



HAL
open science

Comportement élastique

Jean Garrigues

► **To cite this version:**

Jean Garrigues. Comportement élastique. École d'ingénieur. Comportement élastique, Centrale
Marseille, France. 2017, pp.220. cel-00827790v4

HAL Id: cel-00827790

<https://cel.hal.science/cel-00827790v4>

Submitted on 30 May 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comportement élastique

Jean Garrigues

(version du 30 mai 2023)



Avant-propos

L'objectif de ce cours est de définir le comportement des milieux continus solides élastiques. L'élasticité définie dans ce cours est générale. La température étant une variable d'état imposée par le second principe de la thermodynamique, ce cours traite donc de ce que l'on appelle communément la *thermoélasticité*.

Remarque – L'élasticité isotherme est un cas particulier idéal. Le lecteur qui souhaiterait n'envisager que des évolutions à température à la fois uniformes dans l'espace et constantes dans le temps (dans la pratique industrielle, ces suppositions sont rarement réalistes) pourra toujours poser $T = T_0$, $\mathbf{grad} T = 0$ et $\dot{T} = 0$ dans toutes les équations ; en outre, dans la résolution des problèmes, il devra aussi ignorer l'équation locale de la conservation de l'énergie (équation de la chaleur) qui, sous ces hypothèses, n'est qu'un corollaire de l'équation de mouvement. En faisant ces approximations, il masquera délibérément les phénomènes thermiques inhérents à toute évolution d'un milieu continu, même élastique.

Contrairement aux cours d'élasticité élémentaires (pseudo-élasticité de Hooke), les déformations envisagées dans ce cours ne sont l'objet d'aucune restriction *a priori*. L'élasticité sans restriction ni sur les déformations ni sur le mouvement est souvent appelée « (thermo-)hyperélasticité » ou encore (thermo-)élasticité en « grandes déformations ».

Puisqu'aucune hypothèse restrictive ne sera faite ni sur l'amplitude des déformations ni sur le type d'évolution, ni sur l'isotropie ou l'anisotropie du solide déformable, ce cours s'intitule donc simplement : *Comportement élastique*. La pseudo-élasticité de Hooke n'apparaîtra donc que comme une dégradation difficilement acceptable de l'élasticité générale.

En première lecture, la plupart des remarques ou commentaires qui apparaissent en retrait et en petits caractères peuvent être ignorés sans nuire à la compréhension de l'ensemble.

La lecture de ce cours suppose une maîtrise suffisante de l'algèbre et de l'analyse tensorielles⁽¹⁾, de la cinématique des milieux continus⁽²⁾ et des équations générales des milieux continus⁽³⁾, dont principalement l'expression différentielle locale pour un milieu continu des quatre principes fondamentaux de la physique classique.

Dans la mesure du possible, on respectera les conventions typographiques suivantes :

- les nombres réels sont en minuscules italiques (exemple : a , μ) ;
- les vecteurs sont en minuscules italiques grasses (exemple : \mathbf{v}) ;
- les tenseurs sont en majuscules italiques grasses (exemple : \mathbf{T}) ;

⁽¹⁾ L'auteur propose un autre cours intitulé *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus* :

<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00679923> ou bien

<http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tenseurs.html>

⁽²⁾ L'auteur propose un autre cours intitulé *Cinématique des milieux continus* :

<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00681766> ou bien

<http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/cinematique.html>.

⁽³⁾ L'auteur propose un autre cours intitulé *Équations générales des milieux continus* :

<http://cel.archives-ouvertes.fr/cel-00696063> ou bien

<http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/mmc.html>.

— les termes d'une matrice sont rangés dans un tableau entre crochets, à deux indices, l'indice de gauche est l'indice de ligne, et l'indice de droite est l'indice de colonne :

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} = [m_{ij}]$$

- la transposition est notée avec un \top en exposant (exemple : \mathbf{T}^\top);
- les ensembles d'entités mathématiques sont en majuscules doublées, en particulier :
- \mathbb{R} est l'espace des réels,
- \mathbb{V}_3 est un espace vectoriel de dimension 3,
- $\mathbb{V}_3^{\otimes p}$ est l'espace vectoriel des tenseurs d'ordre p construits sur \mathbb{V}_3 (de dimension 3^p),
- \mathbb{Q}_{3+} est le groupe des rotations ($\mathbb{Q}_{3+} \subset \mathbb{V}_3^{\otimes 2}$);
- le produit vectoriel de deux vecteurs de \mathbb{V}_3 est noté « \wedge »;
- le tenseur métrique est noté \mathbf{G} ;
- le tenseur d'orientation est noté \mathbf{H} ;
- la description de Lagrange d'un champ matériel est notée avec un indice L ;
- la description d'Euler d'un champ matériel est notée avec un indice E ;
- la dérivée particulière d'une grandeur physique locale $\Psi(P, t)$ est notée $\dot{\Psi}(P, t)$;
- les invariants fondamentaux d'un tenseur du second ordre \mathbf{X} sont notés X_I , X_{II} et X_{III} .

Remerciements

Je tiens à remercier très vivement Mathias LEGRAND⁽⁴⁾, ce grand magicien de L^AT_EX, sans qui la mise en page de ce texte ne serait que celle par défaut de la classe book⁽⁵⁾ et qui m'a aussi donné de précieux conseils sur la typographie française.

Je remercie aussi vivement mon ancien collègue et néanmoins toujours ami Thierry DÉSOYER⁽⁶⁾ pour les discussions parfois vives mais le plus souvent fructueuses qu'il a bien voulu m'accorder, ainsi que pour le temps qu'il a bien voulu passer à la relecture de ce texte.

Bonne lecture.

Information – Ce texte est rédigé en vue d'une lecture dynamique à l'écran : toutes les références internes et externes sont actives et conduisent à la cible référencée (dans la plupart des visualisateurs de fichiers au format pdf, on revient à l'état précédent avec la combinaison de touches <alt><page arrière>). Néanmoins, les références des pages ont été conservées pour la lecture du document imprimé.

⁽⁴⁾ De l'université McGill, de Montréal.

⁽⁵⁾ Ceux qui écrivent en L^AT_EX me comprendront.

⁽⁶⁾ De l'École Centrale Marseille (ECM) et du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) à Marseille.

Table des matières

1	Milieux continus solides déformables	9
1.1	Rappels de thermodynamique et notations	9
1.2	Solide déformable	12
1.3	Solide déformable élastique	14
1.4	En bref... ..	16
2	Élasticité isotrope	17
2.1	Variables d'état d'un milieu continu élastique isotrope	17
2.2	Conséquences du second principe de la thermodynamique	18
	Conséquences de la dissipation thermique, 18 • Conséquences de la nullité de la dissipation intrinsèque, 18 • Relation de Helmholtz, 19 • Loi de comportement élastique isotrope avec tenseur de déformation objectif \mathbf{B} , 21.	
2.3	Comportement élastique isotrope écrit avec d'autres tenseurs de déformation .	23
	Utilisation du tenseur de déformation \mathbf{V} , 23 • Utilisation du tenseur de déformation \mathbf{M} , 24 • Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, 25 • Récapitulation sur les lois élastiques isotropes avec un tenseur de déformation objectif, 27 • Utilisation de tenseurs de déformation non objectifs, 27.	
2.4	Quelques modèles encore couramment rencontrés dans les codes de calcul	31
	Le modèle de Piola-Kirchhoff, 31 • Le modèle dit « néo-Hookien », 32 • Le modèle de Mooney-Rivlin, 32 • Le modèle d'Ogden, 33 • Récapitulation, 33.	
2.5	Critères de limite élastique	34
	Considérations microscopiques, 34 • Point de vue macroscopique, 35 • Critères portant sur des caractéristiques de la déformation, 36 • Limitation de la distorsion angulaire maximale, 37 • Limitation de la distorsion stérique maximale, 38 • Limitation de la dilatation linéique, 40 • Critères « énergétiques », 41 • Conclusion sur les critères de limite élastique en élasticité isotrope, 42.	
2.6	Loi incrémentale (« loi tangente »)	44
2.7	En bref... ..	48
3	Construction d'un modèle d'élasticité isotrope	51
3.1	Démarche générale	51
3.2	Choix des variables d'état du modèle	51
	Nouvelle expression de la loi de comportement mécanique, 54.	
3.3	Forme générale des fonctions d'état du modèle élastique isotrope $\{T, K_v, \delta\}$. . .	55
	Forme générale de l'énergie libre massique de Helmholtz, 55 • Forme générale de l'entropie massique, 56 • Forme générale de l'énergie interne massique, 56 • Loi de comportement mécanique, 56.	
3.4	Analyse des évolutions élémentaires	57
	Analyse de l'évolution $\mathcal{E}^{(1)}$, 57 • Analyse de l'évolution $\mathcal{E}^{(2)}$, 58 • Analyse de l'évolution $\mathcal{E}^{(3)}$, 59	

	• Synthèse, 60.	
3.5	Hypothèse simplificatrice supplémentaire facultative	61
3.6	Expériences réelles	62
	Mouvement isovolume isotherme sans dilatation sphérique préalable (évolution $\mathcal{C}^{(4)}$), 62 • Déformation sphérique isotherme (évolution $\mathcal{C}^{(2)}$), 64 • Dilatation thermique libre (évolution $\mathcal{C}^{(5)}$), 64 • Essai de traction simple isotherme (évolution $\mathcal{C}^{(6)}$), 65.	
3.7	Quelques idéalizations possibles	66
3.8	En bref...	68
4	Pseudo élasticité de Hooke	71
4.1	Hypothèse des « petites perturbations » (rappels de cinématique)	72
4.2	« Loi » de Hooke traditionnelle	73
4.3	Recherche d'une énergie libre de Helmholtz conduisant à la loi de Hooke	74
4.4	Une nouvelle « loi de Hooke » en déformations finies	78
4.5	Élasticité isotrope en petites déformations sans restriction sur le mouvement	80
4.6	En bref...	82
5	Élasticité isotrope transverse	85
5.1	Variables d'état d'un solide élastique isotrope transverse	85
5.2	Loi de comportement mécanique en élasticité isotrope transverse	86
	Relation de Helmholtz, 87 • Comportement élastique isotrope transverse avec le tenseur \mathbf{B} , 87 • Déviation des directions d'anisotropie, 88 • Comportement mécanique élastique isotrope transverse avec le tenseur \mathbf{V} , 89 • Comportement mécanique élastique isotrope transverse avec le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, 90.	
5.3	Comportement thermique en élasticité isotrope transverse	92
5.4	Critères de limite élastique en élasticité isotrope transverse	93
5.5	En bref...	94
6	Construction d'un modèle d'élasticité isotrope transverse	97
6.1	Choix des variables d'état réduites	97
6.2	Loi de comportement mécanique de ce modèle isotrope transverse	99
6.3	Forme générale des fonctions d'état de ce modèle isotrope transverse	100
6.4	Analyse des évolutions élémentaires	101
	Analyse du chemin $\mathcal{C}^{(1)}$, 101 • Analyse du chemin $\mathcal{C}^{(2)}$, 102 • Analyse du chemin $\mathcal{C}^{(3)}$, 102 • Analyse du chemin $\mathcal{C}^{(4)}$, 102.	
6.5	Résultats complets du modèle $\{T, K_v, \delta, a\}$	105
6.6	En bref...	106

7	Élasticité générique	107
7.1	Les variables d'état d'un solide élastique	107
7.2	Forme générique des lois de comportement élastique	110
	Relation de Helmholtz, 110 • Loi de comportement mécanique générique en élasticité (isotrope ou non), 110.	
7.3	Construction de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz	111
7.4	Critères de limite élastique	112
7.5	En bref... ..	113
8	Le problème élastique	115
8.1	Énoncé général	115
	Définition du solide élastique à étudier, 115 • Modèle de comportement du matériau, 115 • Relations cinématiques, 116 • Équations différentielles à résoudre, 117 • Description des sollicitations extérieures, 119 • Synthèse, 120.	
8.2	Approche numérique des solutions	122
	Incertitudes sur les résultats numériques, 122 • Aperçu sur la méthode des éléments finis, 123.	
8.3	Recommandations pratiques	132
9	Illustrations numériques en élasticité isotrope	133
9.1	Modèle de comportement utilisé	133
	Comportement élastique isotrope, 133 • Comportement thermique, 134 • Formulation intégrale, 134.	
9.2	Choix d'un logiciel de résolution	135
9.3	Traction non isotherme d'une éprouvette cylindrique	136
	Caractéristiques du matériau, 136 • Conditions aux limites mécaniques, 137 • Conditions aux limites thermiques, 137 • Équations différentielles à résoudre, 137 • Analyse des résultats numériques, 138.	
9.4	Forte flexion isotherme d'un barreau élastique isotrope	140
	Description du problème, 142 • Caractéristiques du matériau, 143 • Analyse des résultats numériques, 143.	
9.5	Forte traction/compression isotherme d'un barreau élastique isotrope	145
9.6	Essai de glissement	145
9.7	En bref... ..	146
10	Conclusion	149
A	Dérivées particulières utiles en anisotropie	151
A.1	Dérivée particulière des invariants croisés	151
	Utilisation du tenseur de déformation \mathbf{B} , 152 • Utilisation du tenseur de déformation \mathbf{V} , 152.	
B	Loi tangente du modèle $\{T, K_v, \delta\}$	155

C	Cinématique du glissement	157
C.1	Directions principales actuelles de déformation dans un glissement	157
C.2	Changement de paramètre de glissement	158
C.3	Décomposition d'une déformation isovolume	159
C.4	Évolution de la variable d'anisotropie a	161
D	Transformations d'intégrales	165
D.1	Intégrale d'un produit $f \operatorname{div} \mathbf{v}$	165
D.2	Intégrale d'un produit $f \Delta g$	166
D.3	Intégrale d'un produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w}$	166
D.4	Intégrale d'un produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T}$	166
D.5	Intégrale d'un produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{w}$	166
D.6	Intégrale d'un produit scalaire $\mathbf{T} : \operatorname{div} \mathbf{K}$	167
D.7	Intégrale d'un produit scalaire $\mathbf{T} : \Delta \mathbf{U}$	167
E	Distorsions maximales particulières en anisotropie	169
E.1	Rappels de cinématique	169
E.2	Distorsions angulaires maximales	170
E.3	Distorsion stérique maximale du triplet $(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$	171
F	Calculs du modèle isotrope $\{T, K_v, \delta\}$	173
G	Calculs du chapitre 4	197
H	Calculs en isotropie transverse	207
I	Calculs de distorsions maximales particulières en anisotropie	217
J	Calculs du modèle isotrope transverse $\{T, K_v, \delta, a\}$	231

Milieux continus solides déformables

Après quelques rappels de thermodynamique fondamentale destinés à préciser les notations employées dans le cours et à limiter les références à des formules des cours précédents, on définit dans ce chapitre ce que l'on appelle solide déformable et solide déformable élastique.

1.1 Rappels de thermodynamique et notations

Le premier et le second principe de la thermodynamique postulent l'existence de deux fonctions d'état scalaires objectives : l'énergie interne massique $e^m(P, t)$ et l'entropie massique $s^m(P, t)$. L'objectivité des fonctions d'état ainsi que celle des variables d'état indépendantes impliquent que les fonctions d'état sont des fonctions isotropes de leurs arguments. En utilisant le théorème des fonctions isotropes, On peut ramener la liste de variables d'états tensorielles indépendantes objectives $\{T, \boldsymbol{\chi}_2, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$ à une liste de variables d'état scalaires indépendantes $\{T, I_2, \dots, I_m\}$ appelées *variables d'état réduites* :

$$\begin{aligned} e^m &= f_e(T, \boldsymbol{\chi}_2, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) &= \bar{f}_e(T, I_2, \dots, I_m) \\ \dot{e}^m &= \partial_T f_e \dot{T} + \sum_{i=2}^n \partial_{\boldsymbol{\chi}_i} f_e \bar{\otimes}^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i &= \partial_T \bar{f}_e \dot{T} + \sum_{j=2}^n \partial_{I_j} \bar{f}_e \dot{I}_j \\ s^m &= f_s(T, \boldsymbol{\chi}_2, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) &= \bar{f}_s(T, I_2, \dots, I_m) \\ \dot{s}^m &= \partial_T f_s \dot{T} + \sum_{i=2}^n \partial_{\boldsymbol{\chi}_i} f_s \bar{\otimes}^{p_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i &= \partial_T \bar{f}_s \dot{T} + \sum_{j=2}^n \partial_{I_j} \bar{f}_s \dot{I}_j \end{aligned}$$

où :

- $T(P, t)$ est le champ matériel (scalaire) des températures, la présence de cette variable d'état est imposée par la thermodynamique ;
- $\boldsymbol{\chi}_2(P, t), \dots, \boldsymbol{\chi}_n(P, t)$ sont les champs matériels des variables d'état tensorielles (d'ordre 0 ou plus) indépendantes et objectives choisies pour caractériser l'état d'une particule du modèle de solide déformable ;
- $I_2(P, t), \dots, I_m(P, t)$ sont les *variables d'état réduites* (m scalaires objectifs). Cette liste ne peut être établie que lorsque l'on connaît le nombre et l'ordre de tensorialité des variables d'état tensorielles $\{\boldsymbol{\chi}_2, \dots, \boldsymbol{\chi}_n\}$. Elle contient des invariants propres à chaque argument tensoriel ainsi que des invariants croisés⁽¹⁾ qui traduisent les orientations relatives entre les arguments tensoriels (théorème des fonctions scalaires isotropes).

⁽¹⁾ C'est-à-dire calculés à partir de plusieurs arguments tensoriels.

On utilisera aussi la fonction d'état scalaire auxiliaire *énergie libre massique de Helmholtz* [J.kg⁻¹] définie par :

$$\psi^m = e^m - T s^m$$

Comme pour toute fonction d'état scalaire objective, on a :

$$\begin{aligned} \psi^m &= f_\psi(T, \boldsymbol{\chi}_2, \dots, \boldsymbol{\chi}_n) &= \bar{f}_\psi(T, I_2, \dots, I_m) \\ \dot{\psi}^m &= \partial_T f_\psi \dot{T} + \sum_{i=2}^n \partial_{\boldsymbol{\chi}_i} f_\psi \otimes^{P_i} \dot{\boldsymbol{\chi}}_i &= \partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \sum_{j=2}^n \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \dot{I}_j \end{aligned}$$

Le second principe de la thermodynamique impose que pour tout milieu continu :

1. la température absolue T est une variable d'état *non négative* obligatoire ;
2. dans une conduction thermique, la chaleur va du chaud vers le froid : $\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T \leq 0$;
3. l'entropie d'un système est une fonction d'état scalaire extensive et objective [J.K⁻¹] ;
4. dans toute évolution, la variation d'entropie d'un système est supérieure ou égale à l'apport d'entropie extérieur.

La forme locale de l'inégalité de l'axiome 4 est que la *dissipation* Φ [W.m⁻³] est un champ scalaire non négatif en toute particule et à tout instant de toute évolution. La dissipation actuelle en une particule peut s'écrire sous l'une des trois formes équivalentes suivantes :

$$\Phi = \rho T \dot{s}^m - r_{ext}^v + \text{div}_E \mathbf{q} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (1.1)$$

$$= \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (1.2)$$

$$= -\rho (\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{grad}_E T}{T} \geq 0 \quad (\text{inégalité dite de Clausius-Duhem}) \quad (1.3)$$

- $\rho(P, t) > 0$ [kg.m⁻³] est un champ matériel scalaire objectif appelé *masse volumique* actuelle ;
- $T(P, t) > 0$ [K] est un champ matériel scalaire objectif appelé *température absolue* actuelle et \dot{T} [K.s⁻¹] est sa dérivée particulaire ;
- $r_{ext}^v(P, t) > 0$ [W.m⁻³] est un champ matériel scalaire objectif appelé *puissance calorifique volumique d'origine extérieure* actuellement apportée à la particule par l'interaction d'un rayonnement traversant le domaine de milieu continu (dans beaucoup d'applications ce terme est nul) ;
- $\mathbf{q}(P, t)$ [W.m⁻²] est un champ matériel vectoriel objectif appelé *courant de chaleur* actuel, représentant la circulation de la chaleur à l'intérieur du domaine de milieu continu : la puissance calorifique surfacique actuelle traversant une facette matérielle de normale unitaire actuelle \mathbf{n}_t est le scalaire $q^s = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_t$ [W.m⁻²] ;
- $\boldsymbol{\sigma}(P, t)$ [Pa] est un champ matériel tensoriel objectif du second ordre symétrique appelé *tenseur des contraintes* actuel ;
- $\mathbf{D}(P, t)$ [s⁻¹] est un champ matériel tensoriel objectif du second ordre symétrique appelé *tenseur des taux de déformation* actuel ;
- $e^m(P, t)$ [J.kg⁻¹] est une fonction d'état scalaire objective appelée *énergie interne massique* actuelle dont l'existence est postulée par le premier principe de la thermodynamique ;
- $s^m(P, t)$ [J.K⁻¹.kg⁻¹] est une fonction d'état scalaire objective appelée *entropie massique* actuelle dont l'existence est postulée par le second principe de la thermodynamique ;
- $\psi^m(P, t) = e^m(P, t) - T(P, t) s^m(P, t)$ [J.kg⁻¹] est une fonction d'état scalaire objective auxiliaire appelée *énergie libre massique de Helmholtz* actuelle.

Rappel – Comme tout champ matériel, les valeurs actuelles de ces champs (scalaires, vectoriels ou tensoriels) peuvent aussi bien être décrit par la méthode de Lagrange que par celle d’Euler :

$$\forall \Psi \text{ champ matériel, } \Psi(P, t) = \Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)$$

La dissipation actuelle Φ en une particule P est fonction de l’état actuel de la particule, de sa vitesse d’évolution actuelle dans l’espace des états et du gradient actuel du champ de température [éq. (1.2) p. 10].

Le dernier terme de la dissipation ($-\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T$) dans les équations (1.1), (1.2) et (1.3) [p. 10] est la *dissipation thermique* actuelle, notée Φ_{th} . Ce terme est non négatif par principe⁽²⁾.

Le reste de la dissipation $\Phi_{int} = \Phi - \Phi_{th}$ est la *dissipation intrinsèque* actuelle. Ce terme est la puissance calorifique volumique actuellement produite (ou consommée si elle est négative) par d’éventuels processus internes exothermiques ou endothermiques.

Processus internes – Dans les solides déformables monoconstituants⁽³⁾ qui sont l’objet de ce cours, le seul processus interne possible est le frottement car il ne s’y produit ni réaction chimique ni changement de phase. Le frottement étant exothermique, on a donc toujours $\Phi_{int} \geq 0$.

En revanche, si on veut modéliser comme des milieux continus des milieux *multiconstituants* (ou multiphasiques), une partie des variables d’état décrivent les concentrations locales des divers constituants. Les changements de concentrations (réactions chimiques ou changements de phase) peuvent être endothermiques ou exothermiques. La dissipation intrinsèque Φ_{int} peut donc être négative en présence de processus endothermiques. Toutefois, le second principe de la thermodynamique impose que la dissipation totale Φ est non négative ($\Rightarrow \Phi_{int} \geq -\Phi_{th}$). La puissance calorifique volumique nécessaire à un processus endothermique local ne peut donc être fournie que par conduction avec la matière environnante ($\text{div}_E \mathbf{q} < 0$) ou apportée par un rayonnement r_{ext}^v traversant le solide déformable. De même, la puissance calorifique volumique dégagée par un processus exothermique local ne peut être absorbée que par la matière environnante ($\text{div}_E \mathbf{q} > 0$).

Puisque les variables d’état indépendantes $\{T, \chi_2, \dots, \chi_n\}$ peuvent se ramener à m variables d’état scalaires indépendantes $\{T, I_2, \dots, I_m\}$ appelées *variables d’état réduites*, on représente tous les états envisageables par le modèle par un point de \mathbb{R}^m , de coordonnées $\{T, I_2, \dots, I_m\}$. La région⁽⁴⁾ de \mathbb{R}^m contenant ces points est l’*espace des états*, de dimension m , du modèle.

Lorsqu’une particule évolue, son point représentatif dans l’espace des états trace une courbe paramétrée par le temps. La vitesse de ce point dans \mathbb{R}^m est la *vitesse d’évolution* de cette particule. Les composantes de ce vecteur de \mathbb{R}^m sont les m dérivées particulières $\{\dot{T}, \dot{I}_2, \dots, \dot{I}_m\}$.

Enfin, on rappelle que si les variables d’état sont bien des grandeurs *indépendantes* (on peut donner à chacune d’elles une valeur arbitraire dans son domaine de définition pour définir un état), *leurs dérivées particulières ne sont pas nécessairement indépendantes* : il se peut que la cinématique ou des principes fondamentaux imposent des relations entre les dérivées particulières des variables d’état. Par conséquent, à partir d’un état quelconque donné dans l’espace des états \mathbb{R}^m , toutes les directions de vitesse d’évolution dans l’espace des états ne sont pas toujours possibles.

Toutes les notions qui ont été rappelées rapidement dans cette section sont définies de manière précise dans les chapitres 4 et 5 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

⁽²⁾ Axiome 2 du second principe de la thermodynamique : « la chaleur va du chaud vers le froid. »

⁽³⁾ Les alliages dont la composition ne varie pas au cours des évolutions peuvent être considérés comme monoconstituants, sauf certains alliages dits « à mémoire de forme » qui changent de phase solide avec la température.

⁽⁴⁾ Chaque variable d’état $\{T, I_2, \dots, I_m\}$ a son propre domaine de définition. Par exemple : $T > 0$.

1.2 Solide déformable

Un *domaine matériel* de milieu continu est un solide déformable s'il existe une *forme propre de référence* du domaine matériel à laquelle on peut se référer pour définir un champ matériel de tenseurs de déformation actuel $\mathbf{X}(P, t)$ par rapport à cette forme propre de référence.

Rappel – Un tenseur de déformation est un concept cinématique permettant d'évaluer (entre autres) la dilatation linéique actuelle ($K_t = \lim_{\ell_0 \rightarrow 0} \frac{\ell_t}{\ell_0} > 0$) dans toute direction matérielle issue d'une particule, par rapport à une forme de référence du solide choisie arbitrairement. Dans sa forme de référence, le solide est donc déclaré non déformé.

Remarques – La *forme de référence* est souvent confondue avec *configuration de référence*. Il convient de distinguer la nuance entre les deux concepts : la forme propre de référence décrit les longueurs de référence (donc à $t = t_0$) des *biparticules* du solide déformable alors qu'une configuration de référence donne les positions de référence des *particules* du solide déformable *pour un certain observateur*.

S'il est vrai que le champ des positions initiales pour un observateur (configuration de référence) permet bien de déterminer les distances de référence entre les particules et donc la forme de référence, en revanche, pour un observateur donné, il existe une infinité de champs de positions initiales définissant la même forme de référence, c'est-à-dire les mêmes longueurs de référence de biparticules. Toutes les configurations de référence définissant la même forme de référence se déduisent l'une de l'autre par superposition d'un champ de déplacement de solide indéformable (composition d'une translation et d'une rotation).

La forme propre de référence d'un solide déformable est la même pour tous les observateurs car la distance entre deux particules est une grandeur objective, alors que le champ des positions initiales (configuration de référence) d'une même forme diffère d'un observateur à l'autre.

Pour les mêmes raisons, la forme *actuelle* d'un solide déformable est la même pour tous les observateurs bien que le champ des positions actuelles diffère d'un observateur à l'autre.

- **Définition 1.1 – Solide déformable.** On appelle solide déformable un milieu continu dont le modèle de comportement contient une variable d'état qui est un tenseur de déformation objectif⁽⁵⁾ par rapport à une forme de référence.

Un modèle de comportement de solide déformable possède donc *au moins* deux variables d'état pour décrire l'état actuel de ses particules : la température, imposée par la thermodynamique, et un tenseur de déformation par rapport à une forme de référence.

La responsabilité du choix de la forme de référence pour la définition des déformations est laissée au scientifique ou à l'ingénieur qui fait l'étude. Dans cette forme de référence le solide déformable est considéré comme non déformé.

Exemple – On peut choisir comme forme de référence la forme du solide lorsqu'il n'a jamais été sollicité : aucune force extérieure à distance ($\mathbf{f}_{ext}^m = 0$) ni de contact ($\mathbf{f}^s = 0$), aucune source de chaleur à distance ($\mathbf{r}_{ext}^v = 0$) ni de contact ($q_{ext}^s = 0$), et enfin à une température uniforme arbitraire T_0 ($\mathbf{grad}_L T_0 = \mathbf{0}$). Le plus souvent, la réalisation physique de l'état de référence n'est qu'approximative⁽⁶⁾.

⁽⁵⁾ En cinématique, on définit différents tenseurs de déformation équivalents. Certains d'entre eux sont objectifs. On choisit un tenseur objectif car l'objectivité des variables d'état est une condition nécessaire à l'isotropie des fonctions d'état objectives.

⁽⁶⁾ Notamment, s'il est aisé de s'assurer que la température est uniforme en attendant suffisamment longtemps la stabilisation thermique, il est difficile en revanche de s'isoler de la pesanteur.

On définit en cinématique différents tenseurs de déformation symétriques et objectifs⁽⁷⁾ pour représenter la déformation actuelle en une particule de milieu continu : on peut citer entre autres⁽⁸⁾ : $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top$, $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{V} - \mathbf{G}$ et $\mathbf{M} = \ln \mathbf{V}$.

- **Notation 1.2** – Tant que l'on n'aura pas choisi un tenseur de déformation objectif particulier pour écrire les équations du modèle de solide déformable, il sera noté \mathbf{X} .

La description de l'état local actuel d'un solide déformable doit parfois être complétée par des variables d'état autres que la température et la déformation. C'est le cas des solides déformables *anisotropes*, pour lesquels la réponse sthénique actuelle $\boldsymbol{\sigma}$ dépend non seulement de la température et du tenseur de déformation \mathbf{X} , mais aussi de l'orientation de la déformation actuelle \mathbf{X} par rapport à certaines directions matérielles actuelles particulières $\mathbf{n}_t^{(i)}$ qui sont des *directions actuelles d'anisotropie*. Elles complètent donc la description de l'état actuel d'une particule. Avec de telles variables d'état, il est possible d'envisager une modélisation en milieu continu de matériaux fibreux, lamellaires, tissés, composites, etc.

Rappel – Une direction actuelle d'anisotropie est une direction *non orientée*. Elle est plus commodément représentée par le tenseur uniaxial unitaire $\mathbf{N}_t^{(i)} = \mathbf{n}_t^{(i)} \otimes \mathbf{n}_t^{(i)}$, où $\|\mathbf{n}_t^{(i)}\| = 1$ et $\|\mathbf{N}_t^{(i)}\| = 1$.

Enfin, la description de l'état local de certains solides déformables peut nécessiter des variables d'état supplémentaires : il se peut que la seule description de la température actuelle, de la déformation actuelle et des directions actuelles d'anisotropie soient insuffisantes pour la description de l'état local actuel de la matière, car le chemin suivi pour atteindre l'état local actuel influence la réponse sthénique du milieu continu. C'est le cas lorsque des phénomènes microscopiques provoquant un effet macroscopique notable se sont produits dans l'évolution qui a conduit à l'état actuel. Ces phénomènes physiques microscopiques sont des ruptures ou des réarrangements de liaisons interatomiques⁽⁹⁾. Pour représenter macroscopiquement l'état local actuel dans le cadre d'une vision continue de la matière, il faut donc des variables d'état supplémentaires appelées variables d'état *mnésiques* qui sont une mémoire partielle du chemin suivi par une particule pour atteindre son état actuel. Suivant la nature des phénomènes microscopiques que l'on souhaite décrire macroscopiquement, et aussi suivant la finesse avec laquelle on souhaite les représenter, les variables d'état mnésiques peuvent être scalaires, vectorielles ou tensorielles. Ces phénomènes microscopiques donnent lieu à des constatations empiriques macroscopiques nommées plastification, endommagement, fatigue ou vieillissement.

- **Définition 1.3 – Modèle de comportement thermodynamiquement admissible.** On dit qu'un modèle de comportement est thermodynamiquement admissible si les deux principes de la thermodynamique sont satisfaits :
 1. La fonction d'état *énergie interne massique* e^m en fonction des variables d'état du modèle existe et est connue (la conservation de l'énergie sera satisfaite par l'équation de la chaleur).
 2. La fonction d'état *entropie massique* s^m en fonction des variables d'état du modèle existe et est connue.
 3. La *dissipation* $\Phi = \Phi_{int} + \Phi_{th}$ en tout point de toute évolution est non négative.

⁽⁷⁾ Dans beaucoup de textes, les tenseurs de déformation objectifs sont dits « eulériens ». On envisagera occasionnellement dans les chapitres suivants l'utilisation de tenseurs de déformation non objectifs, dits aussi « lagrangiens », pour illustrer leurs inconvénients et aussi pour faire le lien avec des publications anciennes qui les utilisent.

⁽⁸⁾ Voir la section 4.4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁹⁾ Ou encore des changements chimiques lents et uniformes (« vieillissement » supposé uniforme) ; on reste dans le cas des monoconstituants si toutes les particules « vieillissent » simultanément de la même manière.

1.3 Solide déformable élastique

Pendant une évolution de solide déformable, la température actuelle des particules n'est généralement pas uniforme ($\mathbf{grad}_E T \neq \mathbf{0}$). La dissipation thermique actuelle est donc généralement non nulle. En revanche, la dissipation intrinsèque peut être nulle s'il n'existe aucun processus interne produisant ou consommant localement de la chaleur lorsque les variables d'état des particules évoluent.

Par ailleurs, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est la réponse sthénique du milieu continu à l'évolution de l'état des particules : il décrit les efforts intérieurs provoqués par le changement d'état des particules (variations de T , \mathbf{X} , etc.). Le tenseur des contraintes actuel $\boldsymbol{\sigma}$ est donc *a priori* une fonction de l'état actuel, de la vitesse d'évolution actuelle dans l'espace des états, voire du chemin suivi pour aboutir à l'état actuel. Dans le cas particulier où le tenseur des contraintes actuel n'est ni fonction de la vitesse d'évolution actuelle ni fonction du chemin suivi dans l'espace des états pour y aboutir, le tenseur des contraintes en une particule est alors une *fonction d'état*, c'est-à-dire uniquement fonction de l'état actuel de la particule.

En élasticité, on envisage de construire un modèle de comportement simple tel que :

1. il n'existe aucun processus interne produisant ou consommant de la chaleur (en pratique, il n'y a pas de frottement interne) ;
2. le tenseur des contraintes actuel $\boldsymbol{\sigma}$ ne dépend pas du chemin suivi dans l'espace des états pour aboutir à cet état actuel (pas de variable d'état mnésique).
3. le tenseur des contraintes actuel $\boldsymbol{\sigma}$ ne dépend pas de la vitesse de déformation actuelle (pas de viscosité) ;

Dans ces conditions, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est une *fonction d'état* tensorielle, car il n'est fonction que des variables d'état.

On pose donc la définition suivante :

- **Définition 1.4 – Solide élastique.** On appelle solide élastique, un modèle de milieu continu solide déformable tel que :

1. *Le comportement est thermodynamiquement admissible* [déf. 1.3 p. 13] (les principes de la thermodynamique ne sont pas violés).
2. *La dissipation intrinsèque est nulle* dans toute évolution de particule :

$$\Phi_{int} = \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -\rho (\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = 0 \quad [\text{éq. (1.2) et (1.3) p. 10}] \quad (1.4)$$

3. *Il n'y a pas de variable d'état mnésique* dans la liste des variables d'état ; les seules variables d'état sont donc :
 - la température T (sa présence est imposée par la thermodynamique),
 - un tenseur de déformation actuelle \mathbf{X} objectif (le milieu continu est un solide déformable),
 - d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\mathbf{n}_t^{(i)}$ (ou $\mathbf{N}_t^{(i)}$) ;
4. *Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état* :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}}(T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_t^{(1)}, \dots, \mathbf{N}_t^{(n)}) \quad (\text{donc pas fonction de la vitesse de déformation actuelle } \mathbf{D}) \quad (1.5)$$

Ce modèle simple est assurément une idéalisation des matériaux réels, mais il est satisfaisant pour bon nombre de matériaux, tant que l'on ne dépasse pas certaines limites (apparition de phénomènes microscopiques dont l'effet est macroscopiquement notable). Ces limites seront précisées dans la suite [sec. 2.5 p. 34].

Commentaires pour les lecteurs initiés – La définition de l'élasticité qui vient d'être donnée est différente de la définition *empirique* habituellement donnée dans les cours élémentaires d'élasticité isotherme où l'on « définit » l'élasticité par la « réversibilité » et parfois en plus la « linéarité » de la « courbe de traction » dans essai de charge/décharge en *traction simple isotherme*.

La définition générale de l'élasticité donnée dans ce cours est valable pour toute évolution thermomécanique et pas seulement dans un essai de traction simple isotherme. On verra plus loin que cette définition générale de l'élasticité appliquée au cas particulier d'un essai de traction simple isotherme corrobore assez correctement les résultats expérimentaux de la définition empirique traditionnelle : une « courbe de traction isotherme » est bien « réversible » (courbes de charge/décharge confondues), mais cette courbe n'est pas nécessairement une droite et il ne faut pas y regarder de trop près pendant l'uniformisation des températures.

Bien noter que contrairement à ce que suggère implicitement le discours de certains auteurs, la « courbe de traction » tracée dans le plan (contrainte normale dans la direction de traction, allongement longitudinal) *n'est pas une courbe d'évolution tracée dans l'espace des états* : en « élasticité isotherme », la seule variable d'état est le tenseur de déformation \mathbf{X} (symétrique objectif). Quand on veut ignorer les variations de température, l'espace des états est donc de dimension 3⁽¹⁰⁾. Le tenseur des contraintes est une *fonction d'état* [déf. 1.4 p. 14] à valeur tensorielle d'ordre 2 symétrique *et non une variable d'état*⁽¹¹⁾.

Une « courbe de traction » isotherme n'est qu'une représentation très partielle de la fonction d'état tenseur des contraintes en fonction du tenseur de déformation : ce n'est que le graphe d'une partie du tenseur des contraintes (le scalaire $\mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_1$) en fonction d'une partie du tenseur des déformations (le scalaire dilatation linéique dans la direction de traction), dans une évolution très particulière : la traction simple. Un modèle d'élasticité doit définir la réponse sthénique $\boldsymbol{\sigma}$ dans tous les états possibles c'est-à-dire pour tous les points de l'espace des états. Parce qu'un simple essai de traction ne peut pas explorer tous les états de déformation dans l'espace des états, il est déraisonnable de ne caractériser le comportement élastique d'un solide déformable qu'au moyen du seul essai de traction isotherme.

De plus, contrairement à l'« élasticité isotherme », il existe en thermoélasticité une plus grande diversité de chemins d'évolution possibles dans l'espace des états (de dimension 4) pour passer d'un état à un autre. Par exemple, pour allonger une éprouvette à la température uniforme initiale T_0 , au lieu de la solliciter avec une machine de traction, une autre évolution possible est de la chauffer (apport de chaleur) en dilatation libre puis bloquer sa longueur et enfin la laisser refroidir (perte de chaleur) à la température initiale T_0 . Cette mise en tension de l'éprouvette s'est effectuée sans fournir de travail extérieur, avec seulement des échanges de chaleur entre l'éprouvette et son extérieur.

Quand on se limite à ne considérer que des évolutions isothermes, on ne peut allonger l'éprouvette qu'avec du travail mécanique extérieur. En particulier, dans un essai de *traction isotherme*, on a l'impression fautive⁽¹²⁾ qu'il n'y a qu'un seul chemin dans l'espace des états (de dimension 3) pour allonger une éprouvette, car on se restreint implicitement à n'utiliser qu'une machine de traction et à n'observer qu'une partie de la variable d'état déformation : l'allongement dans la direction de traction. C'est seulement dans ce cas que l'on peut parler de « réversibilité » de la courbe contrainte-déformation dans un essai de traction pendant une charge/décharge en traction simple *sur une machine de traction*. Si l'allongement et le retour à déformation nulle se font par des chemins différents dans l'espace des états, l'idée de « réversibilité d'un chemin » perd son sens bien que le solide déformable

⁽¹⁰⁾ On rappelle que les trois variables réduites associées à la déformation peuvent être les trois invariants fondamentaux de \mathbf{X} , ou ses trois valeurs propres ordonnées ou tout autre triplet équivalent d'invariants. Voir l'annexe A.6 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3]. Un simple essai de traction ne peut donc parcourir que des chemins très particuliers dans l'espace des états.

⁽¹¹⁾ Changer subrepticement de liste de variables d'état indépendantes dans les raisonnements thermodynamiques ne peut que conduire à des confusions. Relire *Commentaires* dans la section 4.1.3 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur, [note 3 p. 3].

⁽¹²⁾ Cette « pensée automatique » est induite par le dispositif expérimental qui ne sait généralement que tirer sur une éprouvette et mesurer l'effort et l'allongement ! On dispose rarement d'une machine de traction-torsion par exemple, qui pourrait allonger une éprouvette en suivant un chemin plus compliqué dans l'espace des états.

testé soit élastique. D'une manière générale, on peut allonger une éprouvette en suivant un certain chemin (éventuellement compliqué, isotherme ou non) dans l'espace des états (de dimension 4) et revenir à son état initial (pas de déformation et température initiale) par un chemin différent (éventuellement compliqué, isotherme ou non). Si le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ n'est pas nul après le retour à l'état initial (pas de déformation et température initiale), c'est que le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ n'est pas une fonction d'état (donc l'éprouvette n'est pas élastique) et qu'il faut adjoindre aux variables d'état une ou plusieurs variables d'état mnésiques car le chemin suivi dans l'espace des états a une importance.

Enfin, on verra dans la suite qu'une évolution rigoureusement isotherme ($\text{grad}_E T = \mathbf{0}$ et $\dot{T} = 0$) d'un solide déformable (même élastique) est irréaliste sauf à être « infiniment lente » afin que les températures puissent être considérées comme constamment uniformes. De fait, on constate expérimentalement, au moyen d'une caméra thermique par exemple, que l'allongement d'une éprouvette métallique avec une machine de traction sans précautions thermiques particulières (les échanges thermiques avec l'air ambiant sont libres et non mesurés) provoque une légère baisse temporaire⁽¹³⁾ de la température de l'éprouvette. Les modèles de comportement élastique qui vont être construits dans ce cours prédisent cette constatation expérimentale [section 9.3.5 p. 138].

Pour toutes ces raisons, l'évocation d'une « courbe de traction isotherme réversible » ne peut pas être une définition correcte du comportement élastique. C'est tout au plus une constatation expérimentale dans une sollicitation très particulière et idéale (un essai de traction isotherme « infiniment lent ») d'un matériau élastique.

1.4 En bref...

Les variables d'état décrivant l'état actuel d'une particule de solide déformable contiennent au moins la température actuelle et un tenseur de déformation actuelle par rapport à une forme de référence. Pour les solides déformables anisotropes, il faut y ajouter les directions actuelles d'anisotropie. Pour certains solides déformables, on constate que la réponse sthénique (le tenseur des contraintes) dépend non seulement des variables d'état précédentes, mais aussi de la vitesse actuelle de déformation et parfois aussi de l'histoire de l'évolution.

Les solides déformables *élastiques* sont des milieux continus simples tels que :

1. Le modèle de comportement est thermodynamiquement admissible [déf. 1.3 p. 13]
2. Les variables d'état sont la température actuelle, la déformation actuelle et d'éventuelles directions actuelles d'anisotropie, à l'exclusion de toute variable d'état mnésique;
3. La dissipation intrinsèque est nulle en toute particule et à tout instant (pas de frottement interne);
4. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état (donc pas fonction de la vitesse d'évolution actuelle).

Les chapitres qui suivent développent en premier lieu l'élasticité isotrope (pas de direction d'anisotropie dans les variables d'état), puis des élasticités anisotropes.

⁽¹³⁾ Elle est temporaire car la température finit toujours par s'équilibrer avec celle du milieu extérieur par conduction en attendant suffisamment longtemps.

Élasticité isotrope

L'élasticité isotrope est l'étude du comportement des milieux continus solides élastiques dont la matière ne comporte pas de direction matérielle privilégiée. La réponse sthénique locale $\boldsymbol{\sigma}$ à une déformation n'est donc pas fonction de l'orientation actuelle de la déformation \mathbf{X} par rapport à la position actuelle de la matière.

2.1 Variables d'état d'un milieu continu élastique isotrope

Outre la température actuelle T qui est une variable d'état scalaire objective et non négative dont la présence est imposée par la thermodynamique, on choisit un tenseur de déformation actuelle \mathbf{X} objectif comme seconde et unique autre variable d'état. Caractériser un état local actuel par un tenseur de déformation, sans aucune référence à l'orientation de ce tenseur par rapport à la position actuelle de la matière, signifie que l'on ne veut pas distinguer l'état de particules à une même température T qui seraient soumises à des tenseurs de déformation actuels différents ayant les mêmes valeurs propres mais des directions propres différentes. C'est par ce choix que l'on décide que le modèle de milieu continu est *isotrope*. Les variables d'état indépendantes d'un solide élastique isotrope sont donc le couple $\{T, \mathbf{X}\}$. Le théorème des fonctions isotropes implique qu'une liste de *variables d'état réduites*⁽¹⁾ est, par exemple, le quadruplet de réels $\{T, X_I, X_{II}, X_{III}\}$, où X_I , X_{II} et X_{III} sont les invariants fondamentaux du tenseur de déformation actuel objectif et symétrique \mathbf{X} .

Rappel – Le théorème des fonctions isotropes nous apprend que les listes possibles de variables d'état réduites ne sont pas uniques. Il est possible de prendre d'autres listes d'invariants scalaires du tenseur de la variable d'état déformation \mathbf{X} comme par exemple le triplet $\{\text{tr}\mathbf{X}, \text{tr}(\mathbf{X}^2), \text{tr}(\mathbf{X}^3)\}$ ⁽²⁾ pour définir les variables d'état réduites d'un modèle élastique isotrope. Dans les développements théoriques, l'utilisation des variables d'état réduites $\{T, X_I, X_{II}, X_{III}\}$ est commode car les dérivées particulières de ces variables d'état ont une expression simple qui a été établie en cinématique. Dans la construction effective de modèles élastiques, il sera souvent préférable de choisir un autre ensemble de variables d'état réduites dont les interprétations cinématiques sont claires afin de construire des fonctions d'état physiquement sensées. On fera un tel choix dans l'exemple de modèle de comportement élastique construit dans le chapitre 3 [p. 51].

- **Définition 2.1 – Solide élastique isotrope.** Un modèle de milieu continu est dit solide élastique isotrope si :
 1. les variables d'états indépendantes sont $\{T, \mathbf{X}\}$ où \mathbf{X} est un tenseur de déformation objectif ;
 2. le milieu continu est élastique : $\Phi_{int} = 0$ et $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état [déf. 1.4 p. 14].

⁽¹⁾ Voir déf. 4.9, section 4.1.4 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3]

⁽²⁾ Voir l'annexe A.6 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

Attention – Il faut veiller à ne pas confondre les deux sens possibles du mot « isotropie » :

1. *Isotropie mathématique des fonctions à valeur scalaire* : la valeur de la fonction est invariante dans toute rotation d'ensemble de ses arguments tensoriels ⁽³⁾ ;
2. *Isotropie matérielle des milieux continus* : la description de l'état d'une particule ignore l'orientation de la déformation actuelle par rapport à la position actuelle de la matière.

L'espace des états d'un milieu continu élastique isotrope est donc *au plus* ⁽⁴⁾ de dimension 4 : la température et trois invariants du tenseur de déformation.

2.2 Conséquences du second principe de la thermodynamique

2.2.1 Conséquences de la non négativité de la dissipation thermique

L'inégalité $\Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q}}{T} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0$ conduit à la nécessité de l'existence d'une loi de comportement thermique encore appelée loi de conduction thermique ⁽⁵⁾. Parmi elles, la plus simple que l'on puisse envisager est la loi de conduction thermique de Fourier :

$$\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}_E T \quad \text{où } \alpha > 0 \text{ est une constante caractéristique du matériau}$$

Mais il est possible d'en envisager d'autres. Par exemple, α peut être toute fonction isotrope ⁽⁶⁾ à valeur scalaire non négative $\alpha(T, \mathbf{grad}_E T, \mathbf{X})$, c'est-à-dire fonction de tout ou partie des invariants scalaires objectifs suivants (théorème des fonctions isotropes) :

$$\alpha = f_\alpha(T, \|\mathbf{grad}_E T\|, X_I, X_{II}, X_{III}, \mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{grad}_E T, \mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{grad}_E T) \quad (2.1)$$

où les deux invariants croisés $\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{grad}_E T$ et $\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{grad}_E T$ traduisent l'orientation relative du vecteur $\mathbf{grad}_E T$ par rapport aux directions propres de la déformation actuelle. Le choix d'une loi de conduction thermique ne peut être suggéré que par des constatations expérimentales.

Vocabulaire – La conductivité thermique α dépend généralement de la température T .

Si elle est en outre fonction de $\|\mathbf{grad}_E T\|$ on dit souvent que la loi de comportement thermique est « non linéaire ».

Elle peut aussi dépendre de la déformation ou d'une partie de la déformation ⁽⁷⁾. Si elle dépend aussi de l'orientation de $\mathbf{grad}_E T$ par rapport à la déformation \mathbf{X} (les deux derniers invariants de éq. (2.1) [p. 18]), on dit qu'il y a une anisotropie de conduction thermique induite par la déformation.

2.2.2 Conséquences de la nullité de la dissipation intrinsèque

La nullité de la dissipation intrinsèque est une *égalité* qui va fournir ici, non seulement la nécessité de l'existence, mais aussi la forme générale de la loi de comportement mécanique des solides élastiques isotropes.

⁽³⁾ Voir l'annexe B.6 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3]

⁽⁴⁾ Dans la construction effective d'un modèle, on peut décider d'ignorer délibérément l'influence d'une ou plusieurs variables d'état réduites sous réserve d'une justification théorique ou expérimentale.

⁽⁵⁾ Voir la section 5.7 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

⁽⁶⁾ On laisse le soin au lecteur de vérifier que l'isotropie de la fonction $\alpha(T, \mathbf{grad}_E T, \mathbf{X})$ est nécessaire pour que la loi de conduction thermique soit *universelle*, c'est-à-dire la même pour tous les observateurs.

⁽⁷⁾ Par exemple, la conductivité thermique peut ne dépendre que de la seule partie déformation sphérique.

La théorie des fonctions isotropes nous enseigne que puisque les deux fonctions d'état fondamentales *énergie interne massique* et *entropie massique* sont des grandeurs scalaires objectives par principe, et que les variables d'état sont des grandeurs tensorielles (éventuellement d'ordre 0) objectives, alors les deux fonctions d'état fondamentales dont l'existence est postulée par les deux principes de la thermodynamique, sont des fonctions isotropes de leurs arguments. Il existe donc deux fonctions \bar{f}_e et \bar{f}_s telles que ⁽⁸⁾ :

$$e^m = f_e(T, \mathbf{X}) = \bar{f}_e(T, X_I, X_{II}, X_{III}) \quad \text{et} \quad s^m = f_s(T, \mathbf{X}) = \bar{f}_s(T, X_I, X_{II}, X_{III})$$

où X_I , X_{II} et X_{III} sont les invariants fondamentaux du tenseur de déformation symétrique objectif \mathbf{X} . L'expression de ces deux fonctions d'état en fonction des variables d'état est particulière à chaque matériau solide élastique isotrope (métaux, alliages, polymères, verres, etc.).

Les dérivées particulières de ces deux fonctions d'état s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{e}^m &= \partial_T \bar{f}_e \dot{T} + \partial_{X_I} \bar{f}_e \dot{X}_I + \partial_{X_{II}} \bar{f}_e \dot{X}_{II} + \partial_{X_{III}} \bar{f}_e \dot{X}_{III} \\ \dot{s}^m &= \partial_T \bar{f}_s \dot{T} + \partial_{X_I} \bar{f}_s \dot{X}_I + \partial_{X_{II}} \bar{f}_s \dot{X}_{II} + \partial_{X_{III}} \bar{f}_s \dot{X}_{III} \end{aligned}$$

La nullité de la dissipation intrinsèque pour un milieu continu élastique isotrope s'écrit donc :

$$\begin{aligned} 0 &= \rho (T \dot{s}^m - \dot{e}^m) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (1.2) p. 10}] \\ &= \rho (T \partial_T \bar{f}_s - \partial_T \bar{f}_e) \dot{T} + \\ &\quad \rho (T \partial_{X_I} \bar{f}_s - \partial_{X_I} \bar{f}_e) \dot{X}_I + \rho (T \partial_{X_{II}} \bar{f}_s - \partial_{X_{II}} \bar{f}_e) \dot{X}_{II} + \rho (T \partial_{X_{III}} \bar{f}_s - \partial_{X_{III}} \bar{f}_e) \dot{X}_{III} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \\ &= \rho (T \partial_T \bar{f}_s - \partial_T \bar{f}_e) \dot{T} - \rho \partial_{X_I} \bar{f}_\psi \dot{X}_I - \rho \partial_{X_{II}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{II} - \rho \partial_{X_{III}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{III} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \\ 0 &= -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} - \rho \partial_{X_I} \bar{f}_\psi \dot{X}_I - \rho \partial_{X_{II}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{II} - \rho \partial_{X_{III}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{III} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où, pour condenser les écritures dans les deux dernières lignes, on a introduit la fonction d'état auxiliaire *énergie libre massique de Helmholtz* $\psi^m = e^m - T s^m$.

Remarques – Comme on peut le constater, la dissipation intrinsèque s'écrit un peu plus brièvement en utilisant le couple de fonctions d'état (ψ^m, s^m) qu'en utilisant le couple fondamental (e^m, s^m) qui est naturellement introduit par les deux principes de la thermodynamique. La substitution du groupement de termes $e^m - T s^m$ par ψ^m n'est qu'un raccourci d'écriture sans importance fondamentale.

On obtient aussi bien le résultat (2.2) à partir de l'expression de la dissipation rappelée en éq. (1.3) [p. 10] (inégalité de Clausius-Duhem).

La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.2) p. 19] doit être vraie pour toute évolution c'est-à-dire $\forall \dot{T}, \forall \dot{X}_I, \forall \dot{X}_{II}, \forall \dot{X}_{III}, \forall \mathbf{D}$ à partir de tout état de particule c'est-à-dire $\forall T, \forall X_I, \forall X_{II}, \forall X_{III}$. Or, les dérivées particulières des invariants de déformation et le tenseur des taux de déformation \mathbf{D} ne sont pas indépendants : ils sont liés par la cinématique. Pour préciser et exploiter correctement les quantificateurs \forall de l'équation (2.2) [p. 19] pour toute évolution à partir de tout état, il faudra choisir un tenseur de déformation.

2.2.3 Relation de Helmholtz

Quel que soit le tenseur de déformation choisi, les dérivées particulières des invariants de déformation \dot{X}_I, \dot{X}_{II} et \dot{X}_{III} s'expriment uniquement en fonction de \mathbf{X} et de \mathbf{D} : ce sont des relations

⁽⁸⁾ Annexes B.6 et B.7 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

purement cinématiques qui ne font pas intervenir la dérivée particulière de la température \dot{T} ⁽⁹⁾. La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.2) p. 19] peut donc s'écrire sous la forme condensée provisoire suivante :

$$0 = -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} + g(T, X_I, X_{II}, X_{III}, \dot{X}_I, \dot{X}_{II}, \dot{X}_{III}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D}) \quad (2.3)$$

- **Théorème 2.2 – Relation de Helmholtz.** Dans un milieu élastique isotrope, les deux fonctions d'état \bar{f}_ψ et \bar{f}_s sont liées par la relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T \partial_T \bar{f}_s - \partial_T \bar{f}_e = 0 \quad (2.4)$$

Démonstration – L'égalité (2.3) [p. 20] est vraie pour tout état, c'est-à-dire : $\forall T, \forall X_I, \forall X_{II}, \forall X_{III}$ et pour toute évolution à partir de cet état, c'est-à-dire : $\forall \dot{T}, \forall \dot{X}_I, \forall \dot{X}_{II}, \forall \dot{X}_{III}, \forall \mathbf{D}$. Or le terme $\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)$ dans l'égalité (2.3) [p. 20] étant une fonction d'état⁽¹⁰⁾, donc non fonction de \dot{T} , il est nécessairement nul car l'égalité (2.3) [p. 20] doit être vraie $\forall \dot{T}$.

Pour définir le comportement d'un milieu continu élastique isotrope, *il suffit donc de préciser l'expression d'une seule fonction d'état* \bar{f}_e, \bar{f}_s ou \bar{f}_ψ en fonction des variables d'état. Les deux autres fonctions d'état s'en déduisent par la relation de Helmholtz [éq. (2.4) p. 20] et la définition de l'énergie libre massique de Helmholtz ($\psi^m = e^m - T s^m$).

Remarques – Les lecteurs qui ont lu la construction du modèle de milieu continu *fluide simple* à deux variables d'état indépendantes T et ρ , dans le chapitre 6 du cours *Équations générales des milieux continus* du même auteur [note 3 p. 3], constateront que la relation de Helmholtz (2.4) [p. 20] entre les deux fonctions d'état f_e et f_s est formellement la même, bien que les fonctions d'état f_e et f_s d'un fluide simple et celles d'un solide élastique isotrope soient des fonctions complètement différentes de variables d'état différentes.

En élasticité isotrope, la relation de Helmholtz provient du fait que \dot{T} et les dérivées particulières des autres variables d'état ($\dot{X}_I, \dot{X}_{II}, \dot{X}_{III}$) peuvent prendre indépendamment des valeurs arbitraires. Dans un modèle de comportement élastique isotrope, toutes les directions d'évolution dans l'espace des états sont donc possibles à partir de tout état. En particulier, il peut exister une évolution telle que *seule* la variable d'état T évolue (variation de température à déformation bloquée).

Compte tenu de la relation de Helmholtz [éq. (2.4) p. 20], la nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.2) p. 19] se réduit à :

$$\forall \dot{X}_I \forall \dot{X}_{II} \forall \dot{X}_{III} \forall \mathbf{D}, \quad 0 = -\rho \partial_{X_I} \bar{f}_\psi \dot{X}_I - \rho \partial_{X_{II}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{II} - \rho \partial_{X_{III}} \bar{f}_\psi \dot{X}_{III} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (2.5)$$

où la cinématique impose que \dot{X}_I, \dot{X}_{II} et \dot{X}_{III} sont des fonctions de \mathbf{X} et de \mathbf{D} . Pour expliciter ces dérivées particulières, il faut choisir un tenseur de déformation.

⁽⁹⁾ Les dérivées particulières des invariants d'un tenseur de déformation sont des résultats de cinématique démontrés en annexe B.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3]. Dans la suite, on les rappellera en temps utile [éq. (2.6) p. 21, éq. (2.10) p. 23 et éq. (2.13) p. 24].

⁽¹⁰⁾ On rappelle que $\rho = \rho_0 / K_V$, conservation de la masse, sec. 2.3.2 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3]. La masse volumique actuelle ρ est donc une fonction de la déformation actuelle (par la dilatation volumique K_V).

2.2.4 Loi de comportement élastique isotrope avec tenseur de déformation objectif \mathbf{B}

Les variables d'état réduites possibles⁽¹¹⁾ sont donc : $\{T, B_I, B_{II}, B_{III}\}$ et l'énergie libre massique de Helmholtz d'une particule s'écrit :

$$\psi^m = f_\psi^B(T, B_I, B_{II}, B_{III}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}^m = \partial_T f_\psi^B \dot{T} + \partial_{B_I} f_\psi^B \dot{B}_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \dot{B}_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \dot{B}_{III}$$

On montre en cinématique⁽¹²⁾ que les dérivées particulières des trois invariants fondamentaux du tenseur de déformation \mathbf{B} s'écrivent :

$$\dot{B}_I = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} \quad ; \quad \dot{B}_{II} = 2(B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} \quad ; \quad \dot{B}_{III} = 2B_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad (2.6)$$

La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.5) p. 20] s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 &= -2\rho \left(\partial_{B_I} f_\psi^B \mathbf{B} + \partial_{B_{II}} f_\psi^B (B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + \partial_{B_{III}} f_\psi^B B_{III} \mathbf{G} \right) : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \\ 0 &= \left(B_{III} \partial_{B_{III}} f_\psi^B \mathbf{G} + (\partial_{B_I} f_\psi^B + B_I \partial_{B_{II}} f_\psi^B) \mathbf{B} - \partial_{B_{II}} f_\psi^B \mathbf{B}^2 - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\rho} \right) : \mathbf{D} \quad (\text{car } \rho \neq 0) \end{aligned}$$

Par ailleurs, le principe de conservation de la masse implique⁽¹³⁾ :

$$K_v = \frac{\rho_0}{\rho}$$

où $K_v = \sqrt{B_{III}}$ (dilatation volumique calculée avec \mathbf{B} , ρ est la masse volumique actuelle, et ρ_0 est la masse volumique de référence.

Finalement, la nullité de la dissipation intrinsèque dans toute évolution d'un milieu élastique isotrope s'écrit :

$$\forall \mathbf{D}, \quad 0 = \underbrace{\left(B_{III} \partial_{B_{III}} f_\psi^B \mathbf{G} + (\partial_{B_I} f_\psi^B + B_I \partial_{B_{II}} f_\psi^B) \mathbf{B} - \partial_{B_{II}} f_\psi^B \mathbf{B}^2 - \frac{\sqrt{B_{III}} \boldsymbol{\sigma}}{2\rho_0} \right)}_{\mathbf{T} \text{ symétrique}} : \mathbf{D} \quad (2.7)$$

$$\forall \mathbf{D}, \quad 0 = \mathbf{T} : \mathbf{D}, \quad (2.8)$$

Le tenseur symétrique \mathbf{T} est donc soit une fonction tensorielle de \mathbf{D} à valeur orthogonale à \mathbf{D} , soit nul. Or, en élasticité, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est une *fonction d'état* [déf. 1.4 p. 14], le tenseur \mathbf{T} est donc une fonction d'état qui ne peut pas être fonction du tenseur des taux de déformation \mathbf{D} . Le tenseur \mathbf{T} est donc nul. On en déduit le résultat suivant :

- **Théorème 2.3 – Loi de comportement mécanique élastique isotrope.** En élasticité isotrope, quand on utilise le tenseur de déformation \mathbf{B} pour mesurer les déformations, la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{III}}} \left(B_{III} \partial_{B_{III}} f_\psi^B \mathbf{G} + (\partial_{B_I} f_\psi^B + B_I \partial_{B_{II}} f_\psi^B) \mathbf{B} - \partial_{B_{II}} f_\psi^B \mathbf{B}^2 \right) \quad (2.9)$$

où $\psi^m = f_\psi^B(T, B_I, B_{II}, B_{III})$ est une fonction d'état caractéristique de chaque matériau élastique isotrope.

⁽¹¹⁾ On verra plus loin que d'autres choix de variables d'état réduites sont possibles, avec des interprétations cinématiques plus claires.

⁽¹²⁾ Voir l'annexe B.2.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽¹³⁾ Section 2.3.2 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

Remarque importante – Bien que ce ne soit pas clairement apparent dans l'équation (2.9) [p. 21], la fonction d'état tensorielle du second ordre *tenseur des contraintes* $\boldsymbol{\sigma}$ est non seulement fonction du tenseur de déformation actuel \mathbf{B} , mais aussi de la température actuelle car la fonction d'état f_{ψ}^B et ses dérivées partielles sont *a priori* des fonctions des variables d'état et donc de la température.

- **Propriété 2.4** – On vérifie aisément avec la loi de comportement mécanique (2.9) [p. 21] qu'en élasticité isotrope, le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur de déformation \mathbf{B} ont les mêmes directions propres. Il en sera de même avec tous les tenseurs de déformation objectifs car ils ont tous les mêmes directions propres⁽¹⁴⁾.

Autres expressions trouvées dans la littérature – En utilisant l'identité de Cayley-Hamilton :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^3 - B_I \mathbf{B}^2 + B_{II} \mathbf{B} - B_{III} \mathbf{G} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \mathbf{B}^2 - B_I \mathbf{B} + B_{II} \mathbf{G} - B_{III} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{B} \text{ est inversible}) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{B}^2 = B_I \mathbf{B} - B_{II} \mathbf{G} + B_{III} \mathbf{B}^{-1} \end{aligned}$$

on peut présenter la loi de comportement élastique isotrope (2.9) sous une autre forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{III}}} \left((B_{II} \partial_{B_{II}} f_{\psi}^B + B_{III} \partial_{B_{III}} f_{\psi}^B) \mathbf{G} + \partial_{B_I} f_{\psi}^B \mathbf{B} - B_{III} \partial_{B_{II}} f_{\psi}^B \mathbf{B}^{-1} \right)$$

Rien n'empêche de présenter cette loi de comportement mécanique avec des puissances de \mathbf{B} supérieures ou inférieures par le même procédé.

Pour compléter la modélisation du milieu continu élastique isotrope il suffira de donner l'expression de l'énergie libre de Helmholtz f_{ψ}^B en fonction des variables d'état réduites $\{T, B_I, B_{II}, B_{III}\}$. Cette fonction d'état est caractéristique du milieu solide élastique envisagé (métaux, élastomères, verres, etc.).

Si l'on se donne une fonction $\psi^m = f_{\psi}^B(T, B_I, B_{II}, B_{III})$, on sait déterminer les expressions des fonctions d'état e^m et s^m avec la relation de Helmholtz et la définition de ψ^m . De plus, la dissipation dans un comportement élastique est $\Phi = \Phi_{th} \geq 0$ (grâce à la loi de comportement thermique). Par construction, le modèle de comportement élastique isotrope précédent, est complètement déterminé par la connaissance de la fonction d'état ψ^m , il est donc thermodynamiquement admissible [déf. 1.3 p. 13] quelle que soit la fonction f_{ψ}^B .

Bien que toute fonction $f_{\psi}^B(T, B_I, B_{II}, B_{III})$ garantisse un comportement élastique isotrope thermodynamiquement admissible, son expression en fonction des variables d'état devrait être physiquement motivée afin d'éviter de construire des lois de comportement exotiques⁽¹⁵⁾.

Remarque – Dans la construction précédente de la loi de comportement mécanique (ainsi que dans celles données dans la section suivante), on a fait le choix *arbitraire* de prendre comme variables d'état réduites les trois invariants fondamentaux des tenseurs de déformation. Dans la construction effective de modèles de comportement élastique isotrope, ce choix n'est pas toujours pertinent car la signification cinématique des invariants fondamentaux des tenseurs de déformation n'est pas toujours claire. On sait de la théorie des fonctions isotropes que l'on peut utiliser comme liste de variables d'état réduites d'autres listes de variables d'état réduites qui s'expriment en fonction des trois invariants fondamentaux du tenseur de déformation. Dans la construction effective d'une expression de la fonction d'état f_{ψ}^B en fonction des variables d'état réduites, il sera préférable d'utiliser une autre liste de variables d'état réduites dont les interprétations cinématiques sont claires. On verra un exemple de construction de fonction d'état ψ^m physiquement motivée dans le chapitre 3 [p. 51].

⁽¹⁴⁾ Section 4.4.4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽¹⁵⁾ On en verra des exemples plus loin [sec. 2.4 p. 31].

2.3 Comportement élastique isotrope écrit avec d'autres tenseurs de déformation

Dans une première lecture, on peut ignorer cette section et continuer en section 2.5 [p. 34] sans nuire à la compréhension de la suite. Dans cette section, on écrit l'expression générale de la loi de comportement élastique isotrope en utilisant d'autres tenseurs de déformation, dans le seul but de retrouver des formes de lois de comportement élastique isotrope données dans la littérature spécialisée. Sans être obligé de suivre en détail les calculs techniques et quelque peu fastidieux pour effectuer les changements de tenseur de déformation, le lecteur pourra néanmoins vérifier, par une lecture rapide, qu'on aboutit bien aux mêmes expressions que celles proposées par les auteurs qui utilisent des tenseurs de déformation autres que le tenseur de déformation symétrique objectif \mathbf{B} .

Puisque l'on peut utiliser différents tenseurs de déformation objectifs pour décrire les déformations dans un milieu continu, il est possible d'écrire la loi de comportement mécanique d'un solide élastique isotrope avec d'autres tenseurs de déformation. Dans cette section, on en donne quelques exemples.

Pour déduire de nouvelles expressions de la loi de comportement mécanique élastique isotrope, deux méthodes sont possibles :

1. Soit on recommence la démarche précédente [sec. 2.2.4 p. 21] avec un autre tenseur de déformation ;
2. Soit on déduit l'expression de la loi de comportement mécanique avec un tenseur de déformation \mathbf{X} de celle écrite avec le tenseur de déformation \mathbf{B} par des calculs algébriques en utilisant les relations cinématiques entre \mathbf{B} et \mathbf{X} et entre leurs invariants.

Les deux méthodes sont équivalentes et aboutissent au même résultat. Elles ne diffèrent que par leur commodité. La première méthode est toujours praticable, la seconde peut parfois être algébriquement pénible. Suivant les cas, on utilisera l'une ou l'autre.

2.3.1 Utilisation du tenseur de déformation \mathbf{V}

On choisit de refaire un raisonnement similaire à la construction de la loi avec le tenseur de déformation \mathbf{B} . On rappelle que la définition du tenseur de déformation symétrique et objectif \mathbf{V} est $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$. Les variables d'état réduites sont donc $\{T, V_I, V_{II}, V_{III}\}$ et l'énergie libre massique de Helmholtz d'une particule s'écrit :

$$\psi^m = f_\psi^V(T, V_I, V_{II}, V_{III}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}^m = \partial_T f_\psi^V \dot{T} + \partial_{V_I} f_\psi^V \dot{V}_I + \partial_{V_{II}} f_\psi^V \dot{V}_{II} + \partial_{V_{III}} f_\psi^V \dot{V}_{III}$$

On montre en cinématique⁽¹⁶⁾ que les dérivées particulières des invariants fondamentaux du tenseur de déformation \mathbf{V} s'écrivent :

$$\dot{V}_I = \mathbf{V} : \mathbf{D} \quad ; \quad \dot{V}_{II} = (V_I \mathbf{V} - \mathbf{V}^2) : \mathbf{D} \quad ; \quad \dot{V}_{III} = V_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad (2.10)$$

La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.5) p. 20] s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 &= -\rho \left(\partial_{V_I} f_\psi^V \mathbf{V} + \partial_{V_{II}} f_\psi^V (V_I \mathbf{V} - \mathbf{V}^2) + \partial_{V_{III}} f_\psi^V V_{III} \mathbf{G} \right) : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \\ 0 &= \left(V_{III} \partial_{V_{III}} f_\psi^V \mathbf{G} + (\partial_{V_I} f_\psi^V + V_I \partial_{V_{II}} f_\psi^V) \mathbf{V} - \partial_{V_{II}} f_\psi^V \mathbf{V}^2 - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \right) : \mathbf{D} \quad (\rho \neq 0) \end{aligned}$$

⁽¹⁶⁾ Même si les résultats (2.10) sont d'apparence aussi simple que ceux donnés en éq. (2.6) [p. 21], le calcul des dérivées particulières des invariants du tenseur de déformation \mathbf{V} est un peu plus compliqué que celui des dérivées particulières des invariants du tenseur de déformation \mathbf{B} . Le détail de ces calculs purement cinématiques est dans l'annexe B.2.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

Par ailleurs, la conservation de la masse implique :

$$K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \quad \text{où} \quad K_v = V_{\text{III}} \quad (\text{dilatation volumique})$$

Finalement, la nullité de la dissipation intrinsèque dans toute évolution s'écrit :

$$0 = \underbrace{\left(V_{\text{III}} \partial_{V_{\text{III}}} f_{\psi}^V \mathbf{G} + (\partial_{V_I} f_{\psi}^V + V_I \partial_{V_{\text{II}}} f_{\psi}^V) \mathbf{V} - \partial_{V_{\text{II}}} f_{\psi}^V \mathbf{V}^2 - \frac{V_{\text{III}} \boldsymbol{\sigma}}{\rho_0} \right)}_{\mathbf{T}} : \mathbf{D} \quad \forall \mathbf{D} \quad (2.11)$$

Comme précédemment, le tenseur \mathbf{T} étant une fonction d'état, il ne peut pas être fonction de \mathbf{D} ; il est donc nul.

- **Théorème 2.5 – Loi de comportement mécanique élastique isotrope.** En élasticité isotrope, quand on utilise le tenseur de déformation \mathbf{V} pour mesurer les déformations, la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{\text{III}}} \left(V_{\text{III}} \partial_{V_{\text{III}}} f_{\psi}^V \mathbf{G} + (\partial_{V_I} f_{\psi}^V + V_I \partial_{V_{\text{II}}} f_{\psi}^V) \mathbf{V} - \partial_{V_{\text{II}}} f_{\psi}^V \mathbf{V}^2 \right) \quad (2.12)$$

où $\psi^m = f_{\psi}^V(T, V_I, V_{\text{II}}, V_{\text{III}})$

Autres expressions trouvées dans la littérature – En utilisant l'identité de Cayley-Hamilton :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^3 - V_I \mathbf{V}^2 + V_{\text{II}} \mathbf{V} - V_{\text{III}} \mathbf{G} = \mathbf{0} &\Leftrightarrow \mathbf{V}^2 - V_I \mathbf{V} + V_{\text{II}} \mathbf{G} - V_{\text{III}} \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{V} \text{ est inversible}) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{V}^2 = V_I \mathbf{V} - V_{\text{II}} \mathbf{G} + V_{\text{III}} \mathbf{V}^{-1} \end{aligned}$$

on peut présenter la loi de comportement mécanique (2.12) sous une forme différente :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{\text{III}}} \left((V_{\text{II}} \partial_{V_I} f_{\psi}^V + V_{\text{III}} \partial_{V_{\text{III}}} f_{\psi}^V) \mathbf{G} + \partial_{V_I} f_{\psi}^V \mathbf{V} - V_{\text{III}} \partial_{V_{\text{II}}} f_{\psi}^V \mathbf{V}^{-1} \right)$$

Autre méthode – On peut aussi bien retrouver la loi de comportement mécanique avec le tenseur de déformation \mathbf{V} donnée en éq. (2.12) à partir de la loi avec le tenseur de déformation \mathbf{B} [éq. (2.9) p. 21], en effectuant le changement de tenseur $\mathbf{B} = \mathbf{V}^2$ et les changements d'invariants suivants :

$$B_I = V_I^2 - 2V_{\text{II}} \quad B_{\text{II}} = V_{\text{II}}^2 - 2V_I V_{\text{III}} \quad B_{\text{III}} = V_{\text{III}}^2$$

On peut alors appliquer la méthode algébrique de changement de tenseur de déformation exposée plus loin en section 2.3.3 [p. 25].

2.3.2 Utilisation du tenseur de déformation \mathbf{M}

Là encore, on choisit de refaire un raisonnement similaire à la construction de la loi avec le tenseur de déformation \mathbf{B} . On rappelle que le tenseur de déformation symétrique et objectif \mathbf{M} est défini par $\mathbf{M} = \ln \mathbf{V}$. Les variables d'état réduites sont donc $(T, M_I, M_{\text{II}}, M_{\text{III}})$ et l'énergie libre massique de Helmholtz d'une particule s'écrit :

$$\psi^m = f_{\psi}^M(T, M_I, M_{\text{II}}, M_{\text{III}}) \quad \Rightarrow \quad \dot{\psi}^m = \partial_T f_{\psi}^M \dot{T} + \partial_{M_I} f_{\psi}^M \dot{M}_I + \partial_{M_{\text{II}}} f_{\psi}^M \dot{M}_{\text{II}} + \partial_{M_{\text{III}}} f_{\psi}^M \dot{M}_{\text{III}}$$

On montre en cinématique⁽¹⁷⁾ que les dérivées particulières des invariants fondamentaux du tenseur de déformation \mathbf{M} sont :

$$\dot{M}_I = \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad \dot{M}_{\text{II}} = (M_I \mathbf{G} - \mathbf{M}) : \mathbf{D} \quad \dot{M}_{\text{III}} = (M_{\text{II}} \mathbf{G} - M_I \mathbf{M} + \mathbf{M}^2) : \mathbf{D} \quad (2.13)$$

⁽¹⁷⁾ Bien que ces résultats paraissent aussi simples que les dérivées particulières des invariants de \mathbf{B} et \mathbf{V} , leur démonstration est nettement plus compliquée. Le détail de ces calculs cinématiques est dans l'annexe B.2.3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (2.5) p. 20] s'écrit alors :

$$0 = -\rho \left(\partial_{M_I} f_{\psi}^M \mathbf{G} + \partial_{M_{II}} f_{\psi}^M (M_I \mathbf{G} - \mathbf{M}) + \partial_{M_{III}} f_{\psi}^M (M_{II} \mathbf{G} - M_I \mathbf{M} + \mathbf{M}^2) \right) : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}$$

$$0 = \left((\partial_{M_I} f_{\psi}^M + M_I \partial_{M_{II}} f_{\psi}^M + M_{II} \partial_{M_{III}} f_{\psi}^M) \mathbf{G} - (\partial_{M_{II}} f_{\psi}^M + M_I \partial_{M_{III}} f_{\psi}^M) \mathbf{M} + \partial_{M_{III}} f_{\psi}^M \mathbf{M}^2 - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\rho} \right) : \mathbf{D}$$

Par ailleurs, la conservation de la masse implique :

$$K_v = \frac{\rho_0}{\rho} \quad \text{où} \quad K_v = e^{M_I} \quad (\text{dilatation volumique})$$

Par un raisonnement identique au précédent, il vient :

- **Théorème 2.6 – Loi de comportement mécanique élastique isotrope.** En élasticité isotrope, si on utilise le tenseur de déformation \mathbf{M} pour mesurer les déformations, la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{e^{M_I}} \left((\partial_{M_I} f_{\psi}^M + M_I \partial_{M_{II}} f_{\psi}^M + M_{II} \partial_{M_{III}} f_{\psi}^M) \mathbf{G} - (\partial_{M_{II}} f_{\psi}^M + M_I \partial_{M_{III}} f_{\psi}^M) \mathbf{M} + \partial_{M_{III}} f_{\psi}^M \mathbf{M}^2 \right)$$

où $\psi^m = f_{\psi}^M(T, M_I, M_{II}, M_{III})$

Remarques – Contrairement aux tenseurs \mathbf{B} et \mathbf{V} , qui sont symétriques définis positifs, donc inversibles, on ne peut pas présenter cette loi de comportement mécanique avec \mathbf{M}^{-1} car le tenseur \mathbf{M} n'est pas toujours inversible. En effet, si l'une des dilatations linéiques principales λ_i vaut 1, alors le tenseur \mathbf{M} a une valeur propre nulle ($m_i = \ln \lambda_i = 0$). Son déterminant est donc nul pour certaines déformations.

Par ailleurs, le passage algébrique de la loi avec le tenseur de déformation \mathbf{V} à la loi avec le tenseur de déformation \mathbf{M} serait très fastidieux car les relations entre les invariants fondamentaux des tenseurs de déformation \mathbf{V} et \mathbf{M} sont très compliquées.

2.3.3 Utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$

Pour se conformer à des habitudes prises dans les cours élémentaires d'élasticité utilisant le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ (il sera décrit en détail en section 4.1 [p. 72]), on se propose d'écrire la loi de comportement d'un milieu continu élastique isotrope en utilisant le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ ⁽¹⁸⁾ défini par :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{V} - \mathbf{G} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T} - \mathbf{G}$$

Comme le tenseur de déformation \mathbf{M} , le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ est nul quand il n'y a pas de déformation⁽¹⁹⁾. Ses valeurs propres $\varepsilon_i^v = \lambda_i - 1$ sont les *allongements relatifs*⁽²⁰⁾ dans les directions matérielles principales actuelles de déformation.

En revanche, l'allongement relatif dans une direction matérielle actuelle \mathbf{u}_i quelconque est :

$$K_l - 1 = \frac{1}{\|\mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{u}_i\|} - 1 = \frac{1}{\|(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^{-1} \cdot \mathbf{u}_i\|} - 1 \quad (\neq \mathbf{u}_i \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{u}_i)$$

⁽¹⁸⁾ ATTENTION ! Le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ n'est pas le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ qui sera évoqué en section 4.1 [p. 72]. Contrairement au traditionnel (et douteux) tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$, la définition du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ n'implique ni restriction ni restriction sur l'amplitude des déformations.

⁽¹⁹⁾ On rappelle que les tenseurs \mathbf{B} et \mathbf{V} prennent la valeur \mathbf{G} en l'absence de déformation.

⁽²⁰⁾ C'est-à-dire la limite du rapport $\frac{\ell_t - \ell_0}{\ell_0} = \frac{\ell_t}{\ell_0} - 1$ quand $\ell_0 \rightarrow 0$.

Plutôt que de refaire le raisonnement à partir de la nullité de la dissipation intrinsèque, on se propose ici de chercher l'expression de la loi de comportement élastique isotrope avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ par transformation algébrique à partir de la loi de comportement avec le tenseur \mathbf{V} .

De la définition de $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, on déduit aisément les relations entre les invariants suivantes :

$$\begin{aligned} V_I &= 3 + \varepsilon_I^v & V_{II} &= 3 + 2\varepsilon_I^v + \varepsilon_{II}^v & V_{III} &= 1 + \varepsilon_I^v + \varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v \\ \varepsilon_I^v &= -3 + V_I & \varepsilon_{II}^v &= 3 - 2V_I + V_{II} & \varepsilon_{III}^v &= -1 + V_I - V_{II} + V_{III} \end{aligned}$$

En posant (changement de variables d'état réduites) :

$$\psi^m = f_\psi^V(T, V_I, V_{II}, V_{III}) = f_\psi^{\varepsilon^v}(T, \varepsilon_I^v, \varepsilon_{II}^v, \varepsilon_{III}^v)$$

on en déduit les relations entre les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_{V_I} f_\psi^V &= \partial_{\varepsilon_I^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \partial_{V_I} \varepsilon_I^v + \partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \partial_{V_I} \varepsilon_{II}^v + \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \partial_{V_I} \varepsilon_{III}^v &= \partial_{\varepsilon_I^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - 2\partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} + \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \\ \partial_{V_{II}} f_\psi^V &= \partial_{\varepsilon_I^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \partial_{V_{II}} \varepsilon_I^v + \partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \partial_{V_{II}} \varepsilon_{II}^v + \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \partial_{V_{II}} \varepsilon_{III}^v &= 0 + \partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \\ \partial_{V_{III}} f_\psi^V &= \partial_{\varepsilon_I^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \partial_{V_{III}} \varepsilon_I^v + \partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \partial_{V_{III}} \varepsilon_{II}^v + \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \partial_{V_{III}} \varepsilon_{III}^v &= 0 + 0 + \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \end{aligned}$$

La loi de comportement élastique isotrope en utilisant le tenseur de déformation \mathbf{V} est :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{V_{III}} \left(V_{III} \partial_{V_{III}} f_\psi^V \mathbf{G} + (\partial_{V_I} f_\psi^V + V_I \partial_{V_{II}} f_\psi^V) \mathbf{V} - \partial_{V_{II}} f_\psi^V \mathbf{V}^2 \right) \quad [\text{éq. (2.12) p. 24}]$$

En utilisant les relations entre dérivées partielles précédentes, il vient :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \rho_0 \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} \mathbf{G} + \rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_I^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - 2\partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} + \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} + (3 + \varepsilon_I^v)(\partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v})}{1 + \varepsilon_I^v + \varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v} (\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v) \\ &\quad - \rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_I^v + \varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v} (\mathbf{G} + 2\boldsymbol{\varepsilon}^v + (\boldsymbol{\varepsilon}^v)^2) \end{aligned}$$

En regroupant les termes, il vient :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_1 \boldsymbol{\varepsilon}^v + K_2 (\boldsymbol{\varepsilon}^v)^2 \quad (2.14)$$

où K_0 , K_1 et K_2 sont les trois fonctions d'état scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} K_0 &= \rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_I^v} f_\psi^{\varepsilon^v} + \varepsilon_I^v \partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} + (\varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v) \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_I^v + \varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v} && \text{(coefficient de } \mathbf{G}) \\ K_1 &= \rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_I^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - (1 - \varepsilon_I^v) \partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - \varepsilon_I^v \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_I^v + \varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v} && \text{(coefficient de } \boldsymbol{\varepsilon}^v) \\ K_2 &= -\rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_{II}^v} f_\psi^{\varepsilon^v} - \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_\psi^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_I^v + \varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v} && \text{(coefficient de } (\boldsymbol{\varepsilon}^v)^2) \end{aligned}$$

Remarque pour les lecteurs initiés – Noter que contrairement au tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}^{(21)}$, l'utilisation du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ n'est soumise à aucune restriction ni sur les déformations ni sur les mouvements. La loi de comportement avec $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ [éq. (2.14) p. 26] est donc *a fortiori* valable quand les déformations sont petites, c'est-à-dire quand $\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$. Ce cas particulier sera détaillé plus loin [sec. 4.4 p. 78].

⁽²¹⁾ Le tenseur des « petites perturbations » est « défini » en cinématique par $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad}_L \mathbf{u} \neq \boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{V} - \mathbf{G}$ où \mathbf{u} est le champ des déplacements $\mathbf{u} = \mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0$. Voir la critique de cette « définition » plus loin en section 4.1 [p. 72]

2.3.4 Récapitulation sur les lois élastiques isotropes avec un tenseur de déformation objectif

Les différentes expressions de la loi de comportement élastique isotrope présentées précédemment sont strictement équivalentes : elles expriment toutes que la loi de comportement mécanique d'un solide élastique isotrope est complètement déterminée par la connaissance de l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz ψ^m en fonction des variables d'état réduites, c'est-à-dire la température T et les invariants fondamentaux d'un tenseur de déformation objectif choisi parmi \mathbf{B} , \mathbf{V} , \mathbf{M} ou $\boldsymbol{\varepsilon}^v$. Leur forme générale est :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0^X \mathbf{G} + K_1^X \mathbf{X} + K_2^X \mathbf{X}^2 \quad (2.15)$$

où les fonctions d'état scalaires K_0^X , K_1^X et K_2^X sont des fonctions des variables d'état et des dérivées partielles de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz f_ψ^X .

Remarques – La puissance de \mathbf{X} dans l'équation (2.15) [p. 27] ne peut dépasser 2 car le théorème de Cayley-Hamilton implique que toute puissance de \mathbf{X} supérieure à 2 peut se ramener à un polynôme en \mathbf{X} à la puissance 0, 1 ou 2.

Comme on peut le constater, quel que soit le tenseur de déformation objectif utilisé, la loi de comportement mécanique des solides élastiques isotropes est *a priori* « non linéaire », c'est-à-dire que la relation entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et un tenseur de déformation objectif n'est pas affine en général. L'équation (2.15) [p. 27] montre qu'une « linéarité » ne serait possible que pour des expressions très particulières de l'énergie libre massique de Helmholtz telles que K_0^X soit une fonction affine de X_1 , que K_1^X soit une constante et que K_2^X soit nul.

En outre, si une loi de comportement mécanique se trouvait être « linéaire » pour une certaine expression de l'énergie libre en fonction de la température et des invariants d'un certain tenseur de déformation, la même loi de comportement réécrite en faisant un changement de tenseur de déformation dans l'expression de l'énergie libre f_ψ ne serait plus affine. Puisqu'il n'y a aucune raison physique de choisir un tenseur de déformation plutôt qu'un autre, la « linéarité » d'une loi de comportement n'a pas de signification physique.

2.3.5 Utilisation de tenseurs de déformation non objectifs

On se propose ici de faire le lien avec des usages que l'on peut trouver dans la littérature spécialisée. Pour des raisons probablement historiques ou de tradition⁽²²⁾, certains auteurs continuent à utiliser des tenseurs de déformation non objectifs (dits aussi « lagrangiens »), pour mesurer la déformation actuelle, en dépit des complexités d'écriture et des pseudo-concepts qu'ils sont amenés à introduire. Il s'agit principalement des tenseurs de déformation $\mathbf{C} = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{F}$, $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{C}}$, $\mathbf{L} = \ln \mathbf{U}$ et $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$.

Les relations entre les tenseurs de déformation objectifs et non objectifs sont⁽²³⁾ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^\top \quad ; \quad \mathbf{V} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{R}^\top \quad ; \quad \mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^\top \quad ; \quad \frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{G}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{R}^\top \quad (2.16)$$

où $\mathbf{R}(P, t) \in \mathbb{Q}_{3+}$ est un champ de rotations actuelles (tenseur orthogonal de déterminant 1), non objectif, issu de la décomposition polaire (à gauche ou à droite) du gradient de la transformation actuelle⁽²⁴⁾. Le champ de tenseurs orthogonaux $\mathbf{R}(P, t)$ dépend de l'observateur qui observe le mouvement déformant de l'objet.

⁽²²⁾ Voire de psychorigidité.

⁽²³⁾ Section 4.4.3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽²⁴⁾ On rappelle que $\mathbf{F} = \mathbf{grad}_L \mathbf{f} = \mathbf{grad}_L \mathbf{x}_t = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ où \mathbf{f} est la description de Lagrange du mouvement et \mathbf{u} est la description de Lagrange du déplacement actuel $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$. Le tenseur \mathbf{F} n'est pas objectif.

On déduit aisément des relations (2.16) [p. 27] que les invariants et les valeurs propres des tenseurs de déformation \mathbf{B} et \mathbf{C} sont identiques. Il en est de même pour les couples (\mathbf{V}, \mathbf{U}) , (\mathbf{M}, \mathbf{L}) , $(\frac{1}{2}(\mathbf{B} - \mathbf{G}), \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}))$ et enfin $(\boldsymbol{\varepsilon}^u = \mathbf{U} - \mathbf{G}, \boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{V} - \mathbf{G})$. Les expressions de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des invariant fondamentaux de ces tenseurs sont donc les mêmes pour ces couples de tenseurs :

$$f_{\psi}^C \equiv f_{\psi}^B \quad ; \quad f_{\psi}^U \equiv f_{\psi}^V \quad ; \quad f_{\psi}^L \equiv f_{\psi}^M \quad ; \quad f_{\psi}^{\varepsilon^u} \equiv f_{\psi}^{\varepsilon^v} \quad ; \quad \dots$$

En revanche, les directions propres des tenseurs de déformation non objectifs sont celles des tenseurs de déformation objectifs tournées par la rotation non objective \mathbf{R}^T (25).

Utilisation des tenseurs de déformation \mathbf{C} , \mathbf{U} et \mathbf{L}

On peut donc écrire la loi de comportement élastique isotrope, en utilisant des tenseurs de déformation non objectifs. Par exemple, on déduit la loi de comportement écrite avec le tenseur de déformation \mathbf{C} à partir de la loi de comportement mécanique avec \mathbf{B} [éq. (2.9) p. 21] :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2\rho_0}{\sqrt{C_{III}}} \left(C_{III} \partial_{C_{III}} f_{\psi}^C \mathbf{G} + (\partial_{C_I} f_{\psi}^C + C_I \partial_{C_{II}} f_{\psi}^C) \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^T - \partial_{C_{II}} f_{\psi}^C \mathbf{R} \cdot \mathbf{C}^2 \cdot \mathbf{R}^T \right) \\ \underbrace{\mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} &= \frac{2\rho_0}{\sqrt{C_{III}}} \left(C_{III} \partial_{C_{III}} f_{\psi}^C \mathbf{G} + (\partial_{C_I} f_{\psi}^C + C_I \partial_{C_{II}} f_{\psi}^C) \mathbf{C} - \partial_{C_{II}} f_{\psi}^C \mathbf{C}^2 \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

où $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}$ est un tenseur du second ordre symétrique non objectif que l'on pourrait nommer « tenseur des contraintes tourné par \mathbf{R}^T ».

De même, le lecteur vérifiera aisément à partir de la loi de comportement écrite avec le tenseur de déformation \mathbf{V} [éq. (2.12) p. 24], que la loi de comportement élastique isotrope avec le tenseur de déformation \mathbf{U} s'écrit :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} = \frac{\rho_0}{U_{III}} \left(U_{III} \partial_{U_{III}} f_{\psi}^U \mathbf{G} + (\partial_{U_I} f_{\psi}^U + U_I \partial_{U_{II}} f_{\psi}^U) \mathbf{U} - \partial_{U_{II}} f_{\psi}^U \mathbf{U}^2 \right) \quad (2.18)$$

On laisse le soin au lecteur de passer de la même manière de la loi de comportement mécanique avec le tenseur de déformation \mathbf{M} [th. 2.6 p. 25] à celle avec le tenseur de déformation $\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{u}$.

Utilisation du tenseur de déformation $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G})$

L'utilisation du tenseur de déformation non objectif \mathbf{E} est malheureusement encore très populaire car il est à l'origine du traditionnel et historique tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ (26). On peut déduire algébriquement la loi de comportement avec le tenseur de déformation \mathbf{E} à partir de la loi de comportement avec le tenseur \mathbf{C} de la manière suivante :

Les relations entre les invariants fondamentaux de \mathbf{C} et \mathbf{E} sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{G} + 2\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad C_I &= 3 + 2E_I \quad C_{II} = 3 + 4E_I + 4E_{II} \quad C_{III} = 1 + 2E_I + 4E_{II} + 8E_{III} \\ \Leftrightarrow \quad E_I &= \frac{1}{2}(-3 + C_I) \quad E_{II} = \frac{1}{4}(3 - 2C_I + C_{II}) \quad E_{III} = \frac{1}{8}(-1 + C_I - C_{II} + C_{III}) \end{aligned}$$

(25) Section 4.4.4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

(26) Voir plus loin le rappel en section 4.1 [p. 72].

Puisque $\psi^m = f_\psi^C(T, C_I, C_{II}, C_{III}) = f_\psi^E(T, E_I, E_{II}, E_{III})$, on en déduit :

$$\begin{aligned}\partial_{C_I} f_\psi^C &= \partial_{E_I} f_\psi^E \partial_{C_I} E_I + \partial_{E_{II}} f_\psi^E \partial_{C_I} E_{II} + \partial_{E_{III}} f_\psi^E \partial_{C_I} E_{III} &= \frac{1}{2} \partial_{E_I} f_\psi^E - \frac{1}{2} \partial_{E_{II}} f_\psi^E + \frac{1}{8} \partial_{E_{III}} f_\psi^E \\ \partial_{C_{II}} f_\psi^C &= \partial_{E_I} f_\psi^E \partial_{C_{II}} E_I + \partial_{E_{II}} f_\psi^E \partial_{C_{II}} E_{II} + \partial_{E_{III}} f_\psi^E \partial_{C_{II}} E_{III} &= 0 + \frac{1}{4} \partial_{E_{II}} f_\psi^E - \frac{1}{8} \partial_{E_{III}} f_\psi^E \\ \partial_{C_{III}} f_\psi^C &= \partial_{E_I} f_\psi^E \partial_{C_{III}} E_I + \partial_{E_{II}} f_\psi^E \partial_{C_{III}} E_{II} + \partial_{E_{III}} f_\psi^E \partial_{C_{III}} E_{III} &= 0 + 0 + \frac{1}{8} \partial_{E_{III}} f_\psi^E\end{aligned}$$

En remplaçant dans la loi de comportement écrite avec le tenseur de déformation \mathbf{C} [éq. (2.17) p. 28], il vient :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+2E_I+4E_{II}+8E_{III}}}{2\rho_0} \underbrace{\mathbf{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}}_{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} &= \frac{1+2E_I+4E_{II}+8E_{III}}{8} \partial_{E_{III}} f_\psi^E \mathbf{G} + \\ &\left(\frac{1}{2} \partial_{E_I} f_\psi^E - \frac{1}{2} \partial_{E_{II}} f_\psi^E + \frac{1}{8} \partial_{E_{III}} f_\psi^E + (3+2E_I) \left(\frac{1}{4} \partial_{E_{II}} f_\psi^E - \frac{1}{8} \partial_{E_{III}} f_\psi^E \right) \right) (\mathbf{G} + 2\mathbf{E}) - \\ &\left(\frac{1}{4} \partial_{E_{II}} f_\psi^E - \frac{1}{8} \partial_{E_{III}} f_\psi^E \right) (\mathbf{G} + 2\mathbf{E})^2\end{aligned}$$

Après regroupement et simplification, il reste :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+2E_I+4E_{II}+8E_{III}}}{\rho_0} \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \left(\partial_{E_I} f_\psi^E + E_I \partial_{E_{II}} f_\psi^E + (E_{II} + 2E_{III}) \partial_{E_{III}} f_\psi^E \right) \mathbf{G} + \\ &\left(2 \partial_{E_I} f_\psi^E + (2E_I - 1) \partial_{E_{II}} f_\psi^E - E_I \partial_{E_{III}} f_\psi^E \right) \mathbf{E} + \left(-2 \partial_{E_{II}} f_\psi^E + \partial_{E_{III}} f_\psi^E \right) \mathbf{E}^2\end{aligned}\quad (2.19)$$

où $\sqrt{1+2E_I+4E_{II}+8E_{III}} = K_v$ est la dilatation volumique actuelle et où $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}$.

