant avec (4.10), on en déduit :

$$\begin{aligned}\alpha_N \| u_N - v_N \|_{H^1(\Omega)} \times \| w_N \|_{H^1(\Omega)} \leq{}& \| u - v_N \|_{H^1(\Omega)} \times \| w_N \|_{H^1(\Omega)} \\ &+ \sup_{z_N \in X_N} \frac{|(f, z_N)_N - (f, z_N)|}{\| z_N \|_{H^1(\Omega)}} \times \| w_N \|_{H^1(\Omega)} \\ &+ \sup_{z_N \in X_N} \frac{|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)|}{\| z_N \|_{H^1(\Omega)}} \times \| w_N \|_{H^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Divisant tout par $\| w_N \|_{H^1(\Omega)}$ et réutilisant l'inégalité triangulaire (4.9), on obtient, pour tout $v_N \in X_N$:

$$\begin{aligned}\| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \leq{}& (1 + \frac{1}{\alpha_N}) \Bigg(\| u - v_N \|_{H^1(\Omega)} \\ &+ \sup_{z_N \in X_N} \frac{|(f, z_N)_N - (f, z_N)|}{\| z_N \|_{H^1(\Omega)}} \\ &+ \sup_{z_N \in X_N} \frac{|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)|}{\| z_N \|_{H^1(\Omega)}} \Bigg).\end{aligned} \tag{4.11}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. ∎

Théorème 4.2 (type Aubin-Nitsche). *Pour tout $f \in F$ on a l'estimation d'erreur entre la solution u du problème* (4.2) *et la solution u_N du problème* (4.8) *:*

$$\| u - u_N \|_{L^2(\Omega)} \leq c \sup_{g \in L^2(\Omega)} \inf_{\psi_N \in X_N} \frac{\| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \| \psi^g - \psi_N \|_{H^1(\Omega)} + |a(u_N, \psi_N) - a_N(u_N, \psi_N)| + |(f, \psi_N) - (f, \psi_N)_N|}{\| g \|_{L^2(\Omega)}}$$

où $\psi^g \in H^1_0(\Omega)$ est l'unique solution du problème de Dirichlet avec second membre g : $-\Delta \psi^g = g$.

La démonstration suit la même ligne que celle de (4.7), mais en remplaçant l'égalité $a(\psi_N, u - u_N) = 0$ qui n'a plus lieu ici par

$$a(u - u_N, \psi_N) = (f, \psi_N) - a(u_N, \psi_N) + a_N(u_N, \psi_N) - (f, \psi_N)_N,$$

où on a utilisé l'équation $a_N(u_N, \psi_N) = (f, \psi_N)_N$.

Chapitre 5.

Polynômes et approximation polynomiale sur l'intervalle

On note $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ l'espace des polynômes de degré $\leq N$ sur Λ. On utilisera 3 opérateurs différents qui projettent des espaces fonctionnels sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$:

- π_N qui est le projecteur L^2,
- π_N^{1*} qui est un projecteur de type H^1,
- i_N qui est un projecteur de Lagrange : i_N est l'opérateur d'interpolation aux points dits *"de Gauss-Lobatto"*.

Tous sont fondés sur une base de polynômes orthogonaux de $L^2(\Lambda)$: les *polynômes de Legendre* L_n.

On note (u, v) le produit scalaire $L^2(\Lambda)$.

5.a. Les polynômes de Legendre

Lemme 5.1. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit L un polynôme non nul de degré n qui soit orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}(\Lambda)$ pour le produit $L^2(\Lambda)$. Alors*
(i) L a la parité de son degré : $L(-x) = (-1)^n L(x)$;
(ii) Les zéros de L sont tous simples et tous intérieurs à Λ.

PREUVE. *(i)* Le polynôme $\tilde{L}$ défini par $\tilde{L}(x) = L(-x)$ est lui aussi orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}(\Lambda)$ et de degré n. Donc $\tilde{L}$ est proportionnel à L. Comme la symétrie est une involution, $\tilde{L}$ est en fait égal à $+L$ ou à $-L$. Comme, enfin, le degré de L est exactement n, on obtient *(i)*.

(ii) Soit ℓ le nombre de zéros distincts de L qui sont réels, strictement compris entre -1 et 1 et de multiplicité impaire, et soit x_1, x_2, ... et x_ℓ les zéros correspondants. Supposons par l'absurde que $\ell < n$. Comme le polynôme L est orthogonal à tous les polynômes de degré $\leq n-1$ dans $L^2(\Lambda)$, on aurait

$$\int_{-1}^{1} L(x) \times (x - x_1) \cdots (x - x_\ell)\, dx = 0.$$

Or ceci est impossible car la fonction intégrée ne change pas de signe sur Λ. Donc, ℓ est égal à n, ce qui prouve *(ii)*. ∎

Ainsi la définition suivante a bien un sens.

Définition 5.2. *On note L_n l'unique polynôme de degré n qui soit orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}(\Lambda)$ et satisfasse $L_n(1) = 1$. Pour $n \geq 1$, on note $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ ses zéros avec la convention*

$$-1 < \zeta_1 < \ldots < \zeta_n < 1.$$

On les appelle les points de collocation de **Gauss**.

Les zéros des L_n et aussi ceux des L'_n sont très importants, car ils sont au fondement de toute la méthode spectrale de collocation.

Lemme et définition 5.3. *Soit $n \geq 1$. Les $n-1$ zéros de L'_n sont tous distincts et tous intérieurs à Λ. On les note $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$; on note encore $\xi_0 = -1$ et $\xi_n = 1$. On a ainsi*

$$-1 = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{n-1} < \xi_n = 1.$$

Les $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ sont donc les zéros du polynôme $(1-x^2)L'_n(x)$ et sont appelés les points de collocation de **Gauss-Lobatto**.

PREUVE. Les points $\xi_1 < \ldots < \xi_{n-1}$ sont les extrema de L_n. Ils sont donc situés entre ses zéros $\zeta_1 < \ldots < \zeta_n$. La preuve découle donc du Lemme 5.1. ∎

Ainsi donc les L_n forment une base orthogonale de $L^2(\Lambda)$ et les L^*_n définis par :

$$L^*_n = \frac{L_n}{\| L_n \|_{L^2(\Lambda)}} \tag{5.1}$$

forment une base orthonormale de $L^2(\Lambda)$. Comme on va le voir dans l'énoncé suivant, cette base est aussi la base des vecteurs propres d'un opérateur de Sturm-Liouville à résolvante compacte. (D'où le nom de méthodes *spectrales* pour les méthodes utilisant de telles bases de polynômes).

Proposition 5.4. *L'opérateur*

$$A : \quad u \longmapsto -\Big((1-x^2)\,u'\Big)'$$

est autoadjoint positif sur $L^2(\Lambda)$ de domaine

$$D(A) = H^2_\star(\Lambda) \quad \text{où} \quad H^2_\star(\Lambda) = \{u \in H^1(\Lambda) \mid \ (1-x^2)\,u'' \in L^2(\Lambda)\}. \tag{5.2}$$

Les L^*_n sont la base de ses vecteurs propres normalisés :

$$\exists \lambda_n \geq 0, \quad A\,L^*_n = \lambda_n L^*_n \quad et \quad A\,L_n = \lambda_n L_n. \tag{5.3}$$

De plus :

$$\lambda_n = n(n+1). \tag{5.4}$$

PREUVE. Nous renvoyons à Dautray & Lions [11, Ch.VIII, §7.3] pour la démonstration du fait que A est autoadjoint de domaine $H^2_\star(\Lambda)$: en gros, on étudie A à l'aide de sa forme bilinéaire associée a définie sur le domaine

$$D(a) = \{u \in L^2(\Lambda) \mid \sqrt{1-x^2}\, u' \in L^2(\Lambda)\}$$

par $a(u,v) = \int_\Lambda (1-x^2)\, u'v'\, dx$ et le domaine de A admet alors l'expression

$$D(A) = \{u \in D(a) |\ Au \in L^2(\Lambda)\}.$$

Pour terminer, on montre que L_n est vecteur propre de A associé à la valeur propre $n(n+1)$. On remarque d'abord que A opère de $\mathbb{P}_n(\Lambda)$ dans lui-même pour tout n. Donc $AL_n \in \mathbb{P}_n(\Lambda)$ et pour tout $p \in \mathbb{P}_{n-1}(\Lambda)$ on a

$$(AL_n, p) = (L_n, Ap) \quad \text{avec} \quad Ap \in \mathbb{P}_{n-1}(\Lambda).$$

Donc AL_n est orthogonal à $\mathbb{P}_{n-1}(\Lambda)$, ainsi AL_n est colinéaire à L_n. Pour trouver le coefficient λ_n de proportionnalité, il suffit de calculer le rapport entre les coefficients directeurs de L_n et de AL_n. ∎

5.b. Domaine des puissances fractionnaires de A

Pour $u \in L^2(\Lambda)$, notons $\hat{u}_n$ les coefficients de u dans la base L^*_n, on a :

$$\hat{u}_n = (u, L^*_n) \qquad \text{et} \qquad u = \sum_{n\geq 0} \hat{u}_n\, L^*_n.$$

On voit facilement que pour tout m entier (y compris nul d'ailleurs) le domaine de A^m satisfait à :

$$D(A^m) = \{u \in L^2(\Lambda) \quad | \quad \left((\lambda_n^m + 1)\, \hat{u}_n\right)_{n\geq 0} \in \ell^2\},$$

où ℓ^2 est l'espace des suites de carré sommable avec la norme naturelle.

Ainsi la définition suivante étend naturellement la suite des espaces $D(A^m)$ en une chaîne continue d'espaces :

Définition 5.5. *Pour tout $\sigma \geq 0$ on pose*

$$D(A^\sigma) = \{u \in L^2(\Lambda) \quad | \quad \left((\lambda_n^\sigma + 1)\, \hat{u}_n\right)_{n\geq 0} \in \ell^2\},$$

avec la norme :

$$\| u \|_{D(A^\sigma)} = \Big(\sum_{n\geq 0} (\lambda_n^\sigma + 1)^2\, \hat{u}_n^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme on va le voir le paragraphe 5.c, ces espaces permettent d'évaluer de manière optimale l'erreur d'approximation. Il est important de connaître une caractérisation de $D(A^\sigma)$

par des conditions sur les dérivées. On arrive naturellement dans des espaces à poids : par exemple, pour $\sigma = m \in \mathbb{N}$, on trouve

$$D(A^m) = \{u \in H^m(\Lambda) \quad | \quad (1-x^2)^{j-m}\, d_x^j u \in L^2(\Lambda),\ j = m+1, \dots, 2m\}, \tag{5.5}$$

qui est un cas particulier du Théorème ?.?.

Les considérations exposées maintenant n'étant pas forcément très compréhensibles à qui n'est pas un peu familiarisé avec les espaces à poids, on pourra les sauter en première lecture et passer directement au §5.c.

Les notations suivantes nous seront utiles (comparer avec la Remarque 3.1) :
• pour $\sigma \geq 0$, soit $[\sigma]$ la partie entière de σ et $\{\sigma\} = \sigma - [\sigma]$,
• pour $\beta \in \mathbb{R}$, $V_\beta^\sigma(\Lambda)$ désigne l'espace des fonctions u telles que $(1-x^2)^{\beta-\sigma+k} d^k u \in L^2(\Lambda)$ pour $k \leq [\sigma]$ et $(1-x^2)^\beta d^k u \in H^{\{\sigma\}}(\Lambda)$ pour $k = [\sigma]$.

Théorème 5.6. *Pour tout $\sigma \geq 0$, on a la caractérisation*

$$D(A^\sigma) = H^{2\sigma}_\star(\Lambda) \ \ \textit{où} \ \ H^{2\sigma}_\star(\Lambda) = \{u \in H^\sigma(\Lambda) \mid \ d_x^\ell u \in V_\sigma^{2\sigma-\ell}(\Lambda) \text{ avec } \ell = [\sigma]+1\}. \tag{5.6}$$

En particulier, on a les inclusions (comparaison avec les espaces de Sobolev ordinaires) :

$$H^s(\Lambda) \subset H^s_\star(\Lambda) = D(A^{s/2}) \subset H^{s/2}(\Lambda). \tag{5.7}$$

Pour $\sigma = m \in \mathbb{N}$, l'égalité (5.6) revêt la forme plus compréhensible (5.5).

Eléments de preuve. Nous traitons uniquement l'inclusion $H^{2\sigma}_\star(\Lambda) \subset D(A^\sigma)$, l'autre inclusion étant, quoique vraie, peu utile pour notre propos. L'idée est de démontrer l'inclusion lorsque $\sigma = m$ est entier et de passer aux autres valeurs de σ par interpolation entre espaces fonctionnels (cf [15, Ch.1]).

Pour montrer que $H^{2m}_\star(\Lambda) \subset D(A^m)$, on raisonne par récurrence sur m : pour $m = 0$, les deux espaces coïncident avec $L^2(\Lambda)$; pour passer de m à $m+1$, il suffit de montrer que $A+I$ est continu de $H^{2(m+1)}_\star(\Lambda)$ dans $H^{2m}_\star(\Lambda)$: comme $A+I$ est un isomorphisme de $D(A^{m+1})$ sur $D(A^m)$, l'hypothèse de récurrence permet de déduire de cette continuité que l'inclusion est aussi vraie pour $m+1$.

Pour montrer que $A+I$ est continu de $H^{2(m+1)}_\star(\Lambda)$ dans $H^{2m}_\star(\Lambda)$, il suffit d'établir que si $u \in H^{2(m+1)}_\star(\Lambda)$, alors u, u' et $(1-x^2)u''$ sont dans $H^{2m}_\star(\Lambda)$: pour u et u' cela découle assez facilement des définitions. Quant à $(1-x^2)u''$ il suffit de remarquer que $d_x^j((1-x^2)u'')$ est égal à $(1-x^2)d_x^{j+2}u - 2jx\, d_x^{j+1}u - j(j+1)d_x^j u$ et d'utiliser les définitions.

Comme $H^{2m}(\Lambda) \subset H^{2m}_\star(\Lambda)$, l'injection de $H^{2m}(\Lambda)$ dans $D(A^m)$ est continue pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par interpolation, cette injection est encore continue pour tout $\theta \in]0,1[$ de $[H^{2(m+1)}(\Lambda), H^{2m}(\Lambda)]_\theta$ dans $[D(A^{m+1}), D(A^m)]_\theta$. Or pour $\sigma = m+1-\theta$,

$$[H^{2(m+1)}(\Lambda), H^{2m}(\Lambda)]_\theta = H^{2\sigma}(\Lambda) \quad \text{et} \quad [D(A^{m+1}), D(A^m)]_\theta = D(A^\sigma).$$

D'où l'inclusion de $H^{2\sigma}(\Lambda)$ dans $D(A^\sigma)$.

Pour montrer l'inclusion de $H^{2\sigma}_\star(\Lambda)$ dans $D(A^\sigma)$, on opère de même, mais il faut alors montrer que $[H^{2(m+1)}_\star(\Lambda), H^{2m}_\star(\Lambda)]_\theta = H^{2\sigma}_\star(\Lambda)$. Cela est basé sur l'interpolation des espaces ordinaires (voir ci-dessus), sur l'interpolation des espaces V :

$$[V^{2(m+1)-\ell}_{m+1}(\Lambda), V^{2m-\ell}_m(\Lambda)]_\theta = V^{2\sigma-\ell}_\sigma(\Lambda),$$

et sur le Lemme 14.3 de [15, Ch.1].

Dans les applications, il nous suffira d'utiliser l'inclusion (non optimale mais plus facile à manipuler, puisque ne faisant pas intervenir de norme fractionnaire) :

Lemme 5.7. *Pour tout $\sigma \geq 0$, si u satisfait :*

$$d^j_x u \in L^2(\Lambda),\ j = 0, \ldots, [\sigma] \quad et \quad (1-x^2)^{j-\sigma}\, d^j_x u \in L^2(\Lambda),\ j = [\sigma]+1, \ldots, [2\sigma]+1, \quad (5.8)$$

alors $u \in D(A^\sigma)$.

Eléments de preuve. Avec les notations utilisées pour la définition (5.6), pour montrer le lemme, il suffit d'établir que (avec $\ell = [\sigma]+1$ et $\varepsilon = [2\sigma]+1-2\sigma$) :

$$\{u \in H^{[\sigma]}(\Lambda) \quad | \quad d^\ell_x u \in V^{2\sigma-\ell+\varepsilon}_{\sigma+\varepsilon}(\Lambda)\} \quad \subset \quad \{u \in H^\sigma(\Lambda) \mid\ d^\ell_x u \in V^{2\sigma-\ell}_\sigma(\Lambda)\},$$

l'espace de gauche étant celui des conditions (5.8) et l'espace de droite étant $H^{2\sigma}_\star(\Lambda)$.

L'inclusion ci-dessus provient des injections entre espaces à poids $V^{t+\varepsilon}_{\beta+\varepsilon}(\Lambda) \subset V^t_\beta(\Lambda)$ pour tout $\varepsilon \geq 0$, injections qui, par un changement de variables adéquat, sont une simple conséquence des injections $H^{t+\varepsilon}(\mathbb{R}) \subset H^t(\mathbb{R})$.

5.c. Le projecteur π_N

Pour $N \in \mathbb{N}$, π_N est le projecteur de $L^2(\Lambda)$ sur $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ pour le produit scalaire de $L^2(\Lambda)$. On a :

$$\text{pour}\ \ u = \sum_{n\geq 0} \hat{u}_n\, L^*_n, \qquad \pi_N u = \sum_{n=0}^{N} \hat{u}_n\, L^*_n.$$

Proposition 5.8. *Si pour un $\sigma \geq 0$, u est dans $D(A^\sigma)$, alors pour tout τ, $0 \leq \tau \leq \sigma$ on a l'estimation :*

$$\| u - \pi_N u \|_{D(A^\tau)} \ \leq\ (\lambda_{N+1})^{\tau-\sigma}\, \| u \|_{D(A^\sigma)}. \quad (5.9)$$

Preuve. Comme la suite (λ_n) est croissante, on peut écrire

$$\begin{aligned} \| u - \pi_N u \|^2_{D(A^\tau)} &= \sum_{n>N} (\lambda^\tau_n + 1)^2\, \hat{u}^2_n \\ &\leq (\lambda_{N+1})^{2\tau-2\sigma} \sum_{n>N} (\lambda^\sigma_n + 1)^2\, \hat{u}^2_n \leq (\lambda_{N+1})^{2\tau-2\sigma}\, \| u \|^2_{D(A^\sigma)}. \end{aligned}$$

Utilisant que $\lambda_n = n(n+1)$, on obtient immédiatement pour $\tau = 0$:

Théorème 5.9. *Si pour un $s \geq 0$, u est dans $H^s_\star(\Lambda)$, alors :*

$$\| u - \pi_N u \|_{L^2(\Lambda)} \leq N^{-s} \| u \|_{H^s_\star(\Lambda)}. \tag{5.10}$$

Il est surtout intéressant d'avoir des estimations de la différence $u - \pi_N u$ en norme H^1. Utilisant le fait que $H^1(\Lambda) \supset H^2_\star(\Lambda) = D(A)$, la Proposition 5.8 appliquée pour $\tau = 1$ donne :

Théorème 5.10. *Si pour un $s \geq 2$, u est dans $H^s_\star(\Lambda)$, alors :*

$$\| u - \pi_N u \|_{H^1(\Lambda)} \leq c\, N^{2-s} \| u \|_{H^s_\star(\Lambda)}. \tag{5.11}$$

5.d. Le projecteur π_N^{1*}

Pour N entier ≥ 1 et $u \in H^1(\Lambda)$ (noter que $u \in \mathscr{C}^0(\overline{\Lambda})$), on définit

$$\pi_N^{1*} u(x) = u(-1) + \int_{-1}^{x} \pi_{N-1}(d_x u)(t)\, dt.$$

Si $u \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$ alors $\pi_N^{1*} u = u$ et d'autre part

$$\forall u \in H^1(\Lambda), \quad \pi_N^{1*} u(-1) = u(-1) \quad \text{et} \quad \pi_N^{1*} u(1) = u(1).$$

L'égalité $\pi_N^{1*} u(-1) = u(-1)$ est évidente. L'égalité $\pi_N^{1*} u(1) = u(1)$ est due au fait que pour tout $v \in L^2(\Lambda)$, $v - \pi_{N-1} v$ est orthogonal aux constantes sur Λ, donc

$$\int_\Lambda \pi_{N-1}(d_x u)(t)\, dt = \int_\Lambda (d_x u)(t)\, dt.$$

On démontre les estimations suivantes pour la différence $u - \pi_N^{1*} u$:

Théorème 5.11. *Si pour un $s \geq 1$, u est dans $H^s(\Lambda)$, alors :*

$$\| u - \pi_N^{1*} u \|_{H^1(\Lambda)} \leq c\, N^{1-s} \| u \|_{H^s(\Lambda)} \tag{5.12}$$

et

$$\| u - \pi_N^{1*} u \|_{L^2(\Lambda)} \leq c\, N^{-s} \| u \|_{H^s(\Lambda)}. \tag{5.13}$$

Preuve. On a $| u - \pi_N^{1*} u |_{H^1(\Lambda)} = \| u' - \pi_{N-1}^{1*} u' \|_{L^2(\Lambda)}$. Comme $u' \in H^{s-1}(\Lambda) \subset H^{s-1}_\star(\Lambda)$, il découle de (5.10) l'estimation

$$| u - \pi_N^{1*} u |_{H^1(\Lambda)} \leq N^{1-s} \| u \|_{H^s(\Lambda)}.$$

Comme $u - \pi_N^{1*} u \in H_0^1(\Lambda)$, l'inégalité de Poincaré permet d'en déduire l'estimation (5.12).

Pour montrer l'estimation L^2, on utilise la méthode de dualité d'Aubin-Nitsche : en effet $u_N := \pi_N^{1*} u$ satisfait

$$\forall v_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda), \quad (u', v_N') = (u_N', v_N').$$

Appliquant (4.7) sur Λ, on doit estimer pour tout $g \in L^2(\Lambda)$ l'inf pour $\psi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$ de $\| \psi^g - \psi_N \|_{H^1(\Lambda)}$. Ceci se majore par $\| \psi^g - \pi_N^{1*} \psi^g \|_{H^1(\Lambda)}$. Comme ψ^g est dans $H^2(\Lambda)$, la première étape de la preuve donne

$$\| \psi^g - \pi_N^{1*} \psi^g \|_{H^1(\Lambda)} \leq c \, \frac{1}{N} \| \psi^g \|_{H^2(\Lambda)} \leq c \, \frac{1}{N} \| g \|_{L^2(\Lambda)}.$$

D'où l'estimation

$$\| u - \pi_N^{1*} u \|_{L^2(\Lambda)} \leq c \, \frac{1}{N} \| u - \pi_N^{1*} u \|_{H^1(\Lambda)},$$

qui jointe à l'estimation (5.12) donne l'estimation (5.13). ∎

Remarque 5.12. Comparons les performance des projecteurs π_N et π_N^{1*}.
• En norme L^2 : comme $H^s(\Lambda) \subset H^s_\star(\Lambda)$, (5.10) est meilleure que (5.13) — même puissance de N avec une norme plus petite à droite.
• En norme H^1 : la puissance de N dans (5.11) est moins bonne que dans (5.12) mais la norme dans (5.11) est plus petite. ∎

5.e. Le projecteur i_N

C'est l'opérateur d'interpolation de Lagrange aux points de Gauss-Lobatto : pour un u dans $\mathscr{C}^0(\overline{\Lambda})$, $i_N u$ est l'unique polynôme de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$ qui coïncide avec u aux $N+1$ points $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N$. On montre pour la différence $u - i_N u$ les mêmes estimations que dans le Théorème 5.11 :

Théorème 5.13. *Si pour un $s \geq 1$, u est dans $H^s(\Lambda)$, alors :*

$$\| u - i_N u \|_{H^1(\Lambda)} \leq c \, N^{1-s} \| u \|_{H^s(\Lambda)} \quad \textit{et} \quad \| u - i_N u \|_{L^2(\Lambda)} \leq c \, N^{-s} \| u \|_{H^s(\Lambda)}.$$

Nous ne donnons pas la démonstration de ce résultat dans le cadre de cette présentation. La preuve utilise le Théorème 5.11 que nous venons de démontrer mais aussi des propriétés de l'*intégration numérique* basée sur les points de Gauss-Lobatto que nous introduirons au §7. Le lecteur, après avoir pris connaissance du §7, pourra se reporter à Bernardi & Maday [5], en particulier aux Corollaire III.1.16 et Théorème III.1.19, pour une démonstration de ce résultat.

Chapitre 6.

