

le **cnam**



# Modélisation du comportement hydrodynamique des bateaux

PHILIPPE DESTUYNDER (CNAM) ET CAROLINE FABRE (PARIS-SUD)

Cours donné à l'Ecole d'Ingénieurs de Kénitra, MAROC (ENSA)  
du 25 au 28 juin 2012 dans le cadre du projet MNOTSI



## 2 Modélisation fluide-structure

**Résumé** On aborde dans ce cours quelques aspects très élémentaires de la modélisation du comportement à la mer des bateaux. Après avoir rappelé les équations fondamentales de la mécanique des fluides, on s'intéresse à quelques problèmes actuels qui ne sont encore que partiellement résolus et qui préoccupent les bureaux d'études : citons par exemple le phénomène de tossage (ou slamming) dû à l'impact de la coque d'un navire sur l'eau, les instabilités de sillage en présence d'un navire qui avance (instabilités de Neumann-Kelvin) et plus généralement le couplage fluide-structure entre l'eau et la structure qu'est le bateau. Bien que des modèles beaucoup plus complexes soient aujourd'hui à l'étude, c'est grâce à leur simplicité que les modèles présentés dans ce cours sont des cas tests de dimensionnement utilisés en amont d'une étude plus approfondie.



*Etrave détruite par une vague scélérate.*

## Table des matières

<b>Chapitre 1. Les équations utilisées en hydrodynamique navale</b> . . . . .	9
1.1. Notations . . . . .	9
1.2. Les équations fondamentales de la mécanique des fluides . . . . .	10
1.2.1. Le principe de conservation de la matière . . . . .	11
1.2.2. Le principe de Newton (Principe fondamental de la mécanique) . . . . .	11
1.3. Formulation variationnelle du modèle fluide . . . . .	17
1.4. Cas de phénomènes rapides (le tossage) . . . . .	20
1.5. Régularité et singularités du modèle de dynamique rapide . . . . .	22
1.5.1. Régularité à l'intérieur . . . . .	22
1.5.2. Régularité au voisinage des frontières . . . . .	23
1.5.3. Singularités d'étrave . . . . .	23
1.5.4. Singularités de poupe . . . . .	26
 <b>Chapitre 2. Le modèle de Wagner pour le tossage des bateaux</b> . . . . .	 31
2.1. Description physique du modèle . . . . .	31
2.2. Construction formelle de la formulation variationnelle du modèle de Wagner . . . . .	33
2.3. Interprétation du modèle de Wagner . . . . .	34
2.4. Discussion sur les singularités du modèle de Wagner . . . . .	35
2.4.1. Singularités d'étrave . . . . .	35
2.4.1.1. Cas 1 : $\lambda = 0$ au voisinage d'un point $A$ . . . . .	35
2.4.1.2. Cas 2 : $\lambda < 0$ au voisinage d'un point $A$ . . . . .	36
2.4.2. Singularités de poupe . . . . .	36
2.5. Calcul du champ de pression . . . . .	36
2.6. Justification du calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ . . . . .	40
 <b>Chapitre 3. Couplage fluide-structure pour les bateaux de surface</b> . . . . .	 45
3.1. Formulation du modèle de bateau couplé avec celui des vagues . . . . .	45

6	Modélisation fluide-structure	
3.2.	Notion de masse ajoutée . . . . .	47
3.3.	Rôle des vagues dans une approximation mono-modale . . . . .	48
<b>Chapitre 4.</b>	<b>Le modèle de Neumann-Kelvin pour un sous-marin . . . . .</b>	<b>51</b>
4.1.	Formulation physique du modèle de Neumann-Kelvin . . . . .	51
4.2.	Etude sommaire de la stabilité du modèle . . . . .	54
<b>Chapitre 5.</b>	<b>Conclusions . . . . .</b>	<b>55</b>
<b>Chapitre 6.</b>	<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>57</b>
<b>Chapitre 7.</b>	<b>Index . . . . .</b>	<b>59</b>

## Introduction

Ce cours s'adresse à des étudiants niveau M2 ou en cours de thèse et souhaitant se familiariser avec quelques aspects mathématiques sur la modélisation des phénomènes rencontrés dans le dimensionnement des navires. Plusieurs aspects sont présentés de façon très incomplète, mais en essayant de dégager de manière simple les challenges mathématiques sous jacents.

Il y a quatre parties. Dans la première, nous formulons quelques modèles fondamentaux à partir des équations de la mécanique des fluides et des hypothèses communément admises par les ingénieurs. On y discute aussi des singularités géométriques qui peuvent se développer à l'étrave ou à la poupe des bateaux. Ce travail est cours de développement dans notre laboratoire du CNAM avec José Orellana.

La seconde partie est consacrée au modèle de Wagner (1932) qui propose une approche relativement simple des mécanismes de tossage (*slamming*). Le couplage effectif entre le mouvement des bateaux et les vagues est discuté dans la partie trois alors que les phénomènes d'instabilités de surface sont abordés dans la quatrième partie à l'aide du modèle simplifié de Neumann-Kelvin.

Nous insistons sur le fait que ce cours n'est qu'une introduction et nous encourageons vivement le lecteur à approfondir le sujet tant sur le plan physique que mathématique en consultant l'abondante bibliographie sur le sujet et à commencer par l'ouvrage de J.J. Stoker intitulé *Water Waves* et édité chez J. Wiley and sons en 1992.



## Chapitre 1

# Les équations utilisées en hydrodynamique navale

### 1.1. Notations

Pour fixer les idées, nous-nous référons dans ce cours au schéma de la figure 1.1. De plus, par soucis de simplification, préférant se concentrer plus sur les idées que sur les résultats opérationnels, nous ne considérons que le cas bidimensionnel et ceci même si l'extension au cas tridimensionnel ne pose pas de problème autre que de complexités calculatoires. Bien entendu, il en serait autrement si nous-nous intéressions principalement à la mise en œuvre numérique et à l'algorithmique de résolution.

#### Notations

- $\Gamma_l$  surface libre de l'eau ;
- $\Gamma_b$  coque du bateau (immergée à l'équilibre) ;
- $\Gamma_0$  reste de la frontière de  $\Omega$  ;
- $\Omega$  réservoir d'eau ;
- $V$  vitesse d'avance ;
- $\nu$  normale unitaire sortante à  $\Omega$  le long de  $\partial\Omega$ .

*A priori* il y a trois modèles physiques (au moins) qui sont couplés pour représenter le mouvement d'un bateau sur l'eau :

- un modèle fluide pour le réservoir ;
- un modèle pour la couche superficielle de l'eau ;
- un modèle de structure pour le bateau.

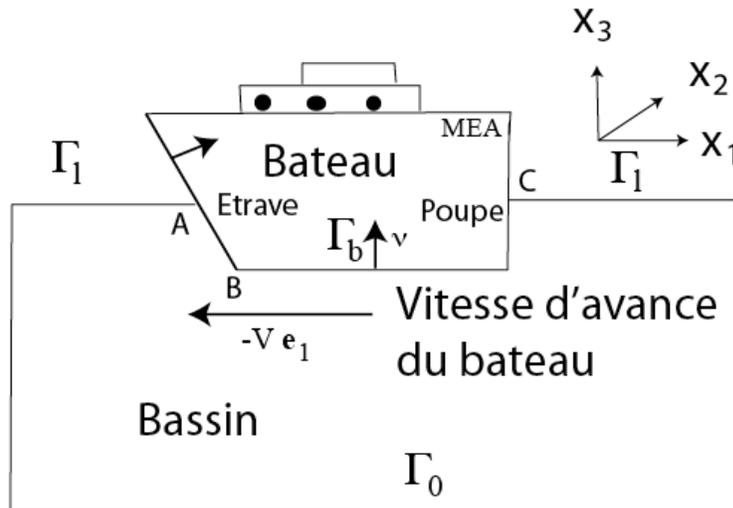


Figure 1.1. Les notation géométriques

## 1.2. Les équations fondamentales de la mécanique des fluides

D'une manière générale il y a en mécanique trois équations fondamentales :

- le principe de conservation de la matière ;
- le principe fondamental de la dynamique ;
- le premier principe de la thermodynamique.

A ces équations on ajoute des lois de comportement ainsi que des lois de contact entre milieux. Toutes doivent être compatibles avec le second principe de la thermodynamique qui fournit des restrictions dans le cas irréversible et des liaisons entre les coefficients des lois dans le cas réversible (formules de Clapeyron, lois à potentiel etc.) Commençons par expliciter ces grands principes dans le cas bidimensionnel (pour ne pas alourdir les notations). Les coordonnées d'espace sont notées  $x = (x_1, x_2)$  et le temps  $t$ .

### 1.2.1. Le principe de conservation de la matière

La masse volumique du milieu (ici un fluide) est désignée par  $\rho$  et le champ de vitesses est  $u$ . Le principe de conservation de la matière s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0, \quad (\operatorname{div}(p) = \sum_{i=1,2} \frac{\partial p_i}{\partial x_i}). \quad (1.1)$$

Dans le cas d'un milieu incompressible, on suppose que  $\rho$  est constant en temps :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (1.2)$$

Si en outre le milieu est homogène,  $\rho$  est aussi constant en espace. C'est le cas *a priori* de l'eau pure.

Ainsi, pour un milieu incompressible et homogène, le principe de conservation de la matière se formule par la condition :

$$\operatorname{div}(u) = 0. \quad (1.3)$$

### 1.2.2. Le principe de Newton (Principe fondamental de la mécanique)

En mécanique des fluides, on introduit la notion de contrainte mécanique (Cauchy) sous la forme :

$$C_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}^v \quad (1.4)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker,  $p$  est la pression totale et  $\tau_{ij}^v$  sont les composantes du tenseur des contraintes visqueuses. De façon à rendre la décomposition unique, on impose en général :

$$\sum_{i=1,2} \tau_{ii}^v = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} C_{ii}. \quad (1.5)$$

Mais cela n'a pas toujours de sens et dans le cas où la viscosité intervient en compression ou en traction il n'y a pas de raison de réduire le tenseur des contraintes visqueuses à un déviateur.

Si  $f$  est le vecteur des forces (ici de surface car nous-nous sommes limités au cas bidimensionnel), le principe fondamental de la mécanique s'écrit :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) + \nabla p - \operatorname{div}(\tau^v) = \rho f, \quad (1.6)$$

( $\nabla$ . désigne le gradient d'une fonction ou d'un champ de vecteurs) . Si la seule force surfacique est le poids, nous avons :

$$f = -g\mathbf{e}_3, \quad (1.7)$$

où  $g$  est la gravité ( $9,81m/s^2$ ) et le vecteur unitaire  $\mathbf{e}_3$  est normal à la surface de l'eau et dirigé vers le haut (voir figure 1.1). Cette écriture du principe de Newton n'est pas toujours la plus commode. Pour cette raison, on la transforme en utilisant la formule suivante d'analyse vectorielle :

$$u \cdot \nabla u = \frac{1}{2} \nabla |u|^2 + u \wedge \text{rot}(u). \quad (1.8)$$

On obtient ainsi, en ne retenant que la gravité dans les forces externes :

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \left( \frac{|u|^2}{2} \right) + u \wedge \text{rot} u \right) + \nabla p - \text{div}(\tau^v) = -\rho g \mathbf{e}_3. \quad (1.9)$$

Si on adopte l'hypothèse que la viscosité est négligeable ( $\tau^v = 0$ ) et que l'on suppose l'eau homogène et incompressible on montre que  $\text{rot}(u) = 0$ . Pour cela on pourra utiliser la formule du double rotationnel :

$$\Delta u = \nabla \text{div}(u) - \text{rot} \text{rot}(u), \quad (1.10)$$

cette formule se retient grâce à la phrase mnémotechnique :

*un lapin (laplacien) mangea un gratin (gradient) d'endives (divergence) et rota deux fois (-rotrot).*

Sous les hypothèses que le fluide est non visqueux, homogène et incompressible, le principe fondamental de la mécanique devient :

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \left( \frac{|u|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gx_3 \right) \right] = 0. \quad (1.11)$$

On note parfois :

$$h = \frac{|u|^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gx_3 \quad (1.12)$$

que l'on appelle la *petite enthalpie spécifique* (par unité de masse). La *grande enthalpie spécifique* est obtenue en ajoutant à  $h$  l'énergie interne spécifique  $e$  qui, le plus souvent pour un fluide ou gaz, est une fonction de la température. Dans le cas d'écoulements permanents ( $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ), l'équation (1.11) admet une intégrale première sous la forme :

$$h = \text{constante} \Rightarrow p = p_0 - \rho g x_3 - \frac{\rho}{2} |u|^2. \quad (1.13)$$

Cette formule généralise celle proposée au *XVII<sup>ème</sup>* siècle par Torricelli (qui est  $p = p_0 - \rho g x_3$ ) et est due à Bernoulli. Elle permet certes de retrouver le théorème d'Archimède, mais donne aussi une expression plus générale des forces exercées par un fluide sur un corps immergé et en mouvement, sous les hypothèses que nous avons adoptées pour justifier (1.2). Rappelons cet exercice dans l'énoncé ci-après.