Second pseudo-« tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff

Plutôt que d'introduire le tenseur $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}$, les auteurs qui utilisent les tenseurs de déformation non objectifs⁽²⁷⁾ préfèrent introduire un autre pseudo-« tenseur des contraintes » : le second « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff⁽²⁸⁾, qui est symétrique mais dont l'interprétation physique est pour le moins obscure. Il est « défini » par l'une des expressions suivantes :

$$\mathbf{S} = K_v \mathbf{U}^{-1} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \det \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{R}^\top \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}\quad (2.20)$$

On obtient alors de nouvelles formes de la loi de comportement mécanique des milieux continus élastiques isotropes avec les tenseurs de déformation non objectifs.

Par exemple, en utilisant la « définition » (2.20), la loi de comportement avec le tenseur de déformation \mathbf{C} [éq. (2.17) p. 28] devient :

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \left(C_{III} \partial_{C_{III}} f_\psi^C \mathbf{C}^{-1} + (\partial_{C_I} f_\psi^C + C_I \partial_{C_{II}} f_\psi^C) \mathbf{G} - \partial_{C_{II}} f_\psi^C \mathbf{C} \right)$$

que l'on peut encore transformer avec l'identité de Cayley-Hamilton : $C_{III} \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^2 - C_I \mathbf{C} + C_{II} \mathbf{G}$.

⁽²⁷⁾ Et plus particulièrement le tenseur \mathbf{F} , non symétrique, non objectif et qui prend pour valeur un tenseur orthogonal quelconque quand il n'y a pas de déformation.

⁽²⁸⁾ D'autres « tenseurs des contraintes » artificiels sont introduits dans d'autres contextes : $\boldsymbol{\tau} = K_v \boldsymbol{\sigma}$ (dans l'expression lagrangienne de la conservation de l'énergie) et $\boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}$ (dans l'expression lagrangienne de l'équation de mouvement) [note 3 p. 3]. Le tenseur introduit ici est $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\Pi}$.

De même, à partir de la loi de comportement avec le tenseur de déformation \mathbf{E} [éq. (2.19) p. 29], il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \rho_0 \left(\partial_{E_I} f_{\psi}^E + E_I \partial_{E_{II}} f_{\psi}^E + (E_{II} + 2E_{III}) \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E \right) \mathbf{U}^{-2} + \\ & \left(2 \partial_{E_I} f_{\psi}^E + (2E_I - 1) \partial_{E_{II}} f_{\psi}^E - E_I \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E \right) \mathbf{U}^{-1} \cdot \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{G}) \cdot \mathbf{U}^{-1} + \\ & \left(-2 \partial_{E_{II}} f_{\psi}^E + \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E \right) \mathbf{U}^{-1} \cdot \frac{1}{4} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{G})^2 \cdot \mathbf{U}^{-1} \end{aligned}$$

Après utilisation de l'identité de Cayley-Hamilton et simplification, il reste :

$$\mathbf{S} = \rho_0 \left((\partial_{E_I} f_{\psi}^E + E_I \partial_{E_{II}} f_{\psi}^E + E_{II} \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E) \mathbf{G} - (\partial_{E_{II}} f_{\psi}^E + E_I \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E) \mathbf{E} + \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E \mathbf{E}^2 \right) \quad (2.21)$$

Cette expression ressemble à une loi de comportement élastique isotrope écrite avec un tenseur de déformation objectif, mais le pseudo-« tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} qui est une combinaison de contraintes et de déformations [éq. (2.20) p. 29] n'a pas de signification physique.

Récapitulation sur l'utilisation des tenseurs de déformation non objectifs

L'utilisation de tenseurs de déformation non objectifs subsiste encore dans beaucoup de publications récentes et dans des logiciels récents pour des raisons historiques. Cette section n'a été écrite que pour faire la liaison avec ces usages.

Comme le lecteur a pu le constater, l'utilisation de tenseurs de déformation non objectifs dans l'écriture d'une loi de comportement mécanique élastique isotrope fait apparaître dans l'expression du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\psi^m, \mathbf{X})$, un champ de tenseurs orthogonaux $\mathbf{R}(P, t)$, non objectif, issu de la décomposition polaire du gradient lagrangien des positions actuelles $\mathbf{F} = \mathbf{grad}_L \mathbf{x}_t$, lui aussi non objectif. Les tenseurs orthogonaux \mathbf{R} peuvent prendre une valeur quelconque sans changer les déformations, c'est-à-dire sans changer la valeur des dilatations linéiques, surfaciques, volumiques, les distorsions angulaires ou stériques de directions matérielles.

Dans les expressions de la loi de comportement élastique isotrope publiées avec des tenseurs de déformation actuelle non objectifs, le champ tensoriel $\mathbf{R}(P, t)$ est la plupart du temps masqué par l'introduction de pseudo-« tenseurs des contraintes », groupements de termes symétriques mais non objectifs : soit $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ qui est une rotation par \mathbf{R}^\top du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, ou bien encore le second « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} dénué de signification physique.

Quel que soit le tenseur de déformation utilisé pour décrire les déformations actuelles, toutes ces expressions de la loi de comportement élastique isotrope sont équivalentes, car on peut les déduire les unes des autres par des calculs algébriques. Elles sont toutes une conséquence de la nullité de la dissipation intrinsèque et du fait que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ est une fonction d'état, c'est-à-dire qu'elles sont toutes des expressions (plus ou moins compliquées) du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction de la température et d'un tenseur de déformation (tourné par \mathbf{R} lorsqu'il n'est pas objectif). Les complications d'écritures introduites par les tenseurs de déformation non objectifs (présence du champ de rotations non objectives \mathbf{R}) semblent bien inutiles ; leur emploi devrait disparaître à plus ou moins long terme.

Pour terminer la modélisation d'un solide élastique, il reste donc à préciser l'expression de la fonction d'état *énergie libre massique de Helmholtz* ψ^m en fonction des variables d'état.

2.4 Quelques modèles encore couramment rencontrés dans les codes de calcul

En première lecture, on peut ignorer cette section et continuer en section 2.5 [p. 34] sans nuire à la compréhension de la suite. Historiquement, les tenseurs de déformation non objectifs (dits aussi « lagrangiens ») ont été les premiers à être introduits pour décrire les déformations sans restrictions cinématiques (« grandes déformations »), notamment le tenseur de déformation \mathbf{E} .

Dans les codes de calcul spécialisés en mécanique des solides déformables, on trouve donc encore couramment des lois de comportement élastique isotrope et le plus souvent isotherme ($T = T_0$, $\mathbf{grad}_L T = \mathbf{0}$, $\mathbf{grad}_E T = \mathbf{0}$, la température n'est plus une variable d'état⁽²⁹⁾), dites « hyperélastiques »⁽³⁰⁾, écrites avec des tenseurs de déformation non objectifs. Quand les auteurs de ces modèles de comportement mécanique proposent une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz ψ^m en fonction des invariants de la déformation (sans la température), le comportement mécanique de ces modèles dans certains mouvements est parfois physiquement étrange. Dans cette section, on en cite quelques exemples.

2.4.1 Le modèle de Piola-Kirchhoff

Ce modèle utilise le tenseur de déformation non objectif \mathbf{E} et les variables d'état réduites retenues sont E_I et E_{II} ⁽³¹⁾. La fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz proposée dans ce modèle est la suivante :

$$f_{\psi}^E = \frac{1}{2\rho_0} (\lambda E_I^2 + 2\mu (E_I^2 - 2E_{II}))$$

où μ et λ sont des constantes caractéristiques du matériau. En utilisant la loi de comportement avec le tenseur de déformation \mathbf{E} [éq. (2.21) p. 30], on trouve :

$$\mathbf{S} = \lambda E_I \mathbf{G} + 2\mu \mathbf{E} \quad (2.22)$$

où \mathbf{S} est le second « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff [éq. (2.20) p. 29].

Remarques – La principale motivation pour proposer cette expression de l'énergie libre massique de Helmholtz semble être d'obtenir une relation affine entre \mathbf{S} et \mathbf{E} ressemblant à celle habituellement présentée en « élasticité » de Hooke (« on remplace $\boldsymbol{\varepsilon}$ par \mathbf{E} et $\boldsymbol{\sigma}$ par \mathbf{S} », [chapitre 4 p. 71]). On peut préférer des motivations plus physiques pour donner une expression de l'énergie libre massique !

Par ailleurs, cette loi de comportement présente un grave défaut de vraisemblance physique : pour un mouvement de contraction uniaxiale dans une direction fixe \mathbf{e}_1 ⁽³²⁾, la variation de la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ dans la direction \mathbf{e}_1 en fonction de la contraction uniaxiale n'est pas monotone et, pour des grandes contractions uniaxiales, la contrainte normale dans la direction \mathbf{e}_1 tend vers 0 alors qu'elle devrait tendre vers $-\infty$. En effet, dans un tel mouvement, la position actuelle des particules de position initiale \mathbf{x}_0 est : $\mathbf{x}_t = kx_{01}\mathbf{e}_1 + x_{02}\mathbf{e}_2 + x_{03}\mathbf{e}_3$ avec $k > 0$ (quand $k < 1$ c'est une contraction uniaxiale et quand $k > 1$ c'est une dilatation uniaxiale). On a alors :

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + (k-1)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G} + (k^2-1)\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) = \frac{k^2-1}{2}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$$

⁽²⁹⁾ L'énergie libre de Helmholtz est alors appelée « énergie de déformation », souvent notée W .

⁽³⁰⁾ L'« hyperélasticité » serait l'élasticité isotherme en « grandes déformations ».

⁽³¹⁾ La température T et le troisième invariant E_{III} sont ignorés ; par ailleurs la signification cinématique des deux invariants retenus est obscure.

⁽³²⁾ Ce mouvement est l'hypothèse cinématique utilisée dans la phase de compression des *essais œdométriques* utilisés par les expérimentateurs en mécanique des sols.

En appliquant la loi de comportement du modèle de Piola-Kirchhoff [éq. (2.22) p. 31], il vient :

$$\mathbf{S} = \lambda E_1 \mathbf{G} + 2\mu \mathbf{E} = \frac{k^2 - 1}{2} \left((\lambda + 2\mu) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right)$$

Enfin, en utilisant la « définition » de \mathbf{S} donnée en (2.20) [p. 29], il vient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^\top = \frac{k^2 - 1}{2} \left(k(\lambda + 2\mu) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \frac{\lambda}{k} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \frac{\lambda}{k} \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3 \right)$$

On constate que pour de grandes contractions uniaxiales dans la direction \mathbf{e}_1 , c'est-à-dire quand $k \rightarrow 0$, la contrainte σ_{11} tend vers 0. Le comportement en grande compression uniaxiale de cette loi de comportement élastique isotrope, bien qu'elle soit thermodynamiquement admissible, paraît bien peu vraisemblable !

2.4.2 Le modèle dit « néo-Hookien »

Ce modèle utilise le tenseur de déformation non objectif \mathbf{C} et l'invariant C_I comme seule variable d'état⁽³³⁾. La fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz proposée est la suivante :

$$f_\psi^C = a(C_I - 3) \quad \text{où } a \text{ est une constante caractéristique du matériau} \quad (2.23)$$

En utilisant la loi de comportement avec le tenseur de déformation \mathbf{C} [éq. (2.17) p. 28], la loi de comportement mécanique serait :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2a\rho_0}{\sqrt{C_{III}}} \mathbf{R} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{R}^\top$$

Quand il n'y a pas de déformation ($\mathbf{C} = \mathbf{G}$ et $C_{III} = 1$), la contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ vaut $2a\rho_0 \mathbf{G}$!

2.4.3 Le modèle de Mooney-Rivlin

L'énergie libre massique de Helmholtz proposée est⁽³⁴⁾ (la température est ignorée) :

$$f_\psi^B = a(B_I B_{III}^{-\frac{1}{3}} - 3) + b(B_{II} B_{III}^{-\frac{2}{3}} - 3) \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont caractéristiques du matériau}$$

Remarque – Le terme $B_I B_{III}^{-\frac{1}{3}}$ a une interprétation cinématique : $B_I B_{III}^{-\frac{1}{3}} = 3 \delta_{max}^s \frac{2}{3}$ où δ_{max}^s est la distorsion stérique maximale actuelle en la particule. Le premier terme de f_ψ^B traduit donc une énergie de distorsion stérique, nulle quand la déformation est sphérique. En revanche, la signification cinématique du second terme ($B_{II} B_{III}^{-\frac{2}{3}}$) est obscure, et il est aussi nul dans toute déformation sphérique. Par conséquent, dans ce modèle, les déformations sphériques ne font pas varier l'énergie libre de Helmholtz. On ajoute parfois un terme à f_ψ^B pour pallier cet inconvénient.

On en déduit la loi de comportement à partir de la loi de comportement avec le tenseur de déformation \mathbf{B} [éq. (2.9) p. 21] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{III}}} \left(\left(-\frac{a}{3} B_I B_{III}^{-\frac{1}{3}} - \frac{2b}{3} B_{II} B_{III}^{-\frac{2}{3}} \right) \mathbf{G} + \left(a B_{III}^{-\frac{1}{3}} + b B_I B_{III}^{-\frac{2}{3}} \right) \mathbf{B} - b B_{III}^{-\frac{2}{3}} \mathbf{B}^2 \right) \quad (2.24)$$

On peut aussi l'écrire avec le tenseur de déformation non objectif \mathbf{C} en introduisant un pseudo-« tenseur des contraintes » artificiel ($\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ ou $\bar{\mathbf{S}}$).

⁽³³⁾ La température T et les invariants C_{II} et C_{III} sont ignorés ; la signification cinématique de C_I est obscure.

⁽³⁴⁾ Certains auteurs remplacent les invariants de \mathbf{B} par les invariants (égaux) de \mathbf{C} . Dans la loi de comportement [éq. (2.24) p. 32], il faut alors remplacer \mathbf{B} par \mathbf{C} et $\boldsymbol{\sigma}$ par $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$

2.4.4 Le modèle d'Ogden

Contrairement aux propositions précédentes dans lesquelles les variables d'état réduites choisies sont des invariants fondamentaux de tenseurs de déformation, le modèle d'Ogden utilise comme variables d'état réduites les dilatations linéiques principales λ_1 , λ_2 et λ_3 ⁽³⁵⁾ (la température est ignorée). La fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz proposée est de la forme :

$$\bar{f}_\psi = \frac{1}{\rho_0} \sum_{k=1}^n \frac{\mu_k}{\alpha_k} (\lambda_1^{\alpha_k} + \lambda_2^{\alpha_k} + \lambda_3^{\alpha_k} - 3)$$

où les coefficients μ_k et α_k sont des constantes caractéristiques du matériau. Cette expression quelque peu artificielle de l'énergie libre d'un milieu élastique isotrope est assez générale. Elle ne fait pas explicitement référence aux tenseurs de déformation objectifs ou non puisque les valeurs propres des tenseurs de déformation \mathbf{U} et \mathbf{V} sont les mêmes. Elle peut toutefois conduire à des comportements élastiques isotropes exotiques si l'on ne prend pas garde au choix des coefficients α_k et μ_k .

Remarques – Pour des α_k non entiers, l'expression de \bar{f}_ψ en fonction des invariants fondamentaux d'un tenseur de déformation est très compliquée⁽³⁶⁾. On ne peut donc pas aisément déduire la loi de comportement élastique isotrope de ce modèle en transformant algébriquement les lois écrites précédemment car elles utilisent comme variables d'état les invariants d'un tenseur de déformation et non ses valeurs propres. Pour écrire la loi de comportement mécanique du modèle d'Ogden quand les α_k sont non entiers, il faut reprendre le raisonnement de construction de la loi en prenant comme variables d'état les valeurs propres λ_1 , λ_2 et λ_3 puis réanalyser les conséquences de la nullité de la dissipation intrinsèque exprimée avec ces variables d'état.

En revanche, pour des α_k entiers, l'écriture de \bar{f}_ψ en fonction des invariants de \mathbf{B} ou \mathbf{V} est toujours possible, même si elle peut être fastidieuse.

Par ailleurs, l'identification expérimentale des coefficients α_k et μ_k est très délicate et conduit facilement à des comportements exotiques en dehors de l'intervalle d'identification en raison du nombre d'extrema des fonctions polynomiales qui peut être élevé, certains d'entre eux pouvant être en dehors de l'intervalle d'identification.

2.4.5 Récapitulation

Les quelques modèles élastiques isotropes qui ont été présentés dans cette section sont loin d'être exhaustifs ; le lecteur pourra en trouver quantité d'autres (Gent, Yeoh, Arruda, ...) dans la littérature spécialisée ou dans les logiciels spécialisés en mécanique des solides déformables. À l'instar des quelques modèles qui ont été évoqués dans cette section, beaucoup de propositions d'expressions d'énergie libre massique de Helmholtz (appelée « énergie de déformation » quand la température est ignorée) en fonction des variables d'état réduites sont des expressions polynomiales d'invariants ou des valeurs propres de déformation le plus souvent suggérées pour des raisons calculatoires plus ou moins avouables qui n'ont pas souvent de motivation physique claire, ou bien suggérées par des analyses statistiques plus ou moins convaincantes de chaînes polymériques ou d'assemblages de chaînes polymériques (pour les caoutchoucs ou les élastomères)⁽³⁷⁾.

⁽³⁵⁾ Le choix de ce triplet de variables d'état réduites est correct car on montre en algèbre tensorielle l'équivalence (d'expression compliquée) entre les triplets $\{V_I, V_{II}, V_{III}\}$ et $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3\}$ [voir note 36 p. 33].

⁽³⁶⁾ Les expressions des valeurs propres classées en fonction des invariants d'un tenseur sont données en annexe A.3 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

⁽³⁷⁾ C'est le cas du modèle de Mooney-Rivlin [sec 2.4.3 p. 32], qui ne confronte son modèle qu'à des essais de traction.

Les logiciels qui proposent ces modèles de comportement dans leurs menus se retranchent derrière les publications qui les proposent, laissant à l'utilisateur la responsabilité d'un choix plus ou moins éclairé parmi ces propositions d'énergie libre massique de Helmholtz (ou d'« énergie de déformation » quand la température est ignorée) le plus souvent physiquement mal ou non motivées.

Pour construire des modèles de comportement physiquement sensés, il est préférable de construire des expressions de fonctions d'état physiquement raisonnées (voir un exemple de construction de modèle élastique isotrope dans le chapitre 3 [p. 51]) plutôt que de proposer des fonctions polynomiales plus ou moins arbitraires des invariants fondamentaux (ou des valeurs propres) de divers tenseurs de déformation, qui risquent de conduire à des lois de comportement mécanique exotiques physiquement peu vraisemblables.

2.5 Critères de limite élastique

Le modèle élastique isotrope convient pour modéliser correctement le comportement macroscopique d'un grand nombre de matériaux métalliques polycristallins (sans orientation préférentielle des cristaux⁽³⁸⁾), de matériaux issus de la chimie organique (matières plastiques, polymères amorphes) et les verres, tant que les déformations imposées par les sollicitations ne dépassent pas certaines limites⁽³⁹⁾. Dans cette section on s'intéresse à ces limites.

2.5.1 Considérations microscopiques

L'observation microscopique ainsi que des simulations numériques d'assemblages d'atomes ou de chaînes polymériques montrent que le comportement élastique cesse quand des réorganisations ou des ruptures de liaisons interatomiques se produisent dans les matériaux soumis à des déformations suffisantes :

- dans un matériau métallique polycristallin, des réorganisations de liaisons se produisent en premier lieu dans les « joints de grains »⁽⁴⁰⁾ puis dans les monocristaux (« grains ») eux-mêmes (dislocations de différents types, dans des plans privilégiés du monocristal) ;
- dans les polymères, les réorganisations se font principalement dans les liaisons (« ponts ») entre les chaînes polymériques ;
- dans les verres (liquides figés sans structures régulières), les réorganisations interatomiques sont rares et la limite d'élasticité est souvent synonyme de limite de rupture.

Quel que soit le type de matériau, les réorganisations de liaisons interatomiques (dislocations) sont provoquées par des changements d'angle suffisants entre les directions des liaisons interatomiques imposés par la déformation, alors que les déformations sphériques (dilatations ou contractions sphériques) ne changent pas les angles⁽⁴¹⁾ et n'induisent donc pas de réorganisation dans les liaisons. En revanche, les ruptures de liaisons sont provoquées par des allongements excessifs de liaisons.

⁽³⁸⁾ Les laminés à froid ne sont pas isotropes.

⁽³⁹⁾ Être en dessous d'une limite élastique ne signifie pas nécessairement que les déformations sont « petites » : par exemple, les élastomères et les caoutchoucs peuvent subir des déformations importantes tout en restant élastiques.

⁽⁴⁰⁾ Zone de liaisons interatomiques désordonnées à la jonction entre deux monocristaux (« grains ») d'orientation cristalline différente.

⁽⁴¹⁾ Géométriquement, ce sont des homothéties entre la configuration initiale et la configuration actuelle

2.5.2 Point de vue macroscopique

Une modélisation macroscopique et continue de la matière ne peut pas prendre en compte la structure atomique microscopique puisqu'elle l'ignore par définition (milieu continu). On peut toutefois tirer des conclusions macroscopiques à partir des considérations microscopiques précédentes :

1. Une déformation sphérique ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0$) est une déformation qui n'induit aucune variation d'angle entre les directions matérielles. Elle ne provoque donc pas de réorganisation de liaisons interatomiques. En revanche, une dilatation sphérique ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 1$) peut être à l'origine de ruptures de liaisons (cavitation).
2. Seules les déformations provoquant des distorsions (variations d'angles entre directions matérielles) peuvent provoquer des réorganisations de liaisons interatomiques (dislocations) menant à l'inélasticité, si ces distorsions (concept macroscopique) sont suffisantes et bien orientées par rapport aux microstructures.
3. Une dilatation linéique dans la direction d'une liaison interatomique peut provoquer une rupture de liaison, si elle est suffisante et coïncide avec une direction de liaison interatomique.

L'orientation des structures microscopiques (directions des liaisons et des plans de dislocation) par rapport à un tenseur de déformation actuel (concept macroscopique) est par définition ignorée dans une vision macroscopique et continue de la matière. Macroscopiquement, on devra donc se contenter de considérer des maximums de distorsion ou de dilatation linéique en une particule (analyse cinématique macroscopique de la déformation), *sans savoir si les directions matérielles macroscopiques pour lesquelles ces maximums sont atteints coïncident ou non avec des directions critiques des microstructures.*

Vocabulaire phénoménologique

Quand le nombre de *ruptures de liaisons* est suffisant pour obtenir des effets macroscopiquement observables, on dit que le milieu continu est *endommagé*.

Quand le nombre de *réorganisations de liaisons* est suffisant pour obtenir des effets macroscopiquement observables, on dit que le milieu continu est *plastifié*.

Lors une observation macroscopique, il est souvent difficile de savoir si un seul ou les deux phénomènes (réarrangement ou rupture de liaison interatomiques) se produisent : l'endommagement (ruptures de liaisons) est soupçonné lorsque l'on constate que la raideur du matériau a diminué, et la plastification (réarrangement de liaisons) est soupçonnée lorsque des déformations résiduelles subsistent après suppression des sollicitations.

Rappels de cinématique des milieux continus

Soit une particule P et son tenseur de déformation actuel $\mathbf{X}(P)$. Les dilatations linéiques principales de cette déformation en P sont notées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ ⁽⁴²⁾. En chaque particule, on définit les deux distorsions maximales suivantes⁽⁴³⁾ :

1. *La distorsion angulaire maximale* en une particule est :

$$\delta_{max}^a = \text{Max}\left(\frac{1}{\sin \alpha_t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right) \geq 1 \quad (2.25)$$

⁽⁴²⁾ Rappel : elles sont positives par définition.

⁽⁴³⁾ Sections 4.7 et 4.8 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

où $\alpha_t \in [0; \pi/2]$ est l'angle actuel de *deux* directions matérielles *initialement orthogonales* issues de la particule P . Le Max est pris sur l'infinité de couples de directions matérielles initialement orthogonales issues de la particule P .

Dans le cas général ($\lambda_1 \neq \lambda_3$, déformation non sphérique⁽⁴⁴⁾), ce maximum est atteint par un couple *unique* de directions matérielles⁽⁴⁵⁾, mais on ne saura jamais si les deux directions matérielles de ce couple *unique* coïncident ou non avec des directions critiques de la microstructure en cette particule.

2. *La distorsion stérique maximale* en une particule de *trois* directions matérielles *initialement orthogonales* :

$$\delta_{max}^s = \text{Max} \left(\frac{1}{|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]|} \right) = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \geq 1 \quad (2.26)$$

où $|[\mathbf{u}_t, \mathbf{u}'_t, \mathbf{u}''_t]| < 1$ est la norme du produit mixte *actuel* de trois directions matérielles initialement orthogonales issues de P . Le Max est pris sur l'infinité de triplets de directions matérielles initialement orthogonales issues de la particule P .

Dans le cas général (déformation non sphérique⁽⁴⁶⁾) le maximum de distorsion stérique est atteint par une *infinité* de triplets de directions matérielles issues de P ⁽⁴⁷⁾.

L'existence en P d'une *infinité* de triplets de directions matérielles initialement orthogonales (trièdres orthonormés) dont la distorsion stérique atteint la valeur maximale δ_{max}^s augmente les chances que les directions d'un de ces triplets coïncide ou presque avec des directions critiques de la microstructure en P .

3. *La dilatation linéique maximale* en une particule d'une direction matérielle :

$$K_{lmax} = \text{Max}(K_l(\mathbf{u})) = \lambda_1$$

où λ_1 est la plus grande dilatation linéique en P . Le Max est pris sur l'infinité de directions matérielles issues de la particule P . Ce maximum est atteint par l'*unique* direction matérielle confondue avec la direction propre associée à la plus grande dilatation linéique⁽⁴⁸⁾ en P .

Enfin, on rappelle que toute déformation est décomposable de manière *unique et commutative* en une déformation sphérique et en une déformation isovolume⁽⁴⁹⁾.

La distorsion angulaire maximale en une particule [éq. (2.25) p. 35] et la distorsion stérique maximale en une particule [éq. (2.26) p. 36] peuvent donc aussi bien s'exprimer en remplaçant les λ_i par les dilatations linéiques principales λ'_i de la partie isovolume de la déformation car $\lambda'_i = \lambda_i K_v^{-1/3}$ et $\lambda'_1 \lambda'_2 \lambda'_3 = 1$.

2.5.3 Critères portant sur des caractéristiques de la déformation

Puisque dans un milieu continu isotrope on ignore par définition l'orientation du tenseur de déformation actuel en une particule par rapport à l'orientation des structures microscopiques en

⁽⁴⁴⁾ Rappel : dans une déformation sphérique, tous les couples de directions matérielles initialement orthogonales restent actuellement orthogonales, la distorsion angulaire est donc égale à 1 pour tous les couples.

⁽⁴⁵⁾ voir l'annexe A.2.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁴⁶⁾ Rappel : dans une déformation sphérique, tous les triplets de directions matérielles initialement orthogonales restent actuellement orthogonaux, la distorsion stérique est donc égale à 1 pour tous les triplets.

⁽⁴⁷⁾ Voir l'annexe A.3.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁴⁸⁾ Voir l'annexe A.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁴⁹⁾ Cette décomposition s'écrit différemment selon le tenseur de déformation utilisé : elle est multiplicative pour les tenseurs \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{V} et \mathbf{U} ; elle est additive pour les tenseurs \mathbf{M} et \mathbf{L} ; elle est d'expression plus compliquée pour les autres tenseurs de déformation (dont \mathbf{E}). Voir section 4.10.3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, [note 2 p. 3].

cette particule, on ne peut que fixer une borne supérieure à une distorsion maximale (angulaire ou stérique) de la déformation actuelle pour garantir qu'aucun réarrangement de liaison ne se produit. De même, on ne peut que fixer une borne supérieure à la dilatation linéique maximale en une particule pour garantir qu'aucune rupture de liaison ne se produit. Ces limites peuvent éventuellement être fonction de la température⁽⁵⁰⁾. On ne saura donc jamais si les directions matérielles macroscopiques pour lesquelles ces limites sont atteintes, coïncident ou non avec des directions critiques des microstructures. Un critère de limite élastique portant sur les déformations admissibles est donc du type « prudent » : les ruptures ou les réarrangements de liaisons dont on veut se protéger ne se produisent réellement qu'en cas de (presque) coïncidence des directions matérielles issues de l'analyse (macroscopique et continue) des déformations avec les directions particulières des structures microscopiques.

Les critères portant sur la limitation de certaines caractéristiques de la déformation se présentent donc comme des *frontières* à ne pas dépasser dans l'espace des états lorsque l'état de la particule évolue. Avec les variables d'état $(T, X_I, X_{II}, X_{III})$, l'espace des états est de dimension 4.

D'une manière générale, dans un espace des états de dimension m , ces frontières sont des hypersurfaces de dimension $m - 1$.

Remarques destinées aux lecteurs éduqués avec le « modèle » de Hooke – Dans les cours traditionnels d'« élasticité inéaire », on présente habituellement des critères de limite élastique portant sur le tenseur des contraintes plutôt que sur le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\epsilon}$. En pseudo-élasticité de Hooke⁽⁵¹⁾, la « loi » de Hooke est une bijection $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon}$ (elle est inversible). Toute condition portée sur le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ peut donc être traduite en une condition sur le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\epsilon}$ et inversement. Toutefois, le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ étant mal défini [note 51 p. 37], des conditions de limite élastique portant sur $\boldsymbol{\sigma}$ traduites sur le pseudo-« tenseur de déformation » $\boldsymbol{\epsilon}$ sont d'interprétation cinématique obscure.

Les lecteurs préalablement familiarisés avec la « loi » de Hooke sont invités à se débarrasser de l'idée infuse de « bijection $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \mathbf{X}$ » où \mathbf{X} est un vrai tenseur de déformation : en élasticité sans restrictions ni sur les mouvements envisageables ni sur l'amplitude des déformations, *cette bijection n'existe pas* car la loi de comportement élastique $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(T, \mathbf{X})$ n'est pas inversible en général. Un critère de limite élastique portant sur la déformation peut toujours se traduire à l'aide la loi de comportement mécanique \mathbf{f} en une condition sur le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$, *mais la réciproque est fautive* car la fonction \mathbf{f}^{-1} n'existe pas en général. Cette idée fautive et persistante de « bijection $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \mathbf{X}$ » est à l'origine de bien des malentendus⁽⁵²⁾.

2.5.4 Limitation de la distorsion angulaire maximale

Dans toute déformation non sphérique, il existe un couple unique de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion angulaire est maximale. On suppose qu'à partir

⁽⁵⁰⁾ L'intensité de l'agitation thermique microscopique devrait favoriser les réarrangements de liaisons.

⁽⁵¹⁾ On a montré en cinématique que le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ est une mauvaise mesure des petites déformations (il existe des mouvements de solides indéformables qui conduisent à $\boldsymbol{\epsilon} \neq \mathbf{0}$ [sec. 4.12.2 du cours *Cinématique des milieux continus* du même auteur [note 2 p. 3]) et on montrera plus loin [section 4.3 p. 74] que la « loi » de Hooke n'est ni thermodynamiquement admissible ni universelle.

⁽⁵²⁾ L'auteur a dû se résoudre à ajouter cette remarque dans la version actuelle de ce texte en raison de discussions et de lectures qui laissaient apparaître que cette idée fautive est infuse dans l'esprit de nombreux mécaniciens des solides déformables. L'absence de bijection $\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \mathbf{X}$ interdit de pouvoir considérer le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ comme une variable d'état car la fonction \mathbf{f}^{-1} n'existe pas (relire éventuellement les conditions nécessaires à un changement de variable de variables d'état dans *Commentaires* à la fin de la section 4.1.3 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3]) où on discute de la possibilité de changements de variables d'état. En élasticité, le tenseur des contraintes est bien une *fonction d'état* mais ne peut être une variable d'état que si \mathbf{f}^{-1} existe. On verra un exemple de loi de comportement mécanique non inversible dans le chapitre 3 [p. 51].

d'une certaine distorsion angulaire, des réorganisations de liaisons interatomiques (dislocations) se produisent. Le critère de limite élastique s'écrit donc :

$$\delta_{max}^a \leq \delta_{lim}^a \quad \text{où } \delta_{lim}^a \text{ est une caractéristique du matériau élastique isotrope.}$$

La distorsion angulaire limite δ_{lim}^a dépend de la microstructure du matériau. À défaut de la connaître, on peut toujours la déterminer expérimentalement⁽⁵³⁾.

La distorsion angulaire maximale est une fonction des dilatations linéiques principales extrêmes λ_1 et λ_3 [éq. (2.25) p. 35]), elle peut donc s'exprimer en fonction des invariants fondamentaux des tenseurs de déformation objectifs mais avec des expressions compliquées⁽⁵⁴⁾.

Critère de distorsion angulaire limite écrit avec le tenseur \mathbf{M} – On peut exprimer la distorsion angulaire maximale en fonction des trois valeurs propres $m_1 \geq m_2 \geq m_3$ du tenseur de déformation $\mathbf{M} = \mathbf{LnV}$:

$$\delta_{max}^a = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) = \frac{1}{2} (e^{m_1 - m_3} + e^{m_3 - m_1}) = \cosh(m_1 - m_3)$$

où m_1 et m_3 sont les valeurs propres extrêmes du tenseur de déformation \mathbf{M} . La fonction \cosh étant monotone croissante pour des arguments positifs ($m_1 \geq m_3$), limiter la distorsion angulaire maximale revient à limiter l'écart entre les valeurs propres extrêmes du tenseur de déformation \mathbf{M} :

$$m_1 - m_3 \leq m_{lim} \quad \text{où } m_{lim} = \text{Arccosh } \delta_{lim}^a \text{ est une caractéristique du matériau.}$$

L'un des critères de limite élastique classiquement présenté dans les cours élémentaires est le *critère de Tresca*, qui limite l'écart entre les valeurs propres extrêmes du *tenseur des contraintes* $\sigma_1 - \sigma_3$. Si on croit en la validité de la « loi » de Hooke, ce critère revient à limiter l'écart entre les valeurs propres extrêmes $\varepsilon_1 - \varepsilon_3$ de $\boldsymbol{\varepsilon}$. Le critère de limitation de la distorsion angulaire maximale est donc un « critère de Tresca » appliqué au (vrai) tenseur de déformation \mathbf{M} .

Lors du suivi numérique d'une évolution, l'utilisation de ce critère de limite élastique entraîne des bifurcations logiques gênantes car durant l'évolution d'une déformation, une direction matérielle de valeur propre extrême peut devenir une direction matérielle de valeur propre intermédiaire. Pour pallier cet inconvénient, on préfère souvent utiliser le critère $\sqrt{3}/2 \|\mathbf{devM}\| \leq m_{lim}$ (appelé *critère de Von Mises* quand il est appliqué au tenseur des contraintes), qui est un peu moins restrictif que le critère de Tresca, mais néanmoins assez proche avec un écart inférieur à 13.4%⁽⁵⁵⁾. C'est en raison de cette commodité que, dans la plupart des codes de calcul, le critère de limite élastique de Von Mises est préféré au critère de Tresca. Quand on utilise la « loi » de Hooke, le scalaire $\sqrt{3}/2 \|\mathbf{dev}\boldsymbol{\sigma}\| = 2\mu \sqrt{3}/2 \|\mathbf{dev}\boldsymbol{\varepsilon}\|$ est appelé « contrainte équivalente » de Von Mises.

De même que le critère de Tresca, le critère de Von Mises ne protège pas contre des déformations sphériques excessives.

2.5.5 Limitation de la distorsion stérique maximale

Dans toute déformation en une particule, il existe une infinité de triplets de directions matérielles initialement orthogonales dont la distorsion stérique atteint la distorsion stérique maximale⁽⁵⁶⁾.

⁽⁵³⁾ Voir plus loin la remarque *Détermination expérimentale d'une limite élastique* [p. 42].

⁽⁵⁴⁾ L'expression des valeurs propres ordonnées d'un tenseur symétrique en fonction de ses invariants fondamentaux est donnée en annexe A.3, A.4 et A.5 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

⁽⁵⁵⁾ On démontre en élasticité classique que l'ensemble des tenseurs admissibles suivant le critère de Von Mises contient l'ensemble des tenseurs admissibles suivant le critère de Tresca. En faisant une analyse dans le « plan octaédrique » des contraintes que l'écart maximal entre les deux critères est l'écart de rayon entre un hexagone (critère de Tresca) et son cercle circonscrit (critère de Von Mises), qui est au plus $R(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}) \simeq 0.134R$.

⁽⁵⁶⁾ Section 4.7.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

On suppose qu'à partir d'une certaine distorsion stérique, des réorganisations de liaisons interatomiques (dislocations) se produisent. Le critère de limite élastique s'écrit donc :

$$\delta_{max}^s(P,t) \leq \delta_{lim}^s \quad \text{où } \delta_{lim}^s \text{ est une caractéristique du matériau élastique isotrope.}$$

La distorsion stérique limite δ_{lim}^s dépend de la microstructure du matériau. À défaut de la connaître, on peut toujours la déterminer expérimentalement dans toute expérience provoquant des distorsions stériques connues⁽⁵⁷⁾.

Le fait qu'il existe en une particule une infinité de triplets de directions matérielles initialement orthogonales ayant la distorsion stérique maximale δ_{max}^s augmente les chances que les directions matérielles de l'un d'entre eux coïncident ou presque avec des directions critiques des microstructures quand $\delta_{max}^s = \delta_{lim}^s$.

Précisions sur la cinématique des déformations isovolumes – On montre en annexe C.3 [p. 159] que la partie déformation isovolume de toute déformation peut être vue comme la composition *non unique* de deux glissements plans dans les plans principaux de la déformation et dont la distorsion *angulaire* est déterminée par les valeurs propres de la partie déformation isovolume. Chacun de ces glissements est susceptible de provoquer des réorganisations de liaisons (dislocations). La limitation de la distorsion stérique en une particule est donc une protection contre les réarrangements de liaisons dans plusieurs directions autour de la particule, contrairement à la simple limitation de la distorsion angulaire de la section 2.5.4 [p. 37].

Il est à noter que limiter les distorsions stériques maximales revient à limiter aussi les distorsions angulaires maximales avec la même limite⁽⁵⁸⁾. Imposer ce critère de limite élastique implique donc automatiquement le respect du critère précédent [sec. 2.5.4 p. 37].

Contrairement à la distorsion angulaire, la distorsion stérique maximale en une particule s'exprime aisément en fonction des invariants fondamentaux du tenseur de déformation objectif \mathbf{B} (ou \mathbf{V}) :

$$\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{K_v} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{\frac{3}{2}}}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(V_I^2 - 2V_{II})^{\frac{3}{2}}}{V_{III}}$$

Remarque – L'expression de la distorsion stérique maximale en fonction des invariants du tenseur de déformation objectif \mathbf{M} conduit à une expression très compliquée :

$$\begin{aligned} \delta_{max}^s &= \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{K_v} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(e^{2m_1} + e^{2m_2} + e^{2m_3})^{\frac{3}{2}}}{e^{M_I}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(e^{2g_1(M_I, M_{II}, M_{III})} + e^{2g_2(M_I, M_{II}, M_{III})} + e^{2g_3(M_I, M_{II}, M_{III})})^{\frac{3}{2}}}{e^{M_I}} \end{aligned}$$

où les fonctions g_1 , g_2 et g_3 sont des expressions compliquées [note 54 p. 38].

⁽⁵⁷⁾ Voir plus loin la remarque *Détermination expérimentale d'une limite élastique* p. 42.

⁽⁵⁸⁾ Certains maximums relatifs de la distorsion stérique sont des maximums de la distorsion angulaire. Voir l'annexe A.3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3.]

2.5.6 Limitation de la dilatation linéique

Les deux critères précédents ont essentiellement pour objectif de se protéger de la perte d'élasticité due à des réorganisations de liaisons interatomiques (dislocations), en limitant les distorsions maximales (angulaires ou stériques) en chaque particule (perte d'élasticité par plastification). En revanche, la limitation des dilatations linéiques a pour objectif de se protéger des ruptures de liaisons interatomiques (perte d'élasticité par endommagement). On sait de la cinématique que la plus grande dilatation linéique dans une déformation en une particule est obtenue pour l'unique direction matérielle actuelle coïncidant avec la direction propre de déformation associée à la plus grande dilatation linéique principale λ_1 ⁽⁵⁹⁾. Un critère de limite élastique par endommagement est donc :

$$\lambda_1(P, t) \leq \lambda_{lim} \quad \text{où } \lambda_{lim} \text{ est une caractéristique du matériau élastique isotrope.}$$

L'élongation limite λ_{lim} dépend de la microstructure du matériau. À défaut de la connaître, on peut toujours la déterminer expérimentalement dans toute expérience provoquant des élongations λ_1 connues ⁽⁶⁰⁾.

Comme précédemment, on n'est pas assuré que la direction matérielle (macroscopique) actuelle associée à λ_1 en une particule coïncide avec une direction de liaison interatomique en cette particule. Ce critère est donc aussi du type « prudent ».

Remarque – Dans les traités traditionnels d'« élasticité linéaire » ce critère est appliqué au tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ (limitation de la plus grande valeur propre σ_1 du tenseur des contraintes). Il est appelé *critère de Rankine*.

La plus grande dilatation linéique λ_1 en une particule peut s'exprimer en fonction des invariants fondamentaux de \mathbf{V} ⁽⁶¹⁾ :

$$\lambda_1 = \frac{V_I}{3} + \frac{2J}{3} \cos \frac{\phi}{3}$$

$$\text{où : } J = \sqrt{V_I^2 - 3V_{II}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{dev} \mathbf{V}\| > 0 \quad \text{et} \quad \phi = \text{Arccos} \frac{27V_{III} - 9V_I V_{II} + 2V_I^3}{2(V_I^2 - 3V_{II})^{\frac{3}{2}}} \in [0; \pi]$$

Ces formules sont valables pour tout tenseur symétrique. Avec le tenseur de déformation \mathbf{B} , on a donc aussi :

$$\lambda_1^2 = \frac{B_I}{3} + \frac{2J'}{3} \cos \frac{\phi'}{3}$$

$$\text{où : } J' = \sqrt{B_I^2 - 3B_{II}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{dev} \mathbf{B}\| > 0 \quad \text{et} \quad \phi' = \text{Arccos} \frac{27B_{III} - 9B_I B_{II} + 2B_I^3}{2(B_I^2 - 3B_{II})^{\frac{3}{2}}} \in [0; \pi]$$

Rappel – Si J (ou J') est nul alors le déviateur de \mathbf{V} (ou \mathbf{B}) est nul. Le tenseur de déformation \mathbf{V} (ou \mathbf{B}) est donc sphérique. Les trois dilatations principales λ_1 , λ_2 et λ_3 sont donc égales, on a $J = J' = 0$ et l'angle ϕ (ou ϕ') est indéterminé.

⁽⁵⁹⁾ Annexe A.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁶⁰⁾ Voir plus loin la remarque *Détermination expérimentale d'une limite élastique* [p. 42].

⁽⁶¹⁾ Voir l'annexe A3 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

Le critère de limite élastique en élongation s'écrit donc :

$$\frac{V_I}{3} + \frac{2J}{3} \cos \frac{\phi}{3} \leq \lambda_{lim} \quad \text{ou bien} \quad \frac{B_I}{3} + \frac{2J'}{3} \cos \frac{\phi'}{3} \leq \lambda_{lim}^2 \quad (2.27)$$

Ce qui se traduit (comme les autres critères portant sur la déformation) par une frontière (hypersurface) dans l'espace des états.

Remarque – L'équation des hypersurfaces limites dans l'espace des états $(T, X_I, X_{II}, X_{III})$ peut paraître compliquée. On verra plus loin que quand on choisit des variables d'état réduites dont l'interprétation cinématique est claire, les hypersurfaces limites sont plus simples.

Un critère approximatif un peu plus simple – En remarquant que $0 < \phi < \pi \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \frac{\phi}{3} \leq 1$. On est donc assuré que dans toute déformation, la plus grande élongation λ_1 est encadrée :

$$\frac{V_I}{3} + \frac{\sqrt{3} 2J}{2 \cdot 3} \leq \lambda_1 \leq \frac{V_I}{3} + \frac{2J}{3} \quad \text{et} \quad \frac{B_I}{3} + \frac{\sqrt{3} 2J'}{2 \cdot 3} \leq \lambda_1^2 \leq \frac{B_I}{3} + \frac{2J'}{3}$$

Un critère approximatif de limite élastique en élongation un peu plus simple à évaluer (mais trop prudent car la plus grande élongation λ_1 est systématiquement surévaluée) peut s'écrire :

$$\frac{V_I}{3} + \frac{2\sqrt{V_I^2 - 3V_{II}}}{3} \leq \lambda_{lim} \quad \text{ou bien} \quad \frac{B_I}{3} + \frac{2\sqrt{B_I^2 - 3B_{II}}}{3} \leq \lambda_{lim}^2$$

On s'épargne ainsi le calcul de l'angle ϕ (ou ϕ')⁽⁶²⁾.

2.5.7 Critères « énergétiques »

Certains d'auteurs proposent comme critère de limite élastique une borne supérieure pour la part d'énergie interne due à la partie isovolume de la déformation :

$$e_{isov}^m \leq e_{lim}^m \quad \text{où } e_{lim}^m \text{ est une caractéristique du matériau élastique isotrope.}$$

Remarque pour les lecteurs initiés à l'« élasticité » de Hooke – C'est cette démarche de décomposition de l'énergie interne⁽⁶³⁾ qui est utilisée en « élasticité » isotherme de Hooke pour présenter le critère de limite élastique de Von Mises (limitation de l'« énergie de déformation » isovolume et isotherme); le raisonnement utilisé implique de croire en la validité de la « loi » de Hooke. Ce critère ne protège que contre les réorganisations de liaisons car il ne limite pas les déformations (ou les contraintes) sphériques.

Contrairement aux trois critères de limite élastique précédents (sections 2.5.4 [p. 37], 2.5.5 [p. 38] et 2.5.6 [p. 40]) qui sont des limitations purement cinématiques ne portant que sur les déformations actuelles qui sont à l'origine des éventuels réarrangements ou ruptures de liaisons interatomiques qui provoquent la perte d'élasticité, un critère « énergétique » nécessite la connaissance de l'expression des fonctions d'état (e^m , s^m ou ψ^m) en fonction des variables d'état. Tout critère portant sur les déformations peut donc être réécrit en « critère énergétique » équivalent portant sur les fonctions d'état. Pourquoi se limiter aux déformations isovolumes sans limiter les déformations sphériques ?

⁽⁶²⁾ Cette paresse de calcul est-elle justifiée quand on utilise un calculateur ?

⁽⁶³⁾ Dans les cours élémentaires, l'énergie interne est appelée « énergie de déformation », notée W , quand l'évolution est isotherme.

2.5.8 Conclusion sur les critères de limite élastique en élasticité isotrope

Comme on peut le constater, il est possible de proposer différents critères macroscopiques de limite élastique en élasticité isotrope qui s'inspirent tous de considérations microscopiques. On peut limiter les distorsions angulaires, les distorsions stériques (qui limitent automatiquement les distorsions angulaires), les dilatations linéiques voire aussi des « énergies limites » (isovolumes ou non, isothermes ou non) qui peuvent toujours se déduire de conditions portant sur les déformations⁽⁶⁴⁾. Quoiqu'il en soit, leur objectif implicite est de se protéger des réarrangements de liaisons interatomiques et des ruptures de liaison interatomiques qui sont les causes véritables de la perte d'élasticité.

Une option raisonnable est d'utiliser deux critères de limite élastique : une limitation des distorsions stériques maximales (pour se protéger des réarrangements de liaisons) et une limitation des dilatations linéiques (pour se protéger des ruptures de liaison). Ces deux critères définissent donc deux frontières⁽⁶⁵⁾ dans l'espace des états qui déterminent la région de l'espace des états dans laquelle le comportement élastique est assuré. Suivant le chemin suivi par la particule dans l'espace des états pendant son évolution, on peut atteindre en premier l'une ou l'autre de ces frontières.

Par ailleurs, il est regrettable de constater que la définition cinématique de la distorsion stérique maximale en une particule soit rarement donnée dans les cours de cinématique des milieux continus⁽⁶⁶⁾. C'est pourtant la grandeur cinématique la plus apte à refléter macroscopiquement la possibilité d'existence de réarrangements de liaisons interatomiques (dislocations) en une particule.

Détermination expérimentale d'une limite élastique – Il faut choisir des expériences dans lesquelles les variables d'état $\{T, \mathbf{X}\}$ sont connues et quasi-uniformes, afin de pouvoir déterminer aisément les valeurs δ_{max}^s et/ou λ_1 dont on cherche la limite élastique. Pour constater la perte d'élasticité, on doit charger et décharger l'éprouvette successivement avec des charges maximales croissantes jusqu'à constater une déformation résiduelle après décharge (les courbes de charge/décharge ne se superposent plus). Si les pentes (raideurs) de charge/décharge deviennent différentes, on a atteint une limite de rupture de liaison λ_{lim} (endommagement); sinon on a atteint une limite de réarrangement de liaisons δ_{lim}^s (plasticité).

En élasticité sans restrictions cinématiques, la perte de linéarité des courbes de charge/décharge n'est pas significative de perte d'élasticité : elle ne signale qu'un écart à la pseudo-élasticité de Hooke.

Critères de limite élastique traditionnels en contraintes – Dans les cours élémentaires d'élasticité, il est traditionnel de donner des critères de limite élastique portant sur le tenseur des contraintes plutôt que sur la déformation. Puisque, dans ces cours traditionnels, on considère l'« élasticité » de Hooke comme acceptable⁽⁶⁷⁾, on croit que les deux formes de critère sont équivalents car la « loi » de Hooke est une bijection entre le tenseur des contraintes et la déformation ($\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$) : des

⁽⁶⁴⁾ Ces conditions portant sur les déformations, d'expression plus ou moins compliquée selon le tenseur de déformation utilisé, sont peu ou pas cinématiquement interprétées dans les cours élémentaires, probablement par manque de culture sur la cinématique des déformations sans restrictions cinématiques, notamment sur ce que sont les distorsions stérique et angulaire.

⁽⁶⁵⁾ Ces frontières sont définies par des inégalités portant sur des variables d'état. Géométriquement, ce sont donc des hypersurfaces limites de dimension $m - 1$ dans un espace des états de dimension m .

⁽⁶⁶⁾ Essentiellement parce que le seul « tenseur de déformation » envisagé est le tenseur des « petites perturbations » dont la définition n'est valide que pour des mouvements très particuliers ($\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$) dans lesquels la distorsion stérique est un infiniment petit du second ordre. Voir les sections 4.12.2 et 4.12.4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁶⁷⁾ D'une part, le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ est une mauvaise mesure des petites déformations et il n'est pas objectif [sec. 4.12.2 et 4.12.5 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, note 2 p. 3], et

limites élastiques en $\boldsymbol{\sigma}$ peuvent donc aisément se traduire en limites sur $\boldsymbol{\varepsilon}$ et inversement. Cependant, puisque $\boldsymbol{\varepsilon}$ est mal défini ⁽⁶⁸⁾, les interprétations cinématiques des conditions de limite élastique sur $\boldsymbol{\varepsilon}$ sont obscures.

En revanche, en élasticité générale (les déformations et les mouvements ne sont plus restreints par les conditions de validité de $\boldsymbol{\varepsilon}$ ⁽⁶⁹⁾), une telle bijection n'existe pas. La forme générale de la loi de comportement élastique est de la forme $\boldsymbol{\sigma} = K_0^X \mathbf{G} + K_1^X \mathbf{X} + K_2^X \mathbf{X}^2$ où \mathbf{X} est un tenseur de déformation objectif; cette loi de comportement n'est en général ni affine ni inversible. Les considérations microscopiques de la section 2.5.1 [p. 34] suggèrent qu'il est physiquement plus raisonnable de donner des critères en limites de déformation (limites en dilatation linéique et/ou en distorsion stérique ou angulaire) car ces limites reflètent macroscopiquement les phénomènes microscopiques qui sont la véritable cause de la perte d'élasticité. Pour en avoir pleinement conscience, il faut avoir fait une étude cinématique fine du mouvement des directions matérielles (et notamment les notions de distorsion) pendant une déformation comme il a été fait dans le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

Particularités l'essai de traction – Pour la détermination d'une limite élastique, l'expérimentation se contente bien souvent d'un essai de traction isotherme, dans lequel la déformation (sensiblement uniforme) est très particulière : la dilatation linéique principale dans la direction de traction λ_1 est dominante, les deux autres étant égales et fonctions de λ_1 . Les adeptes de la « loi » de Hooke supposent implicitement (et imprudemment !) que la *contrainte normale* observée *dans un essai de traction* (une déformation très particulière ⁽⁷⁰⁾) au moment de la perte d'élasticité est encore une contrainte de limite élastique quand les déformations sont de nature différente à celle d'un essai de traction ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non liés), et donc quand les distorsions (stériques ou angulaires) ont des valeurs différentes. Cette supposition implicite semble hasardeuse à l'auteur de ce texte. Notamment, on constate expérimentalement dans certains métaux que la limite élastique *dans un essai de traction* qui apparaît en premier est souvent une limite de plasticité, qui n'est pas due à des ruptures de liaisons mais à des réarrangements de liaison. C'est donc la distorsion au moment de la perte d'élasticité qu'il faudrait retenir comme distorsion limite au lieu de n'y voir qu'une elongation.

Ductilité/fragilité – Lors d'un essai de traction sur certains matériaux, on constate une perte d'élasticité par plastification avant une perte d'élasticité par endommagement (rupture). De tels matériaux sont dits « ductiles ». Cette constatation empirique conduit souvent les adeptes de la « loi » de Hooke à préconiser un critère de limite élastique ne portant que sur le déviateur des contraintes, ce qui revient à donner une limite au déviateur de $\boldsymbol{\varepsilon}$ ⁽⁷¹⁾ (critère de Von Mises ⁽⁷²⁾) ou le critère de Tresca (écart entre les valeurs propres extrêmes) en oubliant que, dans un essai de traction, il existe des matériaux pour lesquels la rupture peut apparaître avant plastification (ces matériaux sont dits « fragiles »). Or les critères de Tresca ou de Von Mises ne limitent que les distorsions). Il ne protègent donc pas des ruptures de liaison. Ils sont pourtant souvent utilisés comme critères de limite élastique pour tous les matériaux.

Dans des sollicitations plus générales qu'un essai de traction sur le même matériau, il peut exister des zones du solide déformable où la partie sphérique de la déformation est dominante ; dans ces régions,

d'autre part, on montre plus loin [sec. 4.3 [p. 74] que la loi de Hooke n'est ni thermodynamiquement admissible ni universelle.

⁽⁶⁸⁾ voir note 67 [p. 42]

⁽⁶⁹⁾ On rappelle que l'hypothèse de construction de $\boldsymbol{\varepsilon}$ est $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$, ce qui implique que le mouvement vu par l'observateur utilisé est une quasi-translation.

⁽⁷⁰⁾ Si on admet la « loi » de Hooke, dans un essai de traction les trois déformations principales sont liées : $\lambda_2 = \lambda_3 = 1 - \nu(\lambda_1 - 1)$. Dans un essai de traction un élasticité isotrope sans restrictions, on a toujours $\lambda_2 = \lambda_3$, mais leur relation avec λ_1 est « non linéaire ».

⁽⁷¹⁾ Si on admet le modèle de Hooke ($\boldsymbol{\sigma} \leftrightarrow \boldsymbol{\varepsilon}$), il y a équivalence entre une limite en sur le déviateur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ et une limite sur le déviateur des contraintes. Puisque le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ est mal défini, l'interprétation cinématique de son déviateur est obscure.

⁽⁷²⁾ Voir *Remarques* p. 37.

des ruptures de liaisons (endommagement) vont se produire avant des réorganisations de liaisons (plastification) car les distorsions y sont faibles. Par exemple, dans une zone en traction sphérique ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 1$, pas de distorsions), on assisterait à une rupture « fragile » (c'est-à-dire avant plastification) pour tous les matériaux y compris les matériaux qui ont peut-être été jugés « ductiles » dans un essai de traction. La « ductilité » ou la « fragilité », constatées empiriquement *dans un essai de traction*, ne devraient pas être considérées comme des caractéristiques de matériau, puisque la « ductilité » ou la « fragilité » apparaissent ou non suivant le type de déformations qu'on impose au matériau. En fait, selon le parcours de l'état d'une particule dans l'espace des états, le matériau apparaît « ductile » si le parcours dans l'espace des états atteint en premier une frontière de limite en distorsion et il apparaît « fragile » si le parcours dans l'espace des états atteint en premier une frontière de limite en élongation. La « fragilité » ou la « ductilité » ne sont pas des propriétés intrinsèques d'un matériau puisque cette qualification dépend du type de sollicitation auquel il est soumis.

Linéarité ou non d'une courbe de traction – On lit souvent que la perte d'élasticité a lieu lorsque la courbe $\sigma_1 = f(\varepsilon_1)$ dans un essai de traction n'est plus linéaire. Cette perte de linéarité ne traduit qu'un écart au (criticable) modèle de Hooke et non nécessairement une perte d'élasticité : il peut exister des « courbes de traction » non linéaires et néanmoins élastiques (notamment pour les élastomères), c'est-à-dire avec une courbe de charge et de décharge *dans un essai de traction isotherme* non rectilignes mais néanmoins confondues (voir un exemple dans la section 9.5 [p. 145]).

La détermination d'un critère de limite élastique devrait être faite sur la base d'expérimentations dans lesquelles on évalue les distorsions stériques maximales et les dilatations linéiques maximales au moment de la perte d'élasticité ou bien, à la rigueur, par une réglementation ou une norme (une protection plus juridique que scientifique !).

2.6 Loi incrémentale (« loi tangente »)

En première lecture, on peut ignorer cette section et poursuivre directement à la synthèse du chapitre [section 2.7 p. 48] sans nuire à la compréhension de la suite. Toutefois, la lecture de la conclusion de cette section [p. 48] peut être utile aux lecteurs déjà initiés aux « grandes déformations ».

L'objectif de cette section est de chercher à comprendre le discours des praticiens d'une « mécanique numérique », qui tiennent à donner une interprétation mécanique à certains algorithmes utilisés dans la résolution numérique des systèmes d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires.

Dans certaines méthodes numériques⁽⁷³⁾, la recherche d'une solution *stationnaire*⁽⁷⁴⁾ à un problème élastique se fait en résolvant une succession de problèmes de mécanique « linéarisés » avec de petits incréments de sollicitation progressifs qui évoluent en fonction d'un temps fictif jusqu'à la sollicitation finale désirée⁽⁷⁵⁾. Puisque l'on cherche une solution stationnaire, on annule toutes les dérivées particulières⁽⁷⁶⁾ des fonctions d'état, des variables d'état et des positions actuelles (ou des déplacements) dans les équations différentielles à résoudre. Les solutions aux

⁽⁷³⁾ Il existe des méthodes numériques autres que celle évoquée dans cette section pour résoudre des problèmes « non linéaires ». Les mathématiciens spécialisés en analyse numérique ne cherchent généralement pas à trouver des interprétations physiques aux algorithmes qu'ils proposent, ce qui ne nuit nullement à leur efficacité numérique. Laissons les numériciens faire leur travail ! Ils sont généralement dignes de confiance.

⁽⁷⁴⁾ Certains auteurs disent « solution d'équilibre ».

⁽⁷⁵⁾ Noter que s'il existe plusieurs solutions – c'est courant en élasticité (flambage) et plus encore plus en inélasticité – le choix arbitraire d'une évolution fictive détermine la solution qui sera trouvée parmi les solutions possibles.

⁽⁷⁶⁾ On rappelle qu'une dérivée particulière est une dérivée temporelle à particule constante.

temps fictifs intermédiaires sont donc des solutions statiques (comme si l'évolution fictive était « infiniment lente » ou « en équilibre à chaque instant »). Cette évolution fictive est souvent dite « quasi-statique ».

En revanche, dans la résolution des problèmes *instationnaires* (on les appelle aussi *transitoires*), le temps est réel, aucune dérivée particulière n'est annulée dans les équations différentielles et les solutions aux temps intermédiaires ont un sens physique.

Que ce soit dans la recherche d'une solution stationnaire ou non, lorsqu'on utilise cette méthode de résolution incrémentale, on est amené à écrire une « loi de comportement tangente » en chaque instant (fictif ou réel) d'une évolution.

Toutes les lois de comportement mécanique établies en utilisant un tenseur de déformation *objectif* \mathbf{X} , choisi parmi \mathbf{B} , \mathbf{V} , \mathbf{M} , $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ (ou autre), s'écrivent sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_1 \mathbf{X} + K_2 \mathbf{X}^2$$

où K_0 , K_1 et K_2 sont des fonctions d'état connues des variables d'état $(T, X_I, X_{II}, X_{III})$.

La dérivée particulière (temps fictif ou réel) du tenseur des contraintes s'écrit donc ⁽⁷⁷⁾ :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{K}_0 \mathbf{G} + \dot{K}_1 \mathbf{X} + K_1 \dot{\mathbf{X}} + \dot{K}_2 \mathbf{X}^2 + K_2 (\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{X}}) \quad (2.28)$$

où les dérivées particulières (temps fictif ou réel) des fonctions d'état K_i sont ⁽⁷⁸⁾ :

$$\begin{aligned} \dot{K}_i &= \partial_T K_i \dot{T} + \partial_{X_I} K_i \dot{X}_I + \partial_{X_{II}} K_i \dot{X}_{II} + \partial_{X_{III}} K_i \dot{X}_{III} \\ &= \partial_T K_i \dot{T} + \partial_{X_I} K_i \mathbf{G} : \dot{\mathbf{X}} + \partial_{X_{II}} K_i (X_I \mathbf{G} - \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{X}} + \partial_{X_{III}} K_i (X_{II} \mathbf{G} - X_I \mathbf{X} + \mathbf{X}^2) : \dot{\mathbf{X}} \end{aligned}$$

En remplaçant les dérivées particulières \dot{K}_i dans l'équation (2.28) [p. 45], on peut la mettre sous la forme suivante :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\partial_T K_0 \mathbf{G} + \partial_T K_1 \mathbf{X} + \partial_T K_2 \mathbf{X}^2) \dot{T} + \mathbf{K}(\mathbf{X}) : \dot{\mathbf{X}} \quad (2.29)$$

où $\mathbf{K}(\mathbf{X})$ est le tenseur du quatrième ordre suivant (valeur actuelle au temps t fictif ou réel) ⁽⁷⁹⁾ :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= (\partial_{X_I} K_0 + X_I \partial_{X_{II}} K_0 + X_{II} \partial_{X_{III}} K_0) \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + (-\partial_{X_{II}} K_0 - X_I \partial_{X_{III}} K_0) \mathbf{G} \otimes \mathbf{X} + \partial_{X_{III}} K_0 \mathbf{G} \otimes \mathbf{X}^2 + \\ &(\partial_{X_I} K_1 + X_I \partial_{X_{II}} K_1 + X_{II} \partial_{X_{III}} K_1) \mathbf{X} \otimes \mathbf{G} + (-\partial_{X_{II}} K_1 - X_I \partial_{X_{III}} K_1) \mathbf{X} \otimes \mathbf{X} + \partial_{X_{III}} K_1 \mathbf{X} \otimes \mathbf{X}^2 + \\ &(\partial_{X_I} K_2 + X_I \partial_{X_{II}} K_2 + X_{II} \partial_{X_{III}} K_2) \mathbf{X}^2 \otimes \mathbf{G} + (-\partial_{X_{II}} K_2 - X_I \partial_{X_{III}} K_2) \mathbf{X}^2 \otimes \mathbf{X} + \partial_{X_{III}} K_2 \mathbf{X}^2 \otimes \mathbf{X}^2 + \\ &K_1 \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} + K_2 (\mathbf{X} \boxtimes \mathbf{G} + \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{X}) \quad (2.30) \end{aligned}$$

Pour une déformation actuelle (fictive ou réelle) \mathbf{X} donnée, la « loi tangente » (2.28) [p. 45] (ou bien (2.29) [p. 45]) est une relation affine entre la dérivée particulière (fictive ou réelle) $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ du tenseur des contraintes et la dérivée particulière (fictive ou réelle) $\dot{\mathbf{X}}$ du tenseur de déformation. Les coefficients de cette relation affine sont des fonctions de la déformation \mathbf{X} au temps intermédiaire (fictif ou réel). Même dans un calcul « quasi-statique », ces coefficients sont différents à chaque instant fictif et dépendent de l'évolution fictive *choisie* ⁽⁸⁰⁾.

⁽⁷⁷⁾ Dans les calculs « quasi-statiques », la « différentielle » $d\boldsymbol{\sigma} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} dt$ est souvent appelée « accroissement (fictif) de $\boldsymbol{\sigma}$ » où $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ est une « dérivée particulière fictive ».

⁽⁷⁸⁾ On rappelle que les dérivées particulières des invariants d'un tenseur du second ordre construit sur \mathbb{V}_3 sont : $\dot{X}_I = \mathbf{G} : \dot{\mathbf{X}}$, $\dot{X}_{II} = (X_I \mathbf{G} - \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{X}}$ et $\dot{X}_{III} = (X_{II} \mathbf{G} - X_I \mathbf{X} + \mathbf{X}^2) : \dot{\mathbf{X}}$. Voir la section 2.3.1 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

⁽⁷⁹⁾ On épargne au lecteur l'écriture du détail de tous ces remplacements.

⁽⁸⁰⁾ C'est-à-dire de l'évolution fictive choisie pour les conditions aux limites.

Objectivité du tenseur \mathbf{K} – En écrivant la formule de changement d’observateur du tenseur du quatrième ordre \mathbf{K} à partir de sa définition (universelle) donnée dans l’équation (2.30) [p. 45], on vérifie sans trop de difficultés que l’objectivité du tenseur de déformation \mathbf{X} , qui s’écrit $\tilde{\mathbf{X}} = (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) : \mathbf{X}$ et l’objectivité des fonctions d’état scalaires K_i impliquent l’objectivité du tenseur du quatrième ordre \mathbf{K} , c’est-à-dire⁽⁸¹⁾ :

$$\tilde{\mathbf{K}} = (\mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t \boxtimes \mathbf{Q}_t) : \mathbf{K} \quad (\boxtimes \text{ est le produit tensoriel de Kronecker})$$

Les dérivées particulières (fictives ou réelles) $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\mathbf{X}}$ sont des grandeurs tensorielles du second ordre *non objectives*⁽⁸²⁾, mais pour un observateur $\tilde{\mathcal{H}}$, on a toujours la relation :

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}} = (\partial_T K_0 \mathbf{G} + \partial_T K_1 \tilde{\mathbf{X}} + \partial_T K_2 \tilde{\mathbf{X}}^2) \dot{T} + \tilde{\mathbf{K}} : \dot{\tilde{\mathbf{X}}}$$

Cette relation montre que, dans un calcul, on peut sans inconvénients considérer des dérivées particulières non objectives de tenseurs objectifs tout en écrivant une relation *universelle* (c’est-à-dire la même relation pour tous les observateurs) entre ces dérivées particulières non objectives.

La « loi tangente » est une relation universelle entre grandeurs non objectives.

Pseudo-dérivées objectives – Certains d’auteurs pour qui les concepts d’objectivité et d’universalité sont confus, écrivent que « la loi tangente doit être objective » et affirment *à tort* que la loi tangente *universelle* (éq. (2.28) [p.45] ou bien éq. (2.29) [p. 45]) ne peut exister que si les termes $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\mathbf{X}}$ sont objectifs, ce qui les amène à inventer le pseudo-concept de « dérivée objective ». Ces auteurs nomment « dérivée objective » des groupements de termes apparaissant dans leurs calculs et ils proposent des lois tangentes inexactes⁽⁸³⁾ en remplaçant les termes $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\mathbf{X}}$ par des groupements de termes objectifs. Par exemple la dérivée particulière (non objective) exacte du tenseur de déformation \mathbf{B} s’écrit⁽⁸⁴⁾ :

$$\dot{\mathbf{B}} = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) = \underbrace{(\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D})}_{\mathbf{J}^B} + (\mathbf{W} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{W})$$

où $\mathbf{D} = \text{sym grad}_E \mathbf{v}$ est le tenseur des taux de déformation (objectif) et où $\mathbf{W} = \text{asym grad}_E \mathbf{v}$ est un tenseur non objectif.

Il est facile de vérifier que le groupement de termes $\mathbf{J}^B = \mathbf{D} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} = \dot{\mathbf{B}} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \mathbf{B}$ est objectif. Le groupement de termes \mathbf{J}^B (tenseur symétrique) est baptisé « dérivée objective » de Jaumann du tenseur \mathbf{B} . Le groupement de termes \mathbf{J}^B est bien objectif, mais il n’est en aucun cas la dérivée particulière d’un quelconque tenseur de déformation⁽⁸⁵⁾.

Par « analogie », ces auteurs nomment « dérivée objective » de Jaumann du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ la quantité tensorielle objective : $\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W} - \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Dans la littérature et dans certains logiciels de résolution numérique en mécanique des solides déformables, on trouve d’autres pseudo-« dérivées objectives » : les plus couramment rencontrées sont la pseudo-« dérivée objective » de Naghdi : $\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$ et celle de Truesdel : $\dot{\boldsymbol{\sigma}} - (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) + (\text{tr} \mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma}$. Ces quantités sont bien objectives, mais elles ne sont pas des dérivées particulières de tenseurs⁽⁸⁶⁾. De

⁽⁸¹⁾ Section 3.4 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁸²⁾ Seules les dérivées particulières des grandeurs objectives *scalaires* sont des grandeurs scalaires objectives. Voir la section 3.5.6 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁸³⁾ Il n’est même pas démontré que les pseudo-« dérivées objectives » sont des approximations de la dérivée particulière exacte !

⁽⁸⁴⁾ Voir l’annexe B.2.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁸⁵⁾ Aucun champ matériel non scalaire objectif n’a une dérivée particulière objective. Voir section 3.5.6 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁸⁶⁾ Pour tenter de les justifier, certains auteurs introduisent des « observateurs mobiles » particuliers *ad hoc* (« corotationnels » et autres) dont l’introduction n’a pas de justification physique et qui sont différents pour chaque particule et chaque mouvement. On rappelle à toutes fins utiles que le tenseur \mathbf{R} n’est pas une « rotation locale de la matière », de même que le tenseur \mathbf{W} n’est pas « une vitesse de rotation ou un taux de rotation local de la matière » car dans un mouvement de milieu continu et pour un observateur donné, chaque direction matérielle issue d’une particule a sa propre déviation et sa propre vitesse de rotation. Voir le cours *Cinématique des milieux continus* (sections 4.9 et 5.7), du même auteur [note 2 p. 3].

plus, ces pseudo-définitions ne sont curieusement employées qu'à propos du tenseur des contraintes et rarement à propos des tenseurs de déformation !

Ces manipulations de formules sont de peu d'intérêt. Suffit-il d'appeler « dérivée objective » une quantité objective pour qu'elle puisse être considérée comme une dérivée ? Pour quelle raison choisir une « dérivée objective » plutôt qu'une autre ⁽⁸⁷⁾ ? Toute publication ou tout logiciel faisant référence à une « dérivée objective » devraient être considérés comme suspects.

« **Hypoélasticité** » – Comme le lecteur peut le constater en (2.28) [p. 45] (ou sous la forme équivalente (2.29) [p. 45]), une loi tangente n'est pas semblable à la loi de comportement mécanique dont elle est issue et elle change à chaque instant intermédiaire.

Toutefois, on peut remarquer que *si la loi de comportement est une relation affine pour un certain choix de tenseur de déformation et pour un certain choix de l'énergie libre de Helmholtz*⁽⁸⁸⁾, choix qui conduiraient à un comportement mécanique affine de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \alpha(T) X_I \mathbf{G} + K_I(T) \mathbf{X} \quad (2.31)$$

alors la loi incrémentale se réduirait à :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\partial_T \alpha X_I \mathbf{G} + \partial_T K_I \mathbf{X}) \dot{T} + \alpha(T) \dot{X}_I \mathbf{G} + K_I(T) \dot{\mathbf{X}}$$

En évolution isotherme⁽⁸⁹⁾ ($\dot{T} = 0$) à la température T_0 , la loi tangente se réduirait à :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \alpha(T_0) \dot{X}_I \mathbf{G} + K_I(T_0) \dot{\mathbf{X}} \quad (2.32)$$

Bien que ressemblant à la loi de comportement pseudo-« linéaire » (2.31) [p. 47], la relation entre dérivées particulières (2.32) [p. 47] *ne peut pas être prise comme définition d'un comportement élastique isotrope isotherme d'un solide déformable*. En effet, si une loi de comportement isotherme élastique « linéaire » (pour un certain tenseur de déformation et une certaine expression particulière de l'énergie libre massique de Helmholtz), implique bien une relation linéaire de la même forme entre les dérivées particulières $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\mathbf{X}}$, la réciproque est fautive⁽⁹⁰⁾ : une relation de la forme (2.32) [p. 47] ne garantit aucunement la nullité de la dissipation intrinsèque voire même l'existence d'une énergie libre de Helmholtz⁽⁹¹⁾. C'est cette erreur qui a pu conduire, dans le passé, certains auteurs à proposer des pseudo-lois de comportement mécaniques isothermes dites « hypoélastiques » de la forme (2.32) [p.47] qui ne sont pas thermodynamiquement admissibles⁽⁹²⁾. On trouve encore la trace de pseudo-lois de comportements « hypoélastiques » dans beaucoup de logiciels de calcul spécialisés dans la mécanique des solides déformables. De plus, dans certaines publications ou dans certains logiciels, la dérivée particulière est parfois remplacée par une « dérivée objective » !

⁽⁸⁷⁾ Dans les logiciels qui utilisent des « dérivées objectives », le choix n'est le plus souvent « motivé » que pour des raisons calculatoires ! De plus, il faut souligner que dans ces logiciels, elles sont parfois furtivement utilisées sans que l'utilisateur en soit clairement averti.

⁽⁸⁸⁾ Elle ne serait plus affine pour d'autres choix. Relire *Remarques* p. 27.

⁽⁸⁹⁾ C'est le cas de toute évolution « quasi-statique ».

⁽⁹⁰⁾ Une relation dérivée n'est pas équivalente à la relation dont elle dérive.

⁽⁹¹⁾ Un cas similaire de non existence de l'énergie libre massique de Helmholtz a été présenté dans la construction de fluides à la fois compressibles et dilatables qui sont « définis » par une dérivée particulière de fonction d'état (p). Voir la section 6.6 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur, [note 3 p. 3]

⁽⁹²⁾ Soit parce qu'avec de telles « lois de comportement » il existe des évolutions à dissipation négative, soit parce que les fonctions d'état fondamentales énergie interne massique et entropie massique, dont l'existence est imposée par la thermodynamique, n'existent pas. À la connaissance de l'auteur, ce problème a été soulevé pour la première fois dans l'article *On the conditions of potentiality in finite elasticity and hypoelasticity*, Arkady I. Leonov, International journal of solids and structures, vol.37 (2000), 2565-2576. Cependant, si cet auteur a raison de poser la question, la fin de l'article est décevante car l'auteur de l'article se laisse abuser par les pseudo-« dérivées objectives » évoquées dans la remarque précédente *Pseudo-dérivées objectives* [p. 46].

Conclusion

Si on souhaite effectuer un calcul incrémental pour résoudre un problème d'élasticité décrit *avec un certain observateur*, il faut utiliser la loi tangente exacte donnée en (2.28) [p. 45] (ou bien sous la forme équivalente (2.29) [p. 45]), qui est une relation *universelle* entre des dérivées particulières non objectives $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\dot{\boldsymbol{X}}$, sans qu'il soit nécessaire d'inventer des « dérivées objectives »⁽⁹³⁾. Lors d'un calcul numérique, l'observateur et les lois de comportement du matériau sont choisis et fixés. Peu importe l'objectivité des termes qui interviennent dans les calculs. Ce n'est que lors de la construction de la loi de comportement mécanique d'un modèle que les questions d'*objectivité des grandeurs physiques* et d'*universalité des lois de comportement*⁽⁹⁴⁾ sont importantes.

La construction d'une loi de comportement mécanique doit se faire indépendamment des méthodes numériques qui seront utilisées lors d'une résolution numérique des équations du problème écrites pour un certain observateur.

On verra dans le chapitre 9 [p. 133] des illustrations de résolution numérique de problèmes « non linéaires » qui se passent fort bien de l'écriture explicite d'une « loi tangente » et de « dérivées objectives ».

2.7 En bref...

Les variables d'état indépendantes d'un milieu continu élastique isotrope sont la température absolue actuelle (imposée par la thermodynamique) et un tenseur de déformation objectif actuel définissant la déformation par rapport à une forme de référence considérée par définition comme non déformée. Le choix de la forme de référence est sous la responsabilité du scientifique ou de l'ingénieur qui fait l'étude. En revanche, le choix d'un tenseur de déformation objectif plutôt qu'un autre pour mesurer les déformations (dilatations, distorsions, etc.) est sans importance fondamentale.

Dans un exposé théorique minimal (mais complet) de l'élasticité sans restrictions cinématiques, l'utilisation du seul tenseur de déformation \boldsymbol{B} est suffisante et elle est la plus économique en calculs tensoriels⁽⁹⁵⁾. Une fois écrite la loi de comportement élastique isotrope avec le tenseur de déformation objectif \boldsymbol{B} , on a montré qu'il est possible (si l'on y tient absolument) d'en déduire son expression avec tout autre tenseur de déformation (objectif ou non). Un cours d'élasticité efficace et sans restrictions cinématiques peut se réduire à l'utilisation du seul tenseur de déformation objectif \boldsymbol{B} .

La nullité de la dissipation intrinsèque en tout point de l'espace des états pour toute évolution à partir de cet état, conduit à la forme générale des lois de comportement mécanique des milieux élastiques isotropes en fonction de l'énergie libre massique de Helmholtz.

⁽⁹³⁾ En fait, l'idée de « loi tangente » s'inspire de l'algorithme de *Newton-Raphson* issu de l'analyse numérique. Les numériciens montrent que la « loi tangente » des mécaniciens (appelée *matrice tangente* en analyse numérique) n'a même pas besoin d'être exactement tangente pour que l'algorithme converge : on peut se contenter d'une approximation (ce que ne sont pas les « dérivées objectives ») et il n'est même pas nécessaire de la mettre à jour à chaque temps fictif intermédiaire.

⁽⁹⁴⁾ L'universalité des lois de comportement est souvent appelée « principe d'indifférence matérielle ». On constate souvent dans les textes une confusion conceptuelle entre l'objectivité des grandeurs physiques et l'universalité des relations : il n'est pas rare de lire qu'« une loi de comportement doit être objective » !

⁽⁹⁵⁾ Notamment en cinématique des milieux continus.

Le comportement élastique isotrope d'un matériau est complètement défini lorsque l'on connaît l'expression de l'une des fonctions d'état énergie interne massique \bar{f}_e , entropie massique \bar{f}_s ou énergie libre massique de Helmholtz \bar{f}_ψ en fonction des variables d'état réduites (T, X_I, X_{II}, X_{III}) ou en fonction de tout autre ensemble équivalent de variables d'état réduites indépendantes, ayant des significations cinématiques bien identifiées. Les deux autres fonctions d'état s'en déduisent à l'aide de la définition de l'énergie libre de Helmholtz et de la relation de Helmholtz. On est ainsi assuré de l'admissibilité thermodynamique du modèle. C'est l'expression de l'énergie libre de Helmholtz en fonction des variables d'état (particulière à chaque matériau) qui détermine complètement la loi de comportement mécanique du matériau dans toute évolution⁽⁹⁶⁾.

La construction d'une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des variables d'état devrait se faire d'une manière physiquement sensée, en se basant sur des expériences (éventuellement idéalisées de manière physiquement raisonnables) permettant d'analyser la contribution de la variation de chaque variable d'état macroscopique indépendante à l'énergie libre massique de Helmholtz⁽⁹⁷⁾. On donne un exemple de construction physiquement motivée de l'énergie libre de Helmholtz dans le chapitre suivant.

Le comportement élastique isotrope des solides réels est généralement limité : des distorsions ou des dilatations linéiques excessives provoquent des réorganisations ou des ruptures de liaisons dans la structure microscopique, qui conduisent à un comportement inélastique. On a proposé des critères macroscopiques de limite élastique pour se protéger des phénomènes microscopiques qui conduiraient à l'inélasticité.

Remarque finale – Le lecteur familier des publications dans le domaine de la thermo-élasticité sans restrictions cinématiques (« grandes déformations ») aura pu constater que, pour établir la loi de comportement de tout matériau élastique isotrope, il n'a pas été nécessaire de parler d'obscures « forces thermodynamiques », ni de définir un « matériau standard généralisé ». Il a suffi d'imposer l'admissibilité thermodynamique (non violation des principes de la thermodynamique) et la nullité de la dissipation intrinsèque (élasticité). Il en sera de même en anisotropie.

⁽⁹⁶⁾ Et pas seulement dans un essai de traction isotherme !

⁽⁹⁷⁾ De l'avis de l'auteur, cette méthode dite « phénoménologique » paraît bien plus sûre que de se baser sur des analyses (parfois statistiques) de microstructures particulières (cristaux purs, polycristaux, chaînes polymériques simples ou réticulées), ou autres tentatives de « passages micro-macro » comme l'homogénéisation (périodique ou non), des éléments finis multi-échelle, etc. car chacun de ces développements fait appel à diverses hypothèses *ad hoc* qui semblent peu convaincantes à l'auteur.

Construction d'un modèle d'élasticité isotrope

3.1 Démarche générale

Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, la modélisation du comportement élastique isotrope d'un matériau est complète lorsque l'on connaît l'expression de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz ψ^m en fonction des variables d'état. Cette fonction d'état est particulière à chaque matériau et doit donc se baser sur un minimum d'expérimentations⁽¹⁾.

Ayant construit une fonction ψ^m physiquement motivée, on pourra alors utiliser la forme générale de la loi de comportement mécanique donnée avec un tenseur de déformation \mathbf{X} objectif⁽²⁾ :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0^X \mathbf{G} + K_1^X \mathbf{X} + K_2^X \mathbf{X}^2$$

où les K_i^X sont trois fonctions d'état connues quand on connaît l'expression de la fonction d'état ψ^m en fonction des variables d'état.

On rappelle que le choix des variables d'état réduites indépendantes⁽³⁾ $\{T, X_I, X_{II}, X_{III}\}$ pour représenter l'état actuel d'une particule n'est pas le seul choix possible⁽⁴⁾. Dans ce chapitre, on va utiliser cette liberté pour remplacer la sous-liste (X_I, X_{II}, X_{III}) par un autre ensemble d'invariants de déformation indépendants dont la signification cinématique est claire, afin de construire une expression physiquement motivée de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz ψ^m . L'espace des états d'un milieu élastique isotrope est au plus de dimension 4 : $(T, X_I, X_{II}, X_{III})$. Dans ce chapitre, on va construire un modèle de comportement élastique isotrope dont le nombre de variables d'état réduites est seulement 3 : la température T et seulement deux variables d'état cinématiques.

3.2 Choix des variables d'état du modèle

Dans un modèle d'élasticité isotrope [déf. 1.4 p. 14], les variables d'état *tensorielles* indépendantes sont la température T et un tenseur de déformation objectif \mathbf{X} . Pour mesurer les déformations, on choisit d'utiliser le tenseur de déformation objectif \mathbf{B} .

⁽¹⁾ Des choix arbitraires plus ou moins justifiés de la fonction f_ψ risquent de conduire à des comportements, certes thermodynamiquement admissibles, mais de comportement physiquement peu vraisemblable [section 2.4 p. 31].

⁽²⁾ On rappelle que l'utilisation de tenseurs de déformation non objectifs entraîne d'inutiles complications d'écriture et l'introduction artificielle de pseudo-« tenseurs des contraintes ».

⁽³⁾ Voir la définition dans la section 4.1.4 du cours *Équations générales de la mécanique des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

⁽⁴⁾ Voir l'annexe A.6 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

Rappels – Le choix d'un tenseur de déformation particulier parmi les tenseurs de déformation objectifs n'est pas essentiel : on a vu en section 2.3 [p. 23] que l'on peut écrire la loi de comportement mécanique d'un milieu continu élastique isotrope avec tout tenseur de déformation, objectif ou non. Quand on change de tenseur de déformation, le changement de l'expression de la loi de comportement élastique isotrope n'est qu'une question d'algèbre.

On rappelle aussi que, si on utilise un tenseur de déformation *non objectif* \mathbf{X} , la loi de comportement s'écrit sous la forme $\boldsymbol{\sigma} = K_0^X \mathbf{G} + K_1^X \mathbf{R} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{R}^\top + K_2^X \mathbf{R} \cdot \mathbf{X}^2 \cdot \mathbf{R}^\top$ où $\mathbf{R}(P, t)$ est un champ de tenseurs orthogonaux non objectif⁽⁵⁾ particulier à chaque observateur observant le même solide déformable.

Les variables d'état réduites d'un modèle élastique isotrope sont la température T et des invariants cinématiques scalaires associés au tenseur de déformation \mathbf{B} . Dans la section 2.2.4 [p. 21], les variables d'état scalaires utilisées étaient les trois invariants fondamentaux B_I , B_{II} et B_{III} du tenseur de déformation \mathbf{B} . L'interprétation cinématique du déterminant B_{III} est claire : $B_{III} = K_v^2$ où $K_v > 0$ est la dilatation volumique. En revanche, la signification cinématique des deux autres invariants n'est pas claire. On se propose de choisir un autre ensemble de variables d'état réduites cinématiquement significatif.

On a montré en cinématique que toute déformation peut être vue comme la composition *unique et commutative* d'une déformation sphérique et d'une déformation isovolume⁽⁶⁾. Quand on utilise le tenseur de déformation \mathbf{B} , cette composition est multiplicative et s'écrit :

$$\mathbf{B} = \underbrace{\left(K_v^{\frac{2}{3}} \mathbf{G}\right)}_{\mathbf{B}^{sph}} \cdot \underbrace{\left(K_v^{-\frac{2}{3}} \mathbf{B}\right)}_{\mathbf{B}^{isov}} \quad (3.1)$$

La partie déformation sphérique \mathbf{B}^{sph} est un tenseur sphérique dont le seul invariant est :

$$\det \mathbf{B} = B_{III} = K_v^2 \quad \text{où } K_v \text{ est la dilatation volumique}$$

La partie déformation isovolume \mathbf{B}^{isov} est de déterminant unité. Elle est donc *a priori* représentée par deux invariants.

- **Hypothèse 3.1** – Dans le modèle de comportement élastique construit dans ce chapitre, on suppose que la déformation isovolume en une particule est suffisamment caractérisée par un seul invariant : la *distorsion stérique maximale* de la déformation, dont la définition est⁽⁷⁾ :

$$\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{\frac{3}{2}}}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} (\geq 1) \quad (3.2)$$

où les λ_i sont les dilatations linéiques principales de la déformation (valeurs propres de $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$).

Rappels de cinématique – La distorsion stérique de trois directions matérielles *initialement orthogonales* en une particule augmente quand la norme du produit mixte *actuel*⁽⁸⁾ de ces directions matérielles diminue. Par définition, elle est toujours supérieure ou égale à 1.

Pour une déformation donnée en une particule P , il existe une infinité de triplets directions matérielles initialement orthogonales issues de P dont la distorsion stérique atteint la distorsion stérique maximale

⁽⁵⁾ Voir sec. 2.3.5 [p. 27]. Les auteurs qui utilisent des tenseurs de déformation non objectifs introduisent des pseudo-« tenseurs des contraintes » actuels ($\overline{\boldsymbol{\sigma}}$ ou \mathcal{S}), sans véritable interprétation physique, pour masquer la présence du tenseur orthogonal \mathbf{R} .

⁽⁶⁾ Voir la section 4.10.3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3]

⁽⁷⁾ Voir la section 4.7.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁸⁾ La norme du produit mixte actuel reflète leur angle solide actuel.

en P ⁽⁹⁾. Si la distorsion stérique maximale δ_{max}^s d'une déformation vaut 1 (pas de distorsion stérique pour tous les triplets directions matérielles initialement orthogonales issues de P), alors la déformation en cette particule est purement sphérique.

En faisant l'hypothèse 3.1 [p. 52], on *décide* que toutes les déformations isovolumes ayant la même distorsion stérique maximale sont suffisamment représentées par la seule variable d'état δ_{max}^s . Autrement dit, dans ce modèle de comportement élastique isotrope, *on ne veut pas* distinguer deux états qui auraient la même température et la même déformation sphérique, mais des déformations isovolumes différentes dont seule la distorsion stérique maximale δ_{max}^s serait identique.

Justification cinématique de l'hypothèse – On montre en annexe C.3 [p. 159] que toute déformation *isovolume*, de dilatations linéiques principales λ'_1, λ'_2 et $\frac{1}{\lambda'_1 \lambda'_2}$, peut se voir comme la composition commutative de deux glissements plans isovolumes dans deux des trois plans principaux de la déformation isovolume. *Cette décomposition n'est pas unique*. Par exemple, l'un des glissements est complètement caractérisé par λ'_1 , l'autre est complètement caractérisé par λ'_2 [voir éq. (C.6) p. 159].

Or, la distorsion stérique maximale δ_{max}^s d'une déformation \mathbf{B} est la même que celle de sa partie isovolume \mathbf{B}^{isov} car la partie déformation sphérique \mathbf{B}^{sph} n'entraîne aucune distorsion stérique. La distorsion stérique maximale d'une déformation s'écrit donc aussi :

$$\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{\frac{3}{2}}}{B_{III}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{9} \left(\lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 + \frac{1}{\lambda_1'^2 \lambda_2'^2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad [\text{éq. (C.7) p. 160}]$$

où λ'_1, λ'_2 et $\frac{1}{\lambda'_1 \lambda'_2}$ sont les dilatations linéiques principales *de la déformation isovolume* \mathbf{B}^{isov} .

La variable d'état cinématique δ_{max}^s traduit l'« écrasement » de l'infinité de trièdres atteignant la distorsion maximale, sans préciser quel triplet de directions matérielles initialement orthogonales (en P , il y en a une infinité) ni la manière dont ils sont « écrasés » (c'est-à-dire par quelle composition de glissements) pour atteindre la distorsion stérique maximale δ_{max}^s .

Choisir δ_{max}^s comme *seul* invariant pour caractériser la partie isovolume de la déformation \mathbf{B}^{isov} revient donc à dire que peu importe l'orientation et la manière dont sont « écrasés » l'infinité de trièdres initialement orthonormés qui atteignent la distorsion maximale. Tous ont la même norme de leur produit mixte actuel ($1/\delta_{max}^s < 1$) mais leur directions matérielles actuelles et les angles actuels entre ces directions matérielles sont différents.

L'hypothèse 3.1 [p. 52] est en cohérence avec le fait que la mécanique des milieux continus ignore nécessairement les orientations réelles des microstructures par rapport aux directions matérielles macroscopiques en une particule P : parmi l'infinité de trièdres initialement orthonormés en P dont la distorsion stérique est δ_{max}^s , il est probable que certains d'entre eux soient composés de glissements qui coïncident ou presque avec des directions critiques des microstructures en cette particule.

Remarquer enfin que la distorsion stérique maximale étant déterminée par les seuls invariants fondamentaux B_I et B_{III} [éq. (3.2) p. 52], l'hypothèse 3.1 [p. 52] revient donc à ignorer l'influence de l'invariant fondamental B_{II} dans les fonctions d'état.

- **Notation 3.2** – Dans la suite de ce chapitre, la distorsion stérique maximale δ_{max}^s d'un tenseur de déformation sera notée plus simplement δ .

La liste des variables d'état réduites indépendantes choisies pour ce modèle de comportement élastique isotrope est donc $\{T, K_v, \delta\}$ et les fonctions d'état sont des fonctions de ces seules trois

⁽⁹⁾ Voir l'annexe A.13 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

variables d'état. Les relations entre les deux systèmes d'invariants sont :

$$K_v = B_{\text{III}}^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \delta = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_{\text{I}}^{\frac{3}{2}}}{B_{\text{III}}^{\frac{1}{2}}} \quad \Leftrightarrow \quad B_{\text{III}} = K_v^2 \quad ; \quad B_{\text{I}} = 3 K_v^{\frac{2}{3}} \delta^{\frac{2}{3}}$$

Comme on peut le constater, le choix des variables d'état réduites cinématiques (K_v, δ) revient à ignorer l'influence du second invariant fondamental B_{II} . De plus, puisque les formules inverses existent, on a bien la bijection $\{B_{\text{I}}, B_{\text{III}}\} \leftrightarrow \{K_v, \delta\}$. Le changement de variables d'état est donc valide⁽¹⁰⁾.

L'énergie libre massique de Helmholtz de ce modèle élastique s'écrit donc :

$$\psi^m = f_{\psi}^B(T, B_{\text{I}}, B_{\text{II}}, B_{\text{III}}) = f_{\psi}(T, K_v, \delta)$$

3.2.1 Nouvelle expression de la loi de comportement mécanique

La forme générale de la loi de comportement mécanique d'un solide élastique isotrope en utilisant le tenseur de déformation \mathbf{B} avec les quatre variables d'état indépendantes $(T, B_{\text{I}}, B_{\text{II}}, B_{\text{III}})$ a été donnée en (2.9) [p. 21]. On la rappelle ici :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{\text{III}}}} \left(B_{\text{III}} \partial_{B_{\text{III}}} f_{\psi}^B \mathbf{G} + (\partial_{B_{\text{I}}} f_{\psi}^B + B_{\text{I}} \partial_{B_{\text{II}}} f_{\psi}^B) \mathbf{B} - \partial_{B_{\text{II}}} f_{\psi}^B \mathbf{B}^2 \right) = K_0 \mathbf{G} + K_1 \mathbf{B} + K_2 \mathbf{B}^2 \quad (3.3)$$

Le changement de variables d'état $(T, B_{\text{I}}, B_{\text{II}}, B_{\text{III}}) \leftrightarrow (T, K_v, \delta)$ implique les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_{B_{\text{I}}} f_{\psi}^B &= \partial_T f_{\psi} \partial_{B_{\text{I}}} T + \partial_{K_v} f_{\psi} \partial_{B_{\text{I}}} K_v + \partial_{\delta} f_{\psi} \partial_{B_{\text{I}}} \delta &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \delta^{\frac{1}{3}} K_v^{-\frac{2}{3}} \partial_{\delta} f_{\psi} \\ \partial_{B_{\text{II}}} f_{\psi}^B &= \partial_T f_{\psi} \partial_{B_{\text{II}}} T + \partial_{K_v} f_{\psi} \partial_{B_{\text{II}}} K_v + \partial_{\delta} f_{\psi} \partial_{B_{\text{II}}} \delta &= 0 + 0 + 0 \\ \partial_{B_{\text{III}}} f_{\psi}^B &= \partial_T f_{\psi} \partial_{B_{\text{III}}} T + \partial_{K_v} f_{\psi} \partial_{B_{\text{III}}} K_v + \partial_{\delta} f_{\psi} \partial_{B_{\text{III}}} \delta &= 0 + \frac{1}{2} K_v^{-1} \partial_{K_v} f_{\psi} - \frac{1}{2} K_v^{-2} \delta \partial_{\delta} f_{\psi} \end{aligned}$$

En remplaçant les dérivées partielles $\partial_{\bullet} f_{\psi}^B$ dans la loi de comportement (3.3) [p. 54], il vient :

$$K_0 = \rho_0 (\partial_{K_v} f_{\psi} - \delta K_v^{-1} \partial_{\delta} f_{\psi}) \quad ; \quad K_1 = \rho_0 \delta^{\frac{1}{3}} K_v^{-\frac{5}{3}} \partial_{\delta} f_{\psi} \quad ; \quad K_2 = 0$$

Remarque – Le choix de caractériser la déformation par les deux seules grandeurs scalaires objectives et cinématiquement significatives K_v (dilatation volumique en P) et δ (distorsion stérique maximale en P), à la place des trois invariants $(B_{\text{I}}, B_{\text{II}}, B_{\text{III}})$ conduit à $K_2 = 0$ car dans l'énergie libre massique de Helmholtz de ce modèle, on ignore l'influence de l'invariant B_{II} , ce qui implique $\partial_{B_{\text{II}}} f_{\psi}^B = 0$ dans l'équation (3.3).

