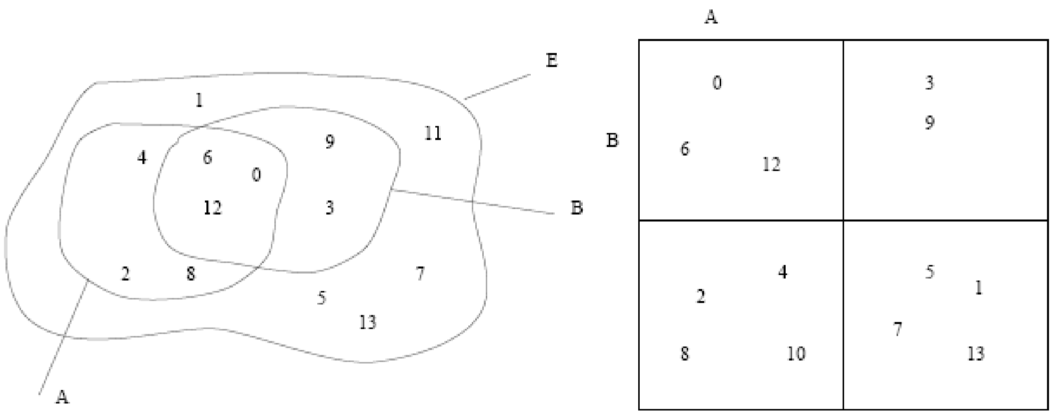
Volume n°
Ensembles

Géraud Sarrebourse de la Guillonnière

26 novembre 2012

Table des matières

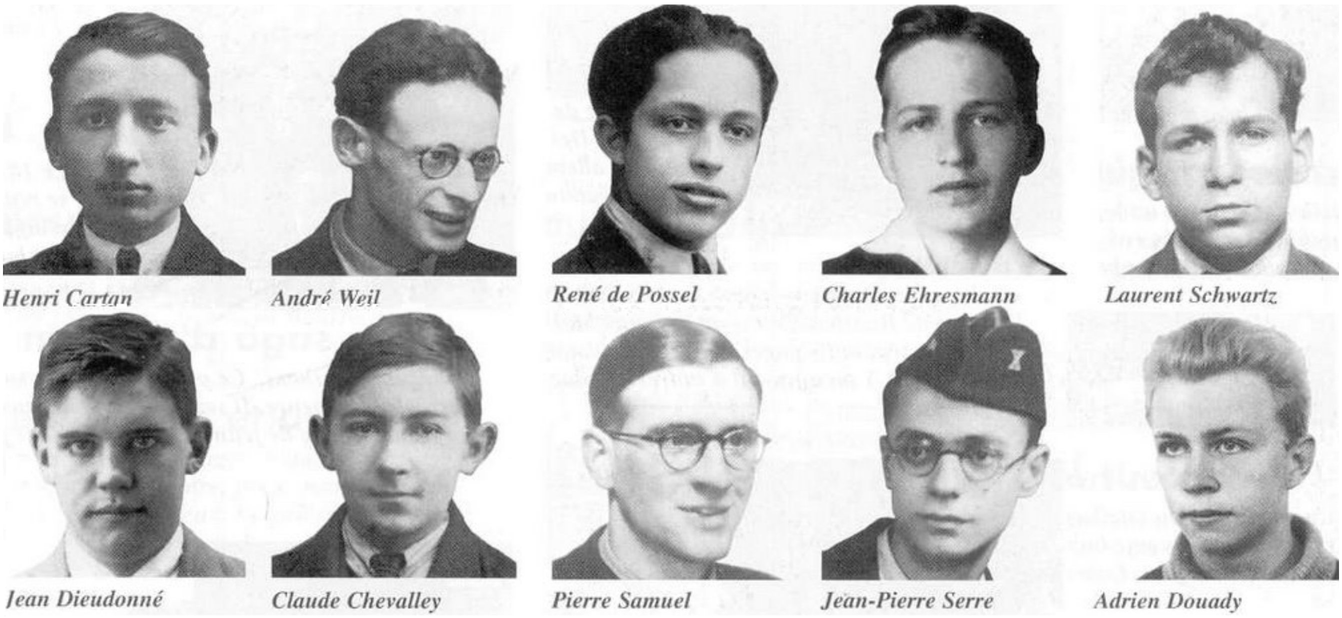
Résumé



En 1935, un groupe de mathématiciens français eut l'ambition de reconstruire tout l'édifice mathématique (sans S pour bien montrer l'unité) selon la pensée formaliste de Hilbert. Les membres fondateurs ont été Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Delsarte, Jean Dieudonné, André Weil auxquels se joindra René de Possel. En juillet 1935 fut donc créé, lors d'un séminaire en Auvergne le groupe 'Nicolas Bourbaki'. Le nom de cette association fait référence en fait à une anecdote qui se passa au sein de l'école nationale supérieure (ENS). Un étudiant de l'ENS vers 1880, dans le but de visiter l'école, se fi passer pour un général : Le général Bourbaki. Ce dernier a réellement existé, élève de saint cyr, il a été renommé dans les guerres en Crimée ou en 1870 dans la guerre du Rhin. L'ouvrage de Bourbaki (l'association) se résume en 40 volumes et quelques 7000 pages. Ils constituent une véritable bible des mathématiques des années 1960-70. Trop complexe cependant, très abstrait, il est aujourd'hui moins cité et peu utilisé par les étudiants.

Dans ce volume, nous ne rentrerons pas volontairement dans les détails philosophiques, sémantiques...que soulève la théorie des ensembles. Nous poserons simplement les bases de cette dernière (Z,ZF,ZFC) ainsi que de l'arithmétique (Peano), qui sont, finalement celles que nous utilisons depuis le primaire (cohérentes mais incomplètes !).

Résumé


Henri Cartan
André Weil
René de Possel
Charles Ehresmann
Laurent Schwartz
Jean Dieudonné
Claude Chevalley
Pierre Samuel
Jean-Pierre Serre
Adrien Douady

Chapitre

1 Axiomatique

La théorie des ensembles que l'on va étudier ici, est basé sur trois modèles d'axiomes. En fait ils sont créés en complétant le modèle précédent par un ou des axiomes. Rappelons que ces axiomes ont été mis en place dans le cadre 'naturel' d'ensembles finis.

