

Rennes, Mai 2002

# Homogénéisation 2

Monique DAUGE

Institut de Recherche MATHématique de Rennes

<http://www.maths.univ-rennes1.fr/~dauge>

## Plan

Le but de ce cours est d'introduire la méthode d'analyse multi-échelle (AME) pour des problèmes d'homogénéisation *périodiques*: une période  $\varepsilon$  apparaît naturellement dans le problème via les coefficients de l'opérateur (coefficient rapidement oscillants) ou la géométrie du domaine (réseau périodique de perforations). Le but de l'analyse est de décrire le comportement des solutions du problème pour  $\varepsilon$  petit. La méthode AME consiste à proposer de façon constructive un Ansatz de développement en série en puissances de  $\varepsilon$  et à en étudier la pertinence et la convergence vers la solution du problème initial.

Si, comme on va le voir au Ch.1, ce programme admet une solution naturelle, élégante et relativement facile d'accès quand les conditions aux limites *macroscopiques* sont une conséquence de la périodicité *microscopique*, il n'en est pas de même dans le cas général: l'interaction de la périodicité et des conditions aux limites *macroscopiques* donne lieu à (dans le meilleur des cas) à des phénomènes de couches limites, que l'on doit décrire par un Ansatz différent ou, même, par une approche purement fonctionnelle.

Source principale: [OLE] O. A. OLEINIK, A. S. SHAMAEV, G. A. YOSIFIAN. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. Studies in mathematics and its applications. North-Holland, Amsterdam 1992.

- *Analyse Multi-Échelle pour le Tout-Périodique*. Ch.1  
On se place dans le cas où les conditions aux limites de cellule se superposent à celles sur le domaine. On trouve le développement asymptotique complet en puissances entières de  $\varepsilon$  avec des termes à deux échelles de la forme  $\mathbf{W}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \mathbf{v}(x)$ .
- *Analyse Asymptotique à deux niveaux pour Dirichlet*. Ch.2  
Dans la situation plus réaliste d'indépendance des conditions aux limites de cellule par rapport à celles sur le domaine, on étudie la performance d'approximation du développement multi-échelle tronqué au deuxième niveau. On démontre une erreur en  $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$  pour la norme  $H^1$ . On montrera des résultats de calcul.
- *Analyse Multi-Échelle pour les problèmes avec trous*. Ch.3 et 4  
Après avoir analysé le cas des conditions de Neumann et de Dirichlet constant sur le bord des trous (Ch.3), on examinera plus particulièrement la situation des perforations avec condition de Dirichlet nulle. On montrera que l'adjonction des termes de couche limite au bord externe permet une description complète de l'asymptotique à tous ordres. On illustrera par des calculs effectués à l'aide de la librairie d'éléments finis MÉLINA.

# Chapitre 1. Analyse Multi-Echelle pour le Tout-Périodique

Domaine *macroscopique*  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , variable  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

On suppose que  $\Omega$  est un hyper-cube  $\prod_{j=1}^n (0, L_j)$  à dimensions  $L_j$  entières. Soit  $H_{\#}^1(\Omega)$  l'espace des fonctions  $H^1(\Omega)$  périodiques sur  $\Omega$ .

Le comportement rapidement oscillant est décrit grâce à l'introduction de la cellule élémentaire  $Y$  qui est le cube unité  $Y = (0, 1)^n$ , variable  $y = (y_1, \dots, y_n)$ . Soit  $y \mapsto A(y)$  une application  $C_{\#}^{\infty}(\bar{Y})$  à valeurs dans les matrices symétriques définies positives (i.e. périodiques sur  $Y$ ).

Soit  $\varepsilon \in (0, 1)$ . On suppose, pour éviter les problèmes dus aux conditions aux limites macroscopiques, que  $\varepsilon$  est de la forme de l'inverse d'un entier:  $\varepsilon = \frac{1}{m}$ .

Problème  $(\mathfrak{P}^{\varepsilon})$

$$\begin{aligned} \text{Trouver } u^{\varepsilon} \in H_{\#}^1(\Omega) \text{ avec } \int_{\Omega} u^{\varepsilon}(x) \, dx = 0, \\ \forall v \in H_{\#}^1(\Omega), \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^{\varepsilon}(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx \end{aligned}$$

Si  $f \in H_{\#}^{-1}(\Omega)$  est orthogonal aux constantes, le problème  $(\mathfrak{P}^{\varepsilon})$  a une solution unique.

On suppose que  $f \in C_{\#}^{\infty}(\bar{\Omega})$ . On va essayer de construire un développement asymptotique en puissances de  $\varepsilon$  pour  $u^{\varepsilon}$ . Ceci va passer par l'essai de plusieurs Ansatzes successifs, avant d'arriver au bon. On écrit d'abord  $(\mathfrak{P}^{\varepsilon})$  sous forme d'un problème aux limites et on trouve, en plus des conditions de périodicité et de moyenne nulle

$$L^{\varepsilon} u^{\varepsilon} = -f, \quad \text{où } L^{\varepsilon} = \operatorname{div} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla.$$

Le principe est de chercher  $u^{\varepsilon}$  sous forme d'une série  $\sum_{\ell \in \mathbb{N}} \varepsilon^{\ell} u^{\ell}$  avec pour chaque  $\ell \in \mathbb{N}$

$$u^{\ell}(\varepsilon, x) = W^{\ell}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v^{\ell}(x) = W^{\ell}(y) v^{\ell}(x) \Big|_{y = \frac{x}{\varepsilon}} \quad (1)$$

Avec les notations  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$  et  $\hat{\partial}_k = \frac{\partial}{\partial y_k}$  la relation fondamentale est

$$\partial_k \left( W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) \right) = \frac{1}{\varepsilon} \hat{\partial}_k W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) + W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_k v(x)$$

Ainsi, l'opérateur intérieur  $L^{\varepsilon}$  de  $(\mathfrak{P}_{\varepsilon})$  s'écrit

$$\begin{aligned} \sum_{jk} \left( \partial_j A_{jk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_k \right) \left( W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) \right) = \\ \sum_{jk} \left( (\varepsilon^{-1} \hat{\partial}_j + \partial_j) A_{jk}(y) (\varepsilon^{-1} \hat{\partial}_k + \partial_k) \right) \left( W(y) v(x) \right) \Big|_{y = \frac{x}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

On développe le membre de droite, utilisant que  $\partial_k$  et  $\hat{\partial}_k$  commutent. Regroupant les puissances de  $\varepsilon$ , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{jk} \left( (\varepsilon^{-1} \hat{\partial}_j + \partial_j) A_{jk}(y) (\varepsilon^{-1} \hat{\partial}_k + \partial_k) \right) \left( W(y) v(x) \right) &= \quad (*) \\ \varepsilon^{-2} \mathfrak{A}^0(\hat{\partial}) W(y) v(x) & \\ + \varepsilon^{-1} \left( \sum_j \mathfrak{A}_j^{1,d}(\hat{\partial}) W(y) \partial_j v(x) + \sum_k \mathfrak{A}_k^{1,g}(\hat{\partial}) W(y) \partial_k v(x) \right) & \\ + \varepsilon^0 \sum_{j,k} \mathfrak{A}_{jk}^2(\hat{\partial}) W(y) \partial_{jk} v(x) & \end{aligned}$$

avec les opérateurs de cellule

$$\mathfrak{A}^0 W = \sum_{jk} \hat{\partial}_j \left( A_{jk}(y) (\hat{\partial}_k W) \right) \quad (2)$$

$$\mathfrak{A}_j^{1,d} W = \sum_k A_{jk}(y) (\hat{\partial}_k W) \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}_k^{1,g} W = \sum_j \hat{\partial}_j \left( A_{jk}(y) W \right) \quad (3)$$

$$\mathfrak{A}_{jk}^2 W = A_{jk}(y) W. \quad (4)$$

Ainsi le membre de gauche (\*) s'écrit, avec  $\mathfrak{A}^1 = \mathfrak{A}^{1,g} + \mathfrak{A}^{1,d}$ :

$$\begin{aligned} L^\varepsilon \left( W \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) v(x) \right) &= \varepsilon^{-2} \mathfrak{A}^0 W(y) v(x) + \varepsilon^{-1} \sum_j \mathfrak{A}_j^1 W(y) \partial_j v(x) + \sum_{jk} \mathfrak{A}_{jk}^2 W(y) \partial_{jk} v(x) \\ &= \sum_{m=0}^2 \varepsilon^{-2+m} \sum_{|\alpha|=m} \mathfrak{A}_\alpha^m(\hat{\partial}) W(y) \partial^\alpha v(x) \quad (5) \end{aligned}$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  est un multi-indice dans  $\mathbb{N}^n$ , avec sa longueur  $|\alpha| = \sum_j \alpha_j$ .

Combinant l'Ansatz (1) avec le développement (5) de l'opérateur  $L^\varepsilon$ , on cherche si on peut trouver des suites  $W^\ell(y)$  et  $v^\ell(x)$  pour résoudre

$$\sum_{m=0}^2 \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^{-2+m+\ell} \sum_{|\alpha|=m} \mathfrak{A}_\alpha^m(\hat{\partial}) W^\ell(y) \partial^\alpha v^\ell(x) = -f(x).$$

On identifie les puissances de  $\varepsilon$ .

$$\boxed{-2} \quad \mathfrak{A}^0 W^0(y) v^0(x) = 0.$$

Pour avoir une chance de trouver un  $v^0 \neq 0$ , on doit résoudre  $\mathfrak{A}^0 W^0(y) = 0$ .

L'opérateur coercif  $\mathfrak{A}^0$  sur les fonctions périodiques a comme noyau les constantes. D'où

$$\boxed{W^0(y) = 1}$$

Équation suivante

$$\boxed{-1} \quad \mathfrak{A}^0 W^1(y) v^1(x) + \sum_j \mathfrak{A}_j^1 W^0(y) \partial_j v^0(x) = 0.$$

On ressent alors la nécessité d'un Ansatz plus général que  $W^1 v^1$ , à savoir  $\sum_k W_k^1 v_k^1$  pour obtenir ne serait-ce qu'une solution particulière. La solution générale s'obtient par superposition avec les solutions de la première équation. Par identification  $v_j^1 = \partial_j v^0$ .

Nouvelle forme de l'équation

$$\boxed{-1} \quad \sum_j \left( \mathfrak{A}^0 W_j^1(y) + \mathfrak{A}_j^1 W^0(y) \right) \partial_j v^0(x) = 0,$$

qui, avec le fait que  $\mathfrak{A}_j^1 W^0 = \mathfrak{A}_j^{1,0} W^0 = \sum_k \hat{\partial}_k A_{jk}(y)$ , redonne l'équation bien connue des *profils oscillants* à résoudre dans  $H_{\#}^1(Y)$  pour  $j = 1, \dots, n$ :

$$\boxed{\sum_{ik} \hat{\partial}_i \left( A_{ik}(y) (\hat{\partial}_k W_j^1) \right) = - \sum_k \hat{\partial}_k A_{jk}(y)}$$

Équation suivante

$$\boxed{0} \quad \mathfrak{A}^0 W^2 v^2(x) + \sum_{jk} \mathfrak{A}_j^1 W_k^1 \partial_j v_k^1(x) + \sum_{jk} \mathfrak{A}_{jk}^2 W^0 \partial_{jk} v^0(x) = -f(x).$$

Comme, en fait,  $v_k^1 = \partial_k v^0$ , on déduit la nécessité de l'Ansatz enrichi  $\sum_{jk} W_{jk}^2 v_{jk}^2$ , en même temps que l'identification  $v_{jk}^2 = \partial_{jk} v^0$ . Pour faire le lien entre micro-échelle  $y$  et macro-échelle  $x$ , on écrit les équations, pour  $j, k = 1, \dots, n$ :

$$\boxed{\sum_{il} \hat{\partial}_i \left( A_{il}(y) (\hat{\partial}_l W_{jk}^2) \right) + \sum_i \left( \hat{\partial}_i A_{ij}(y) + A_{ij}(y) \hat{\partial}_i \right) W_k^1 + A_{jk}(y) = M_{jk}}$$

avec  $M_{jk}$  constantes.

Jusqu'à présent, on n'a pas prêté attention au fait qu'une équation du type  $\mathfrak{A}^0 W = G$  à résoudre dans  $H_{\#}^1(Y)$  exige la condition de compatibilité  $\int_Y G(y) dy = 0$ .