La loi de comportement mécanique d'un milieu élastique isotrope *sous l'hypothèse 3.1* [p. 52] avec les variables d'état réduites $\{T, K_v, \delta\}$ est donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 (\partial_{K_v} f_{\psi} - \delta K_v^{-1} \partial_{\delta} f_{\psi}) \mathbf{G} + \rho_0 \delta^{\frac{1}{3}} K_v^{-\frac{5}{3}} \partial_{\delta} f_{\psi} \mathbf{B} \quad \text{où } \psi^m = f_{\psi}(T, K_v, \delta) \quad (3.4)$$

On va montrer dans la section suivante que la détermination de la fonction d'état $f_{\psi}(T, K_v, \delta)$ peut se ramener à la mesure d'une quantité de chaleur, d'une contrainte moyenne et d'une contrainte tangentielle dans trois expériences élémentaires qui vont faire varier chaque variable d'état, les deux autres étant constantes.

⁽¹⁰⁾ Voir la fin de l'annexe B.7 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour la mécanique des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

3.3 Forme générale des fonctions d'état du modèle élastique isotrope $\{T, K_v, \delta\}$

3.3.1 Forme générale de l'énergie libre massique de Helmholtz

Comme toutes les fonctions d'état de ce modèle, l'énergie libre massique de Helmholtz est :

$$\psi^m = f_\psi(T, K_v, \delta)$$

L'état de référence est $E_0 = (T_0, 1, 1)$, c'est-à-dire à la température initiale uniforme T_0 et non déformé ($K_v = 1$ et $\delta = 1$). Pour définir la valeur de l'énergie libre massique de Helmholtz ψ^m (fonction d'état) en tout point (T, K_v, δ) de l'espace des états, on définit un chemin dans l'espace des états qui passe de l'état de référence $E_0 = (T_0, 1, 1)$ à un état quelconque $E = (T, K_v, \delta)$ de la manière suivante :

$$E_0 = (T_0, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(3)}} E = (T, K_v, \delta) \quad (3.5)$$

Remarques importantes – On rappelle que l'énergie libre massique de Helmholtz ψ^m est une *fonction d'état*, c'est-à-dire que sa valeur actuelle ne dépend que de l'état actuel et donc uniquement des valeurs actuelles des variables d'état réduites. La variation de l'énergie libre massique de Helmholtz $\psi^m(T, K_v, \delta) - \psi^m(T_0, 1, 1)$ entre l'état de référence $E_0 = (T_0, 1, 1)$ et un état actuel quelconque $E = (T, K_v, \delta)$ ne dépend donc pas du chemin suivi pour passer de l'état E_0 à l'état E .

Le chemin *choisi* décrit dans l'équation (3.5) [p. 55] n'a pour but que de parcourir dans l'espace des états (de dimension 3) un chemin partant de E_0 et aboutissant à un état quelconque E constitué de trois évolutions élémentaires successives qui ne font varier qu'une seule variable d'état à la fois. En réalisant expérimentalement (ou en les idéalisant de manière physiquement sensée) ces trois évolutions élémentaires, on construira une expression de ψ^m en fonction des variables d'état qui sera nécessairement physiquement sensée.

Par ailleurs, le lecteur pourra remarquer que le chemin décrit dans l'équation (3.5) [p. 55] ne contient pas d'expérience de traction simple car dans cet essai, les variables d'état K_v et δ varient simultanément. Les résultats d'un essai de traction simple seront donc prédits par le modèle. Ils seront donc une bonne vérification de la qualité des expériences élémentaires du chemin (3.5) [p. 55] (ou de leur idéalisation), ainsi que qu'une bonne validation de l'hypothèse 3.1 [p. 52].

On peut toujours choisir l'état E_0 comme origine pour l'énergie libre massique de Helmholtz ψ^m car la loi comportement mécanique ne fait intervenir que des dérivées de ψ^m . On pose donc :

$$\psi^m(E_0) = \psi^m(T_0, 1, 1) = \psi_0^m = 0$$

Dans chacune des évolutions élémentaires $\mathcal{C}^{(1)}$, $\mathcal{C}^{(2)}$ et $\mathcal{C}^{(3)}$, une seule variable d'état varie :

1. L'évolution $\mathcal{C}^{(1)}$ est une variation de température de T_0 à T à déformation bloquée ($K_v = 1$, $\dot{K}_v = 0$, $\delta = 1$ et $\dot{\delta} = 0$). La seule variable d'état qui évolue est la température T . La variation de l'énergie libre massique de Helmholtz le long de ce chemin n'est donc fonction que de la température actuelle T :

$$\psi_1^m - 0 = g^{(1)}(T) \quad \text{avec la condition : } g^{(1)}(T_0) = 0 \quad (3.6)$$

2. L'évolution $\mathcal{C}^{(2)}$ est une déformation sphérique à la température constante T ($\dot{T} = 0$, $\delta = 1$ et $\dot{\delta} = 0$). La seule variable d'état qui évolue est la dilatation volumique K_v . La variation de l'énergie libre massique de Helmholtz le long de ce chemin est donc *a priori* fonction de la température actuelle constante T et de la dilatation volumique actuelle K_v :

$$\psi_2^m - \psi_1^m = g^{(2)}(T, K_v) \quad \text{avec la condition : } \forall T, g^{(2)}(T, 1) = 0$$

3. Le chemin $\mathcal{C}^{(3)}$ est une déformation isovolume à la température constante T ($\dot{T} = 0$ et $\dot{K}_v = 0$). La seule variable d'état qui évolue est la distorsion stérique maximale δ . La variation de l'énergie libre massique de Helmholtz le long de ce chemin est donc *a priori* fonction de la température actuelle constante T , de la dilatation volumique actuelle constante K_v et de la distorsion stérique maximale actuelle δ :

$$\psi_t^m - \psi_2^m = g^{(3)}(T, K_v, \delta) \quad \text{avec la condition : } \forall T \forall K_v, g^{(3)}(T, K_v, 1) = 0$$

L'énergie libre massique de Helmholtz d'un état quelconque peut donc s'écrire sous la forme ⁽¹¹⁾ :

$$\psi^m = f_\psi(T, K_v, \delta) = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T, K_v) + g^{(3)}(T, K_v, \delta) \quad (3.7)$$

avec les trois conditions :

$$g^{(1)}(T_0) = 0 \quad ; \quad \forall T, g^{(2)}(T, 1) = 0 \quad ; \quad \forall T \forall K_v, g^{(3)}(T, K_v, 1) = 0 \quad (3.8)$$

3.3.2 Forme générale de l'entropie massique

L'entropie massique est déterminée par la relation de Helmholtz [éq. (2.4) p. 20] :

$$f_s = -\partial_T f_\psi = -\partial_T g^{(1)}(T) - \partial_T g^{(2)}(T, K_v) - \partial_T g^{(3)}(T, K_v, \delta) \quad (3.9)$$

3.3.3 Forme générale de l'énergie interne massique

On déduit de la définition de l'énergie libre massique de Helmholtz, celle de l'énergie interne massique :

$$\begin{aligned} f_e &= f_\psi + T f_s \\ &= g^{(1)} + g^{(2)} + g^{(3)} - T (\partial_T g^{(1)}(T) + \partial_T g^{(2)}(T, K_v) + \partial_T g^{(3)}(T, K_v, \delta)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Les trois fonctions inconnues $g^{(1)}(T)$, $g^{(2)}(T, K_v)$ et $g^{(3)}(T, K_v, \delta)$ déterminent complètement les fonctions d'état du milieu continu élastique isotrope.

3.3.4 Loi de comportement mécanique

La loi de comportement mécanique est [éq. (3.4) p. 54] :

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\rho_0 (\partial_{K_v} f_\psi - \delta K_v^{-1} \partial_\delta f_\psi)}_{K_0} \mathbf{G} + \underbrace{\rho_0 \delta^{\frac{1}{3}} K_v^{-\frac{5}{3}} \partial_\delta f_\psi}_{K_1} \mathbf{B} \quad (3.11)$$

que l'on peut aussi exprimer en fonction des 3 fonctions $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ et $g^{(3)}$ [éq. (3.7) p. 56].

⁽¹¹⁾ En cherchant directement une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz plutôt qu'une expression de l'énergie interne massique, les formules sont d'écriture considérablement plus simple que dans les premières versions de ce cours qui utilisaient le couple de fonctions d'état (e^m, s^m) au lieu du couple (ψ^m, s^m) ; les résultats finaux sont évidemment identiques.

3.4 Analyse des évolutions élémentaires

En analysant les trois évolutions élémentaires $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$ et $\mathcal{E}^{(3)}$ définies précédemment, on va montrer que l'identification des trois fonctions inconnues $g^{(1)}(T)$, $g^{(2)}(T, K_v)$ et $g^{(3)}(T, K_v, \delta)$ se ramène à des mesures (ou des idéalizations physiquement sensées) dans un petit nombre d'expériences sur le matériau. On suppose que les trois évolutions $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$ et $\mathcal{E}^{(3)}$ sont réalisées dans les conditions expérimentales idéales suivantes :

1. les effets de la pesanteur sont négligeables ;
2. les mesures sont relevées à vitesse nulle (pas de variation d'énergie cinétique dans l'expression du premier principe de la thermodynamique) ;
3. l'état (T, K_v, δ) des éprouvettes est uniforme dans l'éprouvette :
 - les mesures ne doivent être relevées que quand le champ de températures s'est uniformisé ;
 - on connaît des dispositifs d'essais ⁽¹²⁾ où la déformation (K_v, δ) est sensiblement uniforme dans les éprouvettes (quand les effets de la pesanteur sont négligeables).

Dans la suite de ce chapitre, on ne détaille pas les calculs algébriques ni la résolution des équations différentielles. On se contente de donner le raisonnement général, les points clés et les résultats importants. On trouvera en annexe F [p. 173 et suivantes], une feuille de calcul commentée exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA[®] dans sa version 5.2, qui détaille les calculs algébriques et la résolution des équations différentielles ⁽¹³⁾. Les nombreux commentaires qui s'y trouvent devraient permettre au lecteur de refaire les calculs dans un autre logiciel de calcul formel ou dans une autre version du logiciel, voire de les effectuer à la main s'il est plus courageux que l'auteur.

3.4.1 Analyse de l'évolution $\mathcal{E}^{(1)}$

Dans l'évolution $\mathcal{E}^{(1)}$, il n'y a pas de déformation : $\mathbf{B} = \mathbf{G}$, $K_v = 1$, $\dot{K}_v = 0$, $\delta = 1$ et $\dot{\delta} = 0$. La loi de comportement (3.11) [p. 56] montre que dans ce cas le tenseur des contraintes est sphérique :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = (K_0 + K_1) \mathbf{G}$$

Le tenseur des contraintes est donc complètement caractérisé par sa *contrainte moyenne* ⁽¹⁴⁾.

Remarque – Dans le cas d'une contrainte sphérique uniforme, la condition aux limites en contraintes à la frontière d'une éprouvette de forme quelconque, de normale extérieure actuelle \mathbf{n}_t s'écrit :

$$\mathbf{f}^s = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n}_t = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n}_t = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \mathbf{n}_t \quad (\text{force surfacique normale à la frontière})$$

On constate que la contrainte moyenne uniforme dans l'éprouvette est égale à la contrainte normale $\mathbf{f}^s = \mathbf{f}^s \cdot \mathbf{n}$ uniformément exercée sur la frontière. La contrainte moyenne uniforme est donc aussi la contrainte normale uniforme exercée à la frontière par l'enceinte de confinement qui maintient la dilatation volumique à $K_v = 1$. Quand l'éprouvette a tendance à se dilater (en général pour $T > T_0$), la contrainte $\sigma_{exp}^{(1)}$ est négative (une pression) ; en revanche, l'expérience est plus difficile à réaliser quand l'éprouvette a tendance à se contracter (en général pour $T < T_0$) : pour maintenir $K_v = 1$ il faut

⁽¹²⁾ Ils seront décrits dans la section 3.6 [p.62].

⁽¹³⁾ Les calculs ne sont pas très compliqués mais seulement fastidieux à écrire. Dans le logiciel MATHEMATICA[®], ils sont effectués exactement comme on aurait procédé à la main.

⁽¹⁴⁾ C'est-à-dire le tiers de la trace du tenseur des contraintes. L'opposé de la contrainte moyenne $-\frac{\sigma_1}{3}$ est parfois appelé « pression ».

un collage de l'éprouvette aux parois de l'enceinte (indéformable) de confinement qui sert à bloquer la déformation. L'enceinte de confinement doit être indéformable et indilatable mais thermostatable. On verra plus loin que cette expérience idéale peut être remplacée par une combinaison d'autres expériences plus aisées à réaliser.

Conservation de l'énergie dans l'évolution $\mathcal{E}^{(1)}$

On mesure la quantité massique de chaleur $Q_{exp}^{(1)}(T)$ (en $J.kg^{-1}$) reçue ⁽¹⁵⁾ par l'éprouvette pour passer de T_0 à T . Dans l'évolution $\mathcal{E}^{(1)}$, le travail reçu est nul car la déformation est bloquée. La conservation de l'énergie entre les états E_0 et E_1 s'écrit donc :

$$\underbrace{(e_1^{cin} - e_0^{cin})}_0 + (e_1^m - \underbrace{e_0^m}_0) = \underbrace{W^{ext}}_0 + Q_{exp}^{(1)}(T)$$

ce qui conduit à l'équation différentielle en $g^{(1)}$:

$$g^{(1)}(T) - T(\partial_T g^{(1)}(T) + \partial_T g^{(2)}(T, 1) + \partial_T g^{(3)}(T, 1, 1)) = Q_{exp}^{(1)}(T) \text{ [éq. (3.10) p. 56, éq. (3.8) p. 56]}$$

dont la solution est :

$$g^{(1)}(T) = -T \int_{T_0}^T \frac{Q_{exp}^{(1)}(T)}{T^2} dT - T \left(\int_{T_0}^T \frac{\partial_T g^{(2)}(T, 1)}{T} dT + \int_{T_0}^T \frac{\partial_T g^{(3)}(T, 1, 1)}{T} dT \right)$$

Les fonctions $g^{(2)}$ et $g^{(3)}$ seront déterminées par l'analyse des chemins suivants.

3.4.2 Analyse de l'évolution $\mathcal{E}^{(2)}$

Dans l'évolution $\mathcal{E}^{(2)}$, la déformation est purement sphérique ($\mathbf{B} = K_v^{\frac{2}{3}} \mathbf{G}$, $\delta = 1$, $\dot{\delta} = 0$) et à la température T constante ($\dot{T} = 0$).

Tenseur des contraintes dans l'évolution $\mathcal{E}^{(2)}$

Dans cette évolution, la loi de comportement [éq. (3.11) p. 56] montre que le tenseur des contraintes est sphérique :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = (K_0 + K_v^{\frac{2}{3}} K_1) \mathbf{G} = \rho_0 (\partial_{K_v} g^{(2)}(T, K_v) + \partial_{K_v} g^{(3)}(T, K_v, 1)) \mathbf{G}$$

Dans cette expérience, on mesure la contrainte moyenne $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$:

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) = \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}}{3} = \rho_0 (\partial_{K_v} g^{(2)}(T, K_v) + \partial_{K_v} g^{(3)}(T, K_v, 1))$$

Remarque – Comme dans le chemin $\mathcal{E}^{(1)}$, la condition aux limites aux frontières d'une éprouvette implique que la contrainte moyenne $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$, uniforme dans l'éprouvette, est égale à la contrainte normale uniforme exercée sur la frontière. Pour faire l'expérience il suffit donc d'exercer une contrainte normale uniforme $\sigma_{exp}^{(2)}$ sur la frontière et observer la dilatation volumique K_v à température constante. Lorsque $\sigma_{exp}^{(2)} < 0$ on peut l'assimiler à l'action sur la frontière d'un fluide non pesant sous pression. Exercer des tractions uniformes notables à la frontière d'un solide déformable est expérimentalement plus difficile ⁽¹⁶⁾. En revanche, il sera facile de l'idéaliser raisonnablement.

⁽¹⁵⁾ Éventuellement négative si $T < T_0$.

⁽¹⁶⁾ Les thermodynamiciens, qui n'envisagent le plus souvent que des fluides, appellent cette expérience une mesure de la « compressibilité » isotherme. On devrait l'appeler *déformabilité* sphérique isotherme, sans privilégier la compression sphérique ou l'extension sphérique.

La résolution de cette équation différentielle en $g^{(2)}$ conduit à :

$$g^{(2)}(T, K_v) = \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) dK_v - \int_1^{K_v} \partial_{K_v} g^{(3)}(T, K_v, 1) dK_v$$

La fonction $g^{(3)}$ sera déterminée dans la section suivante.

3.4.3 Analyse de l'évolution $\mathcal{C}^{(3)}$

L'évolution $\mathcal{C}^{(3)}$ est une déformation isovolume isotherme. L'ensemble des déformations isovolumes est un ensemble à deux paramètres (il faut en principe deux invariants pour les caractériser). En vertu de l'hypothèse 3.1 [p. 52] posée pour ce modèle, toutes les déformations isovolumes qui ont la même distorsion stérique maximale δ sont considérées comme équivalentes. Parmi toutes les déformations isovolumes possibles, on en choisit une particulière, facile à réaliser expérimentalement.

Choix d'un mouvement isovolume

Pour réaliser une déformation isovolume avec une température initiale T et une dilatation volumique initiale K_v , on choisit de prendre un champ de déplacement de la forme suivante :

$$\mathbf{u}_L^{(3)} = K_v^{\frac{1}{3}} (\mathbf{x}_0 + \gamma x_{02} \mathbf{e}_1)$$

où $\mathbf{x}_0 = x_{01} \mathbf{e}_1 + x_{02} \mathbf{e}_2 + x_{03} \mathbf{e}_3$ est la position de référence d'une particule et où K_v est la dilatation volumique préalable issue du chemin $\mathcal{C}^{(2)}$ et constante dans le chemin $\mathcal{C}^{(3)}$. Un tel mouvement est appelé *glissement isovolume* de direction \mathbf{e}_1 dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. L'étude détaillée de ce mouvement déformant est faite en annexe C [p. 157].

Les composantes du tenseur de déformation $\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top$ dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ pour ce mouvement isovolume (de dilatation volumique initiale K_v) sont :

$$[\mathbf{B}^\bullet]_{\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}} = K_v^{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On vérifie bien que dans ce mouvement, lorsque le paramètre expérimental γ varie, la dilatation volumique K_v ne varie pas car le déterminant de la matrice $[\mathbf{B}^\bullet]$ vaut K_v^2 quel que soit γ . Dans ce mouvement, le tenseur de déformation est uniforme dans l'éprouvette car il est indépendant des positions initiales \mathbf{x}_0 . La distorsion stérique maximale est donc uniforme et elle vaut :

$$\delta = \frac{\sqrt{3}}{9} (3 + \gamma^2)^{\frac{3}{2}} \geq 1 \quad [\text{éq. (3.2) p. 52}] \quad \Rightarrow \quad \gamma = \pm \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} \quad (3.12)$$

On peut toujours choisir la direction \mathbf{e}_1 telle que $\gamma \geq 0$. On prend donc :

$$\gamma = \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}$$

Dans ce mouvement isovolume, les composantes du tenseur de déformation \mathbf{B} dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ en fonction des variables d'état sont donc :

$$[\mathbf{B}^\bullet] = K_v^{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 3\delta^{\frac{2}{3}} - 2 & \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} & 0 \\ \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenseur des contraintes dans l'évolution $\mathcal{E}^{(3)}$

La loi de comportement [éq. (3.11) p. 56] montre que la contrainte tangentielle $\sigma^{(3)1}_2$ dans cette évolution est :

$$\sigma^{(3)1}_2 = \frac{\rho_0 \sqrt{3} \delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} \partial_\delta g^{(3)}}{K_v}$$

Dans cette expérience, on mesure la contrainte tangentielle $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) = \sigma^{(3)1}_2$ en fonction de γ (et donc de δ). La résolution de cette équation différentielle en $g^{(3)}$ conduit à :

$$g^{(3)}(T, K_v, \delta) = \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} d\delta$$

3.4.4 Synthèse

L'identification complète d'un modèle de comportement élastique isotrope dont les variables d'état sont $\{T, K_v, \delta\}$ [hyp. 3.1 p. 52] peut donc se ramener à trois mesures expérimentales :

1. $Q_{exp}^{(1)}(T)$: mesure de la quantité de chaleur massique (J.kg^{-1}) échangée dans l'évolution $\mathcal{E}^{(1)}$ (variation de température sans déformation). Elle doit satisfaire la condition :

$$Q_{exp}^{(1)}(T_0) = 0$$

Remarque – $C_v(T) = \partial_T Q_{exp}^{(1)}$ est la *capacité thermique* à déformation bloquée ($\mathbf{B} = \mathbf{G}$) à la température T .

2. $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$: mesure de la contrainte moyenne dans l'évolution $\mathcal{E}^{(2)}$ (déformation sphérique isotherme). Elle doit satisfaire la condition :

$$\forall T, \quad \sigma_{exp}^{(2)}(T, 1) = \sigma_{moy}^{(1)}(T)$$

3. $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$: mesure de la contrainte tangentielle dans l'évolution $\mathcal{E}^{(3)}$. Elle doit satisfaire la condition :

$$\forall T \forall K_v, \quad \tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, 1) = 0$$

Les trois fonctions $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ et $g^{(3)}$ qui déterminent les fonctions d'état s'expriment en fonction de ces trois mesures :

$$g^{(1)}(T) = -T \int_{T_0}^T \frac{Q_{exp}^{(1)}(T)}{T^2} dT \quad \left(= -T \int_{T_0}^T \frac{\partial_T Q_{exp}^{(1)}(T)}{T} dT + Q_{exp}^{(1)}(T) \quad (\text{intégration par parties}) \right)$$

$$g^{(2)}(T, K_v) = \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) dK_v$$

$$g^{(3)}(T, K_v, \delta) = \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} d\delta$$

On en déduit l'expression des fonctions d'état en fonction des trois mesures expérimentales $Q_{exp}^{(1)}$,

$\sigma_{exp}^{(2)}$ et $\tau_{exp}^{(3)}$ avec les formules données en (3.7), (3.9) et (3.10) [p. 56]. On obtient :

$$\psi^m = -T \int_{T_0}^T \frac{\partial_T Q_{exp}^{(1)}}{T^2} dT + \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \sigma_{exp}^{(2)} dK_v + \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\tau_{exp}^{(3)}}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} d\delta \quad (3.13)$$

$$s^m = \int_{T_0}^T \frac{\partial_T Q_{exp}^{(1)}}{T} dT - \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \partial_T \sigma_{exp}^{(2)} dK_v - \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\partial_T \tau_{exp}^{(3)}}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} d\delta \quad (3.14)$$

$$e^m = Q_{exp}^{(1)} + \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} (\sigma_{exp}^{(2)} - T \partial_T \sigma_{exp}^{(2)}) dK_v + \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\tau_{exp}^{(3)} - T \partial_T \tau_{exp}^{(3)}}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} d\delta \quad (3.15)$$

$$K_0 = \sigma_{exp}^{(2)} + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\tau_{exp}^{(3)} + K_v \partial_{K_v} \tau_{exp}^{(3)}}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} d\delta - \frac{\delta^{\frac{2}{3}} \tau_{exp}^{(3)}}{\sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad (3.16)$$

$$K_1 = \frac{\tau_{exp}^{(3)}}{\sqrt{3} K_v^{\frac{2}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad (3.17)$$

Le modèle est donc complètement identifié par ces trois expériences.

Suggestions de changements de variable d'état – L'observation des formules (3.13) à (3.17) suggère un changement de variable d'état biunivoque $\gamma \leftrightarrow \delta$ défini par :

$$\gamma = \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} \in [0; +\infty[\quad \Leftrightarrow \quad \delta = \frac{(\gamma^2 + 3)^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{3}} \in [1; +\infty[$$

Ce changement de variable d'état simplifie un peu l'écriture des formules. Dans ce cas, les variables d'état du modèle élastique isotrope seraient $\{T, K_v, \gamma\}$ où la nouvelle variable d'état γ est une fonction monotone croissante de la distorsion stérique maximale δ . L'interprétation cinématique de cette nouvelle variable d'état serait : « l'intensité γ d'un mouvement de glissement isovolume dont la distorsion stérique maximale est δ ».

À titre d'exercice, le lecteur est invité à récrire les formules du modèle avec les variables d'état $\{T, K_v, \gamma\}$. Il obtiendra des formules un peu plus simples. Bien que l'interprétation cinématique de la variable d'état γ soit moins immédiate que celle de δ , l'ensemble de variables d'état cinématiques $\{K_v, \gamma\}$ pour caractériser une déformation isotrope sera utilisé dans les exemples de construction de modèles inélastiques dans le prochain cours *Comportements inélastiques* en raison de l'allègement des formules.

Il est aussi possible de récrire ces résultats en fonction des deux invariants fondamentaux B_I et B_{III} en remplaçant la dilatation volumique actuelle K_v et la distorsion stérique maximale δ par leur valeur en fonction de B_I et B_{III} . Ce faisant, on retrouvera l'un des termes présents dans l'énergie libre massique de Helmholtz du modèle (isotherme) de Mooney-Rivlin [sec. 2.4.3 p. 32].

Tous ces changements de variables d'état ne sont que des réécritures algébriques plus ou moins lourdes du même modèle, complètement identifié par les résultats expérimentaux (ou leur idéalisation) $Q_{exp}^{(1)}$, $\sigma_{exp}^{(2)}$ et $\tau_{exp}^{(3)}$ des trois expériences du chemin décrit en éq. (3.5) [p. 55] utilisé pour passer de l'état de référence à un état actuel quelconque.

3.5 Hypothèse simplificatrice supplémentaire facultative

Avec les résultats précédents, la contrainte moyenne dans un état quelconque (T, K_v, δ) est :

$$\frac{\text{tr } \boldsymbol{\sigma}}{3} = \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_1^\delta \frac{\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) + K_v \partial_{K_v} \tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} d\delta \quad (3.18)$$

On constate que, dans ce modèle d'élasticité isotrope à trois variables d'état $\{T, K_v, \delta\}$, la contrainte moyenne dans un état quelconque est *a priori* une fonction de la contrainte tangentielle $\tau_{exp}^{(3)}$ mesurée durant le chemin $\mathcal{C}^{(3)}$. Autrement dit, même si on fait l'expérience $\mathcal{C}^{(3)}$ à partir de l'état initial $\sigma_{exp}^{(2)}(T_0, 1) = 0$ (pas de dilatation volumique préalable), le tenseur des contraintes engendré n'est pas un déviateur. Il est possible de construire un modèle de comportement qui maintient constante la contrainte moyenne le long du chemin $\mathcal{C}^{(3)}$:

- **Hypothèse 3.3 – Simplification facultative.** Dans une déformation isovolume, la contrainte moyenne ne varie pas.

La condition $\partial_\delta \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = 0$ conduit à l'équation différentielle :

$$\tau_{exp}^{(3)} + K_v \partial_{K_v} \tau_{exp}^{(3)} = 0 \quad \text{dont la solution est :} \quad \tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) = \frac{\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{K_v} \quad (3.19)$$

Ainsi, si l'on constate expérimentalement que la fonction $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$ est de la forme (3.19), la contribution de la déformation isovolume $\mathcal{C}^{(3)}$ au tenseur des contraintes est purement déviatorique car la contrainte moyenne ne varie pas dans cete expérience. Sous l'hypothèse facultative 3.3, les coefficients de la loi de comportement (3.16) et (3.17) [p. 61] deviennent :

$$K_0 = \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) - \frac{\delta^{\frac{2}{3}} \tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{\sqrt{3} K_v \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad ; \quad K_1 = \frac{\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{\sqrt{3} K_v^{\frac{5}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad (3.20)$$

Loi tangente de ce modèle – En cas de besoin, on peut écrire la loi tangente du modèle simplifié (le détail du calcul est en annexe B [p. 155]) :

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\partial_T K_0 \mathbf{G} + \partial_T K_2 \mathbf{B}) \dot{T} + \mathbf{K} : \dot{\mathbf{B}}$$

où \mathbf{K} est le tenseur d'ordre 4 suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \left(\frac{K_v}{2} \partial_{K_v} K_0 - \frac{\delta}{2} \partial_\delta K_0 \right) \mathbf{G} \otimes \mathbf{B}^{-1} + \left(\frac{K_v}{2} \partial_{K_v} K_1 - \frac{\delta}{2} \partial_\delta K_1 \right) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}^{-1} + \\ & \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2 K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_\delta K_0 \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2 K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_\delta K_1 \mathbf{B} \otimes \mathbf{G} + K_1 \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} \end{aligned}$$

Les dérivées partielles par rapport aux variables d'état des fonctions d'état K_0 et K_1 [éq. (3.20) p. 62] ne peuvent être déterminées complètement que quand les mesures $\sigma_{exp}^{(2)}$ et $\tau_{exp}^{(3)}$ (ou $\tau_{exp1}^{(3)}$) ont été effectuées ou idéalisées [section 3.7 p. 66].

3.6 Expériences réelles

Les trois mesures $Q_{exp}^{(1)}$, $\sigma_{exp}^{(2)}$ et $\tau_{exp}^{(3)}$ théoriquement faites dans les conditions idéales qui ont été précisées en début de section 3.4 [p. 57] peuvent être raisonnablement approchées par des expériences réelles ou bien elles peuvent être idéalisées par des expressions mathématiques physiquement raisonnables. Cette dernière option est envisagée en section 3.7 [p. 66].

3.6.1 Mouvement isovolume isotherme sans dilatation sphérique préalable (évolution $\mathcal{C}^{(4)}$)

Dans cette expérience, on détermine la fonction $\tau_{exp}^{(3)}(T, 1, \delta)$, qui sera notée $\tau^{(4)}(T, \delta)$. Cette expérience se réalise aisément avec le montage de la figure 3.1. Avec un tel montage, la cinématique est très proche de celle posée en section 3.4.3 [p. 59] (aux effets de bord près sur les bords

libres⁽¹⁷⁾) et on peut donc considérer le tenseur de déformation isovolume comme pratiquement uniforme dans l'éprouvette.

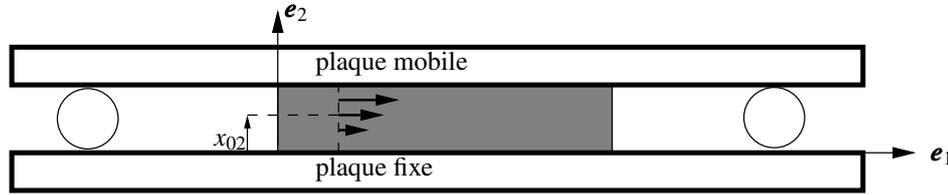


FIGURE 3.1 – Exemple de montage pour une déformation isovolume. Les rouleaux symbolisent un dispositif quelconque garantissant la distance constante entre les plaques indéformables

On mesure aisément pour différentes températures uniformes⁽¹⁸⁾ la force horizontale $F^{(4)}(T, \gamma)$ exercée sur la plaque mobile et le déplacement horizontal $d^{(4)}$ de la plaque mobile. On en déduit la contrainte tangentielle :

$$\tau^{(4)} = \frac{F^{(4)}}{S} \quad \text{où } S \text{ est l'aire de contact entre l'éprouvette et les plaques.}$$

Par ailleurs, la cinématique du mouvement conduit à :

$$\gamma = \frac{d^{(4)}}{h} \quad \text{où } h \text{ est la distance constante entre les plaques.}$$

Pour être physiquement sensée, pour une température T uniforme fixée, la courbe expérimentale $\tau^{(4)}(T, \gamma) = \tau^{(4)}(T, \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1})$ devrait être croissante en γ .

En toute rigueur, il faudrait faire cet essai pour différentes dilatations volumiques initiales. Toutefois, si on admet l'hypothèse facultative 3.3 [p. 62], la fonction expérimentale $\tau^{(4)} = \tau_{exp}^{(3)}(T, 1, \delta)$ n'est autre que la fonction $\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)$ définie dans l'équation (3.19) [p. 62]. La fonction $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$ est alors complètement déterminée :

$$\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) = \frac{\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{K_v}$$

L'hypothèse facultative 3.3 [p. 62] simplifie donc beaucoup l'identification du modèle, *mais elle doit être expérimentalement validée*.

Remarques sur le vocabulaire – Il n'aura pas échappé au lecteur averti que l'auteur a jusqu'ici évité d'employer le mot « cisaillement ». En effet, dans la littérature spécialisée ce mot est employé avec deux significations différentes :

- tantôt ce mot a un sens cinématique : il s'agit d'un mouvement dont le tenseur de déformation est de la forme donnée en section 3.4.3 [p. 59]. Dans ce sens cinématique, ce mouvement isovolume est plus souvent appelé *glissement*.
- tantôt ce mot a un sens sthénique : le tenseur des contraintes est un déviateur ou bien a une partie déviatorique non nulle.

⁽¹⁷⁾ Ces effets de bord sont mis en évidence plus loin dans une illustration numérique [section 9.6 p. 145].

⁽¹⁸⁾ Pour relever chaque point de mesure, il faut donc attendre l'uniformisation des températures.

Ces deux notions ne sont pas équivalentes : comme on l'a vu précédemment [éq. (3.18) p. 61], un mouvement de glissement isovolume n'engendre pas nécessairement un tenseur des contraintes de trace nulle (déviatorique), sauf si on admet l'hypothèse simplificatrice facultative 3.3 [p. 62].

Cette confusion courante provient d'habitudes prises en pseudo-élasticité de Hooke [section 4.2 p. 73] car, si on admet la « loi » de Hooke, un mouvement isovolume engendre toujours un tenseur des contraintes de trace nulle ($\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon} = 0 \Leftrightarrow \text{tr}\boldsymbol{\sigma} = 0$). Si l'hypothèse simplificatrice facultative 3.3 [p. 62] n'est pas expérimentalement justifiée, la contribution au tenseur des contraintes dans un mouvement isovolume n'est pas de trace nulle.

3.6.2 Déformation sphérique isotherme (évolution $\mathcal{E}^{(2)}$)

Il est expérimentalement difficile d'exercer une traction sphérique uniforme sur la frontière d'une éprouvette. En revanche, il est plus facile d'exercer une compression sphérique par l'intermédiaire d'un fluide sous pression. C'est pourquoi cette mesure est souvent appelée mesure de compressibilité isotherme, que l'on peut éventuellement extrapoler de manière physiquement sensée pour les tractions sphériques. Cette évolution étant isotherme, les mesures ne doivent être relevées que quand la température est uniformisée. Il faut tracer les courbes de la contrainte moyenne $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ à différentes températures T . La mesure de la dilatation volumique K_v peut se faire par des moyens optiques ou mécaniques.

3.6.3 Dilatation thermique libre (évolution $\mathcal{E}^{(5)}$)

Une mesure directe de la quantité de chaleur massique $Q_{exp}^{(1)}$ dans l'évolution $\mathcal{E}^{(1)}$ (variation de température sans déformation) est difficile à réaliser expérimentalement : il faut disposer d'une enceinte de confinement indéformable et indilatable mais thermostatable. On peut remplacer cette expérience par une expérience de dilatation thermique à *contrainte nulle*, que l'on appelle aussi *dilatation libre* plus aisée à réaliser, suivie d'une déformation sphérique isotherme qui ramène la dilatation volumique K_v à la valeur 1.

Dans une dilatation libre (évolution $\mathcal{E}^{(5)}$), le tenseur des contraintes est nul et reste nul. On mesure la quantité de chaleur massique $Q_{exp}^{(5)}(T)$ ainsi que la dilatation volumique $K_{vexp}^{(5)}(T)$. La condition de contrainte nulle conduit à l'équation :

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_{vexp}^{(5)}(T)) = 0, \quad \forall T$$

qui est une condition que doivent satisfaire les deux courbes expérimentales $\sigma_{exp}^{(2)}$ et $K_{vexp}^{(5)}$. En écrivant la conservation de l'énergie pour cette évolution entre l'état initial $(T_0, 1, 1)$ et l'état librement dilaté $(T, K_{vexp}^{(5)}, 1)$, il vient :

$$Q_{exp}^{(1)}(T) = Q_{exp}^{(5)}(T) - \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_{vexp}^{(5)}} \left(\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) - T \partial_T \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) \right) dK_v \quad (3.21)$$

Si la fonction $\sigma_{exp}^{(2)}$ a préalablement été identifiée par une expérience de déformation sphérique isotherme, la relation (3.21) [p. 64] montre que l'on peut remplacer la mesure expérimentalement difficile de $Q_{exp}^{(1)}(T)$ par la mesure beaucoup plus aisée de $Q_{exp}^{(5)}(T)$ (chaleur massique [$\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}$] à contrainte nulle).

⁽¹⁹⁾ On peut aussi bien mesurer une dilatation linéique K_l dans une direction. Le milieu étant isotrope, on a $K_v = K_l^3$.

Relation entre C_p et C_v – En dérivant par rapport à T la relation (3.21) [p. 64], on établit une relation entre la capacité thermique à volume initial bloqué $C_v(T)$ et la capacité thermique à contrainte nulle $C_p(T)$, que l'on pourrait appeler « relation de Mayer »⁽²⁰⁾ pour les solides élastiques isotropes dont les variables d'état sont (T, K_v, δ) .

3.6.4 Essai de traction simple isotherme (évolution $\mathcal{E}^{(6)}$)

Cet essai est simple à effectuer mais compliqué à exploiter pour l'identification du matériau car dans un essai de traction simple, les deux variables d'état K_v et δ évoluent simultanément. Comme dans toute expérience isotherme, il faut attendre l'uniformisation des températures avant de relever les mesures.

Remarque – Dans les essais de traction courants, on ne prend généralement pas cette précaution (les mesures sont relevées pendant le mouvement, sans arrêt du mouvement avant la mesure). Le léger refroidissement de l'éprouvette qui se produit pendant une traction est ignoré, ce qui aboutit à une légère surestimation de la raideur isotherme du matériau. Il est pourtant facile de constater expérimentalement ce phénomène en arrêtant le mouvement de traction : on verra diminuer légèrement l'effort de traction indiqué par le capteur de force de la machine pendant le petit réchauffement de l'éprouvette. Ce phénomène est effectivement prédit dans les illustrations numériques exposées dans la section 9.3.5 [p. 138].

Dans un essai de traction simple dans la direction \mathbf{e}_1 , le tenseur des contraintes dans la zone utile de l'éprouvette est considéré comme uniaxial et uniforme :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(6)} = \sigma_{exp}^{(6)} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$$

Le tenseur de déformation \mathbf{B} est lui aussi uniforme dans la zone utile, *mais il n'est pas uniaxial*. Ses composantes dans une base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont de la forme :

$$[B^{(6)} \bullet \bullet] = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

où λ_1 est la dilatation linéique principale dans la direction de traction \mathbf{e}_1 et λ_2 est la dilatation linéique principale transversale. L'aire actuelle de la section droite est :

$$S_t = \lambda_2^2 S_0 \quad \text{où } S_0 \text{ est l'aire initiale de la section droite.}$$

Dans un essai de traction simple isotherme, on relève les deux courbes $F_{exp}^{(6)}(\lambda_1)$ et $\lambda_2(\lambda_1)$. Les dilatations linéiques longitudinale λ_1 et transversale λ_2 sont mesurées par des extensomètres mécaniques, optiques ou électriques (jauges de déformation⁽²¹⁾). Le tenseur des contraintes étant uniaxial et uniforme, on en déduit que la contrainte normale actuelle dans la direction \mathbf{e}_1 est :

$$\sigma_{exp}^{(6)} = \frac{F^{(6)}}{S_t} = \frac{F^{(6)}}{\lambda_2^2 S_0} \quad (3.23)$$

La dilatation volumique et la distorsion stérique maximales dans cet essai sont donc :

$$K_v = \lambda_1 \lambda_2^2 \quad ; \quad \delta = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \quad (3.24)$$

⁽²⁰⁾ Les thermodynamiciens n'emploient la dénomination *relation de Mayer* que pour les gaz parfaits ($C_p - C_v = r$).

⁽²¹⁾ Et non « jauges de contraintes » comme on le lit souvent.

On peut alors vérifier si la loi de comportement du modèle, complètement identifiée par les trois expériences idéales précédentes, est bien prédictive pour un essai de traction. Les deux relations qui doivent être vérifiées sont d'expression compliquée ⁽²²⁾, mais *sous l'hypothèse simplificatrice facultative 3.3* [p. 62], elles s'écrivent un peu plus simplement ⁽²³⁾ :

$$\sigma_{exp}^{(6)} = \sigma_{exp}^{(2)}(T, \lambda_1 \lambda_2^2) + \frac{2(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \tau_{exp}^{(3)}\left(T, \frac{\sqrt{3}(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}}{9\lambda_1 \lambda_2^2}\right)}{3(\lambda_1 \lambda_2^2)^{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2}{(\lambda_1 \lambda_2^2)^{\frac{2}{3}}} - 3}} \quad (\text{contrainte de traction})$$

$$0 = \sigma_{exp}^{(2)}(T, \lambda_1 \lambda_2^2) - \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \tau_{exp}^{(3)}\left(T, \frac{\sqrt{3}(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}}{9\lambda_1 \lambda_2^2}\right)}{3(\lambda_1 \lambda_2^2)^{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2}{(\lambda_1 \lambda_2^2)^{\frac{2}{3}}} - 3}} \quad (\text{contraintes transversales nulles})$$

Toujours sous l'hypothèse simplificatrice facultative 3.3 [p. 62], ces deux relations sont équivalentes aux deux égalités suivantes :

$$\sigma_{exp}^{(6)} = 3 \sigma_{exp}^{(2)}(T, \lambda_1 \lambda_2^2) = \frac{(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \tau_{exp}^{(3)}\left(T, \frac{\sqrt{3}(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2)^{\frac{3}{2}}}{9\lambda_1 \lambda_2^2}\right)}{(\lambda_1 \lambda_2^2)^{\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2}{(\lambda_1 \lambda_2^2)^{\frac{2}{3}}} - 3}} \quad (3.25)$$

où les fonctions $\sigma_{exp}^{(2)}$ et $\tau_{exp}^{(3)}$ sont déterminées par les trois expériences idéales précédentes.

La simplicité expérimentale de l'essai de traction en fait un essai courant, mais son exploitation pour l'identification du matériau est complexe car, contrairement aux essais \mathcal{C}_1 , \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 évoqués précédemment, les deux variables d'état K_v (dilatation volumique) et δ (distorsion stérique maximale) varient simultanément [éq. (3.24) p. 65]. En revanche, un essai de traction constitue une bonne validation du modèle qui a été identifié par les autres expériences en vérifiant que les deux relations (3.25) [p. 66] sont bien vérifiées.

3.7 Quelques idéalizations possibles

Pour économiser des expériences, on peut choisir *a priori* des expressions mathématiques vraisemblables pour les fonctions expérimentales $Q_{exp}^{(1)}(T)$, $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ et $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$. La construction du modèle suivie dans ce chapitre montre qu'il est possible de les choisir arbitrairement sans compromettre le caractère élastique isotrope du modèle. Elles doivent néanmoins satisfaire les conditions évidentes suivantes :

$$Q_{exp}^{(1)}(T_0) = 0 \quad ; \quad \forall T, \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_{vexp}^{(5)}(T)) = 0 \quad ; \quad \forall T \forall K_v, \tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, 1) = 0$$

et ressembler à des courbes expérimentales (les idéalizations mathématiques devraient être suggérées par quelques expériences).

⁽²²⁾ Voir la fin de la feuille de calcul en annexe F [p. 173 et suivantes]; *Out* [117] et *Out* [118] [p. 16].

⁽²³⁾ Voir la fin de la feuille de calcul en annexe F [p. 173 et suivantes]; *Out* [119] et *Out* [121] [p. 16].

Une idéalisation de $\tau_{exp}^{(3)}$

Par exemple, on peut imposer *arbitrairement* pour la fonction $\tau_{exp}^{(3)}$ une proportionnalité en γ :

$$\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) = \frac{2\mu(T)\gamma}{K_v} = \frac{2\mu(T)\sqrt{3}\sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}{K_v} \quad \text{avec} \quad \mu(T) = \mu_0 e^{b(1-\frac{T}{T_0})}$$

Remarques – Ce choix est de la forme donnée dans l'équation (3.19) [p. 62]. Il satisfait donc à l'hypothèse simplificatrice facultative 3.3 [p. 62] : la contribution d'un mouvement isovolume au tenseur des contraintes est de trace nulle (« déviatorique »).

Il faudrait sans doute idéaliser la fonction $\tau_{exp}^{(3)}$ avec une équation monotone moins simpliste pour refléter les trois « phases » d'élasticité empiriquement constatées pour certains élastomères.

Dans ce cas la fonction $g^{(3)}$ se réduit à (noter qu'elle est indépendante de K_v) :

$$g^{(3)} = \frac{4\mu_0 e^{b(1-\frac{T}{T_0})}}{\rho_0} (\sqrt{2} + (\delta^{\frac{1}{3}} - 2) \sqrt{\delta^{\frac{1}{3}} + 1})$$

Une idéalisation de $\sigma_{exp}^{(2)}$

On peut aussi poser *arbitrairement* pour la fonction $\sigma_{exp}^{(2)}$ (contrainte moyenne en déformation sphérique isotherme) la forme suivante :

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) = \sigma_{exp}^{(1)}(T) + \xi(T) \ln K_v \quad \text{avec} \quad \xi(T) = \xi_0 e^{a(1-\frac{T}{T_0})}$$

où $\sigma_{exp}^{(1)}(T)$ est la contrainte moyenne (sphérique) issue du chemin $\mathcal{C}^{(1)}$.

Remarque – Noter le comportement raisonnable de cette idéalisation de la contrainte moyenne aux deux limites $K_v \rightarrow 0$ et $K_v \rightarrow \infty$.

Dans ce cas la fonction $g^{(2)}$ se réduit à :

$$g^{(2)}[T, K_v] = \frac{\xi_0 e^{a(1-\frac{T}{T_0})}}{\rho_0} (1 - K_v + K_v \ln K_v)$$

Une idéalisation de $Q_{exp}^{(1)}$

Si on remplace le chemin $\mathcal{C}^{(1)}$ par une dilatation libre $\mathcal{C}^{(5)}$ suivie d'une compression sphérique isotherme pour ramener K_v à la valeur 1 (on mesure donc $Q_{exp}^{(5)}(T)$ et $K_{v\,exp}^{(5)}(T)$), il vient :

$$\begin{aligned} \sigma_{exp}^{(1)} &= -\xi_0 e^{a(1-\frac{T}{T_0})} \ln K_{v\,exp}^{(5)} \quad (\text{compression isotherme}) \\ Q_{exp}^{(1)}(T) &= Q_{exp}^{(5)}(T) - \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_{v\,exp}^{(5)}} (\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) - T \partial_T \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)) dK_v \quad [\text{éq. (3.21) p. 64}] \end{aligned}$$

La conservation de l'énergie dans une dilatation libre s'écrit alors :

$$\begin{aligned} Q_{exp}^{(5)}(T) &= Q_{exp}^{(1)}(T) + \frac{\xi_0}{\rho_0} e^{a(1-\frac{T}{T_0})} \left((1 + a \frac{T}{T_0}) (1 - K_{v\,exp}^{(5)}(T) + \ln K_{v\,exp}^{(5)}(T)) + \right. \\ &\quad \left. T (K_{v\,exp}^{(5)}(T) - 1) \frac{\partial_T K_{v\,exp}^{(5)}(T)}{K_{v\,exp}^{(5)}(T)} \right) \quad (3.26) \end{aligned}$$

On peut choisir *arbitrairement* pour $K_v^{(5)}(T)$:

$$K_v^{(5)}(T) = 1 + \beta (T - T_0) \quad (\beta : \text{coef. de dilatation volumique à contrainte nulle})$$

Attention – Ne pas confondre un coefficient de dilatation thermique *volumique* avec un coefficient de dilatation thermique *linéique*. Dans certaines bases de données de constantes physiques, la mention « coefficient de dilatation thermique » est ambiguë. D'autre part, il est toujours sous-entendu que cette mesure est une *dilatation libre*, c'est-à-dire à *contrainte nulle*.

Enfin, on peut choisir *arbitrairement* une fonction simple de $Q_{exp}^{(5)}(T)$ ou de $Q_{exp}^{(1)}(T)$ (l'autre se trouvant déterminée par l'équation de la conservation de l'énergie (3.26) [p. 67]).

Les expressions des fonctions d'état et de la loi de comportement mécanique avec ces idéalizations sont données dans la dernière section de la feuille de calcul en annexe F [p. 173, *Out* [135] p. 18 et suivantes].

Il est important de noter que les idéalizations de courbes expérimentales présentées dans cette section ne sont que des exemples arbitraires qui n'ont aucune justification théorique. Elles ne sont que physiquement vraisemblables et peuvent être remplacées par d'autres.

3.8 En bref...

Le modèle d'élasticité isotrope construit dans ce chapitre découle du choix des trois variables d'état indépendantes suivantes :

1. T : température absolue actuelle,
2. K_v : dilatation volumique actuelle,
3. δ : distorsion stérique maximale actuelle.

La dimension de l'espace des états de ce modèle élastique isotrope est donc 3 au lieu de 4 en raison de l'hypothèse 3.1 [p. 52] qui considère comme équivalentes toutes les déformations de même distorsion stérique maximale.

Ce modèle peut être complètement identifié par un petit nombre d'expériences idéales :

1. une variation de température à déformation nulle dont on mesure la chaleur massique (J.kg^{-1}) échangée $Q_{exp}^{(1)}(T)$ (ou bien à contrainte nulle et on mesure la chaleur massique $Q_{exp}^{(5)}(T)$ et la dilatation thermique);
2. une déformation sphérique isotherme dont on mesure la contrainte moyenne $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$;
3. un glissement isotherme dont on mesure la contrainte tangentielle $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$ (ou bien seulement $\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)$ si on fait l'hypothèse supplémentaire 3.3 [p. 62]).

Chacune de ces expériences idéales sert à faire varier indépendamment chaque variable d'état et à analyser sa contribution à l'énergie libre massique de Helmholtz.

Le résultat important de ce chapitre est la définition complète du modèle (T, K_v, δ) qui a été rassemblé en section 3.4.4 [p. 60].

Pour modéliser le comportement élastique isotrope d'un matériau particulier, il appartient aux expérimentateurs de préciser les expressions des trois fonctions $Q_{exp}^{(1)}(T)$, $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ et $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$ par des mesures ou d'idéaliser ces trois fonctions avec des expressions mathématiques physiquement sensées.

Remarque – Il est possible de simplifier un peu le modèle en supposant en plus qu’une déformation isovolume n’engendre que des contraintes « déviatoriques » (elle ne fait pas varier la contrainte moyenne) [hyp. 3.3 p. 62], sous réserve que cette hypothèse soit expérimentalement validée.

Les trois expériences idéales peuvent être approchées par des expériences réelles ou des combinaisons d’expériences réelles.

Si l’on idéalise les mesures expérimentales avec des expressions mathématiques physiquement vraisemblables, on est assuré de construire un modèle de comportement élastique isotrope physiquement vraisemblable, thermodynamiquement admissible et facile à identifier car il se réduit à l’identification de quelques coefficients.

Un essai de traction ne peut servir qu’à valider les prédictions du modèle.

Comportement « non linéaire » des élastomères – Les trois phases de traction qui apparaissent dans les essais de traction sur certains élastomères⁽²⁴⁾ seront engendrées pas des non linéarités constatées dans les expériences de déformation sphérique (fonction $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ à T constant dans le chemin $\mathcal{C}^{(2)}$) et de glissement plan (fonction $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$ à T et K_v constants dans le chemin $\mathcal{C}^{(3)}$). Leur éventuelle idéalisation doit donc s’inspirer d’expériences réelles.

La construction du modèle (T, K_v, δ) proposé dans ce chapitre est purement phénoménologique, c’est-à-dire physiquement motivée par une analyse empirique de la contribution de chaque variable d’état à l’énergie libre massique de Helmholtz.

Puisqu’une vision continue de la matière implique que la description et l’orientation des microstructures sont nécessairement inconnues, la construction de ce modèle n’a pas cherché à se baser sur des « passages micro/macro » d’origine moléculaire, statistiques ou numériques⁽²⁵⁾.

Cette méthode garantit la construction de lois de comportement macroscopiques non seulement *thermodynamiquement admissibles* (les fonctions d’état existent et la dissipation est non négative dans toute évolution) mais aussi *physiquement vraisemblables* (non exotiques) car la contribution de chaque variable d’état à l’énergie libre massique de Helmholtz est modélisée empiriquement.

⁽²⁴⁾ C’est ce que tente de modéliser dans un essai de traction le modèle de Mooney-Rivlin [sec. 2.4.3 p. 32] en raisonnant sur la structure des chaînes polymériques.

⁽²⁵⁾ Relire la note 97 [p. 49].

Pseudo élasticité de Hooke

De nos jours (2023), il semble qu'il n'est pas encore possible de passer sous silence la traditionnelle et célèbre « loi » de Hooke en « petites perturbations » dans un cours d'élasticité. En dépit de ses graves défauts qui vont être mis en évidence dans ce chapitre, cette « loi » de comportement mécanique est toujours présentée dans la quasi-totalité des ouvrages traitant d'élasticité. On y consacre donc ce chapitre, bien que la loi de comportement élastique isotrope présentée dans les chapitres précédents, n'étant soumise à aucune restriction ni sur les déformations ni sur les mouvements envisageables, soit évidemment toujours valable ⁽¹⁾.

La pseudo élasticité de Hooke traditionnellement présentée dans tous les cours élémentaires est aussi souvent appelée « élasticité linéaire ». Elle utilise comme mesure de déformation le tenseur des « petites perturbations », habituellement noté $\boldsymbol{\epsilon}$, et souvent *improprement appelé* tenseur des « petites déformations » ⁽²⁾ dont l'expression en fonction du champ des déplacements \boldsymbol{u} est $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{symgrad}_L \boldsymbol{u}$. De plus, la loi de comportement mécanique utilisée (« loi » de Hooke) est proposée *a priori* comme une relation affine impossible entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ *objectif* et un tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\epsilon}$ *non objectif*. Enfin, cette relation ne faisant aucune référence à l'orientation du tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ par rapport à d'éventuelles directions matérielles d'anisotropie, cette pseudo-loi de comportement mécanique n'est *à priori* envisageable que pour des solides déformables *isotropes*.

Dans ce chapitre, on va d'une part rappeler les importantes restrictions cinématiques ⁽³⁾ implicitement supposées (et souvent cachées) quand on utilise le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ comme mesure des petites déformations et d'autre part on va montrer que la « loi » de Hooke n'est pas thermodynamiquement admissible, ce qui justifie le titre de ce chapitre.

⁽¹⁾ À vrai dire, la lecture de ce chapitre n'est pas indispensable aux lecteurs complètement novices en élasticité. Ils éviteront ainsi de se laisser polluer par des discours obsolètes et des idées fausses. La pseudo-élasticité de Hooke devrait disparaître des usages à plus ou moins long terme. Ces lecteurs peuvent passer directement au chapitre suivant [ch. 5 p. 85] sans nuire à la compréhension de la suite.

⁽²⁾ Pour les lecteurs déjà initiés, il est facile de vérifier, en analysant le champ de déplacement \boldsymbol{u} d'un mouvement de rotation de solide (donc sans déformation) conduit à un tenseur $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{symgrad}_L \boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$. **Il existe donc des mouvements sans déformation pour lesquels $\boldsymbol{\epsilon} \neq \mathbf{0}$! Le tenseur $\boldsymbol{\epsilon}$ est donc une mauvaise mesure des petites déformations.** Cet exemple est détaillé dans la diapositive 62 de la vidéo du cours *Cinématique pour la MMC #4/4* [20 :30]. La vidéo et son diaporama sont accessibles à partir des liens de la page <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/cinematique.html>.

⁽³⁾ Ces restrictions cinématiques sur les mouvements envisageables ont été exposées en détail dans la section 4.12.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

4.1 Hypothèse des « petites perturbations » (rappels de cinématique)

Le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ est traditionnellement « défini » par :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad}_L \mathbf{u} \quad \text{où } \mathbf{u} \text{ est le champ des déplacements.}$$

Quand on veut tenter de justifier cette « définition », on procède le plus souvent de la manière suivante : en analysant le champ des déplacements \mathbf{u} d'un solide déformable, on peut définir *correctement et sans approximation* le tenseur de déformation \mathbf{E} (non objectif), appelé *tenseur de Green-Lagrange droit*, dont une définition en fonction du champ de déplacements est ⁽⁴⁾ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{G}) = \frac{1}{2} (\mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} + \mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}) \quad (4.1)$$

où $\mathbf{u}(P, t) = \mathbf{x}_t(P) - \mathbf{x}_0(P)$ est le champ de déplacement des particules pour un certain observateur.

L'hypothèse simplificatrice qui est posée pour aboutir à l'expression du tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ est la suivante :

- **Hypothèse 4.1 – « Petite perturbation ».** On suppose que $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ est un *infinitement petit du premier ordre*, ce que l'on notera dans la suite $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$.

La signification cinématique de cette hypothèse simplificatrice mérite d'être soulignée : on suppose que le champ de déplacement est *quasi uniforme*.

$$\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \text{le champ } \mathbf{u} \text{ est quasi uniforme dans l'espace}$$

Autrement dit, pour que cette hypothèse soit acceptable, *le mouvement du solide déformable vu par l'observateur utilisé doit être une quasi translation*.

Sous cette hypothèse restrictive [hyp. 4.1 p. 72] sur les mouvements envisageables, le terme $\mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ de l'équation (4.1) [p. 72] est alors un infinitement petit du second ordre que l'on décide de négliger (pseudo linéarisation ⁽⁵⁾ en $\mathbf{grad}_L \mathbf{u}$). Si on supprime le terme $\mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ dans l'équation (4.1) [p. 72], le tenseur \mathbf{E} se réduit à :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad}_L \mathbf{u}$$

Si on admet l'hypothèse 4.1 [p. 72], la norme des deux tenseurs \mathbf{E} et $\boldsymbol{\varepsilon}$ est bien un infinitement petit du premier ordre. L'hypothèse $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ implique donc bien que les *déformations* sont « petites » ($\|\mathbf{E}\| \simeq \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$).

Mais la réciproque est fautive ⁽⁶⁾ car il existe des mouvements avec de petites déformations pour lesquels $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ n'est pas petit (voir un exemple dans la note 2 [p. 71]).

Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad}_L \mathbf{u}$ n'est une mesure acceptable des petites déformations que si les déformations sont petites et si le mouvement du milieu continu est une quasi-translation pour l'observateur utilisé pour décrire le mouvement.

Cette restriction implicite sur les *mouvements* envisageables en petites déformations quand on décide d'utiliser $\boldsymbol{\varepsilon}$ a deux conséquences importantes :

⁽⁴⁾ Voir la section 4.12.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3]

⁽⁵⁾ Dans un processus correct de linéarisation, on néglige les termes du second ordre devant 1. Or ici on néglige un terme de l'ordre de $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|^2$ devant des termes de l'ordre de $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$, ce qui est mathématiquement douteux !

⁽⁶⁾ Il n'est pas rare de lire dans des cours cette erreur logique : on considère une implication comme une équivalence !

1. Si le mouvement du milieu continu est proche d'une rotation de solide indéformable, les déformations sont effectivement petites, mais le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad}_L \mathbf{u}$ n'est pas apte à traduire correctement ces petites déformations car dans un tel mouvement, le terme $\|\text{grad}_L \mathbf{u}\|$ n'est pas petit (exemple dans la note 2 [p. 71]).
2. Si le mouvement est une quasi translation de solide pour un certain observateur, il ne l'est généralement pas pour un autre observateur en mouvement par rapport au premier. L'hypothèse 4.1 $\|\text{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ qui « définit » le tenseur des petites perturbations $\boldsymbol{\varepsilon}$ n'est donc pas universelle⁽⁷⁾. Autrement dit, si pour un certain solide déformable un observateur peut utiliser $\boldsymbol{\varepsilon}$ car pour lui $\|\text{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ (le solide déformable est en quasi translation), un autre observateur en mouvement par rapport au premier ne peut pas utiliser $\boldsymbol{\varepsilon}$ (et donc la « loi » de Hooke) car pour ce dernier $\|\text{grad}_L \mathbf{u}\| \not\ll 1$.

Remarque – Il est peut-être nécessaire de rappeler que $\|\text{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ n'implique aucune restriction sur $\|\mathbf{u}\|$: on peut ajouter au déplacement \mathbf{u} une translation de déplacement uniforme \mathbf{u}_0 aussi grande que l'on veut sans changer $\text{grad}_L \mathbf{u}$; les déplacements de la quasi-translation n'ont donc pas à être « petits », contrairement à ce qui est parfois affirmé ($\boldsymbol{\varepsilon}$ serait un « tenseur des petites déformations et des petits déplacements »).

En dépit de cette sévère restriction (bien souvent occultée⁽⁸⁾) sur les *mouvements* envisageables, l'utilisation du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ pour mesurer des petites déformations reste encore très courante⁽⁹⁾.

4.2 « Loi » de Hooke traditionnelle

Cette loi empirique, qui a d'abord été correctement proposée par Robert Hooke en 1676 sous forme scalaire pour des ressorts, est aujourd'hui imprudemment⁽¹⁰⁾ « généralisée » par la relation tensorielle suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{G} \quad \text{où } \mu \text{ et } \lambda \text{ sont les coefficients de Lamé (en Pa)} \quad (4.2)$$

Bien que ce soit rarement précisé, une telle relation ne peut être envisageable que pour des solides déformables *isotropes*⁽¹¹⁾ puisque l'évaluation du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ se fait sans référence à l'orientation du tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ par rapport à des directions matérielles d'anisotropie.

En prenant la trace de l'équation (4.2) [p. 73], on obtient la relation :

$$\text{tr} \boldsymbol{\sigma} = (2\mu + 3\lambda) \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\text{tr} \boldsymbol{\sigma}}{2\mu + 3\lambda}$$

La relation entre les traces permet de trouver une relation inverse :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G} \right) \quad (4.3)$$

⁽⁷⁾ On rappelle que toute définition se doit d'être universelle.

⁽⁸⁾ Peut-être par la mauvaise compréhension de ce qu'est le gradient d'un champ vectoriel.

⁽⁹⁾ Cette « mesure » des petites déformations est même parfois imprudemment utilisée lorsque le champ de déplacement s'éloigne beaucoup d'une quasi-translation, notamment en flexion et en torsion de solides élastiques minces (poutres). En pratique, la condition $\|\text{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ n'est sensiblement satisfaite que dans un essai de traction ou dans la phase de compression d'un essai œdométriques pour un observateur lié à la machine d'essai.

⁽¹⁰⁾ En proposant la relation (4.2) [p. 73], on ne se soucie ni de l'objectivité des tenseurs intervenant dans cette relation, ni de son admissibilité thermodynamique !

⁽¹¹⁾ Mais pas élastiques, voir la section suivante.

Contrairement aux lois de comportement élastiques présentées dans les chapitres précédents, la « loi » de Hooke (4.2) [p. 73] est une *bijection* entre les tenseurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$.

On présente souvent la « loi » de Hooke sous une forme différente en effectuant les changements de coefficients $(\mu, \lambda) \leftrightarrow (E, \nu)$ suivants :

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ et } \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \Leftrightarrow \quad E = \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \text{ et } \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Le coefficient E est appelé *module d'Young* (en Pa) et le coefficient ν est appelé *coefficient de Poisson* (adimensionnel). Le couple de coefficients (E, ν) est souvent préféré car ces deux coefficients sont facilement interprétables *dans un essai de traction isotherme* :

- On suppose (correctement) que dans un essai de traction le tenseur des contraintes dans la zone utile de l'éprouvette est uniaxial et uniforme dans la direction de traction \mathbf{e}_1 ($\boldsymbol{\sigma} = \sigma^1_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1$). Si l'équation (4.3) [p. 73] est vraie, alors les composantes du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ dans toute base orthonormée contenant la direction de traction \mathbf{e}_1 se rangent dans une matrice diagonale.
- Le module d'Young E est le coefficient de proportionnalité entre la composante σ^1_1 et la composante ε^1_1 (allongement relatif longitudinal) dans cette même direction : $\sigma^1_1 = E \varepsilon^1_1$;
- Le coefficient de Poisson ν est l'opposé du rapport entre l'allongement relatif transversal et l'allongement relatif longitudinal ($\varepsilon^2_2 = \varepsilon^3_3 = -\nu \varepsilon^1_1$). On a toujours : $-1 < \nu < \frac{1}{2}$.

Avec ces nouveaux coefficients, la « loi » de Hooke (4.2) [p. 73] isotrope et isotherme s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{G} \right) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G} \quad (4.4)$$

Quand on veut tenir compte *partiellement* des effets thermiques (il existe une dilatation thermique isotrope, mais les coefficients E , ν , μ et λ restent constants en fonction de la température), on ajoute un terme de dilatation thermique sphérique à la déformation :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G} + \underbrace{\alpha(T-T_0) \mathbf{G}}_{\text{dilat. therm.}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left(\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{G} \right) - \frac{E}{1-2\nu} \alpha(T-T_0) \mathbf{G}$$

où α est un coefficient constant de dilatation thermique *linéique* (K^{-1}). On peut aussi bien écrire cette loi avec les coefficients de Lamé :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2\mu} \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\lambda}{2\mu+3\lambda} \text{tr} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{G} \right) + \underbrace{\alpha(T-T_0) \mathbf{G}}_{\text{dilat. therm.}} \quad \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{G} - (3\lambda+2\mu) \alpha(T-T_0) \mathbf{G} \quad (4.5)$$

Tous ces rappels rapides sont largement développés dans les cours traditionnels d'« élasticité linéaire ».

4.3 Recherche d'une énergie libre de Helmholtz conduisant à la loi de Hooke

Dans cette section, on cherche à reconstruire la loi de Hooke à partir du comportement élastique isotrope qui a été établi sans restrictions ni sur le mouvement ni sur l'amplitude des déformations dans le chapitre 2 [p. 17], c'est-à-dire sans restriction sur $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$.

Si la loi de Hooke est une loi élastique, elle doit être une conséquence de l'application de l'hypothèse restrictive $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ [hyp. 4.1 p. 72] sur la loi de comportement élastique sans restrictions écrite avec le tenseur de déformation (non objectif mais exact) \mathbf{E} . La loi de comportement élastique isotrope en utilisant le tenseur de déformation \mathbf{E} sans aucune hypothèse sur les déformations ou les mouvements s'écrit [éq. (2.19) p. 29] :

$$\frac{\sqrt{1+2E_I+4E_{II}+8E_{III}}}{\rho_0} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\partial_{E_I} f_{\psi}^E + E_I \partial_{E_{II}} f_{\psi}^E + (E_{II} + 2E_{III}) \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E \right) \mathbf{G} + \\ \left(2 \partial_{E_I} f_{\psi}^E + (2E_I - 1) \partial_{E_{II}} f_{\psi}^E - E_I \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E \right) \mathbf{E} + \left(-2 \partial_{E_{II}} f_{\psi}^E + \partial_{E_{III}} f_{\psi}^E \right) \mathbf{E}^2$$

où :

- $\sqrt{1+2E_I+4E_{II}+8E_{III}} = K_v$ est la dilatation volumique actuelle ;
- $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}$ est le tenseur des contraintes tourné par la rotation \mathbf{R}^T où \mathbf{R} est le champ de tenseurs orthogonaux issu de la décomposition polaire du gradient lagrangien des positions actuelles : $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}$.

Rappel – La présence de $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ à la place de $\boldsymbol{\sigma}$ est inhérente à l'utilisation d'un tenseur de déformation non objectif dans la loi de comportement [sec. 2.3.5 p. 27].

Si l'on supprime le produit $\mathbf{grad}_L^T \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ ⁽¹²⁾ dans l'expression du tenseur de déformation exacte \mathbf{E} [éq. (4.1) p. 72], il vient : $\mathbf{E} \simeq \boldsymbol{\varepsilon}$. La loi de comportement élastique *avec un mouvement restreint à une quasi-translation* doit donc être de la forme :

$$\frac{\sqrt{1+2\varepsilon_I+4\varepsilon_{II}+8\varepsilon_{III}}}{\rho_0} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \left(\partial_{\varepsilon_I} f_{\psi}^{\varepsilon} + \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\psi}^{\varepsilon} + (\varepsilon_{II} + 2\varepsilon_{III}) \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\psi}^{\varepsilon} \right) \mathbf{G} + \\ \left(2 \partial_{\varepsilon_I} f_{\psi}^{\varepsilon} + (2\varepsilon_I - 1) \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\psi}^{\varepsilon} - \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\psi}^{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varepsilon} + \left(-2 \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\psi}^{\varepsilon} + \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\psi}^{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^2 \quad (4.6)$$

où $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{R}^T \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{R}$

Puisque $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1 \Rightarrow \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$, la dilatation volumique K_v s'écrit après linéarisation :

$$K_v = \sqrt{1+2\varepsilon_I+4\varepsilon_{II}+8\varepsilon_{III}} \simeq \sqrt{1+2\varepsilon_I} \simeq 1 + \varepsilon_I \quad (\text{linéarisation : termes en } \varepsilon^2 \text{ négligés devant } 1)$$

Par ailleurs, puisque le mouvement est restreint à une quasi-translation, le champ tensoriel orthogonal \mathbf{R} est un champ de « petites rotations » que l'on peut écrire sous la forme ⁽¹³⁾ :

$$\mathbf{R} \simeq \mathbf{G} + \mathbf{A} \quad \text{où } \mathbf{A} \text{ est un tenseur antisymétrique tel que } \|\mathbf{A}\| \ll 1$$

En linéarisant en \mathbf{A} il vient :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} \simeq (\mathbf{G} - \mathbf{A}) \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{A}) = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} \simeq \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} = \boldsymbol{\sigma} + 2 \mathbf{sym}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})$$

Compte tenu de la condition cinématique $\|\mathbf{A}\| \ll 1$ imposée par l'utilisation du tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme mesure des déformations, la loi de comportement élastique isotrope [éq. 4.6 p. 75] se réduit à :

$$\frac{1 + \varepsilon_I}{\rho_0} (\boldsymbol{\sigma} + 2 \mathbf{sym}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A})) = \left(\partial_{\varepsilon_I} f_{\psi}^{\varepsilon} + \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\psi}^{\varepsilon} + (\varepsilon_{II} + 2\varepsilon_{III}) \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\psi}^{\varepsilon} \right) \mathbf{G} + \\ \left(2 \partial_{\varepsilon_I} f_{\psi}^{\varepsilon} + (2\varepsilon_I - 1) \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\psi}^{\varepsilon} - \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\psi}^{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varepsilon} + \left(-2 \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\psi}^{\varepsilon} + \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\psi}^{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^2$$

⁽¹²⁾ Pseudo linéarisation, voir la note 5 p. 72.

⁽¹³⁾ Fin de la section 1.6.13 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

soit encore, toujours en négligeant les infiniment petits du second ordre devant 1 :

$$\frac{1 + \varepsilon_I}{\rho_0} \boldsymbol{\sigma} + \frac{2}{\rho_0} \text{sym}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}) = \left(\partial_{\varepsilon_I} f_{\Psi}^{\varepsilon} + \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} + (\varepsilon_{II} + 2\varepsilon_{III}) \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \mathbf{G} + \\ \left(2 \partial_{\varepsilon_I} f_{\Psi}^{\varepsilon} + (2\varepsilon_I - 1) \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} - \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varepsilon} + \left(-2 \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} + \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^2$$

Comme on peut le constater, la condition cinématique $\|\mathbf{A}\| \ll 1$ (petite rotation \mathbf{R}), imposée par l'utilisation de $\boldsymbol{\varepsilon}$ comme mesure des petites déformations, n'est pas suffisante pour que le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ puisse être évalué sans tenir compte de la petite rotation $\mathbf{G} + \mathbf{A}$.

- **Hypothèse 4.2 – Hypothèse cinématique supplémentaire.** Le mouvement du milieu continu vu par l'observateur utilisé est tel que $\|\mathbf{A}\|$ est un infiniment petit du *second ordre*, ce que l'on écrira :

$$\|\mathbf{A}\| \lll 1$$

Dans ce cas, le champ de petite rotation \mathbf{R} (issu de la décomposition polaire de \mathbf{F}) s'écrit :

$$\mathbf{R} \simeq \mathbf{G} + \mathbf{A} \simeq \mathbf{G} \quad (\text{avec } \|\mathbf{A}\| \lll 1 : \text{« très petite » rotation})$$

Sous l'hypothèse cinématique supplémentaire sur le mouvement [hyp. 4.2 p. 76], on peut alors confondre $\boldsymbol{\sigma}$ et $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et la loi de comportement élastique isotrope en petites déformations, dans un mouvement de quasi translation et en supposant des « très petites » rotations \mathbf{R} s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\rho_0}{1 + \varepsilon_I} \left(\partial_{\varepsilon_I} f_{\Psi}^{\varepsilon} + \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} + (\varepsilon_{II} + 2\varepsilon_{III}) \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \mathbf{G} + \\ \frac{\rho_0}{1 + \varepsilon_I} \left(2 \partial_{\varepsilon_I} f_{\Psi}^{\varepsilon} + (2\varepsilon_I - 1) \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} - \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\rho_0}{1 + \varepsilon_I} \left(-2 \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} + \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^2$$

que l'on peut encore écrire, toujours en linéarisant rigoureusement ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 (1 - \varepsilon_I) \left(\partial_{\varepsilon_I} f_{\Psi}^{\varepsilon} + \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} + (\varepsilon_{II} + 2\varepsilon_{III}) \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \mathbf{G} + \\ \rho_0 (1 - \varepsilon_I) \left(2 \partial_{\varepsilon_I} f_{\Psi}^{\varepsilon} + (2\varepsilon_I - 1) \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} - \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varepsilon} + \rho_0 (1 - \varepsilon_I) \left(-2 \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} + \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \boldsymbol{\varepsilon}^2$$

Ainsi, pour que l'on puisse écrire une relation entre le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ (objectif) et le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ (non objectif) il faut non seulement que le mouvement soit une quasi-translation (l'utilisation de $\boldsymbol{\varepsilon}$ implique $\|\mathbf{A}\| \ll 1$), mais de plus que la rotation \mathbf{R} soit « très petite » (pour confondre $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$, il faut $\|\mathbf{A}\| \lll 1$).

Sous réserve que le mouvement du solide déformable satisfasse *pour l'observateur utilisé* les sévères restrictions cinématiques précédentes, la fonction d'état énergie libre de Helmholtz f_{Ψ}^{ε} qui conduirait à la « loi » de Hooke [éq. (4.5) p. 74] doit être solution du système d'équations différentielles suivant :

$$0 = -2 \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} + \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \quad (\text{coefficient de } \boldsymbol{\varepsilon}^2) \quad (4.7)$$

$$2\boldsymbol{\mu} = \rho_0 (1 - \varepsilon_I) \left(2 \partial_{\varepsilon_I} f_{\Psi}^{\varepsilon} + (2\varepsilon_I - 1) \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} - \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \quad (\text{coefficient de } \boldsymbol{\varepsilon}) \quad (4.8)$$

$$\lambda \varepsilon_I - (3\lambda + 2\boldsymbol{\mu}) \alpha (T - T_0) = \rho_0 (1 - \varepsilon_I) \left(\partial_{\varepsilon_I} f_{\Psi}^{\varepsilon} + \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\Psi}^{\varepsilon} + (\varepsilon_{II} + 2\varepsilon_{III}) \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\Psi}^{\varepsilon} \right) \quad (4.9) \\ (\text{coefficient de } \mathbf{G})$$

Il n'existe pas de solution réelle en f_{Ψ}^{ε} à ce système différentiel!

Démonstration – La solution générale du système différentiel en f_{ψ}^{ε} ci-dessus est ⁽¹⁴⁾ :

$$f_{\psi}^{\varepsilon} = f(T) - \frac{\alpha(T - T_0)(3\lambda + 2\mu) \ln K_v}{\rho_0(1 - \varepsilon_I)} + \frac{\lambda \varepsilon_I \ln K_v}{\rho_0(1 - \varepsilon_I)} - \frac{\mu(\ln K_v + (1 - \varepsilon_I) \ln(-1 + \varepsilon_I))}{\rho_0(1 - \varepsilon_I)}$$

où $K_v = \sqrt{1 + 2\varepsilon_I + 4\varepsilon_{II} + 8\varepsilon_{III}} \simeq 1 + \varepsilon_I$ et où dans le dernier terme, $\ln(-1 + \varepsilon_I)$ est complexe pour de petites déformations ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$). Pour le cas isotherme, il suffit de poser $T = T_0$, ce qui ne change rien à la conclusion.

Ainsi, même au prix de très sévères restrictions sur le mouvement (pour l'observateur utilisé) afin de pouvoir confondre $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$, la loi de Hooke n'est pas une loi de comportement de solide élastique isotrope thermodynamiquement admissible car il n'existe pas de fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz conduisant à cette la loi.

Remarques – En fait, quelles que soient les restrictions de mouvement (valables pour un certain observateur), il était sans espoir de chercher à établir une relation affine *universelle* ⁽¹⁵⁾ entre le tenseur objectif $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur non objectif $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Une approximation supplémentaire courante mais incohérente – Pour tenter de conférer malgré tout un caractère pseudo-élastique à la loi de Hooke, certains auteurs proposent l'approximation supplémentaire suivante pour « simplifier » les équations (4.7), (4.8) et (4.9) [p. 76] :

$$\rho \simeq \rho_0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 + \varepsilon_I) \simeq 1 \quad \Leftrightarrow \quad (1 - \varepsilon_I) \simeq 1$$

Cette approximation est « argumentée » par le fait que les déformations sont petites. Cette approximation est mathématiquement incompatible avec les approximations faites précédemment : on ne peut pas dire à la fois que la déformation est un infiniment petit du premier ordre (petites déformations, $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \ll 1$) et un infiniment petit du second ordre (ε_I négligé devant 1, c'est-à-dire $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \lll 1$). Autrement dit, on ne peut pas affirmer dans un même calcul que la dilatation volumique vaut 1 et néanmoins affirmer ultérieurement que sa valeur est $1 + \varepsilon_I$. L'incohérence mathématique soulignée ici a une interprétation physique : affirmer à la fois que $\rho = \rho_0$ et qu'il existe néanmoins une dilatation volumique est une violation du principe de conservation de la masse ⁽¹⁶⁾. Les calculs qui suivent vont donc nécessairement refléter cette incohérence.

Si, en dépit de cette incohérence, on continue les calculs avec $\rho \simeq \rho_0$, le système différentiel (4.7), (4.8) et (4.9) [p. 76] se simplifie et devient :

$$0 = -2 \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\psi}^{\varepsilon} + \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\psi}^{\varepsilon} \quad (\text{coeff. de } \boldsymbol{\varepsilon}^2)$$

$$2\mu = \rho_0 \left(2 \partial_{\varepsilon_I} f_{\psi}^{\varepsilon} + (2\varepsilon_I - 1) \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\psi}^{\varepsilon} - \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\psi}^{\varepsilon} \right) \quad (\text{coeff. de } \boldsymbol{\varepsilon})$$

$$\lambda \varepsilon_I - (3\lambda + 2\mu) \alpha(T - T_0) = \rho_0 \left(\partial_{\varepsilon_I} f_{\psi}^{\varepsilon} + \varepsilon_I \partial_{\varepsilon_{II}} f_{\psi}^{\varepsilon} + (\varepsilon_{II} + 2\varepsilon_{III}) \partial_{\varepsilon_{III}} f_{\psi}^{\varepsilon} \right) \quad (\text{coeff. de } \boldsymbol{G})$$

dont la solution générale est ⁽¹⁷⁾ :

$$f_{\psi}^{\varepsilon} = \frac{\lambda \varepsilon_I \ln K_v}{\rho_0} + \frac{\mu \varepsilon_I \ln K_v}{\rho_0} - \frac{(3\lambda + 2\mu) \alpha(T - T_0) \ln K_v}{\rho_0} + f(T) + \frac{\mu}{2\rho_0} \quad (4.10)$$

où $f(T)$ est une fonction quelconque définissant l'énergie libre massique de Helmholtz d'un solide non déformé à la température $T \neq T_0$ et où $K_v = \sqrt{1 + 2\varepsilon_I + 4\varepsilon_{II} + 8\varepsilon_{III}} \simeq 1 + \varepsilon_I$

⁽¹⁴⁾ Le détail des calculs est donné en annexe G page 198 dans une feuille calcul exécutable dans MATHEMATICA[®] dans sa version 5.2.

⁽¹⁵⁾ C'est-à-dire valable pour tous les observateur. Toute loi de comportement doit être universelle.

⁽¹⁶⁾ On rappelle que le principe de la conservation de la masse implique la relation $\frac{\rho_0}{\rho} = K_v$. Voir la section 2.3.2 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

⁽¹⁷⁾ Le détail des calculs est donné en annexe G page 201 dans une feuille calcul MATHEMATICA[®] version 5.2.

On arrive donc, sous l'hypothèse (incohérente) $\rho \simeq \rho_0$ jointe aux sévères restrictions sur le mouvement signalées précédemment, à trouver une énergie libre massique de Helmholtz, mais celle-ci n'est valable, en toute rigueur, que quand la dilatation volumique $K_v \simeq 1 + \varepsilon_1$ vaut 1, c'est-à-dire restreinte à des milieux élastiques quasi incompressibles ($\varepsilon_1 \lll 1$ et non $\varepsilon_1 \ll 1$).

Sous quelles conditions peut-on écrire $\mathbf{D} \simeq \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$? – Beaucoup d'auteurs posent comme une « évidence » qu'en « petites perturbations » on peut écrire $\mathbf{D} \simeq \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Soit un mouvement dont le champ de vitesse est $\mathbf{v}(P, t)$. On sait que

$$\begin{aligned} \mathbf{D} + \mathbf{W} &= \mathbf{grad}_E \mathbf{v} \quad (\text{définition de } \mathbf{D} : \mathbf{D} = \mathbf{sym grad}_E \mathbf{v}, \mathbf{W} \text{ est la partie antisymétrique de } \mathbf{grad}_E \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{grad}_L \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{relation entre gradient lagrangien et eulérien}) \\ &= \mathbf{grad}_L \mathbf{v} \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u})^{-1} \quad (x_{iL} = x_{0L} + u_L \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{grad}_L x_i = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u}) \end{aligned}$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot (\mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u}) &= \mathbf{grad}_L \mathbf{v} \\ \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{W} + \mathbf{W} \cdot \mathbf{grad}_L \mathbf{u} &= \mathbf{grad}_L \dot{\mathbf{u}} \\ \mathbf{D} + \mathbf{D} \cdot (\mathbf{sym grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{asym grad}_L \mathbf{u}) + \mathbf{W} + \mathbf{W} \cdot (\mathbf{sym grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{asym grad}_L \mathbf{u}) &= \\ (\mathbf{sym grad}_L \mathbf{u} + \mathbf{asym grad}_L \mathbf{u})' & \quad (\text{décomposition de } \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \text{ en parties symétriques et antisymétriques}) \end{aligned}$$

Or $\mathbf{sym grad}_L \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}$ et $(\mathbf{sym grad}_L \mathbf{u})' = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$. On a donc :

$$\mathbf{D} \cdot (\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{asym grad}_L \mathbf{u}) + \mathbf{W} \cdot (\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{asym grad}_L \mathbf{u}) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + (\mathbf{asym grad}_L \mathbf{u})'$$

Pour pouvoir affirmer que $\mathbf{D} \simeq \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ il faudrait faire les trois hypothèses cinématiques supplémentaires suivantes :

1. *Le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ doit être négligeable devant \mathbf{G} ($\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \lll 1$, $\|\boldsymbol{\varepsilon}\|$ serait un infiniment petit du second ordre (« très petites » déformation), ce qui rendrait absurde l'hypothèse 4.1 [p. 72].*
2. *Le champ de déplacement doit être très particulier : il faudrait que son gradient lagrangien $\mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ soit symétrique ($\mathbf{asym grad}_L \mathbf{u} = \mathbf{0}$), ce qui est faux en général⁽¹⁸⁾ ;*
3. *Il faut que non seulement que $\mathbf{asym grad}_L \mathbf{u} = \mathbf{0}$ mais aussi qu'il reste nul à tout instant pour pouvoir écrire $(\mathbf{asym grad}_L \mathbf{u})' = 0$;*

L'écriture $\mathbf{D} \simeq \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ n'est donc pas correcte dans le cas des « petites perturbations » ($\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$) : il faut des restrictions cinématiques supplémentaires.

Dans la plupart des cours élémentaires d'élasticité « linéaire », les analyses correctes des hypothèses nécessaires aux affirmations pseudo évidentes et les linéarisations douteuses sont le plus souvent masquées, floues ou inexacts. Leur analyse correcte ne peut être faite qu'avec une bonne compréhension de la cinématique. Leur utilisation aveugle peut conduire à des résultats erronés.

4.4 Une nouvelle « loi de Hooke » en déformations finies

En première lecture, on peut ignorer cette section et continuer en section 4.6 [p. 82] sans nuire à la compréhension de la suite.

Pour se conformer aux habitudes prises dans les cours traditionnels d'élasticité utilisant le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$, on se propose d'écrire la loi de comportement d'un milieu solide

⁽¹⁸⁾ Une autre manière d'exprimer la restriction de mouvement « $\mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ symétrique » est de dire que le tenseur \mathbf{F} est symétrique défini positif : en effet, si $\mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ est symétrique et si $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$, alors $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u}$ est symétrique et a des valeurs propres positives. La décomposition polaire de \mathbf{F} conduit donc à $\mathbf{R} = \mathbf{G}$ (pas de rotation \mathbf{R}).

élastique isotrope *affine en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ et sans restrictions cinématiques*. On rappelle que le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ est défini par ⁽¹⁹⁾ :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{V} - \mathbf{G} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T} - \mathbf{G}$$

Comme pour le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$, le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ est nul lorsqu'il n'y a pas de déformation ; mais son utilisation comme mesure des déformations ne requiert aucune restriction ni sur le mouvement ni sur les déformations car $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ n'est soumis à aucune condition. De plus, il est objectif. Comme pour le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$, ses valeurs propres $\varepsilon_i^v = \lambda_i - 1$ sont les *allongements relatifs* dans les directions principales actuelles de déformation. Toutefois, l'allongement relatif dans une direction matérielle actuelle \mathbf{u}_t quelconque est :

$$K_l - 1 = \frac{1}{\|(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} - 1$$

Cas particulier des petites déformations – Si les déformations sont petites, on pose $\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$ (noter qu'ici, il n'y a aucune restriction sur le mouvement : $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\|$ n'est pas contraint). En linéarisant ⁽²⁰⁾ en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, on trouve $K_v \simeq 1 + \varepsilon_1^v$; la dilatation volumique *relative* en une particule est donc :

$$K_v - 1 \simeq \varepsilon_1^v = \text{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^v$$

De même l'allongement *relatif* linéarisé dans une direction matérielle actuelle quelconque \mathbf{u}_t est :

$$K_l - 1 = \frac{1}{\|(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^{-1} \cdot \mathbf{u}_t\|} - 1 \simeq \mathbf{u}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{u}_t$$

Ainsi, en linéarisant (correctement) en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, on retrouve des formules semblables à celles données dans les cours traditionnels d'élasticité « linéaire » avec le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$, à ceci près qu'il n'y a ici aucune restriction sur le *mouvement* et que les directions matérielles sont identifiées par leur direction actuelle \mathbf{u}_t et non par leur direction initiale \mathbf{u}_0 . La seule restriction porte sur la norme du tenseur de déformation : $\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$ (petite déformation).

On pourrait être tenté d'utiliser le tenseur de déformation non objectif $\boldsymbol{\varepsilon}^u = \mathbf{U} - \mathbf{G}$, les formules linéarisées pour K_v et K_l sont les mêmes, sauf que les directions matérielles sont maintenant identifiées par leur direction initiale \mathbf{u}_0 (comme pour le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$). Cependant, on serait amené à de nécessaires restrictions cinématiques supplémentaires *sur le mouvement* [hyp. 4.2 p. 76] pour pouvoir confondre $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$. En pratique, ces restrictions sur le mouvement ne sont acceptables que dans un essai de traction ou dans la phase de compression d'un essai œdométrique.

On rappelle que la loi de comportement élastique isotrope avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ *sans aucune hypothèse sur $\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\|$ ni restriction de mouvement* est :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_1 \boldsymbol{\varepsilon}^v + K_2 (\boldsymbol{\varepsilon}^v)^2 \quad [\text{éq. (2.14) p. 26}]$$

où :

$$K_0 = \rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_1^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v} + \varepsilon_1^v \partial_{\varepsilon_1^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v} + (\varepsilon_{\text{II}}^v + \varepsilon_{\text{III}}^v) \partial_{\varepsilon_{\text{III}}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_1^v + \varepsilon_{\text{II}}^v + \varepsilon_{\text{III}}^v} \quad (\text{coefficient de } \mathbf{G})$$

$$K_1 = \rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_1^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v} - (1 - \varepsilon_1^v) \partial_{\varepsilon_{\text{II}}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v} - \varepsilon_1^v \partial_{\varepsilon_{\text{III}}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_1^v + \varepsilon_{\text{II}}^v + \varepsilon_{\text{III}}^v} \quad (\text{coefficient de } \boldsymbol{\varepsilon}^v)$$

$$K_2 = -\rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_{\text{II}}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v} - \partial_{\varepsilon_{\text{III}}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_1^v + \varepsilon_{\text{II}}^v + \varepsilon_{\text{III}}^v} \quad (\text{coefficient de } \boldsymbol{\varepsilon}^{v^2})$$

⁽¹⁹⁾ Section 4.4.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽²⁰⁾ Ces linéarisations (correctes) sont exposées dans la section 4.11 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

On peut chercher s'il existe une loi de comportement *affine* $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\varepsilon}^v)$ semblable à la « loi » de Hooke donnée en éq. (4.5) [p. 74]. Si une telle loi existe, la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz $f_{\Psi}^{\varepsilon^v}$ doit satisfaire le système différentiel suivant :

$$\begin{aligned} \lambda \varepsilon_1^v - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) &= K_0 = \rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_1^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v} + \varepsilon_1^v \partial_{\varepsilon_{II}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v} + (\varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v) \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_1^v + \varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v} \\ 2\mu &= K_1 = \rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_1^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v} - (1 - \varepsilon_1^v) \partial_{\varepsilon_{II}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v} - \varepsilon_1^v \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_1^v + \varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v} \\ 0 &= K_2 = -\rho_0 \frac{\partial_{\varepsilon_{II}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v} - \partial_{\varepsilon_{III}^v} f_{\Psi}^{\varepsilon^v}}{1 + \varepsilon_1^v + \varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v} \end{aligned}$$

La solution générale de ce système différentiel est ⁽²¹⁾ :

$$f_{\Psi}^{\varepsilon^v} = \frac{\lambda}{2\rho_0} \varepsilon_1^v (\varepsilon_1^v + 2(\varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v)) + \frac{\mu}{\rho_0} (\varepsilon_1^{v2} - 2(\varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v)) - \frac{\alpha (T - T_0) (3\lambda + 2\mu) (\varepsilon_1^v + \varepsilon_{II}^v + \varepsilon_{III}^v)}{\rho_0} + f(T) \quad (4.11)$$

Avec cette expression de l'énergie libre massique, la loi de comportement *en déformations finies* est semblable à la loi de Hooke énoncée en début de chapitre, mais en remplaçant $\boldsymbol{\varepsilon}$ par $\boldsymbol{\varepsilon}^v$:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^v + \lambda \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}^v \mathbf{G} - (3\lambda + 2\mu) \alpha (T - T_0) \mathbf{G} \quad (4.12)$$

Avec la substitution de $\boldsymbol{\varepsilon}$ par $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, on vérifie aisément que toutes les formules et interprétations de la section 4.2 [p. 73] restent valables ⁽²²⁾. La loi de comportement mécanique thermodynamiquement admissible (4.12) [p. 80] sans restrictions cinématiques est *a fortiori* encore vraie pour des petites déformations quand $\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$.

Il est important de rappeler que la seule motivation qui a conduit à l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz proposée dans l'équation (4.11) [p. 80] n'était que d'obtenir une loi de comportement affine en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ [éq. (4.12) p. 80] ressemblant à la traditionnelle « loi » de Hooke. On peut préférer des motivations plus physiques dans la construction des fonctions d'état d'un modèle élastique isotrope. En particulier, la signification cinématique des variables d'état réduites ε_{II}^v et ε_{III}^v n'est pas claire !

4.5 Élasticité isotrope en petites déformations sans restriction sur le mouvement

En première lecture, on peut ignorer cette section et continuer en section 4.6 [p. 82] sans nuire à la compréhension de la suite.

Tout modèle de comportement élastique isotrope sans restriction ni sur le mouvement ni sur les déformations peut être utilisé quand les déformations sont petites, ce qui autorise des linéarisations susceptibles de simplifier quelques formules. Dans cette section, on se propose de particulariser aux petites déformations le modèle élastique isotrope construit dans le chapitre 3

⁽²¹⁾ Le détail des calculs est donné en annexe G page 204 dans une feuille calcul exécutable dans MATHEMATICA® dans sa version 5.2.

⁽²²⁾ La loi de comportement (4.12) [p. 80] mériterait éventuellement le nom de « néo-Hooke », mais ce nom est déjà utilisé pour un autre modèle de comportement [section 2.4.2 p. 32].

[p. 51], dans lequel on a *choisi* pour les variables d'état réduites l'ensemble $\{T, K_v, \delta\}$ où T est la température, K_v est la dilatation volumique et δ est la distorsion stérique maximale de la déformation. On rappelle que cette loi de comportement s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_1 \mathbf{B} \quad [\text{éq. 3.20 p. 62}]$$

avec

$$K_0 = \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) - \frac{\delta^{\frac{2}{3}} \tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{\sqrt{3} K_v \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad \text{et} \quad K_1 = \frac{\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{\sqrt{3} K_v^{\frac{5}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

où :

— $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ est la contrainte moyenne dans une expérience de déformation sphérique à température constante T .

— $\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)$ est la contrainte tangentielle dans un essai glissement à la température T constante et sans déformation sphérique préalable; elle doit être croissante en $\gamma = \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}$ et nulle pour $\gamma = 0$ (ou $\delta = 1$).