**Théorème 1.2.1** *Soit un bateau avançant à la vitesse  $V$  dans le sens  $-\mathbf{e}_1$  et dont la ligne de flottaison délimite avec la coque immergée  $\Gamma_b$ , une surface  $|O|$  (voir figure 1.3). Ce bateau est soumis à une poussée de bas en haut due à l'eau, égale à :*

$$P = \rho |O| g - \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) u^2, \quad (1.14)$$

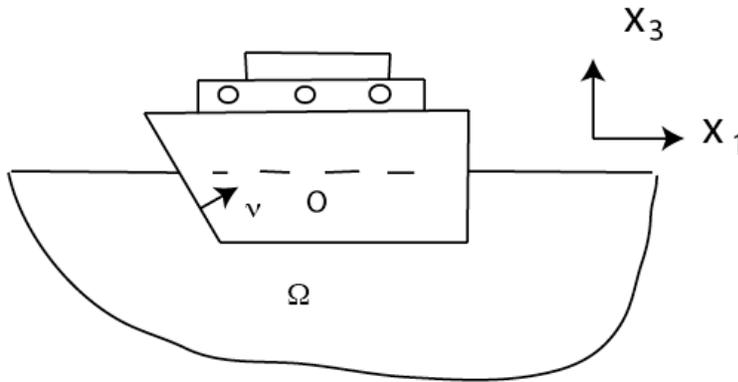
*et si le champ de vitesses du fluide est approché par  $-V$  dans le repère lié au bateau, on obtient la formule dite parfois de Venturi (mécanicien italien du *XIX<sup>ème</sup>* siècle) :*

$$P = \rho |O| g - \frac{\rho}{2} V^2 L, \quad (1.15)$$

*où  $L$  est la longueur de la ligne de flottaison. La vitesse de coulage est définie par :*

$$V_c = \sqrt{\frac{2|O|g}{L}}. \quad (1.16)$$

*Au delà de cette vitesse, le bateau s'enfoncé.*



**Figure 1.2.** *Le théorème d'Archimède*

**Remarque 1.2.1** *L'approximation de  $u$  par  $-V$  est acceptable pour des barges beaucoup moins pour des bateaux ayant un grand tirant d'eau.*

*Preuve du théorème 1.2.1* La force exercée par l'eau sur le bateau a pour expression :

$$F = \int_{\Gamma_b} (p - p_0)\nu, \quad (1.17)$$

où  $p_0$  est la pression atmosphérique au-dessus de l'eau et du bateau. La composante suivant  $\mathbf{e}_3$  est donc :

$$P = (F, \mathbf{e}_3).$$

D'où l'expression :

$$P = \int_{\Gamma_b} (p - p_0)(\nu, \mathbf{e}_3) = \int_{\Gamma_b} x_3 \varrho g (\nu, \mathbf{e}_3) - \frac{\varrho}{2} \int_{\Gamma_b} u^2 (\nu, \mathbf{e}_3). \quad (1.18)$$

On peut alors compléter la frontière  $\Gamma_b$  par la ligne de flottaison ( $x_3 = 0$ ). En notant par  $O$  l'ouvert ainsi délimité et par  $|O|$  sa surface, une application de la formule de Stokes nous donne ( $\nu$  est la normale unitaire rentrante à  $O$ ) :

$$P = \varrho g |O| - \frac{\varrho}{2} \int_{\Gamma_b} u^2 (\nu, \mathbf{e}_3).$$

En approchant abusivement  $u$  par  $-V$ , nous obtenons la nouvelle expression :

$$P = \varrho g |O| - \varrho \frac{V^2}{2} \int_{\Gamma_b} (\nu, \mathbf{e}_3). \quad (1.19)$$

La démonstration se termine en appliquant à nouveau la formule de Stokes.  $\square$

Nous abordons maintenant un point technique sans démonstration mais sur lequel repose une grande partie de la formulation que nous allons étudier dans la suite. Il s'agit d'un résultat initialement dû à de Rham mais qui a connu de nombreuses variantes opérationnelles. Celle que nous décrivons ci-après est explicitée dans le livre de V. Girault-P.A. Raviart : *Navier-Stokes equations* publié chez Springer en 1986.

**Théorème 1.2.2** Soit  $u \in [L^2(\Omega)]^2$  où  $\Omega$  est un ouvert du plan de frontière  $\partial\Omega = \cup_{i=0,P} \Gamma_i$ . Les composantes  $\Gamma_i$  sont les composantes connexes de  $\partial\Omega$ . On suppose que  $\text{rot}(u) = 0$  dans  $\Omega$  et que  $\forall i \in \{1, P\}$ ,  $\int_{\Gamma_i} (u, \tau) = 0$  où  $\tau$  est le vecteur unitaire tangent à  $\partial\Omega$ . Alors il existe une fonction  $\varphi \in H^1(\Omega)$  telle que :

$$u = \nabla\varphi.$$

S'il existe une composante connexe de frontière  $\Gamma_i$ ,  $i \in \{1, P\}$  telle que :

$$C_i = \int_{\Gamma_i} (u, \tau) \neq 0,$$

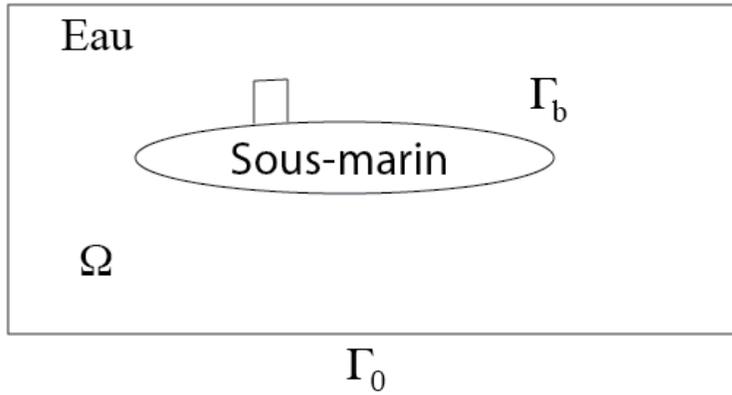
alors on introduit une fonction  $\psi_i$  solution unique de :

$$\begin{aligned}
 &\Delta\psi_i = 0 \text{ dans } \Omega, \\
 &\psi_i \in H^1(\Omega), \psi_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \frac{\partial\psi_i}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_j, j \in \{1, P\}, j \neq i, \\
 &\psi_i = D_i \text{ (constante inconnue) sur } \Gamma_i, \int_{\Gamma_i} \frac{\partial\psi_i}{\partial\nu} = 1.
 \end{aligned}
 \tag{1.20}$$

On a alors la nouvelle expression de la vitesse :

$$u = \nabla\varphi + C_i \text{ rot } (\psi_i). \tag{1.21}$$

Cette dernière situation apparaît par exemple dans le cas d'un sous-marin animé d'un mouvement de tangage (voir figure 1.3).



**Figure 1.3.** Cas d'une frontière non connexe

Appliquons ce théorème pour construire une nouvelle formulation du principe de Newton. Faisons donc l'hypothèse que le milieu fluide est homogène incompressible et sans viscosité. Pour simplifier, on supposera aussi que  $u = \nabla\varphi, \varphi \in H^1(\Omega)$ . Ceci nous conduit à :

$$\nabla\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + x_3g\right] = 0. \tag{1.22}$$

Cette formule permet de relier le champ de pression à la fonction  $\varphi$  par :

$$p = p_0 - \rho \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{|\nabla \varphi|^2}{2} + x_3 g \right]. \quad (1.23)$$

Par ailleurs, puisque  $\operatorname{div}(u) = 0$ , la fonction  $\varphi$  est harmonique. Discutons des conditions aux limites. Sur la frontière au loin (très loin), notée  $\Gamma_0$  (voir figure 1.1) du bassin contenant l'eau, nous choisissons une condition de confinement tout en supposant les dimensions du bassin très grandes par rapport au déplacement du bateau sur l'intervalle de temps sur lequel on s'intéresse au modèle. Ceci nous permet (dans un premier temps), de travailler sur un ouvert fixe sans avoir à réajuster la position du bateau. La condition au limite adoptée ici est :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0. \quad (1.24)$$

Sur la coque du bateau qui avance à la vitesse  $-V\mathbf{e}_1$  la condition de non pénétration de l'eau dans le bateau se formule ainsi :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -V(\mathbf{e}_1, \nu) \quad \text{sur } \Gamma_b. \quad (1.25)$$

Enfin, sur la surface libre de l'eau  $\Gamma_l$ , on adopte l'équation des vagues qui traduit l'équilibre de cette surface :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{on introduit : } \Phi = \int_0^t \varphi(\text{potentiel de déplacement}), \text{ et l'on a :} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0, \text{ ou encore } \frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0, \text{ sur } \Gamma_l. \end{array} \right. \quad (1.26)$$

En dérivant par rapport au temps on obtient aussi :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sur } \Gamma_l. \quad (1.27)$$

**Remarque 1.2.2** Si on souhaite prendre en compte l'avance du bateau (de façon néanmoins approchée), on peut se placer dans la repère du bateau en utilisant le changement de variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_1 + Vt, \\ t' = t, \\ \text{et posons :} \\ \varphi'(x', t') = \varphi(x, t). \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Un simple exercice de calcul différentiel, nous permet d'obtenir la nouvelle expression de l'équation de vagues :

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t'^2} + 2V \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'_1 \partial t'} + V^2 \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'_1{}^2} + g \frac{\partial \varphi'}{\partial \nu'} \quad (1.29)$$

La condition aux limites sur la coque immergée du bateau  $\Gamma_b$ , devient :

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial \nu'} = 0, \quad (1.30)$$

et sur la frontière au loin  $\Gamma_0$ , nous avons :

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial \nu'} = V(\mathbf{e}_1, \nu'). \quad (1.31)$$

### 1.3. Formulation variationnelle du modèle fluide

Reprenons l'ensemble des équations que doit satisfaire le potentiel des vitesses  $\varphi$  (on pourrait aussi obtenir la formulation en  $\Phi$  mais à condition de remplacer  $V$  par  $Vt$ ).

$$\begin{cases} -\Delta \varphi = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = -V(\mathbf{e}_1, \nu) \text{ sur } \Gamma_b \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0, \text{ sur } \Gamma_l. \end{cases} \quad (1.32)$$

Introduisons l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega), \int_{\Gamma_l} v = 0\}. \quad (1.33)$$

Par un calcul classique en utilisant la formule de Stokes (version Green), nous obtenons formellement que  $\varphi$  doit être solution du modèle suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{V} \text{ telle que :} \\ \forall \psi \in \mathcal{V}, \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \frac{1}{g} \int_{\Gamma_l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \psi = -V \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_1, \nu) \psi. \end{array} \right. \quad (1.34)$$

Pour étudier l'existence et l'unicité de ce modèle du type hyperbolique, nous allons procéder de la façon habituelle, mais en utilisant une base de vecteurs propres particulière constituée de vagues.

**Remarque 1.3.1** La condition de moyenne nulle sur  $\Gamma_l$  imposée aux fonctions de l'espace  $\mathcal{V}$  a pour but de d'éliminer les constantes qui sont dans le noyau de la forme bilinéaire :

$$\psi_1, \psi_2 \rightarrow \int_{\Omega} \nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_2,$$

mais aussi de faciliter la construction de l'endomorphisme du théorème spectral ci-après qui caractérise les vagues.

**Théorème 1.3.1** On considère le problème aux valeurs propres suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\lambda, W) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathcal{V} \text{ tel que :} \\ \forall \psi \in \mathcal{V}, \int_{\Omega} \nabla W \cdot \nabla \psi = \lambda \int_{\Gamma_l} W \psi, \\ \int_{\Gamma_l} W^2 = 1. \end{array} \right.$$

Alors il existe une famille dénombrable de solutions notées  $(\lambda_n, W_n)$  telle que :

- 1)  $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq \dots$ ,
- 2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty$ ,
- 3) la famille de fonctions obtenue par restriction des  $W_n$  à  $\Gamma_l$ , est une base hilbertienne de l'espace  $L_0^2(\Gamma_l)$ ,
- 4) la famille de fonctions obtenue par restriction des  $\frac{W_n}{\sqrt{\lambda_n}}$  à  $\Gamma_l$ , est une base hilbertienne de l'espace  $H^{1/2}(\Gamma_l) \cap L_0^2(\Gamma_l)$ ,
- 5) la multiplicité de chaque valeur propre  $\lambda_n$  est finie.

□

*Preuve.* Soit  $f \in L_0^2(\Gamma_l)$ . On lui associe la fonction  $G(f) \in \mathcal{V}$  définie comme l'unique solution de :

$$\forall \psi \in \mathcal{V}, \int_{\Omega} \nabla G(f) \cdot \nabla \psi = \int_{\Gamma_l} g \psi.$$

On construit ensuite l'opérateur  $T$  de  $L_0^2(\Gamma_l)$  dans lui-même et tel que :

$$f \in L_0^2(\Gamma_l) \rightarrow T(f) = G(f)|_{\Gamma_l} \in L_0^2(\Gamma_l).$$

Cet opérateur est linéaire, compact et symétrique. En effet, d'une part l'injection de  $H^{1/2}(\Gamma_l)$  dans  $L^2(\Gamma_l)$  est compacte et d'autre part :

$$\forall f_1, f_2 \in L_0^2(\Gamma_l), \int_{\Gamma_l} T(f_1)f_2 = \int_{\Omega} \nabla G(f_1) \cdot \nabla G(f_2) = \int_{\Gamma_l} g_2 T(f_1).$$

Le théorème 1.3.1 se déduit alors de la théorie générale des opérateurs linéaires (voir Kato : *Theory of linear operators* édité par Springer).