Le second membre  $\sum_k \hat{\partial}_k A_{jk}(y)$  de l'équation du niveau  $\boxed{-1}$  satisfait:

$$\int_Y \hat{\partial}_k A_{jk}(y) dy = \int_Y A_{jk}(y) \hat{\partial}_k 1 dy = 0 \quad (\text{car les } A_{jk} \text{ sont périodiques}).$$

Pour le niveau  $\boxed{0}$  on doit trouver les *const.*  $M_{jk}$  et les *fonctions périodiques*  $W_{jk}^2$

$$\mathfrak{A}^0 W_{jk}^2 = M_{jk} - A_{jk}(y) - \sum_i \left( \hat{\partial}_i A_{ij}(y) + A_{ij}(y) \hat{\partial}_i \right) W_k^1$$

Comme  $\int_Y \hat{\partial}_i \left( A_{ij} W_k^1 \right) dy = 0$ , la condition de résolubilité de l'équation en  $W_{jk}^2$  est

$$\boxed{M_{jk} = \int_Y A_{jk}(y) + \sum_i A_{ij}(y) \hat{\partial}_i W_k^1(y) dy}$$

D'où l'équation du niveau 0:

$$\boxed{\sum_{jk} M_{jk} \partial_{jk} v^0(x) = -f(x)}$$

Ainsi, on a trouvé les relations, pour tout  $|\alpha| = 2$ , i.e. pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$

$$\mathfrak{A}^0 W_{\alpha}^2 + \mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 W_{\alpha_2}^1 + \mathfrak{A}_{\alpha}^2 W^0 = M_{\alpha}$$

et, avec l'opérateur  $\mathfrak{M}^0 := \sum_{|\alpha|=2} M_\alpha \partial^\alpha$ , l'équation

$$\mathfrak{M}^0 v^0(x) + f(x) = 0$$

On continue l'Ansatz avec le terme d'ordre 3:

$$v^0(x) + \varepsilon \sum_{|\alpha|=1} W_\alpha^1(y) \partial^\alpha v^0(x) + \varepsilon^2 \sum_{|\alpha|=2} W_\alpha^2(y) \partial^\alpha v^0(x) + \varepsilon^3 \sum_{|\alpha|=3} W_\alpha^3(y) \partial^\alpha v^0(x)$$

et on obtient le système:

$$\sum_{|\alpha|=3} \mathfrak{A}^0 W_\alpha^3 \partial^\alpha v^0 + \sum_j \sum_{|\alpha|=2} \mathfrak{A}_j^1 W_\alpha^2 \partial_j \partial^\alpha v^0 + \sum_{jk} \sum_{|\alpha|=1} \mathfrak{A}_{jk}^2 W_\alpha^1 \partial_{jk} \partial^\alpha v^0 = 0$$

i.e.

$$\sum_{|\alpha|=3} \left( \mathfrak{A}^0 W_\alpha^3 + \mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 W_{\alpha_2 \alpha_3}^2 + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \alpha_2}^2 W_{\alpha_3}^1 \right) \partial^\alpha v^0 = 0$$

ou encore,

$$\mathfrak{A}^0 W_\alpha^3 + \mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 W_{\alpha_2 \alpha_3}^2 + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \alpha_2}^2 W_{\alpha_3}^1 = 0, \quad \forall \alpha, |\alpha| = 3.$$

Mais  $\mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 W_{\alpha_2 \alpha_3}^2 + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \alpha_2}^2 W_{\alpha_3}^1$  n'a aucune raison d'être de moyenne nulle... On sauve la situation en enrichissant à l'Ansatz par les termes engendrés par une fonction  $\varepsilon v^1$

$$\varepsilon v^1(x) + \varepsilon^2 \sum_{|\alpha|=1} W_\alpha^1(y) \partial^\alpha v^1(x) + \varepsilon^3 \sum_{|\alpha|=2} W_\alpha^2(y) \partial^\alpha v^1(x)$$

et au lieu de

$$\sum_{|\alpha|=3} \left( \mathfrak{A}^0 W_\alpha^3 + \mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 W_{\alpha_2 \alpha_3}^2 + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \alpha_2}^2 W_{\alpha_3}^1 \right) \partial^\alpha v^0 = 0$$

on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=3} \left( \mathfrak{A}^0 W_\alpha^3 + \mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 W_{\alpha_2 \alpha_3}^2 + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \alpha_2}^2 W_{\alpha_3}^1 \right) \partial^\alpha v^0 \\ + \sum_{|\alpha|=2} \left( \mathfrak{A}^0 W_\alpha^2 + \mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 W_{\alpha_2}^1 + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \alpha_2}^2 W^0 \right) \partial^\alpha v^1 = 0. \end{aligned}$$

Maintenant l'histoire se répète: il existe des constantes  $M_\alpha$ ,  $|\alpha| = 3$ , t.q. les équations

$$\mathfrak{A}^0 W_\alpha^3 + \mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 W_{\alpha_2 \alpha_3}^2 + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \alpha_2}^2 W_{\alpha_3}^1 = M_\alpha$$

aient des solutions  $W_\alpha^3$  dans  $H_\#^1(Y)$ .

Posant  $\mathfrak{M}^1 = \sum_{|\alpha|=3} M_\alpha \partial^\alpha$  il nous reste alors l'équation

$$\mathfrak{M}^1 v^0 + \mathfrak{M}^0 v^1 = 0$$

Maintenant on peut attaquer la récurrence: L'Ansatz de résolution est

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^\ell \sum_{|\alpha|=\ell} W_\alpha^\ell(y) \partial^\alpha v^m(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}$$

où les profils périodiques  $W_\alpha^\ell$  sont solutions des équations, pour tout  $\alpha$ ,  $|\alpha| = \ell$ ,

$$\mathfrak{A}^0 W_\alpha^\ell + \mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 W_{\alpha_2 \dots \alpha_\ell}^{\ell-1} + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \alpha_2}^2 W_{\alpha_3 \dots \alpha_\ell}^{\ell-2} = M_\alpha$$

et, posant  $\mathfrak{M}^\ell = \sum_{|\alpha|=\ell} M_\alpha \partial^\alpha$ , les fonctions en variables lentes  $v^\ell$  sont solution de

$$\mathfrak{M}^0 v^\ell + \mathfrak{M}^1 v^{\ell-1} + \dots + \mathfrak{M}^\ell v^0 = 0$$

On peut montrer (avec quelque peine!) que l'opérateur à coefficients constants  $\mathfrak{M}^0$  est elliptique.

Jusqu'à présent on n'a pas tenu compte des conditions aux limites sur  $\partial\Omega$ .

Sans ajuster les conditions aux limites, aucune estimation n'est possible. Le développement n'est pas validé. C'est le moment où l'on peut découvrir que l'Ansatz de résolution n'est pas suffisant....

Dans le cadre de ce Ch.1, on a fait tout ce qu'il faut pour éviter les difficultés: La grille fine  $\varepsilon Y$  est calée sur le domaine  $\Omega$ . Donc pour tout  $m$  entier positif,

$$W \in H_\#^m(Y) \text{ et } v \in W_\#^{m,\infty}(\Omega) \implies W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v(x) \in H_\#^m(\Omega).$$

Les conditions aux limites sur la solution  $u^\varepsilon$  du problème  $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$  sont  $[u^\varepsilon] = 0$  et  $[\sum_{jk} \nu_j A_{jk}(\frac{x}{\varepsilon}) \partial_k u^\varepsilon] = 0$  avec  $[ ]$  le saut à travers les côtés opposés de  $\Omega$  et  $\nu_j$  les composantes de la normale. Comme les coefficients  $A_{jk}$  sont suffisamment réguliers, les conditions aux limites reviennent simplement à

$$[u^\varepsilon] = 0 \text{ et } [\partial_\nu u^\varepsilon] = 0 \text{ i.e. } [u^\varepsilon] = 0 \text{ et } [\partial_j u^\varepsilon] = 0, \forall j = 1, \dots, n.$$

On applique les conditions aux limites à l'Ansatz

$$\sum_{m,\ell \geq 0} \varepsilon^{m+\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} W_\alpha^\ell\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^\alpha v^m(x).$$

Comme les profils  $W_\alpha^\ell$  sont périodiques sur  $Y$ , les fonctions  $W_\alpha^\ell(\frac{x}{\varepsilon})$  sont périodiques sur  $\Omega$ . Donc l'Ansatz est périodique si

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, [\partial^\alpha v^m] = 0$$

Maintenant on peut fournir la solution complète du problème et valider l'Ansatz.

On détermine les profils périodiques  $W_\alpha^\ell$  sur  $Y$  par la condition

$$\int_Y W_\alpha^\ell(y) dy = 0, \forall \ell \geq 1, \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| = \ell.$$

On détermine les  $v^m$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , par les conditions périodiques  $[v^m] = 0$ ,  $[\partial_n v^m] = 0$ , et

$$\int_\Omega v^m(x) dx = 0.$$

Comme  $f$  est  $\mathcal{C}^\infty$ -périodique, les  $v^m$  sont aussi  $\mathcal{C}^\infty$ -périodiques.

**Lemme 1.** Pour tout  $v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$  et tout  $W \in L^2_\#(Y)$  on a pour  $\varepsilon = \frac{1}{m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$

$$\int_{\Omega} W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x) \, dx = \int_Y W(y) \, dy \int_{\Omega} v(x) \, dx + \mathcal{O}(m^{-\infty}), \quad m \rightarrow \infty,$$

ce qui signifie que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  la suite  $m \mapsto m^N \left| \int_{\Omega} W(m x) v(x) \, dx - \int_Y W \int_{\Omega} v \right|$  est bornée.

Preuve : Sans restriction on suppose que  $\Omega = (0, 1)^n$ . Soit  $v_j$  et  $w_k$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}^n$  les coefficients de Fourier de  $v$  et  $W$  sur  $\Omega$  et  $Y$  : on a

$$v(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^n} v_j e^{2i\pi x \cdot j} \quad \text{et} \quad W(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} w_k e^{2i\pi y \cdot k}$$

On a

$$\int_{\Omega} W(mx) v(x) \, dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} w_k v_{km} = w_0 v_0 + \sum_{|k| \geq 1} w_k v_{km}.$$

Ceci nous donne le résultat car  $w_0 v_0$  est égal à  $\int_Y W \int_{\Omega} v$  et, comme  $v$  est  $\mathcal{C}^\infty$  périodique,  $v_j$  est un  $\mathcal{O}(j^{-\infty})$ .  $\square$

Ainsi, pour tout  $K \geq 0$ , le développement tronqué

$$U^{[K]}(x, \varepsilon) := \sum_{k=0}^K \varepsilon^k u^k \quad \text{avec} \quad u^k = \sum_{m+\ell=k} \sum_{|\alpha|=\ell} W_\alpha^\ell\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial^\alpha v^m(x)$$

satisfait  $\forall \varepsilon$  tel que  $\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}$

$$[U^{[K]}(\cdot, \varepsilon)] = 0, \quad [\partial_n U^{[K]}(\cdot, \varepsilon)] = 0, \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} U^{[K]}(x, \varepsilon) \, dx = \mathcal{O}(\varepsilon^{K+1}).$$

Pour faire les estimations d'erreur, on calcule d'abord l'effet de l'opérateur  $L^\varepsilon = \operatorname{div} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla$  sur  $u^\varepsilon - U^{[K]}$ . Tenant compte des relations *ad hoc* on obtient

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(u^\varepsilon - U^{[K]}) &= \varepsilon^{K-1} \sum_{m=0}^K \sum_{|\alpha|=K-m} \sum_{|\beta|=1} \mathfrak{A}_\beta^1(\hat{\partial}) W_\alpha^{K-m}(y) \partial^{\alpha+\beta} v^m(x) \\ &+ \varepsilon^{K-1} \sum_{m=0}^K \sum_{|\alpha|=K-m-1} \sum_{|\beta|=2} \mathfrak{A}_\beta^2(\hat{\partial}) W_\alpha^{K-m-1}(y) \partial^{\alpha+\beta} v^m(x) \\ &+ \varepsilon^K \sum_{m=0}^K \sum_{|\alpha|=K-m} \sum_{|\beta|=2} \mathfrak{A}_\beta^2(\hat{\partial}) W_\alpha^{K-m}(y) \partial^{\alpha+\beta} v^m(x) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

Donc  $\|L^\varepsilon(u^\varepsilon - U^{[K]})\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{K-1})$ . Comme  $u^\varepsilon - U^{[K]}$  est périodique sur  $\Omega$  et à moyenne  $\mathcal{O}(\varepsilon^{K+1})$ , on obtient l'estimation grossière

$$\|u^\varepsilon - U^{[K]}\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{K-1}). \quad (6)$$

**Lemme 2.** Pour  $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$  et  $W \in H^1(\Omega)$  on a, quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\|W(\frac{x}{\varepsilon})v(x)\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \|W(\frac{x}{\varepsilon})v(x)\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}).$$

Comme  $\|u^\varepsilon - U^{[K]}\|_{H^1(\Omega)} \leq \|u^\varepsilon - U^{[K+1]}\|_{H^1(\Omega)} + \|\varepsilon^{K+1}u^{K+1}\|_{H^1(\Omega)}$ , on déduit de (6) et du Lemme que (et similairement pour la norme  $L^2$ )

**Théorème 3.** On a les estimations suivantes entre la solution  $u^\varepsilon$  du problème  $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$  et le développement tronqué  $U^{[K]}$  à l'ordre  $K$ , pour  $\varepsilon = \frac{1}{m}$  ( $m$  entier)

$$\|u^\varepsilon - U^{[K]}\|_{L^2(\Omega)} \leq C \varepsilon^{K+1} \quad \text{et} \quad \|u^\varepsilon - U^{[K]}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^K$$

où la constante  $C$  est indépendante de  $\varepsilon$ . Ces estimations sont génériquement optimales.