1.1 Axiomatique de Zermelo (Z)

Les travaux de Zermelo et son célèbre axiome du choix sont dus aux difficultés rencontrées dans l'étude de la relation d'ordre (comparaison) des cardinaux des ensembles infinis.

1.1.1 Axiomatique d'extensionnalité

Il énonce essentiellement qu'il est suffisant de vérifier que deux ensembles ont les mêmes éléments pour montrer que ces deux ensembles sont égaux. De façon plus formalisé on aura : $\forall x, ((x \in E \Leftrightarrow x \in F) \Rightarrow E = F)$.

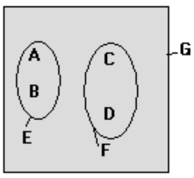
1.1.2 Axiomes de compréhension ou de séparation

Étant donné un ensemble A et une propriété P alors il affirme l'existence de l'ensemble B des éléments de A vérifiant la propriété P.

Cet axiome est aussi dit axiome des sous-ensembles.

1.1.3 Axiome de la paire

L'axiome affirme que deux éléments quelconques (pas forcement distincts) forment un nouvel ensemble, que l'on appelle paire. Dit autrement l'axiome exprime que, pour deux éléments quelconques E et F, il est possible de trouver un ensemble G dont les éléments sont précisément E et F.



Corollaire 1.

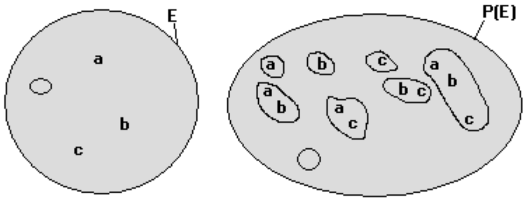
Si E=F alors nous obtenons l'axiome du singleton : Il existe un ensemble dont le seul élément est E.

1.1.4 Axiome de la réunion

Pour tout ensemble quelconque, il existe un ensemble qui contient exactement les éléments de tout élément de l'ensemble. Autrement dit l'union d'ensembles est un ensemble.

1.1.5 Axiome de l'ensemble des parties

L'axiome affirme l'existence pour tout ensemble E, d'un ensemble auquel appartiennent tous les sous-ensembles de E, et seulement ceux-ci. Un tel ensemble est nommé ensemble des parties de E, d'où le nom de l'axiome.



1.1.6 Axiome de l'infini

Un ensemble qui représente celui des entiers naturels existe et s'appelle un ensemble infini.

1.1.7 Axiome de fondation

Paradoxe de Russel[1] : L'une des formes les plus connues est celui du barbier. Un barbier se propose de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-ci. Le barbier doit-il se raser lui-même ? Si le barbier se rase lui-même alors il ne rase pas uniquement ceux qui ne se rasent pas eux-même. S'il ne se rase pas lui-même, il fait partie de ceux qu'il doit raser. On résout le problème en affirmant qu'un tel barbier ne peut exister (ou, en jouant sur les mots, qu'il n'est pas un homme). Dans un cadre général pour éluder ce paradoxe on rajoute l'axiome de fondation (dit aussi de régularité) qui est : Aucun ensemble n'est élément de lui-même. Ainsi l'ensemble des ensembles n'existe pas parce que s'il existait il serait élément de lui-même.

Dit autrement : Pour tout ensemble non vide X, il existe un ensemble Y, élément de X tel qu'aucun élément de X ne soit élément de Y.

Cet axiome est appelé également axiome de régularité.

1.1.8 Axiome de l'ensemble vide

Cet axiome permet de poser l'existence d'un ensemble vide. Dans les présentations modernes, il n'est plus mentionné parmi les axiomes des théories des ensembles de Zermelo, car il est la conséquence en logique du schéma d'axiomes de compréhension.

Cet ensemble se note $\emptyset$ (Emplty set) ou $\{\}$. Formalisé en logique mathématique, cela donne :$\exists E : \forall x, x \notin E$.

Proposition 2.

L'ensemble vide est unique.

Preuve : L'existence d'un (au moins) ensemble qui n'a aucun élément est le contenu de cet axiome. D'après l'axiome d'extentionnalité, l'élément qui n'a aucun élément est unique.

Remarque : Comme il fallait un symbole qui représente l'ensemble vide et qui ressemble à un zéro, un mathématicien du groupe de Bourbaki, André Weil, et qui connaissant la langue norvégienne, utilisa en 1937 une lettre de l'alphabet qui est le o barré.

1.2 Axiomatique de Zermelo-Fraenkel (ZF)

Un nouvel axiome est ajouté :

1.2.1 Axiome de remplacement

A ce stade, nous définissons une relation fonctionnelle comme une correspondance (ou une relation) $\mathcal{R}$ d'éléments d'un ensemble de départ E avec des éléments d'un ensemble d'arrivée F avec la condition supplémentaire qu'il ne peut y avoir au plus qu'une correspondance entre ces éléments.

Si $\mathcal{R}$ est une relation fonctionnelle alors pour tout x, l'ensemble-image de x par $\mathcal{R}$ existe.

1.3 Axiomatique ZFC

1. On dit parfois antinomique au sens où il y a une contradiction au sein même de la théorie.

Un nouvel axiome est ajouté :

1.3.1 Axiome du choix

L'axiome du choix peut s'énoncer comme suit : étant donné un ensemble X d'ensembles non vides, il existe une fonction définie sur X, appelée fonction de choix, qui à chacun d'entre eux associe un de ses éléments.