Polynômes et approximation polynomiale sur le carré

L'idée fondamentale est la "tensorisation" : on commence par exemple à traiter la variable y comme un paramètre fixe et on "opère" en x, puis on "opère" en y. Par ce procédé, on obtient immédiatement que l'ensemble des fonctions

$$L_n^* \otimes L_m^*(x,y) := L_n^*(x)\, L_m^*(y) \quad n,m \in \mathbb{N}$$

constitue une base orthonormale de $L^2(\Lambda^2)$. Pour $u \in L^2(\Lambda^2)$, notons $\hat{u}_{nm}$ les coefficients de u dans la base $L_n^* \otimes L_m^*$, on a :

$$\hat{u}_{nm} = (u, L_n^* \otimes L_m^*) \qquad \text{et} \qquad u = \sum_{n\geq 0} \sum_{m \geq 0} \hat{u}_{nm}\, L_n^* \otimes L_m^*.$$

6.a. Espaces associés

Définition 6.1. Soit E un espace hilbertien contenu dans $L^2(\Lambda)$. Alors

$$L^2(\Lambda, E) = \{u \in L^2(\Lambda^2) \quad | \quad \| u \|_{L^2(\Lambda,E)} := \Big(\int_\Lambda \| u(x,\cdot) \|_E^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty\}$$

et

$$L^2(E, \Lambda) = \{u \in L^2(\Lambda^2) \quad | \quad \| u \|_{L^2(E,\Lambda)} := \Big(\int_\Lambda \| u(\cdot,y) \|_E^2 \, dy \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty\}.$$

■

L'espace qui joue un rôle analogue à $D(A^\sigma)$ est l'espace

$$L^2(\Lambda, D(A^\sigma)) \cap L^2(D(A^\sigma), \Lambda)$$

des u qui satisfont :

$$\| u \|_{L^2(\Lambda,D(A^\sigma))\cap L^2(D(A^\sigma),\Lambda)} = \Big(\int_\Lambda \| u(x,\cdot) \|_{D(A^\sigma)}^2 \, dx + \int_\Lambda \| u(\cdot,y) \|_{D(A^\sigma)}^2 \, dy \Big)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Décomposant $u(x,y)$ en $\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}\hat{u}_{nm}\,L_n^*(x)\,L_m^*(y)$ selon ses coefficients de Legendre, on voit que, d'après la Définition 5.5,

$$\| u(x,\cdot)\|^2_{D(A^\sigma)} = \sum_{m\geq 0}(\lambda_m^\sigma+1)^2\,|\sum_{n\geq 0}\hat{u}_{nm}\,L_n^*(x)|^2.$$

Or, pour tout m :

$$\int_{-1}^{1}|\sum_{n\geq 0}\hat{u}_{nm}\,L_n^*(x)|^2\,dx = \sum_{n\geq 0}\hat{u}_{nm}^2.$$

Donc :

$$\int_{-1}^{1}\| u(x,\cdot)\|^2_{D(A^\sigma)}\,dx = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}(\lambda_m^\sigma+1)^2\,\hat{u}_{nm}^2.$$

Et de même :

$$\int_{-1}^{1}\| u(\cdot,y)\|^2_{D(A^\sigma)}\,dy = \sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}(\lambda_n^\sigma+1)^2\,\hat{u}_{nm}^2.$$

Nous avons donc obtenu :

Lemme 6.2. *Pour tout $\sigma\geq 0$, la norme dans $L^2(\Lambda,D(A^\sigma))\cap L^2(D(A^\sigma),\Lambda)$ est équivalente à*

$$\Big(\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}(\lambda_n^\sigma+\lambda_m^\sigma+1)^2\,\hat{u}_{nm}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

D'autre part, comme conséquence du Théorème 5.6, on a

Théorème 6.3. *Pour tout $\sigma\geq 0$, on a*

$$L^2(\Lambda,D(A^\sigma))\cap L^2(D(A^\sigma),\Lambda) = H^{2\sigma}_\star(\Lambda^2) \tag{6.1}$$

où

$$H^s_\star(\Lambda^2) = L^2(\Lambda,H^s_\star(\Lambda))\cap L^2(H^s_\star(\Lambda),\Lambda). \tag{6.2}$$

Comme $H^s(\Lambda)\subset H^s_\star(\Lambda)$, et comme $H^s(\Lambda^2) = L^2(\Lambda,H^s(\Lambda))\cap L^2(H^s(\Lambda),\Lambda))$, on a l'inclusion

$$H^s(\Lambda^2)\subset H^s_\star(\Lambda^2). \tag{6.3}$$

D'autre part, similairement au Lemme 5.7, on a l'inclusion :

Lemme 6.4. *Pour $\sigma\geq 0$, si u satisfait les conditions :*

$$\begin{array}{ll}\partial_x^j u\in L^2(\Lambda^2),\ j=0,\ldots,[\sigma] & (1-x^2)^{j-\sigma}\,\partial_x^j u\in L^2(\Lambda^2),\ j=[\sigma]+1,\ldots,[2\sigma]+1,\\ \partial_y^j u\in L^2(\Lambda^2),\ j=0,\ldots,[\sigma] & (1-y^2)^{j-\sigma}\,\partial_y^j u\in L^2(\Lambda^2),\ j=[\sigma]+1,\ldots,[2\sigma]+1,\end{array} \tag{6.4}$$

alors $u\in H^{2\sigma}_\star(\Lambda^2)$.

6.b. Le projecteur Π_N

Soit $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ l'espace des polynômes de degré partiel (en x et en y) $\leq N$ sur Λ^2. Noter que $\mathbb{P}_N(\Lambda^2) = \mathbb{P}_N(\Lambda) \otimes \mathbb{P}_N(\Lambda)$. La fonction v est dans $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ si et seulement si elle est de la forme $\sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N a_{nm}\, x^n\, y^m$.

On note Π_N le projecteur orthogonal dans $L^2(\Lambda^2)$ sur l'espace $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$. Une base orthonormale de $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ étant constituée par les $L_n^* \otimes L_m^*$ pour $0 \leq n, m \leq N$, on obtient

$$\text{pour } \; u = \sum_{n\geq 0} \sum_{m\geq 0} \hat{u}_{nm}\; L_n^* \otimes L_m^*, \qquad \Pi_N u = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^N \hat{u}_{nm}\; L_n^* \otimes L_m^*.$$

Avec les projecteurs partiels

$$\Big(\pi_N^{(x)} u\Big)(x,y) = \pi_N(u(\,\cdot\,, y))(x) \quad \text{et} \quad \Big(\pi_N^{(y)} u\Big)(x,y) = \pi_N(u(x,\,\cdot\,))(y),$$

il est clair que

$$\Pi_N = \pi_N^{(y)} \circ \pi_N^{(x)}. \tag{6.5}$$

Similairement à la Proposition 5.8, on obtient comme conséquence du Lemme 6.2 :

Proposition 6.5. *Si pour un $\sigma \geq 0$, u est dans $L^2(\Lambda, D(A^\sigma)) \cap L^2(D(A^\sigma), \Lambda)$, alors pour tout τ, $0 \leq \tau \leq \sigma$ on a l'estimation :*

$$\| u - \pi_N u \|_{L^2(\Lambda, D(A^\tau)) \cap L^2(D(A^\tau), \Lambda)} \;\leq\; (\lambda_{N+1})^{\tau-\sigma} \, \| u \|_{L^2(\Lambda, D(A^\sigma)) \cap L^2(D(A^\sigma), \Lambda)}. \tag{6.6}$$

Ce qui, appliqué à $\tau = 0$ donne immédiatement :

Théorème 6.6. *Si pour un $s \geq 0$, u est dans $H^s_\star(\Lambda^2)$, alors :*

$$\| u - \Pi_N u \|_{L^2(\Lambda^2)} \;\leq\; N^{-s} \, \| u \|_{H^s_\star(\Lambda^2)}. \tag{6.7}$$

Comme il découle des définition que $H^1(\Lambda^2) \supset H^2_\star(\Lambda^2)$, on obtient aussi, avec $\tau = 1$:

Théorème 6.7. *Si pour un $s \geq 2$, u est dans $H^s_\star(\Lambda^2)$, alors :*

$$\| u - \Pi_N u \|_{H^1(\Lambda^2)} \;\leq\; N^{2-s} \, \| u \|_{H^s_\star(\Lambda^2)}.$$

6.c. Le projecteur $\Pi_N^{1,0}$

Dans le cas de la dimension 1, on avait introduit un projecteur π_N^{1*} sur $H^1(\Lambda)$ qui conserve les traces au bord. Ainsi, en particulier, il opère de $H_0^1(\Lambda)$ dans $(\mathbb{P}_N \cap H_0^1)(\Lambda)$. En fait, restreint à $H_0^1(\Lambda)$, c'est $\pi_N^{1,0}$, le projecteur orthogonal de $H_0^1(\Lambda)$ sur $(\mathbb{P}_N \cap H_0^1)(\Lambda)$, pour la norme $\| u' \|_{L^2(\Lambda)}$ — qui est une norme équivalente sur $H_0^1(\Lambda)$.

En dimension 2, il nous suffira d'étudier le projecteur $\Pi_N^{1,0}$ correspondant en prenant comme norme sur $H_0^1(\Lambda^2)$ la norme $L^2(\Lambda^2)$ du gradient : pour $u \in H_0^1(\Lambda^2)$, $\Pi_N^{1,0}u$ est l'unique élément de $(\mathbb{P}_N \cap H_0^1)(\Lambda^2)$ tel que

$$\forall v_N \in (\mathbb{P}_N \cap H_0^1)(\Lambda^2), \quad < \nabla u, \nabla v_N > = < \nabla \Pi_N^{1,0} u, \nabla v_N > \ . \tag{6.8}$$

Théorème 6.8. *Si pour un $s \geq 1$, u est dans $H^s(\Lambda^2) \cap H_0^1(\Lambda^2)$, alors :*

$$\| u - \Pi_N^{1,0} u \|_{H^1(\Lambda^2)} \ \leq \ c\, N^{1-s} \| u \|_{H^s(\Lambda^2)} \tag{6.9}$$

et

$$\| u - \Pi_N^{1,0} u \|_{L^2(\Lambda^2)} \ \leq \ c\, N^{-s} \| u \|_{H^s(\Lambda^2)}. \tag{6.10}$$

Preuve. Pour $s = 1$, (6.9) est trivialement vérifiée. Quand on l'aura aussi démontrée pour $s \geq 2$, on pourra terminer la preuve pour $1 < s < 2$ par un argument d'interpolation hilbertienne entre H^1 et H^2.

Supposons donc que $s \geq 2$. Soit $u \in H^s(\Lambda^2) \cap H_0^1(\Lambda^2)$. Grâce à (6.8), le Lemme de Céa est applicable : en particulier

$$\| u - \Pi_N^{1,0} u \|_{H^1(\Lambda)} \ \leq \ c\, | u - \pi_N^{1,0(x)} \circ \pi_N^{1,0(y)} u |_{H^1(\Lambda^2)}$$

— en effet, comme $\partial_x \partial_y u \in L^2(\Lambda^2)$, $\pi_N^{1,0(x)} \circ \pi_N^{1,0(y)} u$ a bien un sens. Comme $\pi_N^{1,0(x)}$ et $\pi_N^{1,0(y)}$ commutent, par symétrie il suffit de majorer $\| \partial_x (u - \pi_N^{1,0(x)} \circ \pi_N^{1,0(y)} u) \|_{L^2(\Lambda^2)}$ et par inégalité triangulaire, on se ramène à estimer

$$\| \partial_x (u - \pi_N^{1,0(x)} u) \|_{L^2(\Lambda^2)} \quad \text{et} \quad \| \partial_x \circ \pi_N^{1,0(x)} (u - \pi_N^{1,0(y)} u) \|_{L^2(\Lambda^2)}.$$

Pour le premier terme, on utilise (5.12) pour chaque y et on intègre en y. D'où :

$$\| \partial_x (u - \pi_N^{1,0(x)} u) \|_{L^2(\Lambda^2)} \ \leq \ c\, N^{1-s} \| u \|_{L^2(H^s(\Lambda),\Lambda)}.$$

Pour le second, on remarque que par construction, $\partial_x \circ \pi_N^{1,0(x)} = \pi_N^{(x)} \circ \partial_x$. Donc :

$$\| \partial_x \circ \pi_N^{1,0(x)} (u - \pi_N^{1,0(y)} u) \|_{L^2(\Lambda^2)} \ \leq \ \| u - \pi_N^{1,0(y)} u \|_{L^2(H^1(\Lambda),\Lambda)}.$$

Comme u est dans H^1 en x à valeurs H^{s-1} en y, se basant sur l'estimation (5.13) pour $s-1$ pour chaque x on obtient

$$\| u - \pi_N^{1,0(y)} u \|_{L^2(H^1(\Lambda),\Lambda)} \ \leq \ c\, N^{1-s} \Big(\| u \|_{L^2(\Lambda, H^{s-1}(\Lambda))} + \| \partial_x u \|_{L^2(\Lambda, H^{s-1}(\Lambda))} \Big).$$

Mettant bout à bout toutes ces estimations, on obtient bien (6.9).

L'estimation (6.10) s'obtient grâce à la méthode d'Aubin-Nitsche, comme dans le cas de la dimension 1 (voir preuve du Théorème 5.11). La seule différence à laquelle il faut faire

attention est que, maintenant, ψ^g est la solution du problème de Dirichlet sur le carré Λ^2 ; pourtant on a encore la régularité H^2 :

$$\psi^g \in H^2(\Lambda^2) \quad \text{et} \quad \| \psi^g \|_{H^2(\Lambda^2)} \leq c \, \| g \|_{L^2(\Lambda^2)},$$

ce qui n'est pas trivial à cause des coins du carré ! Voir plus loin (§9).

6.d. Le projecteur $\mathcal{I}_N$

C'est le projecteur de Lagrange aux points de Gauss-Lobatto sur le carré : pour un u dans $\mathscr{C}^0(\overline{\Lambda}^2)$, $\mathcal{I}_N u$ est l'unique polynôme de $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$ qui coïncide avec u aux $(N+1)^2$ points (ξ_i, ξ_j) pour tout couple (i,j) dans $\{0,1,\ldots,N\}^2$. On peut dire, de façon équivalente, que $\mathcal{I}_N = i_N^{(y)} \circ i_N^{(x)}$. On montre pour la différence $u - \mathcal{I}_N u$ les mêmes estimations que dans le Théorème 6.8, mais pour $s > 1$ et sans conditions aux limites (*voir* Théorèmes III.2.6 et III.2.7 dans [5]) :

Théorème 6.9. *Si u est dans $H^s(\Lambda^2)$, alors pour $s > 1$:*

$$\| u - \mathcal{I}_N u \|_{L^2(\Lambda^2)} \leq c \, N^{-s} \, \| u \|_{H^s(\Lambda^2)} \tag{6.11}$$

et pour $s > 3/2$:

$$\| u - \mathcal{I}_N u \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c \, N^{1-s} \, \| u \|_{H^s(\Lambda^2)}. \tag{6.12}$$

Chapitre 7.

Intégration numérique et méthode spectrale de collocation

7.a. Intégration numérique

On se place d'abord sur l'intervalle Λ. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, il existe des poids $\omega_j > 0$ pour $j = 1, \ldots, N$ tels que pour tout polynôme $\varphi \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ on ait la formule, basée sur les points de Gauss, *cf* Définition 5.2, $\int_\Lambda \varphi(x)\, dx = \sum_{j=1}^N \varphi(\zeta_j)\, \omega_j$. En fait cette formule subsiste pour tout polynôme $\varphi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$ et on a un résultat analogue avec les points de Gauss-Lobatto, *cf* Définition 5.3 :

Théorème 7.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$.*
(i) Il existe des poids $\omega_j > 0$ pour $j = 1, \ldots, N$ tels que l'on ait la formule suivante, dite de Gauss Legendre :

$$\forall \varphi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda) \qquad \int_\Lambda \varphi(x)\, dx = \sum_{j=1}^N \varphi(\zeta_j)\, \omega_j. \tag{7.1}$$

(ii) Il existe des poids $\rho_j > 0$ pour $j = 0, \ldots, N$ tels que l'on ait la formule suivante, dite de Gauss-Lobatto Legendre :

$$\forall \varphi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda) \qquad \int_\Lambda \varphi(x)\, dx = \sum_{j=0}^N \varphi(\xi_j)\, \rho_j. \tag{7.2}$$

Preuve. *(i)* Soit $\tilde{h}_j$ les polynômes de Lagrange associés aux ζ_j, $j = 1, \ldots, N$, c'est-à-dire que $\tilde{h}_k$ est l'unique polynôme de degré $N-1$ qui vaut 1 en ζ_k et 0 en les autres ζ_j, $j \neq k$. Les $\tilde{h}_k$, $k = 1, \ldots, N$, forment une base de $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$. On pose

$$\omega_k = \int_\Lambda \tilde{h}_k(x)\, dx, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Il est alors évident que la formule d'intégration

$$\int_\Lambda \varphi(x)\, dx = \sum_{j=1}^N \varphi(\zeta_j)\, \omega_j$$

est vraie pour tout les $\tilde{h}_k$, $k = 1, \ldots, N$, et donc, par combinaison linéaire, pour tout $\varphi \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$.

Soit maintenant $\varphi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$. Par division euclidienne par L_N, φ s'écrit

$$\varphi = Q\,L_N + R, \quad \text{avec} \quad Q, R \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda).$$

Comme L_N est orthogonal à $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$:

$$\int_\Lambda \varphi(x)\,dx = \int_\Lambda Q(x)\,L_N(x)\,dx + \int_\Lambda R(x)\,dx = \int_\Lambda R(x)\,dx.$$

D'où, comme $R \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$,

$$\int_\Lambda \varphi(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} R(\zeta_j)\,\omega_j.$$

Or $\varphi(\zeta_j) = Q(\zeta_j)\,L_N(\zeta_j) + R(\zeta_j)$, et comme les $L_N(\zeta_j)$ sont tous nuls, $\varphi(\zeta_j) = R(\zeta_j)$, $j = 1, \ldots, N$. Ainsi on a obtenu (7.1).

Pour montrer que les ω_j sont positifs, il suffit de remarquer que pour tout $k = 1, \ldots, N$, $\tilde{h}_k^2 \in \mathbb{P}_{2N-2}(\Lambda)$. La formule (7.1) donne alors

$$\int_\Lambda \tilde{h}_k^2(x)\,dx = \sum_{j=1}^{N} \tilde{h}_k^2(\zeta_j)\,\omega_j = \omega_k > 0.$$

(ii) Pour les points de Gauss-Lobatto, la démonstration suit un cours similaire : soit h_j les polynômes de Lagrange associés aux ξ_j, $j = 0, \ldots, N$, c'est-à-dire que h_k est l'unique polynôme de degré N qui vaut 1 en ξ_k et 0 en les autres ξ_j, $j \neq k$. Les h_k, $k = 0, \ldots, N$, forment une base de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. On pose

$$\rho_k = \int_\Lambda h_k(x)\,dx, \qquad k = 0, \ldots, N.$$

On a donc la formule d'intégration suivante pour tout $\varphi \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$:

$$\int_\Lambda \varphi(x)\,dx = \sum_{j=0}^{N} \varphi(\xi_j)\,\rho_j.$$

Soit maintenant $\varphi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$. Par division euclidienne par $(1-x^2)\,L'_N$, φ s'écrit

$$\varphi = Q\,(1-x^2)\,L'_N + R, \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda) \quad \text{et} \quad R \in \mathbb{P}_N(\Lambda).$$

Comme $(1-x^2)\,L'_N$ est orthogonal à $\mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$ (voir preuve du Lemme 5.3) la démonstration de (7.2) se termine de comme celle de (7.1).

Pour établir que les poids ρ_j sont positifs, il suffit, comme ci-dessus, d'exhiber pour chaque $j = 0, \ldots, N$ un polynôme $\varphi_j \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$, positif, qui est strictement positif en ξ_j et s'annule en les autres ξ_k, $k \neq j$. Pour $j = 1, \ldots, N-1$, on peut prendre par exemple $\varphi_j(x) = (1-x^2)\,f_j^2(x)$ où $f_j \in \mathbb{P}_{N-2}(\Lambda)$ vaut 1 en ξ_j et 0 en ξ_k, $k \neq j$, $k = 1, \ldots, N-1$. Pour $j = N$, on peut prendre $\varphi_N(x) = (1+x)\,f_N^2(x)$ où $f_N \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$ vaut 1 en $\xi_N = 1$ et 0 en les ξ_k, $k = 1, \ldots, N-1$. Pour $j = 0$, la construction est analogue.

Remarque 7.2. Pour avoir une écriture parfaitement rigoureuse, il faudrait utiliser partout une double indexation par N et par j : $\xi_{N,j}$, $\rho_{N,j}$, etc..., ce qu'on omet lorsqu'aucune confusion n'est à craindre. ■

Dans le cadre de cet exposé, on va plutôt utiliser les points de Gauss-Lobatto (mieux adaptés aux problèmes aux limites et aux conditions de raccord).

La formule de quadrature n'est pas exacte sur $\mathbb{P}_{2N}$, donc elle n'est pas exacte pour la norme $L^2(\Lambda)$ des polynômes de $\mathbb{P}_N(\Lambda)$. Par contre, on a :

Lemme 7.3. *Soit $N \geq 1$. Tout polynôme $\varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$ vérifie :*

$$\| \varphi_N \|^2_{L^2(\Lambda)} \;\leq\; \sum_{j=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_j)\, \rho_j \;\leq\; 3 \| \varphi_N \|^2_{L^2(\Lambda)}. \tag{7.3}$$

Preuve. Se basant sur les égalités suivantes

$$\| L_N \|^2_{L^2(\Lambda)} = \frac{1}{N + \frac{1}{2}} \tag{7.4}$$

et

$$\rho_j = \frac{2}{N(N+1)\, L_N^2(\xi_j)} \tag{7.5}$$

dont le lecteur pourra trouver les démonstrations dans les paragraphes 3 et 4 de [5, Ch.I], on montre facilement l'identité

$$\sum_{j=0}^{N} L_N^2(\xi_j)\, \rho_j = (2 + \frac{1}{N}) \| L_N \|^2_{L^2(\Lambda)}$$

qui se transmet immédiatement aux polynômes normalisés L_N^* :

$$\sum_{j=0}^{N} L_N^*(\xi_j)^2\, \rho_j = 2 + \frac{1}{N}\,. \tag{7.6}$$

Soit $\varphi \in \mathbb{P}_N(\Lambda)$. Il se développe selon la base orthonormale L_N^* :

$$\varphi = \sum_{n=0}^{N} \hat{\varphi}_n\, L_n^* \qquad \text{et} \qquad \| \varphi \|^2_{L^2(\Lambda)} = \sum_{n=0}^{N} \hat{\varphi}_n^2. \tag{7.7}$$

Comme $\varphi^2 - (\hat{\varphi}_N\, L_N^*)^2$ est de degré $2N-1$, l'identité (7.2) appliquée à ce polynôme donne

$$\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\varphi}_n^2 \;=\; \sum_{j=0}^{N} \varphi^2(\xi_j)\, \rho_j - \hat{\varphi}_N^2 \sum_{j=0}^{N} L_N^*(\xi_j)^2\, \rho_j.$$

Avec (7.6), on en déduit que :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\varphi}_n^2 + (2 + \frac{1}{N})\, \hat{\varphi}_N^2 = \sum_{j=0}^{N} \varphi^2(\xi_j)\, \rho_j,$$

ce qui, associé à (7.7) achève la démonstration du lemme. ∎

Sur le carré Λ^2, on a des résultats analogues sur la *grille* $\Xi_N(\Lambda^2)$ *de Gauss-Lobatto* : $\Xi_N(\Lambda^2)$ est l'ensemble des couples $(\xi_i, \xi_j)_{0\le i,j\le N}$. On déduit de (7.2) :

$$\forall \varphi \in \mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda^2) \qquad \int_\Lambda \int_\Lambda \varphi(x,y)\, dx\, dy = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \varphi(\xi_i,\xi_j)\, \rho_i\, \rho_j. \tag{7.8}$$

et de (7.3) :

$$\forall \varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2) \qquad \| \varphi_N \|^2_{L^2(\Lambda^2)} \;\le\; \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_i,\xi_j)\, \rho_i\, \rho_j \;\le\; 9 \| \varphi_N \|^2_{L^2(\Lambda^2)}. \tag{7.9}$$

7.b. Méthode spectrale de collocation pour le problème de Dirichlet

On s'intéresse à la discrétisation du problème de Dirichlet homogène (4.2) sur le carré Λ^2. On part de l'approximation de Galerkin (4.4) avec le choix suivant pour la famille d'espaces d'approximation $(X_N)_{N\in\mathbb{N}}$:

$$X_N = \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2), \quad \text{où} \quad \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2) = \{v \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2) \quad | \quad v = 0 \ \text{ sur } \partial(\Lambda^2)\}.$$

Avec un tel choix, X_N est bien contenu dans $H_0^1(\Lambda^2)$.