- Comme corollaire on obtient pour  $K = 0$ :

$$\|u^\varepsilon - v^0\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon) \quad \text{et} \quad \|u^\varepsilon - v^0\|_{H^1(\Omega)} = \mathcal{O}(1)$$

Le deuxième résultat doit être mis en relation avec le fait que l'on peut démontrer par ailleurs la *convergence faible* de  $u^\varepsilon$  vers  $v^0$  dans  $H^1(\Omega)$ .

- Avec  $K = 1$ , on a  $\|u^\varepsilon - U^{[1]}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon$ . Mais sans inclure le terme  $\varepsilon v^1$ , comme  $\|\varepsilon v^1\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon$  on obtient

$$\|u^\varepsilon - \{v^0 + \varepsilon \sum_{j=1}^n W_j^1(\frac{x}{\varepsilon}) \partial_j v^0\}\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon$$

Par contre, si on veut une estimation en  $\varepsilon^2$  pour la norme  $L^2(\Omega)$  on doit garder la contribution de  $\varepsilon v^1$ .

- On obtient une approximation de  $\nabla u^\varepsilon$  en dérivant  $v^0 + \varepsilon \sum_{j=1}^n W_j^1(\frac{x}{\varepsilon}) \partial_j v^0$ . On peut jeter les termes  $\varepsilon \sum_{j=1}^n W_j^1(\frac{x}{\varepsilon}) \partial_{j,k} v^0$  qui s'estiment aussi en  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ . Posant

$$P^\varepsilon = \text{Id} + \left( \widehat{\partial}^k W_j^1 \right)_{j,k}$$

on obtient la matrice des "correcteurs" et l'estimation

$$\|\nabla u^\varepsilon - P^\varepsilon(\frac{x}{\varepsilon}) \nabla v^0\|_{L^2(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Terminons ce chapitre par quelques remarques sur la régularité.

Pour avoir un sens, le développement asymptotique complet requiert que les  $v^m$  soient  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ , donc, en l'occurrence, un second membre  $\mathcal{C}^\infty$  périodique.

Par contre, la régularité  $H^1(Y)$  des profils  $W_\alpha^\ell$  est assurée par des hypothèses faibles sur les coefficients  $A_{j,k}(y)$ . Il suffit qu'ils soient  $L^\infty(Y)$  (avec l'hypothèse de coercivité). Dans ce cas, on doit utiliser la formulation faible pour les problèmes impliquant  $\mathfrak{A}^0(\widehat{\partial})$ .



## Chapitre 2. Analyse Asymptotique à deux niveaux pour Dirichlet.

Echelle macro: Domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , variable  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Echelle micro: Cellule  $Y$  cube unité  $Y = (0, 1)^n$ , variable  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .

On suppose que  $\Omega$  est un domaine à bord  $\partial\Omega$  régulier. On considère les conditions de Dirichlet sur  $\partial\Omega$ . L'espace variationnel est  $H_0^1(\Omega)$ .

Soit  $y \mapsto A(y)$  une application  $C_{\#}^{\infty}(\bar{Y})$  à valeurs dans les matrices symétriques définies positives (i.e. périodiques sur  $Y$ ).

Soit  $\varepsilon \in (0, 1)$  quelconque.

Problème ( $\mathfrak{P}_{\text{Dir}}^{\varepsilon}$ )

Trouver  $u^{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^{\varepsilon}(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx$$

Pour tout  $f \in H^{-1}(\Omega)$ , le problème ( $\mathfrak{P}_{\text{Dir}}^{\varepsilon}$ ) a une solution unique. On suppose que  $f \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ .

Tirant les enseignements du Ch.1, on peut construire un Ansatz en

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^{m+\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} W_{\alpha}^{\ell}(y) \partial^{\alpha} v^m(x), \quad y = \frac{x}{\varepsilon}$$

pour la résolution de l'équation intérieure  $L^{\varepsilon} u^{\varepsilon} = f$  dans  $\Omega$ , où  $L^{\varepsilon} = \text{div} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla$ .

Le terme d'ordre 0 de la trace Dirichlet de l'Ansatz est  $v^0|_{\partial\Omega}$ . Donc on complète l'équation intérieure  $\mathfrak{M}^0 v^0 = -f$  que doit satisfaire  $v^0$  par la condition de Dirichlet nulle:

Problème ( $\mathfrak{Q}_{\text{Dir}}$ )

Trouver  $v^0 \in H_0^1(\Omega)$ ,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \sum_{jk} M_{jk} \partial_k v^0(x) \partial_j v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx$$

avec

$$M_{jk} = \int_Y A_{jk}(y) + \sum_{\ell} A_{j\ell}(y) \hat{\partial}_{\ell} W_k^1(y) \, dy$$

Le terme en  $\varepsilon^1$  de la trace Dirichlet de l'Ansatz est  $v^1(x) + \sum_j W_j^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_j v^0(x)|_{\partial\Omega}$ .

Bien sûr, la dérivée normale de  $v^0$  n'a aucune raison d'être nulle, donc la partie  $\sum_j W_j^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_j v^0(x)$  possède généralement une trace non nulle.

Comme, en attendant mieux, on ne voit pas comment choisir la trace de  $v^1(x)$  pour compenser la trace du terme précédent, on décide pour le moment de considérer comme approximation de  $u^{\varepsilon}$  l'Ansatz à deux niveaux basé sur  $v^0$  la solution du problème ( $\mathfrak{Q}_{\text{Dir}}$ )

$$U(x, \varepsilon) := v^0(x) + \varepsilon \sum_j W_j^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_j v^0(x)$$

Pour estimer  $u^\varepsilon - U(\varepsilon)$ , on va évaluer

$$\|F(\varepsilon)\|_{H^{-1}(\Omega)} \quad \text{où } F(\varepsilon) := L^\varepsilon(U(\varepsilon) - u^\varepsilon)$$

$$\text{et } \|\Phi(\varepsilon)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \quad \text{où } \Phi(\varepsilon) := (U(\varepsilon) - u^\varepsilon)|_{\partial\Omega}.$$

On a, avec une constante  $C > 0$  indépendante de  $\varepsilon$ :

$$\|u^\varepsilon - U(\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left( \|F(\varepsilon)\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\Phi(\varepsilon)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right). \quad (7)$$

On rappelle que, cf (5)

$$L^\varepsilon\left(W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v(x)\right) = \varepsilon^{-2}\mathfrak{A}^0 W v + \varepsilon^{-1} \sum_j \mathfrak{A}_j^1 W \partial_j v + \sum_{jk} \mathfrak{A}_{jk}^2 W \partial_j \partial_k v$$

Donc (on rappelle que  $W^0 = 1$ )

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(U(\varepsilon)) &= L^\varepsilon(W^0 v^0 + \varepsilon \sum_\ell W_\ell^1 \partial_\ell v^0) = \\ &\varepsilon^{-1} \sum_j \mathfrak{A}_j^1 W^0 \partial_j v^0 + \sum_{jk} \mathfrak{A}_{jk}^2 W^0 \partial_j \partial_k v^0 + \\ &\varepsilon^{-1} \sum_\ell \mathfrak{A}^0 W_\ell^1 \partial_\ell v^0 + \sum_{\ell j} \mathfrak{A}_j^1 W_\ell^1 \partial_\ell \partial_j v^0 + \varepsilon \sum_{\ell jk} \mathfrak{A}_{jk}^2 W_\ell^1 \partial_\ell \partial_j \partial_k v^0 \end{aligned}$$

Or  $\mathfrak{A}_j^1 W^0 + \mathfrak{A}^0 W_j^1 = 0$  et  $\mathfrak{A}_{jk}^2 W^0 + \mathfrak{A}_j^1 W_k^1 = M_{jk} - \mathfrak{A}^0 W_{jk}^2$ . Donc

$$\begin{aligned} L^\varepsilon(W^0 v^0 + \varepsilon \sum_\ell W_\ell^1 \partial_\ell v^0) &= \sum_{jk} M_{jk} \partial_j \partial_k v^0 - \\ &\sum_{jk} \mathfrak{A}^0 W_{jk}^2 \partial_j \partial_k v^0 + \varepsilon \sum_{\ell jk} \mathfrak{A}_{jk}^2 W_\ell^1 \partial_\ell \partial_j \partial_k v^0 \end{aligned}$$

Comme  $\sum_{jk} M_{jk} \partial_j \partial_k v^0 = -f$ , on a trouvé pour  $F(\varepsilon) = L^\varepsilon(U(\varepsilon) - u^\varepsilon)$ :

$$F(\varepsilon) = - \sum_{jk} \mathfrak{A}^0 W_{jk}^2 \partial_j \partial_k v^0 + \varepsilon \sum_{\ell jk} \mathfrak{A}_{jk}^2 W_\ell^1 \partial_\ell \partial_j \partial_k v^0.$$

On estime chaque morceau de  $F(\varepsilon)$ :

(i) Concernant le premier:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon \mathfrak{A}_{jk}^2 W_\ell^1 \partial_\ell \partial_j \partial_k v^0\|_{H^{-1}(\Omega)} &\leq \|\varepsilon \mathfrak{A}_{jk}^2 W_\ell^1 \partial_\ell \partial_j \partial_k v^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \varepsilon \|\mathfrak{A}_{jk}^2 W_\ell^1\|_{L^\infty(Y)} \|v^0\|_{H^3(\Omega)} = \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

(ii) Les termes  $\mathfrak{A}^0 W_{jk}^2 \partial_j \partial_k v^0$  sont des sommes de termes en  $\widehat{\partial}_\ell W v$ . Soit  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \widehat{\partial}_\ell W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v(x)\varphi(x) \, dx \right| &= \varepsilon \left| \int_\Omega \partial_\ell W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)v(x)\varphi(x) \, dx \right| \\ &= \varepsilon \left| \int_\Omega W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\partial_\ell(v(x)\varphi(x)) \, dx \right| \\ &\leq C \varepsilon \|W\|_{L^\infty(Y)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

Avec (i) et (ii) on a obtenu

$$\|F(\varepsilon)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C \varepsilon. \quad (8)$$

La trace  $\Phi(\varepsilon)$  de  $U(\varepsilon) - u^\varepsilon$  est en fait égale à

$$\Phi(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{\ell} W_{\ell}^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{\ell} v^0(x) \Big|_{\partial\Omega}.$$

On doit estimer  $\|\varepsilon W_{\ell}^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{\ell} v^0(x)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}$ .