Par construction, quelles que soient ces deux fonctions expérimentales $\sigma_{exp}^{(2)}(T, \delta)$ et $\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)$, le modèle construit est nécessairement un modèle de comportement élastique isotrope thermodynamiquement admissible. On rappelle qu'en utilisant le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, la dilatation volumique est :

$$K_v = B_{III}^{\frac{1}{2}} = V_{III} = \det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)$$

et que la distorsion stérique maximale est :

$$\delta = \frac{\sqrt{3} \operatorname{tr}(\mathbf{B})^{\frac{3}{2}}}{9 B_{III}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{3} \operatorname{tr}((\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^2)^{\frac{3}{2}}}{9 \det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)}$$

Puisque l'on cherche à établir une loi de comportement restreinte aux petites déformations ($\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$), on ramène la description des fonctions expérimentales $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ et $\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)$ à leur linéarisation au voisinage d'un mouvement rigide : K_v voisin de 1 et γ voisin de 0⁽²³⁾. On pose donc :

$$\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) \simeq \sigma_{exp}^{(1)}(T) + \xi_0(T) (K_v - 1) = \sigma_{exp}^{(1)}(T) + \xi_0(T) (\det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v) - 1) \quad (4.13)$$

$$\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta) \simeq \mu_0(T) \gamma = \mu_0(T) \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} \quad (4.14)$$

où $\xi_0(T)$ et $\mu_0(T)$ sont respectivement les pentes à l'origine des courbes expérimentales $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ et $\tau_{exp1}^{(3)}(T, \gamma)$ à température constante.

Les coefficients de la loi de comportement deviennent :

$$\begin{aligned} K_0 &= \xi_0(T) (\det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v) - 1) - \frac{\mu_0(T) \delta^{\frac{2}{3}}}{\det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)} \\ &= \xi_0(T) (\det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v) - 1) - \frac{\mu_0(T) \operatorname{tr}((\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^2)}{3 \det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^{\frac{5}{3}}} \\ K_1 &= \frac{\mu_0(T)}{\det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^{\frac{5}{3}}} \end{aligned}$$

⁽²³⁾ La linéarisation en γ est assez arbitraire. On pourrait linéariser en δ , ce qui donnerait une loi de comportement mécanique finale légèrement différente mais toujours « non linéaire ».

En linéarisant correctement (on néglige les infiniments petits *du second ordre* devant 1), il vient :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_1 (\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^2 \simeq (K_0 + K_1) \mathbf{G} + 2K_1 \boldsymbol{\varepsilon}^v$$

où :

$$\begin{aligned} K_0 + K_1 &= \xi_0(T) (\det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v) - 1) + \frac{\mu_0(T) (3 - \text{tr}((\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^2))}{3 \det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^{\frac{5}{3}}} \\ &\simeq \xi_0(T) \varepsilon_1^v - \frac{2\mu_0(T) \varepsilon_1^v}{3(1 + \frac{5}{3}\varepsilon_1^v)} \simeq \xi_0(T) \varepsilon_1^v - \frac{2\mu_0(T) \varepsilon_1^v}{3} (1 - \frac{5}{3}\varepsilon_1^v) \\ 2K_1 &= \frac{2\mu_0(T)}{\det(\mathbf{G} + \boldsymbol{\varepsilon}^v)^{\frac{5}{3}}} \simeq \frac{2\mu_0(T)}{1 + \frac{5}{3}\varepsilon_1^v} \simeq 2\mu_0(T) (1 - \frac{5}{3}\varepsilon_1^v) \end{aligned}$$

Finalement, la loi de comportement élastique isotrope du modèle (T, K_v, δ) en petites déformations écrite avec le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ est la loi isotrope (*non affine* en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$) suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \left(\xi_0(T) - \frac{2\mu_0(T)}{3} (1 - \frac{5}{3}\varepsilon_1^v) \right) \varepsilon_1^v \mathbf{G} + 2\mu_0(T) (1 - \frac{5}{3}\varepsilon_1^v) \boldsymbol{\varepsilon}^v$$

Remarques – Contrairement à ce que l'intuition pourrait suggérer et qui est parfois affirmé⁽²⁴⁾, une loi de comportement élastique isotrope linéarisée au voisinage d'un mouvement rigide ($\|\boldsymbol{\varepsilon}^v\| \ll 1$) n'est pas nécessairement une fonction affine du tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ (observer les coefficients de \mathbf{G} et de $\boldsymbol{\varepsilon}^v$). Le calcul précédent montre qu'une linéarisation des mesures expérimentales $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ et $\tau_{exp,1}^{(3)}(T, \gamma)$ autour de $K_v = 1$ et $\gamma = 0$ conduit à une loi de comportement mécanique *non affine* en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$. On n'obtiendrait une loi semblable à la « loi » de Hooke qu'en acceptant de négliger $\frac{5}{3}\varepsilon_1^v$ devant 1 (« très petite » dilatation volumique, c'est-à-dire une quasi-incompressibilité).

En fait, qualifier de « linéaire » une loi de comportement n'a pas de sens physique puisque cette pseudo propriété dépend du choix arbitraire (donc sans motivation physique) d'un tenseur de déformation. Une loi « linéaire » pour un certain tenseur de déformation ne l'est plus pour un autre tenseur de déformation.

4.6 En bref...

L'utilisation du traditionnel et historique tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon} = \text{sym grad}_L \mathbf{u}$ pour mesurer les *petites déformations* implique de sévères restrictions sur les *mouvements* envisageables : *pour l'observateur utilisé*, le mouvement doit être une *quasi translation* ($\|\text{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$) avec de « très petites » rotations \mathbf{R} (pour pouvoir confondre $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ et $\boldsymbol{\sigma}$). De plus, si ces restrictions sur le mouvement observé étaient acceptables pour un certain observateur, elles ne le seraient généralement pas pour un autre observateur, ce qui rend cette « loi » non universelle. Enfin, on a montré que la « loi » de Hooke n'est pas une loi de comportement isotrope thermodynamiquement admissible.

Remarque – Bien que la « loi » de Hooke ne soit pas thermodynamiquement admissible, il se peut néanmoins que certains anciens résultats de calcul soient « numériquement acceptables » lorsque les restrictions cinématiques signalées précédemment sont acceptables pour l'observateur utilisé pour décrire le mouvement et lorsque les dilatations volumiques sont très faibles ($\rho \simeq \rho_0$, quasi incompressibilité). En revanche, si ces restrictions ne sont pas respectées, le résultat de ces calculs est sujet à circonspection.

⁽²⁴⁾ L'auteur reconnaît humblement avoir supprimé trop vite des termes en $(\varepsilon_1^v)^2$ dans les calculs de linéarisation du coefficient de \mathbf{G} dans la première version de ce cours.

Il est possible [sec. 4.4 p. 78] de construire un modèle de comportement élastique isotrope affine en $\boldsymbol{\epsilon}^v$, thermodynamiquement admissible, ressemblant à la « loi » de Hooke historique et sans restriction ni sur les déformations ni sur le mouvement. Cette loi de comportement sans restriction cinématique est évidemment valable pour les petites déformations. Cependant la construction de l'énergie libre massique de Helmholtz de ce modèle est physiquement peu justifiée : pour la trouver, on y a imposé, sans motivation physique et seulement pour maintenir partiellement une tradition : la « linéarité » de la relation entre le tenseur des contraintes objectif $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur de déformation objectif $\boldsymbol{\epsilon}^v$ est imposée pour qu'elle ressemble à la « loi » de Hooke.

Enfin, on a montré en section 4.5 [p. 80] sur un exemple de modèle de comportement élastique isotrope –le modèle (T, K_v, δ) – qu'une linéarisation d'expériences élémentaires au voisinage d'un mouvement rigide ne conduit pas nécessairement à une loi de comportement « linéaire », contrairement à ce qui est parfois affirmé.

On est en droit d'espérer que les logiciels industriels à venir ⁽²⁵⁾ résoudre correctement les problèmes d'élasticité (isotrope ou non) sans restriction ni sur les déformations ni sur les mouvements, avec des modèles de comportement thermodynamiquement admissibles et construits avec des fonctions d'état physiquement motivées. Ces logiciels feront *a fortiori* des calculs corrects dans les régions où les déformations sont petites sans qu'il soit nécessaire de changer de théorie. Bien que la résolution *numérique* des problèmes « linéaires » soit numériquement plus aisée, il semble à l'auteur que ce prétexte est insuffisant pour justifier l'utilisation d'un « modèle de comportement » non thermodynamiquement admissible et cinématiquement limité qui risque de conduire, quand on l'utilise aveuglément, à des résultats erronés.

⁽²⁵⁾ La dernière version de texte date de 2023.

Élasticité isotrope transverse

Dans ce chapitre on établit la forme générale de la loi de comportement mécanique des solides élastiques *isotropes transverses*, c'est-à-dire anisotropes à une seule direction d'anisotropie en chaque particule. Ce modèle convient bien pour modéliser macroscopiquement en milieu continu des milieux fibreux (la direction d'anisotropie est celle de la fibre) ou bien des milieux lamellaires (la direction d'anisotropie est la normale aux lamelles, les lamelles étant isotropes). La démarche suivie pour établir le comportement élastique isotrope transverse est la même que celle suivie dans la construction de l'élasticité isotrope à la différence près que pour décrire l'état actuel d'une particule de milieu continu isotrope transverse, il faut une variable d'état supplémentaire : la direction actuelle de l'anisotropie.

5.1 Variables d'état d'un solide élastique isotrope transverse

L'état actuel des particules d'un solide élastique isotrope transverse est défini par trois champs matériels :

1. la température actuelle $T(P,t)$ (imposée par le second principe);
2. un tenseur de déformation actuelle objectif $\mathbf{X}(P,t)$ (la forme du solide non sollicité à une température uniforme T_0 sert de référence pour les déformations);
3. la direction *actuelle* de l'unique direction d'anisotropie en P , représentée par le vecteur unitaire \mathbf{n}_t ou mieux encore par le tenseur uniaxial unitaire $\mathbf{N}_t = \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t$ qui représente une direction *non orientée* par son unique direction propre.

Le deux premières variables d'état T et \mathbf{X} précisent que le milieu continu est un solide déformable [déf. 1.1 p. 12], et la dernière (\mathbf{n}_t ou \mathbf{N}_t) précise la direction *actuelle* de l'unique direction d'anisotropie. La définition de l'élasticité a été donnée dans la définition 1.4 [p. 14].

Afin de limiter le nombre de formules, on fait le choix arbitraire ⁽¹⁾ d'utiliser le tenseur de déformation objectif \mathbf{B} . La liste des variables d'état tensorielles est donc $\{T, \mathbf{B}, \mathbf{n}_t\}$ ou $\{T, \mathbf{B}, \mathbf{N}_t\}$.

Ces variables d'état étant objectives ⁽²⁾, les deux fonctions d'état scalaires fondamentales *énergie interne massique* e^m , *entropie massique* s^m et la fonction d'état auxiliaire *énergie libre massique de Helmholtz* ψ^m sont donc des fonctions isotropes de leurs arguments.

⁽¹⁾ On rappelle que ce choix est sans importance fondamentale : la conversion des formules avec d'autres tenseurs de déformation n'est qu'une question d'algèbre. L'utilisation du tenseur de déformation objectif \mathbf{B} donne les formules les plus concises.

⁽²⁾ On rappelle que la formule de changement d'observateur des directions matérielles actuelles (pour les milieux fibreux) et des normales aux facettes matérielles (pour les milieux lamellaires) est celle des vecteurs objectifs, il en est de même pour le tenseur du second ordre uniaxial $\mathbf{N}_t = \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t$. Voir les sections 4.2.3 et 4.6.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

Une liste possible des variables d'état réduites (objectives et indépendantes) est donc ⁽³⁾ :

$$\{T, B_I, B_{II}, B_{III}, \underbrace{\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_t}_{I_1^B = \mathbf{B} : \mathbf{N}_t}, \underbrace{\mathbf{n}_t \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{n}_t}_{I_2^B = \mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t}\} \quad (5.1)$$

On rappelle que les deux invariants croisés $I_1^B = \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_t = \mathbf{B} : \mathbf{N}_t$ et $I_2^B = \mathbf{n}_t \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{n}_t = \mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t$ traduisent d'une certaine manière l'orientation relative de la direction actuelle d'anisotropie \mathbf{N}_t par rapport aux directions propres du tenseur de déformation actuel \mathbf{B} . La dimension de l'espace des états d'un milieu continu solide isotrope transverse est donc au plus 6.

On rappelle que les dérivées particulières des invariants fondamentaux B_I, B_{II} et B_{III} sont :

$$\dot{B}_I = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} \quad ; \quad \dot{B}_{II} = 2(B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} \quad ; \quad \dot{B}_{III} = 2B_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (2.6) p. 21}] \quad (5.2)$$

On montre en annexe [éq. (A.3) et (A.4) p. 152] que les dérivées particulières des invariants croisés I_1^B et I_2^B s'écrivent :

$$\dot{I}_1^B = 4 \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} - 2I_1^B \mathbf{N}_t : \mathbf{D} \quad (5.3)$$

$$\dot{I}_2^B = 4 \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} - 2I_2^B \mathbf{N}_t : \mathbf{D} + 2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} \quad (5.4)$$

Comme toute dérivée particulière d'une grandeur scalaire objective, ces dérivées particulières sont des grandeurs scalaires objectives.

5.2 Loi de comportement mécanique en élasticité isotrope transverse

Comme en élasticité isotrope, on déduit la loi de comportement mécanique élastique isotrope transverse de la nullité de la dissipation intrinsèque pour toute évolution de toute particule :

$$\Phi_{int} = -\rho(\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = 0 \quad [\text{éq. (1.4) p. 14}] \quad (5.5)$$

où la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz s'écrit :

$$\psi^m = f_\psi^B(T, B_I, B_{II}, B_{III}, I_1^B, I_2^B)$$

Sa dérivée particulière est donc :

$$\dot{\psi}^m = \partial_T f_\psi^B \dot{T} + \partial_{B_I} f_\psi^B \dot{B}_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \dot{B}_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \dot{B}_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \dot{I}_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \dot{I}_2^B$$

La nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (5.5) p. 86] pour toute évolution s'écrit alors :

$$\Phi_{int} = -\rho(\partial_T f_\psi^B + s^m) \dot{T} - \underbrace{\rho(\partial_{B_I} f_\psi^B \dot{B}_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \dot{B}_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \dot{B}_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \dot{I}_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \dot{I}_2^B)}_{g(T, \mathbf{B}, \mathbf{N}_t, \mathbf{D}) \text{ (indépendant de } \dot{T})} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = 0$$

⁽³⁾ C'est une conséquence du théorème des fonctions isotropes. Voir l'annexe B.6 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour les milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3]. On rappelle que les invariants fondamentaux ($N_{tI} = 1, N_{tII} = 0, N_{tIII} = 0$) du tenseur uniaxial unitaire \mathbf{N}_t sont des constantes qui ne sont donc pas des variables d'état.

5.2.1 Relation de Helmholtz

La dissipation intrinsèque doit être nulle pour tout état en évolution c'est-à-dire $\forall \dot{T}$ et $\forall \mathbf{D}$ à partir de tout état, c'est-à-dire $\forall (T, B_I, B_{II}, B_{III}, I_1^B, I_2^B)$. La fonction d'état $\rho (\partial_T f_\psi + s^m)$ ne pouvant être fonction de \dot{T} , elle ne peut être que nulle. On en déduit la relation de Helmholtz pour les milieux élastiques isotropes transverses⁽⁴⁾ :

$$s^m = f_s^B = -\partial_T f_\psi^B \quad \Leftrightarrow \quad T \partial_T f_s - \partial_T f_e = 0 \quad (5.6)$$

5.2.2 Comportement élastique isotrope transverse avec le tenseur \mathbf{B}

Compte-tenu de la relation de Helmholtz, la dissipation intrinsèque se réduit à :

$$\Phi = -\rho (\partial_{B_I} f_\psi^B \dot{B}_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \dot{B}_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \dot{B}_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \dot{I}_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \dot{I}_2^B) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = 0$$

soit encore, en utilisant les expressions des dérivées particulières (5.2), (5.3) et (5.4) [p. 86] :

$$\begin{aligned} 0 &= -2\rho \left(\partial_{B_I} f_\psi^B \mathbf{B} + \partial_{B_{II}} f_\psi^B (B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) + \partial_{B_{III}} f_\psi^B B_{III} \mathbf{G} \right) : \mathbf{D} - \\ &2\rho \left(\partial_{I_1^B} f_\psi^B (2 \mathbf{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) - I_1^B \mathbf{N}_t) + \partial_{I_2^B} f_\psi^B (2 \mathbf{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2) - I_2^B \mathbf{N}_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) \right) : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \end{aligned}$$

où la conservation de la masse implique : $\rho = \frac{\rho_0}{K_v} = \frac{\rho_0}{\sqrt{B_{III}}}$. Comme en élasticité isotrope, on peut factoriser la dissipation intrinsèque sous la forme :

$$0 = \mathbf{T} : \mathbf{D}, \quad \forall \mathbf{D}$$

Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ étant une fonction d'état [déf. 1.4 p. 14], le tenseur du second ordre symétrique \mathbf{T} est aussi une fonction d'état. Il n'est donc pas fonction de \mathbf{D} . On en déduit que $\mathbf{T} = \mathbf{0}$. On peut donc énoncer le théorème suivant :

- **Théorème 5.1 – Comportement mécanique élastique isotrope transverse.** En élasticité isotrope transverse, quand on utilise le tenseur de déformation \mathbf{B} pour mesurer les déformations, la loi de comportement mécanique s'écrit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{III}}} \left(B_{III} \partial_{B_{III}} f_\psi^B \mathbf{G} + (\partial_{B_I} f_\psi^B + B_I \partial_{B_{II}} f_\psi^B) \mathbf{B} - \partial_{B_{II}} f_\psi^B \mathbf{B}^2 \right) + \\ &\frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{III}}} \left(\partial_{I_1^B} f_\psi^B \underbrace{(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t - I_1^B \mathbf{N}_t)}_{2 \mathbf{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B})} + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \underbrace{(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{N}_t - I_2^B \mathbf{N}_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B})}_{2 \mathbf{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2)} \right) \quad (5.7) \end{aligned}$$

Le premier terme ressemble formellement à la loi de comportement élastique isotrope⁽⁵⁾ donnée dans l'équation (2.9) [p. 21] et le reste, qui fait intervenir les dérivées partielles $\partial_{I_1^B} f_\psi^B$ et $\partial_{I_2^B} f_\psi^B$ et les quatre tenseurs symétriques $\mathbf{sym}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t)$, $\mathbf{sym}(\mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{N}_t)$, \mathbf{N}_t et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}$, est un complément dû à l'anisotropie.

Remarque – Si l'énergie libre massique de Helmholtz n'est pas fonction des invariants croisés I_1^B et I_2^B qui traduisent l'orientation relative entre la déformation \mathbf{B} et la direction d'anisotropie \mathbf{N}_t , on retrouve bien la loi de comportement élastique isotrope [éq. (2.9) p. 21].

⁽⁴⁾ Voir *Remarques* p. 20.

⁽⁵⁾ Cette ressemblance n'est que formelle car la fonction d'état f_ψ^B et ses dérivées partielles sont *a priori* fonction des variables d'état d'anisotropie I_1^B et I_2^B .

Il est important de noter que, contrairement à l'élasticité isotrope, le tenseur des contraintes actuel $\boldsymbol{\sigma}$ et le tenseur de déformation actuel \mathbf{B} n'ont pas les mêmes directions propres.

Le comportement d'un solide élastique isotrope transverse sera donc complètement déterminé lorsqu'on précisera l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des variables d'état :

$$\psi^m = f_\psi^B(T, B_I, B_{II}, B_{III}, I_1^B, I_2^B) \quad \text{où} \quad I_1^B = \mathbf{B} : \mathbf{N}_t \quad \text{et} \quad I_2^B = \mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t$$

Remarques – Comme en élasticité isotrope, toute expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des variables d'état $\{T, B_I, B_{II}, B_{III}, I_1^B, I_2^B\}$ est *a priori* une expression conduisant à une loi de comportement élastique isotrope transverse thermodynamiquement admissible. Toutefois, afin d'éviter de construire des comportements exotiques comme ceux cités dans la section 2.4 [p. 31], il sera judicieux de changer la liste des variables d'états réduites en une autre liste dont les termes ont une interprétation cinématique claire, afin de construire une expression de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz f_ψ^B physiquement motivée.

Pour construire l'expression de ψ^m en fonction d'expériences élémentaires sur des évolutions simples, on pourra suivre une méthode similaire à celle exposée dans l'exemple de construction d'un modèle élastique isotrope au chapitre 3 [p. 51]. Cette méthode sera utilisée au chapitre 6 [p. 97] pour construire un modèle de comportement élastique isotrope transverse dont l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des variables d'état réduites est physiquement motivée.

5.2.3 Déviation des directions d'anisotropie

L'état actuel est décrit par la déformation *actuelle* \mathbf{B} et la direction *actuelle* d'anisotropie \mathbf{N}_t . Si le champ de déformation actuelle, le champ de déplacement actuel et son gradient \mathbf{F} sont en général aisés à mesurer ou à estimer dans les essais simples, la direction actuelle d'anisotropie sous cette déformation peut être plus délicate à mesurer. On rappelle donc ici à toutes fins utiles les relations entre la direction initiale d'une direction d'anisotropie avant déformation et sa direction actuelle sous déformation ⁽⁶⁾ :

— *pour les milieux fibreux* (la direction d'anisotropie est une direction matérielle) :

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0\|} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_t\|} \quad (\text{déviation des directions matérielles})$$

— *pour les milieux lamellaires* (la direction d'anisotropie est une normale à une facette matérielle) :

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\|} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t\|} \quad (\text{déviation des normales aux facettes matérielles})$$

Ces relations devraient être utiles aux expérimentateurs. Elles leur permettent de déterminer la direction actuelle d'anisotropie en fonction de la direction initiale d'anisotropie lorsque la cinématique du mouvement (et donc \mathbf{F}) est connue.

Remarques – Dans beaucoup d'ouvrages traitant d'anisotropie, les directions d'anisotropie sont considérées comme fixes quand on soumet des éprouvettes à une déformation. Cette approximation peut parfois être acceptable dans certaines cinématiques d'essais, mais ces conditions sont rarement précisées : il faut que la déviation des directions d'anisotropie dans le mouvement imposé dans l'essai puisse être considérée comme négligeable.

⁽⁶⁾ Ces relations sont démontrées dans les sections 4.2.2 et 4.6.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

Notamment, certains milieux continus sont dits « orthotropes » quand ils possèdent deux directions d'anisotropie *initialement* orthogonales. Sauf peut-être dans certaines cinématiques de déformation très particulières à préciser, les directions d'anisotropie ne restent généralement pas orthogonales quand le solide est déformé.

5.2.4 Comportement mécanique élastique isotrope transverse avec le tenseur \mathbf{V}

En première lecture, on peut ignorer cette sous-section et continuer en section 5.3 [p. 92] sans nuire à la compréhension de la suite.

Cette sous-section n'a pour objectif que d'illustrer la méthode algébrique de changement de tenseur de déformation dans une loi de comportement mécanique. Ici, on passe du tenseur de déformation \mathbf{B} au tenseur de déformation \mathbf{V} pour la loi élastique isotrope transverse. Le détail de certains calculs algébriques fastidieux est donné en annexe H [p. 207].

On peut exprimer la loi (5.7) [p. 87] avec le tenseur de déformation \mathbf{V} , en posant :

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 \quad ; \quad \mathbf{B}^2 = \mathbf{V}^4 = (\mathbf{V}_I^2 - \mathbf{V}_{II}) \mathbf{V}^2 + (\mathbf{V}_{III} - \mathbf{V}_I \mathbf{V}_{II}) \mathbf{V} + \mathbf{V}_I \mathbf{V}_{III} \mathbf{G} \quad (\text{th. de Cayley-Hamilton})$$

Les changements d'invariants s'écrivent :

$$\begin{aligned} B_I &= V_I^2 - 2V_{II} \quad ; \quad B_{II} = V_{II}^2 - 2V_I V_{III} \quad ; \quad B_{III} = V_{III}^2 \\ I_1^B &= \mathbf{B} : \mathbf{N}_t = \mathbf{V}^2 : \mathbf{N}_t = I_2^V \quad ; \quad I_2^B = \mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t = (\mathbf{V}_I^2 - \mathbf{V}_{II}) I_2^V + (\mathbf{V}_{III} - \mathbf{V}_I \mathbf{V}_{II}) I_1^V + \mathbf{V}_I \mathbf{V}_{III} \end{aligned}$$

où on a posé : $I_1^V = \mathbf{V} : \mathbf{N}_t$ et $I_2^V = \mathbf{V}^2 : \mathbf{N}_t$. L'énergie libre massique avec les nouvelles variables d'état réduites s'écrit :

$$\psi^m = f_\psi^B(T, B_I, B_{II}, B_{III}, I_1^B, I_2^B) = f_\psi^V(T, V_I, V_{II}, V_{III}, I_1^V, I_2^V)$$

On en déduit les relations entre les dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_T f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B \partial_T T + \partial_{B_I} f_\psi^B \partial_T B_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \partial_T B_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \partial_T B_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \partial_T I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \partial_T I_2^B \\ &= \partial_T f_\psi^B + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ \partial_{V_I} f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B \partial_{V_I} T + \partial_{B_I} f_\psi^B \partial_{V_I} B_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \partial_{V_I} B_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \partial_{V_I} B_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \partial_{V_I} I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \partial_{V_I} I_2^B \\ &= 0 + 2V_I \partial_{B_I} f_\psi^B - 2V_{III} \partial_{B_{II}} f_\psi^B + 0 + 0 + (2V_I I_2^V - V_{II} I_1^V + V_{III}) \partial_{I_2^B} f_\psi^B \\ \partial_{V_{II}} f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B \partial_{V_{II}} T + \partial_{B_I} f_\psi^B \partial_{V_{II}} B_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \partial_{V_{II}} B_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \partial_{V_{II}} B_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \partial_{V_{II}} I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \partial_{V_{II}} I_2^B \\ &= 0 - 2 \partial_{B_I} f_\psi^B + 2V_{II} \partial_{B_{II}} f_\psi^B + 0 + 0 + (-I_2^V - V_I I_1^V) \partial_{I_2^B} f_\psi^B \\ \partial_{V_{III}} f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B \partial_{V_{III}} T + \partial_{B_I} f_\psi^B \partial_{V_{III}} B_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \partial_{V_{III}} B_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \partial_{V_{III}} B_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \partial_{V_{III}} I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \partial_{V_{III}} I_2^B \\ &= 0 + 0 - 2V_I \partial_{B_{II}} f_\psi^B + 2V_{III} \partial_{B_{III}} f_\psi^B + 0 + (I_1^V + V_I) \partial_{I_2^B} f_\psi^B \\ \partial_{I_1^V} f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B \partial_{I_1^V} T + \partial_{B_I} f_\psi^B \partial_{I_1^V} B_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \partial_{I_1^V} B_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \partial_{I_1^V} B_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \partial_{I_1^V} I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \partial_{I_1^V} I_2^B \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + (V_{III} - V_I V_{II}) \partial_{I_2^B} f_\psi^B \\ \partial_{I_2^V} f_\psi^V &= \partial_T f_\psi^B \partial_{I_2^V} T + \partial_{B_I} f_\psi^B \partial_{I_2^V} B_I + \partial_{B_{II}} f_\psi^B \partial_{I_2^V} B_{II} + \partial_{B_{III}} f_\psi^B \partial_{I_2^V} B_{III} + \partial_{I_1^B} f_\psi^B \partial_{I_2^V} I_1^B + \partial_{I_2^B} f_\psi^B \partial_{I_2^V} I_2^B \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 + \partial_{I_1^B} f_\psi^B + (V_I^2 - V_{II}) \partial_{I_2^B} f_\psi^B \end{aligned}$$

La résolution de ce système linéaire conduit aux expressions des $\partial_\bullet f_\psi^B$ en fonction des $\partial_\bullet f_\psi^V$ [annexe H p. 207].

En les remplaçant dans l'équation (5.7) [p. 87], il vient [annexe H p. 207] :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & \frac{\rho_0}{V_{\text{III}}} \left(V_{\text{III}} \partial_{V_{\text{III}}} f_{\psi}^V \mathbf{G} + (\partial_{V_1} f_{\psi}^V + V_1 \partial_{V_{\text{II}}} f_{\psi}^V) \mathbf{V} - \partial_{V_{\text{II}}} f_{\psi}^V \mathbf{V}^2 \right) \\ & + \frac{\rho_0 \partial_{I_1^V} f_{\psi}^V}{V_{\text{III}} (V_1 V_{\text{II}} - V_{\text{III}})} \left(V_{\text{III}} (I_1^V + V_1) \mathbf{G} + (V_{\text{III}} - I_1^V (V_1^2 + V_{\text{II}}) + I_2^V V_1) \mathbf{V} + (I_1^V V_1 + I_2^V) \mathbf{V}^2 \right) \\ & + \frac{4\rho_0}{V_{\text{III}}} \left(\partial_{I_1^V} f_{\psi}^V \mathbf{sym}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}_t) + \partial_{I_2^V} f_{\psi}^V \mathbf{sym}(\mathbf{V}^2 \cdot \mathbf{N}_t) \right) \\ & - \frac{2\rho_0}{V_{\text{III}}} \left((I_1^V + \frac{V_1 V_{\text{III}}}{V_1 V_{\text{II}} - V_{\text{III}}}) \partial_{I_1^V} f_{\psi}^V + I_2^V \partial_{I_2^V} f_{\psi}^V \right) \mathbf{N}_t - \frac{2\rho_0 \partial_{I_1^V} f_{\psi}^V}{V_{\text{III}} (V_1 V_{\text{II}} - V_{\text{III}})} \mathbf{V}^2 \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{V}^2 \end{aligned}$$

On vérifie aisément que si l'énergie libre massique de Helmholtz n'est pas fonction des invariants croisés I_1^V et I_2^V ($\partial_{I_1^V} f_{\psi}^V = 0$ et $\partial_{I_2^V} f_{\psi}^V = 0$), les trois derniers termes de cette somme disparaissent et on retrouve la loi de comportement élastique isotrope écrite avec le tenseur de déformation \mathbf{V} donnée en éq. (2.12) [p. 24].

Remarque – Le terme $V_1 V_{\text{II}} - V_{\text{III}}$ dans les dénominateurs est toujours strictement positif. En effet, son expression en fonction des valeurs propres de \mathbf{V} est :

$$V_1 V_{\text{II}} - V_{\text{III}} = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_1) > 0 \quad \text{car } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$$

La loi de comportement élastique isotrope transverse écrite avec le tenseur de déformation objectif \mathbf{V} apparaît nettement moins maniable que celle écrite avec le tenseur de déformation \mathbf{B} .

5.2.5 Comportement mécanique élastique isotrope transverse avec le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^v$

En première lecture, on peut ignorer cette sous-section et continuer en section 5.3 [p. 92] sans nuire à la compréhension de la suite.

Pour se conformer à des habitudes prises dans les cours élémentaires d'élasticité, on va changer une nouvelle fois de tenseur de déformation en utilisant le tenseur de déformation objectif défini par $\boldsymbol{\varepsilon}^v = \mathbf{V} - \mathbf{G}$. On rappelle que le tenseur de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ est nul pour un mouvement rigide et que son utilisation n'est soumise à aucune restriction ni sur les déformations ni sur le mouvement. Les variables d'état sont maintenant : $(T, \boldsymbol{\varepsilon}_1^v, \boldsymbol{\varepsilon}_2^v, \boldsymbol{\varepsilon}_3^v, \boldsymbol{\varepsilon}^v : \mathbf{N}_t, \boldsymbol{\varepsilon}^{v2} : \mathbf{N}_t)$ qu'on notera $(T, \boldsymbol{\varepsilon}_1^v, \boldsymbol{\varepsilon}_2^v, \boldsymbol{\varepsilon}_3^v, I_1^{\boldsymbol{\varepsilon}^v}, I_2^{\boldsymbol{\varepsilon}^v})$ et on pose :

$$\psi^m = f_{\psi}^B(T, B_1, B_2, B_3, I_1^B, I_2^B) = f_{\psi}^{\boldsymbol{\varepsilon}^v}(T, \boldsymbol{\varepsilon}_1^v, \boldsymbol{\varepsilon}_2^v, \boldsymbol{\varepsilon}_3^v, I_1^{\boldsymbol{\varepsilon}^v}, I_2^{\boldsymbol{\varepsilon}^v})$$

Le changement de tenseur de déformation s'effectue suivant la même méthode que dans la section 5.2.4 [p. 89]. Sans détailler les calculs⁽⁷⁾, on aboutit à la loi de comportement thermodynamiquement admissible de la forme :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} = & K_0 \mathbf{G} + K_1 \mathbf{N}_t + K_2 \boldsymbol{\varepsilon}^v + K_3 (\boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v) + \\ & K_4 \boldsymbol{\varepsilon}^{v2} + K_5 \boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{N}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v + K_6 (\boldsymbol{\varepsilon}^{v2} \cdot \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{v2}) + \\ & \frac{1}{2} K_5 \left(\boldsymbol{\varepsilon}^{v2} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v + \boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{N}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{v2} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^{v2} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{v2} \right) \end{aligned}$$

où les K_{\bullet} sont des fonctions compliquées des $\partial_{\bullet} f_{\psi}^{\boldsymbol{\varepsilon}^v}$ et des variables d'état $(T, \boldsymbol{\varepsilon}_1^v, \boldsymbol{\varepsilon}_2^v, \boldsymbol{\varepsilon}_3^v, I_1^{\boldsymbol{\varepsilon}^v}, I_2^{\boldsymbol{\varepsilon}^v})$ qu'il est inutile de reporter ici (voir la feuille de calcul H [p. 207, de *Out* [35] à *Out* [51]]).

⁽⁷⁾ Le détail des calculs est donné dans la feuille de calcul H [p. 207].

Comme précédemment, on constate bien que si $\partial_{I_1^{\varepsilon^v}} f_{\psi}^{\varepsilon^v} = 0$ et $\partial_{I_2^{\varepsilon^v}} f_{\psi}^{\varepsilon^v} = 0$, on retrouve la loi de comportement élastique isotrope avec $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ donnée en éq. (4.12) [p. 80]. Cette loi de comportement (sans restrictions ni sur les déformations ni sur le mouvement vu par l'observateur utilisé) apparaît encore moins commode d'utilisation que celle avec le tenseur de déformation \mathbf{V} .

Remarque – On peut être tenté de chercher s'il existe une loi de comportement élastique isotrope transverse affine en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$, similaire à celle que l'on a trouvé en élasticité isotrope [éq. (4.12) p. 80] pour ressembler à la « loi » de Hooke. On cherche donc s'il existe une fonction $f_{\psi}^{\varepsilon^v}(T, \varepsilon_1^v, \varepsilon_{II}^v, \varepsilon_{III}^v, I_1^{\varepsilon^v}, I_2^{\varepsilon^v})$ telle que la loi de comportement isotrope transverse soit affine en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$.

La réponse est négative car cette condition conduit à $\partial_{I_1^{\varepsilon^v}} f_{\psi}^{\varepsilon^v} = 0$ et $\partial_{I_2^{\varepsilon^v}} f_{\psi}^{\varepsilon^v} = 0$, ce qui donnerait une loi de comportement isotrope [voir la fin de la feuille de calcul H p. 207, *Out* [56]].

Il n'existe donc pas de loi de comportement mécanique élastique isotrope transverse affine en $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ qui serait thermodynamiquement admissible en déformations finies.

Petites déformations – Les lois de comportement élastique isotrope transverse précédentes (avec \mathbf{B} , \mathbf{V} ou $\boldsymbol{\varepsilon}^v$) sont évidemment valables en petites déformations. En dépit de la conclusion obtenue dans la remarque précédente, certains auteurs proposent *a priori*⁽⁸⁾ une loi de comportement élastique isotrope transverse « linéarisée » de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} \simeq K'_0 \mathbf{G} + K'_1 \mathbf{N}_t + K'_2 \boldsymbol{\varepsilon}^v + K'_3 (\boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v)$$

où K'_0 et K'_1 sont les linéarisations au second ordre près au voisinage d'un mouvement rigide des coefficients K_0 , K_1 , et où K'_2 et K'_3 sont des constantes (valeurs de K_2 et K_3 pour un mouvement rigide), c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} K'_0 &= \underbrace{(\partial_{\varepsilon_1^v} K_0)(T, 0, 0, 0, 0, 0)}_{\alpha_0(T)} \varepsilon_1^v + \underbrace{(\partial_{I_1^{\varepsilon^v}} K_0)(T, 0, 0, 0, 0, 0)}_{\beta_0(T)} I_1^{\varepsilon^v} \\ K'_1 &= \underbrace{(\partial_{\varepsilon_1^v} K_1)(T, 0, 0, 0, 0, 0)}_{\alpha_1(T)} \varepsilon_1^v + \underbrace{(\partial_{I_1^{\varepsilon^v}} K_1)(T, 0, 0, 0, 0, 0)}_{\beta_1(T)} I_1^{\varepsilon^v} \\ K'_2 &= K_2(T, 0, 0, 0, 0, 0) = \alpha_2(T) \quad ; \quad K'_3 = K_3(T, 0, 0, 0, 0, 0) = \alpha_3(T) \end{aligned}$$

La loi de comportement élastique isotrope transverse « linéarisée » en « petites déformations » serait donc de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\alpha_0 \varepsilon_1^v + \beta_0 I_1^{\varepsilon^v}) \mathbf{G} + (\alpha_1 \varepsilon_1^v + \beta_1 I_1^{\varepsilon^v}) \mathbf{N}_t + \alpha_2 \boldsymbol{\varepsilon}^v + \alpha_3 (\boldsymbol{\varepsilon}^v \cdot \mathbf{N}_t + \mathbf{N}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^v) \quad (5.8)$$

où les coefficients α_i sont *a priori* des fonctions de la température (ou bien souvent des constantes).

Dans une base orthonormée dont la direction \mathbf{e}_1 est la direction actuelle d'anisotropie \mathbf{n}_t , les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ sont⁽⁹⁾ :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \beta_0 + \beta_1 \varepsilon_{11}^v + (\alpha_0 + \alpha_1) \varepsilon_{22}^v + (\alpha_0 + \alpha_1) \varepsilon_{33}^v \\ \sigma_{22} &= (\alpha_0 + \beta_0) \varepsilon_{11}^v + (\alpha_0 + \alpha_2) \varepsilon_{22}^v + \alpha_0 \varepsilon_{33}^v \\ \sigma_{33} &= (\alpha_0 + \beta_0) \varepsilon_{11}^v + \alpha_0 \varepsilon_{22}^v + (\alpha_0 + \alpha_2) \varepsilon_{33}^v \\ \sigma_{23} &= \alpha_2 \varepsilon_{23}^v \quad (= \sigma_{32}) \\ \sigma_{31} &= (\alpha_2 + \alpha_3) \varepsilon_{31}^v \quad (= \sigma_{13}) \\ \sigma_{12} &= (\alpha_2 + \alpha_3) \varepsilon_{12}^v \quad (= \sigma_{21}) \end{aligned}$$

⁽⁸⁾ Le plus souvent sans vérifier s'il existe une fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz qui conduise à une loi de cette forme, c'est-à-dire sans vérifier si cette loi est thermodynamiquement admissible. De plus, dans la plupart des textes, le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ est remplacé par le discuté tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ [sec. 4.1 p. 72].

⁽⁹⁾ Dans cette base, les composantes de \mathbf{N}_t sont $N_{t11} = 1$ et toutes les autres sont nulles.

Dans certains ouvrages, la « loi » (5.8) [p. 91] détaillée par les 6 relations précédentes est présentée sous une forme matricielle dite *de Voigt*⁽¹⁰⁾ :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + \beta_0 + \beta_1 & \alpha_0 + \alpha_1 & \alpha_0 + \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ & \alpha_0 + \beta_0 & \alpha_0 + \alpha_2 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ & & \alpha_0 + \beta_0 & \alpha_0 & \alpha_0 + \alpha_2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & \alpha_2 \\ & & & & & \alpha_2 + \alpha_3 \\ & & & & & & \alpha_2 + \alpha_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^v \\ \varepsilon_{22}^v \\ \varepsilon_{33}^v \\ \varepsilon_{23}^v \\ \varepsilon_{31}^v \\ \varepsilon_{12}^v \end{bmatrix}$$

La présence de zéros dans cette « matrice de rigidité » n'est due qu'au fait que les composantes des tenseurs $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ et $\boldsymbol{\sigma}$ sont données *dans une base orthonormée dont l'axe \mathbf{e}_1 est la direction actuelle d'anisotropie*, alors que la relation tensorielle (5.8) [p. 91] est valable dans toute base.

De plus, si on restreint les mouvements envisageables à des quasi-translations pour un certain observateur (« petites perturbations », $\|\mathbf{grad}_L \mathbf{u}\| \ll 1$ et $\|\mathbf{A}\| \ll 1$, hyp. 4.2 [p. 76]), alors on vérifie aisément que les déviations des directions matérielles sont des infiniments petits du second ordre. *Sous ces sévères restrictions du mouvement envisageable*, on a $\mathbf{n}_0 \simeq \mathbf{n}_t$ et on peut remplacer $\boldsymbol{\varepsilon}^v$ par $\boldsymbol{\varepsilon}$. Les termes de la « matrice de rigidité » sont alors interprétables comme des modules d'Young et des coefficients de Poisson pour des tractions simples dans la direction d'anisotropie et dans les directions transverses [éq. (4.4) p. 74].

Il n'en reste pas moins que cette « loi de comportement » artificiellement linéarisée n'est (comme la « loi » de Hooke) ni universelle⁽¹¹⁾ ni thermodynamiquement admissible.

5.3 Comportement thermique en élasticité isotrope transverse

On rappelle que la nécessité de l'existence d'une loi de conduction thermique est due à la non négativité de la dissipation thermique :

$$\forall \mathbf{grad}_E T, \quad \Phi_{th} = -\frac{\mathbf{q}_E}{T_E} \cdot \mathbf{grad}_E T \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mathbf{grad}_E T, \quad \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E T \leq 0$$

Il existe donc nécessairement une loi telle que $\mathbf{q}_E = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T)$.

Il est thermodynamiquement admissible d'utiliser la classique loi de Fourier, mais cette loi de conduction thermique, ne faisant pas référence à l'orientation de $\mathbf{grad}_E T$ par rapport à la direction d'anisotropie, est une loi de comportement thermique isotrope.

Il est physiquement plus vraisemblable d'envisager une loi de conduction thermique isotrope transverse permettant des conductions thermiques différentes dans la direction actuelle d'anisotropie et dans les directions transverses qui lui sont orthogonales. On peut utiliser une loi de la forme suivante⁽¹²⁾ :

$$\mathbf{q}_E = -\alpha_1(\dots) \underbrace{(\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t}_{\mathbf{g}_{n_t}} - \alpha_2(\dots) \underbrace{(\mathbf{grad}_E T - (\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t)}_{\mathbf{g}_{tr}}$$

où :

⁽¹⁰⁾ Dans un exposé théorique, la notation de Voigt qui représente les tenseurs symétriques par un vecteur de \mathbb{R}^6 est peu recommandable car il faut multiplier artificiellement par $\sqrt{2}$ les composantes non diagonales (dans une base *orthonormée*) pour que le produit scalaire de deux tenseurs du second ordre symétriques soit représenté par le produit scalaire de deux colonnes de \mathbb{R}^6 . On peut à la rigueur lui trouver un intérêt lorsqu'on écrit une implémentation informatique (économie de mémoire pour stocker une matrice symétrique, « mécanique numérique »).

⁽¹¹⁾ Pour une même déformation d'un solide élastique isotrope transverse, l'hypothèse 4.2 [p. 76] (mouvement de quasi translation) n'est pas vraie pour tous les observateurs.

⁽¹²⁾ Elle a déjà été proposée dans la section 5.7 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

- $\mathbf{g}_{n_t} = (\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t$ est la partie du vecteur $\mathbf{grad}_E T$ dans la direction d'anisotropie \mathbf{n}_t ;
- $\mathbf{g}_{tr} = \mathbf{grad}_E T - (\mathbf{grad}_E T \cdot \mathbf{n}_t) \mathbf{n}_t$ est la partie du vecteur $\mathbf{grad}_E T$ orthogonale à la direction d'anisotropie \mathbf{n}_t ;
- $\alpha_1(\dots)$ est la conductivité thermique dans la direction d'anisotropie \mathbf{n}_t ; cette fonction peut être constante ou une fonction isotrope⁽¹³⁾ non négative de $\{T, \mathbf{g}_{n_t}, \mathbf{B}\}$, c'est-à-dire de tout ou partie des 7 invariants scalaires suivants :

$$\{T, B_I, B_{II}, B_{III}, \|\mathbf{g}_{n_t}\|, \mathbf{g}_{n_t} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{g}_{n_t}, \mathbf{g}_{n_t} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{g}_{n_t}\}$$

- $\alpha_2(\dots)$ est la conductivité thermique transverse ; cette fonction peut être constante ou une fonction isotrope non négative de $\{T, \mathbf{g}_{tr}, \mathbf{B}\}$, c'est-à-dire de tout ou partie des 7 invariants scalaires suivants :

$$\{T, B_I, B_{II}, B_{III}, \|\mathbf{g}_{tr}\|, \mathbf{g}_{tr} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{g}_{tr}, \mathbf{g}_{tr} \cdot \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{g}_{tr}\}$$

Seules des expériences de mesure de conductivité thermique peuvent décider des arguments que l'on peut conserver ou éliminer.

5.4 Critères de limite élastique en élasticité isotrope transverse

Comme en élasticité isotrope, des considérations microscopiques peuvent suggérer des critères macroscopiques de limite élastique portant sur la déformation macroscopique :

1. Limitation de la dilatation surfacique actuelle des facettes matérielles de normale \mathbf{n}_t (décollements de fibre dans les milieux fibreux ou cavitation dans les lamelles) :

$$K_s(\mathbf{n}_t) = \sqrt{\frac{B_{III}}{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}} \leq K_{s \text{ lim}}$$

2. Limitation de la dilatation linéique actuelle dans la direction d'anisotropie (rupture des fibres ou décollement des lamelles) :

$$K_l(\mathbf{n}_t) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{N}_t}} \leq K_{l \text{ lim}}$$

3. Limitation de la distorsion angulaire maximale actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales dont l'une est la direction d'anisotropie (délaminage de fibre ou de lamelle par cisaillement). On démontre en annexe E.2 [p. 170] que ce critère conduit à :

$$\delta_{max}^a (1) = \frac{K_l(\mathbf{n}_t) K_s(\mathbf{n}_t)}{K_v} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{B} : \mathbf{N}_t) (\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{N}_t)}} \leq \delta_{lim}^a$$

4. Limitation de la distorsion angulaire maximale actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales à la direction d'anisotropie (distorsion angulaire dans les lamelles). On démontre en annexe E.3 [p. 171] que ce critère conduit à :

$$\delta_{max}^a (2) = \frac{B_I - K_l(\mathbf{n}_t)^2}{2K_s(\mathbf{n}_t)} = \frac{\sqrt{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}}{2\sqrt{B_{III}}} \left(B_I - \frac{1}{\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{N}_t} \right) \leq \delta_{lim}^a$$

On montre en annexe E.3 [p. 171] que $\delta_{max}^a (2) \geq \delta_{max}^a (1)$.

⁽¹³⁾ L'isotropie des fonctions α_1 et α_2 est nécessaire pour garantir l'universalité de la loi de conduction thermique.

5. Limitation de la distorsion angulaire actuelle *de tout couple* de directions matérielles initialement orthogonales quelle que soit sa position par rapport à la direction d'anisotropie :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right) \leq \delta_{lim}^a \quad (\text{critère isotrope})$$

Ce critère limite évidemment les maximums de distorsion angulaire particuliers précédents (items 3 et 4).

6. Limitation de la distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales dont l'une est la direction d'anisotropie. On démontre en annexe E.3 [p. 171] que ce critère conduit à :

$$\delta_{max}^s = \delta_{max}^a (2) = \frac{\sqrt{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}}{2\sqrt{B_{III}}} \left(B_I - \frac{1}{\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{N}_t} \right) = \frac{B_I - K_I(\mathbf{n}_t)^2}{2K_s(\mathbf{n}_t)} \leq \delta_{lim}^s$$

7. Limitation de la distorsion stérique maximale actuelle de trois directions initialement orthogonales quelle que soit leur orientation par rapport à la direction d'anisotropie :

$$\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{B_{III}}} \leq \delta_{lim}^s \quad (\text{critère isotrope})$$

Ce critère limite évidemment le maximum de distorsion stérique particulier précédent (item 6). Il limite aussi les maximums de distorsion angulaire. Ce dernier critère de limite élastique par distorsion est donc le plus restrictif et donc le plus « prudent » du point de vue des distorsions. Il est aussi le plus facile à exploiter.

Ces différents critères de limite élastique ne sont pas équivalents. Chacun de ces critères définit une frontière⁽¹⁴⁾ dans l'espace des états. Ils peuvent être utilisés seuls ou en combinaison avec d'autres. Il est raisonnable d'utiliser des limitations en distorsion et des limitations en en dilatation linéique. L'ensemble des frontières de chaque critère délimite la région de l'espace des états dans laquelle ces critères de limite élastique sont satisfaits.

Un ensemble de critères qui semble raisonnable à l'auteur est l'association des items 1, 2 et 7 [p. 93]. Ces trois critères définissent trois frontières (hypersurfaces) dans l'espace des états. Lors d'une évolution de particule dans l'espace des états, une limite certaine élastique est atteinte si cette évolution dans l'espace des états atteint l'une de ces frontières.

On peut aussi proposer d'autres formes de critères : une limitation d'énergie(s) particulière(s) ou une réglementation (protection juridique !).

5.5 En bref...

L'élasticité isotrope transverse est le comportement élastique des milieux continus solides déformables à une seule direction d'anisotropie (milieux fibreux ou lamellaires). Les variables d'état sont la température actuelle, un tenseur de déformation actuelle objectif et la direction actuelle d'anisotropie. Elles se ramènent donc au plus à 6 variables d'état réduites indépendantes et objectives. La nullité de la dissipation intrinsèque (élasticité) dans toute évolution conduit à la forme générale de la loi de comportement mécanique des solides élastiques isotropes transverses.

⁽¹⁴⁾ En élasticité isotrope transverse l'espace des états est au plus de dimension 6 [éq. (5.1) p. 86]. Dans un espace des états de dimension m , les frontières définies par une inégalité sont donc des hypersurfaces de dimension $m - 1$.

La loi de comportement mécanique la plus maniable est celle écrite avec le tenseur de déformation objectif \mathbf{B} ⁽¹⁵⁾. Le comportement du milieu élastique isotrope transverse est complètement déterminé par la connaissance de l'expression de la fonction d'état *énergie libre massique de Helmholtz* en fonction des variables d'état réduites retenues pour le modèle. Les deux fonctions d'état fondamentales *énergie interne massique* et *entropie massique* dont l'existence est imposée par la thermodynamique s'en déduisent par la relation de Helmholtz et la définition de l'énergie libre massique de Helmholtz. L'admissibilité thermodynamique [déf. 1.3 p. 13] du modèle est donc assurée.

Après avoir choisi un ensemble de variables d'état réduites indépendantes et pertinentes, la construction des fonctions d'état et de la loi de comportement se fait suivant une démarche semblable à celle utilisée en élasticité isotrope. Pour terminer la construction du modèle, il faut construire une expression de la fonction d'état *énergie libre massique de Helmholtz* en fonction des variables d'état réduites d'une manière physiquement sensée afin d'éviter de proposer les lois de comportement mécanique exotiques physiquement peu vraisemblables. Un exemple de construction d'une énergie libre massique de Helmholtz en fonction de variables d'état réduites est donné dans le chapitre suivant.

La loi de comportement thermique devrait en principe être aussi isotrope transverse. On en a proposé une forme assez générale, thermodynamiquement admissible, qu'il faut identifier expérimentalement.

De même qu'en élasticité isotrope, on peut proposer plusieurs critères de limite élastique limitant des distorsions angulaires ou stériques (particulières ou non) et limitant des dilatations linéiques (particulières ou non). Une bonne définition des états élastiques possibles dans l'espace des états devrait employer plusieurs critères pour se protéger de tous les phénomènes microscopiques (réarrangements ou ruptures de liaisons) qui risquent de se produire dans un milieu anisotrope. On a proposé une sélection raisonnable de trois critères.

Il n'est pas interdit d'envisager des anisotropies plus complexes avec deux ou plus directions d'anisotropie (par exemple des tissages enrobés). La complexité des modèles augmente rapidement avec le nombre de directions d'anisotropie car le nombre de variables d'état réduites devient de plus en plus grand⁽¹⁶⁾, ce qui rend leur identification expérimentale plus laborieuse. Cette démarche sera synthétisée dans le chapitre 7 [p. 107].

⁽¹⁵⁾ Le lecteur courageux pourra, s'il le désire vraiment, réécrire cette loi de comportement mécanique avec des tenseurs de déformation non objectifs tels que \mathbf{C} , \mathbf{U} , \mathbf{L} ou \mathbf{E} .

⁽¹⁶⁾ Voir l'annexe B du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

Construction d'un modèle d'élasticité isotrope transverse

La méthode de construction d'un modèle de comportement élastique isotrope transverse utilisée dans ce chapitre est très proche de celle utilisée au chapitre 3 [p. 51] pour la construction d'un modèle élastique isotrope. Afin de construire un modèle simple et facile à identifier, on cherche d'une part à choisir des variables d'état réduites en nombre limité et ayant une signification physique claire, puis on construit une expression physiquement motivée⁽¹⁾ de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction de ces variables d'état en étudiant les contributions de chacune d'elles dans l'énergie libre massique de Helmholtz.

6.1 Choix des variables d'état réduites

Dans un modèle élastique isotrope transverse, les variables d'état sont *a priori* la température (imposée par le second principe), un tenseur de déformation objectif (on choisit ici le tenseur de déformation \mathbf{B}) et l'unique direction actuelle d'anisotropie $\mathbf{N}_t = \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t$. Puisque les fonctions d'état scalaires et objectives sont isotropes⁽²⁾ pour leurs arguments tensoriels objectifs, la théorie des fonctions isotropes implique que la liste des variables d'état réduites indépendantes contient au plus 6 scalaires :

- la température actuelle (un scalaire),
- les invariants du tenseur de la déformation actuelle (trois scalaires),
- l'orientation relative entre la déformation *actuelle* et la direction d'anisotropie *actuelle* (deux scalaires).

Dans l'exemple de modèle élastique isotrope qui a été construit au chapitre 3 [p. 51], on avait réduit à 2 le nombre de variables d'état réduites de déformation :

$$K_v = \sqrt{B_{III}} \text{ (dilatation volumique)} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{B_{III}}} \text{ (distorsion stérique maximale } \delta_{max}^s \text{)}$$

ce qui revient à ignorer l'influence de l'invariant B_{II} dans le système des trois invariants fondamentaux $\{B_I, B_{II}, B_{III}\}$. Ce choix était motivé par le fait que toutes les déformations ayant la même distorsion stérique maximale δ pouvaient être considérées comme équivalentes [hyp. 3.1 p. 52]⁽³⁾.

En isotropie transverse, il faut ajouter un ou plusieurs invariants pour prendre en compte l'orientation relative de la direction actuelle d'anisotropie \mathbf{N}_t par rapport au tenseur de déformation

⁽¹⁾ C'est-à-dire basée sur des expériences, éventuellement idéalisées.

⁽²⁾ Au sens mathématique de l'isotropie des fonctions scalaires à arguments tensoriels.

⁽³⁾ Relire éventuellement la remarque *Justification cinématique de l'hypothèse* p. 53.

actuel, c'est-à-dire par rapport aux directions propres actuelles de la déformation. Les invariants « mathématiquement naturels ⁽⁴⁾ » qui reflètent ces orientations relatives sont $I_1^B = \mathbf{B} : \mathbf{N}_t$ et $I_2^B = \mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t$ [éq. (5.1) p. 86]. On peut en donner une interprétation cinématique : la dilatation surfacique et la dilatation linéique dans la direction actuelle d'anisotropie \mathbf{n}_t s'expriment en fonction de ces deux invariants ⁽⁵⁾ :

$$K_s(\mathbf{n}_t) = \frac{K_v}{\sqrt{\underbrace{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}_{I_1^B}}} \quad \text{et} \quad K_l(\mathbf{n}_t) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{N}_t}} = \frac{K_v}{\sqrt{\underbrace{\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t}_{I_2^B} - B_{\text{I}} \underbrace{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}_{I_1^B} + B_{\text{II}}}} \quad (\text{Cayley-Hamilton})$$

Dans la construction de ce modèle isotrope transverse, on convient, comme en élasticité isotrope, de ne représenter la déformation que par les deux variables d'état cinématiques K_v et δ (et donc d'ignorer l'influence de l'invariant B_{II}). Il est donc judicieux de ne tenir compte que d'une information partielle pour l'orientation de la direction d'anisotropie par rapport à l'infinité de tenseurs de déformation ayant la même dilatation volumique K_v et la même distorsion stérique maximale δ (invariant B_{II} quelconque). On choisit donc de ne retenir comme variable d'état supplémentaire que l'invariant I_1^B suivant, qui ne prend pas en compte l'invariant B_{II} :

$$I_1^B = \mathbf{B} : \mathbf{N}_t = \frac{K_v^2}{K_s(\mathbf{n}_t)^2} \quad (6.1)$$

Remarque – Puisque qu'il existe une infinité de tenseurs de déformation ayant la même dilatation volumique K_v et la même distorsion stérique maximale δ (ils ne sont distingués que par la valeur de B_{II} [ann. C.3 p. 159]), il aurait été incohérent de chercher à représenter complètement l'orientation de la direction d'anisotropie par rapport à cette infinité de tenseurs de déformation équivalents.

Par ailleurs, dans une déformation sphérique de dilatation volumique K_v (c'est-à-dire $\mathbf{B} = K_v^{\frac{2}{3}} \mathbf{G}$), les variables K_v et I_1^B sont liées :

$$I_1^{B^{\text{sph}}} = K_v^{\frac{2}{3}} \mathbf{G} : \mathbf{N}_t = K_v^{\frac{2}{3}} \quad (\text{seulement dans une déformation sphérique})$$

On prend donc comme variable d'état réduite unique d'anisotropie la variable a suivante :

$$a = \frac{I_1^B}{K_v^{\frac{2}{3}}} = \frac{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}{B_{\text{III}}^{\frac{1}{3}}} = \frac{K_v^{\frac{4}{3}}}{K_s(\mathbf{n}_t)^2} \quad [\text{éq. (6.1) p. 98}] \quad (6.2)$$

Cette variable d'état reste égale à 1 dans toute déformation sphérique. Cette propriété sera utile dans la construction d'une forme générale de l'énergie libre massique de Helmholtz [sec. 6.3 p. 100]. Les variables d'état réduites retenues pour ce modèle sont donc :

- **Hypothèse 6.1 – Variables d'état du modèle.** Dans le modèle élastique isotrope transverse construit ici, on choisit les seules variables d'état réduites indépendantes suivantes :
 1. la température T (imposée par le second principe thermodynamique),
 2. le tenseur de déformation représenté par les deux seules variables K_v (dilatation volumique) et δ (distorsion stérique maximale),
 3. une variable d'anisotropie a [éq. (6.2) p. 98] qui reflète (partiellement) l'orientation de la direction d'anisotropie par rapport au tenseur de déformation.

⁽⁴⁾ C'est-à-dire proposés par le théorème des fonctions isotropes.

⁽⁵⁾ Sections 4.6.3 et 4.3.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

Par ces hypothèses, on *décide* que toutes les déformations de même dilatation volumique K_v et de même distorsion stérique maximale δ sont considérées comme équivalentes et que la seule information utile pour prendre en compte l'orientation de la direction d'anisotropie par rapport aux directions propres de déformation est la variable a , égale à 1 dans toute déformation sphérique. De ce fait, les influences des invariants B_{II} et I_2^B sont ignorées et la dimension de l'espace des états de ce modèle élastique isotrope transverse est réduite à 4 (au lieu de 6 sans les hypothèses 6.1 [p. 98]), ce qui accessoirement rend le modèle plus facile à identifier.

6.2 Loi de comportement mécanique de ce modèle isotrope transverse

Pour transformer l'expression de la loi de comportement élastique isotrope transverse générale [éq. (5.7) p. 87] écrite avec les six variables d'état $(B_I, B_{II}, B_{III}, I_1^B, I_2^B)$, on établit aisément les relations de changement de variables d'état réduites :

$$K_v = B_{III}^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \delta = \delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} B_I^{\frac{3}{2}} B_{III}^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad a = I_1^B B_{III}^{-\frac{1}{3}} \quad [\text{éq. (6.2) p. 98}]$$

Les relations inverses sont :

$$B_{III} = K_v^2 \quad ; \quad B_I = 3 K_v^{\frac{2}{3}} \delta^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad I_1^B = a K_v^{\frac{2}{3}}$$

Remarque – Le fait de pouvoir écrire les relations directes et inverses entre les systèmes d'invariants valide *a posteriori* le choix fait pour les variables d'états : le changement de variables d'état réduites $\{T, B_I, B_{III}, I_1^B\} \leftrightarrow \{T, K_v, \delta, a\}$ est bien biunivoque ⁽⁶⁾.

Pour ce modèle, on pose donc le changement de variables d'état suivant :

$$\psi^m = f_{\psi}^B(T, B_I, B_{II}, B_{III}, I_1^B, I_2^B) = f_{\psi}(T, K_v, \delta, a)$$

Les hypothèses 6.1 [p. 98] reviennent à ignorer l'influence des invariants initiaux B_{II} et I_2^B . On en déduit les relations entre dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_T f_{\psi}^B &= \partial_T f_{\psi} \partial_T T + \partial_{K_v} f_{\psi} \partial_T K_v + \partial_{\delta} f_{\psi} \partial_T \delta + \partial_a f_{\psi} \partial_T a \\ &= \partial_T f_{\psi} + 0 + 0 + 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\begin{aligned} \partial_{B_I} f_{\psi}^B &= \partial_T f_{\psi} \partial_{B_I} T + \partial_{K_v} f_{\psi} \partial_{B_I} K_v + \partial_{\delta} f_{\psi} \partial_{B_I} \delta + \partial_a f_{\psi} \partial_{B_I} a \\ &= 0 + 0 + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2 K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_{\delta} f_{\psi} + 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \partial_{B_{II}} f_{\psi}^B &= \partial_T f_{\psi} \partial_{B_{II}} T + \partial_{K_v} f_{\psi} \partial_{B_{II}} K_v + \partial_{\delta} f_{\psi} \partial_{B_{II}} \delta + \partial_a f_{\psi} \partial_{B_{II}} a \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \partial_{B_{III}} f_{\psi}^B &= \partial_T f_{\psi} \partial_{B_{III}} T + \partial_{K_v} f_{\psi} \partial_{B_{III}} K_v + \partial_{\delta} f_{\psi} \partial_{B_{III}} \delta + \partial_a f_{\psi} \partial_{B_{III}} a \\ &= 0 + \frac{1}{2 K_v} \partial_{K_v} f_{\psi} - \frac{\delta}{2 K_v^2} \partial_{\delta} f_{\psi} - \frac{a}{3 K_v^2} \partial_a f_{\psi} \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \partial_{I_1^B} f_{\psi}^B &= \partial_T f_{\psi} \partial_{I_1^B} T + \partial_{K_v} f_{\psi} \partial_{I_1^B} K_v + \partial_{\delta} f_{\psi} \partial_{I_1^B} \delta + \partial_a f_{\psi} \partial_{I_1^B} a \\ &= 0 + 0 + 0 + \frac{1}{K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_a f_{\psi} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \partial_{I_2^B} f_{\psi}^B &= \partial_T f_{\psi} \partial_{I_2^B} T + \partial_{K_v} f_{\psi} \partial_{I_2^B} K_v + \partial_{\delta} f_{\psi} \partial_{I_2^B} \delta + \partial_a f_{\psi} \partial_{I_2^B} a \\ &= 0 + 0 + 0 + 0 \end{aligned} \quad (6.8)$$

⁽⁶⁾ Relire éventuellement la remarque *Commentaires*, à la fin de la section 4.1.3 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

On rappelle la loi de comportement mécanique générale en isotropie transverse avec le tenseur de déformation objectif \mathbf{B} [éq. (5.7) p. 87] s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{\text{III}}}} \left(B_{\text{III}} \partial_{B_{\text{III}}} f_{\psi}^B \mathbf{G} + (\partial_{B_1} f_{\psi}^B + B_1 \partial_{B_{\text{II}}} f_{\psi}^B) \mathbf{B} - \partial_{B_{\text{II}}} f_{\psi}^B \mathbf{B}^2 \right) + \frac{2\rho_0}{\sqrt{B_{\text{III}}}} \left(\underbrace{\partial_{I_1^B} f_{\psi}^B (\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t - I_1^B \mathbf{N}_t)}_{2\text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B})} + \underbrace{\partial_{I_2^B} f_{\psi}^B (\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2 + \mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{N}_t - I_2^B \mathbf{N}_t + \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B})}_{2\text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2)} \right)$$

Compte-tenu des dérivées partielles (6.3) à (6.8), elle se réduit à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \left(\partial_{K_v} f_{\psi} - \frac{\delta}{K_v} \partial_{\delta} f_{\psi} - \frac{2a}{3K_v} \partial_a f_{\psi} \right) \mathbf{G} + \rho_0 \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{K_v^{\frac{5}{3}}} \partial_{\delta} f_{\psi} \mathbf{B} + \rho_0 \left(\frac{4}{K_v^{\frac{5}{3}}} \text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) - \frac{2a}{K_v} \mathbf{N}_t \right) \partial_a f_{\psi} \quad (6.9)$$

Sous les hypothèses 6.1 [p. 98], on constate que les coefficients des trois tenseurs \mathbf{B}^2 , $\text{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2)$ et $\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}$ (tenseurs de degré 2 en \mathbf{B}) sont nuls. Par ailleurs, on vérifie aisément que si l'énergie libre massique de Helmholtz n'est pas fonction de la variable d'anisotropie a , on retrouve bien la loi de comportement élastique isotrope [éq. (3.4) p. 54] construite au chapitre 3.

6.3 Forme générale des fonctions d'état de ce modèle isotrope transverse

Pour construire une expression raisonnée de l'énergie libre massique de Helmholtz d'un état quelconque, on définit le chemin suivant, où dans chaque chemin élémentaire une seule variable d'état évolue :

$$E_0 = (T_0, 1, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(1)}} E_1 = (T, 1, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(2)}} E_2 = (T, K_v, 1, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(3)}} E_3 = (T, K_v, \delta, 1) \xrightarrow{\mathcal{C}^{(4)}} E_t = (T, K_v, \delta, a)$$

Rappel – L'énergie libre massique de Helmholtz Ψ^m est une fonction d'état. Sa variation pour passer de l'état E_0 à l'état quelconque E_t ne dépend que de l'état initial et de l'état final. Comme en élasticité isotrope [sec. 3.3.1 p. 55], le chemin choisi ici est constitué de quatre chemins élémentaires dans lesquels une seule variable d'état évolue, les autres restant constantes, ce qui permettra de construire une expression de Ψ^m physiquement raisonnée.

L'énergie libre massique de Helmholtz d'un état quelconque peut donc s'écrire sous la forme :

$$\psi^m = g^{(1)}(T) + g^{(2)}(T, K_v) + g^{(3)}(T, K_v, \delta) + g^{(4)}(T, K_v, \delta, a) \quad (6.10)$$

- $g^{(1)}(T)$ est la variation d'énergie libre massique de Helmholtz dans le chemin $\mathcal{C}^{(1)}$ où :
 $\dot{T} \neq 0$; $K_v = 1$; $\dot{K}_v = 0$; $\delta = 1$; $\dot{\delta} = 0$; $a = 1$; $\dot{a} = 0$
- $g^{(2)}(T, K_v)$ est la variation d'énergie libre massique de Helmholtz dans le chemin $\mathcal{C}^{(2)}$ où :
 $\dot{T} = 0$; $\dot{K}_v \neq 0$; $\delta = 1$; $\dot{\delta} = 0$; $a = 1$; $\dot{a} = 0$
- $g^{(3)}(T, K_v, \delta)$ est la variation d'énergie libre massique de Helmholtz dans le chemin $\mathcal{C}^{(3)}$ où :
 $\dot{T} = 0$; $\dot{K}_v = 0$; $\dot{\delta} \neq 0$; $a = 1$; $\dot{a} = 0$
- $g^{(4)}(T, K_v, \delta, a)$ est la variation d'énergie libre massique de Helmholtz dans le chemin $\mathcal{C}^{(4)}$ où :
 $\dot{T} = 0$; $\dot{K}_v = 0$; $\dot{\delta} = 0$; $\dot{a} \neq 0$

avec les quatre conditions :

$$\begin{aligned} g^{(1)}(T_0) &= 0 \quad ; \quad g^{(2)}(T, 1) = 0, \quad \forall T \quad ; \\ g^{(3)}(T, K_v, 1) &= 0, \quad \forall (T, K_v) \quad ; \quad g^{(4)}(T, K_v, \delta, 1) = 0, \quad \forall (T, K_v, \delta) \end{aligned} \quad (6.11)$$

La forme générale de l'entropie massique se déduit de la relation de Helmholtz :

$$\begin{aligned} f_s &= -\partial_T f_\psi \quad [\text{éq. (5.6) p. 87}] \\ &= -\partial_T g^{(1)} - \partial_T g^{(2)} - \partial_T g^{(3)} - \partial_T g^{(4)} \end{aligned} \quad (6.12)$$

L'énergie interne massique se déduit de la définition de l'énergie libre de Helmholtz :

$$\begin{aligned} f_e &= f_\psi + T f_s \\ &= g^{(1)} + g^{(2)} + g^{(3)} + g^{(4)} - T (\partial_T g^{(1)} + \partial_T g^{(2)} + \partial_T g^{(3)} + \partial_T g^{(4)}) \end{aligned} \quad (6.13)$$

Ainsi, les quatre fonctions $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, $g^{(3)}$ et $g^{(4)}$ déterminent toutes les fonctions d'état du modèle et donc aussi la loi de comportement mécanique.

6.4 Analyse des évolutions élémentaires

Rappel – Comme dans la construction du modèle élastique isotrope, on suppose que les quatre évolutions $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{E}^{(2)}$, $\mathcal{E}^{(3)}$ et $\mathcal{E}^{(4)}$ sont réalisées dans les conditions expérimentales idéales suivantes :

1. les effets de la pesanteur sont négligeables ;
2. les mesures sont relevées à vitesse nulle (pas de variation d'énergie cinétique dans l'expression du premier principe de la thermodynamique) ;
3. l'état (T, K_v, δ, a) est uniforme dans l'éprouvette ;
4. les mesures ne doivent être relevées que quand le champ de températures s'est uniformisé.

Dans cette section, on se contente de donner les points clés et les principaux résultats. Le détail des calculs est donné dans la feuille de calcul en annexe J [p. 231].

6.4.1 Analyse du chemin $\mathcal{E}^{(1)}$

Dans ce chemin, la variation de température se fait sans déformation ($\mathbf{B} = \mathbf{G}$). Le tenseur des contraintes se réduit donc à :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho_0 \left(\partial_{K_v} f_\psi + \frac{1}{3} \partial_a f_\psi \right) \mathbf{G} - \rho_0 \partial_a f_\psi \mathbf{N}_t \quad [\text{éq. (6.9) p. 100}]$$

Remarque – Contrairement au cas isotrope, ici le tenseur des contraintes dans le chemin $\mathcal{E}^{(1)}$ (variation de température à déformation bloquée) n'est pas sphérique.

On mesure la quantité de chaleur massique $[\text{J.kg}^{-1}]$ $Q_{exp}^{(1)}(T)$ nécessaire à la variation de température à déformation bloquée. L'écriture de la conservation globale de l'énergie dans cette évolution conduit à une équation différentielle qui détermine la fonction $g^{(1)}$:

$$\underbrace{g^{(1)}(T) - T (\partial_T g^{(1)} + \partial_T g^{(2)}(T, 1) + \partial_T g^{(3)}(T, 1, 1) + \partial_T g^{(4)}(T, 1, 1, 1))}_{\text{variation d'énergie interne [éq. (6.13) p. 101]} } = Q_{exp}^{(1)}(T)$$

dont la solution est :

$$g^{(1)}(T) = -T \left(\int_{T_0}^T \frac{Q_{exp}^{(1)}(T)}{T^2} dT + \int_{T_0}^T \frac{\partial_T g^{(2)}(T, 1) + \partial_T g^{(3)}(T, 1, 1) + \partial_T g^{(4)}(T, 1, 1, 1)}{T} dT \right)$$

Les fonctions $g^{(2)}$, $g^{(3)}$ et $g^{(4)}$ seront déterminées par l'analyse des chemins suivants.

6.4.2 Analyse du chemin $\mathcal{C}^{(2)}$

Dans ce chemin, on impose une déformation sphérique : $\mathbf{B} = K_v^{\frac{2}{3}} \mathbf{G}$ et la seule variable d'état qui évolue est la dilatation volumique K_v (par construction la variable d'anisotropie a reste égale à 1 [éq. (6.2) p. 98]). Dans ce chemin, le tenseur des contraintes est donc une fonction de T et K_v , mais contrairement au cas isotrope, il n'est pas sphérique [éq. (6.9) p. 100].

On mesure la *contrainte moyenne* ⁽⁷⁾ $\sigma_{m\ exp}^{(2)}(T, K_v) = \frac{1}{3} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}^{(2)}$:

$$\sigma_{m\ exp}^{(2)} = \rho_0 \left(\partial_{K_v} g^{(2)}(T, K_v) + \partial_{K_v} g^{(3)}(T, K_v, 1) + \partial_{K_v} g^{(4)}(T, K_v, 1, 1) \right)$$

La solution de cette équation différentielle en $g^{(2)}$ est :

$$g^{(2)}(T, K_v) = \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \sigma_{m\ exp}^{(2)}(T, K_v) dK_v - \int_1^{K_v} \left(\partial_{K_v} g^{(3)}(T, K_v, 1) + \partial_{K_v} g^{(4)}(T, K_v, 1, 1) \right) dK_v$$

Les fonctions $g^{(3)}$ et $g^{(4)}$ seront déterminées par l'analyse des chemins suivants.

6.4.3 Analyse du chemin $\mathcal{C}^{(3)}$

Cette évolution est une déformation isovolume de distorsion stérique maximale δ laissant invariante la variable d'état d'anisotropie $a = 1$. Le lecteur vérifiera aisément, avec un peu de cinématique, qu'un glissement cinématique [fig. 3.1 p. 63] de direction \mathbf{e}_1 dans un plan orthogonal à la direction d'anisotropie ($\mathbf{n}_t = \mathbf{e}_3$) laisse bien invariante la direction d'anisotropie et que dans ces conditions la variable d'anisotropie a reste bien égale à 1.

Comme en élasticité isotrope la variable d'état δ est contrôlée par le paramètre de glissement : $\gamma = \sqrt{3} (\delta^{\frac{2}{3}} - 1)^{\frac{1}{2}}$. Le tenseur des contraintes sous cette déformation est une fonction de (T, K_v, δ) . Dans cette expérience on mesure la contrainte tangentielle dans le plan de glissement : $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) = \mathbf{e}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_2$ où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{n}_t\}$ est une base orthonormée ; ce qui conduit à l'équation différentielle :

$$\tau_{exp}^{(3)} = \frac{\rho_0 \delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}{K_v} \left(\partial_{\delta} g^{(3)}(T, K_v, \delta) + \partial_{\delta} g^{(4)}(T, K_v, \delta, 1) \right)$$

dont la solution est :

$$g^{(3)}(T, K_v, \delta) = \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^{\delta} \frac{\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} d\delta - \int_1^{\delta} \partial_{\delta} g^{(4)}(T, K_v, \delta, 1) d\delta$$

La fonction $g^{(4)}$ est déterminée dans le chemin suivant.

6.4.4 Analyse du chemin $\mathcal{C}^{(4)}$

L'objectif de cette série de mesures est de faire varier le paramètre d'anisotropie $a = I_1^B K_v^{-\frac{2}{3}}$ à T , K_v et δ constants. Le tenseur de déformation \mathbf{B} est donc identique à celui du chemin $\mathcal{C}^{(3)}$, mais la direction actuelle d'anisotropie \mathbf{n}_t est maintenant dans le plan de glissement ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$) [fig. 3.1 p. 63]. Le lecteur vérifiera aisément avec un peu de cinématique que, quelle que soit

⁽⁷⁾ Le tenseur des contraintes n'étant pas sphérique, il faut mesurer la contrainte normale dans la direction d'anisotropie $\mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t$, y ajouter deux fois la contrainte normale transverse $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}$ et diviser le tout par 3.

la valeur du paramètre de glissement γ , la direction d'anisotropie reste bien dans le plan de glissement $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

On montre dans l'annexe C.4 [p. 161] que pour décrire toutes les valeurs de la variable d'état a , il suffit de faire varier la direction *actuelle* d'anisotropie \mathbf{n}_t dans le plan de glissement $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Les valeurs extrémales de la variable d'anisotropie a sont obtenues lorsque la direction *actuelle* d'anisotropie \mathbf{N}_t est confondue avec les directions propres *actuelles* de déformation :

$$a_{max} = \lambda^2 \quad ; \quad a_{min} = \lambda^{-2} \quad (6.14)$$

où λ^2 est la plus grande valeur propre du tenseur de déformation $K_v^{-\frac{2}{3}} \mathbf{B}$ (de déterminant 1) :

$$\lambda = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi} \geq 1 \quad \text{où } \phi = \text{Arctan} \frac{\gamma}{2} \quad [\text{fig. C.1 p. 159}] \quad (6.15)$$

L'angle polaire dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ de la direction propre associée à λ est :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad \text{où } \phi = \text{Arctan} \frac{\gamma}{2} \quad [\text{fig. C.1 p. 159}] \quad (6.16)$$

Dans une expérience de glissement avec la direction d'anisotropie \mathbf{n}_t dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, il est donc possible d'atteindre un état (T, K_v, δ, a) arbitraire où $a \in [\lambda^2; \lambda^{-2}]$.

Dans l'exploitation des mesures, il faut prendre garde à tenir compte de la déviation de la direction d'anisotropie pendant le mouvement de glissement. La direction actuelle d'anisotropie est une fonction de la direction initiale d'anisotropie et de la déformation γ (ou δ). Les relations entre la direction actuelle et la direction initiale d'anisotropie dans un mouvement de glissement ont été rappelées en section 5.2.3 [p. 88].

- **Hypothèse 6.2 – Hypothèse de calcul.** On cherche une solution en $g^{(4)}$ telle que :

$$\partial_\delta \partial_a g^{(4)} = 0 \quad \Rightarrow \quad g^{(4)}(T, K_v, \delta, a) = g^{(41)}(T, K_v, \delta) + g^{(42)}(T, K_v, a)$$

Commentaire à propos de l'hypothèse 6.2 – Cette hypothèse de calcul apparaît comme une hypothèse *ad hoc* qui a permis à l'auteur de trouver une solution à l'équation différentielle en $g^{(4)}$. *Ce procédé ne satisfait pas pleinement l'auteur* : il n'a pas su prouver que la solution en $g^{(4)}$ de l'équation différentielle était *nécessairement* de la forme proposée dans l'hypothèse 6.2 [p. 103]. Autrement dit, il existe peut-être une solution en $g^{(4)}$ plus générale que celle utilisée dans la suite du calcul.

Si un lecteur plus doué que l'auteur dans le domaine des équations différentielles savait prouver qu'il n'y a pas de solution en $g^{(4)}$ autre que sous la forme proposée dans l'hypothèse 6.2 [p. 103], l'auteur en serait soulagé et reconnaissant en pouvant supprimer cette hypothèse *ad hoc* dans une éventuelle prochaine version de ce texte ⁽⁸⁾.

À toutes fins utiles, on reporte ici l'équation différentielle en $g^{(4)}(T, K_v, \delta, a)$ à résoudre dans le chemin $\mathcal{C}^{(4)}$. Attention ! ce qui suit est une *transcription manuelle* (un peu plus lisible) de la ligne *Dut [93]*, dans la page 11 de la feuille de calcul *Mathematica* en annexe J [p. 231] où λ et θ_1 sont des constantes dans un glissement δ donné :

$$\begin{aligned} \tau_{exp}^{(4)} = & \frac{1}{6K_v \lambda^2} \left[6\rho_0 \left((-1 + \lambda^4) \sin(2\theta_1) - \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{(1 - a + \lambda^2 + \lambda^4) (-2 \sqrt{-\lambda^4 - a^2 \lambda^4 + a(\lambda^2 + \lambda^6)} \cos(2\theta_1) + (1 - 2a\lambda^2 + \lambda^4) \sin(2\theta_1))}{-1 + \lambda^4} \right) \partial_a g^{(4)}(T, K_v, \delta, a) + \right. \\ & \left. \frac{1}{\sqrt{-1 + \delta^{2/3}}} \left((-1 + \lambda^4) \sin(2\theta_1) (\sqrt{3} K_v \tau_{exp}^{(3)} + 3 \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \delta^{1/3} \rho_0 (-\partial_\delta g^{(4)}(T, K_v, \delta, 1) + \partial_\delta g^{(4)}(T, K_v, \delta, a))) \right) \right] \end{aligned}$$

⁽⁸⁾ Naturellement en reproduisant cette preuve et en citant l'auteur.

Sous l'hypothèse de calcul 6.2 [p. 103], la contrainte tangentielle dans le chemin $\mathcal{C}^{(4)}$ conduit à l'équation différentielle :

$$\tau_{exp}^{(4)}(T, K_v, \delta, a) = \tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) + \frac{\rho_0 \partial_a g^{(42)} f(a)}{K_v \lambda (\lambda^2 - 1) (\lambda^2 + 1)}$$

où :

$$f(a) = 2 \sqrt{(\lambda^2 - a)(a\lambda^2 - 1)} (-1 + a\lambda^2 - \lambda^4) \cos(2\theta_1) + \lambda (3a - 4\lambda^2 - 2a^2\lambda^2 + 3a\lambda^4) \sin(2\theta_1) \quad (\text{Out [115], page 15 annexe J [p. 231]}) \quad (6.17)$$

Rappels – On rappelle que, dans un glissement, la plus grande dilatation linéique λ est supérieure à 1 [éq. (6.15) p. 103] et que l'angle polaire de la première direction propre $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{4}$ [éq. (6.16) p. 103] ne sont fonction que de l'intensité γ du glissement et donc de la distorsion stérique maximale δ . Les grandeurs λ et θ_1 sont donc constantes dans le chemin $\mathcal{C}^{(4)}$.

Par ailleurs, la variable d'anisotropie a est toujours telle que $\lambda^{-2} \leq a \leq \lambda^2$ [éq. (6.14) p. 103]. Le radical apparaissant dans la fonction $f(a)$ est donc toujours réel.

Compte-tenu de la condition $g^{(4)}(T, K_v, \delta, 1) = 0$, la solution de la fonction $g^{(4)}$ est :

$$g^{(4)} = \frac{K_v \lambda (\lambda^2 - 1) (\lambda^2 + 1)}{\rho_0} \int_1^a \frac{\tau_{exp}^{(3)} - \tau_{exp}^{(4)}}{f(a)} da \quad (f(a) \text{ est défini en éq. (6.17) p. 104})$$

Remarques – Il est remarquable de constater que la fonction $g^{(4)}$ est déterminée par la différence de contraintes $\tau_{exp}^{(3)} - \tau_{exp}^{(4)}$. C'est la variation de cette différence en fonction de a à (T, K_v, δ) constants qui doit être mesurée ou idéalisée.

Par ailleurs, pour mettre en évidence le fait que la fonction $f(a)$ est une fonction périodique (de période π) de l'orientation actuelle α_t de la direction d'anisotropie dans le plan de cisaillement, on montre à la fin de l'annexe J [p. 231] (Out [116] p. 15) qu'on peut la mettre sous la forme :

$$f(a) = -\frac{\lambda^4 - 1}{4\lambda} \left(3(\lambda^4 - 1) \sin(2\theta_1) + 2(\lambda^4 + 1) \sin(2\alpha_t + 2\theta_1) - (\lambda^4 - 1) \sin(4\alpha_t + 2\theta_1) \right)$$

Processus d'exploitation du chemin $\mathcal{C}^{(4)}$

Pour exploiter correctement l'expérience $\mathcal{C}^{(4)}$, il faut :

1. Amener l'éprouvette dans un état $(T, K_v, 1, 1)$ connu.
2. Mesurer l'orientation *initiale* β_0 de la direction d'anisotropie avec la direction de glissement \mathbf{e}_1 .
3. Calculer et imposer le glissement plan γ nécessaire pour obtenir la distorsion stérique maximale δ désirée :

$$\gamma = \sqrt{3} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1} \quad [\text{éq. (3.12) p. 59}]$$

4. Mesurer la contrainte tangentielle $\tau_{exp}^{(4)}$ pour obtenir ce glissement.
5. Calculer la direction *actuelle* de la direction d'anisotropie (angle $\beta_t = (\mathbf{e}_1, \mathbf{n}_t)$) avec les formules de déviation des directions d'anisotropie données en section 5.2.3 [p.88] (on peut aussi mesurer β_t si la direction d'anisotropie est visible).

Les composantes de la direction *actuelle* d'anisotropie dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont donc : $\{\cos \beta_t, \sin \beta_t, 0\}$

6. Calculer les composantes du tenseur de déformation de ce glissement dans la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$[B^{\bullet\bullet}]_{\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}} = K_v^2 \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\text{éq. (C.1) p. 157}]$$

7. En déduire la valeur actuelle de la variable d'anisotropie a pour ce point de mesure :

$$a = \frac{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}{B_{III}^{\frac{1}{3}}} \quad [\text{éq. (6.2) p. 98}]$$

8. Calculer la fonction $f(a)$ pour ce point de mesure avec l'équation (6.17) [p. 104]. Pour cela il faut préalablement évaluer la plus grande valeur propre λ du glissement :

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} + \frac{\gamma}{2} \quad [\text{éq. (C.2) p. 157}]$$

et la valeur de θ_1 :

$$\theta_1 = \text{Arctan}(\lambda^{-1}) \quad [\text{éq. (C.4) p. 158}]$$

On obtient ainsi un point de la fonction $\tau_{exp}^{(4)}(T, K_v, \delta, a)$. En répétant ce processus pour différentes valeurs de β_0 entre 0 et π , on obtient une courbe expérimentale de la fonction $\tau_{exp}^{(4)}((T, K_v, \delta), a)$ à (T, K_v, δ) constants (qui pourra être éventuellement idéalisée ultérieurement).

Remarque – Le travail d'expérimentation pour construire la courbe $\tau_{exp}^{(4)}(a)$ à (T, K_v, δ) constants est important car il faut préparer suffisamment d'éprouvettes pour des essais de glissement avec des orientations initiales β_0 de la direction d'anisotropie différentes et les soumettre à des distorsions stériques maximales δ (et donc à des glissements γ) suffisamment nombreux avec la direction d'anisotropie dans le plan de glissement. L'exploitation de ces mesures n'est qu'une question de calculs, aisément effectués dans un tableur.

6.5 Résultats complets du modèle $\{T, K_v, \delta, a\}$

Sous les hypothèses 6.1 [p. 98] et 6.2 [p. 103], la connaissance des quatre fonctions expérimentales :

$$Q_{exp}^{(1)}(T) \quad ; \quad \sigma_{m\,exp}^{(2)}(T, K_v) \quad ; \quad \tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) \quad ; \quad \tau_{exp}^{(4)}(T, K_v, \delta, a) \quad (\text{ou bien } \tau_{exp}^{(4)} - \tau_{exp}^{(3)})$$

permet donc de construire l'expression des fonctions $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, $g^{(3)}$, $g^{(4)}$, et donc celle de l'énergie libre massique de Helmholtz ψ^m et par suite l'expression des autres fonctions d'état et enfin celle de la loi de comportement mécanique physiquement justifiée. Les résultats sont :

$$\begin{aligned} g^{(1)} &= -T \int_{T_0}^T \frac{Q_{exp}^{(1)}(T)}{T^2} dT \\ g^{(2)} &= \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \sigma_{m\,exp}^{(2)}(T, K_v) dK_v \\ g^{(3)} &= \frac{K_v}{\rho_0 \sqrt{3}} \int_1^{\delta} \frac{\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} d\delta \\ g^{(4)} &= \frac{K_v \lambda (\lambda^2 - 1) (\lambda^2 + 1)}{\rho_0} \int_1^a \frac{\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta) - \tau_{exp}^{(4)}(T, K_v, \delta, a)}{f(a)} da \end{aligned}$$

Remarques – Les expressions des trois premières fonctions $g^{(1)}$ à $g^{(3)}$ sont formellement identiques à celles données pour le milieu isotrope construit en section 3.4.4 [p. 60], mais les valeurs expérimentales $Q_{exp}^{(1)}(T)$, $\sigma_{m\,exp}^{(2)}(T, K_v)$, $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$ et $\tau_{exp}^{(4)}(T, K_v, \delta, a)$ (ou leur idéalisation) sont *a priori* différentes pour chaque matériau.

La connaissance des quatre fonctions $g^{(1)}$ à $g^{(4)}$ en fonction des mesures permet de construire l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz [éq. (6.10) p. 100] en fonction des variables d'état, et par suite celle de l'entropie massique et de l'énergie interne massique avec les formules (6.11), (6.12), (6.13) [p. 101] et enfin de la loi de comportement mécanique [éq. (6.9) p. 100].

Les quatre mesures expérimentales $Q_{exp}^{(1)}(T)$, $\sigma_{m\,exp}^{(2)}(T, K_v)$, $\tau_{exp}^{(3)}(T, K_v, \delta)$ et $\tau_{exp}^{(4)}(T, K_v, \delta, a)$ suffisent donc pour déterminer complètement le modèle.

6.6 En bref...

La construction de ce modèle élastique isotrope transverse a suivi une démarche similaire à celle suivie dans la construction d'un modèle élastique isotrope du chapitre 3 [p. 51].

1. On a choisi les 4 variables d'état scalaires indépendantes $\{T, K_v, \delta, a\}$ parmi 6 variables d'état réduites possibles. Ce choix a été guidé par l'interprétation cinématique des invariants.
2. L'expression de l'énergie libre massique en fonction des variables d'état a été construite par l'analyse de ses variations dans des évolutions élémentaires où une seule variable d'état évolue, les autres étant constantes. La mesure (ou son idéalisation mathématique) de ces quatre expériences permet de construire une expression $f_\psi(T, K_v, \delta, a)$ physiquement justifiée.
3. De l'expression $f_\psi(T, K_v, \delta, a)$ ainsi construite, on en déduit les expressions des fonctions d'état scalaires fondamentales entropie massique, énergie interne (sa dérivée particulière apparaît dans l'équation de la chaleur), et de la fonction d'état tensorielle tenseur des contraintes (loi de comportement mécanique). Le modèle construit est donc à la fois thermodynamiquement admissible et physiquement vraisemblable (non exotique).

En dépit des simplifications apportées dans la construction de ce modèle élastique isotrope transverse (4 variables d'état scalaires au lieu de 6 et de hypothèse de calcul 6.2 [p. 103]), l'identification expérimentale d'un tel modèle est plus laborieuse qu'en isotropie : le nombre d'expériences à effectuer (ou à idéaliser avec des expressions mathématiques physiquement motivées) est plus grand et il a fallu faire une analyse cinématique fine du mouvement de glissement (voir annexe C [p. 157]) pour savoir contrôler expérimentalement la variation isolée des variables d'état δ et a .

Si on a idéalisé les résultats expérimentaux de chaque évolution élémentaire par des expressions mathématiques *physiquement raisonnables*⁽⁹⁾, l'identification du modèle se réduit à la détermination expérimentale de quelques constantes.

Remarque sur l'essai de traction – Comme le lecteur l'aura sans doute déjà compris dans la construction d'un modèle élastique isotrope, la construction d'une expression de l'énergie libre physiquement raisonnée en fonction des variables d'état réduites en élasticité isotrope transverse nécessite d'idéaliser les variations de ψ^m dans une suite de quatre évolutions élémentaires *dans lesquelles une seule variable d'état évolue*. Un essai de traction ne peut donc pas figurer dans les évolutions élémentaires car dans la cinématique d'un essai de traction, plusieurs variables d'état cinématiques évoluent simultanément. En revanche, des essais de traction à différentes températures et avec différentes orientations initiales de la direction d'anisotropie sont une bonne validation d'un modèle qui a été construit à partir des quatre évolutions élémentaires.

⁽⁹⁾ Sens de variation, variations monotones, tendances aux valeurs limites etc. afin d'éviter des lois de comportement mécanique exotiques. Ces idéalizations sont sous la responsabilité du constructeur de modèle.

Élasticité générique

Dans ce chapitre, on synthétise la méthode de construction systématique de tous les modèles de comportement élastique, isotropes ou non.

7.1 Les variables d'état d'un solide élastique

Le choix des variables d'état est la première étape dans la construction d'un modèle de comportement. Cette étape est essentielle car elle détermine l'ensemble de tous les états envisageables par le modèle. Les variables d'état choisies doivent être *indépendantes*, c'est-à-dire que l'on peut donner à chacune d'elles une valeur arbitraire (dans son domaine de définition) pour définir un état.

Pour tout modèle de comportement, la thermodynamique impose la variable d'état *température absolue* $T > 0$ pour caractériser l'état actuel d'une particule de milieu continu.

Un modèle de *solide déformable* (un milieu continu qui a une forme propre déclarée non déformée), comporte nécessairement un tenseur de déformation actuelle \mathbf{X} objectif dans sa liste de variables d'état. Ce tenseur de déformation mesure la déformation actuelle par rapport à la forme propre.

Si le milieu est *anisotrope*, la description de l'état *actuel* d'une particule doit préciser la direction *actuelle* des directions d'anisotropie $\mathbf{N}_t^{(i)}$. La liste des variables d'état tensorielles d'un solide élastique isotrope ou non est donc : $\{T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_t^{(1)}, \dots, \mathbf{N}_t^{(n)}\}$.

Enfin, on rappelle qu'un modèle de comportement élastique ne peut pas contenir de variables d'état mnésiques [déf. 1.4 p. 14].

Les deux principes de la thermodynamique postulent l'existence de deux *fonctions d'état* fondamentales scalaires, extensives et objectives : l'*énergie interne massique* e^m et l'*entropie massique* s^m . Le choix de variables d'état tensorielles *objectives* et l'objectivité des fonctions d'état ⁽¹⁾ impliquent que les fonctions d'état sont nécessairement des fonctions isotropes de leurs arguments tensoriels. On en déduit, avec le *théorème des fonctions isotropes*, que toutes les fonctions d'état scalaires auxiliaires que l'on peut construire peuvent être ramenées à des fonctions scalaires d'arguments scalaires de la forme :

$$e^m = \bar{f}_e(T, I_1, \dots, I_m) \quad ; \quad s^m = \bar{f}_s(T, I_1, \dots, I_m) \quad ; \quad \psi^m = e^m - T s^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_m)$$

où les *variables d'état réduites* $\{I_1, \dots, I_m\}$ sont une liste d'invariants objectifs indépendants calculés à partir des variables d'état cinématiques tensorielles $\{\mathbf{X}, \mathbf{N}_t^{(1)}, \dots, \mathbf{N}_t^{(n)}\}$. Ces variables d'état réduites sont soit des invariants des arguments tensoriels, soit des invariants dits « croisés »

⁽¹⁾ Ainsi que l'universalité de leur définition.

qui traduisent d'une certaine manière l'orientation relative entre les valeurs actuelles des variables d'état tensorielles ⁽²⁾.

Rappels d'algèbre tensorielle –

1. Les invariants fondamentaux des tenseurs uniaxiaux unitaires $\mathbf{N}_t^{(\bullet)}$ sont des constantes. Ils ne figurent donc pas dans la liste des variables d'état réduites.
2. Les variables d'état réduites $I_1^{(i)}$ et $I_2^{(i)}$ traduisent l'orientation de la direction actuelle d'anisotropie $\mathbf{N}_t^{(i)}$ par rapport aux directions propres du tenseur de déformation actuel \mathbf{B} .