Discussion : Si on a 5 yaourts, complètement discernables, je peux faire un choix, une stratégie d'achat en ne prenant que le produit le moins cher ou celui dont l'emballage est rouge. Je fais donc ici un choix qui est le prix. Cependant, que faire si les 5 yaourts sont au même prix, même poids, même emballage etc...et que seul leur contenu permet de les distinguer (leur ouverture n'est pas autorisé). Dans le cas fini nous pouvons toujours élaborer une stratégie de choix comme 'je prends le deuxième en partant de la droite (s'il sont alignés). Mais, si la liste est infini que faire ? A priori nous sommes bloqué pour justifier notre choix. Cet axiome fait partie des axiomes optionnels et controversés de la théorie des ensembles. En effet, l'existence d'un objet défini à partir de l'axiome du choix n'est pas une existence constructive, c'est-à-dire que l'axiome ne décrit aucunement comment construire l'objet dont on affirme l'existence.

En utilisant le théorème du choix dans certaine démonstration, cela peut déboucher sur des paradoxes, l'un des plus remarquable est :

Le paradoxe de Banach-Tarsky : Supposons que vous ayez dans l'espace une boule de rayon 1. Alors on peut casser la boule en nombre fini de morceaux tel que, si on les réarrange d'une autre façon, on peut en faire une boule de rayon 2.

Nous donnerons également dans ce volume les bases axiomatiques de la théorie arithmétique au sens de Peano. Elle se résume en 5 axiomes.

1.4 Axiomatique arithmétique (Peano)

1. L'élément appelé zéro et noté : 0, est un entier naturel.
2. Tout entier naturel n a un unique successeur, noté s(n) ou Sn.
3. Aucun entier naturel n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

Le premier axiome permet de poser que l'ensemble des entiers naturels n'est pas vide, le troisième qu'il possède un premier élément et le cinquième qu'il vérifie le principe de récurrence dont on retrouvera dans la théorie de la logique classique.

Chapitre

2 Ensembles

2.1 Description d'un ensemble

Un ensemble désigne intuitivement une collection d'objets (que l'on appelle éléments de l'ensemble). Les éléments peuvent être de n'importe quelle nature : nombres, points géométriques, droites, fonctions, autres ensembles... On donne donc volontiers des exemples d'ensembles en dehors du monde mathématique. Par exemple : lundi est un élément de l'ensemble des jours de la semaine ; une bibliothèque est un ensemble de livres...

Pour formaliser qu'un élément noté x appartient à l'ensemble noté A, on écrit $x \in A$. Cette notation peut se lire : 'x appartient à A' ou 'x est élément de A' ou 'x est dans A'ou 'A a pour élément x' ou 'A possède x'. Lorsque qu'un élément x n'appartient pas à un ensemble E, nous noterons $x \notin E$.

Le symbole $\in$ vient de la lettre grecque ϵ, première lettre du verbe 'être' $\epsilon\sigma\tau\iota$. Ce symbole fut introduit par Giuseppe Peano dès 1889.

2.1.1 De façon explicite

Un ensemble peut être décrit de façon explicite, c'est-à-dire que l'on écrit tous les éléments. Comme $A = \{1, 2, 3, 9\}$ ou $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = \{1, ..., 9\}$.

Dans le cas infini on aura par exemple $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ ou $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$. Les pointillés sont utilisés dans le cas d'un procédé itératif qui n'a pas d'ambiguïté. Par contre pour l'ensemble des réels, l'usage de pointillés n'est pas approprié.

Précisons dès à présent certaines notations d'ensemble :

$[\![1 ;n]\!]=\{1; 2; ...; n\}$
$[\![p ;q]\!]=\{p; p + 1; ...; q\}$ avec $p \leq q$ et $p; q \in \mathbb{N}$
$[\![1 ;+\infty]\!]=\{1; 2; ...\}$
$k\mathbb{N} = \{0k; 1k; 2k; ...\}$ avec $k \in \mathbb{N}$
$k\mathbb{Z} = \{...; -2k; -1k; 0k; 1k; 2k; ...\}$ avec $k \in \mathbb{N}$

2.1.2 Par compréhension

Dans certain cas, énumérer de façon explicite tous les éléments d'un ensemble est illusoire. Citons par exemple l'ensemble des nombres réels compris entre 100 et 10000. Dans ce cas nous décrirons l'ensemble par compréhension, c'est-à-dire qu'on le définit par une propriété caractéristique.

Exemple 2.1.1 *L'ensemble des nombres réels compris entre* -7 *et* 23 *s'écrit en compréhension par* $\{x \in \mathbb{R}| - 7 \leq x \leq 23\}$*.*
L'ensemble des entiers naturels pairs sera noté : $\{n \in \mathbb{N}|n\, pair\}$*.*

Remarque : Le symbole '|' se lit 'tel que'. Noté que le symbole '|' signifie aussi 'divise'. Pour éviter une quelconque ambiguïté on utilise '/' ou une virgule. Par exemple $A = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$ ou $A = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$

2.1.3 Famille d'éléments

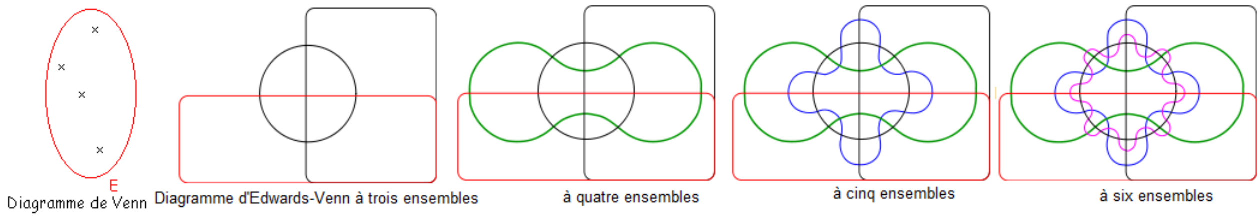
L'ensemble contenant les éléments x_1, x_2 et x_3 est le même ensemble contenant les éléments x_2, x_3 et x_1.
Donc $\{x_1, x_2, x_3\}=\{x_2, x_3, x_1\}$. Une famille d'éléments est un ensemble où il n'y a pas d'ordre dans l'écriture de ses éléments. L'écriture $i \in I = \{1; 2; 3\}$ signifie que l'on peut prendre un élément i de I, comme l'on veut, n'importe lequel, à condition de ne pas le reprendre. Dans notre exemple une famille d'éléments dans x_1, x_2 et x_3 s'écrit $\{x_i\}_{i\in I}$. Cela peut être $\{x_1, x_2, x_3\}$ ou $\{x_3, x_1, x_2\}$ etc...