On va construire un relèvement de  $\varepsilon W_{\ell}^1 \partial_{\ell} v^0 \Big|_{\partial\Omega}$  dans une couche  $K^\varepsilon$  autour du bord. Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  une fonction de troncature telle que  $\chi(t) \equiv 1$  si  $|t| \leq 1$ ,  $\chi(t) \equiv 0$  si  $|t| \geq 2$ . Soit  $r$  la distance à  $\partial\Omega$ . Le relèvement considéré est

$$\varepsilon \chi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) W_{\ell}^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{\ell} v^0(x).$$

Il est à support dans la couche  $K^\varepsilon = \{x \in \Omega; r < 2\varepsilon\}$ . Nos estimations reposent sur le

**Lemme 4.** Pour tout  $v \in H^1(\Omega)$  on a  $\|v\|_{L^2(K^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)}$  avec  $C$  indépendant de  $\varepsilon$ .

Preuve : Pour  $0 < \rho < 2\varepsilon$ , soit  $\Gamma_\rho$  la surface  $r = \rho$ . On a la majoration

$$\exists C, \quad \forall \rho < \rho_0, \quad \int_{\Gamma_\rho} |v|^2 d\sigma \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

D'où, en intégrant en  $\rho$  de 0 à  $2\varepsilon$

$$\|v\|_{L^2(K^\varepsilon)}^2 \leq C \int_0^{2\varepsilon} \int_{\Gamma_\rho} |v|^2 d\sigma d\rho \leq C \varepsilon \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad \square$$

(i) On a:

$$\|\varepsilon \chi\left(\frac{r}{\varepsilon}\right) W_{\ell}^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_{\ell} v^0(x)\|_{H^1(\Omega)} \leq C (\|v^0\|_{H^1(K^\varepsilon)} + \varepsilon \|v^0\|_{H^2(K^\varepsilon)}).$$

(ii) Or grâce au Lemme,  $\|v^0\|_{H^1(K^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{1/2} \|v^0\|_{H^2(\Omega)}$

On a donc obtenu

$$\|\Phi(\varepsilon)\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq C \varepsilon^{1/2}. \quad (9)$$

Les inégalités (7)–(9) donnent

**Théorème 5.** On a l'estimation en énergie  $\|u^\varepsilon - U(\varepsilon)\|_{H^1(\Omega)} \leq \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ .

- On n'améliore pas l'estimation en ajoutant le terme  $\varepsilon^2 \sum_{jk} W_{jk}^2 \partial_{jk} v^0$  à  $U(\varepsilon)$ .
- On a la même estimation pour le problème de Neumann.
- On verra que cette estimation est optimale (on butte sur la première couche limite de bord).

## Chapitre 3. Problèmes à trous.

Après avoir introduit le cadre commun à tous les problèmes à trous que nous étudierons, nous considérerons dans ce chapitre deux sortes de conditions aux limites sur le bord des trous correspondant à la limite des inclusions molles et dures.

### 3.1 Généralités

Soit un ensemble fini  $I$  de "trous"  $(\tau_i)_{i \in I}$  : chaque  $\tau_i$  est un sous-ensemble connexe de la cellule unité  $Y$ . Soit  $\omega$  l'ensemble périodique de période  $\mathbf{1}$  :

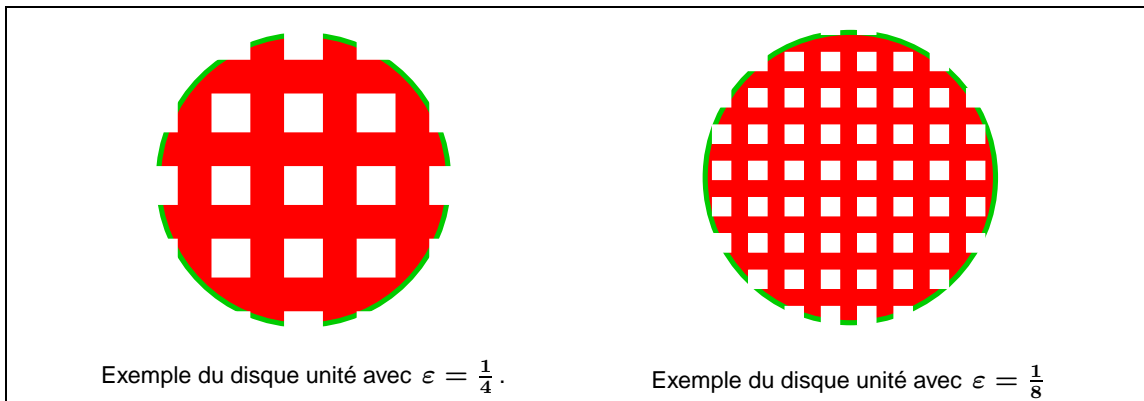
$$\omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; x = y + z \text{ avec } y \in Y \setminus (\cup_{i \in I} \tau_i) \text{ et } z \in \mathbb{Z}^n\}$$

et on suppose, pour fixer les idées que  $\partial\tau_i$  ne rencontre pas  $\partial Y$ , mais surtout que

$$Y \cap \omega \text{ est connexe.}$$

Pour  $\varepsilon > 0$  le domaine dépend de  $\varepsilon$  :  $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$  avec les 2 parties de son bord

$$\gamma^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon(\partial\omega) \text{ et } \Gamma^\varepsilon = \partial\Omega \cap \Omega^\varepsilon.$$



Décrivons maintenant les différentes conditions aux limites que l'on va étudier.

On considère toujours les conditions de Dirichlet sur le bord "extérieur" (i.e.  $\Gamma^\varepsilon$ ).

Sur les bords de cellule  $\gamma^\varepsilon$ , on pourra prendre les conditions de

- (i) Neumann (Classe 1)
- (ii) Dirichlet  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(iia) constantes sur chaque trou (Classe 1)} \\ \text{(iib) nulles (Classe Exp.)} \end{array} \right.$

Espaces variationnels  $\mathfrak{W}^\varepsilon$  correspondants:

- (i) Neumann  $\mathfrak{W}^\varepsilon = H_0^1(\Omega^\varepsilon, \Gamma^\varepsilon) := \{u \in H^1(\Omega^\varepsilon) ; u|_{\Gamma^\varepsilon} = 0\}$
- (ii) Dirichlet  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(iia) } \mathfrak{W}^\varepsilon = \{u \in H_0^1(\Omega) ; u = \text{cst dans chaque trou}\} \\ \text{(iib) } \mathfrak{W}^\varepsilon = H_0^1(\Omega^\varepsilon) \end{array} \right.$

Soit  $A \in \mathcal{C}_{\#}^{\infty}(\bar{Y})$  comme d'habitude et  $\varepsilon \in (0, 1)$  quelconque.

Problème ( $\mathfrak{P}^{\varepsilon}$ ) Trouver  $u^{\varepsilon} \in \mathfrak{V}^{\varepsilon}$ ,

$$\forall v \in \mathfrak{V}^{\varepsilon}, \quad \int_{\Omega^{\varepsilon} \text{ ou } \Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^{\varepsilon}(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega^{\varepsilon} \text{ ou } \Omega} f(x) v(x) \, dx$$

Pour tout  $f \in L^2(\Omega^{\varepsilon})$ , le problème ( $\mathfrak{P}^{\varepsilon}$ ) a une solution unique. On suppose  $f \in \mathcal{C}^{\infty}(\bar{\Omega})$ .

### 3.2 Neumann (inclusions molles)

C'est la limite des "inclusions molles" (*soft*). Cela signifie que ce problème est la limite en présence d'un autre paramètre, disons  $\delta$ . Le problème avec ce paramètre est posé sur  $\Omega$ , avec la matrice  $A$  définie sur  $Y$  dépendant de  $\delta$ : sur les  $\tau_i$  (qui sont les inclusions),  $A_{\{\delta\}} = \delta A_{\{1\}}$  et les conditions de Neumann sur le bord des trous apparaissent à la limite quand  $\delta \rightarrow 0$ .

L'opérateur intérieur est  $L^{\varepsilon} = \operatorname{div} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla$  et l'opérateur de Neumann sur  $\gamma^{\varepsilon}$  est  $T^{\varepsilon}$ :

$$T^{\varepsilon} u = \sum_{jk} \nu_j^{\varepsilon}(x) A_{jk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_k u \Big|_{\gamma^{\varepsilon}} \quad \text{où, en fait, } \nu^{\varepsilon}(x) = \nu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

On reprend l'Ansatz élémentaire  $W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)$ . On rappelle

$$L^{\varepsilon}\left(W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\right) = \varepsilon^{-2} \mathfrak{A}^0 W v + \varepsilon^{-1} \sum_j \mathfrak{A}_j^1 W \partial_j v + \sum_{jk} \mathfrak{A}_{jk}^2 W \partial_j \partial_k v$$

et on a

$$T^{\varepsilon}\left(W\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v(x)\right) \Big|_{\gamma^{\varepsilon}} = \varepsilon^{-1} \mathfrak{B}^0 W v + \sum_j \mathfrak{B}_j^1 W \partial_j v$$

avec

$$\mathfrak{B}^0 W = \sum_{jk} \nu_j(y) A_{jk}(y) \hat{\partial}_k W \Big|_{Y \cap \partial \omega} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}^1 W = \sum_j \nu_j(y) A_{jk}(y) W \Big|_{Y \cap \partial \omega}.$$

On voit que  $\mathfrak{B}^0$  est l'opérateur de Neumann associé à  $\mathfrak{A}^0$ , et  $\mathfrak{B}^1$  celui de  $\mathfrak{A}^1$ .

On commence l'Ansatz par  $W^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) v^0(x)$  et par identification des puissances  $\varepsilon^{-2}$  pour l'équation intérieure et  $\varepsilon^{-1}$  pour la condition de Neumann on trouve le problème aux limites cellulaire

$$\begin{cases} \mathfrak{A}^0 W^0 = 0 & \text{dans } Y \cap \omega \\ \mathfrak{B}^0 W^0 = 0 & \text{sur } Y \cap \partial \omega \end{cases} \quad \text{et} \quad W^0 \text{ 1-périodique.}$$

dont la solution est  $W^0 = 1$  comme auparavant.

Ainsi on continue l'Ansatz comme d'habitude par  $\sum_j W_j^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_j v^0(x)$  et on trouve les équations

$$\begin{cases} \mathfrak{A}^0 W_j^1 + \mathfrak{A}_j^1 W^0 = 0 & \text{dans } Y \cap \omega \\ \mathfrak{B}^0 W_j^1 + \mathfrak{B}_j^1 W^0 = 0 & \text{sur } Y \cap \partial \omega \end{cases} \quad \text{et} \quad W_j^1 \text{ 1-périodique.}$$

Avec l'espace  $H_{\#}^1(Y \cap \omega)$  des fonctions  $H^1$  sur  $Y \cap \omega$  et 1-périodiques, et les application bilinéaires

$$\mathfrak{a}^0(W, V) = \sum_{\ell k} A_{\ell k}(y) \hat{\partial}_k W \hat{\partial}_\ell V \quad \text{et} \quad \mathfrak{a}_j^1(W, V) = \sum_{\ell} A_{\ell j}(y) W \hat{\partial}_\ell V$$

la formulation variationnelle est:

Problème ( $\mathfrak{D}_\#$ )

Trouver  $W_j^1 \in H_\#^1(Y \cap \omega)$ ,

$$\forall V \in H_\#^1(Y \cap \omega), \quad \int_{Y \cap \omega} \mathfrak{a}^0(W_j^1, V) \, dy = - \int_{Y \cap \omega} \mathfrak{a}_j^1(W^0, V) \, dy$$

qui est résoluble, car son second membre est orthogonal aux constantes.

La résolution du problème pour trouver les prochains profils  $W_{jk}^2$

$$\begin{cases} \mathfrak{A}^0 W_{jk}^2 + \mathfrak{A}_j^1 W_k^1 + \mathfrak{A}_{jk}^2 W^0 = M_{jk} & \text{dans } Y \cap \omega \\ \mathfrak{B}^0 W_{jk}^2 + \mathfrak{B}_j^1 W_k^1 = 0 & \text{sur } Y \cap \partial\omega \quad \text{et } W_{jk}^2 \text{ 1-périodique.} \end{cases}$$

est un problème de Neumann dans  $H_\#^1(Y \cap \omega)$  et requiert encore la condition de compatibilité d'orthogonalité aux constantes, d'où la détermination des coefficients  $M_{jk}$  tels que

$$\int_{Y \cap \omega} M_{jk} \, dy = \int_{Y \cap \omega} A_{jk}(y) + \sum_i A_{ij}(y) \hat{\partial}_i W_k^1(y) \, dy$$

D'où

$$M_{jk} = (\text{mes}(Y \cap \omega))^{-1} \int_{Y \cap \omega} A_{jk}(y) + \sum_i A_{ij}(y) \hat{\partial}_i W_k^1(y) \, dy$$

et  $v^0$  est solution du problème de Dirichlet sur  $\Omega$ :

$$v^0 \in H_0^1(\Omega), \quad \sum_{jk} M_{jk} \partial_{jk} v^0 = -f.$$

D'où le démarrage pour l'Ansatz de résolution intérieur du problème ( $\mathfrak{P}^\varepsilon$ )

$$\partial^\alpha v^0(x)|_{\Omega^\varepsilon} + \varepsilon \sum_j W_j^1(y)|_{Y \cap \omega} \partial_j v^0(x)|_{\Omega^\varepsilon} + \varepsilon^2 \sum_{jk} W_{jk}^2(y)|_{Y \cap \omega} \partial_{jk} v^0(x)|_{\Omega^\varepsilon}, \quad y = \frac{x}{\varepsilon}$$

On en tire les mêmes estimations pour l'asymptotique à deux niveaux que dans le cas sans trous, cf Th. 5.