Une liste de variables d'état réduites actuelles d'un solide élastique à n directions d'anisotropie est par exemple :

$$\{T, B_I, B_{II}, B_{III}, \underbrace{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t^{(1)}}_{I_1^{(1)}}, \underbrace{\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t^{(1)}}_{I_2^{(1)}}, \dots, \underbrace{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t^{(n)}}_{I_1^{(n)}}, \underbrace{\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t^{(n)}}_{I_2^{(n)}}\}$$

La dimension m de l'espace des états d'un solide déformable à n directions d'anisotropies est donc *au plus* $m = 4 + 2n$ où n est le nombre de directions d'anisotropies.

Remarque importante en anisotropie multiple : Une étude cinématique fine de la déviation des différentes directions d'anisotropie du modèle devrait réduire le nombre de variables d'état réduites *indépendantes*, car les déviations de chaque direction d'anisotropie sont liées par le même mouvement déformant : en principe, il suffit de connaître la direction actuelle de quelques directions d'anisotropie pour déterminer celle des autres. *Cette analyse cinématique des déviations ne peut pas être développée de manière générale car elle est spécifique à la disposition particulière des directions d'anisotropie de chaque matériau.*

Rappels – On a vu dans les deux exemples de construction de modèles élastiques isotropes [ch. 3 p. 51] et isotrope transverse [ch. 6 p. 97] que la liste de variables d'état scalaires $\{T, I_1, \dots, I_p\}$ retenues pour le modèle peut être plus courte ($p < m$) :

- La température T est conservée (elle est imposée par le second principe de la thermodynamique).
- Les invariants de déformation ont été réduits de 3 à 2 : $\{K_v, \delta\}$ (l'invariant B_{II} est donc ignoré).
- Les invariants d'anisotropie ont été réduits à 1 par direction d'anisotropie : $a = (\mathbf{B} : \mathbf{N}_t) / B_{III}^{1/3}$ (c'est une conséquence du fait que B_{II} est ignoré).

Les simplifications introduites dans ces deux modèles ont été cinématiquement justifiées : toutes les déformations dont la distorsion stérique maximale est identique ont la même contribution dans l'énergie libre massique de Helmholtz. Cinématiquement, cette hypothèse signifie que l'infinité de manières d'« écraser » un trièdre de directions matérielles initialement orthogonales conduisant à un même produit mixte actuel sont équivalents. Cette équivalence se justifie par le fait qu'en MMC on ignore par définition la nature et l'orientation des directions critiques des microstructures en une particule. Cette hypothèse peut encore être retenue pour des anisotropies plus complexes.

La liste $\{T, I_1, \dots, I_p\}$ retenue pour la construction du modèle doit être constituée de variables d'état scalaires *indépendantes* (on peut donner à chacune d'elle une valeur arbitraire dans son domaine de définition). Le nombre p de variables d'état *cinématiques* réduites retenues pour le modèle et calculées à partir du tenseur de déformation \mathbf{X} et des directions actuelles d'anisotropie \mathbf{N}_t^* détermine la dimension $p + 1$ de l'espace des états du modèle, dans lequel circulent les points représentatifs de l'état des particules en évolution.

⁽²⁾ Voir l'annexe B.6 du cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

Les variables d'état cinématiques tensorielles \mathbf{X} et $\mathbf{N}_t^{(\bullet)}$ étant objectives, les invariants cinématiques $\{I_1, \dots, I_p\}$ calculés à partir de ces variables d'état sont aussi objectifs⁽³⁾. Puisque la dérivée particulière d'une grandeur scalaire objective est aussi une grandeur scalaire objective⁽⁴⁾, les dérivées particulières des variables d'état cinématiques scalaires sont des grandeurs scalaires objectives. Ces dérivées particulières peuvent toutes s'écrire sous la forme :

$$\dot{I}_j = \mathbf{S}_j : \mathbf{D} \quad (7.1)$$

où les tenseurs symétriques et objectifs \mathbf{S}_j sont spécifiques à chaque variable d'état cinématique I_j .

Exemples de dérivées particulières de variables d'état cinématiques scalaires – On montre en cinématique⁽⁵⁾ les dérivées particulières suivantes :

$$\dot{B}_I = 2\mathbf{B} : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{B_I} = 2\mathbf{B} \quad (7.2)$$

$$\dot{B}_{II} = 2(B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{B_{II}} = 2(B_I \mathbf{B} - \mathbf{B}^2) \quad (7.3)$$

$$\dot{B}_{III} = 2B_{III} \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{B_{III}} = 2B_{III} \mathbf{G} \quad (7.4)$$

Par ailleurs, on démontre dans l'annexe A [p. 151] que les dérivées particulières des invariants cinématiques croisés sont :

$$\begin{aligned} (\mathbf{B} : \mathbf{N}_t)' &= (4 \operatorname{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) - 2(\mathbf{B} : \mathbf{N}_t) \mathbf{N}_t) : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (A.3) p. 152}] \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{S}_{\mathbf{B}:\mathbf{N}_t} = 4 \operatorname{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) - 2(\mathbf{B} : \mathbf{N}_t) \mathbf{N}_t \end{aligned} \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t)' &= (4 \operatorname{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2) - 2(\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t) \mathbf{N}_t + 2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t^{(i)} \cdot \mathbf{B})) : \mathbf{D} \quad [\text{éq. (A.4) p. 152}] \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{S}_{\mathbf{B}^2:\mathbf{N}_t} = 4 \operatorname{sym}(\mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}^2) - 2(\mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t) \mathbf{N}_t + 2(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t \cdot \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (7.6)$$

On en déduit aisément que si les variables d'état cinématiques scalaires objectives retenues pour un modèle élastique sont la dilatation volumique K_v , la distorsion stérique maximale δ ou une variable d'anisotropie $a = K_v^{-2/3} \mathbf{B} : \mathbf{N}_t$, leurs dérivées particulières sont :

$$\dot{K}_v = K_v \mathbf{G} : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_{K_v} = K_v \mathbf{G} \quad (7.7)$$

$$\dot{\delta} = \left(\frac{\sqrt{3}}{9} \frac{B_I^{3/2}}{K_v^{3/2}} \right)' = \left(\frac{\delta^{1/3}}{K_v^{2/3}} \mathbf{B} - \delta \mathbf{G} \right) : \mathbf{D} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}_\delta = \frac{\delta^{1/3}}{K_v^{2/3}} \mathbf{B} - \delta \mathbf{G} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \left(\frac{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}{K_v^{2/3}} \right)' = \left(-\frac{2a}{3} \mathbf{G} + \frac{4}{K_v^{2/3}} \operatorname{sym}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t) - 2a \mathbf{N}_t \right) : \mathbf{D} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{S}_a = -\frac{2a}{3} \mathbf{G} + \frac{4}{K_v^{2/3}} \operatorname{sym}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t) - 2a \mathbf{N}_t \end{aligned} \quad (7.9)$$

S'il le désire, le lecteur établira sans difficulté des formules similaires avec des tenseurs de déformation objectifs autres que \mathbf{B} . Ce n'est qu'une question d'algèbre.

S'il convient au lecteur d'utiliser une certaine variable d'état cinématique scalaire objective z définie à partir d'un tenseur de déformation objectif \mathbf{X} et d'une éventuelle direction actuelle d'anisotropie \mathbf{N}_t et dont l'interprétation cinématique lui semble intéressante, il pourra calculer de la même manière le tenseur \mathbf{S}_z qui lui est associé en calculant la dérivée particulière de la définition de z . La dérivée particulière de z peut toujours s'écrire sous la forme $\dot{z} = \mathbf{S}_z : \mathbf{D}$ ⁽⁶⁾.

⁽³⁾ C'est-à-dire les mêmes pour tous les observateurs.

⁽⁴⁾ On rappelle que l'objectivité des dérivées particulières n'est vraie que pour les grandeurs objectives *scalaires*. Voir la section 3.5.6 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3]. Les auteurs qui répugnent à utiliser le théorème des fonctions isotropes se privent de ne travailler qu'avec des variables d'état scalaires objectives et sont amenés à inventer des pseudo-concepts comme des « dérivées objectives », des « forces thermodynamiques », ou autres.

⁽⁵⁾ Annexe B.2.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁶⁾ Quelques exemples avec les tenseurs de déformation objectifs \mathbf{V} et \mathbf{M} sont donnés en annexe B du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

7.2 Forme générique des lois de comportement élastique

Les variables d'état réduites cinématiques $\{I_1, \dots, I_p\}$ étant choisies, la fonction d'état auxiliaire *énergie libre massique de Helmholtz*⁽⁷⁾ s'écrit :

$$\psi^m = e^m - T s^m = \bar{f}_\psi(T, I_1, \dots, I_p)$$

Les variables d'état étant indépendantes, sa dérivée particulière s'écrit :

$$\dot{\psi}^m = \partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \dot{I}_j$$

En élasticité [déf. 1.4 p. 14], la dissipation intrinsèque est nulle dans toute évolution :

$$0 = -\rho (\dot{\psi}^m + s^m \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad \text{dans toute évolution}$$

$$0 = -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi \dot{T} + \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \dot{I}_j + \bar{f}_s \dot{T}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}, \quad \forall \dot{T} \text{ dans tout mouvement}$$

$$0 = -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} - \rho \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}, \quad \forall \dot{T} \forall \mathbf{D} \quad [\text{éq. (7.1) p. 109}]$$

$$0 = -\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s) \dot{T} + \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \right) : \mathbf{D}, \quad \forall \dot{T} \forall \mathbf{D} \quad (7.10)$$

7.2.1 Relation de Helmholtz

L'équation (7.10) étant vraie $\forall \dot{T}$ et la fonction d'état $-\rho (\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s)$ n'étant pas fonction de \dot{T} , elle est nécessairement nulle. On en déduit la relation de Helmholtz :

$$\partial_T \bar{f}_\psi + \bar{f}_s = 0 \quad (7.11)$$

En élasticité, il suffit donc de définir la seule fonction d'état ψ^m . L'entropie massique s^m s'en déduit de la relation de Helmholtz et la définition de ψ^m donne l'énergie interne massique $e^m = \psi^m + T s^m$.

Pour les milieux continus élastiques isotropes ou non, il suffit de connaître une seule des fonctions d'état parmi e^m , s^m , ψ^m , les deux autres sont déterminées par la relation de Helmholtz et par la définition de ψ^m .

7.2.2 Loi de comportement mécanique générique en élasticité (isotrope ou non)

Compte tenu de la relation de Helmholtz, la nullité de la dissipation intrinsèque [éq. (7.10) p. 110] se réduit à :

$$\forall \mathbf{D}, \quad 0 = \left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \right) : \mathbf{D} \quad (7.12)$$

Par définition [déf. 1.4 p. 14], en élasticité, le tenseur des contraintes est une fonction d'état. Le terme $\boldsymbol{\sigma} - \rho \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j$ est donc une fonction d'état qui n'est donc pas fonction de \mathbf{D} .

⁽⁷⁾ C'est la plus commode à utiliser en élasticité.

L'égalité (7.12) étant vraie $\forall \mathbf{D}$, on en déduit que facteur de \mathbf{D} est nul. La forme générique de toute loi de comportement mécanique élastique (isotrope ou non) s'écrit donc :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j \quad (7.13)$$

où les tenseurs symétriques \mathbf{S}_j se déduisent de la dérivée particulière des variables d'état cinématiques scalaires I_j [éq. (7.1) p. 109] retenues pour ce modèle.

La forme très condensée de la loi de comportement mécanique (7.13) [p. 111] masque quelque peu le fait que le tenseur des contraintes est fonction de la température, de la déformation et des directions d'anisotropie, car la fonction d'état f_ψ est une fonction de $(T, \mathbf{X}, \mathbf{N}_t^*)$ et les tenseurs symétriques \mathbf{S}_j sont des fonctions du tenseur de déformation choisi \mathbf{X} et des éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\mathbf{N}_t^{(i)}$.

Exercices – Vérifier que la loi de comportement élastique générique (7.13) conduit bien aux lois de comportement élastiques particulières qui ont été établies dans les chapitres précédents avec différents choix de variables d'état cinématiques scalaires :

- avec les variables d'état cinématiques $\{B_I, B_{II}, B_{III}\}$, on retrouve la loi 2.3 [p. 21];
- avec les variables d'état cinématiques $\{V_I, V_{II}, V_{III}\}$, on retrouve la loi 2.5 [p. 24];
- avec les variables d'état cinématiques $\{M_I, M_{II}, M_{III}\}$, on retrouve la loi 2.6 [p. 25];
- avec les variables d'état cinématiques $\{K_v, \delta\}$, on retrouve la loi (3.11) [p. 56];
- avec les variables d'état cinématiques $\{B_I, B_{II}, B_{III}, \mathbf{B} : \mathbf{N}_t, \mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t\}$, on retrouve la loi (5.7) [p. 87];
- avec les variables d'état cinématiques $\{K_v, \delta, a\}$, on retrouve la loi (6.9) [p. 100].

Les deux derniers cas sont des lois anisotropes à une seule direction d'anisotropie (isotropie transverse) car une seule direction d'anisotropie \mathbf{N}_t intervient dans la liste des variables d'état cinématiques scalaires retenues pour ces modèles.

7.3 Construction de la fonction d'état énergie libre massique de Helmholtz

Comme on l'a vu précédemment, la loi de comportement mécanique (7.13) [p. 111] est élastique et thermodynamiquement admissible quelle que soit l'expression de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des $p + 1$ variables d'état retenues pour le modèle. Il faut donc en construire une qui soit phénoménologiquement justifiée afin d'éviter de construire des modèles au comportement mécanique exotique.

Remarque – Les nombreuses tentatives de « passage micro/macro », parfois imprudentes et souvent difficilement généralisables, que l'on peut trouver dans la littérature spécialisée conduisent le plus souvent à des lois de comportement macroscopiques phénoménologiquement non satisfaisantes. De plus, la plupart de ces propositions se contentent généralement de ne les confronter qu'avec le seul essai de traction en espérant qu'elles sont encore prédictives pour des déformations différentes comme dans un glissement isovolume ou une déformation sphérique.

La méthode qui a été utilisée dans le chapitre 3 [p. 51] (élasticité isotrope) et dans le chapitre 6 [p. 97] (élasticité isotrope transverse) consistait à analyser la variation de l'énergie libre massique dans une évolution à partir de l'état de référence jusqu'à un état quelconque, constituée de chemins partiels dans lesquels une seule variable d'état varie, les autres étant constantes. Cette méthode s'est avérée efficace pour zéro ou une direction d'anisotropie. Cependant elle est impraticable lorsque le nombre de directions d'anisotropies augmente car il est difficile, voire

impossible, de trouver ou d'approcher des expériences où chaque variable d'anisotropie ne varie pas simultanément avec d'autres.

Pour n directions d'anisotropie, la dimension de l'espace des états est au plus $m = 4 + 2n$. Dans les deux exemples de construction traités précédemment (isotropie et isotropie transverse), la dimension de l'espace des états était réduite à $3 + n$ car les invariants de déformation étaient réduits à deux : $\{K_V, \delta\}$ (ou bien $\{B_I, B_{III}\}$) et les invariants d'anisotropie s'en trouvaient réduits à un par direction d'anisotropie ($\{\mathbf{B} : \mathbf{N}_I\}$)⁽⁸⁾.

Pour un espace des états de dimension supérieure à 4, il faut identifier l'énergie libre de Helmholtz différemment. Soit p le nombre de variables d'état réduites retenues pour le modèle, c'est-à-dire que l'espace des états est de dimension p . En général, on ne peut plus trouver des cinématiques qui font varier une variable d'état en conservant les autres constantes. Une solution possible consiste à faire un grand nombre d'expériences dont la cinématique est bien contrôlée afin de bien connaître les valeurs de toutes les variables d'état⁽⁹⁾ et ainsi évaluer pour un nuage de points dans l'espace des états une valeur de l'énergie interne massique e^m par application de la conservation de l'énergie globale avec les conditions expérimentales rappelées en début de section 6.4 [p. 101]. Pour une bonne identification de la fonction d'état e^m , il faut donc un grand nombre de points de mesure de façon que chaque variable d'état retenues pour ce modèle varie sur son domaine de définition avec un nombre de points suffisant⁽¹⁰⁾. Autrement dit, il faut remplir l'espace des états (de dimension p) par un nuage de points suffisamment dense. Par une méthode d'interpolation quelconque⁽¹¹⁾, on pourra tirer de cette base de données une idéalisation mathématique de la fonction $f_e(T, I_1, \dots, I_p)$ et en tirer les expressions des fonctions d'état s^m et ψ^m à l'aide de la relation de Helmholtz ($\partial_T f_s = \frac{1}{T} \partial_T f_e$ [éq. (2.4) p. 20]) et de la définition $\psi^m = e^m - T s^m$. On en déduira une expression de la loi de comportement mécanique.

7.4 Critères de limite élastique

Les différents critères de limite élastique en anisotropie ont été détaillés en section 5.4 [p. 93].

On a vu qu'une solution simple et raisonnable assurant le respect de ces différents critères individuels relatifs à chaque anisotropie était de limiter la distorsion stérique maximale δ (critère isotrope protégeant contre les réarrangements de liaisons), et la dilatation linéique dans chaque direction d'anisotropie (protection contre les ruptures de liaison), voire des critères réglementaires s'ils existent (protection juridique).

La détermination expérimentale des valeurs limites consiste à effectuer une succession de charges/décharges avec des valeurs maximales progressives jusqu'à constater un retour non élastique⁽¹²⁾. La comparaison entre la courbe de charge et celle de décharge renseigne sur le type de limite atteinte :

⁽⁸⁾ En isotropie transverse, il a été possible de trouver une cinématique (glissement dans un plan perpendiculaire à l'unique direction d'anisotropie) pour faire varier δ sans faire varier a , mais les variations de a ne pouvaient se faire sans variations de δ .

⁽⁹⁾ Il faut donc choisir des expériences dans lesquelles l'état des éprouvettes est quasi-uniforme et bien contrôlé.

⁽¹⁰⁾ Des essais de traction peuvent donc fournir des points de ce nuage de points, si on y évalue correctement les valeurs de toutes les variables d'état cinématiques.

⁽¹¹⁾ Par exemple une méthode de krigeage. Il faudra aussi s'assurer que l'interpolation passe par les points évidents. Par exemple dans les déformations sphériques ($K_V \neq 0$ et $\delta = 0$), la fonction d'interpolation ne doit pas varier en fonction des variables d'anisotropie.

⁽¹²⁾ Et non une perte de linéarité !

- si elles sont confondues, aucune limite élastique n'a été atteinte ;
- si, dans une certaine cinématique, les *pent*es des courbes de charge et de décharge sont les mêmes, on a atteint une limite en distorsion (réarrangement de liaisons intercorporelles, plastification) ;
- si, dans une certaine cinématique, les *pent*es des courbes de charge et de décharge sont différentes on a atteint une limite en élongation (rupture de liaisons intercorporelles, endommagement).

7.5 En bref...

Les étapes pour la construction d'un modèle de comportement élastique thermodynamiquement admissible sont :

1. Choisir les variables d'état cinématiques scalaires $\{T, I_1, \dots, I_p\}$ cinématiquement significatives et indépendantes qui définissent pour ce modèle un état actuel de particule. L'isotropie ou l'anisotropie du modèle est déterminée par la présence ou non de variables d'état cinématiques scalaires prenant en compte les directions *actuelles* des éventuelles anisotropies.
2. Calculer les dérivées particulières des variables d'état cinématiques scalaires retenues sous la forme $\dot{I}_j = \mathbf{S}_j : \mathbf{D}$. La forme générale de la loi de comportement mécanique est alors :

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \sum_{j=1}^p \partial_{I_j} \bar{f}_\psi \mathbf{S}_j$$

3. Proposer une expression de l'énergie libre massique de Helmholtz \bar{f}_ψ en fonction des variables d'état $\{T, I_1, \dots, I_p\}$ qui doit être physiquement motivée par des expériences élémentaires (éventuellement idéalisées) suivant une méthode semblable à celle qui a été utilisée dans les chapitres 3 [p. 51] et 6 [p. 97], ou bien en utilisant une interpolation sur un nuage de points suffisamment dense et bien réparti dans l'espace des états (de dimension $p + 1$).

Quelques remarques finales –

- Dans le passé, un certain nombre de lois de comportement ont été proposées sans avoir vérifié qu'il existe bien une fonction d'état (e^m, s^m ou ψ^m) qui conduise à cette loi de comportement⁽¹³⁾. Si les fonctions d'état e^m, s^m ou $\psi^m = e^m - T s^m$ n'existent pas, une telle loi de comportement n'est pas thermodynamiquement admissible car les deux principes de la thermodynamique qui affirment leur existence sont violés.
- D'autres lois de comportement élastique, souvent dites « hyperélastiques » quand les déformations ne sont pas limitées (on dit aussi « grandes déformations »), bien souvent restreintes aux évolutions isothermes, ont été proposées dans le passé avec des expressions plus ou moins justifiées de l'énergie libre massique de Helmholtz en fonction des invariants fondamentaux de tenseurs de déformation. Bien que thermodynamiquement admissibles, elles peuvent conduire à des lois de comportements exotiques physiquement peu vraisemblables.
- Seuls un *choix raisonné* de variables d'état scalaires indépendantes et cinématiquement significatives pour définir un état, ainsi que des *expériences* (ou leur idéalisation mathématique avec des coefficients à identifier), doivent guider la construction des fonctions d'état e^m, s^m ou ψ^m en fonction des variables d'état retenues pour le modèle.
- La recherche empirique de limites élastiques doit se faire par la détection d'un retour non élastique et non par la détection d'une perte de linéarité des courbes expérimentales.
- Il n'a pas été nécessaire d'utiliser un pseudo-concept obscur appelé « dérivée objective » qui n'est évoqué qu'en « mécanique numérique ».

⁽¹³⁾ C'est notamment le cas de la pseudo-élasticité de Hooke en « petites perturbations » et de l'« hypoélasticité ».

- Il n'a pas été nécessaire d'introduire un pseudo-concept obscur appelé « force thermodynamique » souvent évoqué dans des publications anciennes, dont la définition change suivant le tenseur de déformation utilisé⁽¹⁴⁾.

⁽¹⁴⁾ Les quantités qui pourraient s'en rapprocher seraient les tenseurs \mathcal{S}_j définis dans l'équation (7.1) [p. 109].

Le problème élastique

8.1 Énoncé général

La résolution d'un problème d'élasticité suppose la donnée d'un certain nombre d'informations précisées dans les sous-sections qui suivent.

8.1.1 Définition du solide élastique à étudier

Le solide élastique à étudier est un *domaine matériel* dont la forme *initiale* \mathcal{D}_0^m est donnée à une température initiale uniforme T_0 donnée. En cas d'anisotropies, les champs des directions *initiales* d'anisotropie $\mathbf{N}_0^{(i)}(P)$ sont donnés. Le choix de la forme de référence \mathcal{D}_0^m utilisée pour mesurer les déformations est sous la responsabilité de l'ingénieur qui fait l'étude.

Dans la suite, pour limiter le nombre et la longueur des formules, on choisit d'écrire les équations en utilisant le tenseur de déformation objectif \mathbf{B} ⁽¹⁾.

8.1.2 Modèle de comportement du matériau

On suppose que le comportement de la matière constituant le solide élastique à étudier est correctement modélisé par un certain modèle de comportement élastique (isotrope ou non) connu. On connaît donc :

1. La liste des variables d'état réduites $\{T, I_1, \dots, I_p\}$ retenues pour ce modèle de comportement élastique où les variables réduites (scalaires) I_\bullet sont des invariants cinématiques objectifs calculés à partir de la variable d'état tensorielle objective déformation actuelle \mathbf{B} et des éventuelles directions actuelles d'anisotropie $\mathbf{N}_t^{(\bullet)}$:

$$I_k = f_k(\mathbf{B}, \mathbf{N}_t^{(i)}) \quad (\text{exemple : } I_1 = K_v = \sqrt{\det \mathbf{B}} \quad I_2 = \delta_{max}^s = B_I^{\frac{3}{2}} B_{III}^{-\frac{1}{2}} \quad I_3 = a = \mathbf{B} : \mathbf{N}_t K_v^{-\frac{2}{3}})$$

On connaît aussi l'expression de leur dérivée particulière :

$$\dot{I}_k = \mathbf{S}_k : \mathbf{D} \quad (\text{calculs purement cinématiques, voir exemples p. 109})$$

où \mathbf{S}_k est un tenseur symétrique, particulier à chaque variable d'état I_k , qui est fonction du tenseur de déformation et des directions d'anisotropie (exemples p. 109).

⁽¹⁾ Le choix d'un tenseur de déformation objectif plutôt qu'un autre est sans importance fondamentale. On laisse le soin au lecteur de faire les transformations algébriques nécessaires s'il tient absolument à utiliser un autre tenseur de déformation (objectif ou non). Les calculs dans les chapitres précédents montrent que les formules obtenues sont généralement plus compliquées avec les tenseurs de déformation autres que \mathbf{B} .

2. *L'expression de l'énergie interne massique en fonction des variables d'état réduites :*

$$e^m = f_e(T, I_1, \dots, I_p) \quad (\text{exemple isotrope transverse : } e^m = f_e(T, K_v, \delta_{max}^s, a))$$

On connaît donc l'expression de sa dérivée particulière \dot{e}^m (elle intervient dans l'équation de la chaleur [éq. (8.8) p. 117]) en fonction des variables d'état et de leur dérivée particulière :

$$\dot{e}^m = \partial_T e^m(T, I_1, \dots, I_p) \dot{T} + \sum_{k=1}^p \partial_{I_k} e^m(T, I_1, \dots, I_p) \dot{I}_k$$

3. *L'expression de la loi de comportement mécanique ($\boldsymbol{\sigma}$ en fonction des variables d'état), qui intervient dans l'équation de mouvement [éq. (8.7) p. 117] :*

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0(T, I_1, \dots, I_p) \mathbf{G} + K_1(T, I_1, \dots, I_p) \mathbf{B} + K_2(T, I_1, \dots, I_p) \mathbf{B}^2 + (\dots) \quad (8.1)$$

où en cas d'anisotropies, les termes tensoriels symétriques supplémentaires (\dots) dans la loi de comportement mécanique sont de la forme :

$$\begin{aligned} & K_{\mathbf{N}_t^{(i)}}(T, I_1, \dots, I_p) \mathbf{N}_t^{(i)} \quad ; \quad K_{\mathbf{B}\mathbf{N}_t^{(i)}\mathbf{B}}(T, I_1, \dots, I_p) \mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t^{(i)} \cdot \mathbf{B} \quad ; \\ & K_{\mathbf{B}\mathbf{N}_t^{(i)}}(T, I_1, \dots, I_p) \mathbf{sym}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{N}_t^{(i)}) \quad ; \quad K_{\mathbf{B}^2\mathbf{N}_t^{(i)}}(T, I_1, \dots, I_p) \mathbf{sym}(\mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{N}_t^{(i)}) \end{aligned}$$

4. *L'expression de la loi de comportement thermique qui intervient dans l'équation de la chaleur :*

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}_q(\mathbf{grad}_E T, \dots) \quad (\text{par exemple la loi de Fourier : } \mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}_E T)$$

8.1.3 Relations cinématiques

On rappelle les relations cinématiques suivantes⁽²⁾, utiles dans la suite :

$$\mathbf{F} = \mathbf{grad}_L \mathbf{x}_t = \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \quad (\mathbf{u}(P, t) = \mathbf{x}_t(P, t) - \mathbf{x}_0(P, t), \text{ champ des déplacements}) \quad (8.2)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top \quad ; \quad \mathbf{D} = \mathbf{sym}(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \quad ; \quad (8.3)$$

En cas d'anisotropies, on rappelle les relations entre leur direction initiale et leur direction actuelle [sec. 5.2.3 p. 88] :

— *pour les milieux fibreux* (la direction d'anisotropie est une direction matérielle) :

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}_0\|} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_t\|}$$

— *pour les milieux lamellaires* (la direction d'anisotropie est une normale à une facette matérielle) :

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{n}_0\|} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t}{\|\mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{n}_t\|}$$

(ces formules permettent d'exprimer les directions actuelles d'anisotropie en fonction de la valeur actuelle de \mathbf{F} .)

⁽²⁾ Ces relations sont démontrées dans le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

On rappelle les relations entre les gradients eulérien et lagrangien d'un champ matériel :

$$\forall \Psi(P, t), \quad \mathbf{grad}_E \Psi = \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{F}^{-1} \Rightarrow \mathbf{grad}_E T = \mathbf{grad}_L T \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-\top} \cdot \mathbf{grad}_L T \quad (8.4)$$

$$\forall \Psi(P, t), \quad (\mathbf{grad}_L \Psi)' = \mathbf{grad}_L \dot{\Psi} \Rightarrow \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{grad}_L \dot{\mathbf{x}}_t = \mathbf{grad}_L \dot{\mathbf{u}} = (\mathbf{grad}_L \dot{\mathbf{u}})' \quad (8.5)$$

L'enchaînement de ces relations cinématiques montre que les valeurs *actuelles* des champs inconnus ($T(P, t)$ et $\mathbf{x}_t(P, t)$ (ou bien $\mathbf{u}(P, T)$), des variables d'état scalaires $I_1(P, T), \dots, I_p(P, T)$, de l'énergie interne massique $e^m(P, T)$, de sa dérivée particulaire $\dot{e}^m(P, T)$, du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}(P, T)$, du tenseur de déformation \mathbf{B} et du vecteur courant de chaleur $\mathbf{q}(P, T)$ sont exprimables en fonction de la *description de Lagrange* des champs actuels inconnus scalaire $T_L(\mathbf{x}_0, t)$ et vectoriel $\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t)$ (ou bien $\mathbf{x}_t L(\mathbf{x}_0, t)$), de la *description de Lagrange* de leur dérivée particulaire et de leur gradient *lagrangien*.

8.1.4 Équations différentielles à résoudre

Comme tout milieu continu, toute particule du domaine matériel défini en section 8.1.1 [p. 115] doit satisfaire aux équations différentielles issues des quatre principes fondamentaux de la physique classique :

1. *Le principe de la conservation de la masse.* Localement, il s'exprime par l'équation différentielle dite *équation de continuité* :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -\text{tr} \mathbf{D}, \quad \text{intégrée entre } t_0 \text{ et } t, \text{ elle conduit à : } K_v(P, t) = \frac{\rho_0(P)}{\rho(P, t)} \quad (8.6)$$

où $\rho_0(P) = \rho(P, t_0)$ est le champ *connu* des masses volumiques initiales.

L'équation intégrée de la conservation de la masse (8.6) [p. 117] permet d'éliminer le champ inconnu $\rho(P, t)$ (masse volumique actuelle) dans les autres équations en le remplaçant par le champ des dilatations volumiques $K_v(P, t)$ qui est une grandeur cinématique déduite du champ des déformations actuelles ($K_v = \sqrt{B_{III}} = \det \mathbf{F}$).

Une fois toutes les substitutions $\rho \rightarrow \rho_0 K_v^{-1}$ faites, le principe de la conservation de la masse est automatiquement satisfait et le champ inconnu $\rho(P, t)$ disparaît des équations.

2. *Le principe fondamental de la mécanique.* Localement, il s'exprime par l'équation différentielle vectorielle dite *équation de mouvement* :

$$\rho \boldsymbol{\gamma} = \text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_0^m \quad (3 \text{ équations différentielles}) \quad (8.7)$$

$$\text{où : } \begin{cases} \rho = \rho_0 K_v^{-1} & [\text{éq. (8.6)}] \text{ p. 117} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_\sigma(\mathbf{B}, \mathbf{N}_t^{(i)}, I_1, \dots, I_p) = \bar{\mathbf{f}}_\sigma(T, \mathbf{u}) & [\text{éq. (8.3) à (8.5)}] \text{ p. 116} \\ \boldsymbol{\gamma} = \ddot{\mathbf{x}}_t = \ddot{\mathbf{u}} & (\text{définition de l'accélération}) \end{cases}$$

3. *Le principe de la conservation de l'énergie.* Localement, il s'exprime par l'équation différentielle scalaire dite *équation de la chaleur* :

$$\rho \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} \quad (1 \text{ équation différentielle scalaire}) \quad (8.8)$$

$$\text{où : } \begin{cases} \rho = \rho_0 K_v^{-1} & [\text{éq. (8.6)}] \text{ p. 117} \\ \dot{e}^m = g_e(T, I_1, \dots, I_p) = \bar{g}_e(T, \mathbf{u}) & [\text{éq. (8.3) à (8.5)}] \text{ p. 116} \\ \mathbf{q} = \mathbf{f}_q(T, I_1, \dots, I_p) = \bar{\mathbf{f}}_q(T, \mathbf{u}) & [\text{éq. (8.3) à (8.5)}] \text{ p. 116} \end{cases}$$

4. *Le second principe de la thermodynamique.* Puisque les lois de comportement mécanique et thermique sont normalement thermodynamiquement admissibles (la dissipation est non négative dans toute évolution), ce principe est automatiquement respecté et n'apparaît donc pas dans les équations à résoudre.

En élasticité, les quatre principes fondamentaux se réduisent donc à deux équations différentielles :

1. une équation différentielle vectorielle : l'équation de mouvement (8.7) ;
2. une équation différentielle scalaire : l'équation de la chaleur (8.8).

Après les substitutions dues aux lois de comportement mécanique et thermique, celle due à la conservation de la masse [éq. (8.6) p. 117] et celles dues aux définitions cinématiques [éq. (8.3) à (8.5) p. 116], ces deux équations différentielles s'expriment en fonction de deux champs matériels inconnus : les positions actuelles des particules $\mathbf{x}_t(P,t)$ (ou bien les déplacements actuels $\mathbf{u}(P,t)$) et les températures actuelles des particules $T(P,t)$. Le système différentiel à résoudre est donc un système de quatre équations différentielles (une vectorielle et une scalaire), et les champs inconnus se ramènent à quatre champs inconnus : trois pour la position actuelle (ou le déplacement actuel) et un pour la température actuelle. Ces équations différentielles sont en général couplées.

Remarques – *Dans une résolution analytique*, il serait nécessaire d'écrire toutes les substitutions de la section 8.1.3 [p. 116] pour ramener le système différentiel à des équations dont les fonctions inconnues sont les descriptions de Lagrange T_L et \mathbf{u}_L (ou \mathbf{x}_{tL}). Le système d'équations différentielles obtenu peut être d'écriture très compliquée. Pratiquement, on ne fait jamais ces substitutions manuellement⁽³⁾, sauf pour des problèmes académiques dans lesquels on fait suffisamment d'hypothèses simplificatrices sur les champs solutions (isothermie, stationnarité, uniformité, axisymétrie, linéarisation de lois, petites déformations, forme initiale géométriquement simple etc.). Sans ces hypothèses académiques, la résolution analytique d'un problème industriel est généralement inaccessible.

Dans les résolutions numériques à l'aide d'un logiciel spécialisé, il n'est heureusement pas nécessaire d'écrire manuellement toutes ces substitutions : il suffit de préciser au logiciel le type de problème à résoudre (stationnaire, transitoire, recherche de modes propres, analyse de stabilité) et de préciser quel modèle élastique on désire utiliser (expression de l'énergie interne massique, loi de comportement mécanique et loi de comportement thermique).

Dans les logiciels spécialisés en mécanique des solides déformables, les équations différentielles à résoudre, les définitions cinématiques [éq. (8.3) à (8.5) p. 116] et certaines lois de comportement élastique et thermique sont normalement implantées dans le code. La conservation de la masse intégrée (8.6) [p. 117] devrait aussi y être implantée⁽⁴⁾. Bien souvent ces choix se font dans des menus qui ne comportent pas toujours les toutes options souhaitables.

En revanche, dans les logiciels généraux de résolution numérique de système d'équations différentielles aux dérivées partielles *non spécialisés dans une certaine physique*⁽⁵⁾, il est nécessaire de traduire dans le langage du logiciel toutes les relations cinématiques [éq. (8.3) à (8.5) p. 116], les lois de comportement mécanique et thermique ainsi que les équations différentielles (ou leur formulation intégrale) à résoudre. Dans ces logiciels généraux, la préparation du calcul demande donc un peu plus de travail, mais l'utilisateur n'est plus limité par les *a priori* (pas toujours justifiés⁽⁶⁾, voire cachés) qui sont utilisés dans les logiciels spécialisés dans la mécanique.

⁽³⁾ Mais on peut s'aider avec un logiciel de calcul formel.

⁽⁴⁾ Autrement que sous la forme $\rho = \rho_0$!

⁽⁵⁾ Comme celui utilisé dans les illustrations numériques du chapitre 9 [p. 133].

⁽⁶⁾ Ou bien justifiés par des références à des publications obsolètes, mal comprises, voire incorrectes.

8.1.5 Description des sollicitations extérieures

Un solide déformable peut être soumis à des sollicitations extérieures de différentes natures :

1. **Des sollicitations extérieures à distance** qui s'exercent sur toutes les particules du solide.

Elles peuvent être :

— *mécaniques* : champ forces de gravitation et d'éventuels champs de forces d'inertie si l'observateur utilisé pour décrire le mouvement n'est pas galiléen.

Les sollicitations mécaniques extérieures à distance sont représentées par un champ de forces volumiques \mathbf{f}_0^v [$\text{N}\cdot\text{m}^{-3}$] ou massiques \mathbf{f}_0^m [$\text{N}\cdot\text{kg}^{-1}=\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$], qui apparaît dans l'équation de mouvement.

— *thermiques* : rayonnement d'origine extérieure traversant le solide et interférant avec la matière en produisant de la chaleur.

Les sollicitations thermiques extérieures à distance sont représentées par un champ de puissance calorifique volumique ${}^{(7)}r_{ext}^v$ [$\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$], qui apparaît dans l'équation de la chaleur. Dans beaucoup d'applications pratiques, ce terme est négligé ou nul.

2. **Des sollicitations extérieures de contact** qui s'exercent sur les particules de la frontière. Elles peuvent être :

— *mécaniques* : des contraintes imposées \mathbf{f}^s [Pa], ou des déplacements imposés \mathbf{u}^s [m] sur tout ou partie de la frontière.

Vocabulaire – Une région de frontière à contrainte imposée nulle est appelée *bord libre*. Une région de frontière à déplacement imposé nul est appelée *bord fixé* ou *encastrement*.

— *thermiques* : des températures imposées T^s [K], ou des densités de flux thermiques imposées q^s [$\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$], sur tout ou partie de la frontière.

Vocabulaire – Une région de frontière à température imposée est souvent dite *thermostatée*. Une région de frontière à densité de flux thermique imposée nulle est dite *adiabatique*.

Les sollicitations à la frontière n'apparaissent ni dans l'équation de mouvement ni dans l'équation de la chaleur. Elles sont des *conditions aux limites* auxquelles doit satisfaire la solution générale du système d'équations différentielles. Si on appelle N un point courant de la frontière actuelle et \mathbf{n}_t sa normale sortante actuelle, elles peuvent être :

- (a) un déplacement (ou une position) imposé(e) : $\mathbf{u}(N, t) = \mathbf{u}^s(N, t)$;
- (b) une température imposée : $T(N, t) = T^s(N, t)$;
- (c) une contrainte imposée : $\boldsymbol{\sigma}(N, t) \cdot \mathbf{n}_t = \mathbf{f}^s(N, t)$;
- (d) une densité de flux thermique imposée : $\mathbf{q}(N, t) \cdot \mathbf{n}_t = q^s(N, t)$.

■ **Définition 8.1 – Condition aux limites de Dirichlet.** Les conditions aux limites imposant des valeurs aux frontières *aux champs inconnus* $\mathbf{u}(P, t)$ et $T(P, t)$ (types (a) et (b) ci-dessus) sont appelées conditions aux limites de Dirichlet.

■ **Définition 8.2 – Condition aux limites de Neumann.** Les conditions aux limites imposant des valeurs *aux dérivées normales aux frontières* de fonctions des champs inconnus (types (c) et (d) ci-dessus) sont appelées conditions aux limites de Neumann.

Il est interdit d'imposer en un même point N de la frontière à la fois un déplacement et une contrainte dans la même direction. De même, il est interdit d'imposer en un même point N de la frontière à la fois une température et un flux thermique. Autrement dit, on ne peut pas

⁽⁷⁾ Cette représentation simplifiée des apports de chaleur par rayonnement suppose que la distribution du champ ${}^{(7)}r_{ext}^v$ est connue à l'avance.

imposer en un point de la frontière à la fois une condition sur la valeur d'un champ inconnu (donc de type Dirichlet) et une autre condition de type Neumann.

Remarques – Bien que ces interdictions soient d'origine mathématique, on peut les interpréter physiquement : si on exerce une contrainte $\mathbf{f}^s(N, t)$ à la frontière d'un solide, il en résulte un déplacement qui sera déterminé par la valeur solution $\mathbf{u}(M, t)$ à la frontière. Inversement, si on impose un déplacement à la frontière $\mathbf{u}^s(N, t)$, la contrainte à la frontière nécessaire pour obtenir ce déplacement sera déterminée par la valeur de la solution $\boldsymbol{\sigma}(M, t)$ à la frontière : $\mathbf{f}^s(t) = \boldsymbol{\sigma}(N, t) \cdot \mathbf{n}_t$. On peut faire les mêmes interprétations pour les conditions aux limites thermiques : la densité de flux thermique nécessaire pour maintenir une température imposée est déterminée par la valeur de la solution $\mathbf{q}(M, t)$ à la frontière $q^s = \mathbf{q}(N, t) \cdot \mathbf{n}_t$, et la température de surface obtenue sous l'effet d'une densité de flux thermique imposée est déterminée par la valeur de la solution $T(M, t)$ à la frontière.

Il peut aussi exister des conditions aux limites qui ne sont ni de type Dirichlet ni de type Neumann, mais qui s'expriment sous la forme de *relations* :

- relation entre le déplacement à la frontière et la contrainte à la frontière (appui élastique, contact avec ou sans frottement etc.)
- relation entre la température à la frontière et le flux thermique à la frontière (pour modéliser des « fuites thermiques » aux frontières).

- **Définition 8.3 – Conditions aux limites mixtes.** On appelle condition aux limites mixte une *relation* imposée à la frontière entre la valeur d'un champ inconnu et sa dérivée normale à la frontière.

8.1.6 Synthèse

Toutes les données précédentes (forme initiale, température initiale, modèle de comportement, sollicitations extérieures à distance et à la frontière) définissent complètement le problème élastique.

Un problème d'élasticité s'énonce donc ainsi : trouver les positions actuelles $\mathbf{x}_t(P, t)$ (ou le champ des déplacements actuels $\mathbf{u}(P, t)$) et le champ de températures actuelles $T(P, t)$ des particules P d'un solide déformable élastique défini par sa forme propre quand on le soumet à des sollicitations extérieures mécaniques et thermiques *a priori* fonction du temps.

Le problème élastique est donc à la fois un problème de dynamique (on cherche l'évolution temporelle des positions, c'est-à-dire un mouvement) et un problème de thermique (on cherche l'évolution temporelle du champ des températures). C'est donc un problème de *thermodynamique des solides élastiques* où les sollicitations extérieures sont *a priori* fonction du temps.

Couplage des équations – L'équation de mouvement [éq. (8.7) p. 117] et l'équation de la chaleur [éq. (8.8) p. 117] montrent que les aspects dynamique et thermique sont couplés. La séparation artificielle que l'on fait parfois entre ces deux disciplines provient de ce que l'on fait des hypothèses simplificatrices (souvent abusives) pour découpler les équations : la « dynamique » suppose les températures uniformes ($\mathbf{grad} T = 0$) et constantes dans le temps ($\dot{T} = 0$), et la « thermique » suppose l'absence de mouvement ($\mathbf{D} = \mathbf{0}$).

Dans certains cas, on ne cherche pas toute l'évolution temporelle depuis l'état initial, mais seulement un « état final » statique⁽⁸⁾ sans vouloir connaître toute l'évolution temporelle qui y conduit depuis l'état initial. Dans ce cas, les équations se simplifient : on cherche une solution

⁽⁸⁾ Pour l'observateur utilisé dans la description du problème.

dans laquelle toutes les dérivées particulières (en particulier les vitesses, les accélérations et \dot{T}) sont nulles. C'est alors un problème de *thermostatique* des solides élastiques. La solution trouvée est dite *stationnaire*. Dans un tel problème, le temps ne joue aucun rôle : il n'y a pas de conditions initiales et la description des sollicitations extérieures se réduit aux sollicitations extérieures finales. Dans ce cas, les équations différentielles se réduisent à :

$$\mathbf{0} = \text{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_0^m \quad \text{et} \quad 0 = r_{ext}^v - \text{div}_E \mathbf{q} \quad (8.9)$$

où : $\rho = \rho_0 K_v^{-1}$; $\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{f}}_{\boldsymbol{\sigma}}(T, \mathbf{u})$; $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{f}}_{\mathbf{q}}(T, \mathbf{u})$

Remarque – L'évolution temporelle d'un problème d'élasticité ne conduit jamais à une solution statique finale, car en élasticité, la dissipation intrinsèque est nulle et le mouvement ne s'amortit donc jamais. Pour qu'une solution temporelle converge vers une solution statique finale, il faudrait utiliser un modèle de comportement dissipatif (donc non élastique). Pour trouver une solution statique finale, il est donc plus économique en calcul de la chercher directement en annulant les dérivées particulières dans les équations de l'élasticité plutôt que d'introduire une dissipation artificielle dans un problème transitoire.

Par ailleurs, contrairement à ce qui est parfois affirmé, les deux équations différentielles d'un problème stationnaire [éq. (8.9) p. 121] ne sont pas découplées : les champs inconnus $\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t)$ (ou $\mathbf{x}_L(\mathbf{x}_0, t)$) et $T_L(\mathbf{x}_0, t)$ apparaissent dans les deux équations.

La résolution d'un problème d'élasticité est donc la recherche de la description de Lagrange des deux champs matériels $\mathbf{u}(P, t)$ (ou $\mathbf{x}_t(P, t)$) et $T(P, t)$. À l'aide des définitions cinématiques [éq. (8.3) à (8.5) p. 116], de la loi de comportement mécanique et de la loi de comportement thermique, on pourra déduire de la solution tous les autres champs utiles à l'ingénieur (déformations, contraintes, courants de chaleur, fonctions d'état etc.).

Le système d'équations différentielles dont les champs inconnus sont $\mathbf{x}_L(\mathbf{x}_0, t)$ (ou bien $\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t)$) et $T_L(\mathbf{x}_0, t)$ obtenu après les substitutions, est en général très compliqué. Sa solution est rarement accessible analytiquement, sauf pour quelques problèmes académiques dans lesquels on fait des hypothèses simplificatrices fortes sur la solution, avec des solides de forme simple et des conditions aux limites simplistes, ce qui ôte la plupart du temps tout intérêt pratique à la solution trouvée. Toutefois, ces problèmes académiques sont d'un grand intérêt pédagogique, car ils illustrent la manipulation de tous les concepts cinématiques, sthéniques et thermiques utilisés en mécanique des milieux continus et peuvent parfois donner un aperçu grossier de la solution d'un problème plus compliqué.

Que la solution générale du système différentiel soit analytiquement accessible ou non, on sait de l'analyse que la solution générale d'un système d'équations différentielles n'est pas complètement déterminée. La détermination complète de la solution du problème se fait à l'aide des conditions initiales et des conditions aux limites.

Problèmes « mal posés » – Si une solution finale ne se trouve pas complètement déterminée, c'est généralement parce que les conditions aux limites ou les conditions initiales sont insuffisantes. S'il n'existe aucune solution satisfaisant toutes les conditions aux limites, c'est généralement parce que les conditions aux limites ou initiales sont en surnombre ou incompatibles. L'intuition physique permet généralement de trouver les conditions manquantes ou redondantes.

Les conditions aux limites influencent fortement la solution, elles doivent donc modéliser aussi fidèlement que possible les actions du milieu extérieur sur le solide déformable afin que la solution du problème reflète correctement le comportement réel.

Enfin, à l'exception de quelques systèmes d'équations différentielles, aucun théorème ne garantit l'unicité de la solution. Seule l'intuition physique (parfois trompeuse) peut faire espérer une unicité.

Remarques – Les solutions d'un système différentiel assorti de ses conditions aux limites peuvent ne pas exister⁽⁹⁾, être en nombre fini voire infini⁽¹⁰⁾.

De plus, les solutions du problème différentiel peuvent aussi être infiniment sensibles aux conditions initiales ou aux limites, ce qui, dans ce cas pathologique, ôte tout intérêt pratique à une solution particulière puisque les conditions initiales ou aux limites sont nécessairement entachées d'incertitudes ; on peut toutefois prouver dans quelques cas l'existence d'un ou plusieurs attracteurs qui sont approchés asymptotiquement par les solutions quand $t \rightarrow \infty$.

Dans la quasi-totalité des problèmes industriels, une solution analytique est hors de portée. On ne peut donc qu'espérer approcher une solution à l'aide de méthodes numériques.

8.2 Approche numérique des solutions

Il sort du cadre de ce cours d'exposer toutes les méthodes numériques susceptibles de fournir une solution approchée au problème élastique exposé dans la section précédente. Toutefois, on donne en 8.2.2 [p. 123] les grandes lignes de la méthode numérique qui semble actuellement (en 2023) la plus populaire en mécanique des solides déformables : la méthode des éléments finis.

Quelle que soit la méthode numérique employée pour la résolution du système d'équations différentielles et de ses conditions initiales et aux limites, il est indispensable de prendre conscience des possibilités et des limitations inhérentes à toute méthode numérique, afin de comprendre ce que l'on peut en attendre, et aussi (voire surtout) ce que l'on ne peut pas en attendre.

8.2.1 Incertitudes sur les résultats numériques

Quelle que soit la méthode numérique employée, tout résultat numérique est entaché d'erreur pour les raisons suivantes :

1. *Incertitudes de troncature* : tout calcul numérique sur ordinateur est nécessairement arrondi, car la représentation des nombres y est finie donc tronquée. Les méthodes de résolution numérique enchaînant un très grand nombre de calculs élémentaires dans lesquels les erreurs d'arrondi se propagent et s'amplifient, l'incertitude sur les résultats finaux est non maîtrisée⁽¹¹⁾.
2. *Incertitudes de méthode* : toutes les méthodes numériques qui sont issues de l'analyse numérique n'ont pour objectif que de trouver une *solution approchée*. De plus, aucune méthode numérique ne sait garantir mathématiquement une précision (l'écart à la solution exacte) donnée à l'avance.

⁽⁹⁾ Dans ce cas il faut remettre en question la définition du problème : conditions initiales, conditions aux limites ou lois de comportement mécanique ou thermique.

⁽¹⁰⁾ Si les conditions aux limites sont insuffisantes.

⁽¹¹⁾ Elle est pourtant maîtrisable : on sait calculer l'incertitude sur le résultat de chaque opération élémentaire en fonction de l'incertitude des opérandes. Chaque donnée ou résultat intermédiaire devrait être stocké sous la forme de deux nombres : sa valeur centrale et son incertitude (ou bien ses valeurs maximale et minimale). Ce calcul d'incertitudes n'est malheureusement jamais fait dans les logiciels, sans doute en raison du coût en calcul et en mémoire et peut-être aussi par crainte d'avoir à afficher à l'issue de certains calculs volumineux des incertitudes importantes peu présentables.

Par ailleurs, les méthodes qui utilisent des maillages approximent la géométrie des frontières. Cette approximation peut avoir une forte influence locale sur la solution⁽¹²⁾.

3. *Incertitudes d'implémentation* : Les mathématiciens de l'analyse numérique supposent implicitement dans leurs démonstrations que les algorithmes qu'il proposent sont calculés exactement. Même si l'algorithme converge mathématiquement vers une solution, il n'est pas certain que son implémentation sur une machine qui tronque les nombres se comporte de la manière espérée⁽¹³⁾.
4. *Incertitudes inhérentes au problème posé* :
 - Si le problème est tel que la solution n'est pas unique⁽¹⁴⁾, un algorithme aboutira probablement à l'une d'entre-elles sans que l'on puisse savoir si la solution trouvée par l'algorithme est unique ou non.
 - Si le problème est tel que la solution est infiniment sensible aux conditions initiales ou aux limites, un algorithme aboutira probablement à une solution, bien que celle-ci n'ait aucune valeur prédictive.

La combinaison de ces sources d'incertitudes peut parfois conduire à des erreurs importantes voire à des résultats numériques non significatifs ou aberrants, sans que l'on puisse en juger par la seule observation du résultat ou du déroulement du calcul.

En conclusion, tout résultat numérique de résolution de systèmes d'équations différentielles⁽¹⁵⁾ doit toujours être considéré avec circonspection. Pour les problèmes non pathologiques (mais on sait rarement à l'avance s'ils le sont ou non !), ces résultats entachés d'incertitudes inconnues sont néanmoins précieux car on n'en dispose pas d'autres ! Cependant, la confiance que l'on peut leur accorder est rarement prouvée.

8.2.2 Aperçu sur la méthode des éléments finis

Le principe de la méthode est de proposer comme solution approchée, des champs matériels $\mathbf{u}(P,t)$ et $T(P,t)$ choisis dans une famille de champs (généralement polynomiaux) définis par morceaux sur le domaine étudié, s'approchant « au mieux » de la solution exacte qui, quant à elle, n'appartient généralement pas à cette famille. La solution proposée par la méthode est donc une *approximation* de la solution exacte, mais on sait démontrer que tout champ « suffisamment régulier » peut être approché d'aussi près que l'on veut par des champs définis par morceaux en diminuant la taille des morceaux⁽¹⁶⁾. On expose ici le principe de la méthode, sans détailler ni les algorithmes utilisés ni leur implémentation informatique.

⁽¹²⁾ Par exemple, en élasticité, de fausses « concentrations de contraintes » peuvent apparaître dans les angles rentrants dûs au maillage et qu'il convient de considérer avec circonspection.

⁽¹³⁾ Un même algorithme peut se comporter différemment d'un type de calculateur à l'autre si la représentation interne des nombres y est différente.

⁽¹⁴⁾ Les bifurcations ne sont pas rares en élasticité (flambage).

⁽¹⁵⁾ On dit aujourd'hui « simulation numérique », tendant à masquer le fait que le système différentiel est lui-même un modèle simplifié de la physique (hypothèse de milieu continu), et non une simulation de la réalité toujours trop complexe.

⁽¹⁶⁾ En langage mathématique, on dit que l'ensemble des fonctions définies par morceaux dans un domaine est *dense* dans l'ensemble de toutes les fonctions « régulières » définies sur ce domaine et que la solution approchée *converge* vers la solution exacte quand on diminue la taille des morceaux. Toutes ces affirmations sont démontrables quand on a défini de manière précise ce qu'on appelle « régularité ».

Formulation intégrale des équations différentielles

Dans un problème d'élasticité, les équations différentielles à résoudre sont l'équation de mouvement et l'équation de la chaleur [éq. (8.7) et (8.8) p. 117] :

$$\operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_0^m - \rho \boldsymbol{\gamma} = 0 \text{ (éq. vectorielle)} ; \quad \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \operatorname{div}_E \mathbf{q} - \rho \dot{e}^m = 0 \text{ (éq. scalaire)} \quad (8.10)$$

Rappel – Après les substitutions, ces quatre équations différentielles scalaires ont pour fonctions inconnues les quatre champs scalaires $u_{1L}(\mathbf{x}_0, t)$, $u_{2L}(\mathbf{x}_0, t)$, $u_{3L}(\mathbf{x}_0, t)$ et $T_L(\mathbf{x}_0, t)$.

- **Théorème 8.4 – Théorème d'analyse fonctionnelle.** Si $\boldsymbol{\xi}(M)$ et $\boldsymbol{\chi}(M)$ sont des champs (scalaires, vectoriels ou tensoriels réels de même ordre de tensorialité) définis sur un domaine volumique \mathcal{D} , et de carré intégrable sur ce domaine⁽¹⁷⁾, alors on a l'équivalence suivante :

$$\forall \boldsymbol{\chi}(M), \int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\xi}(M) \bullet \boldsymbol{\chi}(M) \, dv = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall M, \quad \boldsymbol{\xi}(M) = 0 \quad (8.11)$$

où « \bullet » est le produit scalaire approprié⁽¹⁸⁾.

Démonstration – On admettra ce théorème, sa démonstration sort du cadre de ce cours. On renvoie le lecteur intéressé à tout bon traité d'analyse fonctionnelle⁽¹⁹⁾.

On définit le champ vectoriel $\boldsymbol{\xi}(M) \in \mathbb{R}^4$, défini dans la position *actuelle* \mathcal{D}_t^m du solide, par les composantes suivantes :

$$\boldsymbol{\xi}(M) = \left\{ \underbrace{\operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_0^m - \rho \boldsymbol{\gamma}}_{\in \mathbb{R}^3}, \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \operatorname{div}_E \mathbf{q} - \rho \dot{e}^m}_{\in \mathbb{R}} \right\} \in \mathbb{R}^4$$

Le système d'équations différentielles (8.10) [p. 124] à résoudre s'écrit donc : $\boldsymbol{\xi}(M) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^4$.

On considère des champs vectoriels *arbitraires* $\boldsymbol{\chi}(M) \in \mathbb{R}^4$, définis dans la position *actuelle* \mathcal{D}_t^m du solide, par les composantes :

$$\boldsymbol{\chi}(M) = \{\mathbf{g}(M), h(M)\} \in \mathbb{R}^4$$

où $\mathbf{g}(M) \in \mathbb{R}^3$ est un champ vectoriel arbitraire et $h(M) \in \mathbb{R}$ est un champ scalaire arbitraire, ces deux champs arbitraires étant définis dans la position *actuelle* \mathcal{D}_t^m du solide.

Dans un problème d'élasticité, le produit scalaire $\boldsymbol{\xi}(M) \bullet \boldsymbol{\chi}(M)$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\xi}(M) \bullet \boldsymbol{\chi}(M) = (\operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f}_0^m - \rho \boldsymbol{\gamma}) \cdot \mathbf{g} + (\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + r_{ext}^v - \operatorname{div}_E \mathbf{q} - \rho \dot{e}^m) h$$

En utilisant le théorème 8.4 [p. 124], le système des quatre équations différentielles scalaires $\boldsymbol{\xi}(M) = \mathbf{0}$ est équivalent à l'unique équation scalaire suivante :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{g}_E, h_E), \quad & \int_{\mathcal{D}_t^m} \left(\operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma}_E + \rho_E \mathbf{f}_{0E}^m - \rho_E \boldsymbol{\gamma}_E \right) \cdot \mathbf{g}_E \, dv_t \\ & + \int_{\mathcal{D}_t^m} \left(\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E + r_{extE}^v - \operatorname{div}_E \mathbf{q} - \rho_E \dot{e}_E^m \right) h_E \, dv_t = 0 \end{aligned} \quad (8.12)$$

Dans l'équation (8.12), les intégrales portent sur le domaine matériel *actuel* \mathcal{D}_t^m , les champs actuels sont donc décrits par la méthode d'Euler, ce que rappelle l'indice E .

⁽¹⁷⁾ C'est-à-dire que les intégrales $\int_{\mathcal{D}} \|\boldsymbol{\chi}(M)\|^2 \, dv$ et $\int_{\mathcal{D}} \|\boldsymbol{\xi}(M)\|^2 \, dv$ sont finies ; cette condition est l'essentiel de la « régularité » requise pour la démonstration du théorème.

⁽¹⁸⁾ Si les champs $\boldsymbol{\xi}(M)$ et $\boldsymbol{\chi}(M)$ sont scalaires, l'opération « \bullet » est le produit ordinaire des réels.

⁽¹⁹⁾ Dans certains traités mathématiques, l'espace vectoriel de Hilbert des fonctions définies et intégrables sur le domaine \mathcal{D} est souvent construit sur le corps des complexes. Le théorème énoncé ici en est la réduction aux réels. Par ailleurs, dans ces cours l'intégrale $\int_{\mathcal{D}} \boldsymbol{\xi}(M) \bullet \boldsymbol{\chi}(M) \, dv$ est un produit scalaire de cet espace parfois noté $\langle \boldsymbol{\xi} | \boldsymbol{\chi} \rangle$.

Remarques – On reconnaît dans le premier terme de l'équation (8.12) [p. 124] l'expression du théorème (ou principe) des travaux virtuels (ou des puissances virtuelles)⁽²⁰⁾; on peut donc établir ce premier terme avec des raisonnements de mécanique. Le second terme de cette somme provient de l'équation de la chaleur. Il pourrait aussi bien s'interpréter en théorème (ou principe) des chaleurs virtuelles (ou des puissances calorifiques virtuelles), mais ce n'est pas l'usage.

Quoi qu'il en soit, une interprétation mécanique ou thermique des champs arbitraires $\mathbf{g}(M)$ (« déplacements virtuels » ou « vitesses virtuelles ») et $h(M)$ (« températures virtuelles ») n'est pas nécessaire aux développements qui suivent.

On utilise les deux identités suivantes⁽²¹⁾ (démonstrations en annexe D [p. 165]) :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div}_E \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_E \, dv_t &= - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{g} \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t & [\text{éq. (D.5) p. 166}] \\ \int_{\mathcal{D}_t} \operatorname{div}_E \mathbf{q} \cdot h_E \, dv_t &= - \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E h \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} h_E \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t & [\text{éq. (D.2) p. 166}] \end{aligned}$$

où \mathbf{n}_t est la normale unitaire sortante de la frontière actuelle $\partial \mathcal{D}_t$.

L'équation (8.12) [p. 124] devient :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{g}_E, h_E), - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{g} \, dv_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E (\mathbf{f}_{0E}^m - \boldsymbol{\gamma}_E) \cdot \mathbf{g}_E \, dv_t + \\ \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E h \, dv_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t} h_E \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \int_{\mathcal{D}_t} (\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E + r_{ext E}^v - \rho_E \dot{e}_E^m) h_E \, dv_t = 0 \end{aligned} \quad (8.13)$$

où, dans les intégrales de frontières, apparaissent les éventuelles conditions aux limites de Neumann [déf. 8.2 p. 119] portant sur les valeurs de $\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t$ et de $\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t$ aux frontières.

On note :

- $\partial \mathcal{D}_t^f$ la partie de frontière où des contraintes sont imposées $\boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t = \mathbf{f}^s$ (condition de Neumann sthénique);
- $\partial \mathcal{D}_t^f$ son complément $\partial \mathcal{D}_t - \partial \mathcal{D}_t^f$;
- $\partial \mathcal{D}_t^q$ la partie de frontière où un flux thermique est imposé $\mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t = q^s$ (condition de Neumann thermique);
- $\partial \mathcal{D}_t^q$ son complément $\partial \mathcal{D}_t - \partial \mathcal{D}_t^q$.

Compte tenu des conditions aux limites de Neumann sthéniques et thermiques, les intégrales de frontière de l'équation (8.13) [p. 125] s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{D}_t} \mathbf{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t &= \int_{\partial \mathcal{D}_t^f} \mathbf{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^f} \mathbf{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}_t^f} \mathbf{g}_E \cdot \mathbf{f}_E^s \, ds_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^f} \mathbf{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \\ \int_{\partial \mathcal{D}_t} h_E \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t &= \int_{\partial \mathcal{D}_t^q} h_E \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^q} h_E \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \\ &= \int_{\partial \mathcal{D}_t^q} h_E q_E^s \, ds_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^q} h_E \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \end{aligned}$$

où \mathbf{f}^s et q^s sont des champs surfaciques connus imposés aux frontières.

⁽²⁰⁾ Section 3.7 du cours *Équation générales de la mécanique des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

⁽²¹⁾ On peut les considérer comme des généralisations de l'intégration par parties pour des intégrales de volume.

Finalement, compte tenu des conditions aux limites de Neumann, le système d'équations différentielles du problème est équivalent à l'équation scalaire suivante :

$$\begin{aligned}
\forall (\mathbf{g}, h), \quad & - \int_{\mathcal{D}_t} \boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{grad}_E \mathbf{g} \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t} \rho_E (\mathbf{f}_{0E}^m - \boldsymbol{\gamma}_E) \cdot \mathbf{g}_E \, dv_t \\
& + \int_{\partial \mathcal{D}_t^f} \mathbf{g}_E \cdot \mathbf{f}_E^s \, ds_t + \int_{\partial \mathcal{D}_t^f} \mathbf{g}_E \cdot \boldsymbol{\sigma}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t \\
& + \int_{\mathcal{D}_t} \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{grad}_E h \, dv_t + \int_{\mathcal{D}_t} (\boldsymbol{\sigma}_E : \mathbf{D}_E + r_{ext E}^v - \rho_E \dot{e}_E^m) h_E \, dv_t \\
& - \int_{\partial \mathcal{D}_t^q} h_E q_E^s \, ds_t - \int_{\partial \mathcal{D}_t^q} h_E \mathbf{q}_E \cdot \mathbf{n}_t \, ds_t = 0
\end{aligned} \tag{8.14}$$

soumise aux conditions aux limites restantes (c'est-à-dire de type Dirichlet et de type mixte).

Construction d'une famille de champs définis par morceaux (maillage)

On divise en morceaux (mailles) le domaine \mathcal{D}_0^m occupé par le solide déformable *dans sa position initiale* (opération de maillage). En pratique, pour les domaines volumiques, les algorithmes d'assistance au maillage ne fournissent que des tétraèdres, des pentaèdres ou des hexaèdres. La forme $\partial \mathcal{D}_0^m$ de la frontière du domaine subit donc une approximation géométrique.

Pour construire une famille de champs définis par morceaux *sur le domaine initial* \mathcal{D}_0^m , on définit sur chaque maille des polynômes⁽²²⁾ de faible degré (en pratique : 1, 2 ou 3) déterminés par leurs valeurs en un certain nombre de points de la maille appelés *nœuds*⁽²³⁾. Ces fonctions polynomiales sont appelées *fonctions d'interpolation* ou encore *fonctions de forme*. Une maille munie de nœuds et de fonctions d'interpolations est appelée *élément*. Dans chaque maille, il faut autant de fonctions d'interpolation que de champs inconnus (en élasticité, quatre champs scalaires : u_1, u_2, u_3 et T). Bien souvent, les nœuds et les fonctions d'interpolation sont les mêmes pour chaque champ inconnu, seules les valeurs aux nœuds sont particulières à chaque champ inconnu.

Éléments conformes – On choisit souvent les nœuds et les fonctions d'interpolation de façon que les valeurs des interpolations dans chaque maille se raccordent à la frontière commune entre deux éléments. De tels éléments sont dits *conformes*. En fait, la conformité des éléments n'est pas obligatoire, on peut très bien approximer d'aussi près que l'on veut un champ solution avec des fonctions discontinues aux frontières des éléments : il suffit d'avoir beaucoup de petits éléments. Si les éléments sont conformes, la solution approchée $\tilde{\mathbf{u}}(M), \tilde{T}(M)$ proposée par la méthode sera plus lisse (continuité C_0). Toutefois, les éléments conformes n'assurent pas la continuité aux frontières des dérivées ; les gradients des champs (et donc les déformations et les contraintes) sont donc discontinus aux frontières des éléments. Il faut savoir que la plupart des logiciels présentent néanmoins des champs de déformations et de contraintes rendus artificiellement continus par divers procédés de moyennation ou de lissage.

On a ainsi défini par morceaux une famille de champs définis sur le domaine initial \mathcal{D}_0^m , chaque champ de la famille étant déterminé par ses valeurs aux nœuds. La solution approchée sera, pour chaque champ inconnu, un champ choisi dans cette famille, c'est-à-dire un ensemble de valeurs à chaque nœud. Le maillage étant effectué sur la position initiale du solide (la seule connue avant

⁽²²⁾ En fait, il est possible d'utiliser des fonctions non polynomiales, mais la majorité des implémentations de la méthode des éléments finis utilisent des polynômes.

⁽²³⁾ Le nombre de nœuds dans la maille dépend du degré choisi pour les polynômes.

la résolution), la description de la solution approchée sera nécessairement faite par la méthode de Lagrange.

Changement de variables Euler → Lagrange

Pour résoudre un problème d'élasticité il faut donc effectuer un changement de variables⁽²⁴⁾ sur les intégrales de l'équation (8.14) [p. 126] (intégrales sur le domaine matériel actuel \mathcal{D}_t^m et sa frontière actuelle $\partial\mathcal{D}_t^m$) pour les ramener à des intégrales sur le domaine matériel initial \mathcal{D}_0^m et sur sa frontière initiale $\partial\mathcal{D}_0^m$.

D'une manière générale, pour tout champ matériel $\Psi(P, t)$ défini sur un domaine matériel \mathcal{D}^m , un tel changement de variable pour les intégrales de volume s'écrit :

$$\forall \Psi, \quad \int_{\mathcal{D}_t^m} \Psi_E \, dv_t = \int_{\mathcal{D}_0^m} \Psi_L K_v L \, dv_0$$

où $\Psi(P, t) = \Psi_L(\mathbf{x}_0, t) = \Psi_E(\mathbf{x}_t, t)$ ⁽²⁵⁾ et où $K_v = \det \mathbf{F}$ est la dilatation volumique. Après les substitutions cinématiques [éq. (8.3) à (8.5) p. 116], la dilatation volumique actuelle K_v est fonction des champs matériels inconnus $\mathbf{u}(P, t)$ et $T(P, t)$.

De même, pour les intégrales de frontière, le changement de variables s'écrit :

$$\forall \Psi, \quad \int_{\partial\mathcal{D}_t} \Psi_E \, ds_t = \int_{\partial\mathcal{D}_0} \Psi_L K_s L \, ds_0$$

où K_s est la dilatation surfacique actuelle des facettes matérielles de la frontière (indifféremment identifiées par leur normale sortante actuelle \mathbf{n}_t ou par leur normale sortante initiale \mathbf{n}_0).

Rappels de cinématique – On rappelle que⁽²⁶⁾ :

La relation entre les gradients lagrangiens et eulériens d'un champ matériel Ψ est :

$$\mathbf{grad}_E \Psi = \mathbf{grad}_L \Psi \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

La dilatation surfacique actuelle d'une facette matérielle identifiée par sa normale de référence est :

$$K_s = \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|$$

La relation entre la normale actuelle et la normale de référence d'une facette matérielle est :

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|}$$

Finalement, après les changements de variables pour ramener les intégrales sur le domaine matériel actuel \mathcal{D}_t^m à des intégrales sur le domaine matériel de référence \mathcal{D}_0^m , l'équation (8.14)

⁽²⁴⁾ Dans certains textes de mécanique des solides déformables, les changements de variables dans les intégrales qui suivent sont appelés « équations de transport ».

⁽²⁵⁾ Comme précédemment, on omettra d'écrire les arguments (\mathbf{x}_0, t) des descriptions de Lagrange.

⁽²⁶⁾ Voir le cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

[p. 126] devient :

$$\begin{aligned}
& \forall (\mathbf{g}_L, h_L), \\
& - \int_{\mathcal{D}_0^m} \boldsymbol{\sigma}_L : (\mathbf{grad}_L \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} \, dv_0 + \int_{\mathcal{D}_0^m} \rho_L (\mathbf{f}_{0L}^m - \boldsymbol{\gamma}_L) \cdot \mathbf{g}_L \det \mathbf{F} \, dv_0 \\
& + \int_{\partial \mathcal{D}_0^f} \mathbf{g}_L \cdot \mathbf{f}_L^s \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| \, ds_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^f} \mathbf{g}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0) \det \mathbf{F} \, ds_0 \\
& + \int_{\mathcal{D}_0^m} \mathbf{q}_L \cdot (\mathbf{grad}_L h \cdot \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} \, dv_0 + \int_{\mathcal{D}_0^m} (\boldsymbol{\sigma}_L : \mathbf{D}_L + r_{ext L}^v - \rho_L \dot{e}_L^m) h_L \det \mathbf{F} \, dv_0 \\
& - \int_{\partial \mathcal{D}_0^q} h_L q_L^s \det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| \, ds_0 - \int_{\partial \mathcal{D}_0^q} h_L \mathbf{q}_L \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0) \det \mathbf{F} \, ds_0 = 0
\end{aligned} \tag{8.15}$$

où les champs \mathbf{g}_L (vectoriel) et h_L (scalaire) sont les descriptions de Lagrange des champs arbitraires $\mathbf{g}(P, t)$ et $h(P, t)$.

Remarques – Le lecteur attentif reconnaîtra dans cette équation les « expressions lagrangiennes » des équations locales des principes fondamentaux qui ont été signalées en section 3.7 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3]. De fait, il était tout à fait inutile de les écrire si prématurément : elles apparaissent naturellement lorsque, pour faire une résolution numérique *par la méthode des éléments finis*, on fait les changements de variables nécessaires pour ramener les intégrales sur le domaine actuel inconnu \mathcal{D}_t^m à des intégrales sur le domaine de référence connu \mathcal{D}_0^m .

Par ailleurs, certains auteurs récrivent l'intégrande de la première intégrale de l'équation (8.15) de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}_L : (\mathbf{grad}_L \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \det \mathbf{F} = \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \mathbf{grad}_L \mathbf{g} = \boldsymbol{\Pi} : \mathbf{grad}_L \mathbf{g}$$

Ainsi, quand on écrit la formulation intégrale des équations de mouvement, après le changement de variable, on peut faire apparaître le groupement de termes $\boldsymbol{\Pi} = \det \mathbf{F} (\boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{F}^{-T})$ dénommé premier « tenseur des contraintes » de Piola-Kirchhoff (non symétrique)⁽²⁷⁾. Cette « définition » n'est absolument pas nécessaire, elle ne donne lieu qu'à des interprétations pseudo-mécaniques⁽²⁸⁾.

Enfin, il n'est pas usuel de tenter d'interpréter les termes de (8.15) [p. 128] qui sont issus de l'équation de la chaleur. Certains auteurs notent \mathbf{q}_0 le vecteur $\mathbf{q}_L \cdot (\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0) \det \mathbf{F}$ et le nomment « transporté » de \mathbf{q} .

L'équation (8.15) [p. 128], complétée par les conditions aux limites autres que celles de type Neumann déjà prises en compte, est rigoureusement équivalente au problème initial.

Traitement des conditions aux limites restantes

Il existe deux techniques pour prendre en compte les conditions aux limites restantes (de type Dirichlet ou mixtes) :

1. On peut imposer aux champs polynomiaux définis dans le maillage, de respecter les conditions de type Dirichlet (températures et déplacements imposés à la frontière), ce qui revient à imposer des valeurs aux nœuds qui sont sur la partie de frontière où des conditions de Dirichlet sont posées;

⁽²⁷⁾ Voir la section 3.7 du cours *Équations générales des milieux continus*, du même auteur [note 3 p. 3].

⁽²⁸⁾ Notamment chez les auteurs qui interprètent le champ vectoriel arbitraire \mathbf{g} comme un champ de vitesses vituelles, et qui font un « parallèle » avec l'égalité $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \det \mathbf{F} = \boldsymbol{\Pi} : \mathbf{grad}_L \mathbf{v}$ qui n'est vraie que pour les vitesses réelles.

2. On peut traiter les conditions aux limites restantes (de Dirichlet et/ou mixtes) en les considérant comme des équations supplémentaires du problème, dont on écrit une formulation intégrale sur la portion de frontière concernée.

Par exemple, si une condition de Dirichlet sur la portion de frontière $\partial \mathcal{D}_t^D$ s'écrit :

$$\forall N \in \partial \mathcal{D}_t^D, \quad \mathbf{u}(N, t) - \mathbf{u}^s(N, t) = 0$$

elle est équivalente à la formulation intégrale :

$$\forall \mathbf{k}, \quad 0 = \int_{\partial \mathcal{D}_t^D} (\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_E^s) \cdot \mathbf{k}_E \, ds_t = \int_{\partial \mathcal{D}_0^D} (\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_L^s) \cdot \mathbf{k}_L \underbrace{\det \mathbf{F} \|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\|}_{K_s(\mathbf{n}_t)} \, ds_0$$

où \mathbf{k}_L est la description de Lagrange d'un champ vectoriel arbitraire défini sur la portion de frontière $\partial \mathcal{D}_0^D$.

Pour prendre en compte cette condition, il suffit donc d'ajouter cette intégrale de frontière à l'équation (8.15) [p. 128] qui devra être vraie $\forall (\mathbf{g}_L, h_L, \mathbf{k}_L)$.

On procède de même avec les éventuelles conditions aux limites de type mixte.

Finalement, le problème initial (équations différentielles et conditions aux limites) se ramène à l'unique équation scalaire (8.15) [p. 128] complétée par des intégrales dues aux conditions aux limites de Dirichlet (si elles ne sont pas automatiquement respectées par la famille de champs polynomiaux) et des intégrales dues aux conditions aux limites de type mixte. Cette équation scalaire doit être vraie quels que soient les champs arbitraires (dans le domaine ou sur des parties de frontière) qui ont été introduits, ce que l'on notera plus brièvement : $\forall \boldsymbol{\chi}_L$ (notation du théorème 8.4 [p. 124]).

Solution d'un problème stationnaire

Un problème stationnaire est un problème où le temps n'apparaît pas dans les équations. En élasticité, il s'agit de la recherche d'une solution « statique » (toutes les dérivées particulières sont donc nulles *pour l'observateur utilisé*). On a donc en particulier $\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, $\dot{T} = 0$ et $\dot{e}^m = 0$. Les conditions initiales ne jouent aucun rôle et les conditions aux limites sont les conditions aux limites finales.

L'approximation de la méthode des éléments finis provient de ce que l'on cherche la description de Lagrange approchée des champs inconnus $\tilde{\mathbf{u}}_L$ et \tilde{T}_L dans l'espace de champs polynomiaux \mathbb{F}_{pol} définis par morceaux construits dans l'opération de maillage, au lieu de la chercher dans l'espace (de dimension infinie) de tous les champs définis sur \mathcal{D}_0^m . On montre en analyse numérique⁽²⁹⁾ que la meilleure solution est obtenue en remplaçant la condition $\forall \boldsymbol{\chi}_L$ dans l'équation (8.15) par la condition $\forall \bar{\boldsymbol{\chi}}_L \in \mathbb{F}_{pol}$ dans la formulation intégrale du problème sur \mathcal{D}_0^m .

Or l'espace \mathbb{F}_{pol} peut être considéré comme un espace vectoriel de champs, de dimension finie⁽³⁰⁾, avec un nombre fini de champs de base : les champs de base⁽³¹⁾ $\boldsymbol{\psi}_i \in \mathbb{F}_{pol}$ choisis sont ceux qui sont nuls partout sauf en un nœud où ils valent 1. On peut ainsi construire tous les champs de l'espace vectoriel \mathbb{F}_{pol} par combinaison linéaire des $\boldsymbol{\psi}_i$, les coefficients de la combinaison linéaire étant les valeurs aux nœuds. Tous les champs scalaires arbitraires $\bar{\boldsymbol{\chi}}_L$ de

⁽²⁹⁾ Car \mathbb{F}_{pol} est dense dans l'ensemble des fonctions « régulières » définies sur \mathcal{D}_0^m .

⁽³⁰⁾ Sa dimension est le nombre de nœuds du maillage.

⁽³¹⁾ On les appelle aussi *fonctions test* ou encore *fonctions de pondération*.

\mathbb{F}_{pol} s'écrivent donc :

$$\bar{\chi}_L = \sum_{j=1}^n v_j \psi_j \quad \text{où } v_j \text{ est la valeur du champ } \bar{\chi}_L \text{ au nœud } j \text{ et } n \text{ est le nombre de nœuds}$$

et la condition $\forall \bar{\chi}_L \in \mathbb{F}_{pol}$ se réduit à la condition $\forall \psi_j$ où j est un entier compris entre 1 et le nombre de nœuds n du maillage⁽³²⁾.

En écrivant la formulation intégrale du problème pour chacun des ψ_j , on obtient un système de n équations *algébriques* (généralement non linéaire) dont les inconnues sont les valeurs aux nœuds v_j de chaque champ inconnu. La résolution de ce système algébrique donne la solution approchée recherchée (valeurs aux nœuds des champs inconnus).

Quelques détails techniques sur la résolution du système algébrique – Il sort du cadre de cet aperçu de détailler les méthodes informatiques et numériques utilisées pour la construction, le stockage en mémoire et la résolution de ce système d'équations algébriques (en général non linéaire).

Il suffit de savoir que la plupart des algorithmes⁽³³⁾ utilisés pour la résolution du système d'équations algébrique sont des algorithmes qui *convergent*⁽³⁴⁾ vers la solution *du système algébrique*⁽³⁵⁾ et que l'on doit stopper dès que la précision semble suffisante⁽³⁶⁾.

Certaines de ces méthodes⁽³⁷⁾ peuvent s'interpréter comme la résolution d'un problème transitoire (voir ci-dessous) dit « quasi-statique »⁽³⁸⁾ dans lequel les conditions aux limites évoluent progressivement⁽³⁹⁾ vers les conditions aux limites finales en fonction d'un temps fictif et où à chaque instant fictif intermédiaire on utilise une « loi de comportement tangente » [section 2.6 p. 44]. En fait, interpréter physiquement ces « évolutions fictives » incrémentales n'est pas vraiment nécessaire car les numériciens savent très bien construire des matrices tangentes pour résoudre un système algébrique non linéaire sans avoir besoin de recourir à interprétations mécaniques ou thermiques.

Enfin certaines méthodes dites *de Monte Carlo* approchent les solutions du système d'équations algébriques par des raisonnements statistiques.

Solution d'un problème transitoire

Dans la résolution d'un problème transitoire, on cherche les descriptions de Lagrange des champs solutions *en fonction du temps* $\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t)$ (ou bien $\mathbf{x}_L(\mathbf{x}_0, t)$) et $T_L(\mathbf{x}_0, t)$. Il s'agit donc de *thermodynamique* : on n'annule plus les dérivées temporelles dans la formulation intégrale, les conditions aux limites sont fonction du temps et les conditions initiales sont prises en compte.

Actuellement (2023), dans les logiciels, le temps est traité en *différences finies* avec de petits incréments de temps, c'est-à-dire que l'on cherche la distribution spatiale des champs inconnus

⁽³²⁾ Note pour les spécialistes : les fonctions d'interpolation définies dans les éléments sont utilisées comme fonctions test $\bar{\chi}_L$. C'est la méthode la plus couramment employée car, pour les systèmes d'équations algébriques linéaires, elle conduit à un système d'équations symétrique. Or, la résolution des systèmes d'équations non linéaires peut se ramener à une suite de résolutions de systèmes linéaires dont la matrice est aussi symétrique (méthode de *Newton-Raphson* et ses variantes). Les systèmes symétriques sont préférés car on connaît des méthodes de résolution plus efficaces que pour les systèmes quelconques.

⁽³³⁾ Sauf les algorithmes de résolution directe de systèmes *linéaires* (utilisables pour des systèmes de taille modérée).

⁽³⁴⁾ La solution exacte du système d'équations algébriques serait atteinte au bout d'un nombre infini d'itérations.

⁽³⁵⁾ Et non vers la solution exacte des équations différentielles non discrétisées.

⁽³⁶⁾ Le choix du critère d'arrêt de l'algorithme est un problème délicat que l'on ne détaillera pas ici.

⁽³⁷⁾ Notamment la méthode de *Newton-Raphson* et ses différentes variantes.

⁽³⁸⁾ La formulation intégrale est celle du problème stationnaire, c'est-à-dire que les dérivées particulières sont nulles.

⁽³⁹⁾ Le choix de cette progression fictive est arbitraire. Ce choix peut orienter vers une certaine solution en cas de solutions multiples.

en un certain nombre d'instants intermédiaires rapprochés. À chaque incrément de temps, on doit donc résoudre un problème similaire au problème précédent, à la différence près que dans la formulation intégrale, les dérivées particulières actuelles ne sont pas nulles. La solution numérique d'un problème transitoire est donc la description spatiale des champs inconnus à différents instants intermédiaires.

Choix des incréments de temps – Dans un tel calcul, le choix des incréments de temps est toujours délicat : s'ils sont choisis trop grands, le résultat numérique peut masquer des phénomènes dynamiques rapides, s'ils sont trop petits, le coût du calcul est prohibitif.

Par ailleurs, l'estimation des dérivées temporelles aux temps intermédiaires (vitesses, accélérations, \dot{T} , \dot{e}^m , etc) donne lieu à diverses méthodes numériques pour *estimer* leur valeur (solveurs en temps dits *implicites* ou *explicites*⁽⁴⁰⁾).

À noter que pour éviter de traiter le temps en différences finies, certains numériciens envisagent le problème transitoire d'une manière plus abstraite : on cherche les champs solutions $\{\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t), T_L(\mathbf{x}_0, t)\}$ dans un domaine d'espace-temps de dimension 4 dont les points sont dans $(\mathbf{x}_0, t) \in \mathcal{D}_0 \times [t_0; t_1]$. Cette façon de traiter numériquement le temps de la même manière que les variables d'espace reste aujourd'hui (2023) confidentielle et n'est pas implantée dans les logiciels actuels⁽⁴¹⁾.

Méthodes numériques en mécanique des fluides – La méthode des éléments finis est applicable pour la résolution des équations différentielles de la mécanique des fluides. La seule différence est qu'en mécanique des fluides, les domaines considérés sont des *domaines géométriques* dont on connaît la forme *a priori*. Le maillage se fait donc sur ce domaine, le plus souvent fixe pour l'observateur utilisé dans le calcul. La description des champs inconnus (vitesse et température) se fait donc par la méthode d'Euler (\mathbf{v}_E et T_E). Il n'est donc pas nécessaire de ramener la formulation intégrale à des intégrales sur une forme de référence.

Il est à noter que beaucoup de mécaniciens des fluides préfèrent utiliser une autre méthode numérique que la méthode des éléments finis : la *méthode des volumes finis*. Cette méthode numérique utilise aussi un maillage, mais elle n'utilise pas de formulation intégrale des équations à résoudre : elle cherche une solution approchée des descriptions d'Euler champs inconnus (\mathbf{v}_E et T_E) en écrivant des équations de bilan (masse, mécanique et thermique) sur chaque maille.

Autres problèmes de mécanique des solides déformables

La méthode des éléments finis permet aussi de rechercher des fréquences propres et des modes propres de vibration de systèmes *linéaires*, afin de construire par superposition pondérée de ces modes propres un mouvement vibratoire « stationnaire » sous sollicitation forcée périodique (méthode dite de décomposition modale). Elle permet aussi de rechercher les limites de stabilité des solutions statiques (sollicitations critiques de flambement).

L'écriture des équations thermomécaniques dont la solution décrit les modes propres de vibration ou les limites de stabilité sort du cadre de ce cours. Dans cet aperçu sur la méthode des éléments finis, il suffit de retenir que ces deux problèmes se résolvent en analysant le spectre (valeurs propres et vecteurs propres) d'un système d'équations algébriques *linéaire* construit à partir de la formulation intégrale de certaines équations différentielles (qui n'ont pas été données dans ce cours), de la même manière que précédemment.

⁽⁴⁰⁾ Les solveurs explicites sont plus rapides mais moins stables. Il sont souvent utilisés dans les logiciels dits de « crash ». De plus, certains logiciels de « crash » remplacent subrepticement, pour des raisons de rapidité de calcul, les dérivées particulières exactes par des « dérivées objectives » de Naghdi (voir la remarque *Pseudo-dérivées objectives* p. 46).

⁽⁴¹⁾ Il faut mailler dans un espace de dimension 4.

Remarque finale

Le lecteur attentif aura remarqué que les substitutions en fonction des champs matériels inconnus $\mathbf{u}(P,t)$ et $T(P,t)$ n'ont pas été écrites explicitement, notamment les lois de comportement mécanique ($\boldsymbol{\sigma} = \dots$) et thermique ($\mathbf{q} = \dots$). Par conséquent, *la méthode des éléments finis est applicable quelles que soient les lois de comportement mécanique et thermique*, même non élastiques⁽⁴²⁾.

Dans les substitutions, les listes de variables d'état peuvent être différentes. Les substitutions, particulières à chaque modèle de comportement, ne sont effectivement faites par le logiciel qu'au moment de la construction du système d'équations algébriques dont la solution donnera les valeurs approchées aux nœuds. Les substitutions à faire dans un problème d'élasticité isotrope avec une certaine loi de comportement seront détaillées dans les illustrations numériques exposées dans le chapitre 9 [p. 133].

8.3 Recommandations pratiques

Le modèle de comportement élastique (isotrope ou non) est satisfaisant pour la résolution des problèmes industriels dans lesquels les pièces doivent revenir à leur forme initiale après cessation des sollicitations. Le modèle élastique est donc inadapté pour les problèmes de formage, dans lesquels on souhaite que le solide ait une forme différente lorsque les sollicitations cessent. La modélisation de comportements inélastiques fait l'objet du cours suivant⁽⁴³⁾.

Par ailleurs, un critère de limite élastique doit toujours être utilisé pour vérifier qu'aucune limite élastique n'est atteinte *en aucun point du solide élastique* et, pour les problèmes transitoires, *en aucun instant depuis l'instant initial*.

En outre, à l'exception de certains problèmes d'élasticité où l'instabilité est recherchée, on doit aussi s'assurer que la *limite de stabilité n'est jamais atteinte*. Dans la vérification d'une pièce ou d'une structure élastique qui doit rester stable⁽⁴⁴⁾, les deux critères doivent être satisfaits.

Noter que dans le calcul de pièces ou de structures élancées, le seuil de stabilité (« flambage ») est souvent atteint avant le(s) seuil(s) de limite élastique, il est donc prudent de ne pas se limiter à la seule vérification des seuils de limite élastique.

Enfin, dans la plupart des cas industriels, le recours à une méthode de résolution numérique est incontournable. Hormis les incertitudes inhérentes à toute solution numérique qui ont été exposées en section 8.2.1 [p. 122], une solution numérique est plus pauvre qu'une solution analytique car l'influence des paramètres donnés (dimensions, matériau, sollicitations extérieures) n'apparaît pas dans un résultat numérique. Pour tester l'influence d'un paramètre, on ne peut que recommencer le calcul avec de nouvelles valeurs pour le paramètre, et supposer qu'entre les valeurs du paramètre, les résultats trouvés sont interpolables.

⁽⁴²⁾ Il faut préciser que les modèles de comportement inélastiques ont, pour la plupart, des variables d'état mnésiques régies par une équation dite d'évolution. Il y a donc des équations différentielles supplémentaires (les équations d'évolution des variables d'état mnésiques) et des champs inconnus supplémentaires (les variables d'état mnésiques).

⁽⁴³⁾ *Comportements inélastiques*, du même auteur :

<http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/inelas.html>

ou bien <https://cel.hal.science/ce1-01744164>.

⁽⁴⁴⁾ C'est-à-dire sans passer par une bifurcation vers des solutions multiples (flambage).

Illustrations numériques en élasticité isotrope

Dans ce chapitre, on présente quelques illustrations numériques portant sur des problèmes d'élasticité isotrope résolus par la méthode des éléments finis. Le premier exemple met en évidence les effets thermiques dans la traction simple d'un barreau d'acier ; le second modélise la flexion forte d'un bloc de caoutchouc ; le troisième met en évidence la non linéarité de la relation entre contrainte et allongement lors d'un essai de forte traction ou compression élastique isotherme ; le dernier illustre les effets de bord existant dans un essai de glissement isotherme.

9.1 Modèle de comportement utilisé

9.1.1 Comportement élastique isotrope

On considère que le matériau est correctement modélisé par le modèle de milieu continu élastique isotrope construit dans le chapitre 3 [p. 51] : les variables d'état sont $\{T, K_v, \delta\}$ et on postule l'hypothèse supplémentaire 3.3 [p. 62] (une déformation isovolume ne modifie pas la contrainte moyenne). On rappelle ici les expressions utiles pour la formulation du problème :

$$e^m = Q_{exp}^{(1)} + \frac{1}{\rho_0} \int_1^{K_v} \left(\sigma_{exp}^{(2)} - T \partial_T \sigma_{exp}^{(2)} \right) dK_v + \frac{1}{\sqrt{3} \rho_0} \int_1^\delta \frac{\tau_{exp1}^{(3)} - T \partial_T \tau_{exp1}^{(3)}}{\delta^{\frac{1}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} d\delta$$

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_2 \mathbf{B} \quad \text{où} \quad K_0 = \sigma_{exp}^{(2)} - \frac{\delta^{\frac{2}{3}} \tau_{exp1}^{(3)}}{\sqrt{3} K_v \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad \text{et} \quad K_2 = \frac{\tau_{exp1}^{(3)}}{\sqrt{3} K_v^{\frac{5}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

On rappelle que la contrainte tangentielle $\tau_{exp1}^{(3)}$ est la contrainte tangentielle $\tau_{exp}^{(3)}$ du chemin $\mathcal{C}^{(3)}$ (glissement isovolume isotherme) simplifiée par l'hypothèse supplémentaire 3.3 [p. 62].

Dans ce modèle élastique isotrope, les trois courbes expérimentales $Q_{exp}^{(1)}(T)$, $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ et $\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)$ peuvent être choisies arbitrairement sans compromettre l'admissibilité thermodynamique et le caractère élastique isotrope du modèle. Elle devraient être issues d'expériences. On choisit ici de remplacer ces courbes expérimentales par des idéalizations mathématiques très simples, mais physiquement raisonnables : ce sont celles qui ont été établies dans la dernière section de la feuille de calcul en annexe F [p. 173] et que l'on rappelle ici :

$$\tau_{exp1}^{(3)} = \mu_0 \gamma \quad (\text{contrainte de glissement sans déformation sphérique initiale}) \quad (9.1)$$

$$\sigma_{exp}^{(2)} = \sigma_{exp}^{(1)} + \xi_0 \ln K_v \quad (\text{contrainte moyenne dans une déformation sphérique}) \quad (9.2)$$

$$Q_{exp}^{(5)} = C_p (T - T_0) \quad (\text{chaleur massique en dilatation libre}) \quad (9.3)$$

$$K_{vexp}^{(5)} = 1 + \beta (T - T_0) \quad (\text{dilatation volumique libre}) \quad (9.4)$$

où les coefficients μ_0 , ξ_0 , C_p et β sont supposés indépendants de la température.

Les coefficients ξ_0 (compressibilité), μ_0 (module de cisaillement), C_p (capacité thermique en dilatation libre) et β (coefficient de dilatation thermique volumique⁽¹⁾) sont donnés ou déductibles de caractéristiques matériaux publiées. Avec ces idéalizations, la dérivée particulaire de l'énergie interne massique s'écrit⁽²⁾ :

$$\begin{aligned} \dot{e}^m = & \left(C_p - \frac{\xi_0 \beta^2 T}{\rho_0} \left(\frac{3 K_v}{(1 + \beta(T - T_0))^2} + 6(1 + \beta(T - T_0)) \right) \right) \dot{T} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \delta^{\frac{1}{3}} \dot{\delta} + \\ & \frac{\xi_0}{\rho_0} \left(\frac{3 \beta T}{1 + \beta(T - T_0)} + \ln \frac{K_v}{1 + \beta(T - T_0)} \right) \dot{K}_v \end{aligned} \quad (9.5)$$

La loi de comportement mécanique est $\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_1 \mathbf{B}$ où les fonctions d'état K_0 et K_1 sont :

$$K_0 = \xi_0 \ln \frac{K_v}{1 + \beta(T - T_0)} - \frac{\mu_0 \delta^{\frac{2}{3}}}{K_v} \quad ; \quad K_1 = \frac{\mu_0}{K_v^{\frac{5}{3}}}$$

9.1.2 Comportement thermique

La loi de comportement thermique idéalisée choisie est celle de Fourier : $\mathbf{q} = -\alpha \mathbf{grad}_E T$ où α est un coefficient supposé indépendant de la température T , de son gradient eulérien $\mathbf{grad}_E T$ et du tenseur de déformation \mathbf{B} .