Remarque : Si l'on veut parler de la famille $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ on notera $\{x_i\}_{1\leq i\leq n}$. De plus $\{x_1, x_2\}$ s'appelle une paire d'éléments. I peut être aussi bien une partie finie de $\mathbb{N}$, comme il peut être $\mathbb{N}$ (donc infini).

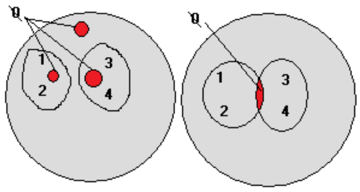
2.2 Représentation graphique d'un ensemble

2.2.1 Diagramme de Venn

Les diagrammes de Venn (1834-1923) offrent un bon moyen de se représenter les ensembles. Dans un diagramme de Venn, chaque ensemble est représenté par un cercle, ou un ovale (une patate). Nous conviendrons bien sûr de ne pas répéter les mêmes éléments. Dans cet type de diagramme, il y a un intérieur (dans l'ensemble) et l'extérieur (en dehors de l'ensemble).



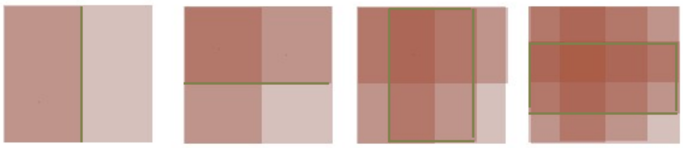
<u>Discussion</u> : Pour toute partie A de E, $\emptyset \subset A$ et $\emptyset \subset E$. Cette situation est représentée par le premier diagramme. Mais cela laisse supposer qu'il existe plusieurs ensembles vides. Or dans l'axiome de l'ensemble vide, il apparaît qu'il est unique.



Donc pour représenter correctement ce fait il faudrait faire le diagramme de droite. Il faut donc convenir que la représentation de Venn n'a pas pour but de représenter les ensembles vides mais plutôt ceux qui sont non vides.

2.2.2 Diagramme de Caroll

Contemporain de Venn, Lewis Carroll (1832-1898) refusait la dissymétrie posée a priori entre l'intérieur et l'extérieur, c'est-à-dire entre l'attribut et sa négation. Ainsi pour Carroll l'attribut mortel et l'attribut immortel ont la même valeur, et il n'est pas légitime que l'un soit représenté par un espace clos et l'autre par un espace non clos. Il proposa donc une représentation dans laquelle 'l'univers' est un carré, et chaque attribut divise ce carré en deux parties égales. Dès lors deux attributs divisent l'univers en quatre, trois attributs en huit, et ainsi de suite.

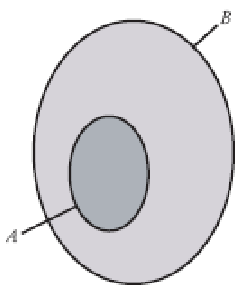


2.3 Sous-ensemble

Définition 3.

Étant donnés deux ensembles E et F, on dit que E est <u>inclus dans F</u> ou E est une <u>partie de F</u> ou <u>F contient E</u> ou <u>E est un sous-ensemble</u> (Sub set) ssi $\forall x \in E, x \in F$. Cette inclusion (au sens large) se note $E \subseteq F$ ou $F \supseteq E$ dans le sens où E est inclus dans F. Si l'on veut indiquer que E est une partie de F, mais ne vaut pas F on notera cette inclusion (au sens strict) $E \subset F$ ou $F \supset E$. Cette dernière est notée aussi parfois dans les ouvrages par $\subsetneqq$. A part lui-même, un ensemble compte toujours au moins un autre sous-ensemble qu'est l'ensemble vide. Ces deux sous-ensembles sont parfois dit 'triviaux' [a]. Les autres sous-ensembles sont appelés <u>sous-ensembles propres ou parties propres</u> (proper subset). Pour résumer $(E \subseteq F) \Leftrightarrow (x \in E \Rightarrow x \in F)$.

a. En mathématiques le terme trivial désigne des cas évidents banals et en soit sans grand intérêt.



Remarque : Un sous-ensemble est un ensemble. Le symbole de l'inclusion $\subset$ apparu la première fois sous la plume de Gergonne en 1816. Il était contraire au sens actuel dans le sens où C désignait la première lettre du mot 'Contient' dans 'A Contient B' : $A \subset B$. C'est Schroder qui donnera le sens actuel 'A contient B' : $B \subset A$.

Exemple 2.3.1 *Soient les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{N}$ alors $x \in \mathbb{R}$. De sorte que $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Par contre $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{N}$ donc $\mathbb{R}\mathbb{N}$. En général dire que EF signifie qu'il existe au moins un élément de E qui n'est pas dans F. Il s'agit ni plus ni moins de la négation de $\forall x \in E, x \in F$.*

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels (natural number), baptisé ainsi en 1763 par William Emerson, suite à Nicolas Chuquet parlant de 'progression naturelle' pour la suite 1,2,3,4... C'est l'Italien Giuseppe Peano (1858-1932) qui a utilisé la lettre $\mathbb{N}$ pour leur ensemble (naturale en italien).

$\mathbb{Z}$ est l'initiale de nombre en allemand (Zahl). Cette appellation est due à l'Allemand Richard Dedekind (1831-1916). Ceci n'empêchera pas les profs de maths de dire aux élèves que c'est l'ensemble des 'zentiers'. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs (integer), c'est-à-dire des entiers naturels munis d'un signe.

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux, c'est-à-dire de la forme $\frac{a}{10^n}$ avec a dans $\mathbb{Z}$ et n dans $\mathbb{N}$.