Ensuite, on remplace l'intégration mathématique par une intégration numérique basée sur $(N+1)^2$ points ; le produit scalaire (f,v) est remplacé par le produit scalaire :

$$(f,v)_N = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} f(\xi_i,\xi_j)\, v(\xi_i,\xi_j)\, \rho_i\, \rho_j$$

et la forme bilinéaire $a(u,v)$ qui était définie comme $<\nabla u, \nabla v>$ est remplacée par la forme bilinéaire

$$a_N(u,v) = (\partial_x u, \partial_x v)_N + (\partial_y u, \partial_y v)_N. \tag{7.10}$$

On obtient ainsi un nouveau problème discret — cf problème (4.8) :

$$\begin{cases} \forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2), \quad a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N \\ u_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2), \end{cases} \tag{7.11}$$

qui est uniquement résoluble pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\Lambda^2)$ en vertu des théorèmes de Poincaré et de Lax-Milgram, assortis du lemme suivant, qui découle immédiatement des propriétés du problème continu et de l'équivalence de normes (7.9) :

Lemme 7.4. *Pour tout entier $N \ge 2$, la forme a_N satisfait les propriétés de continuité*

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2), \quad \forall v_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2), \qquad |\, a_N(u_N, v_N)\,| \le 3 \,\| \nabla u_N \|_{L^2(\Lambda^2)}\, \| \nabla v_N \|_{L^2(\Lambda^2)}$$

et d'ellipticité

$$\forall u_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2), \qquad a_N(u_N, u_N) \geq \| \nabla u_N \|^2_{L^2(\Lambda^2)}.$$

Le problème (7.11) n'est pas équivalent au problème de Galerkin (4.4). Par contre, l'exactitude des formules d'intégration numérique permet de montrer :

Lemme 7.5. *Le problème* (7.11) *est équivalent au problème de collocation suivant*

$$\begin{cases} -\Delta u_N(\xi_i, \xi_j) = f(\xi_i, \xi_j) & \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq N-1 \\ u_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2). \end{cases} \tag{7.12}$$

PREUVE. Montrons d'abord que, pour tout $u_N,\ v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$, on a :

$$a_N(u_N, v_N) = -\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \Delta u_N(\xi_i, \xi_j)\ v_N(\xi_i, \xi_j)\ \rho_i\, \rho_j. \tag{7.13}$$

Autrement dit, il s'agit de voir que l'intégration par parties "discrète" fonctionne dans ce cas. Pour cela, on remarque que, si u_N et v_N appartiennent à $\mathbb{P}_N(\Omega)$, leurs dérivées partielles premières par rapport à une des variables sont de degré $\leq N-1$ par rapport à cette variable, de sorte qu'en utilisant la propriété d'exactitude (7.2), on peut écrire

$$\begin{aligned} a_N(u_N, v_N) &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} (\partial_x u_N\ \partial_x v_N\ +\ \partial_y u_N\ \partial_y v_N)(\xi_i, \xi_j)\ \rho_i\, \rho_j \\ &= \sum_{j=0}^{N} \int_\Lambda (\partial_x u_N\ \partial_x v_N)(x, \xi_j)\ dx\ \rho_j\ +\ \sum_{i=0}^{N} \int_\Lambda (\partial_y u_N\ \partial_y v_N)(\xi_i, y)\ dy\ \rho_i. \end{aligned}$$

Soit maintenant $u_N,\ v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$. On intègre par parties l'expression ci-dessus, puis on retourne à l'intégration discrète par (7.2) de nouveau :

$$\begin{aligned} a_N(u_N, v_N) &= -\sum_{j=0}^{N} \int_\Lambda (\partial_x^2 u_N\ v_N)(x, \xi_j)\ dx\ \rho_j\ -\ \sum_{i=0}^{N} \int_\Lambda (\partial_y^2 u_N\ v_N)(\xi_i, y)\ dy\ \rho_i. \\ &= -\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} (\partial_x^2 u_N\ v_N\ +\ \partial_y^2 u_N\ v_N)(\xi_i, \xi_j)\ \rho_i\, \rho_j. \end{aligned}$$

D'où (7.13).

Comme les polynômes de Lagrange $h_i \otimes h_j$ pour $i, j = 1, \ldots, N-1$ forment une base de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$, le problème (7.11) est équivalent à

$$\begin{cases} a_N(u_N, h_i \otimes h_j) = (f, h_i \otimes h_j)_N & \forall i, j, \quad 1 \leq i, j \leq N-1 \\ u_N \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2). \end{cases}$$

Or, d'après (7.13),

$$a_N(u_N, h_i \otimes h_j) = -\Delta u_N(\xi_i, \xi_j)\ \rho_i\, \rho_j$$

et d'après la définition

$$(f, h_i \otimes h_j)_N = f(\xi_i, \xi_j)\ \rho_i\, \rho_j.$$

Le lemme est démontré. ∎

Le résultat fondamental pour l'estimation de l'erreur est le suivant :

Théorème 7.6. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\Lambda^2)$ et tout $N \in \mathbb{N}$ on ait l'estimation d'erreur entre la solution u du problème* (4.2) *sur le carré Λ^2 et la solution u_N du problème* (7.11) — *ou équivalemment du problème* (7.12) *:*

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \le c \Big(\inf_{v_N \in \mathbb{P}^0_{N-1}(\Lambda^2)} \| u - v_N \|_{H^1(\Lambda^2)} + \| f - \mathcal{I}_N f \|_{L^2(\Lambda^2)} + \inf_{f_N \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda^2)} \| f - f_N \|_{L^2(\Lambda^2)} \Big).$$

Preuve. Elle est bien sûr basée sur le Théorème 4.1. On part donc de l'estimation fournie par ce théorème.

Pour pouvoir se débarrasser du deuxième terme du membre de droite de cette estimation, on prend v_N de degré $N-1$: pour tout $v_N \in \mathbb{P}^0_{N-1}(\Lambda^2)$ et tout $z_N \in \mathbb{P}^0_N(\Lambda^2)$, le polynôme $\nabla v_N \cdot \nabla z_N$ est dans $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda^2)$, donc grâce à (7.8), $a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N) = 0$.

Il nous reste à majorer $|(f, z_N)_N - (f, z_N)|$ pour tout $z_N \in \mathbb{P}^0_N(\Lambda^2)$. Encore grâce à (7.8), pour tout $f_N \in \mathbb{P}_{N-1}(\Lambda^2)$ on a $(f_N, z_N)_N - (f_N, z_N) = 0$. Donc :

$$|(f, z_N)_N - (f, z_N)| \ \le\ |(f, z_N)_N - (f_N, z_N)_N| \ +\ |(f, z_N) - (f_N, z_N)|.$$

Comme $(f, z_N)_N = (\mathcal{I}_N f, z_N)_N$, on a :

$$|(f, z_N)_N - (f, z_N)| \ \le\ |(\mathcal{I}_N f - f_N, z_N)_N| \ +\ |(f, z_N) - (f_N, z_N)|.$$

Avec l'inéalité (7.9), on en déduit :

$$|(f, z_N)_N - (f, z_N)| \ \le\ 9(\| \mathcal{I}_N f - f_N \|_{L^2(\Lambda^2)} + \| f - f_N \|_{L^2(\Lambda^2)}) \| z_N \|_{L^2(\Lambda^2)}.$$

∎

Chapitre 8.

Approximation par éléments spectraux sur le domaine Ω

Rappelons que le domaine Ω est une union finie de quadrilatères Ω_k au sens de (2.1). On fait en plus l'hypothèse (habituelle en éléments finis) que pour tout $k \neq k'$, l'intersection $\overline{\Omega}_k \cap \overline{\Omega}_{k'}$ est soit vide, soit formée ou bien d'un sommet commun à Ω_k et $\Omega_{k'}$, ou bien d'un côté commun entier. Nous notons :

$$\Gamma_{kk'} \;=\; \partial\Omega_k \cap \partial\Omega_{k'}.$$

Se reporter aux figures 1 et 2 au Chapitre 2 pour des exemples.

Nous allons d'abord examiner le cas particulier où les sous-domaines Ω_k sont des rectangles. Cette hypothèse est géométriquement assez restrictive mais va, dans une première étape, nous permettre de nous affranchir de certaines difficultés techniques. Ensuite nous aborderons le cas général.

8.a. Eléments rectangulaires

On peut supposer sans restriction de la généralité que les côtés des Ω_k sont parallèles aux axes de coordonnées. Par conséquent, pour chaque $k = 1, \ldots, K$, il existe une unique transformation affine $\mathscr{F}_k$ de la forme

$$\mathscr{F}_k(\zeta, \eta) = (\alpha_k \zeta + \alpha'_k,\ \beta_k \eta + \beta'_k) \quad \text{avec} \quad \alpha_k > 0, \quad \beta_k > 0$$

qui est un isomorphisme de Λ^2 sur Ω_k.

La transformation $\mathscr{F}_k$ nous permet de transporter les points de Gauss-Lobatto du carré dans Ω. Cela forme un réseau de points (x_i^k, y_j^k) qui sont définis par :

$$(x_i^k, y_j^k) = \mathscr{F}_k(\xi_i, \xi_j), \qquad k = 1, \ldots, K \quad \text{et} \quad 0 \leq i, j \leq N.$$

On peut voir facilement que l'hypothèse géométrique sur les intersections $\Gamma_{kk'}$ implique que, si $\overline{\Omega}_k \cap \overline{\Omega}_{k'} \neq \emptyset$, alors

$$\forall (x_i^k, y_j^k) \in \Gamma_{kk'}, \qquad \exists\, (i', j') \quad (x_i^k, y_j^k) = (x_{i'}^{k'}, y_{j'}^{k'}). \tag{8.1}$$

Pour $N \in \mathbb{N}$, on introduit l'espace des fonctions polynomiales par morceaux sur les Ω_k :

$$Y_N = \{w \in L^2(\Omega) \quad | \quad w|_{\Omega_k} \in \mathbb{P}_N(\Omega_k) \quad k = 1, \ldots, K\}.$$

Pour un élément w de Y_N, nous noterons w_k le polynôme qui coïncide avec w sur Ω_k. Pour une fonction $f \in L^2(\Omega)$ telle que ses restrictions f_k à tous les Ω_k soient continues sur $\overline{\Omega}_k$, on peut définir $\mathcal{I}_N f$ comme l'unique élément w de Y_N qui satisfait :

$$w_k(x_i^k, y_j^k) = f_k(x_i^k, y_j^k) \qquad \forall k, \quad 1 \le k \le K, \qquad \forall i, j, \quad 0 \le i, j \le N.$$

Il est clair que si $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$, alors $\mathcal{I}_N f$ est lui aussi dans $\mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$.

L'espace d'approximation pour le problème de Dirichlet est défini par :

$$X_N = Y_N \cap H_0^1(\Omega).$$

Une fonction polynomiale par morceaux et H^1 étant nécessairement continue, on a en fait :

$$X_N = \{w \in Y_N \quad | \quad w = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad \text{et} \quad \forall k, k', \quad w_k|_{\Gamma_{kk'}} = w_{k'}|_{\Gamma_{kk'}}\}.$$

La caractérisation de X_N peut aussi s'écrire à l'aide des points du réseau :

$$\begin{aligned} X_N = \{w \in Y_N \quad | \quad & \text{si } (x_i^k, y_j^k) \in \partial\Omega, \ \ w_k(x_i^k, y_j^k) = 0 \quad \text{et} \\ & \text{si } (x_i^k, y_j^k) = (x_{i'}^{k'}, y_{j'}^{k'}), \ \ w_k(x_i^k, y_j^k) = w_{k'}(x_{i'}^{k'}, y_{j'}^{k'})\}. \end{aligned}$$

Les poids pour l'intégration numérique font maintenant intervenir la Jacobienne J_k de $\mathscr{F}_k$: $J_k = \alpha_k \beta_k$. Les poids sont les $\alpha_k \beta_k \, \rho_i \rho_j$. Du Théorème 7.1 on déduit que

Théorème 8.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$. On a la formule d'intégration sur Ω :*

$$\forall \varphi \in Y_{2N-1}(\Omega) \qquad \int_\Omega \varphi(x, y) \, dx \, dy = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \varphi(x_i^k, y_j^k) \, \alpha_k \, \beta_k \, \rho_i \, \rho_j.$$

Le produit scalaire $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_N$ sur Ω est défini par :

$$(f, v)_N = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} f(x_i^k, y_j^k) \, v(x_i^k, y_j^k) \, \alpha_k \, \beta_k \, \rho_i \, \rho_j$$

et la forme bilinéaire a_N est encore définie par (7.10). Mais on préfère (surtout dans la situation des éléments courbes) donner des expressions de $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)_N$ et de a_N qui se lisent dans les variables (ζ, η) des éléments de référence. Ainsi donc on introduit :

$$f^k = f|_{\Omega_k} \circ \mathscr{F}_k, \qquad u^k = u|_{\Omega_k} \circ \mathscr{F}_k, \qquad v^k = v|_{\Omega_k} \circ \mathscr{F}_k,$$

et on a :

$$(f, v)_N = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} f^k(\xi_i, \xi_j) \, v^k(\xi_i, \xi_j) \, \alpha_k \, \beta_k \, \rho_i \, \rho_j \tag{8.2}$$

et

$$a_N(u,v) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} \overline{\nabla} u^k(\xi_i,\xi_j) \cdot \overline{\nabla} v^k(\xi_i,\xi_j) \frac{1}{\alpha_k \beta_k} \rho_i \rho_j, \tag{8.3}$$

où le gradient transformé $\overline{\nabla}$ est défini par

$$\overline{\nabla} = (\beta_k \partial_\zeta,\ \alpha_k \partial_\eta). \tag{8.4}$$

Pour une donnée f continue sur Ω, le problème discret sur Ω est alors :

$$\begin{cases} \forall v_N \in X_N, \quad a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N \\ u_N \in X_N, \end{cases} \tag{8.5}$$

qui est, lui aussi, équivalent à un problème de collocation (preuve similaire à celle du Lemme 7.5) : on note maintenant Ξ_N l'ensemble de tous les points de $\overline{\Omega}$ qui coïncident avec un point (x_i^k, y_j^k) pour un triplet (i,j,k) avec $1 \le k \le K$ et $0 \le i,j \le N$. Comme dans le cas du carré, les points de collocation sont les points du réseau intérieurs à Ω. Sur les points du bord $\Xi_N \cap \partial\Omega$, on a la condition de Dirichlet $u_N(x,y) = 0$. Cependant, la situation est plus complexe que sur le carré car l'expression des conditions de collocation diffère selon que l'on se trouve à l'intérieur des sous domaines Ω_k ou à leurs interfaces communes. Ainsi la solution du problème (8.5) est aussi solution du problème de collocation suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_N(x,y) = f(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \Xi_N \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{K} \Omega_k \Big) \\ u_N \in X_N. \end{cases} \tag{8.6}$$

Les conditions aux interfaces des sous domaines sont plus compliquées. Par exemple si Γ_{km} est un segment vertical et si $x_N^k = x_0^m$, on aura, compte-tenu que dans ce cas $\beta_k = \beta_m$ et $y_j^k = y_j^m$ pour tout $j = 0, \ldots, N$:

$$\begin{aligned} \alpha_k \rho_N \, (\Delta u_k - f_k)(x_N^k, y_j^k) + \alpha_m \rho_0 \, (\Delta u_m - f_m)(x_0^m, y_j^m) \\ = (\partial_x u_m - \partial_x u_k)(y_j^k), \qquad \forall j, \quad 1 \le j \le N-1. \end{aligned} \tag{8.7}$$

A l'intérieur des interfaces verticales, on aura des relations analogues. Enfin, aux sommets communs entre différents sous domaines, on aura des relations encore plus entrelacées.

Le problème (8.5) est uniquement résoluble pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ en vertu des théorèmes de Poincaré et de Lax-Milgram, associés au lemme suivant qui découle facilement de l'énoncé correspondant sur Λ^2 (Lemme 7.4) :

Lemme 8.2. *Pour tout entier $N \ge 2$, la forme a_N satisfait les propriétés de continuité*

$$\forall u_N \in X_N, \quad \forall v_N \in X_N, \qquad | \, a_N(u_N, v_N) \, | \le 3 \, \| \, \nabla u_N \, \|_{L^2(\Omega)} \, \| \, \nabla v_N \, \|_{L^2(\Omega)}$$

et d'ellipticité

$$\forall u_N \in X_N, \qquad a_N(u_N, u_N) \ge \| \, \nabla u_N \, \|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Le Théorème 4.1 nous permet de montrer :

Théorème 8.3. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ et tout entier $N \geq 2$ on ait l'estimation d'erreur entre la solution u du problème* (4.2) *et la solution u_N du problème* (8.5) *— ou de façon équivalente du problème* (8.6) *:*

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \leq c \Big(\inf_{v_N \in X_{N-1}} \| u - v_N \|_{H^1(\Omega)} + \| f - \mathcal{I}_N f \|_{L^2(\Omega)} + \inf_{f_N \in Y_{N-1}} \| f - f_N \|_{L^2(\Omega)} \Big).$$

Preuve. Elle est similaire à la démonstration du Théorème 7.6. Le choix de v_N dans X_{N-1} permet d'éliminer le terme d'erreur entre a et a_N, grâce à l'exactitude de l'intégration (Théorème 8.1). Encore grâce au Théorème 8.1, on a $(f_N, z_N)_N - (f_N, z_N) = 0$ pour tout $f_N \in Y_{N-1}$. Puisqu'on a encore l'égalité $(f, z_N)_N = (\mathcal{I}_N f, z_N)_N$, la démonstration se termine exactement comme celle du Théorème 7.6. ∎

8.b. Eléments courbes

Dans le cas général des éléments spectraux courbes, la transformation $\mathscr{F}_k$ est non plus affine, mais un difféomorphisme régulier du carré Λ^2 sur le quadrilatère Ω_k à côtés courbes. Selon la construction de Gordon-Hall, les $\mathscr{F}_k$ peuvent être choisis de manière compatible sur les "interfaces" $\Gamma_{kk'}$: cela signifie que pour tous k et k' tels que $\Gamma_{kk'}$ soit un segment de courbe, si on introduit $\mathscr{G}_k^{(k')}$ comme le difféomorphisme de Λ sur $\Gamma_{kk'}$ induit par $\mathscr{F}_k$ — et $\mathscr{G}_{k'}^{(k)}$ celui induit par $\mathscr{F}_{k'}$ — on a :

$$(\mathscr{G}_{k'}^{(k)})^{-1} \circ \mathscr{G}_k^{(k')} = \pm \mathbb{I}.$$

Ainsi, (8.1) est encore satisfait.

En suivant Gordon et Hall [13], on construit $\mathscr{F}_k$ à partir des paramétrisation des quatre côtés courbes Γ_i^k $(i = 1, .., 4)$ constituant la frontière $\partial\Omega_k$. On suppose ainsi que quatre fonctions injectives et régulières f_i sont données de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{aligned}
f_1([-1,1]) \cap f_2([-1,1]) &= f_1(-1) = f_2(-1) = \boldsymbol{a}_2,\\
f_2([-1,1]) \cap f_3([-1,1]) &= f_2(1) = f_3(-1) = \boldsymbol{a}_3,\\
f_3([-1,1]) \cap f_4([-1,1]) &= f_3(1) = f_4(1) = \boldsymbol{a}_4,\\
f_4([-1,1]) \cap f_1([-1,1]) &= f_4(-1) = f_1(1) = \boldsymbol{a}_1,
\end{aligned}$$

où les $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, .., 4)$ sont les sommets de Ω_k. On introduit alors l'application $\mathscr{F}_k$ de Λ^2 dans $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_k(r,s) = \frac{1+s}{2} f_3(r) + \frac{1-s}{2} f_1(r)
&+ \frac{1+r}{2}\Big(f_4(s) - \frac{1+s}{2} f_4(1) - \frac{1-s}{2} f_4(-1)\Big)\\
&+ \frac{1-r}{2}\Big(f_4(s) - \frac{1+s}{2} f_2(1) - \frac{1-s}{2} f_2(-1)\Big)
\end{aligned}$$

Il est clair que cette application possède la régularité des f_i. Par contre son injectivité (qui permet d'avoir une représentation sans recouvrement du domaine) n'est pas conséquence de propriétés simples sur les f_i. Il convient donc de s'assurer que le jacobien J_k de la transformation $\mathscr{F}_k$ est minoré par une constante > 0.

L'espace Y_N est alors l'ensemble des w tels que pour tout k, la fonction $w^k := w|_{\Omega_k} \circ \mathscr{F}_k$ soit dans $\mathbb{P}_N(\Lambda^2)$; le projecteur de Lagrange $\mathcal{I}_N$ est défini similairement au cas des éléments rectangulaires: pour une fonction $f \in L^2(\Omega)$ telle que ses restrictions f_k à tous les Ω_k soient continues sur $\overline{\Omega}_k$, on peut définir $\mathcal{I}_N f$ comme l'unique élément w de Y_N qui satisfait :

$$w^k(\xi_i, \xi_j) = f^k(\xi_i, \xi_j) \qquad k = 1, \ldots, K \quad \text{et} \quad 0 \le i, j \le N.$$

X_N est défini de même que ci-dessus :

$$X_N = Y_N \cap H_0^1(\Omega). \tag{8.8}$$

En notant w_k la fonction qui coïncide avec w sur Ω_k, on a encore :

$$X_N = \{w \in Y_N \quad | \quad w = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad \text{et} \quad \forall k, k', \quad w_k|_{\Gamma_{kk'}} = w_{k'}|_{\Gamma_{kk'}}\}.$$

Enfin, si $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$, $\mathcal{I}_N f$ appartient à X_N.

La grande différence avec le cas des éléments rectangulaires est que, maintenant, la Jacobienne J_k n'a aucune raison d'être constante. Pour la formule d'intégration discrète, on se bornera à évaluer J_k aux points du réseau — on n'aura pas en général de formule d'intégration exacte, ni d'équivalence du problème discrétisé (8.5) avec un problème de collocation.

Fixons k. $\mathscr{F}_k(\zeta, \eta) = (x, y)$ et

$$J_k(\zeta, \eta) = \frac{\partial x}{\partial \zeta}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \zeta}\,.$$

On a

$$\int_\Omega \varphi(x, y)\, dx\, dy = \sum_{k=1}^{K} \int_{\Lambda^2} \varphi^k(\zeta, \eta)\, |J_k(\zeta, \eta)|\, d\zeta\, d\eta. \tag{8.9}$$

C'est pourquoi, similairement à (8.2), on pose :

$$(f, v)_N = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} f^k(\xi_i, \xi_j)\, v^k(\xi_i, \xi_j)\, |J_k(\xi_i, \xi_j)|\, \rho_i\, \rho_j. \tag{8.10}$$

Lemme 8.4. *Soit $N \ge 1$. Toute fonction $\varphi \in Y_N$ vérifie les estimations :*

$$c' \,\|\, \varphi \,\|^2_{L^2(\Omega)} \;\le\; (\varphi, \varphi)_N \;\le\; c \,\|\, \varphi \,\|^2_{L^2(\Omega)}, \tag{8.11}$$

où $c > 0$ et $c' > 0$ sont indépendants de N et de φ.