9.1.3 Formulation intégrale

La formulation intégrale du problème, *sans tenir compte des conditions aux limites de Dirichlet ou mixtes*, est donc [éq. (8.15) p. 128] :

$$\begin{aligned} & \forall (\mathbf{g}_L, h_L), \\ & - \int_{\mathcal{D}_0} \boldsymbol{\sigma}_L : (\mathbf{grad}_L \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}_L^{-1}) \det \mathbf{F}_L dv_0 + \int_{\partial \mathcal{D}_0^f} \mathbf{g}_L \cdot \mathbf{f}_L^s \det \mathbf{F}_L \|\mathbf{F}_L^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| ds_0 \\ & + \int_{\partial \mathcal{D}_0^f} \mathbf{g}_L \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \cdot (\mathbf{F}_L^{-T} \cdot \mathbf{n}_0) \det \mathbf{F}_L ds_0 + \int_{\mathcal{D}_0} \rho_L (\mathbf{f}_L^m - \boldsymbol{\gamma}_L) \cdot \mathbf{g}_L \det \mathbf{F}_L dv_0 \\ & + \int_{\mathcal{D}_0} \mathbf{q}_L \cdot (\mathbf{grad}_L h \cdot \mathbf{F}_L^{-1}) \det \mathbf{F}_L dv_0 - \int_{\partial \mathcal{D}_0^q} h_L q_L^s \det \mathbf{F}_L \|\mathbf{F}_L^{-T} \cdot \mathbf{n}_0\| ds_0 \\ & - \int_{\partial \mathcal{D}_0^q} h_L q_L \cdot (\mathbf{F}_L^{-T} \cdot \mathbf{n}_0) \det \mathbf{F}_L ds_0 + \int_{\mathcal{D}_0} \left(\boldsymbol{\sigma}_L : \mathbf{D}_L + r_L^v - \rho_L \dot{e}_L^m \right) h_L \det \mathbf{F}_L dv_0 = 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

⁽¹⁾ ATTENTION : le coefficient de dilatation donné dans les catalogues est souvent un coefficient de dilatation thermique *linéique* [$\text{m} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$], sans que ce soit clairement spécifié. Le coefficient β utilisé ici est un coefficient de dilatation thermique *volumique* [$\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$] qui est le cube du coefficient de dilatation thermique *linéique*.

⁽²⁾ Les calculs sont détaillés dans la dernière section de la feuille de calcul en annexe F [p. 173].

dans laquelle le logiciel effectue informatiquement la chaîne de substitutions *de cinématique générale* suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_L &= \mathbf{G} + \mathbf{grad}_L \mathbf{u} \quad ; \quad \mathbf{B}_L = \mathbf{F}_L \cdot \mathbf{F}_L^T \quad ; \quad K_{vL} = \det \mathbf{F}_L \quad ; \quad \delta_L = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\text{tr} \mathbf{B}_L)^{\frac{3}{2}}}{K_{vL}} \quad ; \\ \dot{\mathbf{F}}_L &= \mathbf{grad}_L \dot{\mathbf{u}}_t \quad ; \quad \mathbf{D}_L = \mathbf{sym}(\dot{\mathbf{F}}_L \cdot \mathbf{F}_L^{-1}) \quad ; \quad \dot{K}_{vL} = K_{vL} \text{tr} \mathbf{D}_L \quad ; \\ \dot{\delta}_L &= \frac{\sqrt{\text{tr} \mathbf{B}_L}}{\sqrt{3} K_{vL}} \mathbf{B}_L : \mathbf{D}_L - \frac{(\text{tr} \mathbf{B}_L)^{\frac{3}{2}}}{3 \sqrt{3} K_{vL}^2} \dot{K}_{vL} \quad ; \quad \boldsymbol{\gamma}_L = \ddot{\mathbf{u}}_L \quad ; \quad \rho_L = \frac{\rho_{0L}}{K_{vL}} \quad ; \end{aligned}$$

et les substitutions *particulières au modèle de comportement* suivantes :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_L &= \left(\xi_0 (K_{vL} - \beta (T - T_0) - 1) - 2 \mu_0 \frac{\delta_L^{\frac{2}{3}}}{K_{vL}^2} \right) \mathbf{G} + \frac{2 \mu_0}{K_{vL}^{\frac{5}{3}}} \mathbf{B}_L \quad (\text{comportement mécanique}) \\ \mathbf{q}_L &= -\alpha \mathbf{grad}_L T \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{comportement thermique}) \\ \dot{e}_L^m &= \dots \quad (\text{dérivée particulière de l'énergie interne massique [éq. (9.5) p. 134]}) \end{aligned}$$

Comme on peut le constater, après la chaîne de substitutions précédente, la formulation intégrale se ramène bien à une équation en $\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t)$ (description de Lagrange des déplacements actuels) et en $T_L(\mathbf{x}_0, t)$ (description de Lagrange des températures actuelles).

9.2 Choix d'un logiciel de résolution

Pour résoudre numériquement les problèmes de ce chapitre, l'auteur a choisi d'utiliser le logiciel de résolution par éléments finis COMSOL[®] dans lequel il est possible de donner la formulation intégrale d'un problème d'équations aux dérivées partielles et de ses conditions aux limites (c'est-à-dire l'équation (9.6) [p. 134] et les substitutions qui suivent), *sans préciser de quelle physique il s'agit*⁽³⁾.

Justification du choix – L'avantage d'un tel logiciel, par rapport aux logiciels d'éléments finis spécialisés dans la mécanique des solides déformables, est que l'utilisateur maîtrise parfaitement le système d'équations différentielles (ou sa formulation intégrale) qu'il veut résoudre ainsi que les lois de comportement qu'il veut utiliser, sans avoir à se soucier (ou presque) des méthodes numériques employées pour résoudre numériquement le problème. Il est donc notamment possible d'utiliser un modèle de comportement élastique inédit utilisant le tenseur de déformation objectif que l'on veut.

La contrepartie de cette liberté est le travail de préparation préalable : il faut transcrire dans le langage du logiciel les équations différentielles (ou leur formulation intégrale) du problème et les conditions aux limites. La description des lois de comportement mécanique et thermique se fait en transcrivant les équations de comportement et les substitutions cinématiques⁽⁴⁾, et non par un simple choix dans une liste de lois de comportement prédéterminés et souvent peu satisfaisants

⁽³⁾ Il convient toutefois de préciser qu'il existe aussi dans ce logiciel des « boîtes à outils » destinées aux ingénieurs et qui simplifient la définition d'un problème de thermomécanique (la formulation intégrale des équations mécaniques et de la chaleur est préécrite). Malheureusement, dans les modèles proposés, on trouve soit la « loi » de Hooke non thermodynamiquement admissible et utilisant le tenseur de déformation des « petites perturbations » $\boldsymbol{\epsilon}$ (incorrect quand le mouvement est loin d'une quasi-translation [section 4.1 p. 72]), soit des lois de comportement en déformations finies se référant à des publications obsolètes ou erronées (comportement parfois non thermodynamiquement admissibles) utilisant des tenseurs de déformation non objectifs, voire parfois des « dérivées objectives ».

⁽⁴⁾ On peut heureusement définir des variables intermédiaires (malheureusement non matricielles ce qui simplifierait beaucoup la transcription).

(admissibilité thermodynamique non garantie et comportement éventuellement exotique dans certaines sollicitations). Dans le cas qui nous concerne ici, le modèle de comportement utilisé est le modèle élastique isotrope (T, K_v, δ) construit au chapitre 3 [p. 51] formalisé avec le tenseur de déformation \mathbf{B} . Ce modèle élastique isotrope ne figure dans aucun menu de logiciel spécialisé ni dans « les boîtes à outils » de COMSOL[®].

Pour la résolution numérique, on laisse le logiciel faire le travail programmé par les numériciens pour construire et résoudre le système d'équations algébriques non linéaire engendré par le maillage et ses fonctions d'interpolation⁽⁵⁾. Il est possible de « guider » la convergence d'un problème stationnaire non linéaire dont la solution n'est pas unique en proposant au logiciel une estimation initiale des champs solutions (*guess*) assez proche de la solution espérée.

Enfin, le logiciel COMSOL[®] présente une particularité bien agréable et rare dans les autres logiciels du commerce : il prend en compte les unités des grandeurs. On est donc assuré de travailler en unités cohérentes et on peut entrer ou afficher les grandeurs dans les unités de son choix.

9.3 Traction non isotherme d'une éprouvette cylindrique

On se propose de calculer l'évolution temporelle d'une éprouvette cylindrique d'acier de diamètre 10 mm et de longueur utile $L_0 = 50$ mm, soumise à une traction simple dans la direction de son axe, avec différentes conditions aux limites thermiques et avec différentes vitesses de traction, afin d'illustrer les effets thermiques d'une sollicitation mécanique.

Dans ce calcul, la pesanteur est négligée ($\mathbf{f}_0^m = \mathbf{0}$) et les accélérations sont négligées ($\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$, calcul dit « mécaniquement quasi-statique »), mais les évolutions en température ne sont pas négligées ($\dot{T} \neq 0$). *Les champs inconnus du problème sont donc fonction du temps.*

On cherche une solution axisymétrique, les deux seules variables d'espace sont donc les deux coordonnées r et z d'un système de coordonnées cylindriques. On cherche donc des champs $\mathbf{u}_L(r, z, t)$ et $\mathbf{T}_L(r, z, t)$.

Rappel – Si \mathbf{v} est un champ de vecteurs axisymétrique $\mathbf{v} = v_r(r, z, t)\mathbf{e}_r + v_z(r, z, t)\mathbf{e}_z$, et si $f(r, z, t)$ est un champ scalaire axisymétrique, les composantes de leur gradient lagrangien dans la base physique locale (orthonormée) $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$ sont⁽⁶⁾ :

$$[(\mathbf{grad}_L \mathbf{v})^\bullet \cdot] = \begin{bmatrix} \partial_r v_r & 0 & \partial_z v_r \\ 0 & \frac{v_r}{r} & 0 \\ \partial_r v_z & 0 & \partial_z v_z \end{bmatrix}_{(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)} \quad ; \quad \mathbf{grad}_L f = \partial_r f \mathbf{e}_r + \partial_z f \mathbf{e}_z$$

Ces formules sont applicables aux champs vectoriels \mathbf{u}_L et \mathbf{g}_L , ainsi qu'aux champs scalaires T_L et h_L .

Afin d'obtenir des résultats lisibles et pédagogiques, on choisit de n'étudier que la zone centrale de l'éprouvette en ignorant délibérément tous les systèmes d'accrochage de l'éprouvette sur la machine de traction.

9.3.1 Caractéristiques du matériau

Les données numériques sont les suivantes⁽⁷⁾ :

⁽⁵⁾ Le logiciel ignorant la physique traitée, il n'est pas nécessaire d'introduire une quelconque « loi tangente » [section 2.6 p. 44], ni une quelconque « dérivée objective » [p. 46] : les numériciens savent très bien construire numériquement une matrice tangente si on utilise la méthode de Newton-Raphson.

⁽⁶⁾ Voir le cours *Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

⁽⁷⁾ Ces données sont extraites de la bibliothèque de matériaux incluse dans le logiciel COMSOL[®]. Ce sont celles de l'acier référencé Steel AISI 4340.

Coefficient de dilatation volumique à 20 C	β	$12.3 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$
Capacité thermique en dilatation libre à 20 C	C_p	$475 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Masse volumique à 20 C	ρ_0	7850 kg.m^{-3}
Coefficient de conductivité thermique à 20 C	α	$44.5 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Module d'Young à 20 C	E	$205 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson à 20 C	ν	0.28

La loi de comportement utilisée dans ce calcul n'étant pas celle de Hooke, on considère que les valeurs du module d'Young et du coefficient de Poisson données dans ce tableau sont des valeurs initiales, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas de déformation. A l'aide des formules de Hooke, on en déduit les modules de compressibilité et de cisaillement *initiaux* à 20 C utilisés dans le modèle de matériau :

$$\xi_0 = \frac{E_0}{3(1-2\nu_0)} \quad ; \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)}$$

Rappel – Dans le modèle de comportement idéalisé utilisé ici, les modules ξ_0 et μ_0 sont supposés invariants avec la température.

9.3.2 Conditions aux limites mécaniques

Sur la face supérieure du cylindre, on impose un déplacement \mathbf{u}_s uniforme dans la direction axiale z , à une vitesse $v_2 = 4 \text{ mm.mn}^{-1}$, jusqu'à un déplacement final $\mathbf{u}_s^f = 0.003 L_0 = 150 \mu\text{m}$, puis le déplacement final est maintenu constant pendant 5 secondes. Les déplacements radiaux sont libres.

Sur la face inférieure du cylindre ($z = 0$), on utilise des conditions aux limites classiquement utilisées dans un calcul de traction simple : le déplacement vertical \mathbf{u}_z est imposé nul et les déplacements radiaux $u_r(r, 0)$ pour $r > 0$ sont libres sauf au centre (le problème est axisymétrique).

9.3.3 Conditions aux limites thermiques

La température initiale est $T_0 = 293.15 \text{ K} = 20 \text{ C}$. On envisage trois cas de conditions aux limites thermiques :

1. Toutes les frontières sont adiabatiques ; il n'y a aucun échange de chaleur avec l'extérieur ($q^s = 0$ sur les frontières, cas idéal extrême).
2. Toutes les frontières sont à la température imposée T_0 (cas idéal extrême).
3. Les frontières aux extrémités sont à la température T_0 et la surface latérale du cylindre est adiabatique (cas approchant les conditions d'essai réelles : la masse des mors de la machine de traction est considérée comme un thermostat et les échanges thermiques avec l'air ambiant sur la surface latérale sont négligés).

9.3.4 Équations différentielles à résoudre

Afin d'obtenir des valeurs à tout instant (notamment les températures), on résout ici un problème *transitoire*, en négligeant toutefois les accélérations ($\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0}$) et la pesanteur ($\mathbf{f}_0^m = \mathbf{0}$).

L'équation de mouvement est donc $\text{div } \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$.

Dans l'équation de la chaleur, on suppose que l'apport de chaleur par rayonnement est nul : $\rho \dot{e}^m = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \text{div } \mathbf{q}$.

9.3.5 Analyse des résultats numériques

Le maillage utilisé est celui de la figure 9.1 (l'axe du cylindre est en rouge). Les éléments choisis sont à interpolation quadratique.

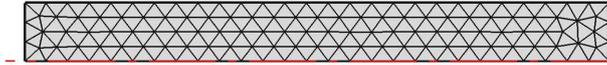
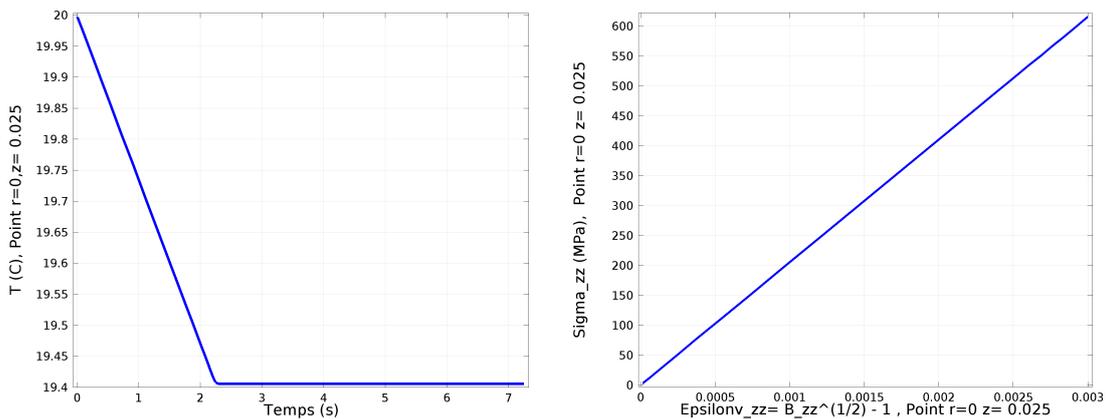


FIGURE 9.1 – Maillage du plan méridien de l'éprouvette (calcul axisymétrique)

Si les frontières sont adiabatiques

On constate que les champs de température, de déformation et de contrainte sont *uniformes dans toute l'éprouvette* mais variables avec le temps.



Courbe $T(t)$ au centre de l'éprouvette

Courbe $\sigma_{zz}(\epsilon_{zz}^v)$ au centre de l'éprouvette

FIGURE 9.2 – Résultats pour des frontières adiabatiques

On constate [fig 9.2 p. 138] une chute de température de 0.59 C et une courbe $\sigma_{zz}(\epsilon_{zz}^v)$ quasi-linéaire; le « module d'Young apparent » ($E_{app} = \frac{F}{S_0} \frac{L_0}{u}$)⁽⁸⁾ à la fin du mouvement est :

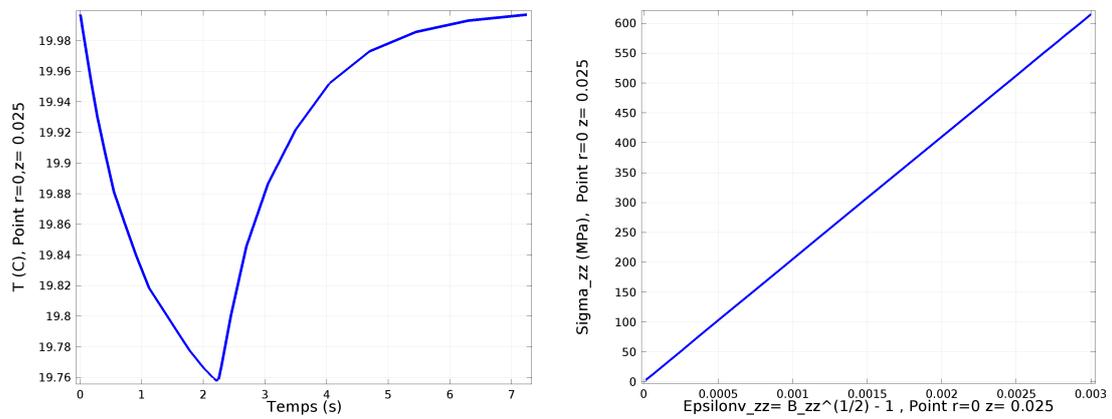
$$E_{app} = 205.19 \text{ GPa au temps } t = 2.25 \text{ s (fin du mouvement)}$$

(à comparer avec le « module d'Young » initial de 205 GPa)

L'adiabaticité des frontières implique que la température ne varie plus pour $t > 2.25$ s (c'est-à-dire après la fin du mouvement).

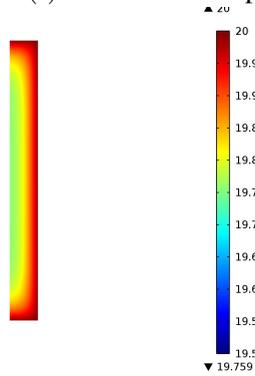
Si les frontières sont isothermes à la température T_0

On constate [fig. 9.3 p. 139] que les champs de température, de déformation et de contrainte ne sont plus uniformes. La température au centre de l'éprouvette ($r = 0, z = L/2$) au temps

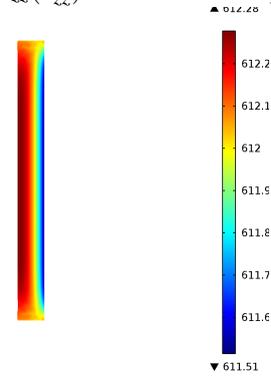


Courbe $T(t)$ au centre de l'éprouvette

Courbe $\sigma_{zz}(\epsilon_{zz}^v)$ au centre de l'éprouvette



Champ de températures (C) à $t = 2.25$ s



Champ σ_{zz} (Mpa) à $t = 2.25$ s

FIGURE 9.3 – Résultats en traction simple avec des frontières isothermes à T_0 .

$t = 2.25$ s (fin du mouvement) n'a chuté que de 0.24 C. La température au cœur de l'éprouvette revient pratiquement à 20 C après 5 s de maintien du déplacement final .

Le « module d'Young apparent » varie légèrement pendant le temps de maintien de 5 s :

$$E_{app} = 204.76 \text{ GPa au temps } t = 2.25 \text{ s} \quad ; \quad E_{app} = 204.66 \text{ GPa au temps } t = 7.25 \text{ s}.$$

Petit calcul complémentaire – Avec des frontières isothermes, la chute de température varie avec la vitesse de traction imposée : pour une vitesse de traction de 10 mm.mn^{-1} , on trouve que la chute de température au centre de l'éprouvette en fin de mouvement ($t = 0.9$ s) est de 0.42 C au lieu de 0.24 C à vitesse lente. Cette constatation s'explique par le fait qu'à une plus grande vitesse de traction, les températures ont moins de temps pour s'uniformiser pendant le mouvement. L'uniformisation des températures se poursuit après la fin du mouvement.

Conditions aux limites thermiques mixtes

Dans ce calcul, la température est imposée à T_0 aux extrémités de l'éprouvette (les mors jouent le rôle de thermostat) et la paroi latérale est supposée adiabatique (on néglige les fuites thermiques dans l'air ambiant). L'éprouvette met donc plus de temps (> 50 s) pour revenir à sa température initiale. La chute de température au centre de l'éprouvette à $t = 2.25$ s (fin du mouvement) est de 0.59 C [fig. 9.4 p. 141] (pratiquement comme dans le cas adiabatique, les échanges de chaleur n'ont pas eu le temps de se faire au cœur de l'éprouvette).

Conclusions

1. Le modèle de comportement thermoélastique isotrope $\{T, K_v, \delta\}$ n'a été employé ici que dans le domaine des petites déformations ($L(t)/L_0 \leq 1.003$). Ce calcul illustre néanmoins le refroidissement qui apparaît lors d'un essai de traction sur une éprouvette d'acier. Les variations de température apparaissent comme faibles et difficilement détectables expérimentalement sauf pour des vitesses de traction suffisamment importantes. Les expériences de traction d'une éprouvette d'acier faites dans les conditions expérimentales habituelles (vitesse lente et sans attendre l'uniformisation des températures) sont acceptables car la raideur apparente varie peu pendant l'uniformisation des températures.
2. Bien que le modèle de comportement utilisé soit « non linéaire », cette non linéarité n'apparaît pas numériquement dans les calculs qui précèdent car la courbe de traction $\sigma_{zz} = f(\epsilon_{zz}^v)$ au voisinage de petites déformations se confond pratiquement avec sa tangente à l'origine⁽⁹⁾.

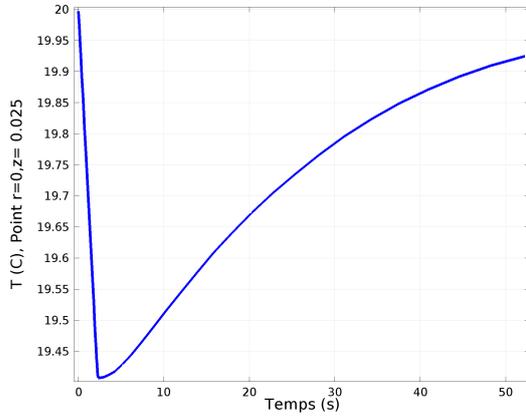
Remarque – Dans un essai de traction, le mouvement est proche d'une translation. Une interprétation des mesures utilisant la pseudo-élasticité de Hooke (tenseur des « petites perturbations », module d'Young et coefficient de Poisson) donnerait donc des résultats *numériquement* acceptables [hypothèse 4.2 p. 76].

9.4 Forte flexion isotherme d'un barreau élastique isotrope

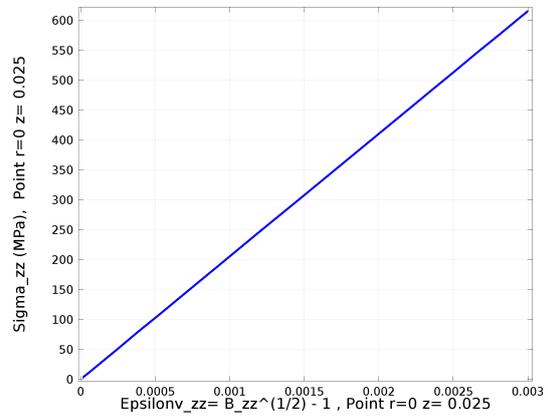
Dans l'illustration numérique précédente, le modèle de comportement $\{T, K_v, \delta\}$ n'agissait que dans le domaine des petites déformations. Dans le problème traité dans cette section, non

⁽⁸⁾ C'est-à-dire la pente d'une droite tracée entre l'état initial et l'état final.

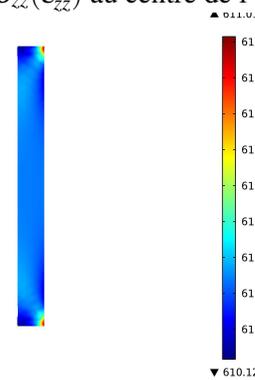
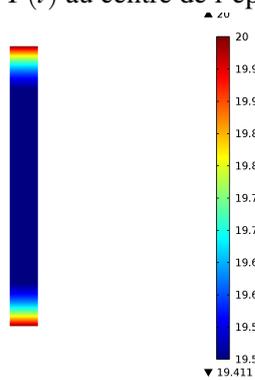
⁽⁹⁾ Voir la section 9.5 [p. 145] pour des courbes de traction avec des déformations plus importantes, avec le même modèle de comportement mais des coefficients différents (caoutchouc).



Courbe $T(t)$ au centre de l'éprouvette



Courbe $\sigma_{zz}(\epsilon_{zz}^v)$ au centre de l'éprouvette



Champ de températures (C) à $t = 2.25$ s
 Le « module d'Young » apparent varie légèrement pendant le temps de maintien :

$$E_{app} = 205.12 \text{ GPa} \quad \text{à } t = 2.25 \text{ s} \quad ; \quad E_{app} :$$

Il est intéressant d'observer ci-contre un zoom sur l'extrémité de la courbe $F(u)$ où F est la force de traction et u le déplacement de la face supérieure : on perçoit clairement la petite diminution de la force de traction F pendant le réchauffement de l'éprouvette quand $t > 2.25$ s. Cette petite diminution explique la petite diminution du « module d'Young apparent » pendant le réchauffement.

Champ σ_{zz} (Mpa) à $t = 2.25$ s

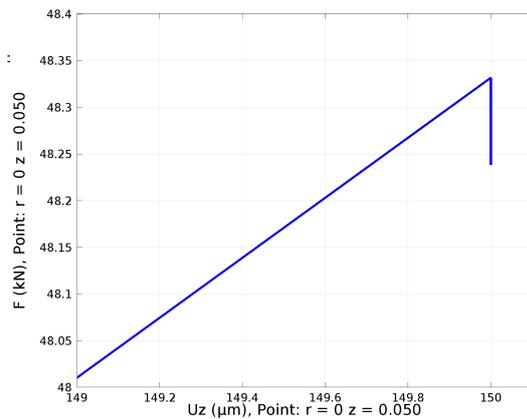


FIGURE 9.4 – Résultats en traction simple avec des conditions aux limites thermiques mixtes

seulement les déformations sont importantes mais en outre le mouvement des particules est très loin d'une quasi-translation. L'utilisation de la pseudo-élasticité de Hooke avec son tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\varepsilon}$ pour mesurer les déformations serait donc inadéquate [hyp. 4.2 p. 76] et aboutirait à des résultats erronés.

9.4.1 Description du problème

On se propose de fléchir fortement un barreau parallélépipédique initialement vertical en caoutchouc vulcanisé pure gomme (20mm \times 20mm \times 60mm) en imposant que l'orientation des normales actuelles de la face supérieure, dont la direction initiale est $\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_3$ (normales verticales), soit dans la direction finale horizontale $\mathbf{n}_t = \mathbf{e}_1$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{e}_3\|} = \mathbf{e}_1 \quad \text{sur la face supérieure définie par } x_{03} = 60 \text{ mm} \quad (9.7)$$

Remarque – Cette condition aux limites serait difficile à poser dans un logiciel classique de mécanique des solides. Dans le logiciel utilisé ici, on a accès aux normales actuelles à une surface.

Sur la face inférieure ($x_3 = 0$), on impose $u_3 = 0$, et les translations horizontales u_1 et u_2 sont bloquées seulement perpendiculairement aux lignes médianes de la face. La section droite inférieure ($x_3 = 0$) est donc libre de se déformer dans son plan, seul son centre est fixé.

Remarque importante – *Le problème ainsi posé n'a pas de solution unique* : il existe une infinité de solutions avec la face supérieure rendue verticale car sa position n'est pas définie dans les conditions aux limites. Le problème est donc « mal posé » car les conditions aux limites sont insuffisantes pour déterminer une solution unique. Cependant, on constate que l'algorithme aboutit néanmoins à une solution sans que l'on puisse savoir si celle-ci est unique ou non.

« **Guidage** de l'algorithme – Il se trouve que la solution trouvée par l'algorithme est assez proche du cas de la « flexion pure » (la déformée est quasi-circulaire), parce que le champ de déplacement initial (*guess*) qui a été donné à l'algorithme pour démarrer les itérations en est assez proche : ce champ de déplacement initial transforme le parallélépipède initial en un hexaèdre d'arêtes rectilignes avec la face supérieure initiale déplacée convenablement vers la droite et vers le bas et bien sûr verticale (pour satisfaire la condition aux limites)⁽¹⁰⁾. Il faut bien comprendre que le champ de déplacements initial fourni à l'algorithme n'est pas une condition aux limites mais seulement un point de départ pour les itérations.

En surveillant graphiquement l'évolution des itérations pendant le calcul, on observe que la face libre reste bien verticale (c'est une condition aux limites imposée), qu'elle subit quelques petits mouvements de translation et on voit s'arrondir les arêtes de l'hexaèdre initial.

Contrairement au problème précédent, on ne cherche pas ici une évolution temporelle, mais seulement une solution *stationnaire* de l'équation mécanique. De plus, l'équation de la chaleur n'est pas prise en compte : on suppose que les températures sont à tout instant uniformes ($T = T_0$ et $\dot{T} = 0$). Enfin, on néglige la pesanteur. Ces simplifications n'ont pour but que de rendre les résultats lisibles et pédagogiques dans une utilisation du modèle de comportement $\{T, K_v, \delta\}$ avec des mouvements et des déformations sans limitations cinématiques.

Les équations différentielles à résoudre se réduisent donc à :

$$\text{div}_E \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \text{avec les conditions aux limites précisées précédemment.}$$

⁽¹⁰⁾ Il a donc fallu définir manuellement le champ de déplacements (*guess*) qui réalise cette transformation.

9.4.2 Caractéristiques du matériau

La loi de comportement est la même que précédemment (modèle $\{T, K_v, \delta\}$). Les données numériques utiles pour ce problème sont les suivantes (caoutchouc pure gomme vulcanisé, extrait de la base de données matériaux du logiciel) :

Module de compressibilité initial à 20 C	ξ_0	1805 MPa
Module de cisaillement initial à 20 C	μ_0	43.68 MPa

Remarque – Le module de compressibilité ξ_0 est grand devant le module de cisaillement μ_0 . Ce matériau est presque incompressible. Avec ces valeurs, en utilisant les formules des adeptes de la loi de Hooke, le module d'Young initial à 20 C serait 0.13 GPa et le coefficient de Poisson initial à 20 C serait 0.488 (proche de 0.5).

9.4.3 Analyse des résultats numériques

La figure 9.5 [p. 143] montre le maillage utilisé pour le calcul (tétraèdres à interpolation quadratique) ainsi que la déformée finale (quasi-circulaire).

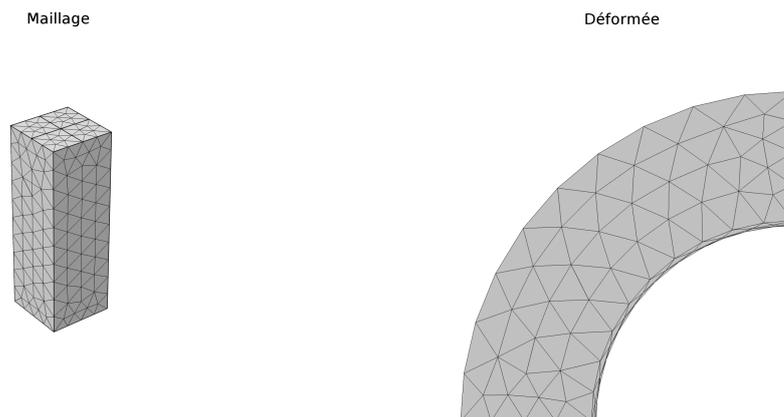


FIGURE 9.5 – Forte flexion d'un bloc de caoutchouc

La figure 9.6 [p. 144] présente dans quelques coupes (définies par $x_{03} = \text{constante}$) dessinées dans le volume déformé, les valeurs des allongements relatifs longitudinaux ($K_l - 1 = \|\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3\| - 1$)⁽¹¹⁾, des contraintes normales ($\mathbf{n}_t \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}_t$ avec $\mathbf{n}_t = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3}{\|\mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_3\|}$)⁽¹²⁾, de la distorsion stérique maximale δ et de la dilatation volumique K_v .

Comme on peut le constater, les allongements relatifs longitudinaux sont importants : ils varient de -24% à $+28\%$. La distribution des grandeurs est quasi-identique dans toutes les coupes car la solution (choisie par l'algorithme guidé par le champ de déplacement initial (*guess*) qui lui a été fourni) est proche d'une flexion pure. Comme attendu, la dilatation volumique K_v varie peu ($\pm 1\%$) en raison de la quasi-incompressibilité du matériau. La déformation des différentes sections est clairement visible (dans les figures, il n'y a pas d'amplification artificielle des déplacements).

⁽¹¹⁾ Section 4.3.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, [note 2 p. 3].

⁽¹²⁾ Section 4.2.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur, [note 2 p. 3].

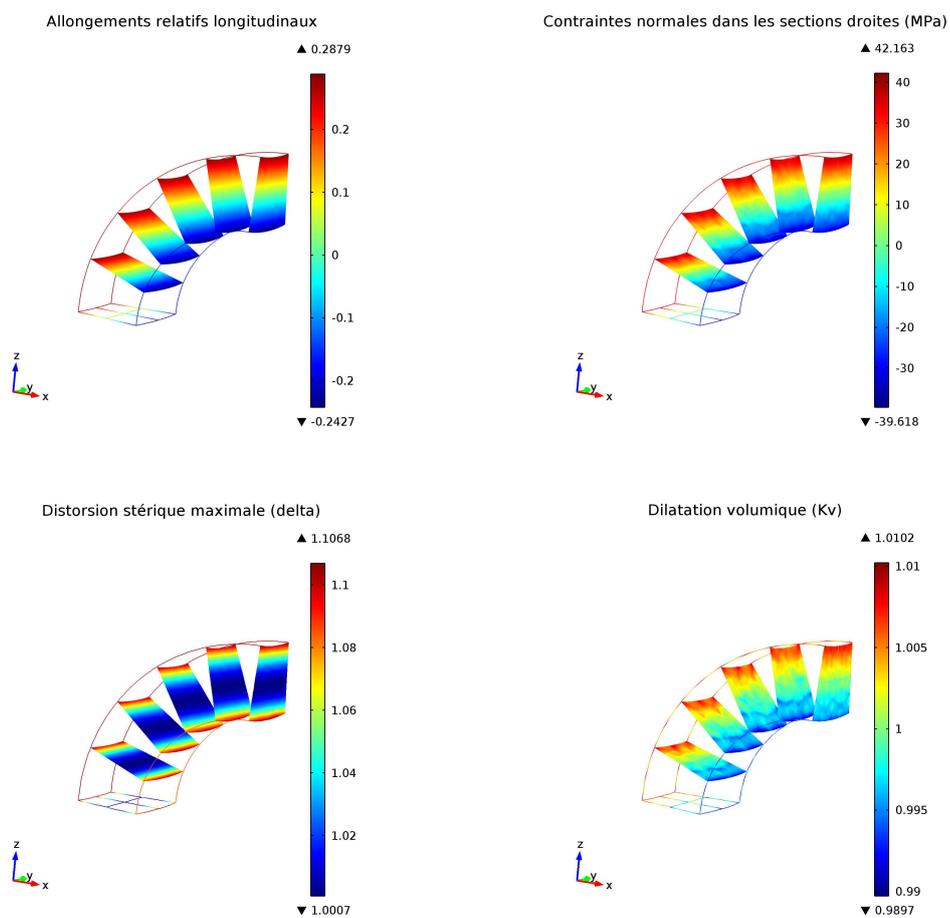


FIGURE 9.6 – Quelques coupes dans la forte flexion d'un bloc de caoutchouc.

9.5 Forte traction/compression isotherme d'un barreau élastique isotrope

Dans ce calcul, on fait une traction/compression forte sur le même barreau de caoutchouc que dans la section précédente. Pour obtenir des courbes de traction et de compression, le calcul est fait en temporel (temps fictif), quasi-statique (accélérations négligées) et isotherme (équation de la chaleur ignorée). Les conditions aux limites à la base sont les mêmes que dans la section précédente et la face supérieure subit des déplacements imposés verticaux uniformes proportionnels au temps fictif. Les déplacements horizontaux de la face supérieure sont laissés libres.

Comme espéré dans une traction simple isotherme, on constate que les champs de déformation et de contrainte sont bien uniformes dans l'éprouvette à tout instant. Les courbes de traction (jusqu'à 200%) et de compression (jusqu'à -50%) $\sigma_{33} = f(\epsilon_{33}^v)$ sont données dans la figure 9.7 [p. 145], où la non linéarité des courbes apparaît plus clairement que dans la traction limitée aux petites déformations de la section 9.3 [p. 136].

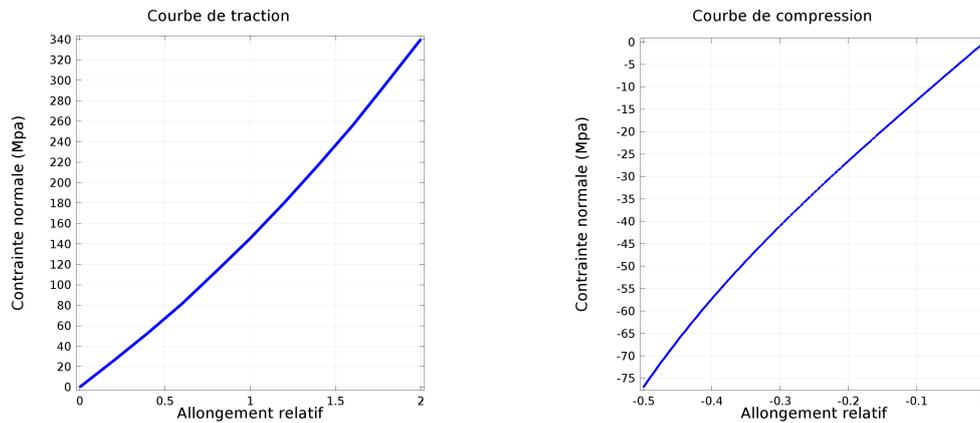


FIGURE 9.7 – Courbes de forte traction et de forte compression simples d'un bloc de caoutchouc

Remarque – Dans le modèle utilisé dans ces calculs, l'idéalisation des courbes expérimentales $\tau_{exp}^{(3)}$ [éq. (9.1) p. 134] et $\sigma_{exp}^{(2)}$ [éq. (9.2) p. 134] sont trop simplistes pour pouvoir refléter les trois phases que l'on constate souvent dans les courbes de traction de certains élastomères. Il faudrait évidemment utiliser des idéalizations mathématiques de ces deux courbes expérimentales plus proches des mesures dans les deux expériences de glissement et de déformation sphérique [éq. (9.1) et (9.2) p. 134] qui ont conduit à l'expression de l'énergie libre massique du modèle.

9.6 Essai de glissement

Cette illustration numérique a pour but de mettre en évidence la prédiction par le modèle (T, K_v, δ) des non uniformités au voisinage des faces libres des éprouvettes (« effets de bord » ou « ménisques ») observées lors d'un essai de glissement réel.

L'éprouvette est constituée du même caoutchouc vulcanisé que précédemment, ses dimensions sont 100 mm × 25 mm × 5 mm. On impose à sa face supérieure un déplacement horizontal de 5 mm et sa face inférieure a tous ses déplacements bloqués.

Pour rendre les résultats lisibles et pédagogiques avec des résultats aux états intermédiaires, le calcul est fait en temporel (temps fictif), quasi-statique (accélération négligées) et isotherme (équation de la chaleur ignorée)

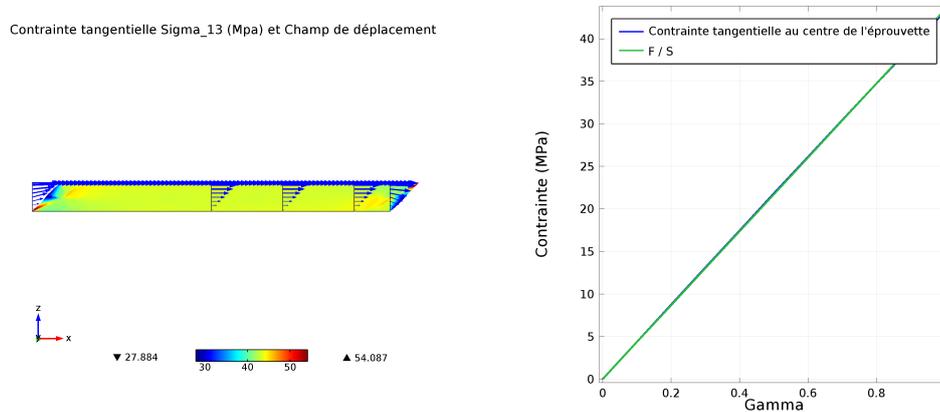


FIGURE 9.8 – Essai de glissement d'une éprouvette en caoutchouc

La figure 9.8 [p. 146] montre que le champ des contraintes tangentielles σ^1_3 dans une coupe dans le plan médian ($y = 0$) est uniforme sauf au voisinage des faces libres. Le champ des déplacements est représenté le long de quelques lignes $x_{01} = \text{constante}$ et on voit clairement les perturbations au voisinage des faces libres. La cinématique lors d'un essai de glissement n'est donc pas tout à fait celle qui a été supposée dans la section 3.4.3 [p. 59]. Les effets de bord (« ménisques »), effectivement observés lors d'un essai de glissement réel, sont bien prédits par le modèle de comportement utilisé dans le calcul.

Toutefois, les légères perturbations aux bords n'ont que peu d'influence sur l'estimation de la contrainte tangentielle au cœur de l'éprouvette : on constate sur la courbe de droite de la figure 9.8 [p. 146] que les valeurs de σ^1_3 au centre de l'éprouvette et celle du rapport $\frac{F}{S}$ en fonction du paramètre de cisaillement γ sont pratiquement confondues.

9.7 En bref...

Toutes les illustrations numériques de ce chapitre ont été calculées en utilisant le modèle élastique isotrope à trois variables d'état $\{T, K_v, \delta\}$ qui a été construit au chapitre 3 [p. 51] avec les idéalizations d'expériences précisées en section 9.1.1 [p. 133]. Seuls les coefficients ξ_0 et μ_0 sont différents dans les calculs (acier ou caoutchouc). Ces simulations numériques ont été choisies pour illustrer à la fois les effets thermiques et les effets mécaniques du comportement élastique isotrope dans de larges domaines de déformation. L'isothermie supposée dans les trois derniers exemples n'avait pour but que de simplifier la présentation des résultats.

Complément d'information – Les lecteurs disposant d'une licence Comsol[®] version 5.3a (ou plus ?) et suffisamment familiers de son utilisation, peuvent télécharger à partir de la page : <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/inelas.html> le fichier Flexion3points.mph ainsi que le fichier CommentairesComsol.pdf qui donne des précisions sur l'implémentation dans le logiciel du modèle de comportement (T, K_v, δ) utilisé dans

les illustrations numériques de ce chapitre.

Noter que le fichier `Flexion3points.mph` est *librement modifiable* (géométrie, conditions aux limites, isotherme ou non etc.) par des utilisateurs suffisamment familiers de ce logiciel. Notamment, en désactivant la plasticité, ce fichier permet de traiter des problèmes de thermoélasticité.

Conclusion

Le modèle de comportement élastique est un modèle de comportement pour les solides déformables satisfaisant aux trois conditions suivantes :

1. La dissipation intrinsèque est nulle : on suppose donc que dans les évolutions il n'existe aucun processus interne générant de la chaleur (pas de frottement interne). La seule dissipation pouvant s'y produire est la dissipation thermique due aux échanges de chaleur entre particules lorsque le champ de températures n'est pas uniforme.
2. Le tenseur des contraintes est une fonction d'état (il ne dépend que des variables d'état).
3. Les variables d'état ne contiennent pas de variables d'état mnésiques.

Les variables d'état d'un milieu élastique sont la température actuelle et un tenseur de déformation objectif actuel éventuellement complétées par des directions actuelles d'anisotropie.

La nullité de la dissipation intrinsèque dans toute évolution a conduit à la forme générale de la loi de comportement mécanique $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_{\boldsymbol{\sigma}}(T, \boldsymbol{\chi}_2, \dots, \boldsymbol{\chi}_n)$, complètement déterminée lorsque l'on connaît l'une des fonction d'état caractéristique du milieu élastique parmi l'énergie interne massique e^m , l'entropie massique s^m ou l'énergie libre massique de Helmholtz ψ^m ; les deux autres fonctions d'état s'en déduisent à l'aide de la relation de Helmholtz et de la définition $\psi^m = e^m - T s^m$.

L'existence de la loi de comportement thermique $\mathbf{q} = \mathbf{f}_{\mathbf{q}}(T, \boldsymbol{\chi}_2, \dots, \boldsymbol{\chi}_n)$ est due à la non négativité de la dissipation thermique ; un large choix est possible.

Les lois de comportement peuvent s'exprimer avec différents tenseurs de déformation (objectifs ou non), sous une forme plus ou moins compliquée selon le tenseur de déformation utilisé. L'utilisation du tenseur de déformation objectif \mathbf{B} est la moins coûteuse en calculs tensoriels.

Quel que soit le tenseur de déformation utilisé, les différentes expressions de la loi de comportement thermomécanique élastique établies dans ce cours ne sont soumises à aucune restriction ni sur l'amplitude des déformations, ni sur le mouvement du milieu continu vu par l'observateur utilisé, et elles sont toutes thermodynamiquement admissibles.

Pseudo-élasticité de Hooke – L'« élasticité linéaire » classiquement présentée dans les cours élémentaires utilise le tenseur des « petites perturbations » $\boldsymbol{\epsilon}$ qui est une mauvaise mesure des petites déformations sauf sous de sévères restrictions sur les déformations (petites déformations) et sur les mouvements envisageables : quasi-translation et « très petites » rotations \mathbf{R} (\mathbf{F} est quasi symétrique défini positif). De plus, si ces restrictions sur le mouvement envisageable sont valables pour un observateur, elle ne le sont généralement pas pour un autre. Enfin, la « loi » de Hooke n'est pas thermodynamiquement admissible car il n'existe pas de fonction d'état (e^m , s^m ou ψ^m) conduisant à cette loi. Il n'est donc pas nécessaire de l'évoquer dans un cours minimal puisqu'on a construit dans le cours une loi de comportement élastique isotrope sans aucune restriction cinématique sur les déformations ou le mouvement.

Pour un cours de MMC minimal et efficace – Le lecteur est invité à parcourir rapidement les cours *Cinématique des milieux continus*, *Équations générales des milieux continus*, *Comportement élastique* et leurs annexes, en supprimant mentalement tout ce qui fait référence aux tenseurs de déformation autres que \mathbf{B} , ainsi que les lois tangentées et la présentation prématurée de la formulation intégrale des équations de la mécanique. Ces deux derniers points n'ont d'utilité que dans l'interprétation mécanique (facultative) de la méthode de *résolution numérique* par éléments finis (« mécanique numérique ») du système d'équations différentielles à résoudre. Le lecteur constatera la considérable économie de texte et de temps dont on peut bénéficier en écrivant un cours de mécanique des milieux continus minimal mais néanmoins général, complet et rigoureux. L'auteur de ces textes ne les a écrits que pour faire le lien avec des publications ou d'autres cours.

On a donné deux exemples pratiques de construction d'une famille de modèles de comportement élastique isotrope et isotrope transverse, en construisant leur fonction d'état ψ^m de manière physiquement raisonnée afin de conduire à des comportements mécaniques non exotiques. N'étant soumises à aucune restriction cinématique ni sur l'amplitude des déformations ni sur le mouvement, ces lois de comportement sont *a fortiori* encore valables quand les déformations sont petites et quel que soit le mouvement.

Un problème de thermoélasticité complètement défini se ramène à la résolution d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles, l'équation de mouvement (vectorielle) et l'équation de la chaleur (scalaire)⁽¹⁾, assorties de conditions aux limites et de conditions initiales pour les problèmes non stationnaires. Les champs inconnus sont les positions actuelles des particules (ou leur champ de déplacement) et le champ des températures.

La résolution analytique de ce problème est rarement possible ; pour les problèmes industriels, la résolution numérique est incontournable. La méthode numérique de résolution actuellement (2023) la plus pratiquée est la méthode des éléments finis, dont le principe a été exposé et dont l'application a été illustrée sur quelques problèmes types.

La modélisation du comportement d'un solide déformable réel par un modèle de comportement élastique a une portée limitée : l'expérience montre que les solides réels ne sont élastiques que dans certaines limites, voire ne le sont jamais. Quelques critères raisonnables de limite élastique ont été proposés.

La modélisation de comportements non élastiques fait l'objet d'un autre cours : *Comportements inélastiques*⁽²⁾, du même auteur.

⁽¹⁾ La conservation de la masse est automatiquement satisfaite par la substitution $\rho = \frac{\rho_0}{K}$.

⁽²⁾ <https://cel.hal.science/ce1-01744164> ou bien <https://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/inelas.html> .

Dérivées particulières utiles en anisotropie

A.1 Dérivée particulière des invariants croisés

En anisotropie, on a besoin de calculer les dérivées particulières des deux invariants croisés $I_1 = \mathbf{X} : \mathbf{U}_t$ et $I_2 = \mathbf{X}^2 : \mathbf{U}_t$, où \mathbf{X} est un tenseur de déformation symétrique et objectif. Les deux invariants I_1 et I_2 sont donc des scalaires objectifs. *Leur dérivée particulière est donc un scalaire objectif.*

Remarque – Dans les calculs qui suivent, on utilise les propriétés de permutation dans le produit combiné $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{C}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{V}_3^{\otimes 2}$ des tenseurs du second ordre⁽¹⁾.

La dérivée particulière de $I_1 = \mathbf{X} : \mathbf{U}_t$ est :

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_1 &= \mathbf{X} : \dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{U}_t : \dot{\mathbf{X}} \\
 &= \mathbf{X} : \left(\mathbf{U}_t \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) + (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{U}_t - 2(\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) \mathbf{U}_t \right) + \mathbf{U}_t : \dot{\mathbf{X}} \\
 &= 2\mathbf{X} : (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{D}) - 2\mathbf{X} : (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{W}) - 2(\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) I_1 + \mathbf{U}_t : \dot{\mathbf{X}} \\
 \dot{I}_1 &= 2(\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{X}) : \mathbf{D} - 2(\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{X}) : \mathbf{W} - 2I_1 \mathbf{U}_t : \mathbf{D} + \mathbf{U}_t : \dot{\mathbf{X}} \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

La dérivée particulière de $I_2 = \mathbf{X}^2 : \mathbf{U}_t$ est :

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_2 &= \mathbf{X}^2 : \dot{\mathbf{U}}_t + \mathbf{U}_t : (\dot{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{X}}) \\
 &= \mathbf{X}^2 : \left(\mathbf{U}_t \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W}) + (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{U}_t - 2(\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) \mathbf{U}_t \right) + (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{X}) : \dot{\mathbf{X}} + (\mathbf{X} \cdot \mathbf{U}_t) : \dot{\mathbf{X}} \\
 \dot{I}_2 &= 2(\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{X}^2) : \mathbf{D} - 2(\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{X}^2) : \mathbf{W} - 2I_2 \mathbf{U}_t : \mathbf{D} + 2(\mathbf{X} \cdot \mathbf{U}_t) : \dot{\mathbf{X}} \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

Remarque – L'objectivité des dérivées particulières \dot{I}_1 et \dot{I}_2 n'apparaît pas clairement dans les formules (A.1) et (A.2), car elles font intervenir deux tenseurs non objectifs : \mathbf{W} et $\dot{\mathbf{X}}$.

On rappelle que la formule de changement d'observateur de \mathbf{W} est⁽²⁾ :

$$\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{Q}_t \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{Q}_t^T + \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T \quad \text{où} \quad \frac{d\mathbf{Q}_t}{dt} \cdot \mathbf{Q}_t^T \text{ est antisymétrique.}$$

Par ailleurs, la dérivée particulière $\dot{\mathbf{X}}$ d'un tenseur de déformation objectif \mathbf{X} est aussi non objective. Son expression diffère suivant le tenseur de déformation choisi⁽³⁾. On laisse le soin au lecteur, en écrivant le changement d'observateur, de vérifier que les équations (A.1) et (A.2) [p. 151] conduisent néanmoins à des grandeurs objectives si le tenseur \mathbf{X} est objectif.

⁽¹⁾ Section 1.6.9 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

⁽²⁾ Section 5.8 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽³⁾ Annexe B.2.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

A.1.1 Utilisation du tenseur de déformation \mathbf{B}

La dérivée particulière du tenseur de déformation \mathbf{B} est ⁽⁴⁾ :

$$\dot{\mathbf{B}} = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W})$$

les deux dérivées particulières (A.1) et (A.2) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \dot{I}_1^B &= 2 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} - 2 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{W} - 2 (\mathbf{B} : \mathbf{U}_t) (\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) + \mathbf{U}_t : \dot{\mathbf{B}} \\ &= 2 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} - 2 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{W} - 2 (\mathbf{B} : \mathbf{U}_t) (\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) \\ &\quad + \mathbf{U}_t : (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{U}_t : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) + \mathbf{U}_t : (\mathbf{W} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{U}_t : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{W}) \\ &= 2 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} - 2 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{W} - 2 (\mathbf{B} : \mathbf{U}_t) (\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) \\ &\quad + (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t) : \mathbf{D} + (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{W} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t) : \mathbf{W} \\ &= 4 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} - 2 I_1^B (\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) \\ \dot{I}_1^B &= 4 \text{sym}(\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} - 2 I_1^B (\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \dot{I}_2^B &= 2 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} - 2 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}^2) : \mathbf{W} - 2 (\mathbf{U}_t : \mathbf{B}^2) \mathbf{U}_t : \mathbf{D} \\ &\quad + 2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t) : (\mathbf{D} \cdot \mathbf{B}) + 2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t) : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) + 2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t) : (\mathbf{W} \cdot \mathbf{B}) - 2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t) : (\mathbf{B} \cdot \mathbf{W}) \\ &= 2 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} - 2 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}^2) : \mathbf{W} - 2 (\mathbf{U}_t : \mathbf{B}^2) (\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) \\ &\quad + 2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} + 2 (\mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{U}_t) : \mathbf{D} + 2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{W} - 2 (\mathbf{B}^2 \cdot \mathbf{U}_t) : \mathbf{W} \\ &= 4 (\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} - 2 I_2^B \mathbf{U}_t : \mathbf{D} + 2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} \\ \dot{I}_2^B &= 4 \text{sym}(\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} - 2 I_2^B \mathbf{U}_t : \mathbf{D} + 2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Remarque – Comme on peut le constater, quand on utilise le tenseur objectif \mathbf{B} comme tenseur de déformation, le tenseur non objectif \mathbf{W} disparaît des expressions de \dot{I}_1^B et \dot{I}_2^B , ce qui rend évidente l'objectivité de ces dérivées particulières de scalaires objectifs.

A.1.2 Utilisation du tenseur de déformation \mathbf{V}

Plutôt que de chercher l'expression de la dérivée particulière du tenseur de déformation \mathbf{V} ⁽⁵⁾, on va exprimer les deux invariants croisés $I_1^V = \mathbf{V} : \mathbf{N}_t$ et $I_2^V = \mathbf{V}^2 : \mathbf{N}_t$ en fonction des deux invariants croisés I_1^B et I_2^B .

Calcul de \dot{I}_2^V

$$I_1^B = \mathbf{B} : \mathbf{N}_t = \mathbf{V}^2 : \mathbf{N}_t = I_2^V \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_2^V = \dot{I}_1^B = 4 \text{sym}(\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}^2) : \mathbf{D} - 2 I_2^V (\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) \quad (\text{A.5})$$

⁽⁴⁾ Annexe B.2.1 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

⁽⁵⁾ C'est la solution en $\dot{\mathbf{V}}$ de l'équation tensorielle $\mathbf{V} \cdot \dot{\mathbf{V}} + \dot{\mathbf{V}} \cdot \mathbf{V} = (\mathbf{D} + \mathbf{W}) \cdot \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^2 \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{W})$. On en connaît la solution, mais son expression est très compliquée (annexe B.2.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3]). Il est préférable de calculer directement la dérivée particulière de ses invariants.

Calcul de I_1^V

On rappelle l'identité de Cayley-Hamilton : $\mathbf{V}^3 = V_I \mathbf{V}^2 - V_{II} \mathbf{V} + V_{III} \mathbf{G}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 I_2^B &= \mathbf{B}^2 : \mathbf{N}_t = \mathbf{V}^4 : \mathbf{N}_t = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^3) : \mathbf{N}_t \\
 &= \left(\mathbf{V} \cdot (V_I \mathbf{V}^2 - V_{II} \mathbf{V} + V_{III} \mathbf{G}) \right) : \mathbf{N}_t \quad (\text{Cayley-Hamilton}) \\
 &= (V_I \mathbf{V}^3 - V_{II} \mathbf{V}^2 + V_{III} \mathbf{V}) : \mathbf{N}_t \\
 &= \left(V_I (V_I \mathbf{V}^2 - V_{II} \mathbf{V} + V_{III} \mathbf{G}) - V_{II} \mathbf{V}^2 + V_{III} \mathbf{V} \right) : \mathbf{N}_t \quad (\text{Cayley-Hamilton}) \\
 &= \left((V_I^2 - V_{II}) \mathbf{V}^2 + (V_{III} - V_I V_{II}) \mathbf{V} + V_I V_{III} \mathbf{G} \right) : \mathbf{N}_t \\
 I_2^B &= (V_I^2 - V_{II}) I_2^V + (V_{III} - V_I V_{II}) I_1^V + V_I V_{III}
 \end{aligned}$$

En dérivant cette égalité, il vient :

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_2^B &= (2 V_I \dot{V}_I - \dot{V}_{II}) I_2^V + (V_I^2 - V_{II}) \dot{I}_2^V + (\dot{V}_{III} - \dot{V}_I V_{II} - V_I \dot{V}_{II}) I_1^V + (V_{III} - V_I V_{II}) \dot{I}_1^V \\
 &\quad + V_I \dot{V}_{III} + \dot{V}_I V_{III} \quad (\text{A.6})
 \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_2^B &= 4 \operatorname{sym}(\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}^2) : \mathbf{D} - 2 I_2^B \mathbf{U}_t : \mathbf{D} + 2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{D} \\
 &= 4 \operatorname{sym}(\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}^4) : \mathbf{D} - 2 ((V_I^2 - V_{II}) I_2^V + (V_{III} - V_I V_{II}) I_1^V + V_I V_{III}) \mathbf{U}_t : \mathbf{D} \\
 &\quad + 2 (\mathbf{V}^2 \cdot \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}^2) : \mathbf{D} \\
 \dot{I}_2^V &= 4 \operatorname{sym}(\mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}^2) : \mathbf{D} - 2 I_2^V (\mathbf{U}_t : \mathbf{D}) \quad [\text{éq. (A.5) p. 152}]
 \end{aligned}$$

L'équation (A.6) est donc une équation algébrique linéaire en \dot{I}_1^V qui peut être résolue. On trouve :

$$\begin{aligned}
 \dot{I}_1^V &= \frac{(V_I + I_1^V) V_{III}}{V_I V_{II} - V_{III}} \operatorname{tr} \mathbf{D} - 2 \frac{V_I V_{III} + I_1^V (V_I V_{II} - V_{III})}{V_I V_{II} - V_{III}} \mathbf{U}_t : \mathbf{D} + \frac{V_{III} - I_1^V (V_I^2 + V_{II}) + V_I I_2^V}{V_I V_{II} - V_{III}} \mathbf{V} : \mathbf{D} \\
 &\quad + \frac{V_I I_1^V + I_2^V}{V_I V_{II} - V_{III}} \mathbf{V}^2 : \mathbf{D} + 4 \operatorname{sym}(\mathbf{V} \cdot \mathbf{U}_t) : \mathbf{D} - \frac{2 (\mathbf{V}^2 \cdot \mathbf{U}_t \cdot \mathbf{V}^2) : \mathbf{D}}{V_I V_{II} - V_{III}}
 \end{aligned}$$

Il apparaît qu'en anisotropie, l'utilisation du tenseur de déformation \mathbf{V} donne des expressions moins maniables que celles obtenues avec le tenseur de déformation \mathbf{B} .

Remarque – Le terme $V_I V_{II} - V_{III}$ dans les dénominateurs est toujours positif. En effet, son expression en fonction des valeurs propres de \mathbf{V} est :

$$V_I V_{II} - V_{III} = (\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_3 + \lambda_1) > 0 \quad \text{car } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$$

Loi tangente du modèle $\{T, K_v, \delta\}$

Cette annexe n'est utile qu'aux praticiens de la « mécanique numérique », qui utilisent une « loi tangente » pour la *résolution numérique* des problèmes non linéaires [section 2.6 p. 44].

On se propose de calculer la loi tangente du modèle de comportement élastique isotrope proposé au chapitre 3 [p. 51]. Sous l'hypothèse 3.1 [p. 52] (les variables d'état sont $\{T, K_v, \delta\}$) et l'hypothèse simplificatrice facultative 3.3 [p. 62] (un glissement laisse la contrainte moyenne invariante), la loi de comportement mécanique de ce modèle élastique isotrope est :

$$\boldsymbol{\sigma} = K_0 \mathbf{G} + K_1 \mathbf{B} \quad \text{avec} \quad K_0 = \sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v) - \frac{\delta^{\frac{2}{3}} \tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{\sqrt{3} K_v \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad K_1 = \frac{\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{\sqrt{3} K_v^{\frac{5}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (\partial_T K_0 \dot{T} + \partial_{K_v} K_0 \dot{K}_v + \partial_\delta K_0 \dot{\delta}) \mathbf{G} + (\partial_T K_1 \dot{T} + \partial_{K_v} K_1 \dot{K}_v + \partial_\delta K_1 \dot{\delta}) \mathbf{B} + K_1 \dot{\mathbf{B}} \\ &= (\partial_T K_0 \mathbf{G} + \partial_T K_1 \mathbf{B}) \dot{T} + (\partial_{K_v} K_0 \mathbf{G} + \partial_{K_v} K_1 \mathbf{B}) \dot{K}_v + (\partial_\delta K_0 \mathbf{G} + \partial_\delta K_1 \mathbf{B}) \dot{\delta} + K_1 \dot{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

où⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} \dot{K}_v &= (\sqrt{B_{III}})' = \frac{1}{2\sqrt{B_{III}}} \dot{B}_{III} = \frac{1}{2\sqrt{B_{III}}} B_{III} \mathbf{B}^{-1} : \dot{\mathbf{B}} = \frac{K_v}{2} \mathbf{B}^{-1} : \dot{\mathbf{B}} \\ \dot{\delta} &= \frac{\sqrt{3}}{9} \left(\frac{B_I^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{B_{III}}} \right)' = \frac{\sqrt{B_I}}{2\sqrt{3}\sqrt{B_{III}}} \dot{B}_I - \frac{B_I^{\frac{3}{2}}}{6\sqrt{3}B_{III}^{\frac{3}{2}}} \dot{B}_{III} = \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2K_v^{\frac{2}{3}}} \mathbf{G} : \dot{\mathbf{B}} - \frac{\delta}{2} \mathbf{B}^{-1} : \dot{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (\partial_T K_0 \mathbf{G} + \partial_T K_1 \mathbf{B}) \dot{T} + (\partial_{K_v} K_0 \mathbf{G} + \partial_{K_v} K_1 \mathbf{B}) \frac{K_v}{2} \mathbf{B}^{-1} : \dot{\mathbf{B}} \\ &\quad + (\partial_\delta K_0 \mathbf{G} + \partial_\delta K_1 \mathbf{B}) \left(\frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2K_v^{\frac{2}{3}}} \mathbf{G} : \dot{\mathbf{B}} - \frac{\delta}{2} \mathbf{B}^{-1} : \dot{\mathbf{B}} \right) + K_1 \dot{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} &= (\partial_T K_0 \mathbf{G} + \partial_T K_1 \mathbf{B}) \dot{T} + \left(\frac{K_v}{2} \partial_{K_v} K_0 \mathbf{G} \otimes \mathbf{B}^{-1} + \frac{K_v}{2} \partial_{K_v} K_1 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}^{-1} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_\delta K_0 \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} - \frac{\delta}{2} \partial_\delta K_0 \mathbf{G} \otimes \mathbf{B}^{-1} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_\delta K_1 \mathbf{B} \otimes \mathbf{G} - \frac{\delta}{2} \partial_\delta K_1 \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}^{-1} + K_1 \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} \right) : \dot{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Les dérivées temporelles des invariants d'un tenseur du second ordre sont données dans le cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

En regroupant les tenseurs d'ordre 4, il vient :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\sigma}} = & (\partial_T K_0 \mathbf{G} + \partial_T K_1 \mathbf{B}) \dot{T} + \left(\left(\frac{K_v}{2} \partial_{K_v} K_0 - \frac{\delta}{2} \partial_\delta K_0 \right) \mathbf{G} \otimes \mathbf{B}^{-1} + \left(\frac{K_v}{2} \partial_{K_v} K_1 - \frac{\delta}{2} \partial_\delta K_1 \right) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}^{-1} \right. \\ & \left. + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2 K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_\delta K_0 \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2 K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_\delta K_1 \mathbf{B} \otimes \mathbf{G} + K_1 \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} \right) : \dot{\mathbf{B}} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = (\partial_T K_0 \mathbf{G} + \partial_T K_1 \mathbf{B}) \dot{T} + \mathbf{K} : \dot{\mathbf{B}}$$

où \mathbf{K} est le tenseur d'ordre 4 suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = & \left(\frac{K_v}{2} \partial_{K_v} K_0 - \frac{\delta}{2} \partial_\delta K_0 \right) \mathbf{G} \otimes \mathbf{B}^{-1} + \left(\frac{K_v}{2} \partial_{K_v} K_1 - \frac{\delta}{2} \partial_\delta K_1 \right) \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}^{-1} \\ & + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2 K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_\delta K_0 \mathbf{G} \otimes \mathbf{G} + \frac{\delta^{\frac{1}{3}}}{2 K_v^{\frac{2}{3}}} \partial_\delta K_1 \mathbf{B} \otimes \mathbf{G} + K_1 \mathbf{G} \boxtimes \mathbf{G} \end{aligned}$$

Les dérivées partielles des fonctions d'état K_0 et K_1 sont :

$$\begin{aligned} \partial_T K_0 &= \partial_T \sigma_{exp}^{(2)} - \frac{\delta^{\frac{2}{3}} \partial_T \tau_{exp1}^{(3)}}{\sqrt{3} K_v \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} & \partial_T K_1 &= \frac{\partial_T \tau_{exp1}^{(3)}}{\sqrt{3} K_v^{\frac{5}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \\ \partial_{K_v} K_0 &= \partial_{K_v} \sigma_{exp}^{(2)} + \frac{\delta^{\frac{2}{3}} \tau_{exp1}^{(3)}}{\sqrt{3} K_v^2 \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} & \partial_{K_v} K_1 &= -\frac{5}{3} \frac{\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)}{\sqrt{3} K_v^{\frac{8}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \\ \partial_\delta K_0 &= \frac{(2 - \delta^{\frac{2}{3}}) \tau_{exp1}^{(3)}}{3 \sqrt{3} K_v \delta^{\frac{1}{3}} (\delta^{\frac{2}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\delta^{\frac{2}{3}} \partial_\delta \tau_{exp1}^{(3)}}{\sqrt{3} K_v \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} & \partial_\delta K_1 &= -\frac{\tau_{exp1}^{(3)}}{3 \sqrt{3} K_v^{\frac{5}{3}} \delta^{\frac{1}{3}} (\delta^{\frac{2}{3}} - 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial_\delta \tau_{exp1}^{(3)}}{\sqrt{3} K_v^{\frac{5}{3}} \sqrt{\delta^{\frac{2}{3}} - 1}} \end{aligned}$$

Ces dérivées partielles ne peuvent être déterminées complètement que lorsque les mesures $\sigma_{exp}^{(2)}(T, K_v)$ et $\tau_{exp1}^{(3)}(T, \delta)$ ont été effectuées ou idéalisées.

Cinématique du glissement

L'objectif de cette annexe est d'analyser les déformations dans un mouvement isovolume particulier très utilisé dans les essais de caractérisation de matériaux : le glissement.

- **Définition C.1 – Glissement.** Soient trois directions orthonormées $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ fixes pour un certain observateur. On appelle glissement dans la direction \mathbf{e}_1 dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ un *mouvement* dont la description de Lagrange du champ de déplacement pour cet observateur est de la forme :

$$\mathbf{u}_L(\mathbf{x}_0, t) = \gamma(t) (\mathbf{x}_0 \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_1$$

Un mouvement réel très proche de ce mouvement idéal peut être obtenu par le dispositif décrit dans la figure 3.1 [p. 63].

C.1 Directions principales actuelles de déformation dans un glissement

Dans un glissement, le gradient de la transformation $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \text{grad}_L \mathbf{u}$ est uniforme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{G} + \text{grad}_L \mathbf{u} = \mathbf{G} + \gamma(t) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G} - \gamma(t) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$$

Le tenseur de déformation objectif \mathbf{B} est, lui aussi, uniforme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\top = \mathbf{G} + \gamma^2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \gamma(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1)$$

Ses composantes dans la base orthonormée $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sont :

$$[\mathbf{B}^\bullet \cdot]_{\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}} = \begin{bmatrix} 1+\gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Les valeurs propres actuelles *classées* (pour $\gamma \geq 0$) du tenseur \mathbf{B} sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1^2 &= 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \gamma \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} = \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} + \frac{\gamma}{2}\right)^2 \\ \lambda_2^2 &= 1 \\ \lambda_3^2 &= 1 + \frac{\gamma^2}{2} - \gamma \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} = \left(\sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} - \frac{\gamma}{2}\right)^2 = \lambda_1^{-2} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

où les λ_i sont les dilatations linéiques principales⁽¹⁾. On a l'égalité $\lambda_3 = \lambda_1^{-1}$ car la dilatation volumique est $K_v = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \lambda_1 \lambda_3 = 1$.

⁽¹⁾ On rappelle que ce sont aussi les valeurs propres du tenseur de déformation $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$.

En notant $\lambda = \lambda_1 \geq 1$ la plus grande dilatation linéique principale, les dilatations linéiques principales actuelles classées peuvent donc s'écrire :

$$\{\lambda, 1, \lambda^{-1}\} \quad \text{où} \quad \lambda = \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 + 1} + \frac{|\gamma|}{2} \geq 1 \quad (\text{C.3})$$

On vérifie aisément qu'un ensemble de vecteurs propres (orthogonaux mais non normés) associés aux valeurs propres est par exemple :

$$\lambda_1 = \lambda \rightarrow \mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad ; \quad \lambda_2 = 1 \rightarrow \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3 \quad ; \quad \lambda_3 = \lambda^{-1} \rightarrow \mathbf{v}_3 = -\lambda^{-1} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

Les vecteurs propres \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_3 sont orthogonaux (\mathbf{B} est symétrique) et dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Leurs angles polaires respectifs dans le plan $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ sont :

$$\theta_1 = \text{Arctan}(\lambda^{-1}) \in [0; \frac{\pi}{4}] \quad (\text{car } \lambda > 1) \quad (\text{C.4})$$

$$\theta_3 = -\text{Arctan}(\lambda) = \theta_1 + \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.5})$$

Une base propre *orthonormée* $\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3\}$ du tenseur de déformation \mathbf{B} (ou \mathbf{V}) dans un glissement peut donc s'écrire :

$$\tilde{\mathbf{v}}_1 = \cos \theta_1 \mathbf{e}_1 + \sin \theta_1 \mathbf{e}_2 \quad ; \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{e}_3 \quad ; \quad \tilde{\mathbf{v}}_3 = -\sin \theta_1 \mathbf{e}_1 + \cos \theta_1 \mathbf{e}_2$$

où l'angle θ_1 est défini dans l'équation (C.4).

C.2 Changement de paramètre de glissement

Le paramètre de glissement γ est le plus couramment employé pour caractériser un glissement. Cependant l'expression peu maniable des valeurs propres en fonction de γ [éq. (C.2) p. 157] masque des relations angulaires sur les directions propres plus simples à manier.

γ étant un réel positif, on peut toujours poser :

$$\gamma = 2 \tan \phi \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \text{Arctan} \frac{\gamma}{2} \quad \text{où} \quad \phi \in [0; \pi/2]$$

et utiliser le paramètre ϕ pour caractériser le glissement.

- **Définition C.2 – Demi-angle de glissement.** On appelle demi-angle de glissement l'angle $\phi \in [0; \pi/2]$ défini par

$$\phi = \text{Arctan} \frac{\gamma}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = 2 \tan \phi$$

La signification géométrique de l'angle ϕ est illustrée par le schéma de gauche de la figure C.1 [p. 159]. On laisse le soin au lecteur de vérifier avec un peu de trigonométrie qu'avec le nouveau paramètre de glissement ϕ , les dilatations linéiques principales λ et λ^{-1} d'un glissement s'écrivent plus simplement :

$$\lambda^2 = \left(\frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi}\right)^2 = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1 + \sin \phi}{\cos \phi} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$\lambda^{-2} = \left(\frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi}\right)^2 = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^{-1} = \frac{1 - \sin \phi}{\cos \phi} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$$

Les deux équations précédentes permettent de calculer plus aisément la relation entre les dilatactions linéiques principales λ et λ^{-1} d'un glissement de paramètre ϕ ainsi que les relations inverses⁽²⁾.

On déduit de l'équation (C.4) [p. 158] que les angles polaires des directions propres dans le « repère de glissement » $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ s'écrivent maintenant :

$$\theta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \quad ; \quad \theta_3 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$

La représentation des angles θ_1 et θ_3 est donnée dans le schéma de droite de la figure C.1 [p. 159].

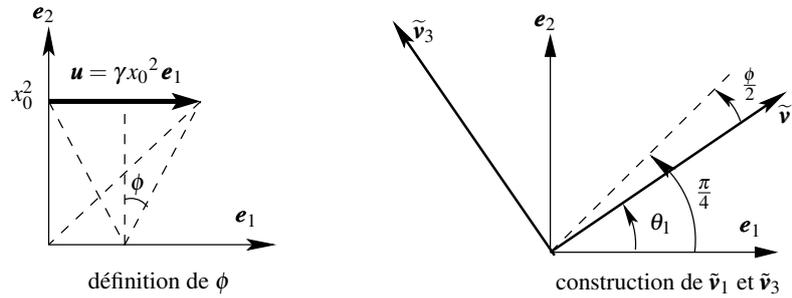


FIGURE C.1 – Angles ϕ et θ_1 d'un mouvement de glissement

Finalement, pour définir l'amplitude d'un glissement, il suffit de donner l'un des paramètres suivants :

1. γ : rapport \mathbf{u}/h [fig. 3.1 p. 63];
2. ϕ : demi-angle de glissement [fig. C.1 p. 159];
3. λ : dilatation linéique maximale (la plus grande valeur propre de $\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{B}}$).
4. θ_1 : angle polaire de la plus grande direction propre $\tilde{\mathbf{v}}_1$;

On a donné toutes les formules permettant de passer de l'un à l'autre.

C.3 Décomposition d'une déformation isovolume

Considérons une *déformation isovolume* \mathbf{B}^{isov} . On note $\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2$ et $\tilde{\mathbf{v}}_3$ ses directions propres ortho-normées et on note λ'_1, λ'_2 et $\lambda'_3 = \frac{1}{\lambda'_1 \lambda'_2}$ (déformation isovolume) ses trois dilatactions linéiques principales.

Les composantes du tenseur de déformation \mathbf{B}^{isov} dans sa base propre sont la matrice diagonale $[\mathbf{B}^{isov}]$ ci-dessous. Cette matrice peut s'écrire sous la forme du produit suivant :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1'^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2'^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1'^2 \lambda_2'^2} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{B}^{isov}]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2'^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2'^2} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{B}_1]} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1'^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1'^2} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{B}_2]} \quad (\text{C.6})$$

À l'aide de l'équation (C.2) [p. 157], on peut interpréter les deux matrices $[\mathbf{B}_1]$ et $[\mathbf{B}_2]$:

⁽²⁾ Les relations inverses γ en fonction de λ auraient été plus difficiles à établir en partant des équations (C.2) [p. 157].

- la matrice $[B_1]$ contient les valeurs propres d'un glissement dans le plan $(\tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3)$ (donc de normale $\tilde{\mathbf{v}}_1$), de valeurs propres $\lambda_2'^2$ et $\lambda_2'^{-2}$;
- la matrice $[B_2]$ contient les valeurs propres d'un glissement dans le plan $(\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_3)$ (donc de normale $\tilde{\mathbf{v}}_2$), de valeurs propres $\lambda_1'^2$ et $\lambda_1'^{-2}$.

Ainsi, toute déformation isovolume peut être vue comme la composition commutative de deux glissements dans deux de ses trois plans propres de déformation.

Il faut bien noter que cette décomposition commutative en deux glissements de toute déformation isovolume *n'est pas unique*. On aurait pu la décomposer en deux glissements dans deux autres plans parmi les trois plans propres possibles.

Application

On retrouve bien que toute déformation isovolume peut être représentée par deux invariants. La décomposition précédente montre qu'on peut prendre (par exemple) les deux dilatations linéiques principales λ_1 et λ_2

Dans la construction du modèle élastique isotrope $\{T, K_v, \delta\}$ [ch. 3 p. 51], on a fait l'hypothèse que la distorsion stérique maximale δ_{max}^s suffit pour caractériser une déformation isovolume. Grâce à l'étude qui précède on va pouvoir donner une interprétation cinématique de cette hypothèse.

La définition de la distorsion stérique maximale pour une déformation quelconque est :

$$\delta_{max}^s = \frac{\sqrt{3}}{9} \frac{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \Leftrightarrow \delta_{max}^s \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{(\lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{3} \frac{B_I}{B_{III}^{\frac{1}{3}}}$$

Dans une déformation \mathbf{B}' isovolume ($B'_{III} = 1 \Leftrightarrow \lambda_3' = \lambda_1'^{-1} \lambda_2'^{-1}$), on trouve :

$$\delta_{max}^s (\mathbf{B}')^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \left(\lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 + \frac{1}{\lambda_1'^2 \lambda_2'^2} \right) = \frac{B'_I}{3} \quad (C.7)$$

Le second invariant fondamental de \mathbf{B}' est :

$$B'_{II} = \lambda_1'^2 \lambda_2'^2 + \lambda_1'^2 \lambda_3'^2 + \lambda_2'^2 \lambda_3'^2 = \lambda_1'^2 \lambda_2'^2 + \frac{1}{\lambda_2'^2} + \frac{1}{\lambda_1'^2} = \text{tr}(\mathbf{B}'^{-1}) = 3 \delta_{max}^s (\mathbf{B}'^{-1})^{\frac{2}{3}}$$

La connaissance des deux premier invariants fondamentaux B'_I et B'_{II} de \mathbf{B}' ($B'_{III} = 1$) permettrait donc de déterminer les valeurs possibles⁽³⁾ du couple $(\lambda_1'^2, \lambda_2'^2)$ dans la décomposition en deux glissements simples d'une déformation isovolume [éq. (C.6) p. 159].

Si, comme dans l'exemple de construction d'un modèle de comportement élastique isotrope du chapitre 3 [p. 51], on ne retient comme variables d'état réduites cinématiques que la dilatation volumique $K_v = f(B_{III})$ et la distorsion stérique maximale $\delta_{max}^s = f(B_I, B_{III})$, on considère que le minimum des normes des produits mixtes⁽⁴⁾ actuels engendrés par l'infinité de trièdres de directions matérielles initialement orthogonales issus d'une particule et atteignant la distorsion maximale suffit pour caractériser les changements d'angle dans une déformation. Puisqu'il y

⁽³⁾ Avec des calculs très compliqués. Il y a 4 valeurs possible du couple $(\lambda_1'^2, \lambda_2'^2)$.

⁽⁴⁾ On rappelle que la distorsion stérique actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales est l'inverse de la norme de leur produit mixte actuel (la norme du produit mixte de trois directions unitaires reflète leur angle solide). Section 4.7 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

a une infinité de trièdres initialement orthonormés (de directions différentes) qui atteignent la distorsion stérique maximale ⁽⁵⁾, ignorer l'invariant fondamental B_{II} revient donc à ignorer la manière dont on « écrase » un trièdre initialement orthonormé pour obtenir cette distorsion stérique maximale.

Ignorer l'influence de l'invariant B_{II} revient donc à accepter le fait que la déformation (une grandeur cinématique macroscopique) d'un solide déformable ignore nécessairement l'orientation et la forme des structures microscopiques de la matière (orientations de cristaux, de chaînes polymériques etc.). Toutes les manières d'« écraser » un trièdre initialement orthogonal jusqu'à la distorsion stérique maximale sont donc macroscopiquement équivalentes.

C.4 Évolution de la variable d'anisotropie a

Dans la construction d'un modèle de comportement isotrope transverse du chapitre 6 [p. 97], on utilise une variable d'anisotropie a définie par :

$$a = \frac{I_1^B}{K_V^{\frac{2}{3}}} = \frac{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}{B_{III}^{\frac{1}{3}}} \quad [\text{éq. 6.2 p. 98}]$$

Puisque dans cette annexe, le mouvement de glissement est sans dilatation volumique préalable ($B_{III} = 1$), on a l'égalité :

$$a = \mathbf{B} : \mathbf{N}_t$$

- **Proposition C.3** – Les valeurs extrémales de la variable a sont obtenues quand la direction actuelle d'anisotropie \mathbf{n}_t est dans le plan de glissement défini par $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ ou bien $(\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_3)$.

De plus :

- le maximum $a_{max} = \lambda^2 > 1$ est obtenu quand $\mathbf{n}_t = \tilde{\mathbf{v}}_1$;
- le minimum $a_{min} = \lambda^{-2} < 1$ est obtenu quand $\mathbf{n}_t = \tilde{\mathbf{v}}_3$;
- la valeur intermédiaire $a_{int} = 1$ est obtenue quand $\mathbf{n}_t = \mathbf{e}_2$.

Démonstration – Soient $\tilde{n}_t^1, \tilde{n}_t^2, \tilde{n}_t^3$ les composantes de la direction actuelle d'anisotropie dans la base propre actuelle $\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \tilde{\mathbf{v}}_3\}$ du tenseur de déformation. La variable d'anisotropie a s'écrit :

$$\begin{aligned} a &= \tilde{n}_t^1{}^2 \lambda^2 + \tilde{n}_t^2{}^2 + \tilde{n}_t^3{}^2 \lambda^{-2} \\ &= (\lambda^2 - 1) \tilde{n}_t^1{}^2 + (\lambda^{-2} - 1) \tilde{n}_t^3{}^2 + 1 \quad \text{car} \quad \tilde{n}_t^2{}^2 = 1 - \tilde{n}_t^1{}^2 - \tilde{n}_t^3{}^2 \\ a &= (\lambda^2 - 1) N^1 + (\lambda^{-2} - 1) N^3 + 1 \end{aligned}$$

où, pour simplifier les écritures, on a posé : $N^1 = \tilde{n}_t^1{}^2 \in [0; 1]$ et $N^3 = \tilde{n}_t^3{}^2 \in [0; 1]$.

On a aussi la relation : $N^1 + N^3 = 1 - N^2 \in [0; 1]$ car $\|\mathbf{n}_t\| = 1$.

Pour $\lambda \neq 1$, les extrema de cette fonction linéaire à deux variables N^1 et N^3 sont obtenus aux bornes du domaine de définition c'est-à-dire aux bornes du triangle formé par les trois droites $N^1 = 0$, $N^3 = 0$ et $N^1 + N^3 = 1$ du plan (N^1, N^2) [fig. C.2 p. 162].

Puisque $\lambda > 1$, les extrema de la variable a sont :

- le maximum est λ^2 obtenu au sommet $\{N^1 = 1, N^3 = 0\}$, c'est-à-dire $\mathbf{n}_t = \tilde{\mathbf{v}}_1$;
- le minimum est λ^{-2} obtenu au sommet $\{N^1 = 0, N^3 = 1\}$, c'est-à-dire $\mathbf{n}_t = \tilde{\mathbf{v}}_3$;
- la valeur intermédiaire 1 est obtenue au sommet $\{N^1 = 0, N^3 = 0\}$, ainsi qu'au point P .

⁽⁵⁾ Annexe A.3.2 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

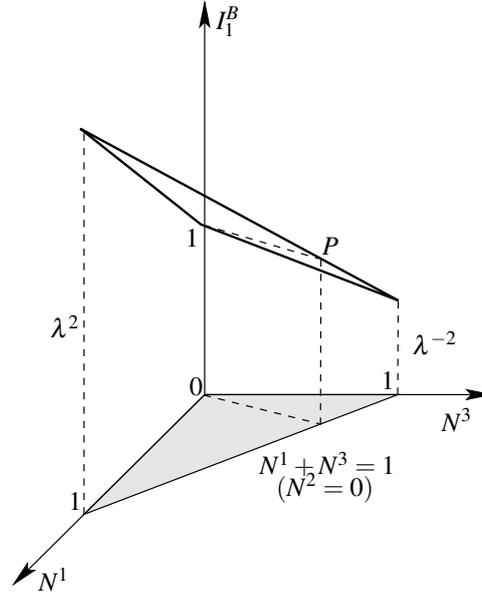


FIGURE C.2 – Évolution de l'invariant a en fonction de $N^1 = \tilde{n}_t^1{}^2$ et $N^3 = \tilde{n}_t^3{}^2$

Si $\lambda = 1$ (pas de glissement), la valeur de la variable d'anisotropie a est toujours égale à 1 quelle que soit la direction actuelle d'anisotropie \mathbf{n}_t .

On décrit donc toutes les valeurs possibles de la variable a en ne circulant que sur le segment de droite défini par :

$$N^1 + N^3 = 1 \Leftrightarrow (\tilde{n}_t^1)^2 + (\tilde{n}_t^3)^2 = 1 \Leftrightarrow \tilde{n}_t^2 = 0$$

c'est-à-dire quand la direction actuelle d'anisotropie est dans le plan de glissement $(\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_3) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

En particulier, sur ce segment de droite, l'invariant a passe par la valeur intermédiaire 1 (point P sur la figure C.2) quand :

$$N^1 = \tilde{n}_t^1{}^2 = \frac{1 - \lambda^{-2}}{\lambda^2 - \lambda^{-2}} \quad ; \quad N^3 = 1 - N^1 = \tilde{n}_t^3{}^2 = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \lambda^{-2}} \quad ; \quad N^2 = \tilde{n}_t^2{}^2 = 0$$

En remplaçant λ par $\tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2})$ il vient :

$$\tilde{n}_t^1{}^2 = \cos^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}) \quad ; \quad \tilde{n}_t^3{}^2 = \sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}) \quad ; \quad \tilde{n}_t^2{}^2 = 0$$

c'est-à-dire entre autres solutions $\mathbf{n}_t = \mathbf{e}_2$ [fig. C.1]. On décrit donc toutes les valeurs de l'invariant a en faisant varier la direction actuelle d'anisotropie \mathbf{n}_t de $\tilde{\mathbf{v}}_3$ à $\tilde{\mathbf{v}}_1$ en passant par \mathbf{e}_2 .

On parcourt donc toutes les valeurs possibles de l'invariant a en faisant varier la direction actuelle d'anisotropie dans le plan de glissement $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.

Dans la pratique, il peut être plus commode de repérer la direction actuelle d'anisotropie \mathbf{n}_t par rapport à la direction de glissement \mathbf{e}_1 plutôt que par rapport aux directions propres actuelles de déformation $(\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_3)$. Si on note α_t l'angle polaire de la direction actuelle d'anisotropie \mathbf{n}_t dans la base propre actuelle $(\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_3)$ et β_t son angle polaire actuel dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, on a la relation :

$$\beta_t = \theta_1 + \alpha_t = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \alpha_t \quad \text{où} \quad \phi = \text{Arctan} \frac{\gamma}{2} \quad [\text{fig. C.1 p. 159}] \quad (\text{C.8})$$

En utilisant les composantes du tenseur de déformation \mathbf{B} dans la base $\{\mathbf{e}_i\}$ [éq. (C.1) p. 157] et

en posant :

$$\mathbf{n}_t = \cos \beta_t \mathbf{e}_1 + \sin \beta_t \mathbf{e}_2$$

il vient :

$$\begin{aligned} a &= \cos^2 \beta_t (1 + \gamma^2) + 2 \gamma \sin \beta_t \cos \beta_t + \sin^2 \beta_t \\ &= 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} \cos(2\beta_t) + \gamma \sin(2\beta_t) \\ a &= 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4} \cos\left(2\beta_t - \operatorname{Arctan} \frac{2}{\gamma}\right) \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Cette formule permet de calculer la valeur de la variable d'état d'anisotropie a dans un glissement de paramètre γ quand la direction d'anisotropie actuelle est β_t .

On peut chercher la formule inverse : la résolution en β_t de éq. (C.9) [p. 163] conduit à deux solutions : $\beta_t = \pm \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{a-1-\frac{\gamma^2}{2}}{\frac{\gamma}{2}\sqrt{\gamma^2+4}} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{2}{\gamma} [\pi]$.

La solution β_t est unique dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{2}{\gamma}; \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{2}{\gamma}] = [-\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}; \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}]$; elle vaut :

$$\begin{aligned} \beta_t &= -\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{a-1-\frac{\gamma^2}{2}}{\frac{\gamma}{2}\sqrt{\gamma^2+4}} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{2}{\gamma} [\pi] \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{a \cos^2 \phi - 1 - \sin^2 \phi}{2 \sin \phi} [\pi] \end{aligned}$$

Pour un glissement $\gamma \geq 0$ donné (ou bien ϕ donné), les valeurs remarquables de l'invariant a sont :

$$\begin{aligned} a_{max} &= 1 + \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4} \geq 1 \quad \text{pour} \quad \beta_t = \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{2}{\gamma} = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} [\pi] \quad (\mathbf{n}_t = \pm \tilde{\mathbf{v}}_1) \\ a_{min} &= 1 + \frac{\gamma^2}{2} - \frac{\gamma}{2} \sqrt{\gamma^2 + 4} \leq 1 \quad \text{pour} \quad \beta_t = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{2}{\gamma} = -\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} [\pi] \quad (\mathbf{n}_t = \pm \tilde{\mathbf{v}}_3) \\ a &= 1 \quad \text{pour} \quad \begin{cases} \beta_t = -\frac{1}{2} \operatorname{Arccos} \frac{-\gamma}{\sqrt{\gamma^2+4}} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{2}{\gamma} = -\phi [\pi] & (\mathbf{n}_t = \pm (\cos \phi \mathbf{e}_1 - \sin \phi \mathbf{e}_2)) \\ \text{ou bien} \quad \beta_t = \frac{\pi}{2} [\pi] & (\mathbf{n}_t = \pm \mathbf{e}_2) \end{cases} \end{aligned}$$

où $\phi = \operatorname{Arctan} \frac{\gamma}{2}$.

Les relations entre la direction actuelle de la direction d'anisotropie β_t et sa direction initiale β_0 (déviations de la direction d'anisotropie) ont été rappelées en section 5.2.3 [p. 88].

Transformations d'intégrales

Dans les problèmes de physique régis par des équations différentielles⁽¹⁾, on voit apparaître les opérateurs différentiels gradient, divergence, rotationnel et laplacien de champs scalaires, vectoriels ou tensoriels. Lors de la formulation intégrale de ces équations différentielles en vue de leur résolution numérique, on écrit des intégrales sur un domaine \mathcal{D} de produits scalaires de ces opérateurs avec des champs arbitraires (parfois dits « virtuels ») définis sur \mathcal{D} et de même tensorialité. On donne dans cette annexe les formules les plus utiles⁽²⁾ pour transformer ces intégrales de volume de produits scalaires en d'autres intégrales de volume complétées par des intégrales de bord sur la frontière $\partial\mathcal{D}$, qui permettront de prendre en compte des conditions aux limites de Neumann.

Remarque – Les formules qui suivent peuvent être considérées comme une généralisation de l'intégration par partie des intégrales de produits de fonctions réelles.

Dans toute cette annexe, on utilise les symboles suivants :

- \mathcal{D} est un domaine volumique,
- $\partial\mathcal{D}$ est la frontière de \mathcal{D} ,
- \mathbf{n} est la normale unitaire sortante de $\partial\mathcal{D}$,
- f et g sont des champs scalaires définis dans \mathcal{D} ,
- \mathbf{v} et \mathbf{w} sont des champs vectoriels définis dans \mathcal{D} ,
- \mathbf{T} et \mathbf{U} sont des champs tensoriels du second ordre défini dans \mathcal{D} ,
- \mathbf{K} est un champ tensoriel du troisième ordre défini dans \mathcal{D}

Toutes les formules qui suivent reposent sur l'utilisation du théorème de la divergence⁽³⁾ (ou théorème d'Ostrogradski) pour les champs vectoriels ou tensoriels que l'on rappelle ici :

$$\int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mathbf{v} \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad \text{et} \quad \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mathbf{T} \, dv = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{D.1})$$

D.1 Intégrale d'un produit $f \operatorname{div} \mathbf{v}$

On connaît l'identité :

$$\operatorname{div}(f \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} \mathbf{v}$$

⁽¹⁾ Élasticité, thermique, mécanique des fluides, électromagnétisme...

⁽²⁾ Si besoin était, le lecteur n'aura aucune difficulté à écrire des formules pour des ordres de tensorialité supérieurs.

⁽³⁾ Section 3.7.5 du cours *Algèbre et analyse tensorielle pour l'études des milieux continus*, du même auteur [note 1 p. 3].

On en déduit :

$$\int_{\mathcal{D}} f \operatorname{div} \mathbf{v} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} f \, dv + \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(f \mathbf{v}) \, dv$$

En appliquant le théorème (D.1) sur la dernière intégrale, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}} f \operatorname{div} \mathbf{v} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} f \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{D.2})$$

D.2 Intégrale d'un produit $f \Delta g$

En appliquant le résultat (D.2) avec $\mathbf{v} = \mathbf{grad} g$ il vient :

$$\int_{\mathcal{D}} f \Delta g \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} g \cdot \mathbf{grad} f \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} f \mathbf{grad} g \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{D.3})$$

D.3 Intégrale d'un produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w}$

On connaît l'identité :

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) = \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w}$$

On en déduit :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dv - \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \, dv$$

En appliquant le théorème (D.1) sur la dernière intégrale, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w} \, dv = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{w} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \, dv - \int_{\partial \mathcal{D}} (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{D.4})$$

D.4 Intégrale d'un produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T}$

On connaît l'identité :

$$\operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) = \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbf{T}$$

On en déduit :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbf{T} \, dv + \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{T}) \, dv$$

En appliquant le théorème (D.1) sur la dernière intégrale, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \operatorname{div} \mathbf{T} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbf{T} \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{D.5})$$

D.5 Intégrale d'un produit scalaire $\mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{w}$

En appliquant le résultat (D.5) avec $\mathbf{T} = \mathbf{grad} \mathbf{w}$, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \Delta \mathbf{w} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} \mathbf{v} : \mathbf{grad} \mathbf{w} \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{D.6})$$

D.6 Intégrale d'un produit scalaire $\mathbf{T} : \mathbf{div} \mathbf{K}$

On connaît l'identité :

$$\operatorname{div}(\mathbf{T} : \mathbf{K}) = \mathbf{grad} \mathbf{T} \overline{\otimes}^3 \mathbf{K} + \mathbf{T} : \mathbf{div} \mathbf{K}$$

On en déduit :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{T} : \mathbf{div} \mathbf{K} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} \mathbf{T} \overline{\otimes}^3 \mathbf{K} \, dv + \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\mathbf{T} : \mathbf{K}) \, dv$$

En appliquant le théorème (D.1) sur la dernière intégrale, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{T} : \mathbf{div} \mathbf{K} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} \mathbf{T} \overline{\otimes}^3 \mathbf{K} \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{T} : \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{D.7})$$

D.7 Intégrale d'un produit scalaire $\mathbf{T} : \Delta \mathbf{U}$

En appliquant le résultat (D.7) avec $\mathbf{K} = \mathbf{grad} \mathbf{U}$, il vient :

$$\int_{\mathcal{D}} \mathbf{T} : \Delta \mathbf{U} \, dv = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{grad} \mathbf{T} \overline{\otimes}^3 \mathbf{grad} \mathbf{U} \, dv + \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{T} : \mathbf{grad} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (\text{D.8})$$

Distorsions maximales particulières en anisotropie

Dans cette annexe, on calcule les quelques distorsions maximales évoquées dans les critères de limite élastique en isotropie transverse [sec. 5.4 p. 93]. La recherche des différentes distorsions maximales peut donner lieu à des calculs algébriques fastidieux. Dans ce cas, se contente de donner la démarche générale et les résultats, les calculs algébriques fastidieux sont détaillés dans une feuille de calcul donnée en annexe I [p. 217] qui est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA[®] dans sa version 5.2.