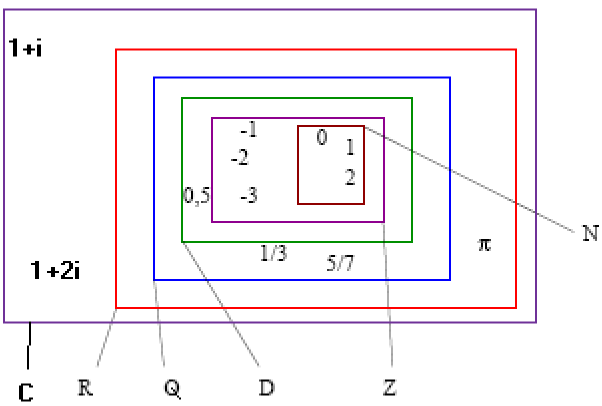
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels (rationnal number), baptisé ainsi par Cassiodore ; c'est Peano qui a utilisé la lettre $\mathbb{Q}$ pour leur ensemble (quotiente = quotient en italien). De façon plus formelle c'est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q des éléments de $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels (real number), baptisé ainsi par Descartes en 1637 ; c'est l'allemand Georg Cantor (1845-1918) qui a désigné pour la première fois l'ensemble de ces nombres par $\mathbb{R}$ (réel=real en allemand).

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes (complex number), baptisés ainsi par Karl Friedrich Gauss en 1831.

C'est (le groupe) Bourbaki qui a rassemblé ces notations et les a fait imprimer en caractère gras. Cependant, au tableau noir, il est difficile de faire des caractères gras à la craie et de là est venue l'idée de doubler les traits.

Exemple 2.3.2 *Nous avons regroupé dans le diagramme de Venn ci-dessous, l'inclusion de ces différents ensembles.*



Si E est un ensemble, il existe un ensemble appelé ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont tous les ensembles inclus (au sens large) dans E (c'est une autre façon dénonce l'axiome des parties). $F \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow F \subseteq E$.

Pour démontrer que A=B il peut être judicieux de démontrer que $A \subset B$ et $B \subset A$. Ou alors $A = B \Leftrightarrow \chi_A = \chi_B$.

Exemple 2.3.3 *Si $E = \{a, b, c\}$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. Si $E = \emptyset$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$.*

Proposition 4.

Si $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$ alors $E \subseteq G$ (transitivité de l'inclusion).

Preuve : Dire que $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$ signifie par définition que $x \in E \Rightarrow x \in F$ et $x \in F \Rightarrow x \in G$ donc $x \in E \Rightarrow x \in G$ soit $F \subseteq G$.

2.4 Suites d'éléments d'un ensemble

1 ;3 ;8 ;4 ;5 ;... est une suite d'éléments de $\mathbb{N}$. 7 ;8 ;2 ;5 ;8 ;6 ;...en est une autre (répétition de certains éléments). Nous remarquons qu'une suite d'éléments de E est une liste ordonnée avec répétition possible. Le premier élément de cette liste peut être noté x_1, le deuxième x_2 etc...pour préciser qu'il y a ordre on met des parenthèses donc la suite $1; 3; 8; 4; 5$ s'écrit (1 ;3 ;8 ;4 ;5) ou $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Soit $n \geq 1$, une suite finie de n objets est dite n-uplets ou n-uples ou vecteur.

(x_1, x_2) s'appelle un couple au lieu de 2-uplets,(x_1, x_2, x_3) s'appelle un triplet au lieu de 3-uples. (x_1) s'identifie au singleton $\{x_1\}$.

Soit $i \in I = \{1; 2; 3, ...n\}$. Si a $x_1, x_2, x_3..., x_n$ on associe un élément de I (une fois pour toute, répétition possible) alors $(x_1, x_2, ..., x_n)$ s'écrit $(x_1)_{1\leq i\leq n}$. Par contre $(x_i)_{i\in I}$ peut signifier la suite ordonnée $(\underbrace{x_1, x_4, x_2, ..., x_{n-2}}_{n})$ ou $(\underbrace{x_n, x_1, x_{n-2}, ..., x_3}_{n})$...

Pour finir $(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a',\, et\, b = b'$.

I peut être aussi bien une partie finie de $\mathbb{N}$, comme il peut être $\mathbb{N}$ (donc infini).

2.5 Ensemble produit

Étant donnés deux ensembles A et B, l'ensemble des couples de la forme (a,b) avec $a \in A$ et $b \in B$ est appelé produit cartésien (Cartesian product) ou ensemble produit de A par B (de A et B) et se note $A \times B$. On a donc :

$A \times B = \{(a, b)|a \in A\, et\, b \in B\}$.

Lorsque A=B, le produit cartésien $A \times A$ se note aussi A^2.

Exemple 2.5.1 *Si* $A = \{1; 2\}$ *et* $B = \{3\}$ *alors* $A \times B = \{(1; 3), (2; 3)\}$. *En pratique au lieu d'écrire* $\forall (x, y) \in A \times A$ *on peut noter* $\forall x, y \in A$.
Attention : En général $A \times B \neq B \times A$. *En effet* $A \times B = \{(1; 3), (2; 3)\}$ *alors que* $B \times A = \{(3; 1), (3; 2)\}$.

Généralisons cette notion d'ensemble produit. Soit $n \in \mathbb{N}$, on peut définir :

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n)|a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$.

Remarquons dès à présent que $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ contient tous les n-uplets possibles (listes ordonnées à n éléments, pris dans A_1, puis A_2...). $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n$ se note aussi

$$\prod_{1\leq i\leq n} A_i \, ou \prod_{i=1}^{n} A_i$$

.

$(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n) \Leftrightarrow (\forall i \in \{1, 2, ..., n\}, a_i = b_i)$. Lorsque A_1=A_2=...=A_n alors $A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_n = A^n$. Par convention, si n=0 on parlera de 0-uplet appelé liste vide. On note A^0.

Proposition 5.