PREUVE. Pour établir (8.11), on utilise (8.9) ; il suffit alors de montrer pour chaque k l'estimation, pour tout $\varphi_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2)$:

$$\begin{aligned} c' \int_{\Lambda^2} \varphi_N^2(\zeta,\eta)\, |J_k(\zeta,\eta)|\, d\zeta\, d\eta & \\ \leq \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \varphi_N^2(\xi_i,\xi_j)\, |J_k(\xi_i,\xi_j)|\, \rho_i\, \rho_j & \qquad (8.12) \\ \leq c \int_{\Lambda^2} \varphi_N^2(\zeta,\eta)\, |J_k(\zeta,\eta)|\, d\zeta\, d\eta. & \end{aligned}$$

Comme $\mathscr{F}_k$ est un difféomorphisme, il existe des constantes c_0 et $c_0' > 0$ telles que

$$\forall k = 1,\ldots,K, \quad \forall (\zeta,\eta) \in \Lambda^2, \qquad c_0' \leq |J_k(\zeta,\eta)| \leq c_0. \qquad (8.13)$$

L'estimation (8.12) découle alors de (7.9) et de (8.13) avec $c = 9c_0/c_0'$ et $c' = c_0'/c_0$. ∎

Pour la définition de la forme a_N, on note que le transport du gradient en coordonnées (ζ,η) fait apparaître le champ $\widetilde{\nabla}$:

$$\widetilde{\nabla} = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\eta},\ \frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\eta} \right).$$

Ainsi, $a(u,v) = \sum_{k=1}^{K} a(u_k, v_k)$ avec :

$$a(u_k,v_k) = \int_{\Lambda^2} \widetilde{\nabla} u^k(\zeta,\eta) \cdot \widetilde{\nabla} v^k(\zeta,\eta)\, |J_k(\zeta,\eta)|\, d\zeta\, d\eta.$$

Mais on préfère manipuler les dérivées partielles du difféomorphisme $\mathscr{F}_k$ plutôt que celles de son inverse. On remarque que:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x} = \frac{1}{J_k}\frac{\partial y}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{1}{J_k}\frac{\partial y}{\partial\zeta}, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial y} = -\frac{1}{J_k}\frac{\partial x}{\partial\eta}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{1}{J_k}\frac{\partial x}{\partial\zeta}.$$

D'où :

$$a(u_k,v_k) = \int_{\Lambda^2} \overline{\nabla} u^k(\zeta,\eta) \cdot \overline{\nabla} v^k(\zeta,\eta)\, \frac{1}{|J_k(\zeta,\eta)|}\, d\zeta\, d\eta.$$

avec

$$\overline{\nabla} = \left(\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\partial y}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\eta},\ \frac{\partial x}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta} \right).$$

Ce qui permet de définir, en correspondance avec (8.3) :

$$a_N(u,v) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \overline{\nabla} u^k(\xi_i,\xi_j)\ \cdot\ \overline{\nabla} v^k(\xi_i,\xi_j)\ \frac{1}{|J_k(\xi_i,\xi_j)|}\ \rho_i\, \rho_j. \qquad (8.14)$$

Pour chaque $k = 1\ldots,K$ notons $a_{k,lm}$ les coefficients tels que

$$\frac{1}{|J_k|}\ \overline{\nabla} u \cdot \overline{\nabla} v\ =\ a_{k,11}\,\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial v}{\partial\zeta}\ +\ a_{k,12}\,\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial v}{\partial\eta}\ +\ a_{k,21}\,\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial v}{\partial\zeta}\ +\ a_{k,22}\,\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial v}{\partial\eta}. \qquad (8.15)$$

Les fonctions J_k et $a_{k,lm}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ jusqu'au bord de Λ^2.

Lemme 8.5. *Pour tout entier $N \geq 2$, la forme a_N satisfait les propriétés de continuité*

$$\forall u_N \in X_N, \quad \forall v_N \in X_N, \qquad | a_N(u_N, v_N) | \leq c \| \nabla u_N \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla v_N \|_{L^2(\Omega)}$$

et d'ellipticité

$$\forall u_N \in X_N, \qquad a_N(u_N, u_N) \geq c' \| \nabla u_N \|^2_{L^2(\Omega)},$$

où $c > 0$ et $c' > 0$ sont des constantes indépendantes de N, de u_N et de v_N.

PREUVE. Remarquant qu'il existe des constantes c_1 et $c_1' > 0$ telles que — noter que $\overline{\nabla}$ dépend de k :

$$\forall k = 1, \ldots, K, \quad \forall (\zeta, \eta) \in \Lambda^2, \qquad c_1' \, |\nabla u(\zeta, \eta)|^2 \ \leq \ |\overline{\nabla} u(\zeta, \eta)|^2 \ \leq \ c_1 \, |\nabla u(\zeta, \eta)|^2,$$

le lemme se démontre par les mêmes arguments que le Lemme 8.4. ∎

Donc le problème (4.8) est résoluble de façon unique dans la situation des éléments courbes. Voici maintenant une estimation de l'erreur :

Théorème 8.6. *Il existe $c > 0$ tel que pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega})$ et tout entier $N \geq 2$ on ait l'estimation d'erreur entre la solution u du problème* (4.2) *et la solution u_N du problème* (4.8) *dans la situation des éléments courbes où X_N est construit selon* (8.8) *et les formules de quadrature selon* (8.10) *et* (8.14) *:*

$$\begin{aligned} \| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \ \leq \ c \Big(& \inf_{v_N \in X_{N_1}} \| u - v_N \|_{H^1(\Omega)} \\ & + \| f - \mathcal{I}_N f \|_{L^2(\Omega)} \ + \inf_{f_N \in Y_{N_1}} \| f - f_N \|_{L^2(\Omega)} + c(\Omega, N_1, N_2) \| f \|_{L^2(\Omega)} \Big), \end{aligned}$$

où

$$N_1 + N_2 = N - 1, \qquad c(\Omega, N_1, N_2) = \sup_{k=1}^{K} c_k(\Omega, N_1, N_2),$$

avec

$$\begin{aligned} c_k(\Omega, N_1, N_2) = \| J_k - \mathcal{I}_N J_k \|_{L^2(\Lambda^2)} \ & + \inf_{h_N \in \mathbb{P}_{N_2}(\Lambda^2)} \| J_k - h_N \|_{L^2(\Lambda^2)} \\ & + \sum_{1 \leq l,m \leq 2} \inf_{b_N \in \mathbb{P}_{N_2}(\Lambda^2)} \| a_{k,lm} - b_N \|_{L^\infty(\Lambda^2)} \end{aligned}$$

pour les coefficients $a_{k,lm}$ définis en (8.15).

PREUVE. Il nous suffit de majorer les trois termes qui interviennent dans l'estimation donnée par le Théorème 4.1.

Pour $z_N \in H^1(\Omega)$, nous avons à estimer $|(f, z_N) - (f, z_N)_N|$. Les arguments sont assez similaires à ceux intervenant dans la preuve du Théorème 7.6 :

$$\begin{aligned}
&|(f, z_N) - (f, z_N)_N| \\
&\qquad \le \sum_{k=1}^{K} \Big| \int_{\Lambda^2} (f^k\, z_N^k\, J_k)(\zeta, \eta)\, d\zeta\, d\eta - \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} (f^k\, z_N^k\, J_k)(\xi_i, \xi_j)\, \rho_i\, \rho_j \Big| \\
&\qquad \le \sum_{k=1}^{K} \Big(\Big| \int_{\Lambda^2} f^k J_k\, z_N^k - \mathcal{I}_N(f^k J_k)\, z_N^k\, d\zeta\, d\eta \Big| \\
&\qquad\qquad + \Big| \int_{\Lambda^2} \mathcal{I}_N(f^k J_k)\, z_N^k - g_N^k\, z_N^k\, d\zeta\, d\eta \Big| \\
&\qquad\qquad + \Big| \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} (g_N^k\, z_N^k - \mathcal{I}_N(f^k J_k)\, z_N^k)(\xi_i, \xi_j)\, \rho_i\, \rho_j \Big| \Big)
\end{aligned}$$

pour tout $g_N \in Y_{N-1}$ car l'intégration discrète est exacte sur $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda^2)$. D'où nous déduisons que pour tout $g_N \in Y_{N-1}$:

$$|(f, z_N) - (f, z_N)_N| \le \sum_{k=1}^{K} \Big(\| f^k J_k - \mathcal{I}_N(f^k J_k) \|_{L^2(\Lambda^2)} + \| f^k J_k - g_N^k \|_{L^2(\Lambda^2)} \Big) \times \| z_N^k \|_{L^2(\Lambda^2)}.$$

On termine l'estimation de ce terme en remarquant que

$$\begin{aligned}
\| f^k J_k - \mathcal{I}_N(f^k J_k) \|_{L^2(\Lambda^2)} \;\le\; & \| f^k (J_k - \mathcal{I}_N(J_k)) \|_{L^2(\Lambda^2)} \\
& + \| \mathcal{I}_N(J_k)(f^k - \mathcal{I}_N(f^k)) \|_{L^2(\Lambda^2)}
\end{aligned} \tag{8.16}$$

et que pour tout $f_N \in Y_{N_1}$ et tout $h_N \in Y_{N_2}(\Lambda^2)$, le produit $f_N h_N := g_N$ est dans $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda^2)$ et qu'on a :

$$\| f^k J_k - g_N^k \|_{L^2(\Lambda^2)} \;\le\; \| f^k (J_k - h_N^k) \|_{L^2(\Lambda^2)} \;+\; \| h_N^k (f^k - f_N^k) \|_{L^2(\Lambda^2)}.$$

Ces trois dernières inégalités permettent d'obtenir que :

$$\begin{aligned}
|(f, z_N) - (f, z_N)_N| \le c \Big(& \| f - \mathcal{I}_N f \|_{L^2(\Omega)} \;+ \inf_{f_N \in Y_{N_1}} \| f - f_N \|_{L^2(\Omega)} \\
& + c(\Omega, N_1, N_2) \| f \|_{L^2(\Omega)} \Big) \times \| z_N \|_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Concernant la majoration du terme $|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)|$, la technique est similaire. Notant $\partial_1 = \partial_\zeta$ et $\partial_2 = \partial_\eta$, on a :

$$\begin{aligned}
&|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)| \;\le \\
&\sum_{k=1}^{K} \sum_{1 \le l, m \le 2} \Big| \int_{\Lambda^2} (a_{k,lm}\, \partial_l v_N^k\, \partial_m z_N^k)(\zeta, \eta)\, d\zeta\, d\eta - \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} (a_{k,lm}\, \partial_l v_N^k\, \partial_m z_N^k)(\xi_i, \xi_j)\, \rho_i\, \rho_j \Big|.
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que, pour $v_N \in X_{N_1}$:

$$|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)| \;\le\; c' \cdot c(\Omega, N_1, N_2) \| v_N \|_{H^1(\Omega)} \times \| z_N \|_{H^1(\Omega)}.$$

Comme v_N peut être choisi de façon que $\| v_N \|_{H^1(\Omega)} \leq 2\| u \|_{H^1(\Omega)}$ et comme $\| u \|_{H^1(\Omega)} \leq c \| f \|_{H^{-1}(\Omega)}$, on arrive à :

$$|a(v_N, z_N) - a_N(v_N, z_N)| \ \leq \ c' \cdot c(\Omega, N_1, N_2) \| f \|_{L^2(\Omega)} \times \| z_N \|_{H^1(\Omega)}. \tag{8.18}$$

Les estimations (8.17) et (8.18) terminent la démonstration du théorème. ■

Chapitre 9.

Régularité des solutions

Pour conclure l'histoire, au moins en ce qui concerne les estimations d'erreur, il faut connaître la régularité des solutions du problème (4.2) en fonction de celle du second membre f, ce qui n'a pas de réponse standard à cause de la présence des coins. Voici d'abord le résultat de régularité en dehors des coins.

9.a. Au voisinage d'un point régulier de la frontière

Théorème 9.1. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overline{\mathcal{U}}$ ne contienne aucun des sommets de Ω. Supposons que f soit dans l'espace $H^{s-2}(\Omega)$ pour un s réel ≥ 1. Alors la solution u du problème* (4.2) *appartient à $H^s(\mathcal{U} \cap \Omega)$.*

La démonstration de ce résultat classique peut être trouvée en de nombreux endroits de la littérature. Voir par exemple [15]. Nous donnons, juste pour l'exemple de ce genre de technique, la preuve dans le cas le plus facile, à savoir celui où le voisinage $\mathcal{U}$ ne rencontre pas le bord de Ω (régularité à l'intérieur).

Lemme 9.2. *Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tel que $\Delta u = f \in H^{s-2}(\mathbb{R}^2)$. Alors $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$.*

PREUVE. Par transformation de Fourier, on tire de l'équation $\Delta u = f$:

$$\forall (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \qquad -(\xi_1^2 + \xi_2^2)\, \hat{u}(\xi_1, \xi_2) = \hat{f}(\xi_1, \xi_2).$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |\xi|^2)^s \hat{u}(\xi_1, \xi_2)^2 \, d\xi_1 \, d\xi_2 &\leq c \int_{|\xi|^2 \leq 1} \hat{u}(\xi_1, \xi_2)^2 \, d\xi_1 \, d\xi_2 + c \int_{|\xi|^2 \geq 1} |\xi|^{2s} \hat{u}(\xi_1, \xi_2)^2 \, d\xi_1 \, d\xi_2 \\
&\leq c \, \| \, u \, \|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + c \int_{|\xi|^2 \geq 1} |\xi|^{2s} \frac{\hat{f}(\xi_1, \xi_2)^2}{(\xi_1^2 + \xi_2^2)^2} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \\
&\leq c \, \| \, u \, \|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} + c \, \| \, f \, \|^2_{H^{s-2}(\mathbb{R}^2)}.
\end{aligned}$$

Donc u est dans $H^s(\mathbb{R}^2)$. ∎

Lemme 9.3. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overline{\mathcal{U}}$ ne rencontre pas $\partial\Omega$. Soit $u \in H^1_0(\Omega)$ tel que $\Delta u = f \in H^{s-2}(\Omega)$. Alors $u \in H^s(\mathcal{U} \cap \Omega)$.*

PREUVE. Soit $1 = s_0 < s_1 < \ldots < s_D = s$ de façon que $s_d - s_{d-1} \leq 1$ pour tout $d = 1, \ldots, D$. Soit $\mathcal{U} = \mathcal{V}_D \subset_{\text{comp}} \ldots \subset_{\text{comp}} \mathcal{V}_1 \subset_{\text{comp}} \mathcal{V}_0$ de façon que $\overline{\mathcal{V}}_0$ ne rencontre pas le bord de Ω, $\subset_{\text{comp}}$ désignant l'inclusion compacte. Il nous suffit de montrer par récurrence sur d que u est dans $H^{s_d}(\mathcal{V}_d)$.

Par hypothèse, c'est vrai pour $d = 0$. Supposons que pour $d \geq 1$, $u \in H^{s_{d-1}}(\mathcal{V}_{d-1})$. Soit χ une fonction de troncature dans $\mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{V}_{d-1})$ qui vaut 1 sur $\mathcal{V}_d$. Alors χu prolongée par 0 en dehors de $\mathcal{V}_{d-1}$ est dans $H^{s_{d-1}}(\mathbb{R}^2)$ et

$$\Delta(\chi u) = \chi\, \Delta u + 2\nabla\chi \cdot \nabla u + \Delta\chi\, u \in H^{s_d-2}(\mathbb{R}^2).$$

L'application du lemme précédent à χu donne que χu est dans $H^{s_d}(\mathbb{R}^2)$, donc u est dans $H^{s_d}(\mathcal{V}_d)$. ∎

Lorsque $\mathcal{U}$ rencontre le bord de Ω, la démonstration s'effectue :

1. par redressement du bord au voisinage de $\mathcal{U} \cap \partial\Omega$, ce qui est nécessaire si le bord n'est pas droit et fait apparaître des coefficients variables,
2. par gel des coefficients, pour se ramener à des problèmes à coefficients constants,
3. par transformation de Fourier partielle le long du bord, pour traiter les problèmes à coefficients constants,
4. par perturbation pour récupérer les coefficients variables à partir des problèmes à coefficients gelés.

Si Ω est un polygone à côtés droits, seule la troisième étape est nécessaire.

9.b. Au voisinage d'un coin "droit"

Maintenant, on étudie la situation au voisinage d'un sommet $\mathcal{O}$; on suppose qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de $\mathcal{O}$ dans lequel le bord de Ω est formé de 2 segments (d'où la dénomination coin droit). On utilise les coordonnées polaires (r, θ), les coordonnées cartésiennes (X, Y) et les autres notations introduites à la fin du §2. En particulier ω désigne l'ouverture de Ω au voisinage de $\mathcal{O}$ et G_ω le secteur infini d'angle ω. Ainsi :

$$\Omega \cap \mathcal{U} \;=\; G_\omega \cap \mathcal{U}.$$

Soit $\chi \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathcal{U})$ qui vaut 1 sur un voisinage $\mathcal{V}$ de $\mathcal{O}$.

On introduit maintenant des solutions singulières élémentaires du problème de Dirichlet (4.2) au voisinage de $\mathcal{O}$, c'est-à-dire des fonctions qui ne satisfont pas sur $\mathcal{U}$ l'énoncé du Théorème 9.1 : ces fonctions u sont dans $H_0^1(\Omega)$, à support dans $\mathcal{U}$, Δu est $\mathscr{C}^\infty$ jusqu'au bord de Ω (donc dans $H^{s-2}(\Omega)$ pour tout s), et pourtant, ces fonctions u ne sont pas $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$ — pour chacune d'entre elles, il existe un exposant limite $s(u)$ tel que $\forall s < s(u)$, $u \in H^s(\Omega)$ et $\forall s \geq s(u)$, $u \notin H^s(\Omega)$.

A cause du résultat de régularité locale du Théorème 9.1, on sait tout de suite que les éventuelles solutions singulières à support dans $\mathcal{U}$ seront $\mathscr{C}^\infty$ sur $\overline{\Omega} \setminus \{\mathcal{O}\}$: la singularité est localisée en $\mathcal{O}$.

On introduit pour $\lambda \in \mathbb{C}$ les deux fonctions suivantes :

$$S_\lambda(r,\theta) = r^\lambda \sin\lambda\theta$$
$$T_\lambda(r,\theta) = r^\lambda(\log r \sin\lambda\theta + \theta \cos\lambda\theta).$$

Ces 2 familles de fonctions sont bien définies et harmoniques sur le secteur G_ω. On vérifie en effet facilement que $\Delta S_\lambda = 0$ et $\Delta T_\lambda = 0$ en utilisant l'écriture du laplacien en coordonnées polaires :

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\theta^2. \tag{9.1}$$

De plus, S_λ et T_λ sont nulles sur le côté $\theta = 0$ de G_ω.

Enfin, T_λ n'est jamais $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathcal{O}$: les dérivées d'ordre k de T_λ ont un comportement en r de la forme $r^{\lambda-k}\log r$, qui pour k assez grand, n'est pas borné en $\mathcal{O}$.

Similairement, S_λ n'est $\mathscr{C}^\infty$ en $\mathcal{O}$ que si $\lambda \in \mathbb{N}$ — si $\lambda \in \mathbb{N}$, S_λ est la partie imaginaire du polynôme $(X+iY)^\lambda$. Nous précisons plus loin, cf (?.?), la régularité Sobolev de S_λ et T_λ : nous anticipons en disant dès maintenant que pour tout λ de partie réelle positive, S_λ et T_λ sont dans $H^1(\mathcal{U})$.

Nous voyons immédiatement que S_λ s'annule sur le côté $\theta = \omega$ de G_ω si et seulement si $\lambda = \ell\pi/\omega$ avec $\ell \in \mathbb{Z}$; la conclusion est que pour tout λ non entier et de la forme $\ell\pi/\omega$ avec $\ell \in \mathbb{N}^*$,

- χS_λ est dans $H_0^1(\Omega)$,
- χS_λ n'est pas $\mathscr{C}^\infty(\overline{\mathcal{U}})$,
- $\Delta(\chi S_\lambda)$ est $\mathscr{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Le dernier point se voit grâce à la décomposition $\Delta(\chi S_\lambda) = \chi\,\Delta S_\lambda + 2\nabla\chi\cdot\nabla S_\lambda + \Delta\chi\, S_\lambda$: le premier terme est nul, les deux autres sont $\mathscr{C}^\infty$ car les supports de $\nabla\chi$ et de $\Delta\chi$ sont éloignés de $\mathcal{O}$, là où S_λ est $\mathscr{C}^\infty$.

Ainsi donc, si ω n'est pas un multiple rationnel de π, les $\ell\pi/\omega$ ne sont jamais entiers et pour chaque $\ell \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\chi S_{\ell\pi/\omega}$ constitue une solution singulière du problème (4.2).

A-t-on moins de solutions singulières, voire pas du tout, lorsque ω est un multiple rationnel de π ? Non ! C'est juste quand les S_λ sont régulières que les T_λ constituent des solutions singulières. Nous avons déjà vu que T_λ est harmonique et s'annule sur $\theta = 0$. En $\theta = \omega$, T_ω est la fonction

$$r \longmapsto r^\lambda(\log r \sin\lambda\omega + \omega\cos\lambda\omega).$$

On cherche à quelles conditions cette fonction est $\mathscr{C}^\infty([0,+\infty[)$. Une condition nécessaire est que le terme en $\log r$ disparaisse, donc que $\sin\lambda\omega = 0$, i. e. que $\lambda = \ell\pi/\omega$. Dans ce cas la fonction ci-dessus se réduit à $r \mapsto (-1)^\ell\omega\, r^\lambda$. Cette dernière fonction est $\mathscr{C}^\infty([0,+\infty[)$ si et seulement si c'est un polynôme, i. e. si λ est entier ! On constate alors immédiatement que si $\underline{\omega \neq 2\pi}$, la fonction

$$T_\lambda^\star \;=\; T_\lambda - (-1)^\ell\omega\left(\frac{Y}{\sin\omega}\right)^\lambda \tag{9.2}$$

s'annule sur les deux côtés de G_ω. Cette fonction n'est plus harmonique, mais, comme elle coïncide avec T_λ modulo un polynôme, son laplacien est un polynôme, donc $\mathscr{C}^\infty$.

C'est pourquoi on pose, pour tout entier $\ell > 0$:

$$W_{\omega,\ell} = \begin{cases} \begin{cases} \chi S_{\ell\pi/\omega} & \text{si } \frac{\ell\pi}{\omega} \notin \mathbb{N}, \\ \chi T_{\ell\pi/\omega} - (-1)^\ell \omega\, \chi \left(\dfrac{Y}{\sin\omega}\right)^{\ell\pi/\omega} & \text{si } \frac{\ell\pi}{\omega} \in \mathbb{N}, \end{cases} & \text{pour } \omega \neq 2\pi \\ \chi S_{\ell/2} \quad \text{si } \ell \text{ est impair}, & \text{pour } \omega = 2\pi \end{cases}$$

Voici le résultat de régularité pour les $W_{\omega,\ell}$:

$$\forall s < 1 + \frac{\ell\pi}{\omega}, \quad W_{\omega,\ell} \in H^s(\Omega) \qquad \text{et} \qquad \forall s \geq 1 + \frac{\ell\pi}{\omega}, \quad W_{\omega,\ell} \notin H^s(\Omega). \tag{9.3}$$

Pour le démontrer, on peut se baser sur le lemme suivant qui donne un analogue dans les espaces de Sobolev de l'estimation du reste d'un développement de Taylor. Ce lemme a une importance essentielle dans l'étude du comportement des solutions du problème de Dirichlet au voisinage d'un coin.

Lemme 9.4. *Soit $s > 0$ non entier. Alors tout $u \in H^s(G_\omega)$ tel que :*

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| < s - 1, \qquad \partial_X^{\alpha_1} \partial_Y^{\alpha_2} u(\mathcal{O}) = 0, \tag{9.4}$$

satisfait

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| < s, \qquad r^{|\alpha|-s} \partial_X^{\alpha_1} \partial_Y^{\alpha_2} u \in L^2(G_\omega). \tag{9.5}$$

Noter que la condition (9.4) a bien un sens grâce au résultat de continuité du Théorème 3.2 appliqué aux dérivées de u. La preuve de ce lemme est assez technique et fait intervenir l'inégalité de Hardy et d'autres estimations du même genre. Il signifie que si une fonction de $H^s(G_\omega)$ a un développement de Taylor nul en $\mathcal{O}$, elle est plate en $\mathcal{O}$ à un certain ordre et au sens L^2.

Ce résultat permet de se trouver dans le champ d'application du lemme suivant qui donne une propriété fondamentale du changement de variables d'Euler :

$$(X, Y) \longmapsto (t, \theta) \quad \text{où} \quad t = \log r. \tag{9.6}$$

Notons $\tilde{u}$ la fonction telle que $u(X, Y) = \tilde{u}(t, \theta)$.

Lemme 9.5. *Soit $s \geq 0$. Alors tout $u \in H^s(G_\omega)$ satisfaisant (9.5) est tel que*

$$e^{(-s+1)t}\, \tilde{u} \in H^s(\mathbb{R}\times]0, \omega[). \tag{9.7}$$

Inversement tout u à support compact satisfaisant (9.7) appartient à $H^s(G_\omega)$ et satisfait (9.4).