E.1 Rappels de cinématique

Soit $\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}$ le tenseur de déformation non objectif actuel⁽¹⁾ en une particule. Le tenseur de déformation \mathbf{U} étant symétrique défini positif, on peut toujours écrire :

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{u}_i \otimes \mathbf{u}_i$$

où les valeurs propres ordonnées $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$ sont les dilatations linéiques principales de cette déformation et où les trois vecteurs $\{\mathbf{u}_i\}$ sont une base propre orthonormée directe du tenseur \mathbf{U} .

Rappels – Toute direction matérielle \mathbf{u} peut être identifiée par sa direction de référence \mathbf{u}_0 (ou bien $\mathbf{U}_0 = \mathbf{u}_0 \otimes \mathbf{u}_0$) ou par sa direction actuelle \mathbf{u}_t (ou bien $\mathbf{U}_t = \mathbf{u}_t \otimes \mathbf{u}_t$). De même, toute facette matérielle peut être identifiée par sa normale de référence \mathbf{n}_0 (ou bien $\mathbf{N}_0 = \mathbf{n}_0 \otimes \mathbf{n}_0$) ou par sa normale actuelle \mathbf{n}_t (ou bien $\mathbf{N}_t = \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{n}_t$).

On définit en cinématique⁽²⁾ deux sortes de distorsions :

1. La *distorsion angulaire* actuelle de deux directions matérielles initialement orthogonales ($\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = 0$) dont la définition est :

$$\delta^a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{K_t(\mathbf{u}) K_t(\mathbf{v})}{K_s(\mathbf{n})} \geq 1 \tag{E.1}$$

Si $\delta^a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1$, il n'y a pas de distorsion angulaire actuelle pour les deux directions matérielles initialement orthogonales \mathbf{u}_0 et \mathbf{v}_0 , c'est-à-dire $\sin(\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t) = 1$. On rappelle que :

⁽¹⁾ On choisit d'utiliser ici le tenseur de déformation \mathbf{U} car il identifie les directions matérielles par leur direction initiale ; il est ainsi facile d'écrire que les directions matérielles sont initialement orthogonales. On verra dans la suite que ce choix est sans importance, car les résultats sont des fonctions de dilatations linéiques, surfaciques ou volumiques, grandeurs qui sont exprimables avec tout tenseur de déformation.

⁽²⁾ Sections A.2 et A.3 du cours *Cinématique des milieux continus*, du même auteur [note 2 p. 3].

- $K_I(\mathbf{u}) = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0\|$ est la dilatation linéique dans la direction matérielle \mathbf{u} ;
 - $K_I(\mathbf{v}) = \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{v}_0\|$ est la dilatation linéique dans la direction matérielle \mathbf{v} ;
 - $K_S(\mathbf{n}) = K_V \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0\|$ est la dilatation surfacique de la facette matérielle (\mathbf{u}, \mathbf{v}) dont la normale de référence est $\mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{v}_0}{\|\mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{v}_0\|}$.
2. La *distorsion stérique* actuelle de trois directions matérielles initialement orthogonales (le trièdre $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{w}_0)$ est orthonormé) dont la définition est :

$$\delta^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{K_I(\mathbf{u}) K_I(\mathbf{v}) K_I(\mathbf{w})}{K_V} = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{v}_0\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{w}_0\|}{\det \mathbf{U}} \geq 1$$

Si $\delta^s(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 1$, il n'y a pas de distorsion stérique actuelle pour les trois directions matérielles initialement orthogonales $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$ et \mathbf{w}_0 , c'est-à-dire que $[\mathbf{u}_t, \mathbf{v}_t, \mathbf{w}_t] = \pm 1$.

E.2 Distorsions angulaires maximales

Si l'une des deux directions est la direction d'anisotropie

Soit la déformation actuelle en une particule représentée par le tenseur de déformation \mathbf{U} . On se propose de rechercher quelle est la valeur maximale de la distorsion angulaire sur l'ensemble des couples de directions matérielles initialement orthogonales, dont l'une est la direction d'anisotropie.

On note \mathbf{n} la direction d'anisotropie représentée par sa direction initiale \mathbf{n}_0 . On note \mathbf{u} une direction matérielle initialement orthogonale à la direction d'anisotropie ($\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 0$). On engendre toutes les directions initialement orthogonales à la direction d'anisotropie par l'opération suivante :

$$\mathbf{u}_0(\mu) = \frac{\mathbf{a}(\mu) \wedge \mathbf{n}_0}{\|\mathbf{a}(\mu) \wedge \mathbf{n}_0\|}$$

où $\mathbf{a}(\mu) \neq \mathbf{n}_0$ est un vecteur variable, fonction quelconque du paramètre μ . La normale commune au couple de vecteurs unitaires $(\mathbf{n}_0, \mathbf{u}_0)$ est le vecteur :

$$\mathbf{v}_0(\mu) = \frac{\mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{u}_0(\mu)}{\|\mathbf{n}_0 \wedge \mathbf{u}_0(\mu)\|}$$

Le trièdre $(\mathbf{n}, \mathbf{u}_0(\mu), \mathbf{v}_0(\mu))$ forme un trièdre orthonormé. La distorsion angulaire du couple de directions matérielles $(\mathbf{n}_0, \mathbf{u}_0(\mu))$ est donc [éq. (E.1) p. 169] :

$$\delta^a(\mathbf{n}, \mathbf{u}(\mu)) = \frac{K_I(\mathbf{n}) K_I(\mathbf{u}(\mu))}{K_S(\mathbf{v}(\mu))} = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}_0\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0(\mu)\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{v}_0(\mu)\|}$$

Les extrema de la distorsion angulaire sont obtenus quand : $\partial_\mu \delta^a(\mathbf{n}, \mathbf{u}(\mu)) = 0$.

En écrivant cette équation avec les composantes des vecteurs $\mathbf{a}(\mu)$ et \mathbf{n}_0 dans la base propre du tenseur de déformation \mathbf{U} , on obtient une équation qui se factorise. Certains facteurs ne sont jamais nuls. L'annulation de l'un des facteurs conduit à un vecteur $\mathbf{a}(\mu)$ qui donne une distorsion angulaire égale à 1 (il s'agit donc d'un minimum de la distorsion angulaire). Seul l'un des facteurs conduit à un vecteur $\mathbf{a}(\mu)$ qui donne une distorsion angulaire maximale :

$$\delta_{max}^{a(1)}(\mathbf{n}, \mathbf{u}(\mu)) = \frac{K_I(\mathbf{n}) K_S(\mathbf{n})}{K_V} \quad [Out [29] \text{ p.5 de ann. I p. 217}] \quad \text{où } \mathbf{u}(\mu) \perp \mathbf{n} \quad (\text{E.2})$$

Ce maximum peut être évalué avec tout tenseur de déformation. Par exemple avec le tenseur de déformation \mathbf{B} :

$$\delta_{max}^a (1)(\mathbf{n}, \mathbf{u}(\mu)) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{N}_t} \sqrt{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}}$$

Si les deux directions matérielles sont initialement orthogonales à la direction d'anisotropie

On cherche maintenant la distorsion angulaire maximale des couples de directions matérielles initialement orthogonales $(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu))$, chacun d'eux étant orthogonal à la direction d'anisotropie \mathbf{n} . Sa distorsion angulaire du couple $(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu))$ est :

$$\delta^a(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu)) = \frac{K_I(\mathbf{u}(\mu)) K_I(\mathbf{v}(\mu))}{K_S(\mathbf{n})} = \frac{\|\mathbf{U} \cdot \mathbf{u}_0(\mu)\| \|\mathbf{U} \cdot \mathbf{v}_0(\mu)\|}{\det \mathbf{U} \|\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{n}_0(\mu)\|} \quad [\text{éq. (E.1) p. 169}]$$

où \mathbf{n}_0 est la normale initiale à la facette matérielle $(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu))$. Les extrema de la distorsion angulaire sont obtenus quand $\partial_\mu \delta^a(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu)) = 0$.

Par le même procédé que précédemment (annulation des facteurs, les calculs sont fastidieux), on trouve que la distorsion maximale du couple de directions matérielles $(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu))$ est :

$$\delta_{max}^a (2)(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu)) = \frac{\text{tr} \mathbf{U}^2 - K_I(\mathbf{n})^2}{2 K_S(\mathbf{n})} \quad [\text{Out [47] p. 8 de ann. I p. 217}] \quad (\text{E.3})$$

Ce maximum peut être évalué avec tout tenseur de déformation. Par exemple avec le tenseur de déformation \mathbf{B} :

$$\delta_{max}^a (2)(\mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu)) = \left(\text{tr} \mathbf{B} - \frac{1}{\mathbf{B}^{-1} : \mathbf{N}_t} \right) \frac{\sqrt{\mathbf{B} : \mathbf{N}_t}}{2 \sqrt{\det \mathbf{B}}}$$

E.3 Distorsion stérique maximale du triplet $(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$

On cherche maintenant un maximum de la distorsion stérique de trois directions matérielles initialement orthogonales dont l'une est la direction d'anisotropie \mathbf{n} .

La distorsion stérique actuelle de ce triplet est par définition :

$$\delta^s(\mathbf{n}, \mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu)) = \frac{K_I(\mathbf{n}) K_I(\mathbf{u}(\mu)) K_I(\mathbf{v}(\mu))}{K_V}$$

Les extrema de la distorsion stérique sont obtenus quand $\partial_\mu \delta^s(\mathbf{n}, \mathbf{u}(\mu), \mathbf{v}(\mu)) = 0$. En analysant cette équation comme précédemment, on trouve deux maximums relatifs :

$$\delta_{max}^s (1) = \frac{K_I(\mathbf{n}) \mathbf{K}_s(\mathbf{n})}{K_V} = \delta_{max}^a (1) \quad [\text{Out [58] p. 11 de ann. I p. 217}] \quad (\text{E.4})$$

$$\delta_{max}^s (2) = \frac{\text{tr} \mathbf{U}^2 - K_I(\mathbf{n})^2}{2 K_S(\mathbf{n})} = \delta_{max}^a (2) \quad [\text{Out [64] p. 13 de ann. I p. 217}] \quad (\text{E.5})$$

Ces extrémums sont identiques à ceux trouvés dans les distorsions angulaires maximales.

Avec quelques calculs, en comparant leurs carrés, on montre que :

$$\delta_{max}^s (2) \geq \delta_{max}^s (1) \quad \Rightarrow \quad \delta_{max}^a (2) \geq \delta_{max}^a (1) \quad [\text{Out [70] p. 13 de ann. I p. 217}]$$

Calculs du modèle isotrope

$$\{T, K_v, \delta\}$$

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail des calculs dans la construction du modèle de comportement élastique isotrope présenté dans le chapitre 3 [p. 51].

Cette feuille de calcul est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA[®] dans sa version 5.2. Elle utilise, pour les quelques calculs tensoriels, des fonctionnalités de la bibliothèque Tens3D écrite par l'auteur pour pratiquer commodément l'algèbre et l'analyse tensorielle dans le cadre de la physique classique dans des bases quelconques et des systèmes de coordonnées quelconques. Cette bibliothèque (développée dans la version 5.2 de MATHEMATICA[®]) est téléchargeable à :

<http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html>

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage, à l'exception des quelques opérations tensorielles utilisant la bibliothèque Tens3D, mais qui peuvent être aisément traduites en opérations matricielles.

Modèle élastique isotrope (T, K_v, δ)

Préparations

■ Le package Tens3D (pour les calculs tensoriels)

Le package Tens3D est utile pour les quelques calculs tensoriels qui suivent.

Il est téléchargeable à <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html> (pour la version 5.2 de *Mathematica*)

```
In[1]:= Needs["Tens3D"]
```

Raccourcis de notations :

```
In[2]:= G = MetricTensor; B0 = CanonicalBasis;
```

Vecteurs de base :

```
In[3]:= {e1, e2, e3} = BasisVectors[B0];
```

■ Préparation du système de coordonnées cartésiennes orthonormées

```
In[4]:= OM = DefineTensor[{x1, x2, x3}, {1}, B0];
```

```
In[5]:= SC = DefineCoordinateSystem[OM, {x1, x2, x3}];
```

Direct normalized orthogonal natural basis.

```
In[6]:= Off[General::spell]
```

■ Une fonction qui change le nom des variables muettes dans une intégrale :

Le premier argument est une expression et le second est le nom désiré pour la variable muette

(Attention, cette fonction ne marche bien que si toutes les variables muettes $K\$xxx$ de *expr* ont le même nom)

```
In[7]:= ChVarMu = Function[{expr, var},
  MapAll[If[ToString[Head[#]] == "Integrate" && StringMatchQ[ToString[#][[2, 1]], "K\$*"],
    # /. #[[2, 1]] -> var, #] &, expr ]]
```

```
Out[7]= Function[{expr, var},
  (If[ToString[Head[#1]] == Integrate && StringMatchQ[ToString[#1][[2, 1]], K\$*],
    #1 /. #1[[2, 1]] -> var, #1] &) @@ expr]
```

■ Une fonction qui développe les sommes d'intégrandes

```
In[8]:= DevelopInt = Function[X,
  If[ToString[Head[X]] == "Integrate" (* test si l'argument est une intégrale *),
    Distribute[Integrate[Expand[X[[1]]], X[[2]]]],
  X] (* If : inchangé sinon *)
]
```

```
Out[8]= Function[X, If[ToString[Head[X]] == Integrate, Distribute[ $\int$ Expand[X[[1]] dX[[2]], X]]]
```

Exemple :

```
In[9]:= X =  $\int_{x1}^{x2} \left( a + x^2 + \frac{\int_{y1}^x (h + b g[y]) dy}{-d + c[x]} \right) dx$  (*Integrate ne sait pas intégrer*)
```

```
Out[9]=  $\int_{x1}^{x2} \left( a + x^2 + \frac{\int_{y1}^x (h + b g[y]) dy}{-d + c[x]} \right) dx$ 
```

```
In[10]:= DevelopInt[X]
```

```
Out[10]=  $-a x1 - \frac{x1^3}{3} + a x2 + \frac{x2^3}{3} + \int_{x1}^{x2} \frac{\int_{y1}^x (h + b g[y]) dy}{-d + c[x]} dx$ 
```

```
In[11]:= MapAll[DevelopInt, X]
```

```
Out[11]=  $-a x1 - \frac{x1^3}{3} + a x2 + \frac{x2^3}{3} + \int_{x1}^{x2} \frac{h x}{-d + c[x]} dx + \int_{x1}^{x2} -\frac{h y1}{-d + c[x]} dx + \int_{x1}^{x2} \frac{\int_{y1}^x b g[y] dy}{-d + c[x]} dx$ 
```

■ Une fonction qui sort les constantes des intégrales

```
In[12]:= SorsConst = Function[X,
  If[ToString[Head[X]] == "Integrate" && (* test si l'argument est une intégrale *)
    ToString[Head[X[[1]]] == "Times", (* et si l'intégrande est un produit *)
    Apply[Times,
      Select[
        Apply[List, X[[1]]], (* Apply[List, : transformation de l'intégrande en liste *)
        FreeQ[#, X[[2, 1]]] &
        (* FreeQ : test si l'élément ne contient pas la variable d'intégration *)
      ] (* Select : sélection des éléments constants *)
    ] (* Apply[Times, : produit des constantes *)
    * (* produit des constantes par l'intégrale restante *)
    Integrate[
      Apply[Times,
        Select[
          Apply[List, X[[1]]], (* transformation de l'intégrande en liste *)
          !FreeQ[#, X[[2, 1]]] &
          (* !FreeQ : test si l'élément contient la variable d'intégration *)
        ] (* Select : sélection des éléments non constants *)
      ] (* Apply[Times, : produit des éléments non constants *)
      , X[[2]]] (* Integrate : intégration des éléments non constant *)
    , X] (* If : inchangé sinon *)
  ]
```

```
Out[12]= Function[X, If[ToString[Head[X]] == Integrate && ToString[Head[X[[1]]] == Times,
  Times@@Select[List@@X[[1]], FreeQ[#, X[[2, 1]]] &]
  ∫Times@@Select[List@@X[[1]], !FreeQ[#, X[[2, 1]]] &] dX[[2], X]]
```

Exemples :

```
In[13]:= MapAll[SorsConst, ∫x1x2 -  $\frac{\int_{y1}^{y2} b g[y] dy}{-d + c[x]}$  dx]
```

```
Out[13]= -b (∫x1x2  $\frac{1}{-d + c[x]}$  dx) ∫y1y2 g[y] dy
```

```
In[14]:= MapAll[DevelopInt, X]
```

```
Out[14]= -a x1 -  $\frac{x1^3}{3}$  + a x2 +  $\frac{x2^3}{3}$  + ∫x1x2  $\frac{h x}{-d + c[x]}$  dx + ∫x1x2  $-\frac{h y1}{-d + c[x]}$  dx + ∫x1x2  $\frac{\int_{y1}^x b g[y] dy}{-d + c[x]}$  dx
```

```
In[15]:= Map[SorsConst, MapAll[DevelopInt, X]]
```

```
Out[15]= -a x1 -  $\frac{x1^3}{3}$  + a x2 +  $\frac{x2^3}{3}$  - h y1 ∫x1x2  $\frac{1}{-d + c[x]}$  dx + h ∫x1x2  $\frac{x}{-d + c[x]}$  dx + ∫x1x2  $\frac{\int_{y1}^x b g[y] dy}{-d + c[x]}$  dx
```

```
In[16]:= MapAll[SorsConst, MapAll[DevelopInt, X]]
```

```
Out[16]= -a x1 -  $\frac{x1^3}{3}$  + a x2 +  $\frac{x2^3}{3}$  - h y1 ∫x1x2  $\frac{1}{-d + c[x]}$  dx + h ∫x1x2  $\frac{x}{-d + c[x]}$  dx + b ∫x1x2  $\frac{\int_{y1}^x g[y] dy}{-d + c[x]}$  dx
```

■ Une fonction qui fait les deux précédentes

```
In[17]:= ArrangeInt = Function[X, MapAll[SorsConst, MapAll[DevelopInt, X]]]
```

```
Out[17]= Function[X, SorsConst //@ DevelopInt //@ X]
```

Exemple :

```
In[18]:= ArrangeInt[X]
```

```
Out[18]= -a x1 -  $\frac{x1^3}{3}$  + a x2 +  $\frac{x2^3}{3}$  - h y1  $\int_{x1}^{x2} \frac{1}{-d+c[x]} dx$  + h  $\int_{x1}^{x2} \frac{x}{-d+c[x]} dx$  + b  $\int_{x1}^{x2} \frac{\int_{y1}^x g[y] dy}{-d+c[x]} dx$ 
```

On comble ainsi la carence de `simplify` suivante :

```
In[19]:= Integrate[f[x], {x, x1, x2}] + Integrate[-f[x], {x, x1, x2}] //
Simplify (* Simplify ne fait rien *)
```

```
Out[19]=  $\int_{x1}^{x2} -f[x] dx + \int_{x1}^{x2} f[x] dx$ 
```

```
In[20]:= % // ArrangeInt
```

```
Out[20]= 0
```

Forme générale des fonctions d'état

Quelques hypothèses physiques destinées à aider les simplifications et les intégrations :

```
In[21]:= $Assumptions = $Assumptions && T > 0 && T0 > 0 && Kv > 0 &&  $\delta > 1$  &&  $\rho 0 > 0$  ;
```

Remplacements pour obtenir les valeurs à l'état initial :

```
In[22]:= EtatInitial = {T → T0, Kv → 1,  $\delta$  → 1};
```

■ Energie libre de Helmholtz

```
In[23]:=  $\psi = g1[T] + g2[T, Kv] + g3[T, Kv, \delta]$  ;
```

```
In[24]:= g2[_ , 1] := 0 ; g3[_ , _ , 1] := 0 ;
```

■ Entropie massique

```
In[25]:= s = -D[ $\psi$ , T] (* relation de Helmholtz *)
```

```
Out[25]= -g1'[T] - g2(1,0)[T, Kv] - g3(1,0,0)[T, Kv,  $\delta$ ]
```

■ Energie interne

In[26]:= $e = \psi + T s$ (* définition de l'énergie libre de Helmholtz *)

Out[26]= $g1[T] + g2[T, K_V] + g3[T, K_V, \delta] + T (-g1'[T] - g2^{(1,0)}[T, K_V] - g3^{(1,0,0)}[T, K_V, \delta])$

■ Tenseur des contraintes

In[27]:= $K0 = \rho_0 (D[\psi, K_V] - \delta / K_V D[\psi, \delta])$ // Expand (* voir cours *)

Out[27]= $\rho_0 g2^{(0,1)}[T, K_V] - \frac{\delta \rho_0 g3^{(0,0,1)}[T, K_V, \delta]}{K_V} + \rho_0 g3^{(0,1,0)}[T, K_V, \delta]$

In[28]:= $K1 = \rho_0 \delta^{(1/3)} K_V^{(-5/3)} D[\psi, \delta]$ // Expand (* voir cours *)

Out[28]= $\frac{\delta^{1/3} \rho_0 g3^{(0,0,1)}[T, K_V, \delta]}{K_V^{5/3}}$

Définition tensorielle du tenseur des contraintes : (*exécution retardée* (:=) car la valeur de B n'est pas encore définie)

In[29]:= $\sigma := K0 \circ G \oplus K1 \circ B$; (* \circ et \oplus sont des opérateurs opérant définis dans Tens3D *)

Variation de T0 à T à déformation nulle (chemin $C^{(1)}$)

In[30]:= Chemin1 = {Kv → 1, δ → 1}

Out[30]= {Kv → 1, δ → 1}

■ Tenseur de déformation

In[31]:= $B = G$;

■ Tenseur des contraintes

In[32]:= $\sigma1 = \sigma$;

Calcul de la contrainte moyenne :

In[33]:= $\sigma_{moy1} = I1[\sigma1] / 3 /. Chemin1$ // Simplify
 (* I1 : fonction de Tens3D qui calcule le premier invariant*)

Out[33]= $\rho_0 (g2^{(0,1)}[T, 1] + g3^{(0,1,0)}[T, 1, 1])$

■ mesure de chaleur massique à déformation nulle : Q1Exp[T] (conservation de l'énergie)

In[34]:= $eq1 = Q1Exp[T] == (e /. Chemin1)$

Out[34]= $Q1Exp[T] == g1[T] + T (-g1'[T] - g2^{(1,0)}[T, 1] - g3^{(1,0,0)}[T, 1, 1])$

■ Résolution de eq1 (on trouve g1)

```
In[35]:= sol = DSolve[eq1, g1, T]
```

```
Out[35]= {{g1 -> Function[{T}, T C[1] + T \int_1^T \frac{1}{K$1590^2}
(-Q1Exp[K$1590] - K$1590 g2^{(1,0)}[K$1590, 1] - K$1590 g3^{(1,0,0)}[K$1590, 1, 1]) dK$1590]}}
```

```
In[36]:= sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
C[1] -> g11 (* changement de nom de la constante C[1] *) /.
{dx_, 1, T} -> {dx, T0, T} (* changement de la borne d'intégration inférieure *) //
ChVarMu[#, Tx] & (* changement de nom de la variable muette *) //
ArrangeInt // Expand
```

```
Out[36]= g11 T - T \int_{T0}^T \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g2^{(1,0)}[Tx, 1]}{Tx} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g3^{(1,0,0)}[Tx, 1, 1]}{Tx} dTx
```

```
In[37]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g1 *)
```

```
In[38]:= cond = 0 == g1[T0]
```

```
Out[38]= 0 == g11 T0
```

```
In[39]:= g11 = 0;
```

RESULTAT :

```
In[40]:= g1[T]
```

```
Out[40]= -T \int_{T0}^T \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g2^{(1,0)}[Tx, 1]}{Tx} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g3^{(1,0,0)}[Tx, 1, 1]}{Tx} dTx
```

```
In[41]:= x = g1[T] /.
T \int_{T0}^T \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2} dTx -> T \int_{T0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} dTx - Q1Exp[T] (* intégration par parties *)
```

```
Out[41]= -T \int_{T0}^T \frac{Q1Exp'[Tx]}{Tx} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g2^{(1,0)}[Tx, 1]}{Tx} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g3^{(1,0,0)}[Tx, 1, 1]}{Tx} dTx + Q1Exp[T]
```

Déformation sphérique isotherme (chemin C⁽²⁾)

```
In[42]:= Chemin2 = {δ -> 1}
```

```
Out[42]= {δ -> 1}
```

■ Tenseur des déformations

```
In[43]:= B = Kv^ (2 / 3) ° G;
```

■ Tenseur des contraintes

```
In[44]:= σ2 = σ;
```

ModeleTKvDelta.nb

7

Vérification : le tenseur des contraintes est bien sphérique (son déviateur est nul):

```
In[45]:= (Dev[σ2] // Components) /. Chemin2
```

```
Note: Components in CanonicalBasis
```

```
Out[45]= {{0, 0, 0}, {0, 0, 0}, {0, 0, 0}}
```

Calcul de la contrainte moyenne :

```
In[46]:= omoy2 = I1[σ2] / 3 /. Chemin2 // Simplify
```

```
Out[46]= ρ0 (g2(0,1)[T, Kv] + g3(0,1,0)[T, Kv, 1])
```

■ Mesure mécanique : $\sigma_{2Exp}[T, Kv]$

```
In[47]:= eq2 = σ2Exp[T, Kv] == omoy2 // Simplify
```

```
Out[47]= σ2Exp[T, Kv] == ρ0 (g2(0,1)[T, Kv] + g3(0,1,0)[T, Kv, 1])
```

■ Résolution de eq2 (on trouve g2)

```
In[48]:= sol = DSolve[eq2, g2, {T, Kv}]
```

```
Out[48]= {{g2 → Function[{T, Kv}, ∫1Kv (σ2Exp[T, K$1855] - ρ0 g3(0,1,0)[T, K$1855, 1]) dK$1855 + C[1][T]]}}
```

```
In[49]:= sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.  
C[1] → g21 (* changement de nom de la fonction C[1] *) //
```

```
ChVarMu[#, Kv] & (* changement de nom de la variable muette en Kv *) //  
ArrangeInt
```

```
Out[49]= g21[T] + ∫1Kv (σ2Exp[T, Kv] / ρ0) dKv - ∫1Kv g3(0,1,0)[T, Kv, 1] dKv
```

```
In[50]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignment de la solution g2 *)
```

```
In[51]:= g2[T, Kv]
```

```
Out[51]= g21[T] + ∫1Kv (σ2Exp[T, Kv] / ρ0) dKv - ∫1Kv g3(0,1,0)[T, Kv, 1] dKv
```

Condition sur g2 :

```
In[52]:= cond = 0 == g2[T, 1]
```

```
Out[52]= 0 == g21[T]
```

```
In[53]:= sol = DSolve[cond, g21, T]
```

```
Out[53]= {{g21 → Function[{T}, 0]}}
```

```
In[54]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignment de la solution g21 *)
```

RESULTAT :

```
In[55]:= g2[T, Kv]
```

$$\text{Out}[55]= \int_1^{Kv} \frac{\sigma_2 \text{Exp}[T, Kv x] dKv x}{\rho_0} - \int_1^{Kv} g_3^{(0,1,0)}[T, Kv x, 1] dKv x$$

Déformation isovolume isotherme (chemin $C^{(3)}$)

■ Cinématique

On choisit une expérience de "glissement" simple, dont la cinématique est connue

■ champ de déplacement (x_1, x_2 et x_3 sont les positions initiales des particules)

```
In[56]:= u = ( (Kv^(1/3) x1 - x1) °e1 ⊕ (Kv^(1/3) x2 - x2) °e2 ⊕ (Kv^(1/3) x3 - x3) °e3 ) ⊕
           (γ Kv^(1/3) x2) °e1;
```

Position actuelle des particules (le vecteur OM a été précédemment défini dans la section Préparations) :

```
In[57]:= xt = OM ⊕ u;
```

■ gradient de la transformation

```
In[58]:= F = Gradient[xt, SC] ; (* Gradient est un opérateur défini dans Tens3D *)
```

Composantes de F :

```
In[59]:= F // Components // MatrixForm
```

Note: Components in CanonicalBasis

```
Out[59]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} Kv^{1/3} & Kv^{1/3} \gamma & 0 \\ 0 & Kv^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{1/3} \end{pmatrix}$$

■ Tenseur de déformation

```
In[60]:= B = F.F^T ; (* "." et "T" sont des opérateurs redéfinis dans Tens3D *)
```

Composantes de B :

```
In[61]:= B // Components // MatrixForm
```

Note: Components in CanonicalBasis

```
Out[61]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3} (1 + \gamma^2) & Kv^{2/3} \gamma & 0 \\ Kv^{2/3} \gamma & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$

relation entre γ et δ

ModeleTKvDelta.nb

9

In[62]:= $\text{eq} = \delta = \text{Sqrt}[3] / 9 \text{I1[B]}^{(3/2)} / \text{Kv}$ (* Définition de la distorsion stérique maximale *)

Out[62]= $\delta = \frac{(\text{Kv}^{2/3} (3 + \gamma^2))^{3/2}}{3 \sqrt{3} \text{Kv}}$

In[63]:= $\text{Solve}[\text{eq}, \gamma] // \text{Simplify}$

Out[63]= $\left\{ \left\{ \gamma \rightarrow -\sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \right\}, \left\{ \gamma \rightarrow \sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \right\}, \left\{ \gamma \rightarrow -\sqrt{-3 - \frac{3}{2} i (-i + \sqrt{3}) \delta^{2/3}} \right\}, \right.$
 $\left. \left\{ \gamma \rightarrow \sqrt{-3 - \frac{3}{2} i (-i + \sqrt{3}) \delta^{2/3}} \right\}, \left\{ \gamma \rightarrow -\sqrt{-3 + \frac{3}{2} i (i + \sqrt{3}) \delta^{2/3}} \right\}, \left\{ \gamma \rightarrow \sqrt{-3 + \frac{3}{2} i (i + \sqrt{3}) \delta^{2/3}} \right\} \right\}$

Expression de γ en fonction de la variable d'état δ (on peut toujours choisir e_1 tel que $\gamma > 0$)

In[64]:= $\gamma = \sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}};$

Les composantes de \mathbf{B} en fonction de δ sont :

In[65]:= $\mathbf{B} // \text{Components} // \text{MatrixForm}$

Note: Components in CanonicalBasis

Out[65]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \text{Kv}^{2/3} (-2 + 3 \delta^{2/3}) & \sqrt{3} \text{Kv}^{2/3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} & 0 \\ \sqrt{3} \text{Kv}^{2/3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} & \text{Kv}^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & \text{Kv}^{2/3} \end{pmatrix}$$

■ Tenseur des contraintes

In[66]:= $\sigma_3 = \sigma;$

In[67]:= $\text{comp}\sigma_3 = \sigma_3 // \text{Components};$

Note: Components in CanonicalBasis

■ mesure mécanique $\tau_3 \text{Exp}[T, K_v, \delta]$

Contrainte de cisaillement dans le chemin $C^{(3)}$:

In[68]:= $\tau_3 = \text{comp}\sigma_3[[1, 2]] // \text{Simplify}$

Out[68]= $\frac{\sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \delta^{1/3} \rho_0 g_3^{(0,0,1)} [T, K_v, \delta]}{\text{Kv}}$

In[69]:= $\text{eq}_3 = \tau_3 \text{Exp}[T, K_v, \delta] = \tau_3$

Out[69]= $\tau_3 \text{Exp}[T, K_v, \delta] = \frac{\sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \delta^{1/3} \rho_0 g_3^{(0,0,1)} [T, K_v, \delta]}{\text{Kv}}$

■ résolution de eq_3 (on trouve g_3)

In[70]:= $\text{sol} = \text{DSolve}[\text{eq}_3, g_3, \{T, K_v, \delta\}] // \text{Simplify}$

Out[70]= $\left\{ \left\{ g_3 \rightarrow \text{Function}[\{T, K_v, \delta\}, \int_1^\delta \frac{\text{Kv} \tau_3 \text{Exp}[T, K_v, K\$\text{2070}]}{\sqrt{3} \sqrt{-1 + K\$\text{2070}^{2/3}} K\$\text{2070}^{1/3} \rho_0} dK\$\text{2070} + C[1][T, K_v] \right\} \right\}$

```
In[71]:= sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
      C[1] -> g31 // ChVarMu[#, dx] & // ArrangeInt
Out[71]= g31[T, Kv] +  $\frac{Kv \int_1^\delta \frac{\tau 3 \text{Exp}[T, Kv, dx]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3} \rho 0}$ 
In[72]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignment de la solution g3 *)
Condition sur g3
In[73]:= cond = 0 == g3[T, Kv, 1]
Out[73]= 0 == g31[T, Kv]
In[74]:= sol = DSolve[cond, g31, {T, Kv}]
Out[74]= {{g31 -> Fonction[{T, Kv}, 0]}}
In[75]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignment de la solution g31 *)
```

RESULTAT :

```
In[76]:= g3[T, Kv, delta]
Out[76]=  $\frac{Kv \int_1^\delta \frac{\tau 3 \text{Exp}[T, Kv, dx]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3} \rho 0}$ 
```

Récapitulation

```
In[77]:= {g1[T], g1[T0]}
Out[77]=  $\{-T \int_{T_0}^T \frac{Q1 \text{Exp}[Tx]}{Tx^2} dTx, 0\}$ 
In[78]:= {g2[T, Kv], g2[T, 1]}
Out[78]=  $\left\{ \int_1^{Kv} \frac{Q2 \text{Exp}[T, Kv x]}{\rho 0} dKv x, 0 \right\}$ 
In[79]:= {g3[T, Kv, delta], g3[T, Kv, 1]}
Out[79]=  $\left\{ \frac{Kv \int_1^\delta \frac{\tau 3 \text{Exp}[T, Kv, dx]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3} \rho 0}, 0 \right\}$ 
```

■ Fonction d'état

Energie libre massique de Helmholtz

```
In[80]:= psi
Out[80]=  $-T \int_{T_0}^T \frac{Q1 \text{Exp}[Tx]}{Tx^2} dTx + \int_1^{Kv} \frac{Q2 \text{Exp}[T, Kv x]}{\rho 0} dKv x + \frac{Kv \int_1^\delta \frac{\tau 3 \text{Exp}[T, Kv, dx]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3} \rho 0}$ 
```

Entropie massique

ModeleTKvDelta.nb

11

In[81]:= s

$$\text{Out}[81]= \int_{T_0}^T \frac{Q1\text{Exp}[Tx]}{Tx^2} dTx - \int_1^{Kv} \frac{\sigma 2\text{Exp}^{(1,0)}[T, Kv x]}{\rho 0} dKv x - \frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}^{(1,0,0)}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3} \rho 0} + \frac{Q1\text{Exp}[T]}{T}$$

Energie interne

In[82]:= e = e // Simplify // Expand

$$\text{Out}[82]= \frac{\int_1^{Kv} \sigma 2\text{Exp}[T, Kv x] dKv x}{\rho 0} + \frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3} \rho 0} - \frac{T \int_1^{Kv} \sigma 2\text{Exp}^{(1,0)}[T, Kv x] dKv x}{\rho 0} - \frac{Kv T \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}^{(1,0,0)}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3} \rho 0} + Q1\text{Exp}[T]$$

■ Résultats du modèle utiles pour un calcul numérique

Coefficients de la loi de comportement

In[83]:= K0 = K0 // Expand

$$\text{Out}[83]= \frac{\int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}^{(0,1,0)}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \sigma 2\text{Exp}[T, Kv] - \frac{\delta^{2/3} \tau 3\text{Exp}[T, Kv, \delta]}{\sqrt{3} \sqrt{-1+\delta^{2/3}}}$$

In[84]:= K1

$$\text{Out}[84]= \frac{\tau 3\text{Exp}[T, Kv, \delta]}{\sqrt{3} Kv^{2/3} \sqrt{-1+\delta^{2/3}}}$$

Dérivée particulière de l'énergie interne

In[85]:= ep = D[e, T] Tp + D[e, Kv] Kvp + D[e, \delta] \delta p // Simplify // Collect[#, {Tp, Kvp, \delta p}] &

$$\text{Out}[85]= \frac{1}{3 \rho 0} \left(\left(Tp \left(-3 T \int_1^{Kv} \sigma 2\text{Exp}^{(2,0)}[T, Kv x] dKv x - \sqrt{3} Kv T \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}^{(2,0,0)}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x + 3 \rho 0 Q1\text{Exp}'[T] \right) \right) + \frac{1}{3 \rho 0} \left(Kvp \left(\sqrt{3} \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x + \sqrt{3} Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}^{(0,1,0)}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x - \sqrt{3} T \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}^{(1,0,0)}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x - \sqrt{3} Kv T \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}^{(1,1,0)}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x + 3 \sigma 2\text{Exp}[T, Kv] - 3 T \sigma 2\text{Exp}^{(1,0)}[T, Kv] \right) \right) + \frac{Kv \delta p (\tau 3\text{Exp}[T, Kv, \delta] - T \tau 3\text{Exp}^{(1,0,0)}[T, Kv, \delta])}{\sqrt{3} \sqrt{-1+\delta^{2/3}} \delta^{1/3} \rho 0}$$

Hypothèse supplémentaire facultative

Constatation : la contrainte moyenne d'un état quelconque dépend de la contrainte tangentielle $\tau 3\text{Exp}$:

In[86]:= omoy3 = I1[\sigma 3] / 3 // Simplify

$$\text{Out}[86]= \frac{\int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau 3\text{Exp}^{(0,1,0)}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \sigma 2\text{Exp}[T, Kv]$$

■ Hypothèse 2 : la contrainte moyenne ne varie pas pendant la déformation isovolume

In[87]:= eq = 0 == D[omoy3, δ] // Simplify

Out[87]= $\tau3Exp[T, Kv, \delta] + Kv \tau3Exp^{(0,1,0)}[T, Kv, \delta] == 0$

In[88]:= sol = DSolve[eq, τ3Exp, {T, Kv, δ}]

Out[88]= $\left\{ \left\{ \tau3Exp \rightarrow \text{Function}\left[\{T, Kv, \delta\}, \frac{C[1][T, \delta]}{Kv}\right] \right\} \right\}$

In[89]:= sol = sol /. C[1] → τ3Exp1 (* Changement de nom de la fonction C[1] *)

Out[89]= $\left\{ \left\{ \tau3Exp \rightarrow \text{Function}\left[\{T, Kv, \delta\}, \frac{\tau3Exp1[T, \delta]}{Kv}\right] \right\} \right\}$

In[90]:= hypothese2 = sol[[1]]

Out[90]= $\left\{ \tau3Exp \rightarrow \text{Function}\left[\{T, Kv, \delta\}, \frac{\tau3Exp1[T, \delta]}{Kv}\right] \right\}$

In[91]:= τ3Exp[T, Kv, δ] /. hypothese2

Out[91]= $\frac{\tau3Exp1[T, \delta]}{Kv}$

Sous l'hypothèse 2, il suffit de faire l'expérience $C^{(3)}$ sans dilatation sphérique initiale : on mesure $\tau3ExpKv1[T, \delta]$

In[92]:= g3[T, Kv, δ] /. hypothese2 // ArrangeInt

Out[92]= $\frac{\int_1^\delta \frac{\tau3Exp1[T, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3} \rho 0}$

In[93]:= K0 /. hypothese2 // ArrangeInt

Out[93]= $\sigma 2Exp[T, Kv] - \frac{\delta^{2/3} \tau3Exp1[T, \delta]}{\sqrt{3} Kv \sqrt{-1 + \delta^{2/3}}}$

In[94]:= K1 /. hypothese2 // ArrangeInt

Out[94]= $\frac{\tau3Exp1[T, \delta]}{\sqrt{3} Kv^{5/3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}}}$

In[95]:= ep /. hypothese2 // Expand // ArrangeInt // Collect[#, {Tp, Kvp, δp}] &

Out[95]=
$$Tp \left(-\frac{T \int_1^{Kv} \sigma 2Exp^{(2,0)}[T, Kv x] dKv x}{\rho 0} - \frac{T \int_1^\delta \frac{\tau3Exp1^{(2,0)}[T, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3} \rho 0} + Q1Exp'[T] \right) +$$

$$Kvp \left(\frac{\sigma 2Exp[T, Kv]}{\rho 0} - \frac{T \sigma 2Exp^{(1,0)}[T, Kv]}{\rho 0} \right) + \delta p \left(\frac{\tau3Exp1[T, \delta]}{\sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \delta^{1/3} \rho 0} - \frac{T \tau3Exp1^{(1,0)}[T, \delta]}{\sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \delta^{1/3} \rho 0} \right)$$

Remplacement du chemin $C^{(1)} = C^{(5)} + C^{(6)}$

■ Dilatation libre (chemin $C^{(5)}$)

In[96]:= B = (Kv5Exp[T] ^ (2/3)) ° G;

In[97]:= σ5 = σ;

ModeleTKvDelta.nb

13

In[98]:= **omoy5 = I1[σ5] / 3 // Expand**

$$\text{Out}[98]= \frac{\int_1^{\delta} \frac{\tau 3 \text{Exp}[T, K_v, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \frac{K_v \int_1^{\delta} \frac{\tau 3 \text{Exp}^{(0,1,0)}[T, K_v, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} +$$

$$\sigma 2 \text{Exp}[T, K_v] - \frac{\delta^{2/3} \tau 3 \text{Exp}[T, K_v, \delta]}{\sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}}} + \frac{\left(\frac{K_v 5 \text{Exp}[T]}{K_v}\right)^{2/3} \tau 3 \text{Exp}[T, K_v, \delta]}{\sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}}}$$

■ équation mécanique (on mesure la dilatation thermique à contrainte nulle : $K_v 5 \text{Exp}[T]$)

In[99]:= **eq5meca = 0 == (omoy5 / . Kv -> Kv5Exp[T] // FullSimplify) / . δ -> 1**

Out[99]= 0 == σ 2 Exp[T, Kv5Exp[T]]

■ équation thermique (conservation de l'énergie, forme globale, le travail reçu est nul)

In[100]:=

eq5energie = Q5Exp[T] == (e / . Kv -> Kv5Exp[T] / . δ -> 1)

Out[100]=

$$Q5 \text{Exp}[T] == \frac{\int_1^{K_v 5 \text{Exp}[T]} \sigma 2 \text{Exp}[T, K_v x] dK_v x}{\rho 0} - \frac{T \int_1^{K_v 5 \text{Exp}[T]} \sigma 2 \text{Exp}^{(1,0)}[T, K_v x] dK_v x}{\rho 0} + Q1 \text{Exp}[T]$$

Il y a donc une relation entre $Q5 \text{Exp}[T]$ et $Q1 \text{Exp}[T]$

On remplace la mesure de $Q1 \text{Exp}$ par celle de $Q5 \text{Exp}$

In[101]:=

sol = DSolve[eq5energie, Q1Exp, T]

Out[101]=

$$\left\{ \left\{ Q1 \text{Exp} \rightarrow \text{Function}[\{T\}, \frac{1}{\rho 0} \left(- \int_1^{K_v 5 \text{Exp}[T]} \sigma 2 \text{Exp}[T, K_v x] dK_v x + T \int_1^{K_v 5 \text{Exp}[T]} \sigma 2 \text{Exp}^{(1,0)}[T, K_v x] dK_v x + \rho 0 Q5 \text{Exp}[T] \right) \right\} \right\}$$

In[102]:=

sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] // Expand

Out[102]=

$$- \frac{\int_1^{K_v 5 \text{Exp}[T]} \sigma 2 \text{Exp}[T, K_v x] dK_v x}{\rho 0} + \frac{T \int_1^{K_v 5 \text{Exp}[T]} \sigma 2 \text{Exp}^{(1,0)}[T, K_v x] dK_v x}{\rho 0} + Q5 \text{Exp}[T]$$

In[103]:=

Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution Q1Exp *)

Traction simple dans la direction e1 (chemin $C^{(6)}$)

In[104]:=

\$Assumptions = \$Assumptions && λ1 > 0 && λ2 > 0

Out[104]=

T > 0 && T0 > 0 && K_v > 0 && δ > 1 && ρ0 > 0 && λ1 > 0 && λ2 > 0

■ Tenseur de déformation en traction simple :

```
In[105]:=
  V = DefineTensor[{{λ1, 0, 0}, {0, λ2, 0}, {0, 0, λ2}}, {1, 1}, B0];
```

```
In[106]:=
  V // Components // MatrixForm

Note: Components in CanonicalBasis
```

```
Out[106]//MatrixForm=
  ( λ1  0  0
    0  λ2  0
    0  0  λ2 )
```

Dilatation volumique en traction simple :

```
In[107]:=
  Kv6 = I3[V]
```

```
Out[107]=
  λ1 λ22
```

Distorsion stérique en traction simple :

```
In[108]:=
  δ6 = Sqrt[3] / 9 (I1[V]^2 - 2 I2[V])^(3/2) / Kv6 // Simplify
```

```
Out[108]=
  (λ12 + 2 λ22)3/2
  3 √3 λ1 λ22
```

Tenseur de déformation **B** en traction simple :

```
In[109]:=
  B = V.V;
```

■ Composantes du tenseur des contraintes en traction simple :

```
In[110]:=
  σ6 = σ;
```

```
In[111]:=
  compσ6 = (σ6 // Components) /. Kv → Kv6 /. δ → δ6 ;

Note: Components in CanonicalBasis
```

Vérification : les composantes du tenseur des contraintes sont bien diagonales :

```
In[112]:=
  {compσ6[[1, 2]], compσ6[[1, 3]], compσ6[[2, 3]]}
```

```
Out[112]=
  {0, 0, 0}
```

Vérification ; les contraintes principales transversales sont bien égales :

ModeleTKvDelta.nb

15

```
In[113]:=
  compσ6[[2, 2]] == compσ6[[3, 3]]
```

```
Out[113]=
  True
```

■ Conditions à vérifier lors d'un essai de traction simple

Le tenseur des contraintes doit être uniaxial

```
In[114]:=
  cond1 = 0 == compσ6[[2, 2]]
```

```
Out[114]=
  0 == 
$$\frac{\int_1^{\frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}} \frac{\tau 3 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda_1 \lambda_2^2 \int_1^{\frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}} \frac{\tau 3 \text{Exp}^{(0,1,0)}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \sigma 2 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2] +$$


$$\frac{\lambda_2^2 \tau 3 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}]}{\sqrt{3} (\lambda_1 \lambda_2^2)^{2/3} \sqrt{-1 + \frac{1}{3} \left( \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right)^{2/3}}} - \frac{\left( \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right)^{2/3} \tau 3 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}]}{3\sqrt{3} \sqrt{-1 + \frac{1}{3} \left( \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right)^{2/3}}}$$

```

La contrainte de traction est fonction des autres expériences

```
In[115]:=
  cond2 = σ6Exp == compσ6[[1, 1]]
```

```
Out[115]=
  σ6Exp ==
  
$$\frac{\int_1^{\frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}} \frac{\tau 3 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda_1 \lambda_2^2 \int_1^{\frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}} \frac{\tau 3 \text{Exp}^{(0,1,0)}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \sigma 2 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2] +$$


$$\frac{\lambda_1^2 \tau 3 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}]}{\sqrt{3} (\lambda_1 \lambda_2^2)^{2/3} \sqrt{-1 + \frac{1}{3} \left( \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right)^{2/3}}} - \frac{\left( \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right)^{2/3} \tau 3 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}]}{3\sqrt{3} \sqrt{-1 + \frac{1}{3} \left( \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right)^{2/3}}}$$

```

Autre expression de cond1 :

```
In[116]:=
  sol = Solve[cond1,  $\frac{(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}$ ]]
```

```
Out[116]=
  {{ $\tau 3 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \frac{(\lambda_1^2 + 2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}$ ] →
  
$$\left( \frac{\int_1^{\frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}} \frac{\tau 3 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \frac{\lambda_1 \lambda_2^2 \int_1^{\frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{3\sqrt{3}\lambda_1\lambda_2^2}} \frac{\tau 3 \text{Exp}^{(0,1,0)}[T, \lambda_1 \lambda_2^2, \delta x]}{\sqrt{-1+\delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} d\delta x}{\sqrt{3}} + \sigma 2 \text{Exp}[T, \lambda_1 \lambda_2^2] \right) /$$


$$\left( -\frac{\lambda_2^2}{\sqrt{3} (\lambda_1 \lambda_2^2)^{2/3} \sqrt{-1 + \frac{1}{3} \left( \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right)^{2/3}}} + \frac{\left( \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right)^{2/3}}{3\sqrt{3} \sqrt{-1 + \frac{1}{3} \left( \frac{(\lambda_1^2+2\lambda_2^2)^{3/2}}{\lambda_1 \lambda_2^2} \right)^{2/3}}} \right) \}}$$

```

In[117]:=

`cond11 = sol[[1]] // Simplify`

Out[117]=

$$\left\{ \tau 3 \text{Exp}[T, \lambda 1 \lambda 2^2, \frac{(\lambda 1^2 + 2 \lambda 2^2)^{3/2}}{3 \sqrt{3} \lambda 1 \lambda 2^2}] \rightarrow \frac{1}{\lambda 1^2 - \lambda 2^2} \right. \\ \left. \left((\lambda 1 \lambda 2^2)^{2/3} \sqrt{-3 + \frac{\lambda 1^2 + 2 \lambda 2^2}{\lambda 1^{2/3} \lambda 2^{4/3}}} \left(\sqrt{3} \int_1^{\frac{(\lambda 1^2 + 2 \lambda 2^2)^{3/2}}{3 \sqrt{3} \lambda 1 \lambda 2^2}} \frac{\tau 3 \text{Exp}[T, \lambda 1 \lambda 2^2, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3} \delta x^{1/3}}} d\delta x + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sqrt{3} \lambda 1 \lambda 2^2 \int_1^{\frac{(\lambda 1^2 + 2 \lambda 2^2)^{3/2}}{3 \sqrt{3} \lambda 1 \lambda 2^2}} \frac{\tau 3 \text{Exp}^{(0,1,0)}[T, \lambda 1 \lambda 2^2, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3} \delta x^{1/3}}} d\delta x + 3 \sigma 2 \text{Exp}[T, \lambda 1 \lambda 2^2] \right) \right) \right\}$$

Autre expression de `cond2` :

In[118]:=

`cond22 = cond2 /. cond11 // Simplify`

Out[118]=

$$\sigma 6 \text{Exp} = \sqrt{3} \int_1^{\frac{(\lambda 1^2 + 2 \lambda 2^2)^{3/2}}{3 \sqrt{3} \lambda 1 \lambda 2^2}} \frac{\tau 3 \text{Exp}[T, \lambda 1 \lambda 2^2, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3} \delta x^{1/3}}} d\delta x + \\ \sqrt{3} \lambda 1 \lambda 2^2 \int_1^{\frac{(\lambda 1^2 + 2 \lambda 2^2)^{3/2}}{3 \sqrt{3} \lambda 1 \lambda 2^2}} \frac{\tau 3 \text{Exp}^{(0,1,0)}[T, \lambda 1 \lambda 2^2, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3} \delta x^{1/3}}} d\delta x + 3 \sigma 2 \text{Exp}[T, \lambda 1 \lambda 2^2]$$

■ Les mêmes conditions sous l'hypothèse 2

In[119]:=

`cond11 /. hypothese2 // ArrangeInt`

Out[119]=

$$\left\{ \frac{\tau 3 \text{Exp1}[T, \frac{(\lambda 1^2 + 2 \lambda 2^2)^{3/2}}{3 \sqrt{3} \lambda 1 \lambda 2^2}]}{\lambda 1 \lambda 2^2} \rightarrow \frac{3 (\lambda 1 \lambda 2^2)^{2/3} \sqrt{-3 + \frac{\lambda 1^2 + 2 \lambda 2^2}{\lambda 1^{2/3} \lambda 2^{4/3}}} \sigma 2 \text{Exp}[T, \lambda 1 \lambda 2^2]}{\lambda 1^2 - \lambda 2^2} \right\}$$

In[121]:=

`cond22 /. hypothese2 // ArrangeInt`

Out[121]=

$$\sigma 6 \text{Exp} = 3 \sigma 2 \text{Exp}[T, \lambda 1 \lambda 2^2]$$

Un exemple d'idéalisation des courbes expérimentales

■ Cisaillement cinématique sans Kv initial idéalisé (on suppose l'hypothèse 2)

In[120]:=

`$Assumptions = $Assumptions && \mu 0 > 0`

Out[120]=

`T > 0 && T0 > 0 && Kv > 0 && \delta > 1 && \rho 0 > 0 && \lambda 1 > 0 && \lambda 2 > 0 && \mu 0 > 0`

In[121]:=

`\tau 3 \text{Exp1} = Function[{T, \delta}, \mu 0 e^{b(1 - \frac{\delta}{\rho 0})} \gamma]; (* proportionnalité à \gamma *)`

ModeleTKvDelta.nb

17

In[122]:=

$\tau3\text{Exp1}[T, \delta]$

Out[122]=

$$\sqrt{3} e^{b(1-\frac{T}{T0})} \sqrt{-1+\delta^{2/3}} \mu0$$

Sous l'hypothèse facultative, la contrainte tangentielle dans le chemin $C^{(3)}$ est :

In[123]:=

$\tau3\text{Exp}[T, K_v, \delta] /. \text{hypothese2}$

Out[123]=

$$\frac{\sqrt{3} e^{b(1-\frac{T}{T0})} \sqrt{-1+\delta^{2/3}} \mu0}{K_v}$$

■ Compression/dilatation sphérique (chemin $C^{(2)}$) idéalisée

In[124]:=

$\$Assumptions = \$Assumptions \&\& \xi0 > 0$

Out[124]=

$T > 0 \&\& T0 > 0 \&\& K_v > 0 \&\& \delta > 1 \&\& \rho0 > 0 \&\& \lambda1 > 0 \&\& \lambda2 > 0 \&\& \mu0 > 0 \&\& \xi0 > 0$

In[125]:=

$\sigma2\text{Exp} = \text{Function}[\{T, K_v\}, \sigma1\text{Exp}[T] + \xi0 e^{a(1-\frac{T}{T0})} \text{Log}[K_v]]$

Out[125]=

$\text{Function}[\{T, K_v\}, \sigma1\text{Exp}[T] + \xi0 e^{a(1-\frac{T}{T0})} \text{Log}[K_v]]$

■ Dilatation libre (contrainte nulle) idéalisée

In[126]:=

$\$Assumptions = \$Assumptions \&\& C_p > 0$

Out[126]=

$T > 0 \&\& T0 > 0 \&\& K_v > 0 \&\& \delta > 1 \&\& \rho0 > 0 \&\& \lambda1 > 0 \&\& \lambda2 > 0 \&\& \mu0 > 0 \&\& \xi0 > 0 \&\& C_p > 0$

■ chaleur massique à contrainte nulle idéalisée

In[127]:=

$Q5\text{Exp} = \text{Function}[T, C_p (T - T0)];$

■ dilatation linéique libre idéalisée

In[128]:=

$\$Assumptions = \$Assumptions \&\& \beta > 0 \&\& 1 + \beta (T - T0) > 0$

Out[128]=

$T > 0 \&\& T0 > 0 \&\& K_v > 0 \&\& \delta > 1 \&\& \rho0 > 0 \&\& \lambda1 > 0 \&\& \lambda2 > 0 \&\& \mu0 > 0 \&\& \xi0 > 0 \&\& C_p > 0 \&\& \beta > 0 \&\& 1 + (T - T0) \beta > 0$

In[129]:=

$K15\text{Exp} = \text{Function}[T, 1 + \beta (T - T0)];$

■ dilatation volumique libre idéalisée

```
In[130]:=
Kv5Exp = Function[T, Kl5Exp[T]^3];
```

■ Condition de contrainte nulle dans la dilatation libre

```
In[131]:=
eq = σ2Exp[T, Kv5Exp[T]] == 0
Out[131]=
ea(1- $\frac{T}{T0}$ ) ξ0 Log[(1 + (T - T0) β)3] + σ1Exp[T] == 0
```

On en déduit la fonction $\sigma1Exp[T]$:

```
In[132]:=
sol = DSolve[eq, σ1Exp, T]
Out[132]=
{{σ1Exp → Function[{T}, -ea(1- $\frac{T}{T0}$ ) ξ0 Log[(1 + (T - T0) β)3]]}}
In[133]:=
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* assignation de la solution σ1Exp[T] *)
In[134]:=
σ1Exp[T]
Out[134]=
-ea(1- $\frac{T}{T0}$ ) ξ0 Log[(1 + (T - T0) β)3]
```

■ Récapitulation des résultats utiles sous cette idéalisation

■ Energie interne

```
In[135]:=
eId = e /. hypothese2 // Collect[#, {Cp, ξ0, μ0, ρ0}, Simplify] &
Out[135]=
Cp (T - T0) +  $\frac{3 e^{b-\frac{bT}{T0}} (bT + T0) (-1 + \delta^{2/3}) \mu 0}{T0 \rho 0} - \frac{1}{T0 (-1 - T \beta + T0 \beta) \rho 0}$ 
(ea- $\frac{aT}{T0}$  ξ0 ((-Kv + (1 + T β - T0 β)3) (a T (1 + T β - T0 β) - T0 (-1 + 2 T β + T0 β)) +
Kv (a T + T0) (1 + T β - T0 β) Log[Kv] - 3 Kv (a T + T0) (1 + T β - T0 β) Log[1 + T β - T0 β]))
```

■ chaleur massique à contrainte nulle idéalisée

```
In[138]:=
Q5Exp = Function[T, Cp (T - T0)];
```

■ dilatation linéique libre idéalisée

```
In[139]:=
$Assumptions = $Assumptions && β > 0 && 1 + β (T - T0) > 0

Out[139]=
T > 0 && T0 > 0 && Kv > 0 && δ > 1 && ρ0 > 0 && λ1 > 0 &&
λ2 > 0 && μ0 > 0 && ξ0 > 0 && Cp > 0 && β > 0 && 1 + (T - T0) β > 0

In[140]:=
K15Exp = Function[T, 1 + β (T - T0)];
```

■ dilatation volumique libre idéalisée

```
In[141]:=
Kv5Exp = Function[T, K15Exp[T]^3];
```

■ Condition de contrainte nulle dans la dilatation libre

```
In[142]:=
eq = σ2Exp[T, Kv5Exp[T]] == 0

Out[142]=
ea (1 - T/T0) ξ0 Log[(1 + (T - T0) β)3] + σ1Exp[T] == 0
```

On en déduit la fonction $\sigma1Exp[T]$:

```
In[143]:=
sol = DSolve[eq, σ1Exp, T]

Out[143]=
{{σ1Exp → Function[{T}, -ea (1 - T/T0) ξ0 Log[(1 + (T - T0) β)3] ]}}
```

```
In[144]:=
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* assignation de la solution σ1Exp[T] *)

In[145]:=
σ1Exp[T]

Out[145]=
-ea (1 - T/T0) ξ0 Log[(1 + (T - T0) β)3]
```

■ Entropie

In[149]:=

sId = - D[ψId, T]

Out[149]=

$$\frac{3 b e^{b-\frac{bT}{T0}} (-1 + \delta^{2/3}) \mu 0}{T0 \rho 0} - \frac{1}{\rho 0} \left(e^{a-\frac{aT}{T0}} \left(-\frac{3 \beta}{1 + T \beta - T0 \beta} - \frac{3 (-1 + Kv) \beta}{1 + T \beta - T0 \beta} + (T - T0) \beta ((T - T0) \beta^2 + \beta (3 + T \beta - T0 \beta)) + \beta (3 + (T - T0) \beta (3 + T \beta - T0 \beta)) \right) \xi 0 \right) + Cp \text{Log} \left[\frac{T}{T0} \right] + \frac{1}{T0 \rho 0} \left(a e^{a-\frac{aT}{T0}} \xi 0 ((T - T0) \beta (3 + (T - T0) \beta (3 + T \beta - T0 \beta)) + Kv \text{Log}[Kv]) - 3 \text{Log}[1 + T \beta - T0 \beta] - (-1 + Kv) (1 + 3 \text{Log}[1 + T \beta - T0 \beta]) \right)$$

■ Loi de comportement

In[153]:=

K0Id = K0 /. hypothese2 // Collect[#, {μ0, ξ0, Kv}, Simplify] &

Out[153]=

$$-\frac{e^{b-\frac{bT}{T0}} \delta^{2/3} \mu 0}{Kv} + e^{a-\frac{aT}{T0}} \xi 0 (\text{Log}[Kv] - 3 \text{Log}[1 + T \beta - T0 \beta])$$

In[154]:=

K1Id = K1 /. hypothese2

Out[154]=

$$\frac{e^{b(1-\frac{T}{T0})} \mu 0}{Kv^{5/3}}$$

■ Dérivée particulière de l'énergie interne massique

In[158]:=

epId = D[eId, T] Tp + D[eId, Kv] Kvp + D[eId, δ] δp // Collect[#, {Tp, Kvp, δp, Cp, ρ0, ξ0, Log[Kv], Log[1 + T β - T0 β]}, Simplify] &

Out[158]=

$$\frac{2 e^{b-\frac{bT}{T0}} (b T + T0) \delta p \mu 0}{T0 \delta^{1/3} \rho 0} + \frac{Kvp \xi 0 \left(\frac{3 e^{a-\frac{aT}{T0}} T \beta}{1 + T \beta - T0 \beta} + \frac{e^{a-\frac{aT}{T0}} (a T + T0) \text{Log}[Kv]}{T0} - \frac{3 e^{a-\frac{aT}{T0}} (a T + T0) \text{Log}[1 + T \beta - T0 \beta]}{T0} \right)}{\rho 0} + Tp \left(Cp + \frac{1}{\rho 0} \left(-\frac{3 b^2 e^{b-\frac{bT}{T0}} T (-1 + \delta^{2/3}) \mu 0}{T0^2} + \xi 0 \left(\frac{1}{T0^2 (1 + T \beta - T0 \beta)^2} \left(e^{a-\frac{aT}{T0}} (3 Kv T0 (a T + T0) \beta (-1 - T \beta + T0 \beta) - T0 (-1 - T \beta + T0 \beta) (a + 2 a T \beta - 2 T0 \beta - a T0 \beta) (-Kv + (1 + T \beta - T0 \beta)^3) - T0 \beta (-Kv + (1 + T \beta - T0 \beta)^3) (a T (1 + T \beta - T0 \beta) - T0 (-1 + 2 T \beta + T0 \beta)) + a (-1 - T \beta + T0 \beta) (-Kv + (1 + T \beta - T0 \beta)^3) (a T (1 + T \beta - T0 \beta) - T0 (-1 + 2 T \beta + T0 \beta)) + 3 T0 \beta (-1 - T \beta + T0 \beta)^3 (-a T (1 + T \beta - T0 \beta) + T0 (-1 + 2 T \beta + T0 \beta)) \right) - \frac{a^2 e^{a-\frac{aT}{T0}} Kv T \text{Log}[Kv]}{T0^2} + \frac{3 a^2 e^{a-\frac{aT}{T0}} Kv T \text{Log}[1 + T \beta - T0 \beta]}{T0^2} \right) \right) \right)$$

■ Si on suppose en plus que les coefficients indépendants de la température ...

In[159]:=

eId /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &

Out[159]=

$$\text{Cp} (T - T_0) + \frac{3 (-1 + \delta^{2/3}) \mu_0}{\rho_0} - \frac{1}{(-1 - T \beta + T_0 \beta) \rho_0} \\ (\xi_0 (-(-1 + 2 T \beta + T_0 \beta) (-K_v + (1 + T \beta - T_0 \beta)^2) + K_v (1 + T \beta - T_0 \beta) \text{Log}[K_v] - \\ 3 K_v (1 + T \beta - T_0 \beta) \text{Log}[1 + T \beta - T_0 \beta]))$$

In[160]:=

sId /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &

Out[160]=

$$- \frac{3 \beta (-K_v + (1 + T \beta - T_0 \beta)^3) \xi_0}{(1 + T \beta - T_0 \beta) \rho_0} + \text{Cp} \text{Log}\left[\frac{T}{T_0}\right]$$

In[161]:=

ψId /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &

Out[161]=

$$\frac{3 (-1 + \delta^{2/3}) \mu_0}{\rho_0} - \text{Cp} \left(-T + T_0 + T \text{Log}\left[\frac{T}{T_0}\right]\right) + \frac{1}{\rho_0} \\ (\xi_0 ((T - T_0) \beta (3 + (T - T_0) \beta (3 + T \beta - T_0 \beta)) + K_v \text{Log}[K_v] - \\ 3 \text{Log}[1 + T \beta - T_0 \beta] - (-1 + K_v) (1 + 3 \text{Log}[1 + T \beta - T_0 \beta])))$$

In[162]:=

K0Id /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &

Out[162]=

$$- \frac{\delta^{2/3} \mu_0}{K_v} + \xi_0 (\text{Log}[K_v] - 3 \text{Log}[1 + T \beta - T_0 \beta])$$

In[163]:=

K1Id /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &

Out[163]=

$$\frac{\mu_0}{K_v^{5/3}}$$

■ Dérivée particulière de l'énergie interne massique

In[164]:=

epId2 = epId /. a → 0 /. b → 0 // Map[Simplify, #] &

Out[164]=

$$\text{Tp} \left(\text{Cp} - \frac{3 T \beta^2 (K_v + 2 (1 + T \beta - T_0 \beta)^3) \xi_0}{(1 + T \beta - T_0 \beta)^2 \rho_0} \right) + \\ \frac{2 \delta_P \mu_0}{\delta^{1/3} \rho_0} + \frac{K_v P \xi_0 \left(\frac{3 T \beta}{1 + T \beta - T_0 \beta} + \text{Log}[K_v] - 3 \text{Log}[1 + T \beta - T_0 \beta] \right)}{\rho_0}$$

Coefficient de Tp

In[165]:=

Coefficient[epId2, Tp] // Expand // Collect[#, {ξ0, ρ0, Kv}, Factor] &

Out[165]=

$$\text{Cp} + \frac{\left(- \frac{3 K_v T \beta^2}{(1 + T \beta - T_0 \beta)^2} - 6 T \beta^2 (1 + T \beta - T_0 \beta) \right) \xi_0}{\rho_0}$$

Coefficient de Kvp

```
In[166]:=
Coefficient[epId2, Kvp] // Expand //
Collect[#, {rho0, xi0, Log[Kv], Log[1 + T beta - T0 beta]}, Simplify] &
```

```
Out[166]=

$$\frac{\xi_0 \left( \frac{3 T \beta}{1 + T \beta - T_0 \beta} + \text{Log}[Kv] - 3 \text{Log}[1 + T \beta - T_0 \beta] \right)}{\rho_0}$$

```

Coefficient de δp

```
In[167]:=
Coefficient[epId2, delta p]
```

```
Out[167]=

$$\frac{2 \mu_0}{\delta^{1/3} \rho_0}$$

```


Calculs du chapitre 4

Les 3 feuilles de calcul reproduites dans les pages qui suivent décrivent le détail des calculs d'intégration des systèmes différentiels du chapitre 4 [p. 71] (pseudo-élasticité de Hooke).

Elles sont exécutables dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA[®] version 5.2.

Ces feuilles de calcul sont largement commentées. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire les feuilles de calcul dans son propre langage.

Recherche d'une énergie libre de Hooke

```
Off[General::spell]
```

```
$Assumptions = $Assumptions && T > 0 && e1 ∈ Reals && e2 ∈ Reals && e3 ∈ Reals
```

```
T > 0 && e1 ∈ Reals && e2 ∈ Reals && e3 ∈ Reals
```

Systeme d'equations à résoudre

```
eq1 = 0 == -2 D[ψ[T, e1, e2, e3], e2] + D[ψ[T, e1, e2, e3], e3]
0 == ψ(0,0,0,1)[T, e1, e2, e3] - 2 ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3]
eq2 = 2 μ == ρ0 (1 - e1)
      (2 D[ψ[T, e1, e2, e3], e1] + (2 e1 - 1) D[ψ[T, e1, e2, e3], e2] - e1 D[ψ[T, e1, e2, e3], e3])
2 μ == (1 - e1) ρ0
      (-e1 ψ(0,0,0,1)[T, e1, e2, e3] + (-1 + 2 e1) ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + 2 ψ(0,1,0,0)[T, e1, e2, e3])
eq3 = λ e1 - (3 λ + 2 μ) α (T - T0) == ρ0 (1 - e1)
      (D[ψ[T, e1, e2, e3], e1] + e1 D[ψ[T, e1, e2, e3], e2] + (e2 + 2 e3) D[ψ[T, e1, e2, e3], e3])
e1 λ - (T - T0) α (3 λ + 2 μ) ==
      (1 - e1) ρ0 ((e2 + 2 e3) ψ(0,0,0,1)[T, e1, e2, e3] + e1 ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + ψ(0,1,0,0)[T, e1, e2, e3])
```

Résolution

■ Elimination de D[ψ[T, e1, e2, e3], e3]

```
sol1 = Solve[eq1, D[ψ[T, e1, e2, e3], e3]]
```

```
{ {ψ(0,0,0,1)[T, e1, e2, e3] → 2 ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] } }
```

```
eq21 = eq2 /. sol1[[1]]
```

```
2 μ == (1 - e1) ρ0
```

```
(-2 e1 ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + (-1 + 2 e1) ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + 2 ψ(0,1,0,0)[T, e1, e2, e3])
```

```
eq31 = eq3 /. sol1[[1]]
```

```
e1 λ - (T - T0) α (3 λ + 2 μ) == (1 - e1) ρ0
```

```
(e1 ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + 2 (e2 + 2 e3) ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + ψ(0,1,0,0)[T, e1, e2, e3])
```

■ Elimination de D[ψ[T, e1, e2, e3], e2]

```
sol2 = Solve[eq21, D[ψ[T, e1, e2, e3], e2]]
```

```
{ {ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] →  $\frac{2 (\mu - \rho_0 \psi^{(0,1,0,0)}[T, e1, e2, e3] + e1 \rho_0 \psi^{(0,1,0,0)}[T, e1, e2, e3])}{(-1 + e1) \rho_0}$  } }
```

```
eq32 = eq31 /. sol2[[1]] // Map[Simplify, #] &
```

```
e1 λ - (T - T0) α (3 λ + 2 μ) ==  $\frac{1}{-1 + e1}$ 
```

```
(1 - e1) (2 (e1 + 2 e2 + 4 e3) μ + (-1 + e1) (1 + 2 e1 + 4 e2 + 8 e3) ρ0 ψ(0,1,0,0)[T, e1, e2, e3])
```

■ Résolution de eq3 (eq32)

sol = DSolve[eq32, ψ , {T, ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 }]

$$\left\{ \left\{ \psi \rightarrow \text{Function}\left[\left\{ T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \right\}, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{2(3+4\epsilon_2+8\epsilon_3)\rho_0} \left(2((1-3T\alpha+3T_0\alpha)\lambda+2(1-T\alpha+T_0\alpha+2\epsilon_2+4\epsilon_3)\mu) \text{Log}[-1+\epsilon_1] + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. ((1+6T\alpha-6T_0\alpha+4\epsilon_2+8\epsilon_3)\lambda+2(1+2T\alpha-2T_0\alpha)\mu) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \text{Log}[1+2\epsilon_1+4\epsilon_2+8\epsilon_3] \right) + C[1][T, \epsilon_2, \epsilon_3] \right] \right\} \right\}$$

Changement de nom

sol = sol /. C[1] → f1

$$\left\{ \left\{ \psi \rightarrow \text{Function}\left[\left\{ T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \right\}, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{2(3+4\epsilon_2+8\epsilon_3)\rho_0} \left(2((1-3T\alpha+3T_0\alpha)\lambda+2(1-T\alpha+T_0\alpha+2\epsilon_2+4\epsilon_3)\mu) \text{Log}[-1+\epsilon_1] + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. ((1+6T\alpha-6T_0\alpha+4\epsilon_2+8\epsilon_3)\lambda+2(1+2T\alpha-2T_0\alpha)\mu) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \text{Log}[1+2\epsilon_1+4\epsilon_2+8\epsilon_3] \right) + f1[T, \epsilon_2, \epsilon_3] \right] \right\} \right\}$$

Assignation de la solution

Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]

$$\text{Function}\left[\left\{ T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \right\}, \right. \\ \left. - \frac{1}{2(3+4\epsilon_2+8\epsilon_3)\rho_0} \left(2((1-3T\alpha+3T_0\alpha)\lambda+2(1-T\alpha+T_0\alpha+2\epsilon_2+4\epsilon_3)\mu) \text{Log}[-1+\epsilon_1] + \right. \right. \\ \left. \left. ((1+6T\alpha-6T_0\alpha+4\epsilon_2+8\epsilon_3)\lambda+2(1+2T\alpha-2T_0\alpha)\mu) \right. \right. \\ \left. \left. \text{Log}[1+2\epsilon_1+4\epsilon_2+8\epsilon_3] \right) + f1[T, \epsilon_2, \epsilon_3] \right]$$

■ Résolution de eq2 (eq21)

eq21 = eq21 // Simplify

$$\frac{1}{3+4\epsilon_2+8\epsilon_3} \left(-2((-1+3T\alpha-3T_0\alpha)\lambda+(1+2T\alpha-2T_0\alpha)\mu) \right. \\ \left. (3+4\epsilon_2+8\epsilon_3+2(-1+\epsilon_1)\text{Log}[-1+\epsilon_1]-2(-1+\epsilon_1)\text{Log}[1+2\epsilon_1+4\epsilon_2+8\epsilon_3]) + \right. \\ \left. (-1+\epsilon_1)(3+4\epsilon_2+8\epsilon_3)^2\rho_0 f1^{(0,1,0)}[T, \epsilon_2, \epsilon_3] \right) = 0$$

solfl = DSolve[eq21, f1, {T, ϵ_2 , ϵ_3 }]

$$\left\{ \left\{ f1 \rightarrow \text{Function}\left[\left\{ T, \epsilon_2, \epsilon_3 \right\}, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. (((-1+3T\alpha-3T_0\alpha)\lambda+(1+2T\alpha-2T_0\alpha)\mu) (-2(-1+\epsilon_1)\text{Log}[-1+\epsilon_1] + (1+2\epsilon_1+4\epsilon_2+8\epsilon_3) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \text{Log}[1+2\epsilon_1+4\epsilon_2+8\epsilon_3]) \right) / (2(-1+\epsilon_1)(3+4\epsilon_2+8\epsilon_3)\rho_0) + C[1][T, \epsilon_3] \right] \right\} \right\}$$

Changement de nom

solfl = solfl /. C[1] → f2

$$\left\{ \left\{ f1 \rightarrow \text{Function}\left[\left\{ T, \epsilon_2, \epsilon_3 \right\}, \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. (((-1+3T\alpha-3T_0\alpha)\lambda+(1+2T\alpha-2T_0\alpha)\mu) (-2(-1+\epsilon_1)\text{Log}[-1+\epsilon_1] + (1+2\epsilon_1+4\epsilon_2+8\epsilon_3) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \text{Log}[1+2\epsilon_1+4\epsilon_2+8\epsilon_3]) \right) / (2(-1+\epsilon_1)(3+4\epsilon_2+8\epsilon_3)\rho_0) + f2[T, \epsilon_3] \right] \right\} \right\}$$

Assignation de la solution

Evaluate[solfl[[1, 1, 1]]] = solfl[[1, 1, 2]]

$$\text{Function}\left[\left\{ T, \epsilon_2, \epsilon_3 \right\}, \left(((-1+3T\alpha-3T_0\alpha)\lambda+(1+2T\alpha-2T_0\alpha)\mu) \right. \right. \\ \left. \left. (-2(-1+\epsilon_1)\text{Log}[-1+\epsilon_1] + (1+2\epsilon_1+4\epsilon_2+8\epsilon_3) \text{Log}[1+2\epsilon_1+4\epsilon_2+8\epsilon_3]) \right) / \right. \\ \left. (2(-1+\epsilon_1)(3+4\epsilon_2+8\epsilon_3)\rho_0) + f2[T, \epsilon_3] \right]$$

■ Résolution de eq1

```

eq1 = eq1 // Simplify
f2(0,1)[T, ε3] == 0
sol2 = DSolve[eq1, f2, {T, ε3}]
{{f2 → Function[{T, ε3}, C[1][T]]}}
Changement de nom
sol2 = sol2 /. C[1] → f3
{{f2 → Function[{T, ε3}, f3[T]]}}
Assignation de la solution
Evaluate[sol2[[1, 1, 1]]] = sol2[[1, 1, 2]]
Function[{T, ε3}, f3[T]]

```

■ Résultat

```

ψ[T, ε1, ε2, ε3] // Simplify

$$\frac{1}{2(-1+\epsilon_1)\rho_0} (2(-1+\epsilon_1)\rho_0 f_3[T] - 2(-1+\epsilon_1)\mu \text{Log}[-1+\epsilon_1] + (-\epsilon_1\lambda + \mu + T\alpha(3\lambda + 2\mu) - T_0\alpha(3\lambda + 2\mu)) \text{Log}[1 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3])$$


```

Vérifications :

```
eq1 // Simplify
```

```
True
```

```
eq2 // Simplify
```

```
True
```

```
eq3 // Simplify
```

```
True
```

Mise en forme lisible

```

ψ[T, ε1, ε2, ε3] /. Log[1 + 2 ε1 + 4 ε2 + 8 ε3] → 2 Log[Kv] // Expand // Collect[#, {α, λ, μ}] & //
Map[Factor, #] &
f3[T] -  $\frac{\epsilon_1 \lambda \text{Log}[Kv]}{(-1+\epsilon_1)\rho_0} + \frac{(T-T_0)\alpha(3\lambda+2\mu)\text{Log}[Kv]}{(-1+\epsilon_1)\rho_0} + \frac{\mu(\text{Log}[Kv] + \text{Log}[-1+\epsilon_1] - \epsilon_1 \text{Log}[-1+\epsilon_1])}{(-1+\epsilon_1)\rho_0}$ 

```

Approximation $\rho=\rho_0$

Off[General::spell]

\$Assumptions = \$Assumptions && T > 0 && e1 ∈ Reals && e2 ∈ Reals && e3 ∈ Reals

T > 0 && e1 ∈ Reals && e2 ∈ Reals && e3 ∈ Reals

Système d'équations à résoudre

```

eq1 = 0 == -2 D[ψ[T, e1, e2, e3], e2] + D[ψ[T, e1, e2, e3], e3]
0 == ψ(0,0,0,1)[T, e1, e2, e3] - 2 ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3]
eq2 = 2 μ ==
  ρ0 (2 D[ψ[T, e1, e2, e3], e1] + (2 e1 - 1) D[ψ[T, e1, e2, e3], e2] - e1 D[ψ[T, e1, e2, e3], e3])
2 μ == ρ0 (-e1 ψ(0,0,0,1)[T, e1, e2, e3] + (-1 + 2 e1) ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + 2 ψ(0,1,0,0)[T, e1, e2, e3])
eq3 = λ e1 - (3 λ + 2 μ) α (T - T0) ==
  ρ0 (D[ψ[T, e1, e2, e3], e1] + e1 D[ψ[T, e1, e2, e3], e2] + (e2 + 2 e3) D[ψ[T, e1, e2, e3], e3])
e1 λ - (T - T0) α (3 λ + 2 μ) ==
  ρ0 ((e2 + 2 e3) ψ(0,0,0,1)[T, e1, e2, e3] + e1 ψ(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + ψ(0,1,0,0)[T, e1, e2, e3])

```

Résolution

■ Elimination de $D[\psi[T, e1, e2, e3], e3]$

sol1 = Solve[eq1, D[ψ[T, e1, e2, e3], e3]]

{ { ψ^(0,0,0,1)[T, e1, e2, e3] → 2 ψ^(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] } }

eq21 = eq2 /. sol1[[1]]

2 μ == ρ0 (-2 e1 ψ^(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + (-1 + 2 e1) ψ^(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + 2 ψ^(0,1,0,0)[T, e1, e2, e3])

eq31 = eq3 /. sol1[[1]]

e1 λ - (T - T0) α (3 λ + 2 μ) ==

ρ0 (e1 ψ^(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + 2 (e2 + 2 e3) ψ^(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] + ψ^(0,1,0,0)[T, e1, e2, e3])

■ Elimination de $D[\psi[T, e1, e2, e3], e2]$

sol2 = Solve[eq21, D[ψ[T, e1, e2, e3], e2]]

{ { ψ^(0,0,1,0)[T, e1, e2, e3] → - $\frac{2 (\mu - \rho_0 \psi^{(0,1,0,0)}[T, e1, e2, e3])}{\rho_0}$ } }

eq32 = eq31 /. sol2[[1]] // Map[Simplify, #] &

e1 λ - (T - T0) α (3 λ + 2 μ) == -2 (e1 + 2 e2 + 4 e3) μ + (1 + 2 e1 + 4 e2 + 8 e3) ρ0 ψ^(0,1,0,0)[T, e1, e2, e3]

■ Résolution de eq3 (eq32)

sol = DSolve[eq32, ψ, {T, e1, e2, e3}]

{ { ψ → Function[{T, e1, e2, e3},
 $\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{4} (1 + 2 e1 + 4 e2 + 8 e3) (\lambda + 2 \mu) + \frac{1}{4} (-\lambda - 6 T \alpha \lambda + 6 T_0 \alpha \lambda - 4 e2 \lambda - 8 e3 \lambda - 2 \mu - 4 T \alpha \mu + 4 T_0 \alpha \mu) \right.$
 $\left. \text{Log}[1 + 2 e1 + 4 e2 + 8 e3] \right) + C[1][T, e2, e3]] }$ }

2 | PsiHookeRho0.nb

Changement de nom

sol = **sol** /. **C[1]** → **f1**

$$\left\{ \left\{ \psi \rightarrow \text{Function} \left[\{T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}, \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{4} (1 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3) (\lambda + 2\mu) + \frac{1}{4} (-\lambda - 6T\alpha\lambda + 6T_0\alpha\lambda - 4\epsilon_2\lambda - 8\epsilon_3\lambda - 2\mu - 4T\alpha\mu + 4T_0\alpha\mu) \right) \right] \right\} \right\}$$

Assignation de la solution

Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]

$$\text{Function} \left[\{T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}, \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{1}{4} (1 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3) (\lambda + 2\mu) + \frac{1}{4} (-\lambda - 6T\alpha\lambda + 6T_0\alpha\lambda - 4\epsilon_2\lambda - 8\epsilon_3\lambda - 2\mu - 4T\alpha\mu + 4T_0\alpha\mu) \right) \right]$$

■ Résolution de eq2 (eq21)

eq21 = **eq21** // **Simplify**

$$2\mu + \rho_0 f1^{(0,1,0)}[T, \epsilon_2, \epsilon_3] = \lambda \text{Log}[1 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3]$$

solf1 = **DSolve[eq21, f1, {T, \epsilon_2, \epsilon_3}]**

$$\left\{ \left\{ f1 \rightarrow \text{Function} \left[\{T, \epsilon_2, \epsilon_3\}, \frac{(-1 - 2\epsilon_1 - 4\epsilon_2 - 8\epsilon_3)\lambda}{4\rho_0} - \frac{2\epsilon_2\mu}{\rho_0} + \frac{(1 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3)\lambda \text{Log}[1 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3]}{4\rho_0} + C[1][T, \epsilon_3] \right] \right\} \right\}$$

Changement de nom

solf1 = **solf1** /. **C[1]** → **f2**

$$\left\{ \left\{ f1 \rightarrow \text{Function} \left[\{T, \epsilon_2, \epsilon_3\}, \frac{(-1 - 2\epsilon_1 - 4\epsilon_2 - 8\epsilon_3)\lambda}{4\rho_0} - \frac{2\epsilon_2\mu}{\rho_0} + \frac{(1 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3)\lambda \text{Log}[1 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3]}{4\rho_0} + f2[T, \epsilon_3] \right] \right\} \right\}$$

Assignation de la solution

Evaluate[solf1[[1, 1, 1]]] = solf1[[1, 1, 2]]

$$\text{Function} \left[\{T, \epsilon_2, \epsilon_3\}, \frac{(-1 - 2\epsilon_1 - 4\epsilon_2 - 8\epsilon_3)\lambda}{4\rho_0} - \frac{2\epsilon_2\mu}{\rho_0} + \frac{(1 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3)\lambda \text{Log}[1 + 2\epsilon_1 + 4\epsilon_2 + 8\epsilon_3]}{4\rho_0} + f2[T, \epsilon_3] \right]$$

■ Résolution de eq1

eq1 = **eq1** // **Simplify**

$$\frac{4\mu}{\rho_0} + f2^{(0,1)}[T, \epsilon_3] = 0$$

solf2 = **DSolve[eq1, f2, {T, \epsilon_3}]**

$$\left\{ \left\{ f2 \rightarrow \text{Function} \left[\{T, \epsilon_3\}, -\frac{4\epsilon_3\mu}{\rho_0} + C[1][T] \right] \right\} \right\}$$

Changement de nom

solf2 = **solf2** /. **C[1]** → **f3**

$$\left\{ \left\{ f2 \rightarrow \text{Function} \left[\{T, \epsilon_3\}, -\frac{4\epsilon_3\mu}{\rho_0} + f3[T] \right] \right\} \right\}$$

Assignation de la solution

```
Evaluate[solf2[[1, 1, 1]]] = solf2[[1, 1, 2]]
```

```
Function[{T, e3}, - $\frac{4 e3 \mu}{\rho0}$  + f3[T]]
```

■ Résultat

```
 $\psi$ [T, e1, e2, e3] // Simplify
```

$$\frac{1}{2 \rho_0} (\mu + 2 e_1 \mu + 2 \rho_0 f_3[T] + (e_1 \lambda - \mu - T \alpha (3 \lambda + 2 \mu) + T_0 \alpha (3 \lambda + 2 \mu)) \text{Log}[1 + 2 e_1 + 4 e_2 + 8 e_3])$$

Vérifications :

```
eq1 // Simplify
```

```
True
```

```
eq2 // Simplify
```

```
True
```

```
eq3 // Simplify
```

```
True
```

Mise en forme lisible

```
 $\psi$ [T, e1, e2, e3] /. Log[1 + 2 e1 + 4 e2 + 8 e3] → 2 Log[Kv] // Expand //
```

```
Collect[#, {α, λ, μ, Log[-1 + e1]}] & // Map[Simplify, #] &
```

$$f_3[T] + \frac{\mu (1 + 2 e_1 - 2 \text{Log}[Kv])}{2 \rho_0} + \frac{e_1 \lambda \text{Log}[Kv]}{\rho_0} - \frac{(T - T_0) \alpha (3 \lambda + 2 \mu) \text{Log}[Kv]}{\rho_0}$$

Loi linéaire en ϵ^V

Off[General::spell]

\$Assumptions = \$Assumptions && T > 0 && e1 ∈ Reals && e2 ∈ Reals && e3 ∈ Reals

T > 0 && e1 ∈ Reals && e2 ∈ Reals && e3 ∈ Reals

Système d'équations à résoudre

$$\text{eq1} = 0 = D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_2] - D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_3]$$

$$0 = -\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] + \psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]$$

$$\text{eq2} = 2\mu(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) =$$

$$\rho_0 (D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_1] - (1 - \epsilon_1) D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_2] - \epsilon_1 D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_3])$$

$$2(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)\mu =$$

$$\rho_0 (-\epsilon_1 \psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] - (1 - \epsilon_1) \psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3])$$

$$\text{eq3} = (\lambda \epsilon_1 - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0))(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) =$$

$$\rho_0 (D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_1] + \epsilon_1 D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_2] + (\epsilon_2 + \epsilon_3) D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_3])$$

$$(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)(\epsilon_1 \lambda - (T - T_0)\alpha(3\lambda + 2\mu)) =$$

$$\rho_0 ((\epsilon_2 + \epsilon_3) \psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] + \epsilon_1 \psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3])$$

Résolution

■ Elimination de $D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_3]$

$$\text{sol1} = \text{Solve}[\text{eq1}, D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_3]]$$

$$\{\{\psi^{(0,0,0,1)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] \rightarrow \psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3]\}\}$$

$$\text{eq21} = \text{eq2} /. \text{sol1}[[1]]$$

$$2(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)\mu =$$

$$\rho_0 (-(1 - \epsilon_1) \psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] - \epsilon_1 \psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3])$$

$$\text{eq31} = \text{eq3} /. \text{sol1}[[1]]$$

$$(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)(\epsilon_1 \lambda - (T - T_0)\alpha(3\lambda + 2\mu)) =$$

$$\rho_0 (\epsilon_1 \psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] + (\epsilon_2 + \epsilon_3) \psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] + \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3])$$

■ Elimination de $D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_2]$

$$\text{sol2} = \text{Solve}[\text{eq21}, D[\psi[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3], \epsilon_2]]$$

$$\{\{\psi^{(0,0,1,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3] \rightarrow \frac{1}{\rho_0}(-2\mu - 2\epsilon_1\mu - 2\epsilon_2\mu - 2\epsilon_3\mu + \rho_0 \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3])\}\}$$

$$\text{eq32} = \text{eq31} /. \text{sol2}[[1]] // \text{Map}[\text{Simplify}, \#] \&$$

$$(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)(\epsilon_1 \lambda - (T - T_0)\alpha(3\lambda + 2\mu)) =$$

$$-(1 + \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)(2(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)\mu - \rho_0 \psi^{(0,1,0,0)}[T, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3])$$

■ Résolution de eq3 (eq32)

sol = DSolve[eq32, ψ , {T, $\epsilon 1$, $\epsilon 2$, $\epsilon 3$ }]

$$\left\{ \left\{ \psi \rightarrow \text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, -\frac{3 T \alpha \epsilon 1 \lambda}{\rho 0} + \frac{3 T 0 \alpha \epsilon 1 \lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2 \lambda}{2 \rho 0} - \frac{2 T \alpha \epsilon 1 \mu}{\rho 0} + \frac{2 T 0 \alpha \epsilon 1 \mu}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2 \mu}{\rho 0} + \frac{2 \epsilon 1 \epsilon 2 \mu}{\rho 0} + \frac{2 \epsilon 1 \epsilon 3 \mu}{\rho 0} + C[1][T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]\right\} \right\}$$

Changement de nom

sol = sol /. C[1] → f1

$$\left\{ \left\{ \psi \rightarrow \text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, -\frac{3 T \alpha \epsilon 1 \lambda}{\rho 0} + \frac{3 T 0 \alpha \epsilon 1 \lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2 \lambda}{2 \rho 0} - \frac{2 T \alpha \epsilon 1 \mu}{\rho 0} + \frac{2 T 0 \alpha \epsilon 1 \mu}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2 \mu}{\rho 0} + \frac{2 \epsilon 1 \epsilon 2 \mu}{\rho 0} + \frac{2 \epsilon 1 \epsilon 3 \mu}{\rho 0} + f1[T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]\right\} \right\}$$

Assignment de la solution

Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]

$$\text{Function}\left[\{T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3\}, -\frac{3 T \alpha \epsilon 1 \lambda}{\rho 0} + \frac{3 T 0 \alpha \epsilon 1 \lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2 \lambda}{2 \rho 0} - \frac{2 T \alpha \epsilon 1 \mu}{\rho 0} + \frac{2 T 0 \alpha \epsilon 1 \mu}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1^2 \mu}{\rho 0} + \frac{2 \epsilon 1 \epsilon 2 \mu}{\rho 0} + \frac{2 \epsilon 1 \epsilon 3 \mu}{\rho 0} + f1[T, \epsilon 2, \epsilon 3]\right]$$

■ Résolution de eq2 (eq21)

eq21 = eq21 // Simplify

$$\epsilon 1 \lambda + T 0 \alpha (3 \lambda + 2 \mu) = 2 (1 + \epsilon 1) \mu + T \alpha (3 \lambda + 2 \mu) + \rho 0 f1^{(0,1,0)}[T, \epsilon 2, \epsilon 3]$$

solfl1 = DSolve[eq21, f1, {T, $\epsilon 2$, $\epsilon 3$ }]

$$\left\{ \left\{ f1 \rightarrow \text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \epsilon 2 \left(-\frac{3 T \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{3 T 0 \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1 \lambda}{\rho 0} - \frac{2 \mu}{\rho 0} - \frac{2 T \alpha \mu}{\rho 0} + \frac{2 T 0 \alpha \mu}{\rho 0} - \frac{2 \epsilon 1 \mu}{\rho 0} \right) + C[1][T, \epsilon 3]\right]\right\} \right\}$$

Changement de nom

solfl1 = solfl1 /. C[1] → f2

$$\left\{ \left\{ f1 \rightarrow \text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \epsilon 2 \left(-\frac{3 T \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{3 T 0 \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1 \lambda}{\rho 0} - \frac{2 \mu}{\rho 0} - \frac{2 T \alpha \mu}{\rho 0} + \frac{2 T 0 \alpha \mu}{\rho 0} - \frac{2 \epsilon 1 \mu}{\rho 0} \right) + f2[T, \epsilon 3]\right]\right\} \right\}$$

Assignment de la solution

Evaluate[solfl1[[1, 1, 1]]] = solfl1[[1, 1, 2]]

$$\text{Function}\left[\{T, \epsilon 2, \epsilon 3\}, \epsilon 2 \left(-\frac{3 T \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{3 T 0 \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1 \lambda}{\rho 0} - \frac{2 \mu}{\rho 0} - \frac{2 T \alpha \mu}{\rho 0} + \frac{2 T 0 \alpha \mu}{\rho 0} - \frac{2 \epsilon 1 \mu}{\rho 0} \right) + f2[T, \epsilon 3]\right]$$

■ Résolution de eq1

eq1 = eq1 // Simplify

$$\frac{1}{\rho 0} (3 T \alpha \lambda - 3 T 0 \alpha \lambda - \epsilon 1 \lambda + 2 \mu + 2 T \alpha \mu - 2 T 0 \alpha \mu + 2 \epsilon 1 \mu + \rho 0 f2^{(0,1)}[T, \epsilon 3]) = 0$$

solfl2 = DSolve[eq1, f2, {T, $\epsilon 3$ }]

$$\left\{ \left\{ f2 \rightarrow \text{Function}\left[\{T, \epsilon 3\}, \epsilon 3 \left(-\frac{3 T \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{3 T 0 \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1 \lambda}{\rho 0} - \frac{2 \mu}{\rho 0} - \frac{2 T \alpha \mu}{\rho 0} + \frac{2 T 0 \alpha \mu}{\rho 0} - \frac{2 \epsilon 1 \mu}{\rho 0} \right) + C[1][T]\right]\right\} \right\}$$

Changement de nom

solfl2 = solfl2 /. C[1] → f3

$$\left\{ \left\{ f2 \rightarrow \text{Function}\left[\{T, \epsilon 3\}, \epsilon 3 \left(-\frac{3 T \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{3 T 0 \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1 \lambda}{\rho 0} - \frac{2 \mu}{\rho 0} - \frac{2 T \alpha \mu}{\rho 0} + \frac{2 T 0 \alpha \mu}{\rho 0} - \frac{2 \epsilon 1 \mu}{\rho 0} \right) + f3[T]\right]\right\} \right\}$$

Assignation de la solution

Evaluate[solf2[[1, 1, 1]]] = solf2[[1, 1, 2]]

Function[{T, e3}, e3 $\left(-\frac{3 T \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{3 T 0 \alpha \lambda}{\rho 0} + \frac{\epsilon 1 \lambda}{\rho 0} - \frac{2 \mu}{\rho 0} - \frac{2 T \alpha \mu}{\rho 0} + \frac{2 T 0 \alpha \mu}{\rho 0} - \frac{2 \epsilon 1 \mu}{\rho 0} \right) + f3[T]$

■ Résultat

$\psi[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3]$ // Simplify

$$\frac{1}{2 \rho 0} \left(6 T 0 \alpha \epsilon 1 \lambda + \epsilon 1^2 \lambda + 6 T 0 \alpha \epsilon 2 \lambda + 2 \epsilon 1 \epsilon 2 \lambda + 6 T 0 \alpha \epsilon 3 \lambda + 2 \epsilon 1 \epsilon 3 \lambda + 4 T 0 \alpha \epsilon 1 \mu + \right.$$

$$\left. 2 \epsilon 1^2 \mu - 4 \epsilon 2 \mu + 4 T 0 \alpha \epsilon 2 \mu - 4 \epsilon 3 \mu + 4 T 0 \alpha \epsilon 3 \mu - 2 T \alpha (\epsilon 1 + \epsilon 2 + \epsilon 3) (3 \lambda + 2 \mu) + 2 \rho 0 f3[T] \right)$$

Vérifications :

eq1 // Simplify

True

eq2 // Simplify

True

eq3 // Simplify

True

Mise en forme lisible

$\psi[T, \epsilon 1, \epsilon 2, \epsilon 3]$ // Expand // Collect[#, { α, λ, μ }, Factor] & // Map[Factor, #] &

$$\frac{\epsilon 1 (\epsilon 1 + 2 \epsilon 2 + 2 \epsilon 3) \lambda}{2 \rho 0} + \frac{(\epsilon 1^2 - 2 \epsilon 2 - 2 \epsilon 3) \mu}{\rho 0} - \frac{(T - T 0) \alpha (\epsilon 1 + \epsilon 2 + \epsilon 3) (3 \lambda + 2 \mu)}{\rho 0} + f3[T]$$

Calculs en isotropie transverse

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail des calculs en isotropie transverse du chapitre 5 [p. 85].