**Remarque 1.3.2** Chaque vecteur propre est la restriction sur  $\Gamma_l$  d'une fonction harmonique dans  $\Omega$ .

**Remarque 1.3.3** L'espace  $H^{1/2}(\Gamma_l)$  peut être muni de la norme hilbertienne suivante :

$$g \in H^{1/2}(\Gamma_l), \|g\|_{1/2, \Gamma_l} = \inf_{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_l} = g} \|v\|_{1, \Omega}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le résultat suivant :

**Théorème 1.3.2** Soit  $\varphi_0 \in H^{1/2}(\Gamma_l) \cap L_0^2(\Gamma_l)$  et  $\varphi_1 \in L_0^2(\Gamma_l)$ . Alors il existe une fonction unique  $\varphi \in \mathcal{C}^0([0, T]; H^{1/2}(\Gamma_l) \cap L_0^2(\Gamma_l)) \cap \mathcal{C}^1([0, T]; L_0^2(\Gamma_l))$  telle qu'à  $t = 0$  on ait sur  $\Gamma_l$  :

$$\varphi = \varphi_0 \text{ et } \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = \varphi_1$$

et

$$\forall \psi \in \mathcal{V}, \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \frac{1}{g} \int_{\Gamma_l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \psi = -V \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_1, \nu) \psi.$$

*Preuve* On pose de façon classique :

$$\varphi = \sum_{n \geq 1} \alpha_n(t) W_n.$$

On obtient ainsi que les fonctions  $\alpha_n$  sont solutions de l'équation différentielle :

$$\ddot{\alpha}_n + g \lambda_n \alpha_n = -gV \int_{\Gamma_l} (\mathbf{e}_1, \nu) \psi,$$

et satisfont les conditions initiales :

$$\alpha_n(0) = \int_{\Gamma_l} \varphi_0 W_n, \quad \dot{\alpha}_n(0) = \int_{\Gamma_l} \varphi_1 W_n.$$

D'où :

$$\alpha_n(t) = \alpha_n(0) \cos(\sqrt{g\lambda_n}t) + \frac{\dot{\alpha}_n(0)}{\sqrt{g\lambda_n}} \sin(\sqrt{g\lambda_n}t) - \frac{V\sqrt{g}}{\sqrt{\lambda_n}} \int_{\Gamma_l} (\mathbf{e}_1, \nu) W_n (1 - \cos(\sqrt{g\lambda_n}t)).$$

On montre de façon classique que la série  $\sum_{n \geq 1} \alpha_n(t) W_n$  converge bien normalement dans les espaces annoncés (suites de Cauchy dans un espace complet) et vérifie au sens des distributions toutes les conditions souhaitées. Le lecteur trouvera les détails dans l'ouvrage de P.A. Raviart-J.M. Thomas *Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, édité par Dunod.

#### 1.4. Cas de phénomènes rapides (le tossage)

On va s'intéresser dans cette section à des phénomènes très rapides, dus à une accélération brutale, en posant :

$$t = \varepsilon t', \quad \varepsilon \text{ petit et } t' \in [0, T].$$

Puis :

$$\varphi^\varepsilon(x, t') = \varphi(x, t) = \varphi(x, \varepsilon t'),$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \varphi^\varepsilon}{\partial t'^2},$$

et  $\varphi^\varepsilon$  est solution de (les conditions initiales sont supposées homogènes) :

$$\forall \psi \in \mathcal{V}, \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi^\varepsilon \cdot \nabla \psi + \frac{1}{\varepsilon^2 g} \int_{\Gamma_l} \frac{\partial^2 \varphi^\varepsilon}{\partial t'^2} \psi = -V \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_1, \nu) \psi. \quad (1.35)$$

Remarquons alors qu'en choisissant  $\psi = \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial t'}$  dans la relation précédente, nous obtenons une propriété d'invariance énergétique :

$$\frac{d}{dt'} \left[ \frac{1}{2g} \int_{\Gamma_l} \left( \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial t'} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi^\varepsilon|^2 \right] = -V \varepsilon^2 \int_{\Gamma_l} (\mathbf{e}_1, \nu) \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial t'}.$$

d'où (les conditions initiales de  $\varphi^\varepsilon$  sont nulles) :

$$\left[ \frac{1}{2g} \int_{\Gamma_l} \left( \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial t'} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi^\varepsilon|^2 \right] (t') = -V \varepsilon^2 \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_1, \nu) \varphi^\varepsilon(t') \quad (1.36)$$

De cette relation on retire plusieurs informations. D'une part, la fonction  $\varphi^\varepsilon$  est bornée dans l'espace  $L^\infty([0, T]; \mathcal{V})$  (avec la norme de  $H^1(\Omega)$  pour  $\mathcal{V}$ ). Ceci permet d'extraire

une sous-suite convergeant faiblement \* vers un élément  $\varphi^*$  de  $L^\infty(]0, T[; \mathcal{V})$ . D'autre part, cette fonction  $\varphi^*$  est nulle sur  $\Gamma_l$  et l'on a convergence forte vers 0 de  $\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial t}$  dans l'espace  $L^\infty(]0, T[; L^2(\Gamma_l))$ . La limite (faible d'une sous-suite) vérifie donc :

$$\begin{aligned} \varphi^* \in H^1(\Omega), \quad \varphi^* = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \\ \forall \psi \in H^1(\Omega), \quad \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi^* \cdot \nabla \psi = -V \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_1, \nu) \psi. \end{aligned} \quad (1.37)$$

**Remarque 1.4.1** En restreignant les fonctions  $\psi$  à être nulles sur  $\Gamma_l$ , on permet le passage à la limite faible dans l'équation variationnelle dont  $\varphi^\varepsilon$  est solution (le terme en  $\varepsilon^{-2}$  disparaît). De plus, l'unicité de la solution de (1.37) permet d'assurer que toute la suite converge bien vers  $\varphi^*$  dans l'espace  $H^1(\Omega)$ . La convergence forte s'obtient ensuite en décomposant  $\varphi^\varepsilon$  en un relèvement continu de sa valeur sur  $\Gamma_l$  qui tend fortement vers zéro dans  $H^1(\Omega)$  et d'une fonction de  $H^1(\Omega)$  qui est nulle sur  $\Gamma_l$ . Bien entendu si  $V = 0$  on a bien  $\varphi^* = 0$ .

Résumons ces quelques remarques dans l'énoncé suivant.

**Théorème 1.4.1** Lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  nous avons  $\varphi^\varepsilon \rightarrow \varphi^*$  dans l'espace  $H^1(\Omega)$  solution de (1.37). Le modèle dont  $\varphi^*$  est l'unique solution de (1.37) et s'interprète localement par le système explicité ci-après :

$$\begin{aligned} \varphi^* = 0 \text{ sur } \Gamma_l, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0, \\ -\Delta \varphi^* = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu} = -V(\mathbf{e}_1, \nu) \text{ sur } \Gamma_b. \end{aligned} \quad (1.38)$$

**Remarque 1.4.2** Si le bateau est animé d'un mouvement plus complexe (pilonnement, cavallément et tangage) qui vienne se superposer à celui provenant de la vitesse d'avance, le modèle (1.38) est modifié de la façon suivante. Notons, en se limitant par exemple au cas d'un cavallément-pilonnement :

$$v = -V \mathbf{e}_1 + \dot{c} \mathbf{e}_1 + \dot{p} \mathbf{e}_3, \quad (1.39)$$

La condition portant sur  $\Gamma_b$  est alors remplacée par :

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu} = (-V + \dot{c}) (\mathbf{e}_1, \nu) + \dot{p} (\mathbf{e}_3, \nu). \quad (1.40)$$

Le lecteur adaptera de lui-même la prise en compte d'un mouvement de tangage.

### 1.5. Régularité et singularités du modèle de dynamique rapide

Cette section aborde une étude en cours de réalisation en collaboration avec José Orellana de l'équipe Modélisation Mathématique et Numérique du CNAM. Nous distinguons trois situations. Le cas de points intérieurs à l'ouvert  $\Omega$ , le cas de points sur les frontières mais ne correspondant pas à des angles non-plats de celles-ci et enfin les points angulaires de la frontière que nous appellerons points présentant des singularités géométriques.

#### 1.5.1. Régularité à l'intérieur

Soit  $\mathcal{O}$  un ouvert strictement intérieur à  $\Omega$ , lui-même strictement inclus dans un ouvert un peu plus grand  $\mathcal{O}'$ , mais également strictement inclus dans  $\Omega$  (voir figure 1.4). On associe à ces ouverts une fonction  $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega})$  égale à 1 sur  $\mathcal{O}$  et à 0 en dehors de  $\mathcal{O}'$ . On note :

$$\varphi^\eta = \varphi^* \eta.$$

Par conséquent  $\varphi^\eta = \varphi$  sur  $\mathcal{O}$  et on prolonge  $\varphi^\eta$  par zéro en dehors de  $\Omega$ . On obtient

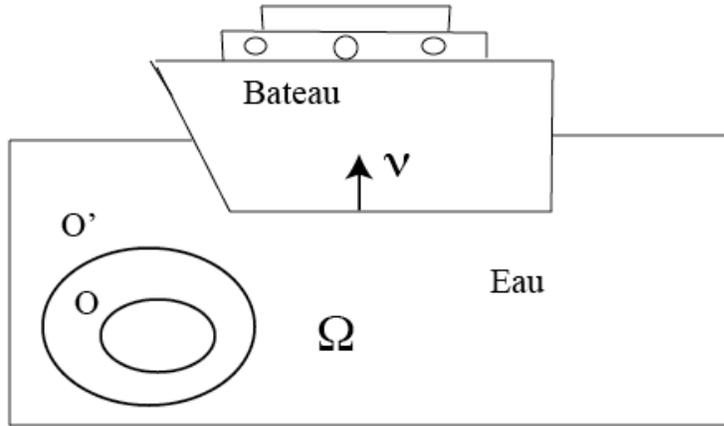


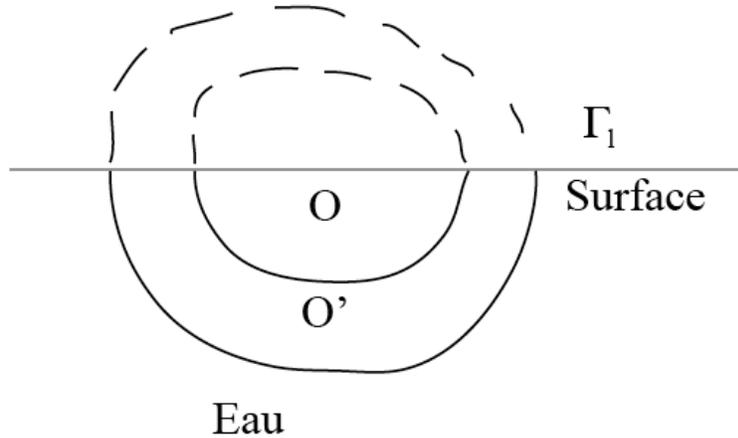
Figure 1.4. Ouvert  $\mathcal{O}$  pour un point intérieur

ainsi une fonction de l'espace  $H^1(\mathbb{R}^2)$ . Sa transformée de Fourier est notée  $\hat{\varphi}^\eta$ . En remarquant que

$$-\Delta \varphi^* = \varphi^* \Delta \eta + 2\nabla \varphi^* \cdot \nabla \eta \text{ sur } \mathbb{R}^2,$$

et en prenant la transformée de Fourier (voir J.L. Lions-E. Magenes : *Problèmes aux limites non homogènes et applications T1* édité par Dunod), on conclut que  $\varphi^* \in H^2(\mathcal{O})$ . On peut réitérer le processus pour établir finalement que  $\varphi^* \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O})$ .