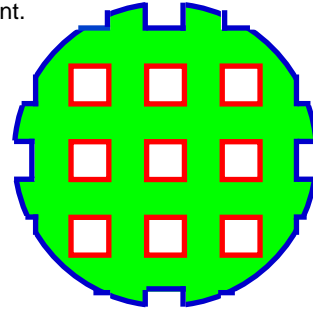
### 3.3 Dirichlet constant (inclusions dures)

C'est la limite (*stiff*), c'est-à-dire quand  $\delta \rightarrow \infty$ , cf début du § précédent.

Soit  $\tau_i^\varepsilon, i \in I^\varepsilon$  l'ensemble des trous contenus dans  $\Omega$  et on note  $\partial^\varepsilon \Omega$  la réunion de  $\Gamma^\varepsilon$  avec le bord des trous incomplètement contenus dans  $\Omega$ .

Pour  $v \in H^1(\Omega)$ , on a  $v \in \mathfrak{X}^\varepsilon$  iff

$$v|_{\partial^\varepsilon \Omega} = 0 \quad \text{et} \quad v|_{\tau_i^\varepsilon} = c_i^\varepsilon, \quad c_i^\varepsilon \text{ constantes.}$$



Problème ( $\mathfrak{P}^\varepsilon$ ): Trouver  $u^\varepsilon \in \mathfrak{X}^\varepsilon$ ,

$$\forall v \in \mathfrak{X}^\varepsilon, \quad \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega} f(x) v(x) \, dx.$$

Equations du problème  $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$ :  $\forall i \in I^\varepsilon, \exists c_i^\varepsilon \in \mathbb{R}, u^\varepsilon|_{\tau_i^\varepsilon} = c_i^\varepsilon$  et

$$L^\varepsilon u^\varepsilon = -f \text{ dans } \Omega^\varepsilon, \quad \text{et} \quad \int_{\partial\tau_i^\varepsilon} T^\varepsilon u^\varepsilon \, d\sigma = \int_{\tau_i^\varepsilon} f(x) \, dx, \quad \forall i \in I^\varepsilon.$$

L'équation intérieure est trouvée de façon classique avec des fonctions test dans  $C_0^\infty(\Omega^\varepsilon)$  et la deuxième avec une fonction test qui vaut 1 dans le trou  $\tau_i^\varepsilon$  et 0 dans les autres. Ainsi, le problème  $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$  admet des conditions de Dirichlet relaxée sur le bord des trous, et, en compensation, une condition de Neumann en moyenne sur le bord de chaque trou.

On commence l'analyse par un résultat de résolution pour un problème de cellule.

**Lemme 6.** Soit  $G_i \in H^{3/2}(\partial\tau_i)$  et  $d_i \in H^{1/2}(\partial\tau_i)$ ,  $i \in I$  (ensemble des trous dans  $Y$ ) et  $F \in L^2(Y \cap \omega)$ . Le problème de cellule est:

$$(\mathfrak{D}) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}^0 W = F & \text{dans } Y \cap \omega \\ \int_{\partial\tau_i} \mathfrak{B}^0 W \, d\sigma_y = \int_{\partial\tau_i} d_i \, d\sigma_y & \forall i \in I \\ \exists c_i \in \mathbb{R}, W|_{\partial\tau_i} = G_i + c_i, & \forall i \in I \quad \text{et } W \text{ 1-périodique.} \end{cases}$$

Il existe une solution  $W \in H_\#^1(Y \cap \omega)$  (unique à une constante additive près) ssi

$$\int_{Y \cap \omega} F(y) \, dy = \sum_i \int_{\partial\tau_i} d_i \, d\sigma_y.$$

Preuve: Soit  $G \in H^2(Y \cap \omega)$ , un relèvement 1-périodique des traces  $G_i$ ,  $i \in I$ . On pose  $\mathfrak{A}^0 G = \check{F}$  et  $\int_{\partial\tau_i} \mathfrak{B}^0 G = \int_{\partial\tau_i} \check{d}_i$ . L'intégration par parties contre 1 donne

$$\int_{Y \cap \omega} \check{F}(y) \, dy = \int_{Y \cap \omega} \mathfrak{A}^0 G(y) \, dy = \int_{Y \cap \partial\omega} \mathfrak{B}^0 G \, d\sigma_y = \sum_{i \in I} \int_{\partial\tau_i} \check{d}_i \, d\sigma_y.$$

On peut donc se ramener à  $G_i = 0$ ,  $i \in I$ . On résout le problème  $(\mathfrak{D})$  avec  $G_i = 0$  par formulation variationnelle sur

$$V_\#(Y) = \{V \in H_\#^1(Y); \quad \nabla V|_{\tau_i} = 0, \quad i \in I\}.$$

Trouver  $W \in V_\#(Y)$

$$\forall W \in V_\#(Y), \quad \int_Y \mathfrak{a}^0(W, V) \, dy = \int_{Y \cap \omega} F V \, dy - \sum_{i \in I} \int_{\partial\tau_i} d_i V \, d\sigma_y.$$

La forme  $(W, V) \mapsto \int_Y \mathfrak{a}^0(W, V) \, dy$  est coercive sur  $V(Y)/\mathbb{R}$ . La résolubilité est assurée par l'orthogonalité du second membre aux constantes, i.e.

$$\int_{Y \cap \omega} F \, dy - \sum_{i \in I} \int_{\partial\tau_i} d_i \, d\sigma_y = 0,$$

... qui est l'hypothèse.  $\square$

On part de l'Ansatz à 3 niveaux habituel, avec  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ :

$$W^0(y) v^0(x) + \varepsilon \sum_j W_j^1(y) \partial_j v^0(x) + \varepsilon^2 \sum_{j,k} W_{jk}^2(y) \partial_{jk} v^0(x) + \dots$$

On étudie successivement l'effet sur l'Ansatz des équations

(a)  $L^\varepsilon u^\varepsilon = -f$ ,

(b)  $u^\varepsilon = c_i^\varepsilon$  sur  $\partial\tau_i^\varepsilon$

(c)  $\int_{\partial\tau_i^\varepsilon} T^\varepsilon u^\varepsilon d\sigma = \int_{\tau_i^\varepsilon} f(x) dx$

• L'équation  $L^\varepsilon u^\varepsilon = -f$  se traduit aux ordres 0, 1 et 2 par

(a0)  $\mathfrak{A}^0 W^0 = 0$

(a1)  $\mathfrak{A}^0 W_j^1 + \mathfrak{A}_j^1 W^0 = 0$ ,

(a2)  $\mathfrak{A}^0 W_{jk}^2 + \mathfrak{A}_j^1 W_k^1 + \mathfrak{A}_{jk}^2 W^0 = M_{jk} \in \mathbb{R}$  et  $\sum_{jk} M_{jk} \partial_{jk} v^0 = -f$

• L'équation  $u^\varepsilon = c_i^\varepsilon$  sur  $\partial\tau_i^\varepsilon$  se traduit à l'ordre 0 par

(b0)  $W^0 = c_i^0$  sur  $\partial\tau_i$  où  $\tau_i = \varepsilon^{-1} \tau_i^\varepsilon$ .

Comme on ne peut imposer à  $v^0$  d'être constant sur  $\partial\tau_i^\varepsilon$ , on regarde son développement de Taylor en  $x = \zeta + \varepsilon y$ ,  $\zeta \in \varepsilon\mathbb{Z}^n$ ,  $y \in Y$ :

$$v^0(\zeta + \varepsilon y) = v^0(\zeta) + \varepsilon \sum_j y_j \partial_j v^0(x) - \varepsilon^2 \sum_{jk} \frac{1}{2} y_j y_k \partial_{jk} v^0(x) + \dots$$

D'où, pour  $y \in \partial\tau_i$  et  $x = \zeta + \varepsilon y \in \partial\tau_i^\varepsilon$ :

$$W^0 v^0(x) + \varepsilon \sum_j W_j^1(y) \partial_j v^0(x) \simeq c_i^0 v^0(\zeta) + \varepsilon \sum_j (W_j^1(y) + y_j W^0) \partial_j v^0(x)$$

On déduit

(b1)  $W_j^1(y) + y_j W^0 = c_{i,j}^1$  sur  $\partial\tau_i$

Développant

$$\partial_j v^0(\zeta + \varepsilon y) = \partial_j v^0(\zeta) + \varepsilon \sum_k y_k \partial_{jk} v^0(x) + \dots$$

on trouve de même

(b2)  $W_{jk}^2(y) + y_j W_k^1 + \frac{1}{2} y_j y_k W^0 = c_{i,jk}^2$  sur  $\partial\tau_i$

• L'équation  $\int_{\partial\tau_i^\varepsilon} T^\varepsilon u^\varepsilon d\sigma = \int_{\tau_i^\varepsilon} f(x) dx$  se traduit à l'ordre 0 par

(c0)  $\int_{\partial\tau_i} \mathfrak{B}^0 W^0 d\sigma = 0$

**Lemme 7.** Les seules solutions du système (a0), (b0), (c0) sont les constantes sur  $Y \cap \omega$ . D'où  $W^0 = 1$ .

On rappelle que, avec  $\mathfrak{B}^0$  l'opérateur de Neumann associé à  $\mathfrak{A}^0$ , et  $\mathfrak{B}^1$  celui de  $\mathfrak{A}^1$ :

$$T^\varepsilon \left( W \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) v(x) \right) \Big|_{\gamma^\varepsilon} = \varepsilon^{-1} \mathfrak{B}^0 W v + \sum_j \mathfrak{B}_j^1 W \partial_j v.$$



Remplaçant  $u^\varepsilon$  par l'Ansatz à 3 niveaux, l'équation devient, par scaling de  $\tau_i^\varepsilon$  sur  $\tau_i$

$$\int_{\partial\tau_i} \left\{ \varepsilon^{-2} \mathfrak{B}^0 W^0 v^0(\zeta + \varepsilon y) + \varepsilon^{-1} \sum_j (\mathfrak{B}^0 W_j^1(y) + \mathfrak{B}_j^1 W^0) \partial_j v^0(\zeta + \varepsilon y) \right. \\ \left. + \sum_{jk} (\mathfrak{B}^0 W_{jk}^2(y) + \mathfrak{B}_j^1 W_k^1(y)) \partial_{jk} v^0(\zeta + \varepsilon y) \right\} d\sigma_y \simeq \int_{\tau_i} f(\zeta + \varepsilon y) dy.$$

Comme  $W^0 = 1$ ,  $\mathfrak{B}^0 W^0 \equiv 0$  et le terme en  $\varepsilon^{-2}$  disparaît. L'annulation du terme en  $\varepsilon^{-1}$  donne :

$$(c1) \quad \boxed{\int_{\partial\tau_i} (\mathfrak{B}^0 W_j^1 + \mathfrak{B}_j^1 W^0) d\sigma_y = 0}$$

Avec le développement de Taylor  $\partial_j v^0(\zeta + \varepsilon y) \simeq \partial_j v^0(\zeta) + \varepsilon \sum_k y_k \partial_{jk} v^0(x)$  :

$$(c2) \quad \boxed{\int_{\partial\tau_i} (\mathfrak{B}^0 W_{jk}^2 + \mathfrak{B}_j^1 W_k^1 + y_k (\mathfrak{B}^0 W_j^1 + \mathfrak{B}_j^1 W^0)) d\sigma_y = m_{i,jk}}$$