Maintenant (9.3) se démontre en remarquant que

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^2,\ |\alpha| < \ell\pi/\omega, \qquad \partial_X^{\alpha_1} \partial_Y^{\alpha_2} W_{\omega,\ell}(\mathcal{O}) = 0,$$

et qu'ainsi, grâce aux Lemmes 9.4 et 9.5, l'appartenance de $W_{\omega,\ell}$ à $H^s(\Omega)$ équivaut l'appartenance de la fonction $e^{(-s+1)t}\,\tilde{W}_{\omega,\ell}$ à $H^s(\mathbb{R}\times]0,\omega[)$. Revenant à la définition de $W_{\omega,\ell}$ on voit que le support de $\tilde{W}_{\omega,\ell}$ est contenu dans une demi-bande de la forme $]-\infty,t_0[\times]0,\omega[$ et que, finalement, $W_{\omega,\ell}\in H^s(\Omega)$ si et seulement si

$$t\mapsto e^{(-s+1+\ell\pi/\omega)t}\in L^2(]-\infty,t_0[)$$

ou, selon le cas,

$$t\mapsto t\,e^{(-s+1+\ell\pi/\omega)t}\in L^2(]-\infty,t_0[).$$

Théorème 9.6. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\Omega\cap\mathcal{U}=G_\omega\cap\mathcal{U}$ et tel que $\overline{\mathcal{U}}$ contienne le sommet $\mathcal{O}$ mais ne contienne aucun des autres sommets de Ω. Supposons que f soit dans l'espace $H^{s-2}(\Omega)$ pour un réel $s\geq 1$. On fait en outre l'hypothèse que pour tout entier $\ell\geq 1$, $s\neq 1+\ell\pi/\omega$ (cette condition étant réduite aux entiers ℓ impairs si $\omega=2\pi$).*

i) Si $s<1+\pi/\omega$, alors la solution u du problème (4.2) appartient à $H^s(\mathcal{U}\cap\Omega)$.

ii) Si, au contraire, $s>1+\pi/\omega$, on note L le plus grand entier ℓ tel que $s>1+\ell\pi/\omega$; il existe alors des coefficients c_1, …, c_L tels que u satisfasse :

$$u-\sum_{\ell=1}^{L}c_\ell\,W_{\omega,\ell}\in H^s(\mathcal{U}\cap\Omega),\tag{9.8}$$

cette somme étant réduite aux entiers ℓ impairs si $\omega=2\pi$.

Corollaire 9.7. *Si Ω est le carré Λ^2, et si $f\in H^{s-2}(\Lambda^2)$ pour un réel $s\geq 1$ alors u appartient à $H^s(\Lambda^2)$ dès que $s<3$.*

Nous donnons maintenant des éléments de preuve du Théorème 9.6. Nous supposons que s n'est pas entier pour pouvoir appliquer le Lemme 9.4. Une fois l'énoncé démontré pour tout s non entier, on peut obtenir l'énoncé pour les entiers grâce à l'interpolation fonctionnelle.

La preuve procède en trois étapes :

1. La résolution polynomiale. Pour tout polynôme F, on construit $u_F\in H^1_0(\Omega)$ à support dans $\mathcal{U}$ qui satisfait $\Delta u_F=F$ sur $\mathcal{V}$.

2. La réduction à un second membre plat. Pour f dans $H^{s-2}(\Omega)$, on définit

$$F(X,Y)=\sum_{|\alpha|<s-3}\partial_X^{\alpha_1}\partial_Y^{\alpha_2}f(\mathcal{O})\,\frac{X^{\alpha_1}\,Y^{\alpha_2}}{\alpha_1!\,\alpha_2!}\,.$$

D'après la première étape, $\Delta u_F=F$ sur $\mathcal{V}$. Donc

$$f_0:=\Delta(\chi(u+u_F))=-f+F\quad\text{sur}\quad\mathcal{V}.$$

Donc f_0 satisfait (9.4) et d'après le Lemme 9.4, f_0 satisfait (9.5).

3. La résolution avec second membre plat. On étudie la solution $u_0:=\chi(u+u_F)$ du problème de Dirichlet (4.2) avec second membre $-f_0$ grâce à la transformation de Mellin — qui n'est autre qu'une transformation de Fourier-Laplace, i. e. à argument complexe, après le changement de variables d'Euler (9.6).

1. La résolution polynomiale. Pour tout entier $n \geq 2$, soit $\mathcal{P}_n^\omega$ l'espace des polynômes en X et Y homogènes de degré n et qui s'annulent sur les deux côtés de G_ω, i. e.

$$U \in \mathcal{P}_n^\omega \quad \Longleftrightarrow \quad U = \sum_{|\alpha|=n} c_\alpha \, X^{\alpha_1} \, Y^{\alpha_2} \quad \text{et} \quad U\Big|_{\theta=0} = 0, \quad U\Big|_{\theta=\omega} = 0.$$

Soit $\mathcal{Q}_n$ l'espace des polynômes en X et Y homogènes de degré $n-2$. Nous traitons séparément les cas où ω est égal à 2π ou non.

Lemme 9.8. *Supposons que $\omega \neq 2\pi$. Soit $n \geq 2$ un entier.*

i) Si $n \neq \ell\pi/\omega$ pour tout entier ℓ, Δ induit un isomorphisme de $\mathcal{P}_n^\omega$ sur $\mathcal{Q}_n$.

ii) Si $n = \ell\pi/\omega$ pour un entier ℓ, Δ est surjectif de l'espace $\langle \mathcal{P}_n^\omega, T_n^\star \rangle$ — i. e. l'espace engendré par $\mathcal{P}_n^\omega$ et la fonction $T_n^\star$ définie en (9.2), — sur $\mathcal{Q}_n$.

Preuve. Δ opère de $\mathcal{P}_n^\omega$ dans $\mathcal{Q}_n$. La dimension de $\mathcal{Q}_n$ est $n-1$. Comme les deux côtés $\theta = 0$ et $\theta = \omega$ ne sont pas colinéaires, la dimension de $\mathcal{P}_n^\omega$ est égale à la dimension de l'espace des polynômes homogènes de degré n, soit $n+1$, diminuée de 2 à cause des conditions aux limites, donc

$$\dim \mathcal{P}_n^\omega = \dim \mathcal{Q}_n.$$

Il nous suffit d'étudier le noyau de Δ dans $\mathcal{P}_n^\omega$.

Soit $U \in \mathcal{P}_n^\omega$ tel que $\Delta U = 0$. En coordonnées polaires U est de la forme $r^n \varphi(\theta)$. Utilisant l'écriture (9.1) de Δ en coordonnées polaires, on obtient que

$$\varphi''(\theta) + n^2 \, \varphi(\theta) = 0.$$

Donc il existe des coefficients a et b tels que

$$\varphi(\theta) = a \, \sin n\theta + b \, \cos n\theta.$$

Comme U est nul en $\theta = 0$, b est égal à 0. Ainsi U ne peut être non nul que si $\sin n\omega = 0$, i. e. s'il existe un entier ℓ tel que $n = \ell\pi/\omega$. Et dans ce cas $U = a \, S_n$ qui est bien dans $\mathcal{P}_n$.

Cas i) Dans ce cas Δ est injectif de $\mathcal{P}_n^\omega$ dans $\mathcal{Q}_n$. Comme les deux espaces sont de même dimension, Δ est bijectif entre ces deux espaces.

Cas ii) Dans ce cas $\Delta T_n^\star = \gamma \Delta Y^n$ pour une constante γ convenable, donc $\Delta T_n^\star \in \mathcal{Q}_n$. Ainsi Δ opère de $\langle \mathcal{P}_n^\omega, T_n^\star \rangle$ dans $\mathcal{Q}_n$. Comme le noyau de cet opérateur est encore engendré par S_n, on a bien obtenu l'énoncé du Lemme. ∎

Lemme 9.9. *Supposons que $\omega = 2\pi$. Soit $n \geq 2$ un entier.*
Alors Δ est surjectif de $\mathcal{P}_n^{2\pi}$ sur $\mathcal{Q}_n$.

Preuve. Maintenant, comme les deux côtés de $G_{2\pi}$ coïncident, la dimension de $\mathcal{P}_n^{2\pi}$ est n. On démontre comme précédemment que le noyau de Δ opérant de $\mathcal{P}_n^{2\pi}$ dans $\mathcal{Q}_n$ est engendré par S_n. Il est donc surjectif. ∎

Ainsi, il existe une fonction U_F qui est la somme d'un polynôme et d'une combinaison linéaire des $T_n^\star$ pour les $0 < n < s-1$ tels que $n = \ell\pi/\omega$, et qui satisfait

$$\Delta U_F = F \quad \text{et} \quad U_F\Big|_{\theta=0} = 0, \quad U_F\Big|_{\theta=\omega} = 0.$$

2. La réduction à un second membre plat. On pose $u_F = \chi U_F$. On a donc construit u_F satisfaisant (9.8) tel que $\Delta u_F = F$ sur $\mathcal{V}$. Il nous suffit maintenant de démontrer que u_0, qui est à support dans $\mathcal{U}$ et solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u_0 = f_0 & \text{dans } \Omega \\ u_0 \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{9.9}$$

admet aussi une décomposition selon (9.8).

3. La résolution avec second membre plat. Par le changement de variables (9.6), le problème (9.9) se transforme en

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \partial_\theta^2)\, \tilde{u}_0(t,\theta) = e^{2t}\, \tilde{f}_0(t,\theta) & \forall t \in \mathbb{R},\ \forall \theta \in]0,\omega[, \\ \tilde{u}_0(t,0) = \tilde{u}_0(t,\omega) = 0. & \forall t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{9.10}$$

Comme u_0 s'annule sur les bord de G_ω, on peut montrer que la conclusion du Lemme 9.4 s'étend à cette situation : on a $r^{-1}u_0 \in L^2(G_\omega)$. D'où l'on tire, grâce au Lemme 9.5 que $\tilde{u}_0 \in H^1(\mathbb{R}\times]0,\omega[)$. Posons $v := \tilde{u}_0$ et $g := e^{2t}\tilde{f}_0$. On a alors, par construction de f_0 :

$$\begin{cases} \Delta v = g & \text{avec } e^{(-s+1)t}\, g \in H^{s-2}(\mathbb{R}\times]0,\omega[), \\ v \in H_0^1(\mathbb{R}\times]0,\omega[). \end{cases} \tag{9.11}$$

De plus v et g sont à support dans $]-\infty, t_0[\,\times\,]0,\omega[$. On applique alors la transformation de Fourier-Laplace :

$$\hat{v}(\lambda,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t}\, v(t,\theta)\, dt\, d\theta \quad \text{et} \quad \hat{g}(\lambda,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda t}\, g(t,\theta)\, dt\, d\theta.$$

Il résulte des propriétés de support et d'intégrabilité de v et g que $\hat{g}$ est définie pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\mathrm{Re}\,\lambda \le s-1$, et analytique pour $\mathrm{Re}\,\lambda < s-1$ à valeurs dans $H^{s-2}(]0,\omega[)$, alors que $\hat{v}$ est définie pour $\mathrm{Re}\,\lambda \le 0$ et analytique pour $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ à valeurs dans $H_0^1(]0,\omega[)$. Le problème (9.11) se transforme en l'équation

$$\begin{cases} (\partial_\theta^2 + \lambda^2)\hat{v}(\lambda,\theta) = \hat{g}(\lambda,\theta) & \text{pour } 0 < \theta < \omega, \\ \hat{v}(\lambda,0) = \hat{v}(\lambda,\omega) = 0, \end{cases} \tag{9.12}$$

qui est vérifiée pour tout λ, $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. On voit facilement que l'opérateur, défini et continu pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{A}_\lambda \ :\ V \longmapsto (\partial_\theta^2 + \lambda^2)\, V, \quad H_0^1(]0,\omega[) \longrightarrow H^{-1}(]0,\omega[),$$

est injectif si et seulement si $\lambda \neq \ell\pi/\omega$ pour tout entier ℓ. On démontre plus précisément que, si $\lambda \neq \ell\pi/\omega$, alors l'inverse $\mathcal{A}_\lambda^{-1}$ existe et est continu de $H^{s-2}(]0,\omega[)$ à valeurs dans $H^s \cap H_0^1(]0,\omega[)$; et qu'enfin, l'application

$$\lambda \longmapsto \mathcal{A}_\lambda^{-1} \in \mathscr{L}(H^{s-2}(]0,\omega[),\ H^s \cap H_0^1(]0,\omega[))$$

est méromorphe sur $\mathbb{C}$, de pôles $\ell\pi/\omega$, et le résidu au pôle $\ell\pi/\omega$ est un projecteur sur l'espace engendré par $\sin \ell\pi\theta/\omega$.

La fonction $V(\lambda)$ définie comme $\mathcal{A}_\lambda^{-1}\hat{g}(\lambda)$ est un prolongement méromorphe de $\hat{v}(\lambda)$ à la bande $\operatorname{Re}\lambda < s-1$, et est encore bien définie sur toute la droite $\operatorname{Re}\lambda = s-1$, grâce à l'hypothèse que $s \neq 1 + \ell\pi/\omega$. Soit v_0 la tranformée de Fourier-Laplace inverse de V sur la droite $\operatorname{Re}\lambda = s-1$, i. e.

$$v_0(t,\theta) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\operatorname{Re}\lambda = s-1} e^{\lambda t}\, V(\lambda,\theta)\, d\lambda.$$

Grâce à des estimations uniformes sur l'inverse $\mathcal{A}_\lambda^{-1}$ on démontre que $e^{(-s+1)t}v_0$ est dans $H^s(\mathbb{R}\times]0,\omega[)$. Enfin, la formule de Cauchy permet de montrer

$$v - v_0 = \sum_{\substack{\ell\in\mathbb{N},\\ 0<\ell\pi/\omega<s-1}} \operatorname*{Rés}_{\lambda=\ell\pi/\omega}\Big[e^{\lambda t}\, V(\lambda)\Big],$$

où $\operatorname{Rés}_{\lambda=\lambda_0}[f(\lambda)]$ désigne le résidu au pôle λ_0 de la fonction méromorphe f. Comme il existe des constantes γ_ℓ telles que

$$\operatorname*{Rés}_{\lambda=\ell\pi/\omega}\Big[e^{\lambda t}\, V(\lambda)\Big] = \gamma_\ell\, e^{\lambda t} \sin \ell\pi\theta/\omega,$$

le retour aux coordonnées polaires fournit un $u_{00}(r,\theta) = v_0(t,\theta)$ tel que

$$u_0 - u_{00} = \sum_{\substack{\ell\in\mathbb{N},\\ 0<\ell\pi/\omega<s-1}} \gamma_\ell\, S_{\ell\pi/\omega}.$$

Tronquant par χ, on obtient $\chi u_{00} \in H^s(\Omega)$ et

$$u_0 - \sum_{\substack{\ell\in\mathbb{N},\\ 0<\ell\pi/\omega<s-1}} \gamma_\ell\, W_{\omega,\ell} \in H^s(\Omega).$$

Ceci, joint aux deux premières étapes, prouve le Théorème 9.6. ∎

9.c. Au voisinage d'un coin "courbe"

Dans la situation où les côtés se joignant en $\mathcal{O}$ sont non plus des segments, mais des morceaux de courbe $\mathscr{C}^\infty$, les résultats sont un peu différents. La condition pour la régularité H^s des solutions est la même que pour un coin droit de même ouverture, la décomposition (9.8) revêt une forme analogue, mais les solutions singulières W_ℓ sont différentes : elles dépendent

de la géométrie et de s. Notons $W_{\ell;s}^{\Omega,\mathcal{O}}$ ces nouvelles singularités en $\mathcal{O}$. Elles sont de la forme suivante :

$$W_{\ell;s}^{\Omega,\mathcal{O}} = W_{\omega,\ell} \quad + \sum_{\substack{p>0,\\ 0<p+\ell\pi/\omega\le s-1}} \sum_{q=0}^{Q} r^{p+\ell\pi/\omega} \log^q r \; \varphi_{\ell,p,q}(\theta) \tag{9.13}$$

où Q est un entier qui dépend de ℓ et p et où les fonctions $\varphi_{\ell,p,q}$ sont des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ de θ. Si ω n'est pas un multiple rationnel de π, il n'y a pas de terme logarithmique :

$$W_{\ell;s}^{\Omega,\mathcal{O}} = W_{\omega,\ell} \quad + \sum_{\substack{p>0,\\ 0<p+\ell\pi/\omega\le s-1}} r^{p+\ell\pi/\omega}\varphi_{\ell,p}(\theta). \tag{9.14}$$

Théorème 9.10. *Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ tel que $\overline{\mathcal{U}}$ contienne le sommet $\mathcal{O}$ mais ne contienne aucun des autres sommets de Ω. Supposons que f soit dans l'espace $H^{s-2}(\Omega)$ pour un réel $s \ge 1$. On fait en outre l'hypothèse que pour tout entier $\ell \ge 1$, $s \ne 1+\ell\pi/\omega$ (cette condition étant réduite aux entiers ℓ impairs si $\omega = 2\pi$).*

i) Si $s < 1+\pi/\omega$, alors la solution u du problème (4.2) appartient à $H^s(\mathcal{U}\cap\Omega)$.

ii) Si, au contraire, $s > 1+\pi/\omega$, on note L le plus grand entier ℓ tel que $s > 1+\ell\pi/\omega$; alors il existe des coefficients $c_1, \ldots, c_L$ tels que u satisfasse :

$$u - \sum_{\ell=1}^{L} c_\ell \, W_{\ell;s}^{\Omega,\mathcal{O}} \in H^s(\mathcal{U}\cap\Omega), \tag{9.15}$$

cette somme étant réduite aux entiers ℓ impairs si $\omega = 2\pi$.

On démontre ce théorème en appliquant un difféomorphisme local au voisinage de $\mathcal{O}$ qui transforme $\mathcal{U}\cap\overline{\Omega}$ en un voisinage de $\mathcal{O}$ dans le secteur G_ω. On peut s'arranger pour que ce difféomorphisme coïncide avec l'identité en $\mathcal{O}$. Le problème de Dirichlet pour le Laplacien est transformé en problème de Dirichlet pour un autre opérateur elliptique $A(X,Y;\partial_X,\partial_Y)$ à coefficients variables $\mathscr{C}^\infty$. La partie principale de A en $\mathcal{O}$ est le Laplacien.

Chapitre 10.

Convergence des méthodes spectrales et d'éléments spectraux

Maintenant, nous avons tous les éléments pour démontrer des résultats de convergence pour les méthodes qui font l'objet de ce cours. Dans chaque situation, nous allons obtenir une estimation de l'erreur par une puissance négative de N, cette puissance dépendant à la fois de la régularité du second membre f et de la régularité de la solution u — et plus généralement de sa décomposition en parties régulière et singulière selon (9.15).

Pour une bonne compréhension des énoncés, il sera plus agréable de poser f dans $H^\rho(\Omega)$ plutôt que f dans $H^{s-2}(\Omega)$. C'est uniquement une question de notation. Le lien avec les théorèmes de régularité se fait donc en posant

$$s = \rho + 2.$$

10.a. Sur un domaine régulier (méthode des éléments spectraux)

Théorème 10.1. *Soit Ω un domaine régulier. Soit $f \in H^\rho(\Omega)$ avec $\rho > 1$, ce qui assure la continuité de f sur $\overline{\Omega}$. Soit u la solution du problème de Dirichlet* (4.2) *sur Ω et, pour N entier ≥ 2 soit u_N la solution du problème* (4.8) *discrétisé par éléments spectraux — X_N est construit selon* (8.8) *et les formules de quadrature selon* (8.10) *et* (8.14)*. Alors on a l'estimation de l'erreur :*

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \leq c\, N^{-\rho} \| f \|_{H^\rho(\Omega)} \tag{10.1}$$

Preuve. On part du Théorème 8.6. On choisit N_1 et N_2 de façon que $N_1 = N_2$ ou $N_1 = N_2+1$ selon la parité de $N-1$. Ainsi, N_1 et N_2 satisfont

$$|N_1 - \frac{N}{2}| \leq 1 \quad \text{et} \quad |N_2 - \frac{N}{2}| \leq 1. \tag{10.2}$$

Comme les difféomorphismes $\mathscr{F}_k$ sont $\mathscr{C}^\infty$, grâce au Théorème 6.9, on obtient que pour tout $\tau > 0$, il existe $c_\tau > 0$ tel que, avec N_1 et N_2 satisfaisant (10.2)

$$c(\Omega, N_1, N_2) \leq c_\tau\, N^{-\tau}. \tag{10.3}$$

Grâce au même Théorème 6.9 appliqué aux f^k, on a l'estimation pour f :

$$\| f - \mathcal{I}_N f \|_{L^2(\Omega)} + \inf_{f_N \in Y_{N_1}} \| f - f_N \|_{L^2(\Omega)} \leq c\, N^{-\rho} \| f \|_{H^\rho(\Omega)}. \tag{10.4}$$

Enfin, si $\mathcal{I}_{N_1} u$ désigne l'unique élément de X_{N_1} qui coïncide avec u sur la grille Ξ_{N_1}, on a

$$\inf_{v_N \in X_{N_1}} \| u - v_N \|_{H^1(\Omega)} \leq \| u - \mathcal{I}_{N_1} u \|_{H^1(\Omega)} \tag{10.5}$$

et comme d'après le Théorème 9.1, u appartient à $H^{\rho+2}(\Omega)$, le Théorème 6.9 appliqué aux u^k permet d'obtenir

$$\| u - \mathcal{I}_{N_1} u \|_{H^1(\Omega)} \leq c\, N^{-1-\rho} \| u \|_{H^{\rho+2}(\Omega)}. \tag{10.6}$$

Les inégalités (10.3) – (10.6) mises bout à bout donnent grâce au Théorème 8.6

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \leq c\, (N^{-1-\rho} \| u \|_{H^{\rho+2}(\Omega)} + N^{-\rho} \| f \|_{H^\rho(\Omega)}). \tag{10.7}$$

L'estimation $\| u \|_{H^{\rho+2}(\Omega)} \leq c \| f \|_{H^\rho(\Omega)}$ que l'on peut tirer de la démonstration du Théorème 9.1 permet d'en déduire l'estimation (10.1). ∎

Remarque 10.2.

i) Dans cette situation où le domaine est régulier le plus mauvais terme dans l'estimation de l'erreur vient de l'interpolation de Lagrange du second membre. Pour la même raison, la méthode de dualité d'Aubin-Nitsche ne donne pas de meilleur résultat : le Théorème 4.2 "améliore" (10.7) en

$$\| u - u_N \|_{L^2(\Omega)} \leq c\, (N^{-2-\rho} \| u \|_{H^{\rho+2}(\Omega)} + N^{-\rho} \| f \|_{H^\rho(\Omega)}).$$

ii) Par contre, dans le cas d'une donnée f qui est $\mathscr{C}^\infty$ jusqu'au bord de Ω, on a une convergence d'ordre infini puisque le comportement (en N) de l'erreur est plus rapide que n'importe quelle puissance négative du paramètre N de discrétisation.

iii) On peut obtenir une estimation de l'erreur où cette partition de N en N_1 et N_2 n'intervient pas en conduisant l'estimation d'erreur de façon légèrement différente à partir de l'inégalité (8.16). On utilisera alors l'estimation du Théorème 6.9 directement sur $f^k J_k$ qui par hypothèse est dans $H^\rho(\Lambda^2)$.

∎

10.b. Sur un carré (méthode spectrale)

Pour estimer l'erreur de discrétisation du problème de Dirichlet sur un carré par la méthode spectrale, on se base sur le Théorème 7.6. Concernant les termes d'erreur qui viennent de f, on a encore une estimation de l'erreur comme en (10.4). Par contre, comme $\rho > 1$, la solution u n'est pas dans $H^{\rho+2}(\Lambda^2)$ en général, mais dans $H^{3-\varepsilon}(\Lambda^2)$ pour tout $\varepsilon > 0$ (cf Corollaire 9.7). Si on s'en tient là, on obtient l'estimation d'erreur

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c\, (N^{\varepsilon-2} \| u \|_{H^{3-\varepsilon}(\Lambda^2)} + N^{-\rho} \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)}), \tag{10.8}$$

qui pour $\rho \geq 2$, plafonne à

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c_\varepsilon \, N^{\varepsilon-2} \, \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)}. \tag{10.9}$$

Pour $\rho \geq 2$, on obtient un meilleur résultat si on tire avantage de la décomposition (9.8) à chacun des coins du carré. En effet, on tire facilement du Théorème 9.6, que si ρ n'est pas un entier impair, et si $f \in H^\rho(\Lambda^2)$, il existe des constantes $c_{j,\ell}$ telles que :

$$\Lambda^2 \ni (x,y) \;\longmapsto\; u_{\rm reg}(x,y) := u - \sum_{j=1}^{4} \sum_{\ell=1}^{L} c_{j,\ell} \, W^{(j)}_{\pi/2,\ell} \in H^{\rho+2}(\Lambda^2), \tag{10.10}$$

où $W^{(j)}_{\pi/2,\ell}$ est la solution singulière $W_{\pi/2,\ell}$ correspondant au sommet $\boldsymbol{a}_j$. D'où

$$\begin{aligned} &\inf_{v_N \in X_{N-1}} \| u - v_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq \\ &\qquad \inf_{v_N \in X_{N-1}} \| u_{\rm reg} - v_N \|_{H^1(\Lambda^2)} + \sum_{j=1}^{4} \sum_{\ell=1}^{L} |c_{j,\ell}| \inf_{v_N \in X_{N-1}} \| W^{(j)}_{\pi/2,\ell} - v_N \|_{H^1(\Lambda^2)}. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Pour le terme régulier on obtient l'estimation "optimale"

$$\inf_{v_N \in X_{N-1}} \| u_{\rm reg} - v_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c \, N^{-1-\rho} \, \| u_{\rm reg} \|_{H^{\rho+2}(\Lambda^2)},$$

qui, combinée à l'estimation que l'on tire de la démonstration du Théorème 9.6

$$\| u_{\rm reg} \|_{H^{\rho+2}(\Lambda^2)} + \sum_{j=1}^{4} \sum_{\ell=1}^{L} |c_{j,\ell}| \;\leq\; c \, \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)}, \tag{10.12}$$

donne

$$\inf_{v_N \in X_{N-1}} \| u_{\rm reg} - v_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c \, N^{-1-\rho} \, \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)}. \tag{10.13}$$

Il reste à estimer les erreurs sur les solutions singulières. Pour cela, on va utiliser le Théorème 6.7. On a besoin de savoir pour quels τ les $W^{(j)}_{\pi/2,\ell}$ appartiennent à $H^\tau_\star(\Lambda^2)$. Utilisant le Lemme 6.4, on obtient pour tout $j = 1, 2, 3, 4$:

$$W^{(j)}_{\pi/2,\ell} \in H^\tau_\star(\Lambda^2) \quad \Longleftrightarrow \quad \tau < 2(1 + 2\ell). \tag{10.14}$$

Avec le Théorème 6.7, cela donne, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\| W^{(j)}_{\pi/2,\ell} - \Pi_N W^{(j)}_{\pi/2,\ell} \|_{H^1(\Lambda^2)} \;\leq\; N^{-4\ell+\varepsilon} \, \| W_{\pi/2,\ell} \|_{H^{2+4\ell-\varepsilon}_\star(\Lambda^2)}. \tag{10.15}$$

Mais ce n'est pas encore tout à fait fini, car $\Pi_N W^{(j)}_{\pi/2,\ell}$ n'a pas de raison de s'annuler sur le bord du carré. Par contre, comme $W^{(j)}_{\pi/2,\ell}$ s'annule, lui, sur le bord du carré, prenant la trace γ sur $\partial\Lambda^2$ de la différence $W^{(j)}_{\pi/2,\ell} - \Pi_N W^{(j)}_{\pi/2,\ell}$, on tire de (10.15)

$$\| \gamma \Pi_N W^{(j)}_{\pi/2,\ell} \|_{H^{1/2}(\partial\Lambda^2)} \;\leq\; c \, N^{-4\ell+\varepsilon} \, \| W_{\pi/2,\ell} \|_{H^{2+4\ell-\varepsilon}_\star(\Lambda^2)}, \tag{10.16}$$

où $H^{1/2}(\partial\Lambda^2)$ est l'espace des traces de $H^1(\Lambda^2)$ sur $\partial\Lambda^2$, caractérisé dans la Remarque 3.8.