### 1.5.2. Régularité au voisinage des frontières



**Figure 1.5.** Cas d'un point sur la surface libre de l'eau

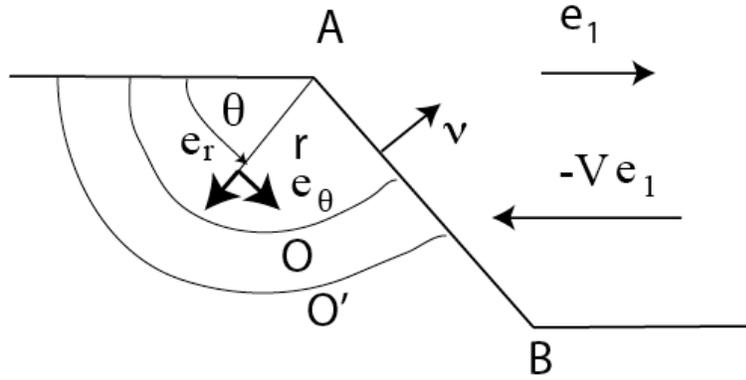
Prenons le cas d'un point sur  $\Gamma_l$ . On construit cette fois un demi-voisinage comme indiqué sur la figure 1.5. Et on le complète par symétrie du côté  $x_3 > 0$  pour définir l'ouvert  $\mathcal{O}$ . On fait de même pour  $\mathcal{O}'$  et on utilise ici encore la fonction de troncature  $\eta$ . Reste ensuite à prolonger la fonction  $\varphi^*$  pour  $x_3 > 0$ . Pour cela on pose pour  $x_3 > 0$  sur  $\mathcal{O}'$  :

$$\varphi^*(x_1, x_1) = -\varphi^*(x_1, -x_3).$$

Ce prolongement conserve l'espace  $H^2(\mathcal{O}')$  pour les fonctions qui sont nulles sur  $\Gamma_l$ . On choisirait un prolongement symétrique pour des conditions de Neumann homogènes (et après relèvement de la composante inhomogène s'il y a lieu, comme nous le verrons plus loin pour  $\Gamma_b$ ). On termine la démonstration prouvant la régularité  $H^1(\mathcal{O})$  de  $\varphi^*$  comme dans le cas de points intérieurs.

### 1.5.3. Singularités d'étrave

Plaçons-nous maintenant dans un voisinage du point  $A$  sur la figure 1.1. Les voisinages  $\mathcal{O}$  et  $\mathcal{O}'$  sont maintenant des secteurs angulaires comme indiqué sur la figure 1.6. Nous sommes en présence d'une condition de Dirichlet homogène sur un morceau de frontière attenant au point  $A$  (correspondant à  $\Gamma_l$ , et d'une condition de Neumann non homogène pour l'autre partie correspondant à la frontière  $\Gamma_b$  (coque immergée du bateau).



**Figure 1.6.** Cas du point A à l'etrave

Localement le modèle dont  $\varphi^*$  est solution se formule ainsi :

$$\begin{aligned}
 &-\Delta\varphi^* = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \\
 &\varphi^* = 0 \text{ sur } \Gamma_l \cap \partial\mathcal{O}, \quad \frac{\partial\varphi^*}{\partial\nu} = -V(\mathbf{e}_1, \nu) \text{ sur } \partial\mathcal{O} \cap \Gamma_b, \\
 &\varphi^* \text{ donnée par une fonction régulière sur l'arc de cercle } C_R.
 \end{aligned} \tag{1.41}$$

En utilisant les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  à partir du point A, on peut construire une expression analytique locale de  $\varphi^*$ . Pour cela on note que :

$$\Delta(\cdot) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial(\cdot)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial \theta^2}.$$

Un calcul classique (exercice) nous donne l'expression des fonctions harmoniques sur le secteur et qui s'annule en  $\theta = 0$ , sous la forme suivante :

$$S_\lambda(r, \theta) = A_\lambda r^\lambda \sin(\lambda\theta), \quad A_\lambda \text{ (est une constante à déterminer).}$$

Les gradients de ces fonctions dans le repère polaire  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$  sont :

$$\nabla S_\lambda(r, \theta) = A_\lambda r^{\lambda-1} \lambda \begin{pmatrix} \sin(\lambda\theta) \\ \cos(\lambda\theta) \end{pmatrix}.$$

La condition aux limites de Neumann non-homogène sur  $\Gamma_b$  conduit à la relation (voir figure 1.8) :

$$r^{\lambda-1} A_\lambda \lambda \cos(\lambda\alpha) = -V(\mathbf{e}_1, \nu) = -V \sin(\alpha).$$

La solution est :

$$\lambda = 1 \text{ et } A_\lambda = -V \tan(\alpha).$$

Nous obtenons ainsi un relèvement sous la forme :

$$S_1(r, \theta) = V \tan(\alpha) x_3, \text{ car } x_3 = -r \sin(\theta).$$

On peut ainsi se ramener à l'étude d'un problème local (au voisinage du point  $A$ ) avec conditions aux limites homogènes du type Dirichlet-Neumann, en posant :

$$\varphi^* = S_1 + \varphi^h,$$

où  $\varphi^h$  est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi^h = 0 \text{ dans } \mathcal{O}, \\ \varphi^h = 0 \text{ sur } \Gamma_l \cap \partial\mathcal{O}, \quad \frac{\partial\varphi^h}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O} \cap \Gamma_b, \\ \varphi^h \text{ donnée par une fonction régulière sur l'arc de cercle } C_R. \end{cases} \quad (1.42)$$

Ici encore, nous utilisons les fonctions harmoniques en coordonnées polaires  $(r, \theta)$  et la transformée de Mellin (on pose  $\xi = Re^{-r}$ ) permet de se ramener à un laplacien cartésien pour les coordonnées transformées  $(\xi, \theta)$ . Mais, compte tenu de la condition de Neumann homogène sur  $\Gamma_b \cap \partial\mathcal{O}$ , les fonctions à retenir sont cette fois :

$$\left\{ \begin{array}{l} S_n = A_n r^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\pi}{\alpha} \sin\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \theta\right), \\ \text{où l'appartenance à l'espace } H^1(\mathcal{O}) \text{ implique } n \in \mathbb{N}. \end{array} \right. \quad (1.43)$$

On construit ensuite  $\varphi^h$  en identifiant cette fonction sur l'arc de cercle  $C_R$  ce qui est possible car nous avons bien une série de Fourier complète en  $\theta$  sur le segment  $[0, \alpha]$ . On obtient ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi^h(r, \theta) = \sum_{n \geq 0} A_n r^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\pi}{\alpha} \sin\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \theta\right), \\ \text{où les coefficients de Fourier } A_n \text{ sont donnés par :} \\ A_n = \frac{2}{\pi R^{\frac{2n+1}{2}} \frac{\pi}{\alpha}} \int_0^\alpha ((\varphi^* + V \tan(\alpha) r \sin(\theta)) \sin\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \theta\right)). \end{array} \right. \quad (1.44)$$

**Remarque 1.5.1** On a utilisé une série de Fourier à l'aide des fonctions :

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{\alpha} \theta\right),$$

qui constituent bien une base hilbertienne de l'espace  $L^2(]0, \alpha[)$ .

Pour  $n = 0$  (qui est la première fonction de la série de façon à demeurer dans l'espace  $H^1(\mathcal{O})$ ), on a une fonction qui présente un gradient infini en  $r = 0$  (point  $A$ ) si  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , ce qui est le cas usuel des étraves de bateaux :

$$S_0(r, \theta) = A_0 r^{\frac{\pi}{2\alpha}} \sin\left(\frac{\pi\theta}{2\alpha}\right).$$

**Remarque 1.5.2** L'analyse des singularités qui peuvent apparaître au voisinage du point  $B$  en fond d'étrave, se fait de façon similaire. Mais cette fois, après relèvement de la condition de Neumann non-homogène qui intervient de part et d'autre du point  $B$ , il y a deux conditions de Neumann homogènes (et non pas de Dirichlet-Neumann comme dans le cas du point  $A$ ). Notons  $\alpha'$  l'angle saillant (supposé tel) que fait la coque du bateau au point  $B$  (voir figure 1.6). On trouve une fonction singulière de la forme :

$$S(r, \theta) = Br^{\frac{\pi}{\alpha'}} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\alpha'}\right) \quad (1.45)$$

qui est bien singulière (dans  $H^1(\mathcal{O})$ ) mais pas dans  $H^2(\mathcal{O})$  et présentant un gradient localement infini pour  $\alpha' > \pi$ . Cette singularité est plus importante que celle en  $A$  si  $\alpha' > \alpha$ , ce qui est le cas en général. Notons que dans chaque cas, le coefficient de la singularité peut être extrait de la solution sur  $C_R$  grâce à la formule de Fourier explicitée en (1.44).

**Remarque 1.5.3** Dans la pratique ces singularités d'étrave sont génératrices de turbulence (en présence de viscosité). D'un point de vue performance, cela se traduit par une augmentation de la traînée mais aussi une diminution de la manœuvrabilité du bateau. Pour réduire ces effets nuisibles, on utilise de plus en plus des bulbes d'étrave qui supprime (du moins théoriquement) ces singularités géométriques (voir figure 1.7)

#### 1.5.4. Singularités de poupe

Dans cette section nous-nous plaçons au voisinage du point  $C$  à la poupe du navire comme indiqué sur la figure 1.1 que nous avons grossie sur la figure 1.8. Cette fois nous allons construire un relèvement de la condition de Neumann non-homogène portant sur  $\Gamma_b$  à l'aide d'un voisinage rectangulaire de hauteur  $H$  et de longueur  $D$  cette dernière étant supposée assez grande.

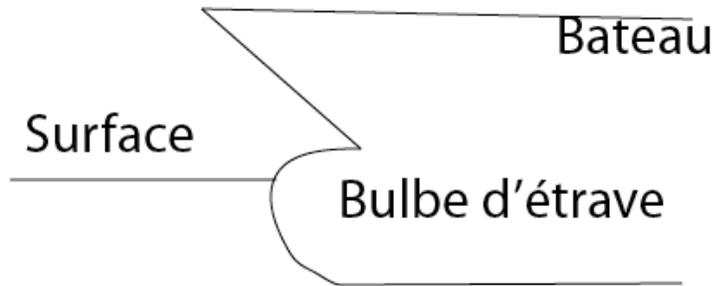


Figure 1.7. Bulbe d'étrave

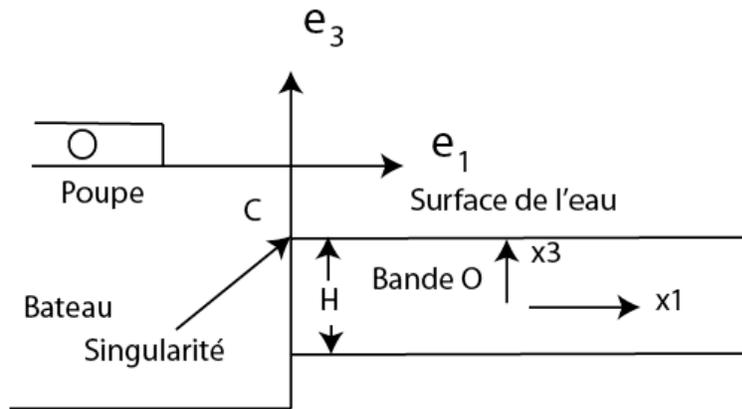


Figure 1.8. Cas du point de culot à la poupe du bateau

Notons  $R$  le relèvement et statuons qu'il soit solution du modèle suivant (voir figure 1.8) :

$$\begin{aligned}
 &-\Delta R = 0 \text{ dans la bande } \mathcal{O}, \\
 &R = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{O} - \Gamma_b, \text{ et } \lim_{x_1 \rightarrow \infty} R = 0, \\
 &\frac{\partial R}{\partial \nu} = -\frac{\partial R}{\partial x_1} = -V(\mathbf{e}_1, \nu) = V.
 \end{aligned}
 \tag{1.46}$$

On utilise cette fois les fonctions harmoniques en coordonnées cartésiennes  $(x_1, x_3)$ . Ceci nous conduit aux fonctions :

$$R_n(x_1, x_3) = C_n e^{-\frac{n\pi x_1}{H}} \sin\left(\frac{n\pi x_3}{H}\right). \quad (1.47)$$

En combinant ces solutions élémentaires de façon à satisfaire la condition aux limites en  $x_1 = 0$ , on caractérise les coefficients  $C_n$  par la décomposition de Fourier :

$$\sum_{n \geq 1} C_n \frac{n\pi}{H} \sin\left(\frac{n\pi x_3}{H}\right) = V. \quad (1.48)$$

Ce qui donne :

$$C_n = \frac{2VH}{n^2\pi^2} (1 - \cos(n\pi)) \quad (1.49)$$

ou encore :

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{4VH}{n^2\pi^2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad (1.50)$$

On est ainsi ramené à faire la sommation de la série caractérisant  $R$  :

$$R = \sum_{k \geq 0} \frac{4VH}{(2k+1)^2\pi^2} e^{-(2k+1)\frac{\pi x_1}{H}} \sin\left(\left(\frac{2k+1}{H}\right)\pi x_3\right).$$

En fait, il est plus commode (mais non indispensable) d'estimer la série dérivée en  $x_3$  dans la mesure où elle représente la composante normale de la vitesse dans le voisinage du point  $C$ . Son expression est :

$$\frac{\partial R}{\partial x_3} = \sum_{k \geq 0} \frac{4V}{(2k+1)\pi} e^{-(2k+1)\frac{\pi x_1}{H}} \cos\left(\left(\frac{2k+1}{H}\right)\pi x_3\right). \quad (1.51)$$

La sommation de cette série est un exercice classique d'analyse harmonique. Pour cela, on lui associe la série compagnon :

$$\frac{\partial Q}{\partial x_3} = \sum_{k \geq 0} \frac{4V}{(2k+1)\pi} e^{-(2k+1)\frac{\pi x_1}{H}} \sin\left(\left(\frac{2k+1}{H}\right)\pi x_3\right). \quad (1.52)$$

en posant :

$$P = R + iQ = \frac{4V}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \text{ avec } z = e^{\frac{\pi}{H}(ix_3 - x_1)}.$$

On a donc :

$$\frac{\partial R}{\partial x_3} = \operatorname{Re}(P) = \frac{2V}{\pi} \operatorname{Re}(\operatorname{Log} \left| \frac{1+z}{1-z} \right|). \quad (1.53)$$

Finalement :

$$\frac{\partial R}{\partial x_3} = \frac{V}{\pi} \operatorname{Log} \left| \frac{1 + 2 \cos\left(\frac{\pi x_3}{H}\right) e^{-\frac{\pi x_1}{H}} + e^{-2\frac{\pi x_1}{H}}}{1 - 2 \cos\left(\frac{\pi x_3}{H}\right) e^{-\frac{\pi x_1}{H}} + e^{-2\frac{\pi x_1}{H}}} \right|. \quad (1.54)$$

Sur la surface de l'eau nous avons  $x_3 = 0$  ce qui donne l'expression de l'enfoncement du sillage (on constatera que l'expression est bien négative pour  $x_1 \simeq 0$ ) :

$$\frac{\partial R}{\partial x_3} = \frac{2V}{\pi} \operatorname{Log} \left| \tanh\left(\frac{\pi x_1}{H}\right) \right| \simeq \frac{2V}{\pi} \operatorname{Log}(x_1) \text{ pour } x_1 \simeq 0. \quad (1.55)$$

Si on avait une étrave verticale (péniche), on aurait au contraire une élévation (éclaboussure du pont du bateau). Par ailleurs, on vérifie en utilisant des calculs antérieurs, que c'est la seule singularité en ce point.