• Pour tout  $j$  le système (a1), (b1), (c1) d'inconnue  $W_j^1$  s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}^0 W_j^1 = -\mathfrak{A}_j^1 W^0, \quad \text{dans } Y \cap \omega \\ \int_{\partial\tau_i} \mathfrak{B}^0 W_j^1 = -\int_{\partial\tau_i} \mathfrak{B}_j^1 W^0 d\sigma, \quad \forall i \in I \\ \exists c_{i,j}^1 \in \mathbb{R}, \quad W_j^1|_{\partial\tau_i} = -y_j + c_{i,j}^1, \quad \forall i \in I \quad \text{et } W_j^1 \text{ 1-périodique.} \end{array} \right.$$

Il est résoluble car il satisfait la condition de compatibilité, cf Lemme 6

$$\int_{Y \cap \omega} \mathfrak{A}_j^1 W^0 dy = \int_{Y \cap \partial\omega} \mathfrak{B}_j^1 W^0 d\sigma_y.$$

• Pour tout  $j, k$  le système (a2), (b2), (c2) d'inconnue  $W_{jk}^2$  s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{A}^0 W_{jk}^2 = M_{jk} - \mathfrak{A}_j^1 W_k^1 - \mathfrak{A}_{jk}^2 W^0, \\ \int_{\partial\tau_i} \mathfrak{B}^0 W_{jk}^2 = m_{i,jk} - \int_{\partial\tau_i} \mathfrak{B}_j^1 W_k^1 + y_k (\mathfrak{B}^0 W_j^1 + \mathfrak{B}_j^1 W^0) d\sigma \\ \exists c_{i,jk}^2 \in \mathbb{R}, \quad W_{jk}^2|_{\partial\tau_i} = -y_j W_k^1 + \frac{1}{2} y_j y_k W^0 + c_{i,jk}^2, \end{array} \right.$$

complété par les équations sur  $v^0$

$$\sum_{jk} M_{jk} \partial_{jk} v^0(x) = -f(x) \quad \text{et} \\ \forall i \in I, \quad \sum_{jk} m_{i,jk} \partial_{jk} v^0(\zeta + \varepsilon y) = \int_{\tau_i} f(\zeta + \varepsilon y) dy.$$

La deuxième relation s'écrivant

$$\sum_{jk} m_{i,jk} \partial_{jk} v^0(\zeta) = \int_{\tau_i} f(\zeta) dy + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

on obtient que  $\forall i \in I$ ,  $\boxed{m_{i,jk} = -\text{mes } \tau_i M_{jk}}$

La condition de compatibilité su système (a2), (b2), (c2) s'écrit.

$$\int_{Y \cap \omega} \left( M_{jk} - \mathfrak{A}_j^1 W_k^1 - \mathfrak{A}_{jk}^2 W^0 \right) dy = - \sum_{i \in I} \left\{ \text{mes } \tau_i M_{jk} + \int_{\partial \tau_i} \mathfrak{B}_j^1 W_k^1 + y_k (\mathfrak{B}^0 W_j^1 + \mathfrak{B}_j^1 W^0) d\sigma \right\}$$

Les relations  $\text{mes}(Y \cap \omega) + \sum_i \text{mes } \tau_i = \text{mes } Y = 1$  et  $\int_{Y \cap \omega} \mathfrak{A}_j^1 W_k^1 = \sum_{i \in I} \int_{\partial \tau_i} \mathfrak{B}_j^1 W_k^1$  donnent

$$M_{jk} = \int_{Y \cap \omega} A_{jk} dy - \sum_{i \in I} \int_{\partial \tau_i} y_k (\mathfrak{B}^0 W_j^1 + \mathfrak{B}_j^1 W^0) d\sigma$$

Le dernier terme est  $\int_{Y \cap \partial \omega} [\dots]$  donc égal à

$$\int_{Y \cap \omega} -y_k \underbrace{(\mathfrak{A}^0 W_j^1 + \mathfrak{A}_j^1 W^0)}_{=0} + \underbrace{\mathfrak{a}^0(W_j^1, y_k)}_{=0} + \underbrace{\mathfrak{a}_j^1(W^0, y_k)}_{=0} dy$$

D'où, finalement

$$M_{jk} = \int_{Y \cap \omega} A_{jk}(y) + \sum_{\ell} A_{k\ell}(y) \hat{\partial}_{\ell} W_j^1(y) dy$$

## Chapitre 4. Problèmes à trous Dirichlet.

Soit un ensemble fini  $I$  de "trous"  $(\tau_i)_{i \in I}$  : chaque  $\tau_i$  est un sous-ensemble connexe de la cellule unité  $Y$ . Soit  $\omega$  l'ensemble périodique de période  $\mathbf{1}$  :

$$\omega = \{x \in \mathbb{R}^n ; x = y + z \text{ avec } y \in Y \setminus (\bigcup_{i \in I} \tau_i) \text{ et } z \in \mathbb{Z}^n\}$$

et on suppose que  $Y \cap \omega$  est connexe. Pour  $\varepsilon > 0$  le domaine dépend de  $\varepsilon$  :  $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$  avec les 2 parties de son bord

$$\gamma^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon(\partial\omega) \text{ et } \Gamma^\varepsilon = \partial\Omega \cap \Omega^\varepsilon.$$

Soit  $A \in C^\infty_{\#}(\overline{Y})$  comme d'habitude et  $\varepsilon \in (0, 1)$  quelconque.

Problème  $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$  :

Trouver  $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ ,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega^\varepsilon), \int_{\Omega^\varepsilon} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f(x) v(x) \, dx$$

Pour tout  $f \in L^2(\Omega^\varepsilon)$ , le problème  $(\mathfrak{P}^\varepsilon)$  a une solution unique. On suppose  $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ .

### 4.1 Ansatz intérieur

On part de l'Ansatz habituel, avec  $y = \frac{x}{\varepsilon}$  :

$$W^0(y) v^0(x) + \varepsilon \sum_j W_j^1(y) \partial_j v^0(x) + \varepsilon^2 \sum_{jk} W_{jk}^2(y) \partial_{jk} v^0(x) + \dots$$

L'équation  $L^\varepsilon u^\varepsilon = -f$  se traduit par

(a0)  $\mathfrak{A}^0 W^0 = 0$

(a1)  $\mathfrak{A}^0 W_j^1 + \mathfrak{A}_j^1 W^0 = 0$

L'équation  $u^\varepsilon = 0$  sur  $\partial\tau_i^\varepsilon$  se traduit par

(b0)  $W^0 = 0$  sur  $\partial\tau_i$

(b1)  $W^1 = 0$  sur  $\partial\tau_i$

La seule solution du système (a0) – (b0) est  $W^0 = 0$  sur  $Y \cap \omega$ .

C'est la 1e fois qu'on voit apparaître  $W^0 = 0$  au lieu de  $W_0 = 1$ . "Classe exceptionnelle".

La seule solution du système (a1) – (b1) est  $W_j^1 = 0$  sur  $Y \cap \omega$ .

On modifie l'Ansatz habituel en:

$$\varepsilon^2 W^2(y) v^0(x) + \varepsilon^3 \sum_j W_j^3(y) \partial_j v^0(x) + \varepsilon^4 \sum_{jk} W_{jk}^4(y) \partial_{jk} v^0(x) + \dots$$

L'équation  $L^\varepsilon u^\varepsilon = -f$  se traduit par

$$(a2) \quad \boxed{\mathfrak{A}^0 W^2 = -1} \quad \text{et} \quad \boxed{v^0 = f}$$

$$(a3) \quad \boxed{\mathfrak{A}^0 W_j^3 + \mathfrak{A}_j^1 W^2 = 0}$$

L'équation  $u^\varepsilon = 0$  sur  $\partial\tau_i^\varepsilon$  se traduit par

$$(b2) \quad \boxed{W^2 = 0 \text{ sur } \partial\tau_i}$$

$$(b3) \quad \boxed{W^3 = 0 \text{ sur } \partial\tau_i}$$

La forme int-diff  $\mathfrak{a}^0$  associée à  $\mathfrak{A}^0$  est coercive sur  $\{V \in H_{\#}^1(Y \cap \omega) ; V|_{\partial\omega} = 0\}$

$\implies$  Les systèmes (a2) – (b2) et (a3) – (b3) ont une unique solution sur  $Y \cap \omega$ , etc .....

On a obtenu l'Ansatz intérieur.

$$\varepsilon^2 W^2(y) f(x) + \varepsilon^3 \sum_j W_j^3(y) \partial_j f(x) + \varepsilon^4 \sum_{jk} W_{jk}^4(y) \partial_{jk} f(x) + \dots$$

qui résout  $L^\varepsilon u^\varepsilon = -f$  dans  $\Omega^\varepsilon$  et  $u^\varepsilon = 0$  sur  $\gamma^\varepsilon$ .

Il reste la condition de Dirichlet sur le bord extérieur  $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega \cup \Omega^\varepsilon$ .

**Théorème 8.** Si  $f \in C_0^\infty(\Omega)$ , pour tout  $\alpha$ ,  $\partial^\alpha f|_{\partial\Omega} = 0$ , l'Ansatz

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^{2+\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} W_\alpha^{2+\ell}(y) \partial^\alpha f(x) \Big|_{y = \frac{x}{\varepsilon}} \quad (10)$$

satisfait les conditions de Dirichlet sur  $\Gamma^\varepsilon$ . De plus on a les mêmes estimations pour  $u^\varepsilon - U^{[K]}$  (sommées partielles de l'Ansatz) que dans le cas "tout périodique", voir Théorème 3.

## 4.2 Préparation aux couches limites

Dans le cas où  $f$  ne s'annule pas à l'ordre infini sur  $\partial\Omega$ , on va construire un

Ansatz complémentaire "couche limite"

pour corriger au bord l'Ansatz (10). En effet l'Ansatz utilisé jusqu'à présent n'est visiblement pas suffisant. On espère que les termes de secours que l'on va maintenant construire et examiner vont décroître exponentiellement rapidement lorsqu'on s'éloigne du bord  $\partial\Omega$ , c'est-à-dire en  $e^{-\mu r/\varepsilon}$  où  $r$  est la distance à  $\partial\Omega$  et  $\mu$  serait un nombre  $> 0$ . Pourquoi s'attendrait-on à ça ? Par expérience avec d'autres problèmes... L'analyse mathématique de ces nouveaux objets repose sur deux lemmes, dont le premier est le fameux "lemme inf-sup", dû à BABUŠKA<sup>(a)</sup> (1971), et le deuxième utilise le lemme inf-sup et la coercivité "cellulaire" de notre opérateur avec conditions de Dirichlet sur les trous.

<sup>(a)</sup> Voir par exemple le Th. 1.15 dans

[S] C. SCHWAB. *p- and hp-finite element methods. Theory and applications in solid and fluid mechanics.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York 1998.

**Lemme 9.** Soit  $\mathfrak{U}$  et  $\mathfrak{V}$  deux espaces de Hilbert et  $\mathfrak{V}'$  le dual de  $\mathfrak{V}$ , c'est-à-dire avec la norme

$$\|F\|_{\mathfrak{V}'} = \sup_{V \in \mathfrak{V}} \frac{F(V)}{\|V\|_{\mathfrak{V}}}$$

Soit  $\alpha$  une forme bilinéaire  $\mathfrak{U} \times \mathfrak{V} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathfrak{A}$  l'opérateur associé  $\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}'$  qui à  $U$  associe  $V \mapsto \alpha(U, V)$ . On suppose les trois conditions suivantes:

(i) Il existe  $C_0 > 0$  tel que

$$\forall U \in \mathfrak{U}, \forall V \in \mathfrak{V}, \quad |\alpha(U, V)| \leq C_0 \|U\|_{\mathfrak{U}} \|V\|_{\mathfrak{V}},$$

(ii) Il existe  $\gamma_0$  tel que

$$\forall U \in \mathfrak{U}, \exists V \in \mathfrak{V}, \quad \alpha(U, V) \geq \gamma_0 \|U\|_{\mathfrak{U}} \|V\|_{\mathfrak{V}}$$

(iii) On a

$$\forall V \in \mathfrak{V}, V \neq 0, \exists U \in \mathfrak{U}, \quad \alpha(U, V) > 0.$$

Alors  $\mathfrak{A}$  est continu inversible et

$$\|\mathfrak{A}\|_{\mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{V}'} \leq C_0 \quad \text{et} \quad \|\mathfrak{A}^{-1}\|_{\mathfrak{V}' \rightarrow \mathfrak{U}} \leq \gamma_0^{-1}.$$

Le deuxième lemme requiert l'introduction d'espaces à poids. Soit  $\Theta$  un ouvert (borné ou non) dans  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $\mu$  un réel et  $\rho$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On introduit

$$H^{1, \{\mu\}}(\Theta) = \left\{ U \in \mathcal{D}'(\Theta); \quad e^{\mu\rho}U \in L^2(\Theta), \quad e^{\mu\rho}\nabla U \in L^2(\Theta)^n \right\}.$$

On note  $H_0^{1, \{\mu\}}(\Theta)$  le sous espace de  $H^{1, \{\mu\}}(\Theta)$  des fonctions à trace nulles sur  $\partial\Theta$ .