On s'appuie alors sur le résultat suivant

Lemme 10.3. *Il existe un opérateur de relèvement de traces $\mathcal{R} : g \mapsto w$ continu de $H^{1/2}(\partial\Lambda^2)$ dans $H^1(\Lambda^2)$ qui conserve les polynômes, au sens suivant : soit $g_{N,m} \in \mathbb{P}_N(\Gamma_m)$ pour $m = 1, 2, 3, 4$, quatre polynômes satisfaisant les conditions de raccord (3.19) et soit g_N la fonction définie sur $\partial\Lambda^2$) par $g_{N,m}$ sur Γ_m ; alors $w_N := \mathcal{R}g_N$ appartient à $\mathbb{P}_{N+2}(\Lambda^2)$ et on a l'estimation*

$$\| w_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c \| g_N \|_{H^{1/2}(\partial\Lambda^2)}. \tag{10.17}$$

Posant $v_N^{j,\ell} = \Pi_N W^{(j)}_{\pi/2,\ell} - w_N$, où w_N est le relèvement ci-dessus de la trace de $\Pi_N W^{(j)}_{\pi/2,\ell}$, on tire de (10.15) – (10.17) :

$$\| W^{(j)}_{\pi/2,\ell} - v_N^{j,\ell} \|_{H^1(\Lambda^2)} \ \leq \ N^{-4\ell+\varepsilon} \| W_{\pi/2,\ell} \|_{H^{2+4\ell-\varepsilon}_\star(\Lambda^2)}. \tag{10.18}$$

avec, cette fois-ci, $v_N^{j,\ell} \in X_{N-1}$.

Les expressions (10.11), (10.13), (10.18) combinées avec, d'une part le Théorème 7.6 pour l'estimation H^1 et d'autre part le Théorème 4.2 pour l'estimation L^2 donnent une démonstration du

Théorème 10.4. *Soit $f \in H^\rho(\Lambda^2)$ avec $\rho > 1$. Soit u la solution du problème de Dirichlet (4.2) sur Λ^2 et, pour N entier ≥ 2 soit u_N la solution du problème (7.11) discrétisé par méthode spectrale. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$ on a l'estimation de l'erreur :*

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c \left(N^{-\rho} \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)} + c_\varepsilon \, N^{\varepsilon-4} \Big(\sum_{j=1}^{4} \sum_{\ell=1}^{L} |c_{j,\ell}| \Big) \right) \tag{10.19}$$

et

$$\| u - u_N \|_{L^2(\Lambda^2)} \leq c \left(N^{-\rho} \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)} + c_\varepsilon \, N^{\varepsilon-5} \Big(\sum_{j=1}^{4} \sum_{\ell=1}^{L} |c_{j,\ell}| \Big) \right), \tag{10.20}$$

où les $c_{j,\ell}$ sont les coefficients intervenant dans la décomposition (10.10) et $c_\varepsilon > 0$ ne dépend pas de f — voir Remarque ci-dessous.

Remarque 10.5.

i) En fait c_ε est égal au sup sur $\ell = 1, \ldots, L$ des normes $\| W_{\pi/2,\ell} \|_{H^{6-\varepsilon}_\star(\Lambda^2)}$. Si, plus précisément, on fait le calcul de $\| W_{\pi/2,\ell} \|_{H^{2+4\ell-\varepsilon}_\star(\Lambda^2)}$, on obtient un comportement en $\varepsilon^{-3/2}$. Donc (10.18) donne pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\| W^{(j)}_{\pi/2,\ell} - v_N^{j,\ell} \|_{H^1(\Lambda^2)} \ \leq \ C \, \frac{N^{-4\ell+\varepsilon}}{\varepsilon^{3/2}}.$$

Prenant le minimum pour $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\| W^{(j)}_{\pi/2,\ell} - v_N^{j,\ell} \|_{H^1(\Lambda^2)} \ \leq \ C \, N^{-4\ell} \, \log^{3/2} N.$$

D'où finalement l'estimation de l'erreur

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c \left(N^{-\rho} \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)} + \sum_{\ell=1}^{L} N^{-4\ell} \log^{3/2} N \Big(\sum_{j=1}^{4} |c_{j,\ell}| \Big) \right), \tag{10.21}$$

et

$$\| u - u_N \|_{L^2(\Lambda^2)} \leq c \left(N^{-\rho} \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)} + \sum_{\ell=1}^{L} N^{-1-4\ell} \log^{3/2} N \Big(\sum_{j=1}^{4} |c_{j,\ell}| \Big) \right). \tag{10.22}$$

ii) Combinée avec l'estimation (10.12) les estimations ci-dessus donnent

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c \max \Big(N^{-\rho},\ N^{-4} \log^{3/2} N \Big) \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)}$$

et

$$\| u - u_N \|_{L^2(\Lambda^2)} \leq c \max \Big(N^{-\rho},\ N^{-5} \log^{3/2} N \Big) \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)}.$$

iii) L'estimation (10.21) plafonne pour $s \geq 6$. Mais on a gagné 2 puissances de N par rapport à (10.9).

■

10.c. Sur un polygone curviligne

Soit ω_Ω la plus grande des ouvertures ω_j du domaine Ω. On tire du Théorème 9.10 le résultat suivant de régularité :

Corollaire 10.6. *Si $f \in H^\rho(\Omega)$ pour un réel $\rho \geq -1$ alors u appartient à $H^\tau(\Omega)$ pour tout τ satisfaisant*

$$\tau \leq \rho + 2 \qquad et \qquad \tau < 1 + \frac{\pi}{\omega_\Omega}.$$

Si on se base sur ce résultat de régularité et que l'on utilise les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 10.1, on obtient l'estimation de l'erreur — cf (10.7) :

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \leq c \, (N^{\varepsilon - \pi/\omega_\Omega} \| u \|_{H^{1-\varepsilon+\frac{\pi}{\omega_\Omega}}(\Omega)} + N^{-\rho} \| f \|_{H^\rho(\Omega)}). \tag{10.23}$$

Si on fait une analyse plus serrée en se basant sur les décompositions (9.15) au voisinage de chaque coin de Ω et en utilisant comme dans la démonstration du Théorème 10.4,

i) pour la partie régulière : le projecteur $\mathcal{I}_N$,

ii) pour les solutions singulières : le projecteur Π_N assorti de corrections pour les traces extérieures et les raccords intérieurs entre éléments contigus,

on obtient le résultat suivant :

Théorème 10.7. *Soit Ω un polygone curviligne. Soit $f \in H^\rho(\Omega)$ avec $\rho > 1$. Soit u la solution du problème de Dirichlet* (4.2) *sur Ω et, pour N entier ≥ 2 soit u_N la solution du problème* (4.8) *discrétisé par éléments spectraux — X_N est construit selon* (8.8) *et les*

formules de quadrature selon (8.10) *et* (8.14). *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$ *on a l'estimation de l'erreur :*

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Omega)} \leq c\ (N^{-\rho} + c_\varepsilon\, N^{\varepsilon - 2\pi/\omega_\Omega}) \| f \|_{H^\rho(\Omega)} \tag{10.24}$$

et

$$\| u - u_N \|_{L^2(\Omega)} \leq c\ (N^{-\rho} + c_\varepsilon\, N^{\varepsilon - 1 - 2\pi/\omega_\Omega}) \| f \|_{H^\rho(\Omega)}. \tag{10.25}$$

Remarque 10.8.

i) Dans l'estimation (10.24), on a gagné $N^{-\pi/\omega_\Omega}$ par rapport à (10.23).

ii) Comme dans le cas du carré, on peut améliorer les estimations (10.24) et (10.25) en passant du terme en N^ε à un terme logarithmique. Par exemple, l'estimation (10.24) s'améliore en :

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c \max\left(N^{-\rho},\ N^{-2\pi/\omega_\Omega}\ \log^{1/2} N\right) \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)},$$

si π/ω_Ω n'est pas entier, et en :

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c \max\left(N^{-\rho},\ N^{-2\pi/\omega_\Omega}\ \log^{3/2} N\right) \| f \|_{H^\rho(\Lambda^2)},$$

sinon.

■

Eléments de preuve du Théorème 10.7. Après tout ce que nous avons vu jusqu'à présent, il nous suffit d'estimer pour chaque solution singulière $W^{(j)}_{\omega_j,\ell}$ son erreur d'approximation par un élément de X_N.

C'est pourquoi nous posons $u = W^{(j)}_{\omega_j,\ell}$. Dans toute la suite τ désigne un réel tel que

$$u^k \in H^\tau_\star(\Lambda^2), \qquad k = 1, \ldots, K.$$

On déduit du Lemme 6.4 que la condition nécessaire et suffisante sur τ est — cf (10.14),

$$\tau < 2(1 + \frac{\ell\pi}{\omega_j}).$$

On désigne par γu la trace de u sur les bords de Ω et les interfaces entre les Ω_k. On introduit $\mathcal{R}(\gamma u)$ comme la fonction définie sur Ω par

$$\mathcal{R}(\gamma u) = (\mathcal{R} g^k) \circ \mathscr{F}_k^{-1}, \qquad k = 1, \ldots, K,$$

où $\mathcal{R} g^k$ désigne le relèvement au carré Λ^2 de la trace $g^k := \gamma u^k$ sur le bord du carré introduit dans le Lemme 10.3. De la structure de u et de propriétés supplémentaires de régularité de $\mathcal{R}$ dans des espaces à poids — cf [4, Ch. 3], on déduit que $\mathcal{R}(\gamma u^k)$ est dans $H^\tau_\star(\Lambda^2)$.

On pose alors $v = u - \mathcal{R}(\gamma u)$. La fonction v est continue sur $\overline{\Omega}$ et pour tout k, v^k est dans $H^\tau_\star(\Lambda^2) \cap H^1_0(\Lambda^2)$. On définit alors v_N dans Y_N par

$$v^k_N = \Pi_N v^k, \qquad k = 1, \ldots, K,$$

et on a

$$\| v^k - v_N^k \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c\, N^{2-\tau}.$$

Comme on l'avait fait sur le carré, on introduit w_N l'élément de Y_N défini par $w_N^k = \mathcal{R}(\gamma v_N^k)$; alors on a, puisque $v^k = 0$ sur $\partial\Lambda^2$,

$$\| w_N^k \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c \| \gamma(v^k - v_N^k) \|_{H^{1/2}(\partial\Lambda^2)} \leq c \| v^k - v_N^k \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c\, N^{2-\tau}.$$

Comme, pour tout k, $v_N^k - w_N^k \in H_0^1(\Lambda^2)$, on en déduit que $v_N - w_N$ est dans X_N. De plus

$$\| v - (v_N - w_N) \|_{H^1(\Omega)} \leq c\, N^{2-\tau}.$$

Il nous reste à approcher $\mathcal{R}(\gamma u)$. Pour cela, on construit pour chaque k, une fonction polynômiale g_N^k sur $\partial\Lambda^2$ qui satisfait les conditions de raccord (3.19) et l'estimation

$$\| g^k - g_N^k \|_{H^{1/2}(\partial\Lambda^2)} \leq c\, N^{2-\tau}.$$

On construit par exemple sur chaque côté du carré (on omet ici k et m)

$$g_N = \pi_N g - (g - \pi_N g)(-1)\, p_- - (g - \pi_N g)(+1)\, p_+$$

où $p_-(\zeta) = (1-\zeta)/2$ et $p_+(\zeta) = (1+\zeta)/2$.

Les inégalités de Gagliardo-Nirenberg et (3.21) impliquent que

$$\| g^k - g_N^k \|_{H^{1/2}(\partial\Lambda^2)} \;\leq\; c \Big(\sum_{m=1}^{4} \| g^k - \pi_N g^k \|_{L^2(\Gamma_m)} \Big)^{1/2} \times \Big(\sum_{m=1}^{4} \| g^k - \pi_N g^k \|_{H^1(\Gamma_m)} \Big)^{1/2}.$$

Comme $g^k \in H_\star^{\tau-1}(\Gamma_m)$ (Lemme 5.7), les Théorèmes 5.9 et 5.10 permettent de déduire

$$\| g^k - g_N^k \|_{H^{1/2}(\partial\Lambda^2)} \leq c\, N^{2-\tau},$$

d'où

$$\| \mathcal{R} g^k - \mathcal{R} g_N^k \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c\, N^{2-\tau}.$$

Définissant alors G_N par $G_N^k = \mathcal{R}(g_N^k)$, on a : $G_N \in X_N$ et l'estimation

$$\| \mathcal{R}(\gamma u) - G_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c\, N^{2-\tau}.$$

Posant enfin $u_N = (v_N - w_N) + G_N$ on a bien construit un élément de X_N satisfaisant

$$\| u - u_N \|_{H^1(\Lambda^2)} \leq c\, N^{2-\tau}.$$

■

Chapitre 11.

Formules de quadrature

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode rapide et peu coûteuse pour le calcul des nœuds et des poids présents dans les formules de Gauss Legendre (7.1) et de Gauss-Lobatto Legendre (7.2). Nous attirons l'attention sur le fait que cette méthode permet aussi de répondre à la même question concernant les polynômes de Jacobi (qui sont des bases de polynômes orthogonaux pour d'autres mesures), en particulier elle s'avère efficace pour le calcul des points et les poids de Gauss-Radau Legendre. On réfère à [9] et [12] pour l'analyse numérique de ces problèmes d'intégration numérique.

Cette méthode est présentée dans le cas monodomaine, cependant une remarque sur son extension aux éléments spectraux sera faite à la fin du chapitre.

11.a. Calcul des points et de poids de Gauss-Legendre

Les points de Gauss-Legendre, rappelons-le, sont les racines du polynôme L_N, on a déjà montré dans le Théorème 7.1 que celles-ci sont comprises entre -1 et 1. Pour les calculer la première idée consiste à résoudre justement l'équation définie par $L_N(x) = 0$, par exemple en utilisant la méthode de Newton-Raphson. L'expérience montre qu'en plus du coût élevé quand N devient grand (≥ 20 environ), un problème de précision se pose, dû en particulier à la répartition même de ces racines qu'on décrira par la suite. D'où l'importance de l'algorithme ci-dessous.

Rappelons la formule de récurrence vérifiée par les polynômes de Legendre. On a :

$$L_0(\zeta) \;=\; 1 \quad \text{et} \quad L_1(\zeta) \;=\; \zeta$$

$$(n+1)L_{n+1}(\zeta) \;=\; (2n+1)\zeta L_n(\zeta) - nL_{n-1}(\zeta), \quad n > 0. \tag{11.1}$$

A partir de cette relation de récurrence, on peut en réécrire une équivalente pour les polynômes de Legendre normés $L_n^* = \frac{L_n}{\sqrt{n+1/2}}$

$$\zeta L_n^*(\zeta) = \beta_{n+1} L_{n+1}^*(\zeta) + \beta_n L_{n-1}^*(\zeta) \tag{11.2}$$

avec

$$\beta_n = \frac{n}{\sqrt{4n^2-1}}.$$

Cette relation de récurrence écrite pour tout $n > 0$ est équivalente à

$$\zeta \begin{pmatrix} L_0^* \\ L_1^* \\ ... \\ L_{N-2}^* \\ L_{N-1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & ... & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & \beta_{N-1} \\ 0 & 0 & ... & \beta_{N-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_0^* \\ L_1^* \\ ... \\ L_{N-2}^* \\ L_{N-1}^* \end{pmatrix} + \beta_N \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \\ L_N^* \end{pmatrix}.$$

Les points de Gauss ζ_j sont donc les valeurs propres de la matrice M définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & ... & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & \beta_{N-1} \\ 0 & 0 & ... & \beta_{N-1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{11.3}$$

cette matrice M est de façon évidente tridiagonale symétrique et à diagonale nulle. Pour sa diagonalisation on peut utiliser la factorisation QR par la méthode de Givens-Householder [7].

Pour le calcul des poids ω_j, $j = 1, \ldots, N$, nous allons utiliser la formule de Christoffel-Darboux suivante (dont la démonstration se fait par récurrence).

Pour tout $n \geq 0$, $\forall \zeta \in \Lambda, \forall \mu \in \Lambda$

$$L_0^*(\zeta)L_0^*(\mu) + ... + L_n^*(\zeta)L_n^*(\mu) = \frac{k_n^*}{k_{n+1}^*} \frac{L_{n+1}^*(\zeta)L_n^*(\mu) - L_{n+1}^*(\mu)L_n^*(\zeta)}{\zeta - \mu} \tag{11.4}$$

où k_n^* désigne le coefficient du monôme de degré n de $L_n^*(\zeta)$. En particulier pour $\mu = \zeta_j$ et $n = N - 1$ on a

$$L_0^*(\zeta)L_0^*(\zeta_j) + ... + L_{N-1}^*(\zeta)L_{N-1}^*(\zeta_j) = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} \frac{L_N^*(\zeta)L_{N-1}^*(\zeta_j)}{\zeta - \zeta_j}. \tag{11.5}$$

Cette relation une fois intégrée nous donne

$$1 = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} L_{N-1}^*(\zeta_j) \int_{-1}^{1} \frac{L_N^*(\zeta)}{\zeta - \zeta_j} \, d\zeta.$$

En remarquant que $(\zeta - \zeta_j)^{-1} L_N^*(\zeta)$ est dans $\mathbb{P}_{N-1}(\Lambda)$, on peut calculer cette intégrale par la formule de quadrature et on obtient :

$$1 = \frac{k_{N-1}^*}{k_N^*} L_{N-1}^*(\zeta_j) L_N^{*\prime}(\zeta_j) \, \omega_j, \tag{11.6}$$

En faisant tendre dans (11.5) ζ vers ζ_j et en identifiant avec (11.6) on trouve

$$\omega_j = \frac{1}{L_0^{*2}(\zeta_j) + ... + L_{N-1}^{*2}(\zeta_j)} \tag{11.7}$$

qui n'est rien d'autre que l'inverse du carré de la norme l^2 du vecteur propre associé à ζ_j. Soit alors X_j le vecteur propre de la matrice M associé à la valeur propre ζ_j, qui dans la pratique est normé, et soit x_{j0} sa première coordonnée. On a alors

$$x_{j0} = \frac{L_0^*(\zeta_j)}{(L_0^{*2}(\zeta_j) + ... + L_{N-1}^{*2}(\zeta_j))^{1/2}} \tag{11.8}$$

c'est-à-dire

$$\omega_j = 2x_{j0}^2 \tag{11.9}$$

On remarquera que si on "enlève les étoiles" de (11.6) on retrouve l'expression classique du poids de Gauss c'est-à-dire

$$\omega_j \ = \ \frac{2}{NL'_N(\zeta_j)L_{N-1}(\zeta_j)}.$$

11.b. Calcul des points et des poids de Gauss-Lobatto Legendre

On passe maintenant au calcul des nœuds et des poids de la formule de Gauss-Lobatto Legendre, préférée à la formule de Gauss Legendre dans l'approximation des problèmes aux limites, à cause de la présence de -1 et 1 parmi ses points. Ceci est bien utile pour l'expression des conditions aux limites.

Soit N un entier > 0 fixé. On pose $\xi_0 = -1$ et $\xi_N = 1$, on s'intéresse au calcul des $N-1$ points ξ_j et $N+1$ réels positifs ρ_j présents dans la formule de quadrature de Gauss-Lobatto (7.2). Là aussi nous allons exhiber une matrice tridiagonale et à diagonale nulle, dont les valeurs propres seront les points ξ_j. Pour cela nous allons établir une relation de récurrence pour les polynômes L'_n qui, rappelons-le, sont orthogonaux pour le produit scalaire $(1-\zeta^2)\,d\zeta$ et vérifient pour tout $n > 0$:

$$\int_{-1}^{1} {L'_n}^2(\zeta)\, d\zeta = n(n+1)$$

et

$$L'_n(1) = n(n+1)/2.$$

A partir de la relation de récurrence (11.1) vérifiée par les $(L_n)_n$ on a

$$(n+1)L'_{n+1}(\zeta) = (2n+1)\zeta L'_n(\zeta) + (2n+1)L_n(\zeta) - nL'_{n-1}(\zeta). \tag{11.10}$$

En utilisant l'égalité suivante

$$(2n+1)L_n(\zeta) = L'_{n+1}(\zeta) - L'_{n-1}(\zeta) \tag{11.11}$$

on obtient

$$nL'_{n+1}(\zeta) \ = \ (2n+1)\zeta L'_n(\zeta) - (n+1)L'_{n-1}. \tag{11.12}$$

Comme pour les points de Gauss, nous allons déduire de (11.12) une relation équivalente pour les polynômes normalisés pour le produit scalaire $\int uv\,(1-\zeta^2)\,d\zeta$

$$J_n^*(\zeta) = L'_{n+1}(\zeta)\sqrt{\frac{n+3/2}{(n+1)(n+2)}}\,.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} &n\sqrt{\frac{(n+1)(n+2)}{n+3/2}}\;J_n^*(\zeta) \\ &\qquad = (2n+1)\sqrt{\frac{n(n+1)}{n+1/2}}\zeta J_{n-1}^*(\zeta) - (n+1)\sqrt{\frac{n(n-1)}{n-1/2}}J_{n-2}^*(\zeta). \end{aligned} \tag{11.13}$$

Cette dernière relation prouve que les points de Gauss-Lobatto sont les valeurs propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & ... & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & \gamma_{N-2} \\ 0 & 0 & ... & \gamma_{N-2} & 0 \end{pmatrix} \tag{11.14}$$

avec

$$\gamma_n \;= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n(n+2)}{(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}}, \qquad 1 \le n \le N-2. \tag{11.15}$$

Cette matrice est encore tridiagonale symétrique et à diagonale nulle, et les poids $(\rho_j)_{j=1,...,N-1}$ peuvent être calculés à partir des vecteurs propres de cette matrice par la formule (11.8). Enfin, les poids ρ_0 et ρ_N sont donnés par

$$\rho_0 \;=\; \rho_N \;= \frac{2}{N(N+1)}\,.$$

Remarque 11.1. On peut montrer que :
• les points de Gauss-Lobatto ainsi que les points de Gauss sont répartis en $\mathscr{O}(\frac{1}{N^2})$ aux bords et en $\mathscr{O}(\frac{1}{N})$ au centre.
• $\forall\; j = 1, ..., N-1,\;\; \zeta_j < \xi_j < \zeta_{j+1}$. ■

Le tableau suivant donne les valeurs des points et des poids de Gauss-Lobatto pour $N = 5$ et de Gauss pour $N = 6$.