**Remarque 1.5.4** *Au voisinage du point C la pression hydraulique est approchée par :*

$$p = -2\rho V^2 [\operatorname{Log}(x_1)]^2. \quad (1.56)$$

*Bien que de carré sommable cette quantité est infinie au point C. Bien entendu, il s'agit d'un modèle approché et la solution physique pour un modèle plus complet, est finie. Mais cela prouve qu'un phénomène important apparaîtra à la poupe du navire et que le sillage du bateau s'enfonce bien.*



**Figure 1.9.** *Tossage des bateaux*

## Chapitre 2

# Le modèle de Wagner pour le tossage des bateaux

### 2.1. Description physique du modèle

Le modèle que nous discutons dans cette partie est une adaptation d'une théorie proposée par Wagner pour l'amérissage des hydravions de la « Luftwafe ». Notons cependant que ce travail de pionnier est très différent de la formulation que nous proposons ici.

On suppose dans ce chapitre que le mouvement du bateau est imposé. Il avance à la vitesse  $-V \mathbf{e}_1$  et est animé d'un mouvement piloté (imposé) de pilonnement- cavalement et tangage. Le bateau étant supposé rigide, la vitesse en un point  $m$  est donnée par l'expression suivante :

$$v(m) = [\dot{c} + \dot{\alpha}(x_3 - x_{3G})] \mathbf{e}_1 + [\dot{p} - \dot{\alpha}(x_1 - x_{1G})] \mathbf{e}_3 \quad (2.1)$$

où la vitesse du centre de gravité  $G$  de coordonnées  $(x_{1G}, x_{3G})$  est la somme d'un terme de cavalement  $\dot{c} \mathbf{e}_1$ , qui prend en compte la vitesse  $-V \mathbf{e}_1$ , et d'un terme de pilonnement  $\dot{p} \mathbf{e}_3$  et s'écrit :

$$v(G) = \dot{c} \mathbf{e}_1 + \dot{p} \mathbf{e}_3 \quad (2.2)$$

Le vecteur vitesse de rotation est porté par le vecteur  $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \wedge \mathbf{e}_1$  et la vitesse de rotation de tangage est  $\dot{\alpha}$ . Comme nous l'avons précisé précédemment,  $\dot{c}$ ,  $\dot{p}$  et  $\dot{\alpha}$  sont donnés.

La nouvelle difficulté que nous prenons en compte dans ce chapitre est que la zone de contact entre l'eau et la coque du bateau est une inconnue du problème. Notons

$h(x_1, t)$  l'espace entre la surface de l'eau et la coque du bateau mesurée suivant la verticale et en chaque point de  $\Gamma_l$ . La condition de non-pénétration de l'eau dans la coque s'écrit :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(x_1, 0, t) \leq h(x_1, t) \quad (2.3)$$

où  $\phi$  est le potentiel de déplacement défini par  $\Phi(x, t) = \int_0^t \varphi(x, s) ds$ . Nous avons par ailleurs (voir chapitre 1)  $\Phi = 0$  si  $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} < h$  donc dans tous les cas :

$$\Phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - h \right) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \leq h.$$

La pression du fluide à la surface est  $p = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} |\nabla \varphi|^2$ . Au premier ordre, on obtient :

$$p = p_0 - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

et pour que la surface de l'eau soit cohérente, on suppose que  $p - p_0 \geq 0$  soit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \leq 0.$$

Comme  $\Phi(x_1, 0, 0) = 0$ , on déduit que  $\Phi(x_1, 0, t) \leq 0$  presque partout sur  $\Gamma_l$ . Finalement le modèle retenu pour le potentiel de déplacement  $\Phi$  est le suivant ( $d(m) = \int_0^t v(m) ds$ ).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = (d(m), \nu) \quad \text{sur } \Gamma_b \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \Phi = 0 \quad \text{sur } \Gamma_l \quad \text{loin du bateau} \\ \Phi \leq 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \leq h, \quad \Phi \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - h \right) = 0 \quad \text{sur une partie } \Gamma_c \text{ de } \Gamma_l \end{array} \right. \quad (2.4)$$

La partie  $\Gamma_c$  est une partie connue (à partir des données géométriques du bateau) sur laquelle l'eau est susceptible de rentrer en contact avec la coque du bateau.

Ici,  $v(m)$  et  $\nu$  étant constantes sur  $\Gamma_b$ , on a  $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = (d(m), \nu) = (v(m), \nu)t$  sur  $\Gamma_b$  mais on pourrait envisager des vitesses  $v(m, t)$  ce qui ne changerait pas fondamentalement.

## 2.2. Construction formelle de la formulation variationnelle du modèle de Wagner

Notons  $\Gamma_{lo} = \Gamma_l - \Gamma_c$  (voir chapitre 1). Soit

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_{lo}\} \quad (2.5)$$

et soit  $K$  le sous-ensemble convexe fermé de  $\mathcal{V}$

$$K = \{v \in \mathcal{V}, v \leq 0 \text{ sur } \Gamma_l\}. \quad (2.6)$$

Par un calcul formel, on a pour tout  $v \in K$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla v - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} v = 0$$

Toute solution du système (2.4) vérifie donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \in K \\ \forall v \in K \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla v = \int_{\Gamma_b} (d(m), \nu) v + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} v. \end{array} \right.$$

En choisissant  $v = \Phi$ , on obtient

$$\begin{aligned} \forall v \in K \int_{\Omega} |\nabla \Phi|^2 &= \int_{\Gamma_b} (d(m), \nu) \Phi + \int_{\Gamma_c} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \Phi \\ &= \int_{\Gamma_b} (d(m), \nu) \Phi + \int_{\Gamma_c} h \Phi \end{aligned}$$

et en soustrayant à la relation précédente :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \in K \\ \forall v \in K \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla (v - \Phi) \geq \int_{\Gamma_b} (d(m), \nu) (v - \Phi) + \int_{\Gamma_c} h (v - \Phi) \end{array} \right. \quad (2.7)$$

Il s'agit d'une inéquation variationnelle du type 1 selon G. Stampacchia. On sait alors que (2.7) est équivalent à :

$$\min_{v \in K} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Gamma_b} (d(m), \nu) v - \int_{\Gamma_c} h v, \quad (2.8)$$

problème de minimisation qui admet bien une solution unique. La démonstration s'obtient par exemple en utilisant la méthode des suites minimisantes.

### 2.3. Interprétation du modèle de Wagner

Notons  $\Phi$  la solution (unique) du problème de Wagner (2.7). L'interprétation consiste à construire le problème mécanique dont  $\Phi$  est solution.

On introduit la forme linéaire continue sur  $\mathcal{V}$ , notée  $\lambda$  par :

$$\langle \lambda, v \rangle = \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla v - \int_{\Gamma_b} (d(m), \nu) \Phi v - \int_{\Gamma_c} h v. \quad (2.9)$$

On remarque plusieurs points.

– La forme  $\lambda$  ne fait intervenir que des valeurs de  $v$  sur  $\Gamma_c$ . En effet, si on choisit  $v = 0$  sur  $\Gamma_c$  alors (2.7) devient une égalité et  $\langle \lambda, v \rangle = 0$ .

– Comme  $v \in H^1(\Omega)$ , la trace de  $v$  sur  $\Gamma_c$  est une fonction de  $H^{1/2}(\Gamma_c)$  (voir J-L. Lions -E. Magenes, T1, 1968). Par conséquent,  $\lambda$  peut - être identifiée avec un élément de  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$ .

– D'après (2.7), on montre facilement que  $\langle \lambda, \Phi \rangle = 0$  donc pour tout  $v \in K$ , on a  $\langle \lambda, v \rangle \geq 0$  donc  $\lambda \leq 0$ .

– En utilisant la formule de Stokes, on obtient formellement  $\lambda = \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - h$  sur  $\Gamma_c$ .

Ainsi la forme  $\lambda$  est une distribution de  $H^{-1/2}(\Gamma_c)$  qui est négative ou nulle et qui représente l'opposé de la distance entre la coque et l'eau. Le problème résolu par (2.7) est donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Phi = 0 \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = (d(m), \nu) \text{ sur } \Gamma_b \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \Phi = 0 \text{ sur } \Gamma_{l_0} \\ \Phi \leq 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - h = \lambda \text{ sur } \Gamma_c. \end{array} \right. \quad (2.10)$$

## 2.4. Discussion sur les singularités du modèle de Wagner

### 2.4.1. Singularités d'étrave

Nous considérons plusieurs cas.

#### 2.4.1.1. Cas 1 : $\lambda = 0$ au voisinage d'un point $A$

Si  $\lambda = 0$  au voisinage d'un point  $A$  (étrave du navire), on retrouve la situation d'un problème de Neumann de part et d'autre de  $A$  sur la frontière de  $\Omega$ .

En effet, on obtient sur un voisinage  $\gamma_A$  de  $A$  dans  $\Gamma_c$  :  $\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = h$  sur  $\gamma_A$ , et donc sur un voisinage  $\mathcal{O}_A$  de  $A$  dans  $\Omega$  on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\Phi = 0 \text{ dans } \mathcal{O}_A \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = (d(m), \nu) \text{ sur } \Gamma_b \cap \mathcal{O}_A \\ \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = h \text{ sur } \gamma_A \\ \Phi \in C^\infty(\partial\mathcal{O}_A - (\Gamma_b \cup \gamma_A)) \end{array} \right.$$

Le problème homogène admet comme solution locale (voir chapitre 1) en coordonnées polaires ( $k \geq 0$ )

$$S_k(r, \theta) = A_k r^{k\pi/\alpha} \cos\left(\frac{k\pi\theta}{\alpha}\right)$$

Ces fonctions sont singulières au sens où leurs gradients tendent ponctuellement vers l'infini lorsque  $r \rightarrow 0$  si :  $\frac{k\pi}{\alpha} - 1 < 0$  soit  $\alpha > k\pi$ .

La plus petite valeur de  $\alpha$  qui satisfasse cette condition est  $\pi + \varepsilon$  obtenue avec  $k = 1$  ( $k = 0$  correspond à une fonction constante). Cette configuration n'est pas physiquement acceptable (car on a  $\alpha < \pi$ ). Il n'y a donc pas de singularité pour le modèle homogène.

Le relèvement de la condition de Neumann non homogène se fait comme dans la partie 1 et ne présente pas non plus de singularité.

En résumé, lorsque la coque est mouillée au voisinage de  $A$ , il n'y a pas de singularité en ce point.

2.4.1.2. Cas 2 :  $\lambda < 0$  au voisinage d'un point  $A$ 

Dans ce cas, l'eau descend et la coque n'est pas mouillée au voisinage de  $A$ . On a alors  $\Phi = 0$  sur un voisinage de  $A$  inclus dans la frontière  $\Gamma_c$ . On retrouve la situation décrite dans le chapitre 1 et qui conduit à une singularité de vitesses au point  $A$ .

Ce phénomène est bien naturel car dans ce cas, le positionnement de l'eau doit ressembler à celui décrit sur la figure 2.1 : c'est une descente de l'eau à l'étrave, ce qui est bien ce que nous avons considéré avec la condition  $\lambda < 0$ .

Ce type de mouvement conduisant à une singularité est particulièrement vraisemblable lors d'un mouvement ascendant (pilonnement vers le haut) de l'étrave du bateau.