**Remarque 10.**

L'espace  $H^{1, \{\mu\}}(\Theta)$  est équivalentement l'espace des  $U$  tels que  $e^{\mu\rho}U$  est dans  $H^1(\Theta)$ .  $\square$

**Lemme 11.** Soit  $\rho$  une fonction  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$\exists M > 0, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \quad k = 1, \dots, n, \quad |\partial_k \rho(y)| \leq M. \quad (11)$$

Soit  $\Theta \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Soit  $\mu \in \mathbb{R}$ . Soit  $\mathfrak{U} = H_0^{1, \{\mu\}}(\Theta \cap \omega)$  et  $\mathfrak{V} = H_0^{1, \{-\mu\}}(\Theta \cap \omega)$  avec les normes

$$\|U\|_{\mathfrak{U}} = \|e^{\mu\rho}\nabla U\|_{L^2(\Theta \cap \omega)} \quad \text{et} \quad \|V\|_{\mathfrak{V}} = \|e^{-\mu\rho}\nabla V\|_{L^2(\Theta \cap \omega)}.$$

Soit  $\alpha$  la forme

$$\alpha(U, V) = \int_{\Theta \cap \omega} \sum_{\ell k} A_{\ell k}(y) \hat{\partial}_k U \hat{\partial}_\ell V \, dy.$$

Alors il existe  $\mu_0 > 0$  tel que  $\forall \mu, |\mu| \leq \mu_0$ , la forme  $\alpha$  satisfait les hypothèses du Lemme 9 (avec certaines constantes  $C_0$  et  $\gamma_0$ ). De plus, les constantes  $\mu_0$ ,  $C_0$  et  $\gamma_0$  ne dépendent que de  $\omega$ ,  $A$ , et  $M$  (et, donc, pas de  $\Theta$ ).

Preuve : La continuité (condition (i) du Lemme 9) est évidente.

Montrons (ii) (ce qui montrera aussi (iii) au passage).

Soit  $U \in \mathfrak{U}$  et  $V = e^{2\mu\rho}U$ . Soit  $W = e^{\mu\rho}U = e^{-\mu\rho}V$ . Noter que  $W \in H^1(\Theta \cap \omega)$ , cf Rem. 10. On a

$$\mathfrak{a}(U, V) = \int_{\Theta \cap \omega} A(y) \nabla U \nabla V \, dy = \int_{\Theta \cap \omega} A(y) \nabla(e^{-\mu\rho}W) \nabla(e^{\mu\rho}W) \, dy.$$

Mais  $\nabla(e^{-\mu\rho}W) = e^{-\mu\rho} \nabla W + [e^{-\mu\rho}, \nabla]W$  et  $\nabla(e^{\mu\rho}W) = e^{\mu\rho} \nabla W + [e^{\mu\rho}, \nabla]W$ .

Or  $[e^{\pm\mu\rho}, \partial_k]W = \pm\mu e^{\pm\mu\rho}(\partial_k \rho)W$ . Donc

$$\mathfrak{a}(U, V) \geq \int_{\Theta \cap \omega} A(y) \nabla W \nabla W \, dy - \mathfrak{b}(W, W) \quad (12)$$

où  $\mathfrak{b}$  satisfait, avec  $C_1 := nM \max A$

$$|\mathfrak{b}(W, W)| \leq \mu C_1 \|W\|_{H^1(\Theta \cap \omega)} \|W\|_{L^2(\Theta \cap \omega)} + \mu^2 C_1^2 \|W\|_{L^2(\Theta \cap \omega)}^2. \quad (13)$$

Soit  $\widetilde{W}$  le prolongement de  $W$  par 0 sur  $\omega$ . On a (avec  $Y_z$  le translaté par  $z$  de la cellule  $Y$ )

$$\begin{aligned} \int_{\Theta \cap \omega} A(y) \nabla W \nabla W \, dy &= \int_{\omega} A(y) \nabla \widetilde{W} \nabla \widetilde{W} \, dy \\ &= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \int_{Y_z \cap \omega} A(y) \nabla \widetilde{W} \nabla \widetilde{W} \, dy \\ &\geq \sum_{z \in \mathbb{Z}^n} \gamma \|\widetilde{W}\|_{H^1(Y_z \cap \omega)}^2 \end{aligned} \quad (14)$$

Dans (18), on a utilisé la coercivité de  $\mathfrak{a}$  sur chaque cellule  $Y_z \cap \omega$  (la constante  $\gamma$  est évidemment indépendante de  $z$ ). Grâce au facteur  $\mu$  dans (13), (12)–(18) donnent le résultat.  $\square$

## 4.2 Couches limites dans le cas semi-périodique

Comme exemple de cas où un terme de couche limite structuré apparaît, on va considérer une situation à peine plus réaliste que le “tout-périodique”, c’est le “semi-périodique”.

Pour  $\Omega = (0, 1)^{n-1} \times (a, b) \ni (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$  on considère  $\Omega^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\omega$ .

On note  $H^1(\Omega^\varepsilon, \gamma^\varepsilon)$  le sous-espace de  $H^1(\Omega^\varepsilon)$  des fonctions à trace nulle sur le bord  $\gamma^\varepsilon = \Omega \cap \varepsilon\partial\omega$  des trous.

Soit  $H^1_{\#, \dots, \#, 0}(\Omega^\varepsilon, \gamma^\varepsilon)$  le sous-espace de  $H^1(\Omega^\varepsilon, \gamma^\varepsilon)$  des fonctions  $u$  périodiques en  $x'$  et telles que

$$u(x', a) = u(x', b) = 0, \quad \forall x' \in (0, 1)^{n-1}.$$

Pour  $\varepsilon = \frac{1}{m}$ , et avec  $f \in C^\infty_{\#, \dots, \#, \bullet}(\overline{\Omega})$  (i.e. périodique en  $x'$  et  $C^\infty$  en  $x_n$ ) on considère le

Problème ( $\mathfrak{P}^\varepsilon$ )

Trouver  $u^\varepsilon \in H^1_{\#, \dots, \#, 0}(\Omega^\varepsilon)$ ,

$$\forall v \in H^1_{\#, \dots, \#, 0}(\Omega^\varepsilon), \quad \int_{\Omega^\varepsilon} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \int_{\Omega^\varepsilon} f(x) v(x) \, dx$$

L'Ansatz "intérieur" (10)  $\sum_{\ell \geq 0} \varepsilon^{2+\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} W_\alpha^{2+\ell}(y) \partial^\alpha f(x)$  satisfait les conditions de périodicité en  $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$  car  $f$  les satisfait et car  $\varepsilon = \frac{1}{m}$ .

On compensera les traces en  $x_n = a$ , resp.  $x_n = b$  de  $W_\alpha^{2+\ell}(y) \partial^\alpha f(x)$  par des termes en

$$B_\alpha^\pm[\varepsilon](y', X_n^\pm) \partial^\alpha f(x), \quad \text{avec } y' = \frac{x'}{\varepsilon}, \quad X_n^+ = \frac{x_n - a}{\varepsilon} \quad \text{resp.} \quad X_n^- = \frac{b - x_n}{\varepsilon}.$$

Soit

$$\Sigma^\pm[\varepsilon] = \left\{ (y', X_n^\pm) \in (0, 1)^{n-1} \times \mathbb{R}^+ ; \quad y^{(b)} \in \omega \right\}$$

et  $\gamma^\pm = \Sigma^\pm \cap \partial\omega$ . Pour  $\mu \in \mathbb{R}$ , soit  $H^{1, \{\mu\}}(\Sigma^\pm)$  l'espace à poids avec la norme

$$\|U\|_{H^{1, \{\mu\}}(\Sigma^\pm)} := \|e^{\mu X_n^\pm} \nabla U\|_{L^2(\Sigma^\pm)}$$

et on note son sous-espace de fonctions périodiques en  $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$  et à trace 0 sur  $\gamma^\pm$  par

$$H_{\#, \dots, \#, \bullet}^{1, \{\mu\}}(\Sigma^\pm, \gamma^\pm).$$

**Proposition 12.** *Il existe  $\mu > 0$  tel que  $\forall \varepsilon = \frac{1}{m}$ , il existe une unique solution*

$$B_\alpha^\pm[\varepsilon] \in H_{\#, \dots, \#, \bullet}^{1, \{\mu\}}(\Sigma^\pm, \gamma^\pm), \quad |\alpha| = \ell, \quad \ell = 0, 1, \dots,$$

au problème de Dirichlet  $(\mathcal{L}^\pm)$

$$(\mathcal{L}^\pm) \quad \begin{cases} \mathfrak{A}^0(y) B_\alpha^\pm(y', X_n^\pm) = -F_\alpha^\pm, & \text{dans } \Sigma^\pm \\ B_\alpha^+(y', 0) = W_\alpha^{2+\ell}(y) \Big|_{y_n = \frac{a}{\varepsilon}}, & \text{i.e. trace en } x_n = a \\ B_\alpha^-(y', 0) = W_\alpha^{2+\ell}(y) \Big|_{y_n = \frac{b}{\varepsilon}}, & \text{i.e. trace en } x_n = b \end{cases}$$

avec les second membres intérieurs définis successivement par récurrence par

$$F_0^\pm = 0, \quad F_j^\pm = \mathfrak{A}_j^1 B_0^\pm, \quad \dots, \quad F_\alpha = \mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 B_{\alpha_2 \dots \alpha_\ell}^\pm + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \alpha_2}^2 B_{\alpha_3 \dots \alpha_\ell}^\pm$$

Preuve : On fixe  $a$  et on omet le "+". On se ramène à un problème à trace Dirichlet nulle en relevant la trace  $W_\alpha^{2+\ell}$  par  $\chi(X_n) W_\alpha^{2+\ell}$ , avec  $\chi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ , qui vaut 1 pour  $0 \leq X_n \leq 1$  et 0 pour  $X_n \geq 2$ . Le nouveau problème est, avec  $\tilde{F}_\alpha = \mathfrak{A}^0(\chi W_\alpha^{2+\ell})$

$$\mathfrak{A}^0(y) \tilde{B}_\alpha = \tilde{F}_\alpha + F_\alpha \quad \text{et} \quad \tilde{B}_\alpha \Big|_{X_n=0} = 0.$$

Avec  $\mathfrak{U} := \{U \in H_{\#, \dots, \#, \bullet}^{1, \{\mu\}}(\Sigma, \gamma) ; U \Big|_{X_n=0} = 0\}$ , et  $\mathfrak{V}$  son analogue pour  $-\mu$ , on se retrouve dans une situation similaire au Lemme 11, avec  $\Theta \cap \omega = \Sigma$ ,  $\rho = X_n$  (et la périodicité en  $y'$  en plus, ce qui ne change rien aux conclusions).

D'où l'existence de  $B_\alpha = \chi W_\alpha^{2+\ell} - \tilde{B}_\alpha$  dans  $H_{\#, \dots, \#, \bullet}^{1, \{\mu\}}(\Sigma, \gamma)$ .  $\square$

(b) Ici  $y = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \in Y$  avec  $y_n = X_n^+ + a/\varepsilon$ , resp.  $y_n = -X_n^+ + b/\varepsilon$ .