Soient $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$ et $(C, D) \in \mathcal{P}(F)^2$ alors :

1. $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$
2. $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$
3. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$

Preuve :

1. $(A \times C) \cup (B \times C) = \{(x, y)|(x \in A\, et\, y \in C)\, ou\, (x \in B\, et\, y \in C)\} = \{(x, y)|(x \in A\, ou\, x \in B)\, et\, y \in C\} = (A \cup B) \times C$
2. $(A \times C) \cup (A \times D) = \{(x, y)|(x \in A\, et\, y \in C)\, ou\, (x \in A\, et\, y \in D)\} = \{(x, y)|x \in A\, et\, (y \in C\, ou\, x \in D)\} = A \times (C \cup D)$
3. $(A \times C) \cap (B \times D) = \{(x, y)|(x \in A\, et\, y \in C)\, et\, (x \in B\, et\, y \in D)\} = \{(x, y)|(x \in A\, et\, x \in B)\, et\, (y \in C\, et\, y \in D)\} = (A \cap B) \times (C \cap D)$

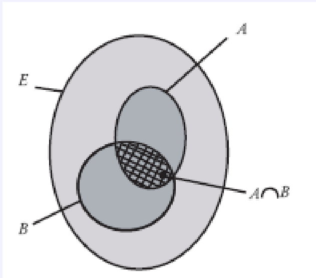
Chapitre 3

Opérations sur les parties d'un ensemble

3.1 Intersection

Définition 6.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle l'intersection de A et B notée $A \cap B$, la partie de E définie par : $A \cap B = \{x \in E | x \in A\, et\, x \in B\}$



Remarque : Deux ensembles A et B tel que $A \cap B = \emptyset$ sont dits disjoints. En d'autres termes A et B n'ont aucun élément en commun. Ce qui revient à dire $(\forall x \in E, x \notin F)\, et\, (\forall x \in F, x \notin A)$. Mais attention ne pas confondre avec deux ensembles distincts. Dire que E et F sont distincts se traduit de façon formalisé par : $(\exists x \in E : x \notin F)\, ou\, (\exists x \in F : x \notin E)$, ce qui s'écrit aussi $E \neq F$.

Proposition 7.

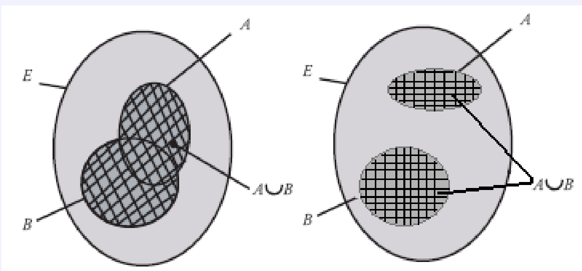
$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A\, ou\, x \notin B$

Preuve : Elle provient de la tautologie Non (P et Q) $\Leftrightarrow$ Non P ou Non Q.

3.2 Réunion

Définition 8.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle l'union de A et B, la partie de E notée $A \cup B$ définie par : $A \cup B = \{x \in E | x \in A\, ou\, x \in B\}$



Remarque : Lorsque que l'on veut parler de l'union disjointe (disjoint union) de deux ensembles, nous utiliserons la notation : $\sqcup$. D'où si A et B sont disjoints alors leurs union est $A \sqcup B$.

Proposition 9.

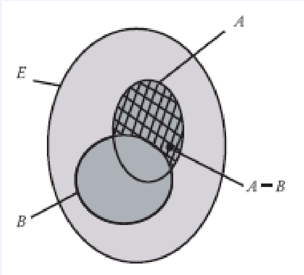
$x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A\, et\, x \notin B$

Preuve (prove) : Elle provient de la tautologie Non (P ou Q)⇔ Non P et Non Q.

3.3 Différence

Définition 10.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle différence de A et B, la partie de E notée $A - B$ définie par : $A - B = A \backslash B = \{x \in A | x \notin B\}$

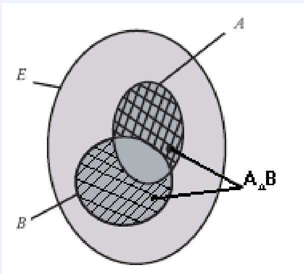


Remarque : Si on considère B inclus dans A et $B = \{x_1\}$ alors $A \backslash B$ signifie que l'on prend les éléments dans A mais pas dans B, c'est-à-dire dans notre cas les éléments de A privé de x_1. Nous retrouvons donc la notation usitée en lycée comme par exemple $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ ou $\mathbb{R} - \{1\}$ et qui est en fait un cas particulier des ensembles symétriques.

3.4 Différence symétrique

Définition 11.

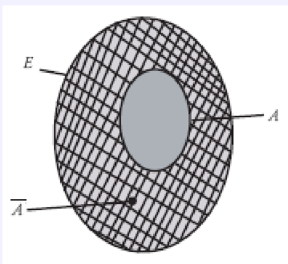
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle la différence symétrique de A et B, la partie de E notée $A \Delta B$ définie par : $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = \{x \in A | x \notin B\}$.



3.5 Complémentaire

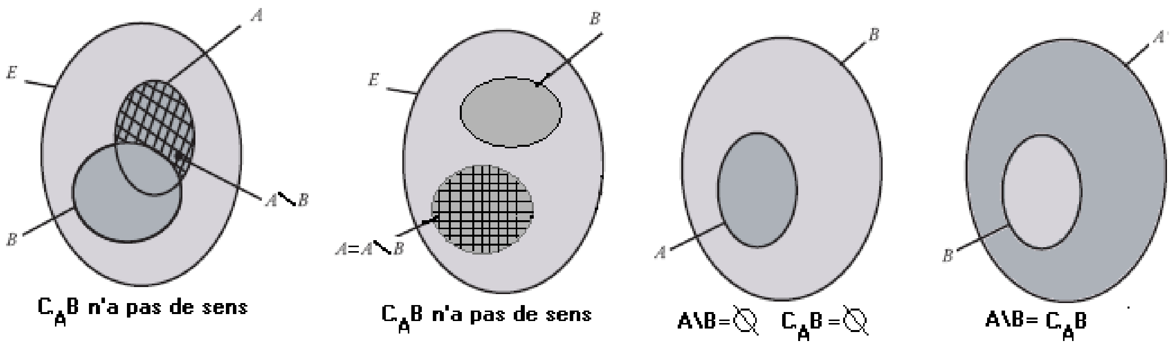
Définition 12.

Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle le complémentaire (complement) de A dans E, la partie de E définie par : $C_E A = E \backslash A = \{x \in E | x \notin A\}$



On pourra noter $\overline{A}$ au lieu de $C_E A$ s'il n'y a pas de risque de confusion.

Remarque : Les notions $A\backslash B$ et $C_A B$ coïncident si $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$.



3.6 Propriétés

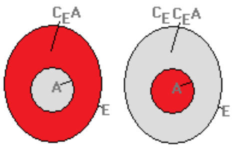
$C_E(\emptyset) = E$: $C_E(\emptyset) = E\backslash\emptyset = \{x \in E | x \notin \emptyset\}$. Or tous les éléments de E ne sont pas dans l'ensemble vide sinon $\emptyset$ ne serait pas vide.

$C_E(E) = \emptyset$: $C_E(E)) = \{x \in E | x \notin E\}$. Un élément x ne peut pas être et ne pas être dans E.

$C_A(\emptyset) = A$: Ce sont les éléments dans A qui ne sont pas dans $\emptyset$. Comme il n'y a pas d'élément dans l'ensemble vide, tout élément de A convient.

$A \subset B \Leftrightarrow C_E(B) \subset C_E(A)$: Soient P(x) et Q(x) deux prédicats. On définit les ensembles $A = \{x \in E | P(x)\, vraie\}$ et $B = \{x \in E | Q(x)\, vraie\}$. Si nous rassemblons les x de E tel que P(x) vraie entraîne Q(x) vraie nous voyons donc que l'on peut associer cela à $x \in A \Rightarrow x \in B$ soit $A \subset B$. Comme $'P \Rightarrow Q \Leftrightarrow Non(Q) \Rightarrow Non(P)'$ est une tautologie (On suppose bien que A et B sont plongés dans un ensemble E afin que Non(P) et Non(Q) est en sens c'est-à-dire correspondent au complémentaire de A dans E ou de B dans E), le résultat est alors immédiat.

$C_E(C_E(A)) = \emptyset$: prouvons le par un schéma :



-$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (lois de Morgan) : $x \in \overline{A \cup B}$ alors $x \notin A \cup B$ d'où $x \notin A$ et $x \notin B$ donc $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$. Réciproquement $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ soit $x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B}$ donc $x \notin A$ et $x \notin B$ d'où $x \notin A \cup B$ c'est-à-dire $x \in \overline{A \cup B}$ d'où la conclusion $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$

-$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (lois de Morgan) : $x \in \overline{A \cap B}$ donc $x \notin A \cap B$ soit $x \notin A$ ou $x \notin B$ soit $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Réciproquement $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ donc $x \notin A$ ou $x \notin B$ soit $x \notin A \cap B$ donc $x \in \overline{A \cap B}$. D'où la conclusion $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$.

$A \subset (A \cup B),\ B \subset (A \cup B)$: Si x est dans A alors x est (dans A ou B) est vraie. De même par symétrie.

$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$:$A \cup \emptyset = \{x \in A\, ou\, x \in \emptyset\} = \{x \in \emptyset\, ou\, x \in A\} = \emptyset \cup A$. Comme x ne peut appartenir à $\emptyset$ (par définition) on a donc $\{x \in A\, ou\, x \in \emptyset\} = \{x \in A\}$. on dit que $\emptyset$ est un élément neutre pour $\cup$.

$A \cap B \subset A,\ A \cap B \subset B$: si x est dans A et B alors x est dans A. De même par symétrie.

$A \cup A = A$:$\{x \in A\, ou\, x \in A\} = \{x \in A\} = A$. On dit que A est idempotent pour $\cup$.

$A \cup E = E$: Si x est dans A ou x est dans E, alors puisque x qui est dans A est aussi dans E, finalement les x sont dans E. On dit que E est absorbant pour $\cup$

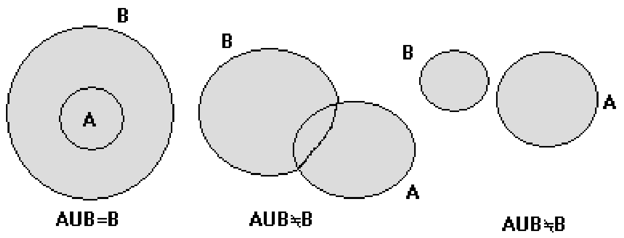
$A \cup B = B \cup A$: $\{x \in A\, ou\, x \in B\} = \{x \in B\, ou\, x \in A\} = B \cup A$. On dit que $\cup$ est commutative.

-$A \cap B = A \cap B$: Dire que x est dans A et x est dans B, sémantiquement est équivalent à dire que x est dans B et x est dans A. On dit que $\cap$ est commutative.

-$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A$=A : C'est un cas particulier du cas précédent et $A \cap \emptyset = \{x \in \emptyset \, et \, x \in A\}$, or il n'y a aucun élément dans l'ensemble vide donc $\{x \in \emptyset \, et \, x \in A\} = \{x \in A\} = A$. On dit que $\emptyset$ est absorbant pour $\cap$.

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$: Soient P(x) et Q(x) deux prédicats. On définit les ensembles $A = \{x \in E | P(x) \, vraie\}$ et $B = \{x \in E | Q(x) \, vraie\}$. Si nous rassemblons les x de E tel que P(x) vraie et Q(x) vraie nous voyons donc que l'on peut associer cela à $x \in A \cup B$. Nous savons que 'P ou (Q ou R) équivaut à (P ou Q) ou R)', est une tautologie (c'est-à-dire toujours vraie). Ainsi $x \in A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup C$, c'est-à-dire $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$ et $A \cup (B \cup C) \supset (A \cup B) \cup C$ d'où la conclusion. On dit que $\cup$ est associative.