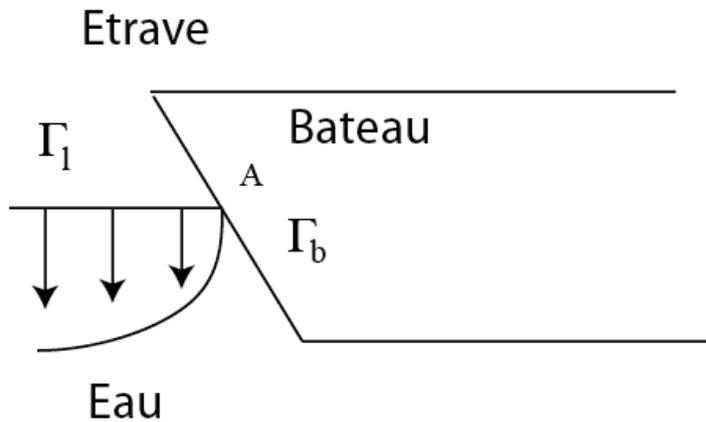


Figure 2.1. Enfoncement de l'eau à l'étrave

## 2.4.2. Singularités de poupe

La situation géométrique est celle qui a conduit à une singularité logarithmique dans le chapitre 1. Cette singularité apparaît dans tous les cas dès que le bateau présente un mouvement d'avance en cavalemt.

## 2.5. Calcul du champ de pression

La pression dans l'eau est obtenue grâce au théorème de Bernoulli (on rappelle que  $\varphi = \dot{\Phi}$ ) :

$$p = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} |\nabla \varphi|^2 + p_0$$

Les singularités d'étrave et de poupe se retrouvent donc de façon amplifiée dans le terme  $|\nabla \varphi|^2$ . Par exemple, à l'étrave, nous obtenons un terme de la forme suivante (en transportant la singularité de  $\varphi$  trouvée au chapitre 1) :

$$p_s = cr^{2(\pi/\alpha-1)}$$

et en intégrant sur la coque au voisinage de  $A$ , on obtient :

$$\int_0^R r^{2(\pi/\alpha-1)} = \begin{cases} < \infty & \text{si } \alpha \geq 2\pi \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Le terme non linéaire conduit donc à une remise en cause du modèle de Wagner, ou plus précisément à la nécessité de prendre en compte d'autres non linéarités qui pourraient permettre de contenir les effets de la pression du fluide sur la coque. Par contre, la singularité de poupe (du type logarithmique) est compatible avec le terme en  $|\nabla \varphi|^2$ .

Dans le cas de l'étrave, il reste cependant à calculer  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  alors que  $\Phi$  est solution d'une inéquation.

Soulignons que ceci n'aura de sens que si on néglige le terme d'énergie cinétique dans l'enthalpie comme nous l'avons discuté préalablement.

Pour calculer  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$ , nous utiliserons la caractérisation à l'aide de la formulation variationnelle que nous rappelons ci-dessous. Précisons que dans la suite nous utilisons la notation suivante :

$\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le crochet de dualité  $H^{-1/2}(\Gamma_c), H^{1/2}(\Gamma_c)$ .

Par ailleurs, nous commençons par la dérivée première en temps de  $\Phi$ . La dérivée seconde relève de la même stratégie. Nous avons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi \in V \\ \forall v \in V, \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla v = \int_{\Gamma_c} \lambda v + \int_{\Gamma_b} (d(m), \nu) v + \int_{\Gamma_c} h v \\ \langle \lambda, \Phi \rangle = 0 \\ \lambda \leq 0, \Phi \leq 0, \lambda \in H^{-1/2}(\Gamma_c) \end{array} \right. \quad (2.11)$$

On introduit le découpage de  $\Gamma_c$  en trois régions (non réduites à un point) suivant :  
 $\Gamma_c = \Gamma_{co} \cup \Gamma_{cn} \cup \Gamma_{cd}$  avec

$$\begin{aligned}\Gamma_{cd} &= \{x \in \Gamma_c, \Phi = 0 \text{ et } \lambda < 0\} \\ \Gamma_{cn} &= \{x \in \Gamma_c, \Phi = 0 \text{ et } \lambda = 0\} \\ \Gamma_{co} &= \{x \in \Gamma_c, \Phi < 0 \text{ et } \lambda = 0\}\end{aligned}\tag{2.12}$$

La définition de ces ensembles doit être prise avec précaution et il est possible que  $\Gamma_{cn}$  soit vide. Une justification plus précise est proposée dans la prochaine section. On a alors formellement :

sur  $\Gamma_{cd}$  :

$$\langle \lambda, \Phi \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \Phi \right\rangle + \left\langle \lambda, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle = 0$$

soit

$$\left\langle \lambda, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Mais par ailleurs,  $\lambda < 0$  et  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \leq 0$  donc nécessairement  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ .

sur  $\Gamma_{cn}$  :

$$\langle \lambda, \Phi \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2}, \Phi \right\rangle + 2 \left\langle \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \lambda, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right\rangle = 0$$

soit

$$\left\langle \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

et  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \leq 0$  ainsi que  $\frac{\partial \lambda}{\partial t} \leq 0$ , car  $\lambda = 0$ .

sur  $\Gamma_{co}$  :

$$\langle \lambda, \Phi \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \Phi \right\rangle + \left\langle \lambda, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right\rangle = 0,$$

soit :

$$\left\langle \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \Phi \right\rangle = 0.$$

On a  $\frac{\partial \lambda}{\partial t} \leq 0$ , et comme  $\Phi < 0$ , on déduit que :  $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0$ .

On introduit alors le sous-ensemble convexe fermé de  $\mathcal{V}$  et défini par (c'est le cône tangent à  $K$ )

$$K^T(\Phi) = \{v \in \mathcal{V}, v = 0 \text{ sur } \Gamma_{lo} \cup \Gamma_{cd}, v \leq 0 \text{ sur } \Gamma_{cn} \cup \Gamma_{co}\}.$$

Les termes  $\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  et  $\dot{\lambda} = \frac{\partial \lambda}{\partial t}$  apparaissent comme solution de :

Pour tout  $v \in \mathcal{V}^T$ ,

$$\int_{\Omega} \nabla \dot{\Phi} \cdot \nabla v - \langle \dot{\lambda}, v \rangle = \int_{\Gamma_b} (v(m), \nu) v + \int_{\Gamma_c} \dot{h} v$$

$$\langle \dot{\lambda}, \dot{\Phi} \rangle > 0$$

$$\dot{\Phi} \leq 0, \dot{\lambda} \leq 0, \text{ sur l'intérieur de } \bar{\Gamma}_{cn} \cup \bar{\Gamma}_{co}$$

où  $\langle \langle , \rangle \rangle$  désigne la dualité entre  $H^{-1/2}(\Gamma_{cn} \cup \Gamma_{co})$  et  $H^{1/2}(\Gamma_{cn} \cup \Gamma_{co})$  et

$$\mathcal{V}^T = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_{lo} \cup \Gamma_{cd}\}.$$

L'existence et l'unicité d'une solution de ce modèle relèvent ici encore de la théorie générale des inéquations variationnelles du type 1 selon la terminologie de G. Stampacchia. Le modèle est équivalent à

$$\min_{v \in K^T(\Phi)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 - \int_{\Gamma_b} (v, v(m)) v - \int_{\Gamma_c} \dot{h} v \quad (2.13)$$

Nous laissons le soin au lecteur d'itérer la méthode pour calculer la dérivée seconde en temps (nécessaire pour le calcul du terme correspondant dans la pression instationnaire).

## 2.6. Justification du calcul de $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

Nous donnons dans cette section la justification du calcul formel effectué ci-dessus pour le calcul de  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ .

Rappelons que  $\Phi \in K$  est solution de

$$\forall v \in K, \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla (v - \Phi) \geq \int_{\Gamma_c} h(v - \Phi).$$

Posons (par exemple)  $h_t = h_0 + th_1$  et

$$a(\Phi, v) = \int_{\Omega} \nabla \Phi \cdot \nabla v.$$

Pour  $t = 0$ , on note  $\Phi_0$  la solution. Pour  $t > 0$ , on la note  $\Phi_t$  et on introduit :

$$\Delta_t \Phi = \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}.$$

On montre le

**Théorème 2.6.1** *Les fonctions  $\Delta_t \Phi$  sont bornées dans  $H^1(\Omega)$  indépendamment du paramètre  $t$ .*

□

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} a(\Phi_t - \Phi_0, \Phi_t - \Phi_0) &= a(\Phi_t, \Phi_t - \Phi_0) + a(\Phi_0, \Phi_0 - \Phi_t) \\ &\leq \int_{\Gamma_c} h_t(\Phi_t - \Phi_0) + \int_{\Gamma_c} h_0(\Phi_0 - \Phi_t) \\ &= t \int_{\Gamma_c} h_1(\Phi_t - \Phi_0) \leq ct \|h_1\|_{L^\infty(\Gamma_c)} \|\Phi_t - \Phi_0\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

d'où

$$\left\| \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t} \right\|_{1,\Omega} \leq c^1 \|h_1\|_{L^\infty(\Gamma_c)}.$$

On peut donc extraire de  $\Delta_t \Phi$  une sous-suite faiblement convergente dans  $H^1(\Omega)$  lorsque  $t$  tend vers 0 vers un élément noté  $\dot{\Phi}^*$ .

**Théorème 2.6.2** *La fonction  $\dot{\Phi}^*$  est limite forte de  $\Delta_t \Phi$  dans  $H^1(\Omega)$  lorsque  $t$  tend vers 0.*  $\square$

*Preuve.* C'est une conséquence de l'unicité de la limite, qui sera montrée au théorème 2.6.3 et prouvera que toute la suite  $\Delta \Phi_t$  converge faiblement, et de la convergence en norme de la suite  $\Delta_t \Phi$ , (convergence faible et convergence en norme implique la convergence forte). Nous verrons aussi au théorème 2.6.3 que la limite faible  $\dot{\Phi}^*$  vérifie :

$$\int_{\Omega} |\nabla \dot{\Phi}^*|^2 = \int_{\Gamma_c} h_1 \dot{\Phi}^*.$$

En utilisant l'estimation :

$$\int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t} \right) \right|^2 \leq \int_{\Gamma_c} h_1 \left( \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t} \right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} \int_{\Gamma_c} h_1 \dot{\Phi}^*,$$

et puisque la semi-continuité inférieure des fonctions convexes et continues permet d'écrire :

$$\int_{\Omega} |\nabla \dot{\Phi}^*|^2 \leq \liminf_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t} \right) \right|^2,$$

nous concluons que :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\Omega} \left| \nabla \left( \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t} \right) \right|^2 = \int_{\Omega} |\nabla \dot{\Phi}^*|^2.$$

Ceci établit le résultat annoncé.  $\square$

**Théorème 2.6.3** *Caractérisation directe de  $\dot{\Phi}^*$  On a  $\dot{\Phi}^* \in H^1(\Omega) \cap K^T(\Phi)$  où on définit l'ensemble convexe fermé  $K^T(\Phi)$  par :*

$$K^T(\Phi) = \left\{ v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \bar{\Gamma}_{lo}; v = 0 \text{ si } \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} < h_0 \text{ et } v \leq 0 \text{ si } \Phi = 0 \right\}.$$

et

$$\forall v \in K^T(\Phi), \int_{\Omega} \nabla \dot{\Phi}^* \cdot \nabla (v - \dot{\Phi}^*) \geq \int_{\Gamma_c} h_1 (v - \dot{\Phi}^*).$$

□

*Preuve.* Le fait que  $K^T(\Phi)$  soit fermé nécessite quelques précautions. En fait, la difficulté vient de la caractérisation de l'ensemble de  $\Gamma_c$  sur lequel  $\frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} < h$ . En fait,  $\Phi_0$  est régulière d'après l'étude faite au chapitre 1, sauf à la jonction entre la coque et la surface de l'eau et si  $\Phi_0 = 0$  au voisinage de ce point sur  $\Gamma_c$ . Ailleurs la fonction  $\Phi_0$  est localement régulière ( $C^1$ ). Ce qui permet de définir sans ambiguïté par la relation  $v(\frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu} - h) = 0$  un sous espace fermé de l'espace  $H^1(\Omega)$ .