On peut maintenant écrire le développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  :

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^{2+\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} \left\{ W_\alpha^{2+\ell} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - B_\alpha^+[\varepsilon] \left( \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_n - a}{\varepsilon} \right) - B_\alpha^-[\varepsilon] \left( \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{b - x_n}{\varepsilon} \right) \right\} \partial^\alpha f(x) \quad (15)$$

La trace de  $B_\alpha^+$  sur  $x_n = b$  n'est pas nulle a priori, mais, correspondant à la valeur  $X_n^+ = (b - a)/\varepsilon$ , elle se comporte en  $e^{-\mu(b-a)/\varepsilon}$  qui est un  $\mathcal{O}(\varepsilon^\infty)$ .

Utilisant le fait que  $B_\alpha^\pm$  est intégrable sur  $\Sigma^\pm$ , on montre que

$$\|B_\alpha^+ \left( \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_n - a}{\varepsilon} \right)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/2}) \quad \text{et} \quad \|B_\alpha^+ \left( \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_n - a}{\varepsilon} \right)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1/2}).$$

On note d'autre part que

$$\|W_\alpha^{2+\ell} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)\|_{L^2(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(1) \quad \text{et} \quad \|W_\alpha^{2+\ell} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} = \mathcal{O}(\varepsilon^{-1}).$$

On en déduit:

**Théorème 13.** *On a les estimations d'erreurs relatives*

$$\|u^\varepsilon - \varepsilon^2 W^2 \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) f(x)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{1/2} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$

et de même avec les normes  $L^2(\Omega^\varepsilon)$ . Posant

$$U^{[K]} := \sum_{\ell=0}^K \varepsilon^{2+\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} \left\{ W_\alpha^{2+\ell} \left( \frac{x}{\varepsilon} \right) - B_\alpha^+[\varepsilon] \left( \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{x_n - a}{\varepsilon} \right) - B_\alpha^-[\varepsilon] \left( \frac{x'}{\varepsilon}, \frac{b - x_n}{\varepsilon} \right) \right\} \partial^\alpha f(x)$$

on a

$$\|u^\varepsilon - U^{[K]}\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{K+1} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$

Si (et seulement si)  $a \in \mathbb{Z}$ , la bande  $\Sigma^+$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ , et le terme  $B_\alpha^+$ , comme fonction sur  $\Sigma^+$ , ne dépend pas de  $\varepsilon$  non plus. On dit alors que c'est un *profil*. On a l'analogie pour  $\Sigma^-$  et  $B_\alpha^-$  si  $b \in \mathbb{Z}$ .

Ainsi, seulement si  $a$  et  $b$  sont entiers, on a un vrai développement asymptotique à 3 échelles:

- Macro  $x$
- Micro périodique  $y$
- Micro semi-périodique et exp. décroissante  $(y', X_n)$ .

Cependant, même si  $a$  ou  $b$  n'est pas entier, on a des estimations uniformes (par l'application des lemmes 11 et 9) sur les  $B_\alpha[\varepsilon]$ :

$$\forall \alpha, \exists C, \forall \varepsilon > 0, \quad \|e^{\mu X_n^\pm} \nabla B_\alpha^\pm[\varepsilon]\|_{L^2(\Sigma[\varepsilon])} \leq C.$$

Avec  $\mathcal{H}\{\varrho\}$  l'homothétie de rapport  $\varrho$ , soit  $\Theta^\varepsilon := \mathcal{H}\{\varepsilon^{-1}\}(\Omega) \cap \omega$  et soit  $\Upsilon^\varepsilon$  la partie de  $\partial\Theta^\varepsilon$  correspondant à  $x_n = a$  ou  $b$ . On définit  $B_\alpha$  sur  $\Theta^\varepsilon$  par

$$B_\alpha(y) := B_\alpha^+(y', y_n - \frac{a}{\varepsilon}) + B_\alpha^-(y', \frac{b}{\varepsilon} - y_n)$$

et on a l'estimation, avec  $Y_z := Y + z$  la cellule translatée et  $R(z)$  la distance de  $z$  à  $\Upsilon^\varepsilon$

$$\forall \alpha, \exists C, \forall z \in \mathbb{Z}^n, \forall \varepsilon > 0, \quad \|\nabla B_\alpha[\varepsilon]\|_{L^2(Y_z \cap \Theta^\varepsilon)} \leq C e^{-\mu R(z)}. \quad (16)$$



### 4.3 Couches limites dans le cas général

On revient à la situation de départ où  $\Omega$  est un domaine régulier et les conditions aux limites externes sont Dirichlet sur  $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega \cap \varepsilon\omega$ . Soit  $r$  la distance au bord de  $\Omega$ .

Soit  $\Theta^\varepsilon := \mathcal{H}\{\varepsilon^{-1}\}(\Omega^\varepsilon) = \mathcal{H}\{\varepsilon^{-1}\}(\Omega) \cap \omega$ , où  $\mathcal{H}\{\varrho\}$  est l'homothétie de rapport  $\varrho$ .

Soit  $\Upsilon^\varepsilon = \mathcal{H}\{\varepsilon^{-1}\}(\partial\Omega) \cap \omega$  le bord externe de  $\Theta^\varepsilon$ . La variable dans  $\Theta^\varepsilon$  est  $y$ .

La compensation au bord est fournie par

**Proposition 14.** Soit  $\ell$  et  $\alpha$ ,  $|\alpha| = \ell$ . Soit  $B_\alpha[\varepsilon]$  la solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathfrak{A}^0(y)B_\alpha[\varepsilon] = -F_\alpha[\varepsilon], & \text{dans } \Theta^\varepsilon \\ B_\alpha[\varepsilon] = W_\alpha^{2+\ell} & \text{sur } \Upsilon^\varepsilon. \end{cases}$$

avec  $F_\alpha$  défini par récurrence par  $F_\alpha = \mathfrak{A}_{\alpha_1}^1 B_{\alpha_2 \dots \alpha_\ell}^\pm + \mathfrak{A}_{\alpha_1 \alpha_2}^2 B_{\alpha_3 \dots \alpha_\ell}^\pm$ . Alors il existe  $\mu > 0$  et  $C$  tels que pour tout  $\varepsilon > 0$  on ait l'estimation

$$\|e^{\mu R} \nabla B_\alpha[\varepsilon]\|_{L^2(\Theta^\varepsilon)} \leq C \|W_\alpha^{2+\ell}\|_{H^{1/2}(\Upsilon^\varepsilon)} \quad (17)$$

où  $R = r/\varepsilon$  est la distance au bord de  $\mathcal{H}\{\varepsilon^{-1}\}(\Omega)$ .

Preuve : Conséquence directe des lemmes 11 et 9, après un argument de relèvement de trace comme dans la preuve de la proposition 12.  $\square$

On peut maintenant écrire le développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  :

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} \varepsilon^{2+\ell} \sum_{|\alpha|=\ell} \left\{ W_\alpha^{2+\ell}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - B_\alpha[\varepsilon]\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right\} \partial^\alpha f(x) \quad (18)$$

Pour  $R_0 > 0$ , soit  $\Theta_{R < R_0}^\varepsilon$  la couronne  $\{y \in \Theta^\varepsilon ; R(y) < R_0\}$ . On déduit de (17)

$$\|e^{\mu R} \nabla B_\alpha[\varepsilon]\|_{L^2(\Theta^\varepsilon)} \leq C \|W_\alpha^{2+\ell}\|_{H^1(\Theta_{R < 1}^\varepsilon)}.$$

A cause de la périodicité de  $W_\alpha^{2+\ell}$  dans toutes les directions, on a

$$\|W_\alpha^{2+\ell}\|_{H^1(\Theta_{R < 1}^\varepsilon)}^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^{-(n-1)}) \quad \text{et} \quad \|W_\alpha^{2+\ell}\|_{H^1(\Theta^\varepsilon)}^2 = \mathcal{O}(\varepsilon^{-n}).$$

D'où l'estimation relative

$$\|e^{\mu R} \nabla B_\alpha[\varepsilon]\|_{L^2(\Theta^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{1/2} \|W_\alpha^{2+\ell}\|_{H^1(\Theta^\varepsilon)},$$

qui implique, comme dans le cas semi-périodique

$$\|u^\varepsilon - \varepsilon^2 W^2\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) f(x)\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)} \leq C \varepsilon^{1/2} \|u^\varepsilon\|_{H^1(\Omega^\varepsilon)}$$

Les compensations au bord  $B_\alpha[\varepsilon]$  dépendent de manière “non-structurée” de  $\varepsilon$ . Leur caractéristique est l'estimation exponentielle décroissante, uniformément en  $\varepsilon$ , que l'on peut encore écrire

$$\exists \mu > 0, C > 0, \forall \varepsilon > 0, \|e^{\mu R} \nabla B_\alpha[\varepsilon]\|_{L^2(\Theta^\varepsilon)} \leq C \text{Vol}(\Upsilon^\varepsilon),$$

qui est de même nature que l'estimation du cas semi-périodique

$$\exists \mu > 0, C > 0, \forall \varepsilon > 0, \|e^{\mu X_n^\pm} \nabla B_\alpha^\pm[\varepsilon]\|_{L^2(\Sigma[\varepsilon])} \leq C.$$

Dans le cas général on peut aussi montrer l'estimation uniforme sur les cellules

$$\exists C, \forall z \in \mathbb{Z}^n, \forall \varepsilon > 0, \|\nabla B_\alpha[\varepsilon]\|_{L^2(Y_z \cap \Theta^\varepsilon)} \leq C e^{-\mu R(z)}.$$

Contrairement au cas semi-périodique (16) où c'était une conséquence de la périodicité, ici cela requiert une démonstration particulière. C'est basé sur le caractère pseudo-local du problème de Dirichlet associé à  $\mathfrak{A}^0$  sur  $\Theta^\varepsilon$  : la contribution principale à  $B_\alpha[\varepsilon]$  sur  $Y_z \cap \Theta^\varepsilon$  vient de la partie du bord  $\Upsilon^\varepsilon$  la plus proche de  $z$ , donc “essentiellement” de quelques cellules  $Y_{\tilde{z}}$ , où  $|z - \tilde{z}| \simeq R(z)$ .

## Expériences numériques

Se reporter au site web <http://www.maths.univ-rennes1.fr/~dauge/homo2.html> pour télécharger les .m et .mat qui fournissent les figures via Matlab.

Le coefficient oscillant est scalaire:  $A_{jk}(y) = A(y)\delta_{jk}$ . Deux possibilités

$$(i) \quad A(y_1, y_2) = (\alpha(1 - \cos 2\pi y_1) + 1)(\alpha(1 - \cos 2\pi y_2) + 1)$$

$$(ii) \quad A(y_1, y_2) = (\alpha(1 + \cos 2\pi y_1) + 1)(\alpha(1 + \cos 2\pi y_2) + 1)$$

Cas sans trous (cadre du Ch.2)

→ Le domaine  $\Omega$  est le carré unité et on est dans la situation (i).

B1, B2 graphes de  $u^\varepsilon$  et  $u^\varepsilon - v^0$  pour  $\varepsilon = 0.15$

B3, B4 graphes de  $u^\varepsilon$  et  $u^\varepsilon - v^0$  pour  $\varepsilon = 0.075$

→ On considère un cas a priori exclus de notre étude:  $\Omega$  est le carré moins un secteur de  $\pi/6$ . On a programmé ce domaine par pénalisation à  $10^8$  de la matrice de rigidité.

B5, B6, B7 graphes de  $u^\varepsilon$ , de  $v^0$  et  $u^\varepsilon - v^0$  pour  $\varepsilon = 0.075$ .

Cas avec trous Dirichlet (cadre du Ch.4)

→ Le domaine  $\Omega$  est le carré unité.

Les trous sont en fait des micro-fissures, qui seront:

(i) soit alignées dans les zones où  $A$  est minimal,

(ii) soit alignées dans les zones où  $A$  est maximal.

D1,..., D4 graphes de  $u^\varepsilon$  avec  $f = 1$  pour  $\varepsilon = 0.2, 0.1, 0.09625, 0.0925$  et situation (i).

D5, D6 graphes de  $u^\varepsilon$  avec  $f = 1$  pour  $\varepsilon = 0.09625, 0.0925$  et situation (ii).

→  $\Omega$  est le disque unité. Calculé par pénalisation à  $10^8$  de la matrice de rigidité.

D7 graphe de  $u^\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 0.09625$  avec  $f = 1$  situation (i),

D8 graphe de  $u^\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 0.09625$  avec  $f = 1$  situation (ii),

D9 graphe de  $u^\varepsilon$  pour  $\varepsilon = 0.09625$  avec  $f = (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2$  situation (i).