-$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$:



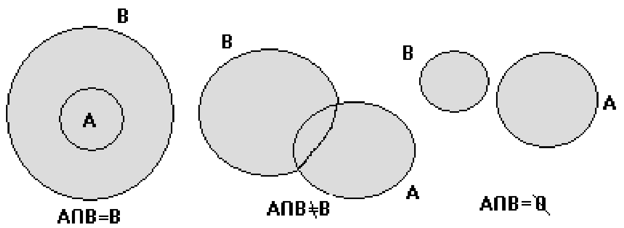
Si $A \subset B$ alors d'après le premier diagramme de Venn, nous avons $A \cup B = B$. Réciproquement si nous avons $A \cup B = B$, nous pouvons envisager trois cas. D'après les diagrammes ensemblistes nous pouvons voir que seul le premier cas convient.

-$A \cap A = A$: $\{x \in A \, et \, x \in A\} = \{x \in A\} = A$. On dit que A est idempotent pour $\cap$.

-$A \cap E = A$: si x est dans A et x est dans E alors x est dans A et sera toujours dans E. On dit que E est neutre pour $\cap$.

-$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$: Traduit en terme de prédicats, nous avons $(P \, et \, Q) \, et \, R \Leftrightarrow P \, et \, (Q \, et \, R)$. On dit que $\cap$ est associative.

-$A \cap B = B \Leftrightarrow A \subset B$:



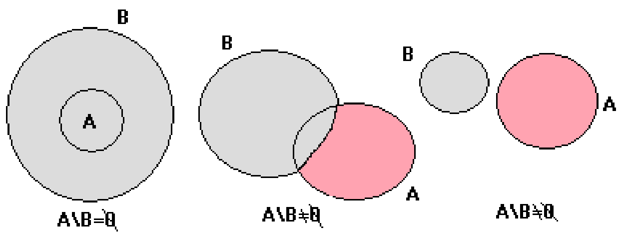
Si $A \subset B$ alors d'après le premier schéma, $A \cap B = B$. Réciproquement si nous envisageons les trois cas possibles, nous remarquons que seul le premier convient.

-$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: Il suffit de considérer la tautologie : $R \, et \, (P \, ou \, Q) \Leftrightarrow (R \, et \, P) \, ou \, (R \, et \, Q)$. On dit que $\cap$ est distributive par rapport à $\cup$.

-$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: Il suffit de considérer la tautologie : $R \, ou \, (P \, et \, Q) \Leftrightarrow (R \, ou \, P) \, et \, (R \, ou \, Q)$. On dit que $\cup$ est distributive par rapport à $\cap$.

-$A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$: C'est un corollaire du cas précédent avec B=A et C=B. On parle d'égalités modulaires.

-$A \backslash B = A - B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$: Nous envisagerons les 3 cas possibles sur un diagramme de Venn :



-$A \Delta B = B \Delta A$: $A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, comme $\cup$ est commutative la conclusion est immédiate. On dit que Δ est commutative.

-$\underline{A\Delta\emptyset = A}$: $A\Delta\emptyset = (A\backslash\emptyset) \cup (\emptyset\backslash A) = A \cup A = A$. On dit que $\emptyset$ est neutre pour Δ.

-$\underline{A\Delta A = \emptyset}$: $A\Delta A = (A\backslash A) \cup (A\backslash A) = (A\backslash A) = \{x \in A\, et\, x \notin A\} = \emptyset$. Tout élément de $\mathcal{P}(E)$ est son symétrique par Δ.

-$\underline{A\Delta B = (A \cup B)\backslash(B \cap A)}$: $A\Delta B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A\backslash(A \cap B) \cup (B\backslash(A \cap B)) = \{x \in A\, et\, x \notin A \cap B\} \cup \{x \in B\, et\, x \notin A \cap B\}$. D'où en terme de prédicats, cela donne : (P et R) ou (Q et R). Soit en mettant R 'en facteur' puisque 'et' est distributive par rapport à 'ou', nous obtenons l'équivalence (P ou Q) et R. De là $\{x \in A\, et\, x \notin A \cap B\} \cup \{x \in B\, et\, x \notin A \cap B\} = \{x \in B\, ou\, x \in A\, et\, x \notin A \cap B\} = \{x \in A \cup B\, et\, x \notin A \cap B\} = (A \cup B)\backslash(B \cap A)$

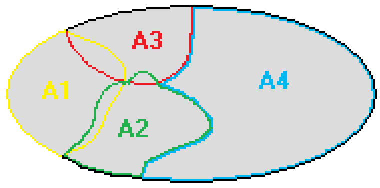
Chapitre

4 Couverture, partition

4.1 Recouvrement

$n \in \mathbb{N}^*$. Soient $I = \{1; 2; ...; n\}$ et E un ensemble. Une famille $\{A_i\}_{i \in I}$ de parties de E constitue un recouvrement de E si :

$\cup_{i \in I} A_i = E$



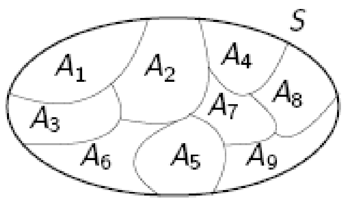
4.2 Partitions

$n \in \mathbb{N}^*$. Soient $I = \{1; 2; ...; n\}$ et E un ensemble. Une famille $\{A_i\}_{i \in I}$ de parties de E est appelée une partition de E ssi :

-$\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
-$\forall (i; j) \in I^2, (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset)$. Ensembles deux à deux disjoints.
-$\cup_{i \in I} A_i = E$

Nous aurions pu dire également qu'une famille $\{A_i\}_{i \in I}$ de parties de E est appelée partition de E ssi :

-$\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$
-$\sqcup_{i \in I} A_i = E$



Exemple 4.2.1 *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ non vide, alors $\{A, A^c\}$ est une partition. A et A^c sont non vides et sont disjoints. De plus $A \cup A^c = E$. Soit $E = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$. $\mathcal{F}$ ainsi définie est une partition puisque chaque élément est non vide, deux à deux disjoints et évidement, la réunion de ces trois éléments est E.*