On a successivement pour tout  $v \in K$  :

$$a(\Phi_t, v - \Phi_t) \geq \int_{\Gamma_c} h_t (v - \Phi_t),$$

$$a(\Phi_0, v - \Phi_0) \geq \int_{\Gamma_c} h_0 (v - \Phi_0).$$

Posons  $v = \Phi_t$  dans la seconde inéquation et  $v = \Phi_0 + t\delta v$  dans la première. On obtient :

$$a\left(\frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}, \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}\right) = \frac{1}{t} \left[ a(\Phi_t, \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}) - a(\Phi_0, \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}) \right]$$

donc :

$$a\left(\frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}, \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}\right) \leq \frac{1}{t} \left[ \int_{\Gamma_c} (h_0 + th_1) \left(\frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}\right) - h_0 \left(\frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}\right) \right]$$

donc

$$a\left(\frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}, \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}\right) \leq \int_{\Gamma_c} h_1 \left(\frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}\right).$$

Mais aussi en posant :  $\delta v \in H^1(\Omega)$  avec  $\delta v \leq 0$  sur  $\Gamma_c$  et  $\delta v = 0$  si  $\Phi_0 < 0$  sur  $\Gamma_c$  :

$$a(\Phi_t, \Phi_0 - \Phi_t) + ta(\Phi_t; \delta v) \geq \int_{\Gamma_c} h_0 (\Phi_0 - \Phi_t) + t \int_{\Gamma_c} h_0 \delta v + t \int_{\Gamma_c} h_1 (\Phi_0 - \Phi_t) + t^2 \int_{\Gamma_c} h_1 \delta v$$

$$a(\Phi_0, \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}) \geq \int_{\Gamma_0} h_0 \left(\frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}\right)$$

En ajoutant ces deux relations après les avoir respectivement divisées par  $t$  et  $t^2$  :

$$a\left(\frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}, \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}\right) + \frac{1}{t} \int_{\Gamma_c} h_0 \delta v - \int_{\Gamma_c} h_1 \frac{\Phi_t - \Phi_0}{t} + \int_{\Gamma_c} h_1 \delta v \leq a\left(\frac{\Phi_t - \Phi_0}{t}, \delta v\right) + \frac{1}{t} a(\Phi_t, \delta v)$$

En passant à la limite faible et grâce à la semi-continuité inférieure des fonctions convexes, on a :

$$a(\dot{\Phi}^*, \dot{\Phi}^*) + \int_{\Gamma_c} h_1 (\delta v - \dot{\Phi}^*) \leq a(\dot{\Phi}^*, \delta v) + \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{t} a(\Phi, \delta v) - \int_{\Gamma_c} h_0 \delta v \right]$$

or

$$a(\Phi, \delta v) = \int_{\Gamma_c} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \delta v - \int_{\Omega} \Delta \Phi \delta v = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \delta v$$

d'où

$$a(\Phi, \delta v) - \int_{\Gamma_0} h_0 \delta v = \int_{\Gamma_c} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - h_0 \right) \delta v.$$

Si  $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} < h_0$  on a  $\delta v = 0$  donc finalement pour tout  $\delta v \in K^T(\Phi)$ , on a  $\dot{\Phi}^* \in K^T(\Phi)$  et :

$$a(\dot{\Phi}^*, \delta v - \dot{\Phi}^*) \geq \int_{\Gamma_c} h_1 (\delta v - \dot{\Phi}^*)$$

Or ce modèle admet une solution unique, ce qui permet d'une part, de caractériser  $\dot{\Phi}^*$  et d'autre part, d'assurer que toute la suite  $\Delta_t \Phi$  converge fortement vers  $\dot{\Phi}^*$ .

On adaptera la technique au calcul des dérivées successives en temps, sous réserve que la fonction  $h$  soit elle-même suffisamment régulière.



## Chapitre 3

# Couplage fluide-structure pour les bateaux de surface

### 3.1. Formulation du modèle de bateau couplé avec celui des vagues

On suppose dans cette partie que le bateau flotte sur l'eau et que la zone mouillée de la coque est connue. Cependant, contrairement au cas traité dans la seconde partie, on s'intéresse ici à des mouvements lents, ce qui implique la prise en compte *a priori* des vagues de surface. La masse du bateau (par unité de surface) est notée  $M$ . Pour simplifier la présentation, nous nous limitons ici au cas d'un mouvement de pinnement noté  $z$ . En reprenant les notations introduites précédemment, l'équation du mouvement du bateau s'écrit :

$$\underbrace{M\ddot{z}}_{\text{inertie}} = \underbrace{-Mg}_{\text{poids}} + \underbrace{\int_{\Gamma_b} p(\mathbf{e}_3, \nu)}_{\text{poussée hydrodynamique}} . \quad (3.1)$$

La pression hydrodynamique  $p$  sur la coque du bateau, est donnée par l'expression :

$$p = -\varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varrho g(x_3 + z) \quad (3.2)$$

où  $\varphi$  est le potentiel des vitesses du fluide et  $\varrho$  la masse surfacique de l'eau (on est en 2D). Ceci nous conduit à l'expression de la poussée hydrodynamique :

$$F = -\varrho \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varrho g \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu)(x_3 + z). \quad (3.3)$$

En utilisant la formule de Stokes, on obtient :

$$F = -\varrho \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varrho g|B| - \varrho gLz, \quad (3.4)$$

où  $|B|$  est la surface immergée du bateau et  $L$  la longueur de la ligne de flottaison. Puisque le bateau flotte (le MEA coule pas !), nous avons :

$$Mg = \rho g |B|.$$

Finalement, l'équation du mouvement est :

$$M\ddot{z} + \rho g L z = -\rho \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.5)$$

Rappelons que le potentiel des vitesses est, lui, solution de l'équation variationnelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi \in \mathcal{V} \text{ (voir chapitre 1),} \\ \forall \psi \in \mathcal{V}, \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \frac{1}{g} \int_{\Gamma_l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \psi \\ \qquad \qquad \qquad = -V \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_1, \nu) \psi + \dot{z} \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) \psi. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

**Remarque 3.1.1** *On notera que dans l'espace  $\mathcal{V}$  les fonctions sont de moyennes nulles sur la surface libre de l'eau  $\Gamma_l$ .*

Le système (3.5)-(3.6) muni de conditions initiales est le modèle couplé. On notera que l'on a un invariant énergétique en posant dans (3.6) :

$$\psi = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

et en multipliant (3.5) par  $\dot{z}$ , on obtient par addition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{\rho g L}{2} z^2 + \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \frac{\rho}{2g} \int_{\Gamma_l} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 \right] \\ \qquad \qquad \qquad - \rho V \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_1, \nu) \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Le dernier terme représente la puissance des forces de pression dans le déplacement à la vitesse  $V$  du bateau et dans un mouvement transitoire instationnaire. Dans le cas d'un mouvement périodique ce terme est en moyenne nul sur une période. Bien entendu, si l'on a  $V = 0$ , on a une intégrale première traduisant un invariant énergétique :

$$\frac{1}{2} M \dot{z}^2 + \frac{\rho g L}{2} z^2 + \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \frac{\rho}{2g} \int_{\Gamma_l} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 = \text{constante}. \quad (3.8)$$

L'existence et l'unicité d'une solution au système (3.5)-(3.6) muni de conditions initiales ad'hoc relèvent d'une stratégie classique mais différente de celle utilisée habituellement pour les systèmes hyperboliques. Ceci à cause du terme de couplage. Dans ce dernier cas, on utilise des bases modales séparées pour le fluide et la structure (ici il est vrai, un seul mode car il n'y a que le pilonnement) et on construit une suite de problèmes approchés pour lesquels on obtient une estimation *a priori* et en extrayant une sous-suite faiblement convergente et en passant à la limite on obtient le résultat. L'unicité s'obtient par exemple en utilisant l'invariant énergétique (3.8).

### 3.2. Notion de masse ajoutée

Si les mouvements du bateau sont rapides, on peut reprendre l'approximation que nous avons étudiée au chapitre 1. On introduit l'espace fonctionnel suivant :

$$\mathcal{V}_0 = \{\psi \in H^1(\Omega), \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_l\}. \quad (3.9)$$

Dans ce cas, l'équation (3.6) est remplacée par :

$$\varphi \in \mathcal{V}_l, \forall \psi \in \mathcal{V}_l, \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi = -V \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_1, \nu) \psi + \dot{z} \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) \psi. \quad (3.10)$$

Il apparaît donc que  $\varphi$  est la somme de deux termes notés :

$$\varphi = -VG((\mathbf{e}_1, \nu)) + \dot{z}G((\mathbf{e}_3, \nu)). \quad (3.11)$$

et  $G$  est la solution unique de :

$$\boxed{\begin{aligned} g \in L^2(\Gamma_l), G(g) \in \mathcal{V}_0, \\ \forall \psi \in \mathcal{V}_0, \int_{\Omega} \nabla G \cdot \nabla \psi = \int_{\Gamma_b} g \psi. \end{aligned}} \quad (3.12)$$

En reportant dans l'équation (3.6) nous obtenons :

$$M\ddot{z} + \rho g L z = -\rho \ddot{z} \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) G((\mathbf{e}_3, \nu)). \quad (3.13)$$

On introduit la quantité suivante que l'on appelle masse ajoutée :

$$M_a = \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) G((\mathbf{e}_3, \nu)) = \int_{\Omega} |\nabla G((\mathbf{e}_3, \nu))|^2 \geq 0. \quad (3.14)$$

Ceci nous permet d'obtenir une nouvelle écriture de l'équation du mouvement de pilonnement du bateau qui donne tout son sens à la terminologie de masse ajoutée. Il convient d'ajouter à cette équation du mouvement, des conditions initiales :

$$(M + M_a)\ddot{z} + \rho g L z = 0. \quad (3.15)$$

La pulsation de pilonnement est donc :

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g L}{M + M_a}}. \quad (3.16)$$

### 3.3. Rôle des vagues dans une approximation mono-modale

Dans cette section on utilise une approximation de  $\varphi$  avec un seul mode propre de vague. L'espace d'approximation de  $\varphi$  est donc mono-dimensionnel et de la forme :

$$\mathcal{V}_0^a = \{W_n\}, \quad (3.17)$$

où  $W_n$  est un mode propre de vague associé à la valeur propre  $\lambda_n$ . Posons :

$$\varphi^a = \alpha_n(t)W_n$$

et l'approximation variationnelle du modèle (3.5)-(3.6) conduit au système :

$$\begin{aligned} M\ddot{z} + \rho g L z + \dot{\alpha}_n \left[ \rho \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) W_n \right] &= 0, \\ \ddot{\alpha}_n + \lambda_n \alpha_n - \dot{z} \left[ g \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) W_n \right] &= 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

En multipliant la seconde équation du système (3.18) par  $\frac{\rho}{g}$  et en posant  $a = \rho \int_{\Gamma_b} (\mathbf{e}_3, \nu) W_n$ , on obtient un système différentiel matriciel :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\alpha}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{\alpha}_n \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} \rho g L & 0 \\ 0 & \frac{\rho \lambda_n}{g} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \alpha_n \end{pmatrix} &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Les modes propres couplés sont obtenus en résolvant l'équation caractéristique du système dont les solutions  $\omega$  vérifient :

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 M + \rho g L & i a \omega \\ 0 & -\frac{\rho \omega^2}{g} + \frac{\rho \lambda_n}{g} \end{vmatrix} = 0,$$

L'équation s'explique ainsi :

$$\omega^4 \frac{M\rho}{g} - \omega^2 \left( a^2 + \rho^2 L + \frac{M\lambda_n \rho}{g} \right) + \rho^2 L \lambda_n = 0. \quad (3.20)$$

Lorsque  $a = 0$  il n'y a pas de couplage et les solutions sont :

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{\rho g L}{M}}, \quad \omega_2 = \pm \sqrt{\lambda_n}. \quad (3.21)$$

On peut placer ces valeurs par rapport aux racines de l'équation (3.21) de façon à préciser le rôle du couplage. Ainsi en faisant  $\omega = \omega_1$  ou  $\omega = \omega_2$  dans le trinôme (3.20), on obtient respectivement :

$$-\frac{\rho g L}{M} a^2 < 0. \quad \text{et} \quad -\lambda_n a^2 < 0.$$

Par conséquent, on peut conclure que le couplage rapproche les fréquences.



**Figure 3.1.** *Sillage d'un sous-marin en surface*

## Chapitre 4

# Le modèle de Neumann-Kelvin pour un sous-marin

La surface de l'eau, en présence d'un bateau qui avance, est soumise à des instabilités caractéristiques qui créent un sillage de navigation. Ce phénomène apparaît même pour de très faibles vitesses d'avance. Pour en donner une idée rapide, mais sommaire, nous discutons ci-après d'un modèle simple connu sous le nom de modèle de Neumann-Kelvin. Cependant ce dernier présentant des erreurs du point de vue des mathématiques, nous le modifions en ajoutant le phénomène de capillarité à la surface libre de l'eau, pour obtenir un modèle mieux posé (plus stable).

### 4.1. Formulation physique du modèle de Neumann-Kelvin

Considérons (toujours en 2D) un bassin rempli d'eau dans lequel avance un sous-marin à la vitesse  $V$  parallèlement à la surface libre (voir figure 1.6). On note  $\eta$  le déplacement normal des points de la surface libre. C'est une fonction de  $x_1$  et de  $t$ . On prend en compte le phénomène de capillarité sur la surface libre en notant  $\sigma$  la constante liée à ce mécanisme physique. Il traduit la présence d'une force de rappel électrostatique ayant pour effet de minimiser la surface libre de l'eau après déformation. L'équilibre de cette dernière sous l'effet de cette force électrique et de la pression du fluide s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \rho g \eta + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\rho}{2} |\nabla \varphi|^2 = 0, \\ \text{et par exemple } \eta = 0 \text{ en } x_1 = 0 \text{ et } x_1 = L. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Dans l'eau le modèle est :

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = -V(\mathbf{e}_1, \nu) & \text{sur } \Gamma_b, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = \frac{\partial\eta}{\partial t} & \text{sur } \Gamma_l. \end{cases} \quad (4.2)$$

Pour étudier ce modèle, on se place dans le repère en translation uniforme à la vitesse  $V$  et lié au sous-marin. Pour cela, on pose :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - Vt, \\ t' = t. \end{cases} \quad (4.3)$$

L'ouvert  $\Omega$  est transporté en  $\Omega'$ . On obtient ainsi par un simple calcul classique :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + V \frac{\partial}{\partial x'_1}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x'_1}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Le modèle exprimé dans les coordonnées  $(x'_1, t')$  devient :

$$\boxed{\begin{aligned} -\sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial x'^2_1} + \rho g \eta + \rho \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t'} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x'_1} \right) + \frac{\rho}{2} |\nabla' \varphi|^2 &= 0, \\ \text{et } \eta &= 0 \text{ en } x'_1 = 0 \text{ et } x'_1 = L. \end{aligned}} \quad (4.5)$$

Par ailleurs, le modèle en  $\varphi$  devient (les indices supérieurs en : ' désignent les nouvelles coordonnées) :

$$\begin{cases} -\Delta' \varphi = 0 & \text{dans } \Omega', \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu'} = (\mathbf{e}_1, \nu') & \text{sur } \Gamma'_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \nu'} = 0 & \text{sur } \Gamma'_b, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu'} = \frac{\partial \eta}{\partial t'} + V \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} & \text{sur } \Gamma'_l. \end{cases} \quad (4.6)$$

Dans un premier temps, on peut négliger le terme non linéaire qui intervient dans la pression :  $\frac{\rho}{2} |\nabla' \varphi|^2$ .