ξ_j	ρ_j	ζ_j	ω_j
−1.00000000000000	0.06666666666667	−0.93246951420315	0.17132449237917
−0.76505532392946	0.37847495629784	−0.66120938646626	0.36076157304813
−0.28523151648064	0.55485837703548	−0.23861918608319	0.46791393457261
0.28523151648064	0.55485837703548	0.23861918608319	0.46791393457269
0.76505532392946	0.37847495629784	0.66120938646626	0.36076157304813
1.00000000000000	0.06666666666667	0.93246951420315	0.17132449237917

Dans la section suivante, nous généralisons cette méthode au calcul des nœuds et des poids présents dans la formule de quadrature de Gauss-Jacobi.

11.c. Polynômes de Jacobi

Soit $\alpha > -1$, on définit la fonction poids ρ_α par : $\forall \zeta \in \Lambda$, $\rho_\alpha(\zeta) = (1-\zeta^2)^\alpha$, qui permet de définir le produit scalaire associé :

$$(\varphi, \psi)_\alpha = \int_{-1}^{1} \varphi(\zeta)\psi(\zeta)\,(1-\zeta^2)^\alpha \, d\zeta. \tag{11.16}$$

Evidemment, pour $\alpha = 0$ on retrouve le produit scalaire ordinaire.

La famille des polynômes de Jacobi (J_n^α) est la famille des polynômes orthogonaux pour ce produit scalaire et où J_n^α est de degré n et vérifie :

$$J_n^\alpha(\pm 1) = (\pm 1)^\alpha \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)} \tag{11.17}$$

où Γ désigne la fonction Gamma d'Euler [12, Ch. 1] :

$$\Gamma(x) = \int_{-1}^{\infty} \exp(-t)\, t^x \, \frac{dt}{t}. \tag{11.18}$$

Les propriétés de la fonction Γ permettent d'écrire des relations entre les polynômes de Jacobi, en particulier on peut montrer :

$$(n+1)(n+2\alpha+1)J_{n+1}^\alpha(\zeta) = (2n+2\alpha+1)(n+\alpha+1)\zeta J_n^\alpha(\zeta) - (n+\alpha)(n+\alpha+1)J_{n-1}^\alpha(\zeta) \tag{11.19}$$

avec

$$J_0^\alpha = 1 \quad \text{et} \quad J_1^\alpha = (\alpha+1)\zeta \tag{11.20}$$

On notera que pour $\alpha = 0$ on retrouve les polynômes de **Legendre**. Pour $\alpha = -1/2$, on obtient les polynômes de Tchebycheff et pour $\alpha = 1$ les dérivés des polynômes de Legendre.

Enfin, il est classique de montrer, *cf* [6], que :

- les polynômes $(J_n^\alpha)'_{n\geq 1}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{\alpha+1}$
- on a la relation

$$(J_n^\alpha)' = \frac{n+2\alpha+1}{2} J_{n-1}^{\alpha+1}.$$

Formule de Gauss-Jacobi

Comme pour les polynômes de Legendre on peut aussi écrire une formule de quadrature utilisant les polynômes de Jacobi :

Proposition 11.2. *Soit N un entier > 0 fixé. Il existe un unique ensemble de N points (τ_j^α) et un unique ensemble de N réels (ω_j^α), tels que l'égalité suivante ait lieu pour tout φ dans $\mathbb{P}_{2N-1}(\Lambda)$:*

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\zeta)\, \rho_\alpha \, d\zeta = \sum_{j=1}^{N} \varphi(\tau_j^\alpha)\omega_j^\alpha \tag{11.21}$$

Les τ_j^α sont les zéros du polynôme J_N^α et les ω_j^α sont tous positifs.

Calcul des points de Gauss et des poids associés

A partir de la relation de récurrence écrite sur les Jacobi $J_N^{\alpha *}$ normés pour le produit scalaire $(\cdot,\cdot)_\alpha$, on montre que pour tout $n > 0$

$$\zeta J_n^{\alpha *} = \beta_n J_{n-1}^{\alpha *} + \beta_{n+1} J_{n+1}^{\alpha *} \tag{11.22}$$

avec

$$\beta_0 = 0 \qquad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}} \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \sqrt{\frac{n(n+2\alpha)}{4(n+\alpha)^2-1}}. \tag{11.23}$$

On voit bien que les points de Gauss, qui sont les racines de $J_N^\alpha = 0$, sont aussi les valeurs propres de la matrice symétrique, tridiagonale, à diagonale nulle et dont le terme général est β_n. Pour les poids on utilisera la même remarque que pour le cas Legendre c'est-à-dire que si X_j^α est le vecteur propre normé associé à la valeur propre τ_j et si on désigne par x_{j0}^α sa première coordonnée alors on a

$$\omega_j^\alpha = \|J_0^\alpha\|^2 (x_{j0}^\alpha)^2. \tag{11.24}$$

11.d. Cas des polynômes de Tchebycheff

Ce sont les polynômes de degré n définis explicitement pour tout $n \geq 0$ par

$$T_n(\zeta) = \cos\left(n(\arccos\zeta)\right), \quad -1 \leq \zeta \leq 1. \tag{11.25}$$

Ces polynômes vérifient la relation de récurrence :

$$T_0(\zeta) \;=\; 1 \quad \text{et} \quad T_1(\zeta) \;=\; \zeta \tag{11.26}$$

$$T_{n+1} \;=\; 2\zeta T_n(\zeta) - T_{n-1}(\zeta), \;\; n > 0. \tag{11.27}$$

Les points de Gauss-Tchebycheff et les poids sont donnés par

$$\zeta_j = \cos\left(\frac{(N-j+\frac{1}{2})\pi}{N}\right), \;\; 1 \leq j \leq N \;\text{ et }\; \omega_j = \frac{\pi}{N}, \tag{11.28}$$

quant aux points et poids de Gauss-Lobatto-Tchebycheff, ils s'écrivent :

$$\xi_j \;=\; \cos\left(\frac{(N-j)\pi}{N}\right),\;\; 0 \le j \le N \quad \text{et} \quad \begin{cases} \rho_0 = \rho_N = \dfrac{\pi}{2N} \\ \rho_j = \dfrac{\pi}{N},\; 1 \le j \le N-1. \end{cases} \tag{11.29}$$

De plus pour tout $n \geq 0$ on a

$$|T_n(\zeta)| \leq 1, \quad -1 \leq \zeta \leq 1$$

et

$$\int_{-1}^{1} T_n^2(\zeta)\, \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = c_n \frac{\pi}{2}$$

où

$$c_n \;=\; \begin{cases} 2 & \text{si } k = 0 \\ 1 & \text{si } k \geq 1. \end{cases}$$

11.e. Cas des éléments spectraux

Soit $\Omega \;=\; \bigcup_{k=1}^{K} \Lambda_k$ avec $\Lambda_k =]a_k, a_{k+1}[$, alors pour tout $k = 1, \ldots, K$ les nœuds et les poids Gauss-Lobatto sont :

$$x_i^k = a_k + (\xi_i + 1)(a_{k+1} - a_k)/2 \quad \text{et} \quad \rho_{i,k} = (a_{k+1} - a_k)\, \rho_i/2. \tag{11.30}$$

La formule de Gauss-Lobatto s'écrit :

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}) \text{ et } \forall \psi \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}), \qquad (\varphi, \psi)_h = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i^k)\, \psi(x_i^k)\, \rho_{i,k}. \tag{11.31}$$

Le paramètre de discrétisation h est alors relatif au couple (K, N).

On peut définir de façon analogue les nœuds, poids et formules de quadrature de type Gauss, mais nous ne les utiliserons pas dans le cadre de cet exposé.

Chapitre 12.

Ecriture du système algébrique

Nous allons donner l'expression des polynômes de Lagrange ainsi que des matrices de dérivation première et seconde dont nous aurons besoin pour écrire le système algébrique à inverser

12.a. Polynômes de Lagrange

On désigne par h_i le polynôme de Lagrange caractéristique du i^{eme} point de Gauss-Lobatto. En utilisant les propriétés des polynômes de Legendre, on écrit pour tout x dans Λ:

$$h_i(\zeta) = -\frac{(1-\zeta^2)L'_N(\zeta)}{N(N+1)L_N(\xi_i)(\zeta-\xi_i)}, \tag{12.1}$$

et qui, en dérivant donne

$$\forall \zeta \neq \xi_i, \qquad h'_i(\zeta) = \frac{L_N(\zeta)}{L_N(\xi_i)(\zeta-\xi_i)} + \frac{(1-\zeta^2)L'_N(\zeta)}{N(N+1)L_N(\xi_i)(\zeta-\xi_i)^2}. \tag{12.2}$$

De plus on vérifie que pour $\zeta = \xi_i$:

$$\forall i = 1, \ldots, N-1, \qquad h'_i(\xi_i) = 0 \tag{12.3}$$

et

$$h'_0(\xi_0) = -\frac{N(N+1)}{4} \qquad h'_N(\xi_N) = \frac{N(N+1)}{4}\,. \tag{12.4}$$

La dérivée seconde de h_i est, pour $\zeta \neq \xi_i$:

$$h''_i(\zeta) = \frac{L'_N(\zeta)}{L_N(\xi_i)(\zeta-\xi_i)} - 2\frac{L_N(\zeta)}{L_N(\xi_i)(\zeta-\xi_i)^2} - 2\frac{(1-\zeta^2)L'_N(\zeta)}{N(N+1)L_N(\xi_i)(\zeta-\xi_j)^3}\,. \tag{12.5}$$

12.b. Système algébrique à résoudre

On s'intéresse maintenant à l'écriture du système algébrique issu de la discrétisation du problème de Laplace (4.1) sur le carré $\Omega = \Lambda^2$. On suppose donc connues les valeurs de

f aux points de $\Xi_N \bigcap \Omega$ et les valeurs de la fonction g aux points de $\Xi_N \bigcap \partial\Omega$. On notera respectivement ces valeurs f_{ij} et g_{ij}.

Notre problème discrétisé est alors le suivant :

$$\begin{cases} \forall v_N \in \mathbb{P}_N^0(\Omega), \quad a_N(u_N, v_N) = (f, v_N)_N \\ u_N \in \mathbb{P}_N(\Omega) \quad \text{et} \quad u_N = g \text{ sur } \Xi_N \bigcap \partial\Omega. \end{cases} \tag{12.6}$$

Pour $g = 0$, on retrouve bien le problème (7.11).

Il s'agit donc de calculer u_{ij}, les valeurs $u_N \in \mathbb{P}_N(\Omega)$ aux nœuds (ξ_i, ξ_j) de Ξ_N, c'est-à-dire

$$u_N(x, y) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} u_{ij}\, h_i(x) h_j(y). \tag{12.7}$$

On note $\mathcal{L}$ l'ensemble des couples $(i, j), 1 \leq i, j \leq N-1$ correspondants aux points (ξ_i, ξ_j) dans Ω, et on désigne par $\mathcal{M}$ l'ensemble des (i, j) tels que (ξ_i, ξ_j) appartienne à $\partial\Omega$.

Les valeurs de $u_{ij}, (i, j) \in \mathcal{M}$ sont données par les conditions aux limites, les inconnues réelles du problème sont donc les u_{ij} valeurs de u_N aux nœuds (ξ_i, ξ_j) pour $(i, j) \in \mathcal{L}$.

En notant que les $(h_i(x)h_j(y))_{1 \leq i,j \leq N-1}$ forment une base de $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$, la formulation variationnelle discrète s'écrit de la façon suivante :

$$\sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} u_{ij}\, a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s) = f(\xi_r, \xi_s)\rho_r\rho_s - \sum_{(i,j)\in\mathcal{M}} g_{ij}\, a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s) \qquad (r, s) \in \mathcal{L}. \tag{12.8}$$

En résumé, on obtient un système linéaire de $(N-1)^2$ équations à $(N-1)^2$ inconnues, que l'on écrit

$$AU = \overline{F} \tag{12.9}$$

où U est le vecteur formé des valeurs inconnues $u_{ij}, (i, j) \in \mathcal{L}$. La matrice A, dite *matrice de rigidité*, a pour coefficients les termes $a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s)$. Le vecteur $\overline{F}$ est formé des termes

$$f(\xi_r, \xi_s)\rho_r\rho_s - \sum_{(i,j)\in\mathcal{M}} g_{ij}\, a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s), \qquad (r, s) \in \mathcal{L} \tag{12.10}$$

que l'on peut réécrire $\overline{F} = BF$, où F est le vecteur ayant pour composantes

$$f(\xi_r, \xi_s) - \frac{1}{\rho_r\rho_s} \sum_{(i,j)\in\mathcal{M}} g_{ij}\, a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s), \qquad (r, s) \in \mathcal{L}.$$

La matrice B appelée *matrice de masse*, est diagonale et ses termes sont égaux à $\rho_i\rho_j$, ceci est une conséquence du choix de notre base. Le coût de la résolution du système (12.9) est celui de l'inversion de la matrice A, dont on va écrire l'expression ci-dessous. On peut déjà noter que, puisque la forme $a_N(\cdot, \cdot)$ est symétrique, la matrice A l'est également.

Expression de A : On pose

$$\alpha_{ir} = \sum_{j=0}^{N} h_i'(\xi_j) h_r'(\xi_j) \rho_j \;=\; (h_i', h_r')_N \qquad 0 \le i, r \le N, \tag{12.11}$$

et on vérifie alors que les coefficients de la matrice A s'écrivent

$$a_N(h_i \otimes h_j, h_r \otimes h_s) = \alpha_{ir}\delta_{js}\rho_j + \alpha_{js}\delta_{ir}\rho_i. \tag{12.12}$$

Lemme 12.1. *Pour i et r compris entre 1 et $N-1$, on a la formule*

$$\alpha_{ir} = \begin{cases} \dfrac{4}{N(N+1)L_N(\xi_i)L_N(\xi_r)(\xi_i - \xi_r)^2} & si\ i \neq r, \\ \dfrac{2}{3(1-\xi_i^2)L_N^2(\xi_i)} & si\ i = r. \end{cases} \tag{12.13}$$

Pour la démonstration on utilise (12.2)-(12.4) et les expressions des poids (7.5).

Quelques propriétées de la matrice A

• La matrice A est pleine.

Lemme 12.2. *Le* nombre de condition *de la matrice A vérifie*

$$cN^3 \le \kappa(A) \le c'N^3 \tag{12.14}$$

Preuve. On utilise la propriété suivante dont la démonstration est laissée au soin du lecteur: pour deux matrices M et N symétriques, on a l'inégalité:

$$\kappa(N^{\frac{1}{2}} M N^{\frac{1}{2}}) \le \kappa(N)\kappa(M). \tag{12.15}$$

Nous allons tout d'abord montrer que $\kappa(A) \ge cN^3$. Pour cela, on considère la matrice diagonale B dont les éléments diagonaux $B_{ij,ij}$ sont, dans la base des fonctions de Lagrange $(h_i \otimes h_j)$ pour $1 \le i, j \le N-1$, égaux à $\frac{\rho_i}{N}$. On déduit du Lemme 1.14 de [5, Ch.3] que les poids satisfont

$$\mathcal{O}(N^{-2}) \le \rho_i \le \mathcal{O}(N^{-1}) \tag{12.16}$$

d'où l'on tire que $\kappa(B) = \mathcal{O}(N)$. Pour connaître un minorant de $\kappa(B^{-\frac{1}{2}} A B^{-\frac{1}{2}})$, nous cherchons des estimations sur les valeurs propres du système

$$A\Phi = \lambda B\Phi. \tag{12.17}$$

Notons $\varphi = \psi = 1 - x^2$, alors la plus petite valeur propre de (2) vérifie

$$\begin{aligned} \lambda_{min} = \min_{\tilde{\Phi}} \frac{(A\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi})}{(B\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi})} &\le \frac{\int_\Lambda \int_\Lambda (\varphi'^2(x)\psi^2(y) + \varphi^2(x)\psi'^2(y))\, dx\, dy}{\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}(\varphi^2(\xi_i)\psi^2(\xi_j))\frac{\rho_i}{N}} \\ &\le c \end{aligned}$$

montrant que la plus petite valeur propre est bornée indépendamment de N. Pour estimer la plus grande valeur propre, on introduit un polynome φ de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda)$ satisfaisant une "mauvaise" *inégalité inverse*, c'est-à-dire pour lequel il existe une constante c telle que (cf [5, Ch.3], égalité (5.16))

$$\int_\Lambda \varphi'^2(x)dx \geq cN^4 \int_\Lambda \varphi^2(x)dx.$$

Alors, toujours avec $\psi(x) = 1 - x^2$, on obtient

$$\begin{aligned}\lambda_{max} = \max_{\tilde{\Phi}} \frac{(A\tilde{\Phi},\tilde{\Phi})}{(B\tilde{\Phi},\tilde{\Phi})} &\geq \frac{\int_\Lambda \int_\Lambda (\varphi'^2(x)\psi^2(y))\, dx\, dy}{\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}(\varphi^2(\xi_i)\psi^2(\xi_j))\frac{\rho_i}{N}} \\ &\geq cN^4 \frac{\int_\Lambda \varphi^2(x)dx}{\sum_{i=1}^{N-1}\varphi^2(\xi_i)\rho_i} \, \frac{\int_\Lambda \psi^2(y)dy}{\sum_{j=1}^{N-1}\psi^2(\xi_j)\frac{1}{N}} \\ &\geq cN^4\end{aligned}$$

où la dernière majoration est déduite de (7.3).

Le conditionnement de $B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}}$ est donc minoré par cN^4 et donc

$$\kappa(A) \geq \frac{\kappa(B^{-\frac{1}{2}}AB^{-\frac{1}{2}})}{\kappa(B^{-1})} \geq cN^3.$$

Pour montrer la majoration inverse, on utilise une nouvelle matrice B, toujours diagonale dans la même base et telle que

$$B_{ij,ij} = \frac{\rho_i\rho_j}{\rho_i^2 + \rho_j^2}.$$

Les propriétés des poids permettent de déduire facilement que $\kappa(B) = \mathcal{O}(N)$. Reste à évaluer les valeurs propres λ de $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$: il existe un vecteur Φ tel que

$$A\Phi = \lambda B^{-1}\Phi.$$

En introduisant le polynôme φ de $\mathbb{P}_N^0(\Lambda^2)$ avec

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1} \Phi_{ij} h_i \otimes h_j,$$

on a

$$\forall \chi \in \mathbb{P}_N^0(\Lambda^2), \qquad \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} \nabla\varphi\nabla\chi(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j = \lambda \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}(\frac{1}{\rho_i^2} + \frac{1}{\rho_j^2})(\varphi\chi)(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j. \qquad (12.18)$$

Introduisant la notation

$$|||\varphi|||_0 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\frac{1}{(1-x^2)} + \frac{1}{(1-y^2)})\varphi^2(x,y)\, dx\, dy,$$

on déduit des majorations du Lemme 1.14 de [5, Ch.3] qu'il existe deux constantes positives c et c' telles que

$$cN^2|||\varphi|||_0^2 \leq \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N}(\frac{1}{\rho_i^2}+\frac{1}{\rho_j^2})(\varphi)^2(\xi_i,\xi_j)\rho_i\rho_j \leq c'N^2|||\varphi|||_0.$$

De (12.18) avec $\chi=\varphi$, et le résultat du Lemme 7.4 pour le terme de droite on déduit

$$c\lambda N^2|||\varphi|||_0^2 \leq |\varphi|_1^2 \leq c'\lambda N^2|||\varphi|||_0^2.$$

D'autre part, on rappelle que

$$c|||\varphi|||_0^2 \leq |\varphi|_1^2 \leq c'N^2|||\varphi|||_0^2$$

qui est montré dans le Lemme 1.18 et le Lemme 1.5 de [5, Ch.3]. Il est alors clair que toute valeur propre λ de ce système vérifie

$$cN^{-2} \leq \lambda \leq c'.$$

On en déduit donc que le conditionnement de $B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}}$ est plus petit que cN^2 et l'on déduit finalement que

$$\kappa(A) \leq \kappa(B^{\frac{1}{2}}AB^{\frac{1}{2}})\kappa(B^{-1}) \leq cN^3.$$

Formulation forte du système (12.8)

En effectuant une intégration par partie comme dans la démonstration du Lemme 7.5, on peut montrer, grâce à l'exactitude de la formule de quadrature, que le système (12.6) est équivalent au problème de collocation suivant:

$$\begin{cases} -\Delta u_N(\xi_i,\xi_j) = f(\xi_i,\xi_j) \qquad \forall (i,j)\in\mathcal{L} \\ u_N \in \mathbb{P}_N(\Lambda^2) \quad \text{et} \quad u_N(\xi_i,\xi_j) = g(\xi_i,\xi_j) \qquad \forall (i,j)\in\mathcal{M}, \end{cases} \tag{12.19}$$

qui s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} -\sum_{(i,j)\in\mathcal{L}} u_{ij}\Big(h_i''(\xi_r)h_j(\xi_s)+h_i(\xi_r)h_j''(\xi_s)\Big) &= f(\xi_r,\xi_s) \\ -\frac{1}{\rho_r\rho_s}\sum_{(i,j)\in\mathcal{M}} g_{ij}\Big(h_i''(\xi_r)h_j(\xi_s)+h_i(\xi_r)h_j''(\xi_s)\Big), &\quad 1\leq r,s\leq N-1. \end{aligned} \tag{12.20}$$

Ceci est également un système linéaire à $(N-1)^2$ inconnues et $(N-1)^2$ équations :

$$\tilde{A}U = F,$$

Quelques propriétées de la matrice $\tilde{A}$

• La matrice $\tilde{A}$ est égale à $B^{-1}A$,
• La matrice $\tilde{A}$ n'est pas symétrique.
• Le nombre de condition de $\tilde{A}$ est en $\mathscr{O}(N^4)$
• L'inversion de cette matrice est donc, a priori, plus coûteuse que celle de A, ce qui est le défaut majeur de cette formulation.

Chapitre 13.

Résolution par méthodes directes

13.a. Méthode d'inversion directe

Ces méthodes nécessitent le stockage de matrices de la taille de A, c'est-à-dire N^{2d} ; de plus le nombre d'opérations est en général assez élevé, par exemple l'utilisation de la méthode de Cholesky demande (en 2-D) cN^6 opérations élémentaires pour la décomposition de A. Pour ces raisons ces méthodes sont abandonnées surtout pour le cas monodomaine où on est souvent amené à utiliser des polynômes d'approximation de degré assez élevé. Cependant, le caractère tensoriel de la base de $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$ permet d'utiliser une méthode directe qui, elle, n'a besoin de stocker que des matrices de tailles N^d et donc des opérations de l'ordre de N^{d+1}.

13.b. Méthode dite de diagonalisations successives

La méthode que nous allons présenter s'applique au système (12.19) qui, rappelons-le, est posé sur le carré. Nous réecrivons ce système sous la forme (?.?) où les vecteurs U et F sont respectivement remplacés par les matrices $\mathcal{U}$ et $\mathcal{F}$ qui sont les matrices $(N-1)\times(N-1)$ contenant les valeurs de u_N et f aux points de collocations. Plus précisément on a

$$\mathcal{U}_{ij} \;=\; u_N(\xi_i,\xi_j) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{ij} \;=\; f(\xi_i,\xi_j), \quad 1\le i,j\le N-1.$$

Alors, on peut facilement vérifier que le système (12.20) s'écrit:

$$\mathcal{D}\,\mathcal{U} + \mathcal{U}\mathcal{D}^t = \mathcal{F} \tag{13.1}$$

avec

$$\mathcal{D}_{ij} = -h_j''(\xi_i), \quad 1\le i,j\le N-1.$$

On peut vérifier que la matrice $\mathcal{D}$ est diagonalisable ; soit P la matrice de passage, on a alors :

$$P^{-1}\mathcal{D}P = \mathscr{D}, \tag{13.2}$$

où $\mathscr{D}$ est la matrice diagonale formée des valeurs propres de $\mathcal{D}$. L'idée de la méthode de diagonalisations successives est d'écrire le système dans la base des vecteurs propres dans chacune des directions, ceci étant facilité par le caractère tensoriel de la base de $\mathbb{P}_N^0(\Omega)$. En

effet le système s'écrit de manière équivalente : (passage dans la base des vecteurs propres pour la direction des x)

$$(P^{-1}\mathcal{D}P)(P^{-1}\mathcal{U}) + P^{-1}\mathcal{U}\mathcal{D}^t = P^{-1}\mathcal{F} \tag{13.3}$$

soit

$$\mathscr{D}\tilde{\mathcal{U}} + \tilde{\mathcal{U}}\mathcal{D}^t = \tilde{\mathcal{F}} \tag{13.4}$$

avec $\tilde{\mathcal{U}} = P^{-1}\mathcal{U}$ et $\tilde{\mathcal{F}} = P^{-1}F$. En recommençant l'opération dans la direction des y on obtient

$$\mathscr{D}\tilde{\mathcal{U}}(P^t)^{-1} + \tilde{\mathcal{U}}(P^t)^{-1}P^t\mathcal{D}(P^t)^{-1} = \tilde{\mathcal{F}}(P^t)^{-1}. \tag{13.5}$$

Le système obtenu est donc diagonal :

$$\mathscr{D}\tilde{\tilde{\mathcal{U}}} + \tilde{\tilde{\mathcal{U}}}\mathscr{D} = \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}. \tag{13.6}$$

avec bien sûr $\tilde{\tilde{\mathcal{U}}} = \tilde{\mathcal{U}}(P^t)^{-1}$ et $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}} = \tilde{\mathcal{F}}(P^t)^{-1}$.

On résout ce dernier système en écrivant

$$\tilde{\tilde{\mathcal{U}}}_{ij} = \frac{\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}_{ij}}{\mathscr{D}_{ii} + \mathscr{D}_{jj}}. \tag{13.7}$$

L'avantage de cette méthode est de pouvoir résoudre le même problème en dimension $d \geq 2$ comme une suite de problèmes de dimension 1, avec un coût de l'ordre de $\mathscr{O}(N^{d+1})$ et une mémoire de l'ordre de $\mathscr{O}(N^d)$ pour le stockage des matrices. Cette méthode est donc efficace pour $d \geq 2$, ce qui peut justifier l'abandon de la version faible du problème discret. Bien sûr cette méthode ne peut être utilisée quand les domaines sont courbes.

Chapitre 14.

Résolution par méthodes itératives

Il s'agit de construire une suite $(U_n)_n$ qui converge vers U solution de $AU = \overline{F}$. Le coût de ces méthodes est proportionnel a celui du calcul de AV, et à ce titre deux remarques s'imposent:

(i) La matrice A n'a jamais besoin d'être assemblée, car le calcul du produit AV s'effectue facilement à partir de (12.8), la place mémoire nécessaire est donc majorée par une constante fois N^d.

(ii) Le fait que les bases de polynômes soient tensorisées réduit le coût de l'opération AV, ainsi chaque itération nécessite cN^{d+1} opérations, et au total $\mathscr{N}(N)$ fois ce nombre pour converger, où $\mathscr{N}(N)$ représente le nombre d'itérations nécessaire à la convergence (c'est-à-dire le plus petit entier pour lequel on a $U_{\mathscr{N}(N)} = U$). Le nombre de condition intervient dans ces méthodes par son influence sur le nombre d'itérations [7].

Lemme 14.1. *Pour la méthode de Richardson, on a la relation suivante :*

$$\mathscr{N}(N) = \mathscr{O}\left(\kappa(A)\right) \tag{14.1}$$

C'est-à-dire dans notre cas $\mathscr{N}(N) = \mathscr{O}\left(N^3\right)$.

Lemme 14.2. *Pour la méthode du gradient conjugué, on a la relation suivante :*

$$\mathscr{N}(N) = \mathscr{O}\left(\sqrt{\kappa(A)}\right) \tag{14.2}$$

C'est-à-dire dans notre cas $\mathscr{N}(N) = \mathscr{O}\left(N^{\frac{3}{2}}\right)$.

14.a. Gradient conjugué préconditionné

Le nombre d'itérations croît assez vite en fonction de N. Pour éviter ce type de comportement, on utilise un préconditionnement, ce qui consiste à remplacer le problème (12.9) par le système

$$P^{-\frac{1}{2}} A P^{-\frac{1}{2}} V = P^{-\frac{1}{2}} F, \quad \text{avec } U = P^{-\frac{1}{2}} V, \tag{14.3}$$

où P est une matrice facile à inverser, et de préférence symétrique définie positive. L'idée consiste à exhiber une matrice P telle que le nombre de condition de $\kappa(P^{-\frac{1}{2}}AP^{-\frac{1}{2}})$ (c'est-à-dire le quotient de la plus grande valeur propre de $P^{-1}A$ par la plus petite) soit inférieur à $\kappa(A)$.

La méthode de gradient conjugué appliquée au système préconditionné (14.3) est appelée *méthode de gradient conjugué préconditionné.* Elle s'écrit de la façon suivante (on désigne par un point le produit scalaire euclidien de deux vecteurs) :

Etape d'initialisation : On choisit un vecteur U_0 (nul par exemple) et on calcule

$$\mathcal{R}_0 \;=\; F - AU_0, \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_0 = \mathcal{Q}_0 = P^{-1}\mathcal{R}_0 \tag{14.4}$$

Etape n : On suppose connus les vecteurs $U_n, \mathcal{R}_n, \mathcal{P}_n$ et $\mathcal{Q}_n$. Si le vecteur $\mathcal{R}_n$ est nul, on arrête le calcul. Sinon, on pose

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{\mathcal{R}_n \cdot \mathcal{Q}_n}{\mathcal{P}_n \cdot A\mathcal{P}_n}, \\
U_{n+1} &= U_n \;+\; \alpha_n \mathcal{P}_n, \\
\mathcal{R}_{n+1} = \mathcal{R}_n - \alpha_n A\mathcal{P}_n \quad &\text{et} \quad \mathcal{Q}_{n+1} = P^{-1}\mathcal{R}_{n+1}, \\
\beta_n &= \frac{\mathcal{R}_{n+1} \cdot \mathcal{Q}_{n+1}}{\mathcal{R}_n \cdot \mathcal{R}_n}, \\
\mathcal{P}_{n+1} &= \mathcal{Q}_{n+1} + \beta_n \mathcal{P}_n.
\end{aligned} \tag{14.5}$$

On arrête la calcul une fois que :

$$\frac{\mathcal{R}_n \cdot \mathcal{R}_n}{F \cdot F} \leq \varepsilon,$$

ε étant le critère d'arrêt, c'est-à-dire, la précision avec laquelle on désire résoudre le système algébrique. Pour le système préconditionné, le nombre d'itérations devient proportionnel à la racine carré du nombre de condition de l'opérateur préconditionné, ici égale à $\sqrt{\kappa\left(P^{-\frac{1}{2}}AP^{-\frac{1}{2}}\right)}$. Une analyse de différents préconditionneurs est présentée dans [8, Section 5.2]. Pour plus de précision concernant la question on refère à [2].

14.b. Exemples de préconditionneur

Nous présentons deux préconditionneurs :

Préconditionnement par la diagonale: La matrice P est diagonale et ses termes diagonaux sont ceux de la matrice A, c'est-à-dire $\alpha_{jj}\rho_k + \alpha_{kk}\rho_j$. On montre, par exemple dans [17], que pour ce choix on a $\kappa(P^{-\frac{1}{2}}AP^{-\frac{1}{2}}) \leq cN^2$.

Préconditionnement par différences finies: La matrice P est choisie égale à la matrice de discrétisation du même problème mais par différences finies à l'ordre 2 sur la grille Ξ_N. En dimension un le système correspondant s'écrit

$$\frac{-2}{\delta_{j-1}(\delta_j + \delta_{j-1})}u_{j-1} + \frac{2}{\delta_{j-1}\delta_j}u_j + \frac{-2}{\delta_j(\delta_j + \delta_{j-1})}u_{j+1} = f_j, \qquad j = 1, ..., N-1$$

avec "les bonnes conditions aux limites", ici $\delta_j = \xi_j - \xi_{j-1}$. L'opérateur préconditionné a un nombre de condition indépendant de N. Une étude de ce préconditionneur a été effectuée dans le cadre d'une approximation par des polynômes de Tchebycheff, elle montre que ce nombre de condition vaut $\pi^2/4$ (voir par exemple [8, Section 5.2]).

14.c. Résultats numériques

On considère le problème (4.2) avec pour second membre $f(x,y) = \pi^2 \sin(\pi x)\sin(\pi y)$ et comme conditions aux limites $g = 0$. La solution exacte est $u(x,y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$.
Le tableau suivant montre le caractère spectral de l'approximation ainsi que la convergence exponentielle de l'erreur vers zéro.

N	4	8	12	16	20	24
$\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)}$	3.10^{-2}	5.10^{-3}	5.10^{-5}	4.10^{-8}	1.10^{-10}	2.10^{-13}

On s'intéresse maintenant au cas où la solution attendue n'est pas tensorielle, on choisit pour cela comme second membre pour (4.1) la fonction $f(x,y) = -95\,((x+y)/2)^{18}$. Ce problème muni en plus des bonnes conditions aux limites admet comme solution $u(x,y) = ((x+y)/2)^{20}$.

N	4	8	12	16	20	24
$\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)}$	3.10^{-1}	1.10^{-3}	3.10^{-6}	1.10^{-9}	2.10^{-13}	2.10^{-13}

Là aussi on retrouve les mêmes remarques que dans le cas où la solution est tensorielle.

Enfin, on s'intéresse au cas où la solution du problème (4.2) est peu régulière, on choisit pour cela l'approximaion de la soution exacte $u = r^2(\log r \sin 2\theta + \theta\cos 2\theta)$ définie sur $]0,1[^2$. Elle satisfait $\Delta u = 0$. Les conditions aux limites associées sont regulières et sont données par : sur $y = 0$, $g = 0$, sur $x = 0$, $g(y) = -\frac{\pi}{2}y^2$ et enfin sur les autres côtés, c'est la restriction de

$$xy\log(x^2+y^2) + (x^2-y^2)\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}.$$

Contrairement aux deux exemples précédents, ici la solution attendue est peu régulière ($u \in H^{3-\varepsilon}$). Le tableau ci-dessous montre que son approximation est lente, et que pour atteindre une erreur d'approximation de l'ordre de 10^{-5} il nous a fallu des polynômes de degré 20. On notera que pour la même représentation spectrale on a une précision de l'ordre de 10^{-13} pour les deux premiers cas.

N	10	20	30	40	50	60	70	80
$\|u - u_N\|_{H^1(\Omega)}$	6.10^{-4}	4.10^{-5}	5.10^{-6}	2.10^{-6}	1.10^{-6}	5.10^{-7}	3.10^{-7}	1.10^{-7}

Dans le graphe suivant, on représente le logarithme (décimal) de l'erreur en fonction de celui de N. Les $\times$ correspondent aux valeurs exhibées dans le deuxième exemple et les $+$ à celles du troisième exemple. On constate que les $\times$ ne sont pas alignées (la théorie prévoit une décroissance exponentielle). Quant aux $+$, on peut voir qu'ils sont (presque) alignés sur une droite de pente -4 (qui, sur le graphe, vu le choix des échelles, est parallèle à une diagonale). C'est parfaitement en accord avec le résultat (10.21).

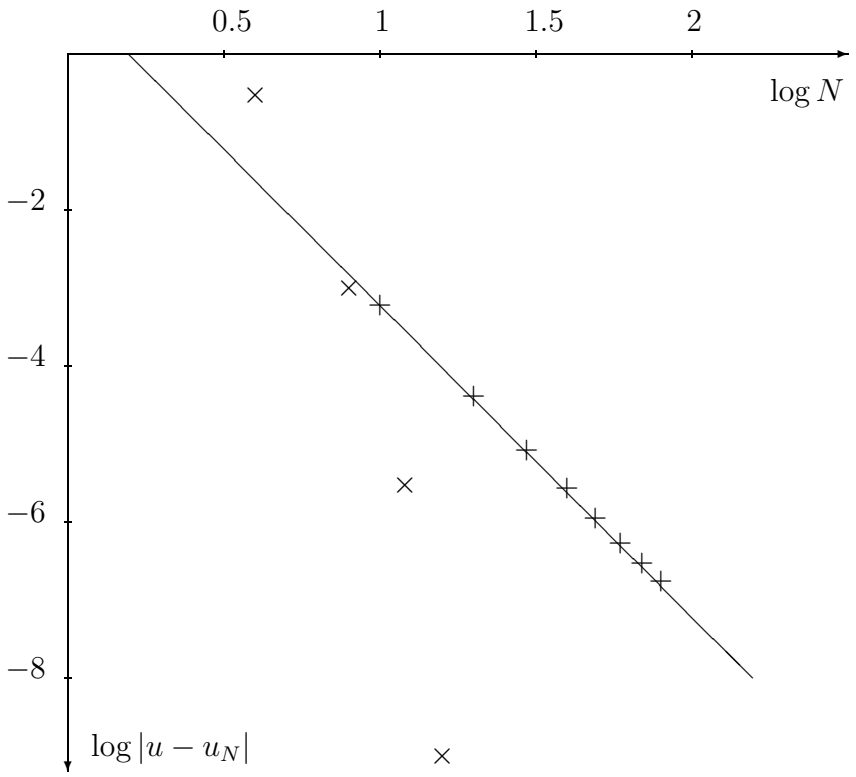


Figure 3

Chapitre 15.

Résolution dans le cas des élément spectraux

Dans ce chapitre, nous allons décrire le système algébrique à inverser issu de la discrétisation du problème de Dirichlet pour le Laplacien par la méthode des éléments spectraux (avec conditions aux limites nulles), ensuite nous présentons une méthode d'inversion.[16] [17]

15.a. Cas monodimensionnel

Pour simplifier la présentation de la méthode nous allons commencer par sa description en dimension un. Ici $\Omega =]-1,1[$ et il s'agit de résoudre le problème : trouver u solution de

$$-u'' \;=\; f \;\text{ dans }\; \Omega \;\text{ avec }\; u(\pm 1) = 0, \tag{15.1}$$

ou de manière équivalente trouver u dans $H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega u'(x)\, v'(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, v(x)\, dx. \tag{15.2}$$

L'espace d'approximation de la solution u est le sous-espace de $H_0^1(\Omega)$ formé des fonctions polynomiales par morceaux sur chaque sous domaine Λ_k de Ω. Cet espace noté X_h est égal à $H_0^1(\Omega) \bigcap \mathbb{P}_{N,K}(\Omega)$, où

$$\mathbb{P}_{N,K}(\Omega) \;=\; \left\{\varphi \;\in\; L^2(\Omega), \quad \varphi|_{\Lambda_k} \;\in \mathbb{P}_N(\Lambda_k)\right\}.$$

L'intégration numérique utilisée est celle obtenue à partir de (11.31) c'est-à-dire:

$$\forall \varphi, \psi \in \mathscr{C}^0(\overline{\Omega}), \quad (\varphi, \psi)_h = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{N} \varphi(x_i^k)\, \psi(x_i^k)\; \rho_{i,k}\,.$$

Dans ces conditions, le problème discret s'écrit : trouver u_h dans X_h tel que

$$\forall v_h \in X_h, \quad (u_h', v_h')_h \;=\; (f, v_h)_h. \tag{15.3}$$

Comme dans le Lemme 8.2, on démontre que ce problème est bien posé, en ce sens qu'il existe une solution unique dans X_h. Cette dernière formulation du problème, bien qu'efficace

pour son analyse numérique, est loin d'être pratique pour son inversion, d'où l'importance d'un choix d'une base pour X_h : on rappelle que le choix de celle-ci est important pour la structure de la matrice, et aussi pour son nombre de condition. Le choix naturel est celui obtenu à partir des polynômes de Lagrange, $(h_i)_{i=0,...,N}$ définis sur Λ via la transformation bijective de Λ_k vers Λ. Ainsi si $w_h \in X_h$ et si on désigne par w_h^k sa restriction polynomiale sur Λ_k alors on a :

$$w_h^k(x) = \sum_{i=0}^{N} w_i^k h_i(\zeta), \quad x \in \Lambda_k \text{ et } \zeta \in \Lambda, \tag{15.4}$$

avec bien sûr

$$w_i^k = w_h(x_i^k). \tag{15.5}$$

La condition aux limites se traduit par

$$w_0^1 = w_N^K = 0. \tag{15.6}$$

D'autre part la solution étant continue car dans $H_0^1(\Omega)$, une condition de raccord continu doit être satisfaite : celle-ci se traduit par

$$w_N^k = w_0^{k+1}, \quad \forall k \in 1,..,K-1. \tag{15.7}$$

En exprimant u_h dans cette base et en prenant comme fonctions tests les fonctions nulles en tous les points du maillage sauf en un,le système (15.3) s'écrit:

$$\forall k, 1 \le k \le K, \quad \forall i, 0 \le i \le N \qquad \sum_{j=0}^{N}{}' A_{ij}^k u_j^k = \sum_{j=0}^{N}{}' B_{ij}^k f_j^k \tag{15.8}$$

où $f_j^k = f(x_j^k)$, et avec $l_k = a_{k+1} - a_k$:

$$\begin{cases} A_{ij}^k = \dfrac{4}{l_k^2} \displaystyle\sum_{q=0}^{N} D_{qi} D_{qj} \rho_q^k, \quad \forall i,j \in \{0,...,N\}^2 \\ B_{ij}^k = \rho_{i,k} \delta_{ij}, \quad \forall i,j \in \{0,...,N\}^2 \\ D_{ij} = h_j'(\xi_i), \quad \forall i,j \in \{0,...,N\}^2 . \end{cases} \tag{15.9}$$

Ici $\sum'$ désigne la sommation tenant compte des conditions de raccord continu entre les éléments, elle fait intervenir les éléments dont la contribution est non nulle dans (15-8).

Comme dans le cas monodomaine, et en utilisant l'exactitude de l'intégration numérique ce système peut être réécrit sous la formulation forte:

$$\begin{aligned} -u_{h,xx}^k(x_i^k) &= f(x_i^k), \qquad \forall i \in \{1,...,N-1\}, \quad \forall k \\ \frac{l_{k+1}\rho_0}{2}\Big(-u_{h,xx}^{k+1}(x_0^{k+1}) - f(x_0^{k+1})\Big) &+ \frac{l_k \rho_N}{2}\Big(-u_{h,xx}^k(x_N^k) - f(x_N^k)\}\Big) \\ &= u_{h,x}^{k+1}(x_0^{k+1}) - u_{h,x}^k(x_N^k), \end{aligned} \tag{15.10}$$

comparer avec (8.7). Cette dernière égalité exprime le "raccord $\mathscr{C}^1$ faible" exprimant le fait que le saut des dérivées à l'interface est petit puisqu'il est en $\mathcal{O}(N^{-2})$ fois le résidu à l'interface.

A partir de la discrétisation de ce problème en dimension 1 nous allons déduire celle du problème bidimensionnel analysé dans le chapitre 8.

15.b. Cas bidimensionnel

Le domaine Ω étant subdivisé en sous domaines rectangulaires suivant la description faite dans le chapitre 8, section a, le problème discret associé est donné par : Trouver u_h dans X_h où

$$X_h \;=\; H_0^1(\Omega)\bigcap \mathbb{P}_{N,K}(\Omega) \tag{15.11}$$

avec

$$\mathbb{P}_{N,K}(\Omega) = \left\{\varphi \in L^2(\Omega);\quad \varphi|_{\Omega_k} \in \mathbb{P}_N(\Omega_k)\right\},$$

solution de

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N} \nabla u_h(x_p^k, y_q^k)\cdot\nabla v_h(x_p^k, y_q^k)\,\rho_{p,k}^x\rho_{q,k}^y \\ = \sum_{k=1}^{K}\sum_{p=0}^{N}\sum_{q=0}^{N}(fv_h)(x_p^k, y_q^k)\,\rho_{p,k}^x\rho_{q,k}^y, \quad \forall v_h \in X_h.\end{aligned} \tag{15.12}$$

La base choisie pour X_h est construite par tensorisation de celle du cas 1-D, ainsi la restriction, w_h^k d'un élément w_h de X_h à Ω_k est définie par

$$w_h^k(x,y) \;=\; \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} w_{ij}^k\, h_i^k(\zeta)h_j^k(\eta), \qquad ((x,y)\in\Omega_k, \quad (\zeta,\eta)\in\Lambda^2)$$

avec

$$w_{ij}^k \;=\; w_h(x_i^k, y_j^k).$$

La contrainte de continuité se traduit par:

$$w_h^k \;=\; w_h^m \quad \text{sur } \overline{\Omega}_k\bigcap\overline{\Omega}_m$$

et la condition aux limites par:

$$w_h^k \;=\; 0 \quad \text{sur } \overline{\Omega}_k\bigcap\partial\Omega$$

Le choix de cette base permet de réécrire le système (15.12) sous la forme matricielle suivante: (Ici on suppose $\Omega_k = \Lambda\otimes\Lambda + (a_k, b_k)$)

$$\sum_{m,n=0}^{N}{}'\left(A_{im}^k B_{jn}^k + B_{im}^k A_{jn}^k\right) = \sum_{m,n=0}^{N}{}' B_{im}^k B_{jn}^k f_{mn}^k, \qquad \forall i,j\in\{0,...,N\}^2, \quad \forall k, 1\le k\le K \tag{15.13}$$

c'est-à-dire

$$\underline{A}\,\underline{u} \;=\; \underline{B}\,\underline{f}, \tag{15.14}$$

où les matrices A^k_{pq} et B^k_{pq} sont définies comme dans (15.9).

Propriétées de la matrice $\underline{A}$

- la matrice $\underline{A}$ est symétrique,
- le nombre de condition de $\underline{A}$ est $\mathscr{O}(K^2N^3)$
- le nombre de condition de $\underline{B}^{-1}\underline{A}$ est $\mathscr{O}(K^2N^4)$
- le nombre de condition de $\underline{BA}$ est $\mathscr{O}(K^2N^2)$
- le coût de l'opération $\underline{Au}$ est $\mathscr{O}(KN^{d+1})$ — ici $d = 2$,
- la taille de $\underline{A}$ est $\mathscr{O}(KN^d)$.

Inversion du système $\underline{Au} \;=\; \underline{Bf}$

Tenant compte des propriétées de $\underline{A}$, il est clair que les méthodes directes avec un stockage de la matrice $\underline{A}$ sont à éviter, particulièrement en 3-D.

Pour l'inversion du système (15.14), on utilise la *méthode de gradient conjugué préconditionné* par la diagonale dont les coefficients sont ceux de la matrice $\underline{A}$.

15.c. Résultats numériques

Le tableau suivant donne le nombre d'itérations pour converger vers la solution exacte $u(x, y) = \exp(x + y)$, avec une erreur d'approximation calculée avec la norme $\| \;\|_\infty$ de l'ordre de 10^{-8}, dans les cas préconditionné (3^{ieme} ligne du tableau) et non préconditionné. Le nombre de sous domaines est fixé à 4

N	5	7	9	11
Non précond.	61	110	148	207
Précond.	21	30	42	58

On remarque que le nombre d'itérations dans le cas préconditionné évolue en fonction de N mais beaucoup moins vite que dans le cas non préconditionné. Dans tous les cas on sait que celui-ci est de l'ordre de $\sqrt{\kappa(\underline{P}^{-1}\underline{A})}$.

Références

[1] R.A. Adams — *Sobolev Spaces*, Academic Press, New-York, San Francisco, London (1975).

[2] O. Axelsson — Conjugate gradient type methods for unsymmetric and inconsistent systems of linear equations. *Linear Algebra and its application.* **29**, 1–16 (1980).

[3] M. Azaiez — *Calcul de la pression dans le problème de Stokes pour des fluides visqueux incompressibles par une méthode spectrale de collocation*, Thèse, Paris-Sud (1990).

[4] C. Bernardi, M. Dauge & Y. Maday — *Polynomials in Weighted Sobolev Spaces: Basics and Trace Liftings*, Internal Report **92039**, Laboratoire d'Analyse Numérique, Université Pierre et Marie Curie, Paris (1992).

[5] C. Bernardi & Y. Maday — *Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques*, Mathématiques et Applications **10**, SMAI, Springer-Verlag, Paris (1992).

[6] C. Bernardi & Y. Maday — *Some spectral approximations of one-dimensional fourth-order problems*, Progress in Approximation Theory, édité par P. Nevai, A. Pinkus, Academic Press, San Diego (1991), 43–116.

[7] P. G. Ciarlet — *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris (1982).

[8] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni & T.A. Zang — *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).

[9] M. Crouzeix & A. Mignot — *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris (1984).

[10] M. Dauge — *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*, Lecture Notes in Mathematics **1341**, Springer-Verlag (1988).

[11] R. Dautray, J.-L. Lions. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les Sciences et les Techniques.* Masson, Paris (1988).

[12] P.J. Davis & P. Rabinowitz — *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, Orlando (1985).

[13] W.J. Gordon & C.A. Hall — in *Geometric Aspects of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations*, A. K. Aziz ed. Academic Press (1972), 769–784.

[14] P. Grisvard — *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman (1985).

[15] J.-L. Lions, E. Magenes — *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod (1968).

[16] Y. Maday & A.T. Patera — Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations, in *State of the Art Surveys in Computational Mechanics*, A. K. Noor ed. (1989), 71–143.

[17] E. M. Rønquist — *Optimal Spectral Element Methods for the unsteady three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations*, Ph.D. Thesis, M.I.T., Cambridge, MA. (1988)