On introduit ensuite la formulation variationnelle du modèle couplé sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\eta, \varphi) \in \mathcal{C}^0([0, T]; H_0^1(\Gamma'_l)) \times \mathcal{C}^0([0, T]; H^1(\Omega')) \text{ tel que :} \\ \forall v \in H^1(\Gamma'_l), \forall \psi \in H^1(\Omega'), \\ \sigma \int_{\Gamma'_l} \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} \frac{\partial v}{\partial x'_1} + \varrho g \eta v + \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial t'} v + \varrho V \frac{\partial \varphi}{\partial x'_1} v = 0, \\ \int_{\Omega'} \nabla' \varphi \cdot \nabla' \psi + \int_{\Gamma'_l} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t'} + V \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} \right) \psi = V \int_{\Gamma'_0} (\mathbf{e}_2, \nu) \psi. \end{array} \right. \quad (4.7)$$

Bien entendu, il convient d'ajouter des conditions initiales à ce système. L'existence et l'unicité d'une solution s'obtiennent par une stratégie d'estimation *a priori* sur les solutions de modèles en dimension finie obtenus à l'aide d'approximation sur une base finie de modes propres pour la surface (rides) et pour l'eau (vagues). On trouvera les détails dans [PHDCF 11]. Dans le cas permanent (indépendance du temps) le modèle devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (\eta, \varphi) \in H_0^1(\Gamma'_l) \times H^1(\Omega') \text{ tel que :} \\ \forall v \in H_0^1(\Gamma'_l), \forall \psi \in H^1(\Omega'), \\ \sigma \int_{\Gamma'_l} \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} \frac{\partial v}{\partial x'_1} + \varrho g \eta v + \varrho V \frac{\partial \varphi}{\partial x'_1} v = 0, \\ \int_{\Omega'} \nabla' \varphi \cdot \nabla' \psi + \int_{\Gamma'_l} V \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} \psi = V \int_{\Gamma'_0} (\mathbf{e}_2, \nu) \psi. \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Il s'agit d'un problème relevant de la théorie de Fredholm (il y a un noyau même pour  $V = 0$ ) de l'opérateur statique constitué des fonctions  $\varphi$  qui sont constantes (mais qui n'ont aucun intérêt physique, puisque correspondant à des vitesses nulles). Mais pour certaines valeurs de la vitesse  $V > 0$  on peut aussi avoir un noyau constitué cette fois des instabilités de sillage. Examinons cela de plus près. Pour entrer dans le cadre classique posons :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{V}_{NK} = H_0^1(\Gamma_l) \times H^1(\Omega') / \mathbb{R}, \\ \forall X = (\eta, \varphi), Y = (v, \psi) \in \mathcal{V}_{NK} \\ a(X, Y) = \sigma \int_{\Gamma'_l} \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} \frac{\partial v}{\partial x'_1} + \varrho g \eta v + \varrho V \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x'_1} v - \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} \psi \right) + \varrho \nabla' \varphi \cdot \nabla' \psi. \end{array}} \quad (4.9)$$

On notera que la forme bilinéaire  $a(.,.)$  est symétrique (compte tenu des conditions aux limites vérifiées par  $\eta$  et  $v$  et peut aussi s'écrire :

$$a(X, Y) = \sigma \int_{\Gamma'_i} \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} \frac{\partial v}{\partial x'_1} + \varrho g \eta v - \varrho V \left( \frac{\partial v}{\partial x'_1} \varphi + \frac{\partial \eta}{\partial x'_1} \psi \right) + \varrho \nabla' \varphi \cdot \nabla' \psi. \quad (4.10)$$

Nous allons étudier sa coercivité éventuelle en fonction de  $V$ .

#### 4.2. Etude sommaire de la stabilité du modèle

Remarquons tout d'abord que pour  $V = 0$  il y a bien  $H_0^1(\Gamma'_i) \times H^1(\Omega')/\mathbb{R}$ -coercivité de  $a(.,.)$  (on a supprimé les constantes en quotientant l'espace  $H^1(\Omega')$ ). Sinon, pour  $V > 0$  et  $\forall \alpha > 0$ , en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (ou inégalité triangulaire<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} a(X, X) &\geq \sigma \left\| \frac{d\eta}{dx'_1} \right\|_{0, \Gamma'_i}^2 + \varrho g \|\eta\|_{0, \Gamma'_i}^2 + \varrho \|\nabla' \varphi\|_{0, \Omega'}^2 \\ &\quad - \varrho V \left[ \alpha \|\varphi\|_{0, \Gamma'_i}^2 + \frac{1}{\alpha} \left\| \frac{d\eta}{dx'_1} \right\|_{0, \Gamma'_i}^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour conserver la coercivité de cette forme bilinéaire il suffit que l'on puisse choisir  $\alpha > 0$  tel que :

$$\varrho V \alpha c_0^2 < \varrho$$

où  $c_0$  est la constante de continuité de l'application trace de  $H^1(\Omega')$  sur  $L^2(\Gamma'_i)$  et :

$$\frac{\varrho V}{\alpha} < \sigma.$$

Ceci est possible si :

$$V < \sqrt{\frac{\sigma}{\varrho c_0^2}} = V_c. \quad (4.12)$$

Cette vitesse  $V_c$  est une estimation de la vitesse critique d'instabilité de surface. On peut la calculer exactement en résolvant un problème de valeurs propres. Dans le cas sans sous-marin (courant à la vitesse  $V$ ), on obtient, pour un fond infini du bassin,  $V_c = 0,23m/s$  avec les données physiques usuelles en unités internationales :  $\sigma = 7,5 \cdot 10^{-2}$  et  $\varrho = 1000$ .

Dans le cas d'un sous-marin une étude complète figure dans [PHDCFLOW 10].

1.  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, ab \leq \frac{\alpha}{2} a^2 + \frac{b^2}{2\alpha}$

## Chapitre 5

# Conclusions

Ces quelques pages donnent une approche très simplifiée des recherches actuelles sur l'hydrodynamique navale. Certaines hypothèses utilisées sont largement contestables sur le plan physique. Notamment, ne pas prendre en compte la viscosité et de considérer l'eau comme incompressible, sont des situations très approchées pour un mécanicien des fluides.

Cependant, la complexité des problèmes à résoudre est telle que les bureaux d'études marines ont le souci de disposer de modèles simples permettant d'avoir à moindre coût et de façon fiable, quelques indications sur les performances d'un navire du point de vue de sa tenue à la mer.

Sur le plan numérique de nombreux problèmes sont encore à résoudre et la prise en compte de termes non linéaires est nécessaire pour limiter les impacts des instabilités omniprésentes même dans des modèles aussi simples que ceux dont nous avons discutés ici.



## Chapitre 6

# Bibliographie

- [KON 06] M. Borsuk and V. Kondratiev, *Elliptic Boundary Value Problems of Second Order in Piecewise Smooth Domains*, North Holland, Mathematical Library, Amsterdam, (2006).
- [BEN 67] T. Brooke Benjamin and J. E. Feir, The desintegration of wave trains on deep water, Part 1 Theory. *J. Fluid Mech.*, vol. **27**, pp. 417-430, (1967).
- [CAM 02] E. F. Campana and A. Iafrati, Direct numerical simulation of surface tension dominated and non-dominated breaking waves, 24<sup>th</sup> symposium on Naval hydrodynamics, Fukuoka Japan, July (2002).
- [CHA 07] D. Chalikov, Numerical simulation of the Benjamin-Feir instability and its consequences, *Physics of fluids*, American Institute of Physics, **19**, 016602, (2007).
- [CHEN 01] Xiao-bo Chen, On the singular and highly oscillatory properties of the Green function for ship motions, *J. Fluid Mechs.*, vol. 445, pp. 77-91, (2001).
- [CHEN 02] Xiao-bo Chen, Role of the surface tension in modeling ship waves, *Proc. of the 17<sup>th</sup> Inter. Workshop on water Waves and floating bodies*, edited by R. C. Rayney and S. F. Lee, Peterhouse Cambridge, UK 14-17 april, pp. 25-28, (2002).
- [PHDC 08] Ph Destuynder C. Fabre, A modelling of springing, whipping and slamming for ships, *Communications on pure and applied analysis*, vol.8, n<sup>o</sup>1., p. 209-236, (2008).
- [PHDCF 11] Ph. Destuynder C. Fabre, A discussion on Kelvin-Neumann's model for progressive water waves, (31 pages), accepted in *Applicable Analysis* (Taylor and Francis publishers), Vol.1, p1-26, 2011, (2011).
- [PHDCFOW 10] Ph. Destuynder C. Fabre O. Wilk, Few numerical aspects of the Neumann-Kelvin's model with capillarity in hydrodynamics, *Analysis and Application AA, Analysis and Applications* Vol. 8, n<sup>o</sup>4, October 2010, , pp. 337-362, (2010).
- [DIKH 99] F. Dias and C. Kharif, Non-linear Capillary and capillary-gravity waves, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **31**, pp. 301-346, (1999).

- [DOU 95] Y. Doutreleau, Résonances pour le problème de Neumann-Kelvin tridimensionnel dans le cas d'un corps immergé, 5<sup>th</sup> journées de l'hydrodynamique, Rouen, mars (1995).
- [GAZZ 05] Th. Gazzola, A. Korobkin, Sime Malenica and Yves-Marie Scolan, Three-dimensional Wagner problem using variational inequalities, in "Proceedings of the 20<sup>th</sup> International Workshop on Water Waves and Floating Bodies," (2005).
- [IOS 96] G. Ioss P. Kirrmann, Capillary Gravity Waves on the Free Surface of an Inviscid Fluid of Infinite Depth, Existence of Solitary Waves, Arch. Rational Mech. Anal. vol. 136, pp. 1-19, Springer-Verlag, (1996).
- [KEL 87] Kelvin Lord (Sir Thomson), On the waves produced by a single input in water of any depth, or in a dispersive medium, In : *Proceedings of the Royal Society of London*, series A, vol. 42, pp. 80-85, (1887).
- [LIH 78] J. Lighthill, *Waves in fluids*, Cambridge university press, (1978).
- [RIC 96] D. Richard and P. G. de Gennes, Capillary gravity waves caused by a moving disturbance wave resistance, J. Phys. Rev. E., vol. 53, pp. 3448-3455, (1996).
- [STOE 92] C. Van der Stoep, 'A three dimensional method for the calculation of the unsteady ship wave pattern using a Neumann-Kelvin approach, Thesis university of technology of Delpht, February 6<sup>th</sup> 1992.
- [STO 57] J. J. Stoker, *Water waves*, Pure and applied mathematics, vol. IV, Interscience publishers, Inc., New York (1957).

## Chapitre 7

### Index

- approximation variationnelle, 48
- Archimède, 15
- base hilbertienne, 27
- Bernoulli, 15, 38
- bulbe d'étrave, 28
- Cauchy, 13
- Cauchy-Schwarz, 54
- contraintes, 13
- contraintes visqueuses, 13
- coordonnées polaires, 27
- couplage, 49
- couplage fluide structure, 45
- déviateur, 13
- de Rham, 16
- Dirichlet-Neumann, 26, 28
- dualité, 41
- enthalpie, 14
- Fourier, 29
- Fredholm, 53
- Girault-Raviart, 16
- gravité, 14
- incompressible, 14
- invariant énergétique, 47
- Kronecker, 13
- le MEA coule pas, 46
- ligne de flottaison, 46
- masse ajoutée, 47
- Mellin, 27
- Neumann, 28, 29
- Neumann-Kelvin, 51
- Newton, 17
- pilonnement, 45, 47
- poussée hydrodynamique, 45
- pression, 13
- Principe de conservation de la matière, 13
- Principe de Newton, 13
- régularité, 23, 24
- sillage, 51
- singularités, 23, 25, 28
- singularités géométrique, 28
- stabilité du sillage, 54
- Stampacchia, 35, 41
- Torricelli, 15
- tossage, 21
- vagues, 45
- Venturi, 15
- viscosité, 14
- vitesse d'avance, 51