Elle est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA[®] version 5.2.

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage.

Calculs en isotropie transverse

```
In[1]:= Off[General::spell] Off[General::spell];
```

```
In[2]:= $Assumptions = B3 > 0 && V1 V2 - V3 > 0 && V3 > 0;
```

La loi de comportement avec B est :

```
In[3]:=  $\sigma_B = 2 \rho_0 / \text{Sqrt}[B3] ($   

 $B3 \, dB3\psi_B G + (dB1\psi_B + B1 \, dB2\psi_B) B - dB2\psi_B B.B +$   

 $dI1B\psi_B (Nt.B + B.Nt - I1B Nt) + dI2B\psi_B (Nt.B.B + B.B.Nt - I2B Nt + B.Nt.B)$   

 $)$ 
```

```
Out[3]=  $\frac{1}{\sqrt{B3}} (2 \rho_0 (B (dB1\psi_B + B1 \, dB2\psi_B) + B3 \, dB3\psi_B G - dB2\psi_B B.B +$   

 $dI1B\psi_B (-I1B Nt + B.Nt + Nt.B) + dI2B\psi_B (-I2B Nt + B.B.Nt + B.Nt.B + Nt.B.B))$ 
```

Passage en V

■ Relations entre les invariants

```
In[4]:= B1 = V1^2 - 2 V2;
```

vérification

```
In[5]:= v1^2 + v2^2 + v3^2 == (v1 + v2 + v3)^2 - 2 (v1 v2 + v2 v3 + v3 v1) // Simplify
```

```
Out[5]= True
```

```
In[6]:= B2 = V2^2 - 2 V1 V3;
```

vérification :

```
In[7]:= v1^2 v2^2 + v2^2 v3^2 + v3^2 v1^2 ==  

(v1 v2 + v2 v3 + v3 v1)^2 - 2 (v1 + v2 + v3) v1 v2 v3 // Simplify
```

```
Out[7]= True
```

```
In[8]:= B3 = V3^2;
```

```
In[9]:= I1B = I2V;
```

```
In[10]:= I2B = (V1^2 - V2) I2V + (V3 - V1 V2) I1V + V1 V3;
```

vérification

```
In[11]:= {n1, n2, n3}.{{v1^4, 0, 0}, {0, v2^4, 0}, {0, 0, v3^4}}. {n1, n2, n3} ==  

((v1 + v2 + v3)^2 - (v1 v2 + v2 v3 + v3 v1))  

{n1, n2, n3}.{{v1^2, 0, 0}, {0, v2^2, 0}, {0, 0, v3^2}}. {n1, n2, n3} +  

(v1 v2 v3 - (v1 + v2 + v3) (v1 v2 + v2 v3 + v3 v1))  

{n1, n2, n3}.{{v1, 0, 0}, {0, v2, 0}, {0, 0, v3}}. {n1, n2, n3} +  

(v1 + v2 + v3) v1 v2 v3 /.  

n3^2 -> 1 - n1^2 - n2^2 // Simplify
```

```
Out[11]= True
```

■ Relations entre les dérivées partielles

```
In[12]:= eq1 = dTψV == dTψB D[T, T] + dB1ψB D[B1, T] +
          dB2ψB D[B2, T] + dB3ψB D[B3, T] + dI1BψB D[I1B, T] + dI2BψB D[I2B, T]
Out[12]= dTψV == dTψB

In[13]:= eq2 = dV1ψV == dTψB D[T, V1] + dB1ψB D[B1, V1] +
          dB2ψB D[B2, V1] + dB3ψB D[B3, V1] + dI1BψB D[I1B, V1] + dI2BψB D[I2B, V1]
Out[13]= dV1ψV == 2 dB1ψB V1 - 2 dB2ψB V3 + dI2BψB (2 I2V V1 - I1V V2 + V3)

In[14]:= eq3 = dV2ψV == dTψB D[T, V2] + dB1ψB D[B1, V2] +
          dB2ψB D[B2, V2] + dB3ψB D[B3, V2] + dI1BψB D[I1B, V2] + dI2BψB D[I2B, V2]
Out[14]= dV2ψV == -2 dB1ψB + dI2BψB (-I2V - I1V V1) + 2 dB2ψB V2

In[15]:= eq4 = dV3ψV == dTψB D[T, V3] + dB1ψB D[B1, V3] +
          dB2ψB D[B2, V3] + dB3ψB D[B3, V3] + dI1BψB D[I1B, V3] + dI2BψB D[I2B, V3]
Out[15]= dV3ψV == -2 dB2ψB V1 + dI2BψB (I1V + V1) + 2 dB3ψB V3

In[16]:= eq5 = dI1VψV == dTψB D[T, I1V] + dB1ψB D[B1, I1V] +
          dB2ψB D[B2, I1V] + dB3ψB D[B3, I1V] + dI1BψB D[I1B, I1V] + dI2BψB D[I2B, I1V]
Out[16]= dI1VψV == dI2BψB (-V1 V2 + V3)

In[17]:= eq6 = dI2VψV == dTψB D[T, I2V] + dB1ψB D[B1, I2V] +
          dB2ψB D[B2, I2V] + dB3ψB D[B3, I2V] + dI1BψB D[I1B, I2V] + dI2BψB D[I2B, I2V]
Out[17]= dI2VψV == dI1BψB + dI2BψB (V12 - V2)
```

■ résolution

```
In[18]:= sol =
          Solve[{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6}, {dTψB, dB1ψB, dB2ψB, dB3ψB, dI1BψB, dI2BψB}] // Simplify
Out[18]= {{dB3ψB →
          
$$\frac{(V1 V2 - V3) (dV1ψV V1 + dV2ψV V1^2 + dV3ψV V1 V2 - dV3ψV V3) + dI1VψV (I2V V1^2 + V1^2 V2 - I1V (V1^3 + V3))}{2 V3 (-V1 V2 + V3)^2},$$

          dTψB → dTψV, dI1BψB → dI2VψV + 
$$\frac{dI1VψV (V1^2 - V2)}{V1 V2 - V3},$$

          dB1ψB → 
$$\frac{(V1 V2 - V3) (dV1ψV V2 + dV2ψV V3) + dI1VψV (I2V (2 V1 V2 - V3) + V2 V3 - I1V (V2^2 + V1 V3))}{2 (-V1 V2 + V3)^2},$$

          dB2ψB → 
$$\frac{(dV1ψV + dV2ψV V1) (V1 V2 - V3) + dI1VψV (I2V V1 - I1V (V1^2 + V2) + V3)}{2 (-V1 V2 + V3)^2}, dI2BψB → -\frac{dI1VψV}{V1 V2 - V3}}}}$$

```

■ remplacements

```
In[19]:= σV = σB /. sol[[1]] /.
      Nt.B.B → (V1^2 - V2) Nt.V.V + (V3 - V1 V2) Nt.V + V1 V3 Nt /.
      B.B.Nt → (V1^2 - V2) V.V.Nt + (V3 - V1 V2) V.Nt + V1 V3 Nt /.
      B.Nt.B → V.V.Nt.V.V /.
      Nt.B → Nt.V.V /.
      B.Nt → V.V.Nt /.
      B.B → (V1^2 - V2) V.V + (V3 - V1 V2) V + V1 V3 G /.
      B → V.V //
Collect[#, {G, V, V.V, Nt, Nt.V, V.Nt, V.V.Nt, Nt.V.V,
      V.V.Nt, V.V.Nt.V.V, ρ0, dV1ψV, dV2ψV, dV3ψV, dI1VψV, dI2VψV}, Simplify] &
```

$$\text{Out[19]} = G \left(dV3\psi V + \frac{dI1V\psi V (I1V + V1)}{V1 V2 - V3} \right) \rho_0 + V \left(\frac{dV1\psi V}{V3} + \frac{dV2\psi V V1}{V3} + \frac{dI1V\psi V (I2V V1 - I1V (V1^2 + V2) + V3)}{(V1 V2 - V3) V3} \right) \rho_0 +$$

$$Nt \left(-\frac{2 dI2V\psi V I2V}{V3} + \frac{2 dI1V\psi V (I1V V1 V2 - I1V V3 + V1 V3)}{V3 (-V1 V2 + V3)} \right) \rho_0 +$$

$$\frac{2 dI1V\psi V \rho_0 Nt.V}{V3} + \frac{2 dI1V\psi V \rho_0 V.Nt}{V3} + \left(-\frac{dV2\psi V}{V3} + \frac{dI1V\psi V (I2V + I1V V1)}{V1 V2 V3 - V3^2} \right) \rho_0 V.V +$$

$$\frac{2 dI2V\psi V \rho_0 Nt.V.V}{V3} + \frac{2 dI2V\psi V \rho_0 V.V.Nt}{V3} + \frac{2 dI1V\psi V \rho_0 V.V.Nt.V.V}{V3 (-V1 V2 + V3)}$$

Passage en ϵ^V

■ Relations entre les invariants

```
In[20]:= V1 = 3 + e1;
```

```
In[21]:= V2 = 3 + 2 e1 + e2;
```

Vérification

```
In[22]:= (1 + e1) (1 + e2) + (1 + e2) (1 + e3) + (1 + e3) (1 + e1) // Expand
```

```
Out[22]= 3 + 2 e1 + 2 e2 + e1 e2 + 2 e3 + e1 e3 + e2 e3
```

```
In[23]:= V3 = 1 + e1 + e2 + e3;
```

vérification

```
In[24]:= (1 + e1) (1 + e2) (1 + e3) // Expand
```

```
Out[24]= 1 + e1 + e2 + e1 e2 + e3 + e1 e3 + e2 e3 + e1 e2 e3
```

```
In[25]:= I1V = 1 + I1e
```

```
Out[25]= 1 + I1e
```

```
In[26]:= I2V = 1 + 2 I1e + I2e
```

```
Out[26]= 1 + 2 I1e + I2e
```

■ Relations entre les dérivées partielles

```

In[27]:= eq1 = dTψε == dTψV D[T, T] + dV1ψV D[V1, T] +
          dV2ψV D[V2, T] + dV3ψV D[V3, T] + dI1VψV D[I1V, T] + dI2VψV D[I2V, T]

Out[27]= dTψε == dTψV

In[28]:= eq2 = de1ψε == dTψV D[T, ε1] + dV1ψV D[V1, ε1] +
          dV2ψV D[V2, ε1] + dV3ψV D[V3, ε1] + dI1VψV D[I1V, ε1] + dI2VψV D[I2V, ε1]

Out[28]= de1ψε == dV1ψV + 2 dV2ψV + dV3ψV

In[29]:= eq3 = de2ψε == dTψV D[T, ε2] + dV1ψV D[V1, ε2] +
          dV2ψV D[V2, ε2] + dV3ψV D[V3, ε2] + dI1VψV D[I1V, ε2] + dI2VψV D[I2V, ε2]

Out[29]= de2ψε == dV2ψV + dV3ψV

In[30]:= eq4 = de3ψε == dTψV D[T, ε3] + dV1ψV D[V1, ε3] +
          dV2ψV D[V2, ε3] + dV3ψV D[V3, ε3] + dI1VψV D[I1V, ε3] + dI2VψV D[I2V, ε3]

Out[30]= de3ψε == dV3ψV

In[31]:= eq5 = dI1εψε == dTψV D[T, I1ε] + dV1ψV D[V1, I1ε] +
          dV2ψV D[V2, I1ε] + dV3ψV D[V3, I1ε] + dI1VψV D[I1V, I1ε] + dI2VψV D[I2V, I1ε]

Out[31]= dI1εψε == dI1VψV + 2 dI2VψV

In[32]:= eq6 = dI2εψε == dTψV D[T, I2ε] + dV1ψV D[V1, I2ε] +
          dV2ψV D[V2, I2ε] + dV3ψV D[V3, I2ε] + dI1VψV D[I1V, I2ε] + dI2VψV D[I2V, I2ε]

Out[32]= dI2εψε == dI2VψV

```

■ Résolution

```

In[33]:= sol = Solve[{eq1, eq2, eq3, eq4, eq5, eq6}, {dTψV, dV1ψV, dV2ψV, dV3ψV, dI1VψV, dI2VψV}]

Out[33]= {{dTψV → dTψε, dV1ψV → de1ψε - 2 de2ψε + de3ψε,
          dV2ψV → de2ψε - de3ψε, dV3ψV → de3ψε, dI1VψV → dI1εψε - 2 dI2εψε, dI2VψV → dI2εψε}}

```

■ Remplacements

```

In[34]:= σε = σV /. sol[[1]] /.
          V.V.Nt.V.V → Distribute[(G + ε).(G + ε).Nt.(G + ε).(G + ε)] /.
          Nt.V.V → Distribute[Nt.(G + ε).(G + ε)] /.
          V.V.Nt → Distribute[(G + ε).(G + ε).Nt] /.
          V.Nt → Distribute[(G + ε).Nt] /.
          Nt.V → Distribute[Nt.(G + ε)] /.
          V.V → Distribute[(G + ε).(G + ε)] /.
          V → G + ε /.
          Dot[x___, G, y___] → Dot[x, y] /. Dot[x___, G, y___] → Dot[x, y] /.
          Dot[x___, G, y___] → Dot[x, y] /. Dot[x___, G, y___] → Dot[x, y] //
          Collect[#, {G, Nt, ε, ε.Nt, Nt.ε, ε.ε, ε.Nt.ε, ε.ε.Nt, Nt.ε.ε, ε.ε.Nt.ε,
          ε.Nt.ε.ε, ε.ε.Nt.ε.ε, ρ0, de1ψε, de2ψε, de3ψε, dI1εψε, dI2εψε}, Factor] &

```


In[35]:= **K0 = Coefficient[σϵ, G]**

$$\text{Out[35]} = \left(\frac{d\epsilon_1\psi\epsilon}{1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + \frac{d\epsilon_2\psi\epsilon_1}{1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + \frac{d\epsilon_3\psi\epsilon(\epsilon_2+\epsilon_3)}{1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} - \frac{dI1\epsilon\psi\epsilon(-4I2\epsilon+4I1\epsilon_1-I2\epsilon_1+I1\epsilon_1^2-4\epsilon_2-\epsilon_1\epsilon_2-5\epsilon_3-I1\epsilon_3-\epsilon_1\epsilon_3)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} + \frac{2dI2\epsilon\psi\epsilon(-4I2\epsilon+4I1\epsilon_1-I2\epsilon_1+I1\epsilon_1^2-4\epsilon_2-\epsilon_1\epsilon_2-5\epsilon_3-I1\epsilon_3-\epsilon_1\epsilon_3)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} \right) \rho_0$$

In[36]:= **K1 = Coefficient[σϵ, Nt]**

$$\text{Out[36]} = \left(-\frac{2dI2\epsilon\psi\epsilon(8I2\epsilon+8I2\epsilon_1+2I2\epsilon_1^2-4\epsilon_2+2I2\epsilon_2-\epsilon_1\epsilon_2+I2\epsilon_1\epsilon_2-7\epsilon_3-I2\epsilon_3-2\epsilon_1\epsilon_3)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} - \frac{2dI1\epsilon\psi\epsilon(-4+8I1\epsilon-4\epsilon_1+8I1\epsilon_1-\epsilon_1^2+2I1\epsilon_1^2+\epsilon_2+2I1\epsilon_2+I1\epsilon_1\epsilon_2+4\epsilon_3-I1\epsilon_3+\epsilon_1\epsilon_3)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} \right) \rho_0$$

In[37]:= **K2 = Coefficient[σϵ, ϵ]**

$$\text{Out[37]} = \left(\frac{d\epsilon_1\psi\epsilon}{1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + \frac{d\epsilon_2\psi\epsilon(-1+\epsilon_1)}{1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} - \frac{d\epsilon_3\psi\epsilon_1}{1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} - \frac{dI1\epsilon\psi\epsilon(-4I1\epsilon-5I2\epsilon+4\epsilon_1+4I1\epsilon_1-I2\epsilon_1+\epsilon_1^2+I1\epsilon_1^2+I1\epsilon_2-\epsilon_3)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} + \frac{2dI2\epsilon\psi\epsilon(-4I1\epsilon-5I2\epsilon+4\epsilon_1+4I1\epsilon_1-I2\epsilon_1+\epsilon_1^2+I1\epsilon_1^2+I1\epsilon_2-\epsilon_3)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} \right) \rho_0$$

In[38]:= **K3 = Coefficient[σϵ, ϵ.Nt]**

$$\text{Out[38]} = \left(\frac{8dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} + \frac{2dI1\epsilon\psi\epsilon(6+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} \right) \rho_0$$

In[39]:= **K31 = Coefficient[σϵ, Nt.ϵ]**

$$\text{Out[39]} = \left(\frac{8dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} + \frac{2dI1\epsilon\psi\epsilon(6+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} \right) \rho_0$$

In[40]:= **K3 == K31**

Out[40]= True

In[41]:= **K4 = Coefficient[σϵ, ϵ.ϵ]**

$$\text{Out[41]} = \left(-\frac{d\epsilon_2\psi\epsilon}{1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + \frac{d\epsilon_3\psi\epsilon}{1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3} + \frac{dI1\epsilon\psi\epsilon(4+5I1\epsilon+I2\epsilon+\epsilon_1+I1\epsilon_1)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} - \frac{2dI2\epsilon\psi\epsilon(4+5I1\epsilon+I2\epsilon+\epsilon_1+I1\epsilon_1)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} \right) \rho_0$$

In[42]:= **K5 = Coefficient[σϵ, ϵ.Nt.ϵ]**

$$\text{Out[42]} = \left(-\frac{8dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} + \frac{16dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} \right) \rho_0$$

In[43]:= **K6 = Coefficient[σϵ, ϵ.ϵ.Nt]**

$$\text{Out[43]} = \left(-\frac{2dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} + \frac{2dI2\epsilon\psi\epsilon(10+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)}{(8+8\epsilon_1+2\epsilon_1^2+2\epsilon_2+\epsilon_1\epsilon_2-\epsilon_3)(1+\epsilon_1+\epsilon_2+\epsilon_3)} \right) \rho_0$$

IsoTrans.nb

7

In[44]:= **K61 = Coefficient[σe, Nt.ε.ε]**

$$\text{Out[44]} = \left(-\frac{2 \, dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8 + 8 \, \epsilon1 + 2 \, \epsilon1^2 + 2 \, \epsilon2 + \epsilon1 \, \epsilon2 - \epsilon3) (1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)} + \frac{2 \, dI2\epsilon\psi\epsilon (10 + 8 \, \epsilon1 + 2 \, \epsilon1^2 + 2 \, \epsilon2 + \epsilon1 \, \epsilon2 - \epsilon3)}{(8 + 8 \, \epsilon1 + 2 \, \epsilon1^2 + 2 \, \epsilon2 + \epsilon1 \, \epsilon2 - \epsilon3) (1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)} \right) \rho0$$

In[45]:= **K6 == K61**

Out[45]= True

In[46]:= **K7 = Coefficient[σe, ε.ε.Nt.ε]**

$$\text{Out[46]} = \left(-\frac{4 \, dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8 + 8 \, \epsilon1 + 2 \, \epsilon1^2 + 2 \, \epsilon2 + \epsilon1 \, \epsilon2 - \epsilon3) (1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)} + \frac{8 \, dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8 + 8 \, \epsilon1 + 2 \, \epsilon1^2 + 2 \, \epsilon2 + \epsilon1 \, \epsilon2 - \epsilon3) (1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)} \right) \rho0$$

In[47]:= **K71 = Coefficient[σe, ε.Nt.ε.ε]**

$$\text{Out[47]} = \left(-\frac{4 \, dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8 + 8 \, \epsilon1 + 2 \, \epsilon1^2 + 2 \, \epsilon2 + \epsilon1 \, \epsilon2 - \epsilon3) (1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)} + \frac{8 \, dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8 + 8 \, \epsilon1 + 2 \, \epsilon1^2 + 2 \, \epsilon2 + \epsilon1 \, \epsilon2 - \epsilon3) (1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)} \right) \rho0$$

In[48]:= **K7 == K71**

Out[48]= True

In[49]:= **K7 == K5 / 2 // Simplify**

Out[49]= True

In[50]:= **K8 = Coefficient[σe, ε.ε.Nt.ε.ε]**

$$\text{Out[50]} = \left(-\frac{2 \, dI1\epsilon\psi\epsilon}{(8 + 8 \, \epsilon1 + 2 \, \epsilon1^2 + 2 \, \epsilon2 + \epsilon1 \, \epsilon2 - \epsilon3) (1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)} + \frac{4 \, dI2\epsilon\psi\epsilon}{(8 + 8 \, \epsilon1 + 2 \, \epsilon1^2 + 2 \, \epsilon2 + \epsilon1 \, \epsilon2 - \epsilon3) (1 + \epsilon1 + \epsilon2 + \epsilon3)} \right) \rho0$$

In[51]:= **K8 == K7 / 2 // Simplify**

Out[51]= True

On retrouve la loi linéaire isotrope si $dI2\epsilon\psi\epsilon = 0$ et $dI1\epsilon\psi\epsilon = 0$:In[52]:= **σe /. dI2εψε → 0 /. dI1εψε → 0 /. 1 + ε1 + ε2 + ε3 → Kv // Collect[#, {G, ε, ε.ε, ρ0, Kv, dε1ψε, dε2ψε}, Factor] &**

$$\text{Out[52]} = \frac{\epsilon (d\epsilon1\psi\epsilon + d\epsilon2\psi\epsilon (-1 + \epsilon1) - d\epsilon3\psi\epsilon \epsilon1) \rho0}{Kv} + \frac{G (d\epsilon1\psi\epsilon + d\epsilon2\psi\epsilon \epsilon1 + d\epsilon3\psi\epsilon (\epsilon2 + \epsilon3)) \rho0}{Kv} + \frac{(-d\epsilon2\psi\epsilon + d\epsilon3\psi\epsilon) \rho0 \epsilon. \epsilon}{Kv}$$

Recherche d'une loi linéaire en ϵ^V (en déformations finies)

In[53]:= **eq1 = 0 == K4 // Simplify**

$$\text{Out[53]} = (dI1\epsilon\psi\epsilon (4 + I2\epsilon + \epsilon1 + I1\epsilon (5 + \epsilon1)) - 2 \, dI2\epsilon\psi\epsilon (4 + I2\epsilon + \epsilon1 + I1\epsilon (5 + \epsilon1)) - (d\epsilon2\psi\epsilon - d\epsilon3\psi\epsilon) (8 + 2 \, \epsilon1^2 + 2 \, \epsilon2 + \epsilon1 (8 + \epsilon2) - \epsilon3)) \rho0 = 0$$

In[54]:= **eq2 = 0 == K5 // Simplify**

$$\text{Out[54]} = dI1\epsilon\psi\epsilon \rho0 = 2 \, dI2\epsilon\psi\epsilon \rho0$$

IsoTrans.nb

8

```
In[55]:= eq3 = 0 == K6 // Simplify
```

```
Out[55]= (dI1εψε - dI2εψε (10 + 2 ε12 + 2 ε2 + ε1 (8 + ε2) - ε3)) ρ0 == 0
```

```
In[56]:= sol = Solve[{eq1, eq2, eq3}, {de2ψε, de3ψε, dI1εψε, dI2εψε}]
```

```
Solve::svars : Equations may not give solutions for all "solve" variables. Plus...
```

```
Out[56]= {{de3ψε → de2ψε, dI1εψε → 0, dI2εψε → 0}}
```

L'énergie libre $\psi\epsilon$ n'est fonction ni de $I1\epsilon$ ni de $I2\epsilon$!

Calculs de distorsions maximales particulières en anisotropie

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail des calculs effectués dans l'annexe E [p. 169].

Elle est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA[®] version 5.2.

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage, à l'exception des quelques opérations tensorielles utilisant la bibliothèque Tens3D, mais qui peuvent être aisément traduites en opérations matricielles.

Distorsions maximales en isotropie

Préparations

```
In[1]:= Needs["Tens3D`"]
```

```
In[2]:= G = MetricTensor; H = OrientationTensor; B0 = CanonicalBasis;
```

```
In[3]:= Off[General::spell]
```

Soit un tenseur de déformation \mathbf{U} défini par ses composantes dans une base propre :

```
In[4]:= $Assumptions =  $\lambda_1 > 0 \ \&\& \ \lambda_2 > 0 \ \&\& \ \lambda_3 > 0$ ;
```

```
In[5]:= U = DefineTensor[{{ $\lambda_1, 0, 0$ }, { $0, \lambda_2, 0$ }, { $0, 0, \lambda_3$ }}, {1, 1}, B0];
```

Soit \mathbf{n}_0 la direction initiale d'anisotropie, définie par ses composantes dans la base propre du tenseur de déformation \mathbf{U} :

```
In[6]:= n0 = DefineTensor[
  {n01 / Sqrt[n01^2 + n02^2 + n03^2], n02 / Sqrt[n01^2 + n02^2 + n03^2],
   n03 / Sqrt[n01^2 + n02^2 + n03^2]}, {1}, B0];
```

Soit un vecteur $\mathbf{a}[\mu]$ quelconque non colinéaire à \mathbf{n}_0 , défini par ses composantes dans une base propre du tenseur de déformation \mathbf{U} :

```
In[7]:= a = DefineTensor[{a1[ $\mu$ ], a2[ $\mu$ ], a3[ $\mu$ ]}, {1}, B0];
```

```
In[8]:= x = a  $\wedge$  n0;
```

On engendre tous les vecteurs unitaires orthogonaux à \mathbf{n}_0 par :

```
In[9]:= u0 = (1 / EuclidianNorm[x])  $\circ$  x;
```

On complète le système de vecteurs orthonormés $(\mathbf{n}_0, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$:

```
In[10]:= v0 = n0  $\wedge$  u0;
```

Vérifications :

```
In[11]:= {n0.u0, n0.v0, v0.u0, u0.u0, v0.v0, n0.n0} // Simplify
```

```
Out[11]= {0, 0, 0, 1, 1, 1}
```

La dilatation linéique dans la direction matérielle initiale $\mathbf{u0}$ est :

```
In[12]:= K1u = EuclidianNorm[U.u0]
```

```
Out[12]=  $\sqrt{\left( (n03^2 \lambda2^2 + n02^2 \lambda3^2) a1[\mu]^2 + (n03^2 \lambda1^2 + n01^2 \lambda3^2) a2[\mu]^2 - 2 n02 n03 \lambda1^2 a2[\mu] a3[\mu] + (n02^2 \lambda1^2 + n01^2 \lambda2^2) a3[\mu]^2 - 2 n01 a1[\mu] (n02 \lambda3^2 a2[\mu] + n03 \lambda2^2 a3[\mu]) \right) / \left( (n02^2 + n03^2) a1[\mu]^2 + (n01^2 + n03^2) a2[\mu]^2 - 2 n02 n03 a2[\mu] a3[\mu] + (n01^2 + n02^2) a3[\mu]^2 - 2 n01 a1[\mu] (n02 a2[\mu] + n03 a3[\mu]) \right)}$ 
```

La dilatation linéique dans la direction matérielle initiale $\mathbf{v0}$ est :

```
In[13]:= K1v = EuclidianNorm[U.v0]
```

```
Out[13]=  $\sqrt{\left( \left( \lambda3^2 (n01 n03 a1[\mu] + n02 n03 a2[\mu] - (n01^2 + n02^2) a3[\mu])^2 + \lambda2^2 (n01 n02 a1[\mu] - (n01^2 + n03^2) a2[\mu] + n02 n03 a3[\mu])^2 + \lambda1^2 ((n02^2 + n03^2) a1[\mu] - n01 (n02 a2[\mu] + n03 a3[\mu]))^2 \right) / \left( (n01^2 + n02^2 + n03^2) ((n02^2 + n03^2) a1[\mu]^2 + (n01^2 + n03^2) a2[\mu]^2 - 2 n02 n03 a2[\mu] a3[\mu] + (n01^2 + n02^2) a3[\mu]^2 - 2 n01 a1[\mu] (n02 a2[\mu] + n03 a3[\mu])) \right) \right)}$ 
```

La dilatation linéique dans la direction matérielle initiale $\mathbf{n0}$ est :

```
In[14]:= K1n = EuclidianNorm[U.n0]
```

```
Out[14]=  $\sqrt{\frac{n01^2 \lambda1^2 + n02^2 \lambda2^2 + n03^2 \lambda3^2}{n01^2 + n02^2 + n03^2}}$ 
```

La dilatation surfacique de la facette de direction initiale $\mathbf{n0}$ est :

```
In[15]:= Ksn = I3[U] EuclidianNorm[Inverse[U].n0]
```

```
Out[15]=  $\lambda1 \lambda2 \lambda3 \sqrt{\frac{n03^2 \lambda1^2 \lambda2^2 + (n02^2 \lambda1^2 + n01^2 \lambda2^2) \lambda3^2}{(n01^2 + n02^2 + n03^2) \lambda1^2 \lambda2^2 \lambda3^2}}$ 
```

La dilatation surfacique de la facette de direction initiale $\mathbf{v0}$ est :

DistorsionsMaxAnisotropie.nb

3

```

In[16]:= Ksv = EuclidianNorm[I3[U] ◦ Inverse[U].v0] // FullSimplify
Out[16]=  $\sqrt{\left( (\lambda^2 \lambda^2 (n_01 n_03 a_1[\mu] + n_02 n_03 a_2[\mu] - (n_01^2 + n_02^2) a_3[\mu])^2 + \right.$ 
 $\lambda^2 \lambda^3^2 (n_01 n_02 a_1[\mu] - (n_01^2 + n_03^2) a_2[\mu] + n_02 n_03 a_3[\mu])^2 +$ 
 $\lambda^2 \lambda^3^2 ((n_02^2 + n_03^2) a_1[\mu] - n_01 (n_02 a_2[\mu] + n_03 a_3[\mu]))^2 \Big) /$ 
 $\left( (n_01^2 + n_02^2 + n_03^2) ((n_02^2 + n_03^2) a_1[\mu]^2 + (n_01^2 + n_03^2) a_2[\mu]^2 - \right.$ 
 $2 n_02 n_03 a_2[\mu] a_3[\mu] + (n_01^2 + n_02^2) a_3[\mu]^2 -$ 
 $2 n_01 a_1[\mu] (n_02 a_2[\mu] + n_03 a_3[\mu])) \Big)}$ 

In[17]:= Kv = I3[U]
Out[17]=  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ 

```

Distorsion angulaire maximale du couple (n_0, u_0)

Distorsion angulaire

```

In[18]:=  $\delta a_1 = \text{Sqrt}[(KluKln / Ksv)^2 // Simplify]$ 
Out[18]=  $\sqrt{\left( (n_01^2 \lambda_1^2 + n_02^2 \lambda_2^2 + n_03^2 \lambda_3^2) \right.$ 
 $(n_03^2 \lambda_2^2 + n_02^2 \lambda_3^2) a_1[\mu]^2 + (n_03^2 \lambda_1^2 + n_01^2 \lambda_3^2) a_2[\mu]^2 -$ 
 $2 n_02 n_03 \lambda_1^2 a_2[\mu] a_3[\mu] + (n_02^2 \lambda_1^2 + n_01^2 \lambda_2^2) a_3[\mu]^2 -$ 
 $2 n_01 a_1[\mu] (n_02 \lambda_3^2 a_2[\mu] + n_03 \lambda_2^2 a_3[\mu])) \Big) /$ 
 $\left( \lambda^2 \lambda^2 (n_01 n_03 a_1[\mu] + n_02 n_03 a_2[\mu] - (n_01^2 + n_02^2) a_3[\mu])^2 + \right.$ 
 $\lambda^2 \lambda^3^2 (n_01 n_02 a_1[\mu] - (n_01^2 + n_03^2) a_2[\mu] + n_02 n_03 a_3[\mu])^2 +$ 
 $\lambda^2 \lambda^3^2 ((n_02^2 + n_03^2) a_1[\mu] - n_01 (n_02 a_2[\mu] + n_03 a_3[\mu]))^2 \Big)}$ 

```

Dérivée par rapport à μ :

```

In[19]:= X = D[ $\delta a_1$ ,  $\mu$ ] // Factor // Numerator
Out[19]=  $-(n_01^2 \lambda_1^2 + n_02^2 \lambda_2^2 + n_03^2 \lambda_3^2)$ 
 $(-n_02 n_03 \lambda_2^2 a_1[\mu] + n_02 n_03 \lambda_3^2 a_1[\mu] + n_01 n_03 \lambda_1^2 a_2[\mu] -$ 
 $n_01 n_03 \lambda_3^2 a_2[\mu] - n_01 n_02 \lambda_1^2 a_3[\mu] + n_01 n_02 \lambda_2^2 a_3[\mu])$ 
 $(-n_01 n_03^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 a_1[\mu] - n_01 n_02^2 \lambda_1^2 \lambda_3^2 a_1[\mu] + n_01 n_02^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 a_1[\mu] +$ 
 $n_01 n_03^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 a_1[\mu] - n_02 n_03^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 a_2[\mu] + n_01^2 n_02 \lambda_1^2 \lambda_3^2 a_2[\mu] +$ 
 $n_02 n_03^2 \lambda_1^2 \lambda_3^2 a_2[\mu] - n_01^2 n_02 \lambda_2^2 \lambda_3^2 a_2[\mu] + n_01^2 n_03 \lambda_1^2 \lambda_2^2 a_3[\mu] +$ 
 $n_02^2 n_03 \lambda_1^2 \lambda_2^2 a_3[\mu] - n_02^2 n_03 \lambda_1^2 \lambda_3^2 a_3[\mu] - n_01^2 n_03 \lambda_2^2 \lambda_3^2 a_3[\mu])$ 
 $(-n_03 a_2[\mu] a_1'[\mu] + n_02 a_3[\mu] a_1'[\mu] + n_03 a_1[\mu] a_2'[\mu] -$ 
 $n_01 a_3[\mu] a_2'[\mu] - n_02 a_1[\mu] a_3'[\mu] + n_01 a_2[\mu] a_3'[\mu])$ 

```

Le résultat est un produit de 5 facteurs

```
In[20]:= {Head[X], Length[X]}
```

```
Out[20]= {Times, 5}
```

```
In[21]:= X[[1]]
```

```
Out[21]= -1
```

```
In[22]:= X[[2]]
```

```
Out[22]= n012 λ12 + n022 λ22 + n032 λ32
```

```
In[23]:= X[[3]]
```

```
Out[23]= -n02 n03 λ22 a1[μ] + n02 n03 λ32 a1[μ] + n01 n03 λ12 a2[μ] -  
n01 n03 λ32 a2[μ] - n01 n02 λ12 a3[μ] + n01 n02 λ22 a3[μ]
```

```
In[24]:= sol1 = Solve[X[[3]] == 0, a1[μ]]
```

```
Out[24]= {{a1[μ] →  $\frac{1}{n02 n03 (\lambda2^2 - \lambda3^2)} (n01 n03 \lambda1^2 a2[\mu] -$   
 $n01 n03 \lambda3^2 a2[\mu] - n01 n02 \lambda1^2 a3[\mu] + n01 n02 \lambda2^2 a3[\mu])$ }}
```

Cet extrémum est un minimum :

```
In[25]:= δa1 /. sol1[[1]] // Simplify
```

```
Out[25]= 1
```

```
In[26]:= X[[4]]
```

```
Out[26]= -n01 n032 λ12 λ22 a1[μ] - n01 n022 λ12 λ32 a1[μ] + n01 n022 λ22 λ32 a1[μ] +  
n01 n032 λ22 λ32 a1[μ] - n02 n032 λ12 λ22 a2[μ] + n012 n02 λ12 λ32 a2[μ] +  
n02 n032 λ12 λ32 a2[μ] - n012 n02 λ22 λ32 a2[μ] + n012 n03 λ12 λ22 a3[μ] +  
n022 n03 λ12 λ22 a3[μ] - n022 n03 λ12 λ32 a3[μ] - n012 n03 λ22 λ32 a3[μ]
```

```
In[27]:= sol = Solve[X[[4]] == 0, a1[μ]]
```

```
Out[27]= {{a1[μ] →  
(-n02 n032 λ12 λ22 a2[μ] + n012 n02 λ12 λ32 a2[μ] + n02 n032 λ12 λ32 a2[μ] -  
n012 n02 λ22 λ32 a2[μ] + n012 n03 λ12 λ22 a3[μ] + n022 n03 λ12 λ22 a3[μ] -  
n022 n03 λ12 λ32 a3[μ] - n012 n03 λ22 λ32 a3[μ]) /  
(n01 (n032 λ12 λ22 + n022 λ12 λ32 - n022 λ22 λ32 - n032 λ22 λ32))}}
```

```
In[28]:= δa1max = δa1 /. sol[[1]] // FullSimplify
```

```
Out[28]=  $\sqrt{\frac{(n01^2 \lambda1^2 + n02^2 \lambda2^2 + n03^2 \lambda3^2) (n03^2 \lambda1^2 \lambda2^2 + (n02^2 \lambda1^2 + n01^2 \lambda2^2) \lambda3^2)}{(n01^2 + n02^2 + n03^2)^2 \lambda1^2 \lambda2^2 \lambda3^2}}$ 
```

Interprétation :

DistorsionsMaxAnisotropie.nb

5

`In[29]:= $\delta a_{1max}^2 == K_{ln}^2 K_{sn}^2 / K_v^2$`

`Out[29]= True`

La distorsion angulaire maximale est donc : $\delta a_{1max} = \frac{K_{ln} K_{sn}}{K_v}$

`In[30]:= $X[[5]] // Collect[\#, \{a1'[\mu], a2'[\mu], a3'[\mu]\}] \&$`

`Out[30]= $(-n_{03} a_2[\mu] + n_{02} a_3[\mu]) a_1'[\mu] +$
 $(n_{03} a_1[\mu] - n_{01} a_3[\mu]) a_2'[\mu] + (-n_{02} a_1[\mu] + n_{01} a_2[\mu]) a_3'[\mu]$`

`In[31]:= $eq1 = Coefficient[X[[5]], a1'[\mu]] == 0$`

`Out[31]= $-n_{03} a_2[\mu] + n_{02} a_3[\mu] == 0$`

`In[32]:= $eq2 = Coefficient[X[[5]], a2'[\mu]] == 0$`

`Out[32]= $n_{03} a_1[\mu] - n_{01} a_3[\mu] == 0$`

`In[33]:= $eq3 = Coefficient[X[[5]], a3'[\mu]] == 0$`

`Out[33]= $-n_{02} a_1[\mu] + n_{01} a_2[\mu] == 0$`

Ces trois équations ne sont jamais nulles car \mathbf{a}_0 est non colinéaire à \mathbf{n}_0

Distorsion angulaire maximale du couple (u_0, v_0)

`In[34]:= $\delta a_2 = Sqrt[(K_{lu} K_{lv} / K_{sn})^2 // Simplify]$`

`Out[34]= $\sqrt{\left(\left((n_{03}^2 \lambda_2^2 + n_{02}^2 \lambda_3^2) a_1[\mu]^2 + (n_{03}^2 \lambda_1^2 + n_{01}^2 \lambda_3^2) a_2[\mu]^2 - \right. \right.}$
 $2 n_{02} n_{03} \lambda_1^2 a_2[\mu] a_3[\mu] + (n_{02}^2 \lambda_1^2 + n_{01}^2 \lambda_2^2) a_3[\mu]^2 -$
 $2 n_{01} a_1[\mu] (n_{02} \lambda_3^2 a_2[\mu] + n_{03} \lambda_2^2 a_3[\mu]) \left. \right) \left(\lambda_3^2 (n_{01} n_{03} a_1[\mu] + n_{02} n_{03} a_2[\mu] - (n_{01}^2 + n_{02}^2) a_3[\mu])^2 + \right.}$
 $\lambda_2^2 (n_{01} n_{02} a_1[\mu] - (n_{01}^2 + n_{03}^2) a_2[\mu] + n_{02} n_{03} a_3[\mu])^2 +$
 $\left. \lambda_1^2 ((n_{02}^2 + n_{03}^2) a_1[\mu] - n_{01} (n_{02} a_2[\mu] + n_{03} a_3[\mu]))^2 \right) \left((n_{03}^2 \lambda_1^2 \lambda_2^2 + (n_{02}^2 \lambda_1^2 + n_{01}^2 \lambda_2^2) \lambda_3^2) \right.}$
 $\left. ((n_{02}^2 + n_{03}^2) a_1[\mu]^2 + (n_{01}^2 + n_{03}^2) a_2[\mu]^2 - 2 n_{02} n_{03} a_2[\mu] a_3[\mu] + \right.}$
 $\left. (n_{01}^2 + n_{02}^2) a_3[\mu]^2 - 2 n_{01} a_1[\mu] (n_{02} a_2[\mu] + n_{03} a_3[\mu]))^2 \right) \right)$`

Dérivée par rapport à μ

```
In[35]:= Y = D[δa2, μ] // Factor // Numerator
```

```
Out[35]= (n01 n02 n03 λ22 a1[μ]2 - n01 n02 n03 λ32 a1[μ]2 + n022 n03 λ12 a1[μ] a2[μ] +
n033 λ12 a1[μ] a2[μ] - n012 n03 λ22 a1[μ] a2[μ] - n033 λ22 a1[μ] a2[μ] +
n012 n03 λ32 a1[μ] a2[μ] - n022 n03 λ32 a1[μ] a2[μ] -
n01 n02 n03 λ12 a2[μ]2 + n01 n02 n03 λ32 a2[μ]2 - n023 λ12 a1[μ] a3[μ] -
n02 n032 λ12 a1[μ] a3[μ] - n012 n02 λ22 a1[μ] a3[μ] +
n02 n032 λ22 a1[μ] a3[μ] + n012 n02 λ32 a1[μ] a3[μ] +
n023 λ32 a1[μ] a3[μ] + n01 n022 λ12 a2[μ] a3[μ] - n01 n032 λ12 a2[μ] a3[μ] +
n013 λ22 a2[μ] a3[μ] + n01 n032 λ22 a2[μ] a3[μ] - n013 λ32 a2[μ] a3[μ] -
n01 n022 λ32 a2[μ] a3[μ] + n01 n02 n03 λ12 a3[μ]2 - n01 n02 n03 λ22 a3[μ]2)
(n024 λ12 a1[μ]2 + 2 n022 n032 λ12 a1[μ]2 + n034 λ12 a1[μ]2 +
n012 n022 λ22 a1[μ]2 - n012 n032 λ22 a1[μ]2 - n022 n032 λ22 a1[μ]2 -
n034 λ22 a1[μ]2 - n012 n022 λ32 a1[μ]2 - n024 λ32 a1[μ]2 +
n012 n032 λ32 a1[μ]2 - n022 n032 λ32 a1[μ]2 - 2 n01 n023 λ12 a1[μ] a2[μ] -
2 n01 n02 n032 λ12 a1[μ] a2[μ] - 2 n013 n02 λ22 a1[μ] a2[μ] -
2 n01 n02 n032 λ22 a1[μ] a2[μ] + 2 n013 n02 λ32 a1[μ] a2[μ] +
2 n01 n023 λ32 a1[μ] a2[μ] + 4 n01 n02 n032 λ32 a1[μ] a2[μ] +
n012 n022 λ12 a2[μ]2 - n012 n032 λ12 a2[μ]2 - n022 n032 λ12 a2[μ]2 -
n034 λ12 a2[μ]2 + n014 λ22 a2[μ]2 + 2 n012 n032 λ22 a2[μ]2 + n034 λ22 a2[μ]2 -
n014 λ32 a2[μ]2 - n012 n022 λ32 a2[μ]2 - n012 n032 λ32 a2[μ]2 +
n022 n032 λ32 a2[μ]2 - 2 n01 n022 n03 λ12 a1[μ] a3[μ] -
2 n01 n033 λ12 a1[μ] a3[μ] + 2 n013 n03 λ22 a1[μ] a3[μ] +
4 n01 n022 n03 λ22 a1[μ] a3[μ] + 2 n01 n033 λ22 a1[μ] a3[μ] -
2 n013 n03 λ32 a1[μ] a3[μ] - 2 n01 n022 n03 λ32 a1[μ] a3[μ] +
4 n012 n02 n03 λ12 a2[μ] a3[μ] + 2 n023 n03 λ12 a2[μ] a3[μ] +
2 n02 n033 λ12 a2[μ] a3[μ] - 2 n012 n02 n03 λ22 a2[μ] a3[μ] -
2 n02 n033 λ22 a2[μ] a3[μ] - 2 n012 n02 n03 λ32 a2[μ] a3[μ] -
2 n023 n03 λ32 a2[μ] a3[μ] - n012 n022 λ12 a3[μ]2 - n024 λ12 a3[μ]2 +
n012 n032 λ12 a3[μ]2 - n022 n032 λ12 a3[μ]2 - n014 λ22 a3[μ]2 -
n012 n022 λ22 a3[μ]2 - n012 n032 λ22 a3[μ]2 + n022 n032 λ22 a3[μ]2 +
n014 λ32 a3[μ]2 + 2 n012 n022 λ32 a3[μ]2 + n024 λ32 a3[μ]2)
(-n03 a2[μ] a1'[μ] + n02 a3[μ] a1'[μ] + n03 a1[μ] a2'[μ] -
n01 a3[μ] a2'[μ] - n02 a1[μ] a3'[μ] + n01 a2[μ] a3'[μ])
```

Le résultat est un produit de 3 facteurs :

```
In[36]:= {Head[Y], Length[Y]}
```

```
Out[36]= {Times, 3}
```

DistorsionsMaxAnisotropie.nb

7

In[37]:= Y[[1]]

```

Out[37]= n01 n02 n03 λ22 a1[μ]2 - n01 n02 n03 λ32 a1[μ]2 + n022 n03 λ12 a1[μ] a2[μ] +
n033 λ12 a1[μ] a2[μ] - n012 n03 λ22 a1[μ] a2[μ] - n033 λ22 a1[μ] a2[μ] +
n012 n03 λ32 a1[μ] a2[μ] - n022 n03 λ32 a1[μ] a2[μ] -
n01 n02 n03 λ12 a2[μ]2 + n01 n02 n03 λ32 a2[μ]2 - n023 λ12 a1[μ] a3[μ] -
n02 n032 λ12 a1[μ] a3[μ] - n012 n02 λ22 a1[μ] a3[μ] +
n02 n032 λ22 a1[μ] a3[μ] + n012 n02 λ32 a1[μ] a3[μ] +
n023 λ32 a1[μ] a3[μ] + n01 n022 λ12 a2[μ] a3[μ] - n01 n032 λ12 a2[μ] a3[μ] +
n013 λ22 a2[μ] a3[μ] + n01 n032 λ22 a2[μ] a3[μ] - n013 λ32 a2[μ] a3[μ] -
n01 n022 λ32 a2[μ] a3[μ] + n01 n02 n03 λ12 a3[μ]2 - n01 n02 n03 λ22 a3[μ]2

```

*In[38]:= sol = Solve[Y[[1]] == 0, a1[μ];**In[39]:= Length[sol]**Out[39]= 2*

Les deux solutions conduisent au même extrémum qui est un minimum :

*In[40]:= δa2^2 /. sol[[1]] // FullSimplify**Out[40]= 1**In[41]:= δa2^2 /. sol[[2]] // FullSimplify**Out[41]= 1*

```
In[42]:= Y[[2]]
```

```
Out[42]= n02^4 λ1^2 a1[μ]^2 + 2 n02^2 n03^2 λ1^2 a1[μ]^2 + n03^4 λ1^2 a1[μ]^2 +
n01^2 n02^2 λ2^2 a1[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ2^2 a1[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ2^2 a1[μ]^2 -
n03^4 λ2^2 a1[μ]^2 - n01^2 n02^2 λ3^2 a1[μ]^2 - n02^4 λ3^2 a1[μ]^2 +
n01^2 n03^2 λ3^2 a1[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ3^2 a1[μ]^2 - 2 n01 n02^3 λ1^2 a1[μ] a2[μ] -
2 n01 n02 n03^2 λ1^2 a1[μ] a2[μ] - 2 n01^3 n02 λ2^2 a1[μ] a2[μ] -
2 n01 n02 n03^2 λ2^2 a1[μ] a2[μ] + 2 n01^3 n02 λ3^2 a1[μ] a2[μ] +
2 n01 n02^3 λ3^2 a1[μ] a2[μ] + 4 n01 n02 n03^2 λ3^2 a1[μ] a2[μ] +
n01^2 n02^2 λ1^2 a2[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ1^2 a2[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ1^2 a2[μ]^2 -
n03^4 λ1^2 a2[μ]^2 + n01^4 λ2^2 a2[μ]^2 + 2 n01^2 n03^2 λ2^2 a2[μ]^2 + n03^4 λ2^2 a2[μ]^2 -
n01^4 λ3^2 a2[μ]^2 - n01^2 n02^2 λ3^2 a2[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ3^2 a2[μ]^2 +
n02^2 n03^2 λ3^2 a2[μ]^2 - 2 n01 n02^2 n03 λ1^2 a1[μ] a3[μ] -
2 n01 n03^3 λ1^2 a1[μ] a3[μ] + 2 n01^3 n03 λ2^2 a1[μ] a3[μ] +
4 n01 n02^2 n03 λ2^2 a1[μ] a3[μ] + 2 n01 n03^3 λ2^2 a1[μ] a3[μ] -
2 n01^3 n03 λ3^2 a1[μ] a3[μ] - 2 n01 n02^2 n03 λ3^2 a1[μ] a3[μ] +
4 n01^2 n02 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] + 2 n02^3 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] +
2 n02 n03^3 λ1^2 a2[μ] a3[μ] - 2 n01^2 n02 n03 λ2^2 a2[μ] a3[μ] -
2 n02 n03^3 λ2^2 a2[μ] a3[μ] - 2 n01^2 n02 n03 λ3^2 a2[μ] a3[μ] -
2 n02^3 n03 λ3^2 a2[μ] a3[μ] - n01^2 n02^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n02^4 λ1^2 a3[μ]^2 +
n01^2 n03^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n01^4 λ2^2 a3[μ]^2 -
n01^2 n02^2 λ2^2 a3[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ2^2 a3[μ]^2 + n02^2 n03^2 λ2^2 a3[μ]^2 +
n01^4 λ3^2 a3[μ]^2 + 2 n01^2 n02^2 λ3^2 a3[μ]^2 + n02^4 λ3^2 a3[μ]^2
```

```
In[43]:= sol = Solve[Y[[2]] == 0, a1[μ]];
```

```
In[44]:= Length[sol]
```

```
Out[44]= 2
```

Les deux solutions conduisent au même maximum

```
In[45]:= δa2^2 /. sol[[1]] // FullSimplify
```

```
Out[45]= 
$$\frac{(n03^2 (\lambda1^2 + \lambda2^2) + n02^2 (\lambda1^2 + \lambda3^2) + n01^2 (\lambda2^2 + \lambda3^2))^2}{4 (n01^2 + n02^2 + n03^2) (n03^2 \lambda1^2 \lambda2^2 + (n02^2 \lambda1^2 + n01^2 \lambda2^2) \lambda3^2)}$$

```

```
In[46]:= δa2maxcarre = δa2^2 /. sol[[2]] // FullSimplify
```

```
Out[46]= 
$$\frac{(n03^2 (\lambda1^2 + \lambda2^2) + n02^2 (\lambda1^2 + \lambda3^2) + n01^2 (\lambda2^2 + \lambda3^2))^2}{4 (n01^2 + n02^2 + n03^2) (n03^2 \lambda1^2 \lambda2^2 + (n02^2 \lambda1^2 + n01^2 \lambda2^2) \lambda3^2)}$$

```

Interprétation :

```
In[47]:= δa2maxcarre == (I1[U.U] (n0.G.n0) - Kln^2)^2 / Ksn^2 / 4 // Simplify
```

```
Out[47]= True
```

La distorsion maximale est donc : $\delta a_{2\max} = \frac{\text{Tr}[C] - K_{ln}^2}{2 K_{sn}}$

Distorsion stérique maximale du triplet (u0,v0,n0)

In[48]:= $\delta s = \mathbf{KluKlvKln} / \mathbf{Kv}$

$$\text{Out[48]} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \left(\sqrt{\frac{n_{01}^2 \lambda_1^2 + n_{02}^2 \lambda_2^2 + n_{03}^2 \lambda_3^2}{n_{01}^2 + n_{02}^2 + n_{03}^2}} \right. \\ \sqrt{\left((n_{03}^2 \lambda_2^2 + n_{02}^2 \lambda_3^2) a_1[\mu]^2 + (n_{03}^2 \lambda_1^2 + n_{01}^2 \lambda_3^2) a_2[\mu]^2 - \right.} \\ \left. 2 n_{02} n_{03} \lambda_1^2 a_2[\mu] a_3[\mu] + (n_{02}^2 \lambda_1^2 + n_{01}^2 \lambda_2^2) a_3[\mu]^2 - \right.} \\ \left. 2 n_{01} a_1[\mu] (n_{02} \lambda_3^2 a_2[\mu] + n_{03} \lambda_2^2 a_3[\mu]) \right) /} \\ \left((n_{02}^2 + n_{03}^2) a_1[\mu]^2 + (n_{01}^2 + n_{03}^2) a_2[\mu]^2 - 2 n_{02} n_{03} a_2[\mu] a_3[\mu] + \right. \\ \left. (n_{01}^2 + n_{02}^2) a_3[\mu]^2 - 2 n_{01} a_1[\mu] (n_{02} a_2[\mu] + n_{03} a_3[\mu]) \right) \left. \right) \\ \sqrt{\left((\lambda_3^2 (n_{01} n_{03} a_1[\mu] + n_{02} n_{03} a_2[\mu] - (n_{01}^2 + n_{02}^2) a_3[\mu])^2 + \right.} \\ \left. \lambda_2^2 (n_{01} n_{02} a_1[\mu] - (n_{01}^2 + n_{03}^2) a_2[\mu] + n_{02} n_{03} a_3[\mu])^2 + \right.} \\ \left. \lambda_1^2 ((n_{02}^2 + n_{03}^2) a_1[\mu] - n_{01} (n_{02} a_2[\mu] + n_{03} a_3[\mu]))^2 \right) /} \\ \left((n_{01}^2 + n_{02}^2 + n_{03}^2) ((n_{02}^2 + n_{03}^2) a_1[\mu]^2 + (n_{01}^2 + n_{03}^2) a_2[\mu]^2 - \right. \\ \left. 2 n_{02} n_{03} a_2[\mu] a_3[\mu] + (n_{01}^2 + n_{02}^2) a_3[\mu]^2 - \right. \\ \left. 2 n_{01} a_1[\mu] (n_{02} a_2[\mu] + n_{03} a_3[\mu])) \right) \left. \right)$$

Dérivation par rapport à μ :

```
In[49]:= Z = D[δs^2, μ] // Simplify // Factor // Numerator
```

```
Out[49]= 2 (n01^2 λ1^2 + n02^2 λ2^2 + n03^2 λ3^2)
(n01 n02 n03 λ2^2 a1[μ]^2 - n01 n02 n03 λ3^2 a1[μ]^2 + n02^2 n03 λ1^2 a1[μ] a2[μ] +
n03^3 λ1^2 a1[μ] a2[μ] - n01^2 n03 λ2^2 a1[μ] a2[μ] - n03^3 λ2^2 a1[μ] a2[μ] +
n01^2 n03 λ3^2 a1[μ] a2[μ] - n02^2 n03 λ3^2 a1[μ] a2[μ] -
n01 n02 n03 λ1^2 a2[μ]^2 + n01 n02 n03 λ3^2 a2[μ]^2 - n02^3 λ1^2 a1[μ] a3[μ] -
n02 n03^2 λ1^2 a1[μ] a3[μ] - n01^2 n02 λ2^2 a1[μ] a3[μ] +
n02 n03^2 λ2^2 a1[μ] a3[μ] + n01^2 n02 λ3^2 a1[μ] a3[μ] +
n02^3 λ3^2 a1[μ] a3[μ] + n01 n02^2 λ1^2 a2[μ] a3[μ] - n01 n03^2 λ1^2 a2[μ] a3[μ] +
n01^3 λ2^2 a2[μ] a3[μ] + n01 n03^2 λ2^2 a2[μ] a3[μ] - n01^3 λ3^2 a2[μ] a3[μ] -
n01 n02^2 λ3^2 a2[μ] a3[μ] + n01 n02 n03 λ1^2 a3[μ]^2 - n01 n02 n03 λ2^2 a3[μ]^2)
(n02^4 λ1^2 a1[μ]^2 + 2 n02^2 n03^2 λ1^2 a1[μ]^2 + n03^4 λ1^2 a1[μ]^2 +
n01^2 n02^2 λ2^2 a1[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ2^2 a1[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ2^2 a1[μ]^2 -
n03^4 λ2^2 a1[μ]^2 - n01^2 n02^2 λ3^2 a1[μ]^2 - n02^4 λ3^2 a1[μ]^2 +
n01^2 n03^2 λ3^2 a1[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ3^2 a1[μ]^2 - 2 n01 n02^3 λ1^2 a1[μ] a2[μ] -
2 n01 n02 n03^2 λ1^2 a1[μ] a2[μ] - 2 n01^3 n02 λ2^2 a1[μ] a2[μ] -
2 n01 n02 n03^2 λ2^2 a1[μ] a2[μ] + 2 n01^3 n02 λ3^2 a1[μ] a2[μ] +
2 n01 n02^3 λ3^2 a1[μ] a2[μ] + 4 n01 n02 n03^2 λ3^2 a1[μ] a2[μ] +
n01^2 n02^2 λ1^2 a2[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ1^2 a2[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ1^2 a2[μ]^2 -
n03^4 λ1^2 a2[μ]^2 + n01^4 λ2^2 a2[μ]^2 + 2 n01^2 n03^2 λ2^2 a2[μ]^2 + n03^4 λ2^2 a2[μ]^2 -
n01^4 λ3^2 a2[μ]^2 - n01^2 n02^2 λ3^2 a2[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ3^2 a2[μ]^2 +
n02^2 n03^2 λ3^2 a2[μ]^2 - 2 n01 n02^2 n03 λ1^2 a1[μ] a3[μ] -
2 n01 n03^3 λ1^2 a1[μ] a3[μ] + 2 n01^3 n03 λ2^2 a1[μ] a3[μ] +
4 n01 n02^2 n03 λ2^2 a1[μ] a3[μ] + 2 n01 n03^3 λ2^2 a1[μ] a3[μ] -
2 n01^3 n03 λ3^2 a1[μ] a3[μ] - 2 n01 n02^2 n03 λ3^2 a1[μ] a3[μ] +
4 n01^2 n02 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] + 2 n02^3 n03 λ1^2 a2[μ] a3[μ] +
2 n02 n03^3 λ1^2 a2[μ] a3[μ] - 2 n01^2 n02 n03 λ2^2 a2[μ] a3[μ] -
2 n02 n03^3 λ2^2 a2[μ] a3[μ] - 2 n01^2 n02 n03 λ3^2 a2[μ] a3[μ] -
2 n02^3 n03 λ3^2 a2[μ] a3[μ] - n01^2 n02^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n02^4 λ1^2 a3[μ]^2 +
n01^2 n03^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n02^2 n03^2 λ1^2 a3[μ]^2 - n01^4 λ2^2 a3[μ]^2 -
n01^2 n02^2 λ2^2 a3[μ]^2 - n01^2 n03^2 λ2^2 a3[μ]^2 + n02^2 n03^2 λ2^2 a3[μ]^2 +
n01^4 λ3^2 a3[μ]^2 + 2 n01^2 n02^2 λ3^2 a3[μ]^2 + n02^4 λ3^2 a3[μ]^2)
(-n03 a2[μ] a1'[μ] + n02 a3[μ] a1'[μ] + n03 a1[μ] a2'[μ] -
n01 a3[μ] a2'[μ] - n02 a1[μ] a3'[μ] + n01 a2[μ] a3'[μ])
```

Ce terme est un produit de 5 facteurs

```
In[50]:= {Head[Z], Length[Z]}
```

```
Out[50]= {Times, 5}
```

```
In[51]:= Z[[1]]
```

```
Out[51]= 2
```

```
In[52]:= Z[[2]]
```

```
Out[52]= n01^2 λ1^2 + n02^2 λ2^2 + n03^2 λ3^2
```

DistorsionsMaxAnisotropie.nb

11

In[53]:= Z[[3]]

```

Out[53]= n01 n02 n03 λ22 a1[μ]2 - n01 n02 n03 λ32 a1[μ]2 + n022 n03 λ12 a1[μ] a2[μ] +
n033 λ12 a1[μ] a2[μ] - n012 n03 λ22 a1[μ] a2[μ] - n033 λ22 a1[μ] a2[μ] +
n012 n03 λ32 a1[μ] a2[μ] - n022 n03 λ32 a1[μ] a2[μ] -
n01 n02 n03 λ12 a2[μ]2 + n01 n02 n03 λ32 a2[μ]2 - n023 λ12 a1[μ] a3[μ] -
n02 n032 λ12 a1[μ] a3[μ] - n012 n02 λ22 a1[μ] a3[μ] +
n02 n032 λ22 a1[μ] a3[μ] + n012 n02 λ32 a1[μ] a3[μ] +
n023 λ32 a1[μ] a3[μ] + n01 n022 λ12 a2[μ] a3[μ] - n01 n032 λ12 a2[μ] a3[μ] +
n013 λ22 a2[μ] a3[μ] + n01 n032 λ22 a2[μ] a3[μ] - n013 λ32 a2[μ] a3[μ] -
n01 n022 λ32 a2[μ] a3[μ] + n01 n02 n03 λ12 a3[μ]2 - n01 n02 n03 λ22 a3[μ]2

```

*In[54]:= sol = Solve[Z[[3]] == 0, a1[μ];**In[55]:= Length[sol]**Out[55]= 2*

Les deux solutions conduisent au même maximum :

In[56]:= δs^2 /. sol[[1]] // FullSimplify

$$\text{Out[56]= } \frac{(n01^2 \lambda1^2 + n02^2 \lambda2^2 + n03^2 \lambda3^2) (n03^2 \lambda1^2 \lambda2^2 + (n02^2 \lambda1^2 + n01^2 \lambda2^2) \lambda3^2)}{(n01^2 + n02^2 + n03^2)^2 \lambda1^2 \lambda2^2 \lambda3^2}$$
In[57]:= δsmaxlcarre = δs^2 /. sol[[2]] // FullSimplify

$$\text{Out[57]= } \frac{(n01^2 \lambda1^2 + n02^2 \lambda2^2 + n03^2 \lambda3^2) (n03^2 \lambda1^2 \lambda2^2 + (n02^2 \lambda1^2 + n01^2 \lambda2^2) \lambda3^2)}{(n01^2 + n02^2 + n03^2)^2 \lambda1^2 \lambda2^2 \lambda3^2}$$
Interprétation :*In[58]:= δsmaxlcarre == Kln^2 Ksn^2 / Kv^2**Out[58]= True*Premier maximum de la distorsion stérique : $\delta_{smax1} = \frac{Kln Ksn}{Kv}$

```

In[59]:= Z[[4]]

Out[59]= n024 λ12 a1[μ]2 + 2 n022 n032 λ12 a1[μ]2 + n034 λ12 a1[μ]2 +
n012 n022 λ22 a1[μ]2 - n012 n032 λ22 a1[μ]2 - n022 n032 λ22 a1[μ]2 -
n034 λ22 a1[μ]2 - n012 n022 λ32 a1[μ]2 - n024 λ32 a1[μ]2 +
n012 n032 λ32 a1[μ]2 - n022 n032 λ32 a1[μ]2 - 2 n01 n023 λ12 a1[μ] a2[μ] -
2 n01 n02 n032 λ12 a1[μ] a2[μ] - 2 n013 n02 λ22 a1[μ] a2[μ] -
2 n01 n02 n032 λ22 a1[μ] a2[μ] + 2 n013 n02 λ32 a1[μ] a2[μ] +
2 n01 n023 λ32 a1[μ] a2[μ] + 4 n01 n02 n032 λ32 a1[μ] a2[μ] +
n012 n022 λ12 a2[μ]2 - n012 n032 λ12 a2[μ]2 - n022 n032 λ12 a2[μ]2 -
n034 λ12 a2[μ]2 + n014 λ22 a2[μ]2 + 2 n012 n032 λ22 a2[μ]2 + n034 λ22 a2[μ]2 -
n014 λ32 a2[μ]2 - n012 n022 λ32 a2[μ]2 - n012 n032 λ32 a2[μ]2 +
n022 n032 λ32 a2[μ]2 - 2 n01 n022 n03 λ12 a1[μ] a3[μ] -
2 n01 n033 λ12 a1[μ] a3[μ] + 2 n013 n03 λ22 a1[μ] a3[μ] +
4 n01 n022 n03 λ22 a1[μ] a3[μ] + 2 n01 n033 λ22 a1[μ] a3[μ] -
2 n013 n03 λ32 a1[μ] a3[μ] - 2 n01 n022 n03 λ32 a1[μ] a3[μ] +
4 n012 n02 n03 λ12 a2[μ] a3[μ] + 2 n023 n03 λ12 a2[μ] a3[μ] +
2 n02 n033 λ12 a2[μ] a3[μ] - 2 n012 n02 n03 λ22 a2[μ] a3[μ] -
2 n02 n033 λ22 a2[μ] a3[μ] - 2 n012 n02 n03 λ32 a2[μ] a3[μ] -
2 n023 n03 λ32 a2[μ] a3[μ] - n012 n022 λ12 a3[μ]2 - n024 λ12 a3[μ]2 +
n012 n032 λ12 a3[μ]2 - n022 n032 λ12 a3[μ]2 - n014 λ22 a3[μ]2 -
n012 n022 λ22 a3[μ]2 - n012 n032 λ22 a3[μ]2 + n022 n032 λ22 a3[μ]2 +
n014 λ32 a3[μ]2 + 2 n012 n022 λ32 a3[μ]2 + n024 λ32 a3[μ]2

In[60]:= sol = Solve[Z[[4]] == 0, a1[μ]];

In[61]:= Length[sol]

Out[61]= 2

Les deux solutions conduisent au même maximum :

In[62]:= δs^2 /. sol[[1]] // Simplify

Out[62]= ((n012 λ12 + n022 λ22 + n032 λ32)
(n032 (λ12 + λ22) + n022 (λ12 + λ32) + n012 (λ22 + λ32))2) /
(4 (n012 + n022 + n032)3 λ12 λ22 λ32)

In[63]:= δsmax2carre = δs^2 /. sol[[2]] // Simplify

Out[63]= ((n012 λ12 + n022 λ22 + n032 λ32)
(n032 (λ12 + λ22) + n022 (λ12 + λ32) + n012 (λ22 + λ32))2) /
(4 (n012 + n022 + n032)3 λ12 λ22 λ32)

```

Interprétation :

DistorsionsMaxAnisotropie.nb

13

```
In[64]:=  $\delta_{\text{smax2carre}} == \text{Kln}^2 (\text{I1}[\text{U.U}] - \text{Kln}^2)^2 / \text{Kv}^2 / 4 // \text{Simplify}$ 
Out[64]= True
```

Second maximum de la distorsion stérique : $\delta_{\text{smax2}} = \frac{\text{Kln}(\text{Tr}[C] - \text{Kln}^2)}{2 \text{Kv}}$

```
In[65]:= Z[[5]] // Collect[#, {a1'[μ], a2'[μ], a3'[μ]}] &
Out[65]= (-n03 a2[μ] + n02 a3[μ]) a1'[μ] +
(n03 a1[μ] - n01 a3[μ]) a2'[μ] + (-n02 a1[μ] + n01 a2[μ]) a3'[μ]
```

Ce terme n'est jamais nul car $\mathbf{a0}$ est non colinéaire à $\mathbf{n0}$.

■ Comparaison des extrémums

```
In[66]:=  $\mathbf{XX} = \delta_{\text{smax2carre}} - \delta_{\text{smax1carre}} // \text{Factor} // \text{Numerator} // \text{FullSimplify}$ 
```

```
Out[66]= (n01^2 λ1^2 + n02^2 λ2^2 + n03^2 λ3^2) (n02^4 (λ1^2 - λ3^2)^2 + 2 n02^2 (λ1 - λ3)
(λ1 + λ3) (n03^2 (λ1 - λ2) (λ1 + λ2) + n01^2 (λ2 - λ3) (λ2 + λ3)) +
(n03^2 (λ1 - λ2) (λ1 + λ2) + n01^2 (-λ2^2 + λ3^2))^2)
```

Si $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 > 0$

```
In[67]:=  $\mathbf{XX}[[1]] \geq 0$ 
```

```
Out[67]=  $n01^2 \lambda_1^2 + n02^2 \lambda_2^2 + n03^2 \lambda_3^2 \geq 0$ 
```

```
In[68]:=  $\mathbf{XX}[[2, 1]] \geq 0$ 
```

```
Out[68]=  $n02^4 (\lambda_1^2 - \lambda_3^2)^2 \geq 0$ 
```

```
In[69]:=  $\mathbf{XX}[[2, 2]] \geq 0$ 
```

```
Out[69]=  $2 n02^2 (\lambda_1 - \lambda_3) (\lambda_1 + \lambda_3)
(n03^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 + \lambda_2) + n01^2 (\lambda_2 - \lambda_3) (\lambda_2 + \lambda_3)) \geq 0$ 
```

```
In[70]:=  $\mathbf{XX}[[2, 3]] \geq 0$ 
```

```
Out[70]=  $(n03^2 (\lambda_1 - \lambda_2) (\lambda_1 + \lambda_2) + n01^2 (-\lambda_2^2 + \lambda_3^2))^2 \geq 0$ 
```

On a donc $\delta_{\text{smax2}} > \delta_{\text{smax1}}$

Calculs du modèle isotrope transverse $\{T, K_v, \delta, a\}$

La feuille de calcul reproduite dans les pages qui suivent décrit le détail des calculs dans la construction du modèle de comportement élastique isotrope transverse présenté dans le chapitre 6 [p. 97].

Cette feuille de calcul est exécutable dans le logiciel de calcul formel MATHEMATICA[®] dans sa version 5.2. Elle utilise, pour les quelques calculs tensoriels, des fonctionnalités de la bibliothèque Tens3D écrite par l'auteur pour pratiquer l'algèbre et l'analyse tensorielle dans le cadre de la physique classique dans des bases quelconques et des systèmes de coordonnées quelconques. Cette bibliothèque (développée dans la version 5.2 de MATHEMATICA[®]) est téléchargeable à : <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html>

Cette feuille de calcul est largement commentée. Les équations différentielles sont résolues en suivant la même démarche que celle que l'on aurait suivie en calculant manuellement. Les commentaires devraient permettre à tout praticien d'un autre logiciel de calcul formel de traduire la feuille de calcul dans son propre langage, à l'exception des quelques opérations tensorielles utilisant la bibliothèque Tens3D, mais qui peuvent être aisément traduites en opérations matricielles.

Modèle élastique isotrope transverse (T, K_v, δ, a)

Préparations

■ Le package Tens3D (pour les calculs tensoriels)

Le package Tens3D est utile pour les quelques calculs tensoriels qui suivent.

Il est téléchargeable à <http://jgarrigues.perso.centrale-marseille.fr/tens3d.html> (pour la version 5.2 de *Mathematica*)

```
In[1]:= Needs["Tens3D"]
```

Raccourcis de notations :

```
In[2]:= G = MetricTensor; B0 = CanonicalBasis;
```

Vecteurs de base :

```
In[3]:= {e1, e2, e3} = BasisVectors[B0];
```

■ Préparation du système de coordonnées cartésiennes orthonormées

```
In[4]:= OM = DefineTensor[{x1, x2, x3}, {1}, B0];
```

```
In[5]:= SC = DefineCoordinateSystem[OM, {x1, x2, x3}];
```

Direct normalized orthogonal natural basis.

```
In[6]:= Off[General::spell]
```

■ Une fonction qui change le nom des variables muettes dans une intégrale :

Le premier argument est une expression et le second est le nom désiré pour la variable muette

(Attention, cette fonction ne marche bien que si toutes les variables muettes $K\$xxx$ de $expr$ ont le même nom)

```
In[7]:= ChVarMu = Function[{expr, var},
  MapAll[If[ToString[Head[#]] == "Integrate" && StringMatchQ[ToString#[[2, 1]], "K\$*"],
    # /. #[[2, 1]] -> var, #] &, expr ]]
```

```
Out[7]= Function[{expr, var},
  (If[ToString[Head[#1]] == Integrate && StringMatchQ[ToString[#1[[2, 1]], K\$*],
    #1 /. #1[[2, 1]] -> var, #1] &) // @expr]
```

■ Une fonction qui développe les sommes d'intégrandes

```
In[8]:= DevelopInt = Function[X,
  If[ToString[Head[X]] == "Integrate" (* test si l'argument est une intégrale *),
    Distribute[Integrate[Expand[X[[1]]], X[[2]]]],
    X] (* If : inchangé sinon *)
]
```

```
Out[8]= Function[X, If[ToString[Head[X]] == Integrate, Distribute[ $\int$ Expand[X[[1]] dX[[2]], X]]
```

■ Une fonction qui sort les constantes des intégrales

```
In[9]:= SorsConst = Function[X,
  If[ToString[Head[X]] == "Integrate" && (* test si l'argument est une intégrale *)
    ToString[Head[X[[1]]] == "Times", (* et si l'intégrande est un produit *)
    Apply[Times,
      Select[
        Apply[List, X[[1]]], (* Apply[List, : transformation de l'intégrande en liste *)
        FreeQ[#, X[[2, 1]]] &
        (* FreeQ : test si l'élément ne contient pas la variable d'intégration *)
      ] (* Select : sélection des éléments constants *)
    ] (* Apply[Times, : produit des constantes *)
    * (* produit des constantes par l'intégrale restante *)
    Integrate[
      Apply[Times,
        Select[
          Apply[List, X[[1]]], (* transformation de l'intégrande en liste *)
          !FreeQ[#, X[[2, 1]]] &
          (* !FreeQ : test si l'élément contient la variable d'intégration *)
        ] (* Select : sélection des éléments non constants *)
      ] (* Apply[Times, : produit des éléments non constants *)
      , X[[2]]] (* Integrate : intégration des éléments non constant *)
    , X] (* If : inchangé sinon *)
]
```

```
Out[9]= Function[X, If[ToString[Head[X]] == Integrate && ToString[Head[X[[1]]] == Times,
  Times@@Select[List@@X[[1]], FreeQ[#1, X[[2, 1]]] &]
   $\int$ Times@@Select[List@@X[[1]], !FreeQ[#1, X[[2, 1]]] &] dX[[2], X]]
```

■ Une fonction qui fait les deux précédentes

```
In[10]:= ArrangeInt = Function[X, MapAll[SorsConst, MapAll[DevelopInt, X]]]
```

```
Out[10]= Function[X, SorsConst //@ DevelopInt //@ X]
```

```
In[11]:= Integrate[f[x], {x, x1, x2}] + Integrate[-f[x], {x, x1, x2}] //
  Simplify (* Simplify ne fait rien *)
```

```
Out[11]=  $\int_{x1}^{x2} -f[x] dx + \int_{x1}^{x2} f[x] dx$ 
```

ModeleTKvDeltaA.nb

3

```
In[12]:= % // ArrangeInt
Out[12]= 0
```

Forme générale des fonctions d'état

Quelques hypothèses physiques destinées à aider les simplifications et les intégrations :

```
In[13]:= $Assumptions =
          $Assumptions && T > 0 && T0 > 0 && a > 0 && Kv > 0 && δ > 1 && ρ0 > 0 && γ > 0 && a > 0;
```

Remplacements pour obtenir les valeurs à l'état initial :

```
In[14]:= EtatInitial = {T → T0, Kv → 1, δ → 1, a → 1};
```

■ Energie libre de Helmholtz

```
In[15]:= ψ = g1[T] + g2[T, Kv] + g3[T, Kv, δ] + g4[T, Kv, δ, a];
In[16]:= g1[T0] = 0; g2[_, 1] := 0; g3[_, _, 1] := 0; g4[_, _, _, 1] := 0;
```

■ Entropie massique (relation de Helmholtz)

```
In[17]:= s = -D[ψ, T]
Out[17]= -g1'[T] - g2(1,0)[T, Kv] - g3(1,0,0)[T, Kv, δ] - g4(1,0,0,0)[T, Kv, δ, a]
```

■ Energie interne massique

```
In[18]:= e = ψ + T s
Out[18]= g1[T] + g2[T, Kv] + g3[T, Kv, δ] + g4[T, Kv, δ, a] +
          T (-g1'[T] - g2(1,0)[T, Kv] - g3(1,0,0)[T, Kv, δ] - g4(1,0,0,0)[T, Kv, δ, a])
```

■ Tenseur des contraintes (éq. (6.8) du cours)

```
In[19]:= KG = ρ0 (D[ψ, Kv] - δ / Kv D[ψ, δ] - 2 a / 3 / Kv D[ψ, a]) // Expand // ArrangeInt;
In[20]:= KB = ρ0 δ(1/3) / Kv(5/3) D[ψ, δ] // Expand // ArrangeInt;
In[21]:= KsymNtB = 4 ρ0 / Kv(5/3) D[ψ, a] // Expand // ArrangeInt;
In[22]:= Knt = -2 ρ0 a / Kv D[ψ, a] // Expand // ArrangeInt;
```

Définition tensorielle du tenseur des contraintes : (exécution retardée (:=) car les valeurs de B et Nt ne sont pas encore définies)

```
In[23]:= σ := KG ◦ G ⊕ KB ◦ B ⊕ KsymNtB ◦ Sym[Nt.B] ⊕ Knt ◦ Nt ;
          (* Les symboles ◦ et ⊕ sont des opérateurs définis dans Tens3D *)
```

Chemin $C^{(1)}$ (variation de température sans déformation)

In[24]:= Chemin1 = {Kv → 1, δ → 1, a → 1};

■ Direction d'anisotropie

In[25]:= Nt = e3 @ e3;

■ Tenseur de déformation

In[26]:= B = G;

■ Tenseur des contraintes

In[27]:= σ1 = σ;

In[28]:= compσ1 = (σ1 // Components) /. Chemin1 // Simplify

Note: Components in CanonicalBasis

Out[28]= $\left\{ \left\{ \rho_0 g_2^{(0,1)} [T, 1] + \rho_0 g_3^{(0,1,0)} [T, 1, 1] - \frac{2}{3} \rho_0 g_4^{(0,0,0,1)} [T, 1, 1, 1] + \rho_0 g_4^{(0,1,0,0)} [T, 1, 1, 1], \right. \right.$
 $0, 0 \left. \right\}, \left\{ 0, \rho_0 g_2^{(0,1)} [T, 1] + \rho_0 g_3^{(0,1,0)} [T, 1, 1] - \right.$
 $\left. \frac{2}{3} \rho_0 g_4^{(0,0,0,1)} [T, 1, 1, 1] + \rho_0 g_4^{(0,1,0,0)} [T, 1, 1, 1], 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \right.$
 $\left. \rho_0 g_2^{(0,1)} [T, 1] + \rho_0 g_3^{(0,1,0)} [T, 1, 1] + \frac{4}{3} \rho_0 g_4^{(0,0,0,1)} [T, 1, 1, 1] + \rho_0 g_4^{(0,1,0,0)} [T, 1, 1, 1] \right\}$

Vérifications :

In[29]:= {compσ1[[1, 1]] - compσ1[[2, 2]], compσ1[[1, 2]], compσ1[[1, 3]], compσ1[[2, 3]]}

Out[29]= {0, 0, 0, 0}

■ mesure de chaleur massique à déformation nulle : Q1Exp[T] (premier principe global)

In[30]:= eq1 = (e /. Chemin1) == Q1Exp[T]

Out[30]= $g_1 [T] + T (-g_1' [T] - g_2^{(1,0)} [T, 1] - g_3^{(1,0,0)} [T, 1, 1] - g_4^{(1,0,0,0)} [T, 1, 1, 1]) == Q1Exp [T]$

In[31]:= Q1Exp [T0] = 0;

■ Résolution de $eq1$ (on trouve $g1$)

```
In[32]:= sol = DSolve[eq1, g1, T] // Simplify
```

```
Out[32]= {{g1 -> Function[{T},
      TC[1] + T \int_1^T \frac{1}{K$281^2} (-Q1Exp[K$281] - K$281 g2^{(1,0)} [K$281, 1] - K$281 g3^{(1,0,0)} [K$281, 1, 1] -
      K$281 g4^{(1,0,0,0)} [K$281, 1, 1, 1]) dK$281]}}
```

```
In[33]:= sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /.
      C[1] -> g11 (* changement de nom de C[1] *) /.
```

```
{dx_, 1, T} -> {dx, T0, T} (* changement de la borne inférieure *) //
```

```
ChVarMu[#, Tx] & (* changement de nom de la variable muette *) // ArrangeInt // Expand
```

```
Out[33]= g11 T - T \int_{T0}^T \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g2^{(1,0)} [Tx, 1]}{Tx} dTx -
      T \int_{T0}^T \frac{g3^{(1,0,0)} [Tx, 1, 1]}{Tx} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g4^{(1,0,0,0)} [Tx, 1, 1, 1]}{Tx} dTx
```

```
In[34]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignment de la solution g1 *)
```

```
In[35]:= g1[T]
```

```
Out[35]= g11 T - T \int_{T0}^T \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g2^{(1,0)} [Tx, 1]}{Tx} dTx -
      T \int_{T0}^T \frac{g3^{(1,0,0)} [Tx, 1, 1]}{Tx} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g4^{(1,0,0,0)} [Tx, 1, 1, 1]}{Tx} dTx
```

```
In[36]:= cond = 0 == g1[T0]
```

```
Out[36]= 0 == g11 T0
```

```
In[37]:= sol = Solve[cond, g11]
```

```
Out[37]= {{g11 -> 0}}
```

```
In[38]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignment de la solution g11 *)
```

RESULTAT

```
In[39]:= g1[T]
```

```
Out[39]= -T \int_{T0}^T \frac{Q1Exp[Tx]}{Tx^2} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g2^{(1,0)} [Tx, 1]}{Tx} dTx -
      T \int_{T0}^T \frac{g3^{(1,0,0)} [Tx, 1, 1]}{Tx} dTx - T \int_{T0}^T \frac{g4^{(1,0,0,0)} [Tx, 1, 1, 1]}{Tx} dTx
```

```
In[40]:= g1[T0]
```

```
Out[40]= 0
```

Chemin $C^{(2)}$ (déformation sphérique isotherme)

```
In[41]:= Chemin2 = {delta -> 1, a -> 1}
```

```
Out[41]= {delta -> 1, a -> 1}
```

■ Direction d'anisotropie

```
In[42]:= Nt = e3 @ e3;
```

■ Tenseur de déformation

```
In[43]:= F2 = (Kv ^ (1 / 3)) @ G;
```

```
In[44]:= B = F2.F2^T;
```

```
In[45]:= B // Components // MatrixForm
```

Note: Components in CanonicalBasis

```
Out[45]//MatrixForm=
```

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$

■ Tenseur des contraintes

```
In[46]:= σ2 = σ;
```

```
In[47]:= compσ2 = (σ2 // Components) /. Chemin2 // Simplify
```

Note: Components in CanonicalBasis

$$\begin{aligned} \text{Out[47]} = & \left\{ \left\{ \rho_0 g_2^{(0,1)} [T, Kv] + \rho_0 g_3^{(0,1,0)} [T, Kv, 1] - \right. \right. \\ & \left. \frac{2 \rho_0 g_4^{(0,0,0,1)} [T, Kv, 1, 1]}{3 Kv} + \rho_0 g_4^{(0,1,0,0)} [T, Kv, 1, 1], 0, 0 \right\}, \\ & \left\{ 0, \rho_0 g_2^{(0,1)} [T, Kv] + \rho_0 g_3^{(0,1,0)} [T, Kv, 1] - \frac{2 \rho_0 g_4^{(0,0,0,1)} [T, Kv, 1, 1]}{3 Kv} + \right. \\ & \left. \rho_0 g_4^{(0,1,0,0)} [T, Kv, 1, 1], 0 \right\}, \left\{ 0, 0, \rho_0 g_2^{(0,1)} [T, Kv] + \rho_0 g_3^{(0,1,0)} [T, Kv, 1] + \right. \\ & \left. \frac{4 \rho_0 g_4^{(0,0,0,1)} [T, Kv, 1, 1]}{3 Kv} + \rho_0 g_4^{(0,1,0,0)} [T, Kv, 1, 1] \right\} \end{aligned}$$

Vérifications le tenseur des contraintes est bien diagonal :

```
In[48]:= {compσ2[[1, 1]] - compσ2[[2, 2]], compσ2[[1, 2]], compσ2[[1, 3]], compσ2[[2, 3]]}
```

```
Out[48]= {0, 0, 0, 0}
```

■ mesure mécanique

contrainte moyenne

```
In[49]:= eq2tr = σ2m[T, Kv] == (compσ2[[1, 1]] + compσ2[[2, 2]] + compσ2[[3, 3]]) / 3 // Simplify
```

```
Out[49]= σ2m[T, Kv] == ρ0 (g2^{(0,1)} [T, Kv] + g3^{(0,1,0)} [T, Kv, 1] + g4^{(0,1,0,0)} [T, Kv, 1, 1])
```

■ Résolution

```
In[50]:= sol = DSolve[eq2tr, g2, {T, Kv}]
```

```
Out[50]= {{g2 -> Function[{T, Kv},
  
$$\int_1^{Kv} \frac{\sigma_{2m}[T, K\$666] - \rho_0 g_3^{(0,1,0)}[T, K\$666, 1] - \rho_0 g_4^{(0,1,0,0)}[T, K\$666, 1, 1]}{\rho_0} dK\$666 +$$

  C[1][T]]}}
```

```
In[51]:= sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /. C[1] -> g21 // ChVarMu[#, Kv] & // ArrangeInt
```

```
Out[51]= g21[T] + 
$$\int_1^{Kv} \frac{\sigma_{2m}[T, Kv] dKv}{\rho_0} - \int_1^{Kv} g_3^{(0,1,0)}[T, Kv, 1] dKv - \int_1^{Kv} g_4^{(0,1,0,0)}[T, Kv, 1, 1] dKv$$

```

```
In[52]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g2 *)
```

```
In[53]:= cond = 0 == g2[T, 1]
```

```
Out[53]= 0 == g21[T]
```

```
In[54]:= sol = DSolve[cond, g21, T]
```

```
Out[54]= {{g21 -> Function[{T}, 0]}}
```

```
In[55]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g21 *)
```

RESULTAT :

```
In[56]:= g2[T, Kv]
```

```
Out[56]= 
$$\int_1^{Kv} \frac{\sigma_{2m}[T, Kv] dKv}{\rho_0} - \int_1^{Kv} g_3^{(0,1,0)}[T, Kv, 1] dKv - \int_1^{Kv} g_4^{(0,1,0,0)}[T, Kv, 1, 1] dKv$$

```

```
In[57]:= g2[T, 1]
```

```
Out[57]= 0
```

Chemin $C^{(3)}$ (glissement dans le plan transversal)

```
In[58]:= chemin3 = {a -> 1};
```

■ Direction d'anisotropie

```
In[59]:= Nt = e3 @ e3;
```

■ Gradient de la transformation

```
In[60]:= F = DefineTensor[{{1, γ, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}, {1, 1}, B0];
F3 = F.F2; (* F2 : dilatation sphérique initiale *)
F3 // Components // MatrixForm
```

Note: Components in CanonicalBasis

```
Out[61]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Kv^{1/3} & Kv^{1/3} \gamma & 0 \\ 0 & Kv^{1/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{1/3} \end{pmatrix}$$

```

■ Tenseur de déformation

```
In[62]:= B = F3 . F3^T;
```

```
In[63]:= B // Components // MatrixForm
```

Note: Components in CanonicalBasis

```
Out[63]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3} (1 + \gamma^2) & Kv^{2/3} \gamma & 0 \\ Kv^{2/3} \gamma & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & Kv^{2/3} \end{pmatrix}$$

```

■ Relation $\gamma \leftrightarrow \delta$

```
In[64]:= eq = δ = (Sqrt[3] / 9 I1[B] ^ (3 / 2) / I3[B] ^ (1 / 2) // Simplify)
```

```
Out[64]= δ =  $\frac{(3 + \gamma^2)^{3/2}}{3 \sqrt{3}}$ 
```

```
In[65]:= Solve[eq, γ]
```

```
Out[65]= {{γ → -√3 √(-1 + δ2/3)}, {γ → √3 √(-1 + δ2/3)},
{γ → -√(-3 -  $\frac{3 \delta^{2/3}}{2}$  -  $\frac{3}{2} i \sqrt{3} \delta^{2/3}$ )}, {γ → √(-3 -  $\frac{3 \delta^{2/3}}{2}$  -  $\frac{3}{2} i \sqrt{3} \delta^{2/3}$ )},
{γ → -√(-3 -  $\frac{3 \delta^{2/3}}{2}$  +  $\frac{3}{2} i \sqrt{3} \delta^{2/3}$ )}, {γ → √(-3 -  $\frac{3 \delta^{2/3}}{2}$  +  $\frac{3}{2} i \sqrt{3} \delta^{2/3}$ )}}
```

```
In[66]:= γ = √3 √(-1 + δ2/3)
```

```
Out[66]= √3 √(-1 + δ2/3)
```

■ Tenseur des contraintes

```
In[67]:= σ3 = σ;
```

```
In[68]:= compσ3 = (σ3 // Components) /. chemin3 // Simplify;
```

Note: Components in CanonicalBasis

■ mesure de contrainte de cisaillement

In[69]:= eq3 = $\tau_3 \text{Exp}[T, K_v, \delta] == \text{comp}\sigma_3[[1, 2]]$

Out[69]= $\tau_3 \text{Exp}[T, K_v, \delta] == \frac{\sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \delta^{1/3} \rho_0 (g_3^{(0,0,1)}[T, K_v, \delta] + g_4^{(0,0,1,0)}[T, K_v, \delta, 1])}{K_v}$

■ Resolution de eq3

In[70]:= sol = DSolve[eq3, g3, {T, K_v, \delta}]

Out[70]= $\left\{ \left\{ g_3 \rightarrow \text{Function}[\{T, K_v, \delta\}, \int_1^\delta \frac{-K_v \tau_3 \text{Exp}[T, K_v, K\$987] + \sqrt{3} \sqrt{-1 + K\$987^{2/3}} K\$987^{1/3} \rho_0 g_4^{(0,0,1,0)}[T, K_v, K\$987, 1]}{\sqrt{3} \sqrt{-1 + K\$987^{2/3}} K\$987^{1/3} \rho_0} dx + C[1][T, K_v] \right\} \right\}$

In[71]:= sol[[1, 1, 2, 2]] = (sol[[1, 1, 2, 2]] /. C[1] → g31 // ChVarMu[#, \delta x] & // ArrangeInt)

Out[71]= $g_{31}[T, K_v] + \frac{K_v \int_1^\delta \frac{\tau_3 \text{Exp}[T, K_v, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} dx}{\sqrt{3} \rho_0} - \int_1^\delta g_4^{(0,0,1,0)}[T, K_v, \delta x, 1] dx$

In[72]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignment de la solution g3 *)

In[73]:= cond = 0 == g3[T, K_v, 1]

Out[73]= $0 == g_{31}[T, K_v]$

In[74]:= sol = DSolve[cond, g31, {T, K_v}]

Out[74]= $\left\{ \left\{ g_{31} \rightarrow \text{Function}[\{T, K_v\}, 0] \right\} \right\}$

In[75]:= Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignment de la solution g31 *)

RESULTAT

In[76]:= g3[T, K_v, \delta]

Out[76]= $\frac{K_v \int_1^\delta \frac{\tau_3 \text{Exp}[T, K_v, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} dx}{\sqrt{3} \rho_0} - \int_1^\delta g_4^{(0,0,1,0)}[T, K_v, \delta x, 1] dx$

In[77]:= g3[T, K_v, 1]

Out[77]= 0

Chemin $C^{(4)}$ (dir. anisotropie dans le plan de glissement)

■ Tenseur de déformation

```
In[78]:= $Assumptions =
$Assumptions &&  $\theta_1 > 0$  &&  $\theta_1 < \pi/2$  &&  $\lambda > 1$  &&  $\alpha t > 0$  &&  $\alpha t < \pi/2$  &&  $a < \lambda^2$  &&  $a \geq \lambda^{-2}$ 
```

```
Out[78]=  $T > 0$  &&  $T_0 > 0$  &&  $a > 0$  &&  $Kv > 0$  &&  $\delta > 1$  &&  $\rho_0 > 0$  &&  $\sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} > 0$  &&
 $a > 0$  &&  $\theta_1 > 0$  &&  $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$  &&  $\lambda > 1$  &&  $\alpha t > 0$  &&  $\alpha t < \frac{\pi}{2}$  &&  $a \leq \lambda^2$  &&  $a \geq \frac{1}{\lambda^2}$ 
```

Première direction propre de déformation (λ)

```
In[79]:= v1 = DefineTensor[{Cos[ $\theta_1$ ], Sin[ $\theta_1$ ], 0}, {1}, B0];
```

Troisième direction propre de déformation ($1/\lambda$)

```
In[80]:= v3 = DefineTensor[{-Sin[ $\theta_1$ ], Cos[ $\theta_1$ ], 0}, {1}, B0];
```

Seconde direction propre de déformation (1)

```
In[81]:= v2 = v3 ^ v1;
```

Définition de la base propre

```
In[82]:= Bpr = DefineBasis[v1, v2, v3];
```

Direct normalized orthogonal basis.

Définition du tenseur de déformation par ses composantes dans sa base propre

```
In[83]:= B = Kv^(2/3) ° DefineTensor[{{ $\lambda^2$ , 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0,  $\lambda^{-2}$ }}, {1, 1}, Bpr];
```

```
In[84]:= Components[B, {1, -1}, Bpr] // MatrixForm
```

```
Out[84]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} Kv^{2/3} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & Kv^{2/3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{Kv^{2/3}}{\lambda^2} \end{pmatrix}$$

```

■ Direction d'anisotropie

Les composantes de nt sont données dans la base propre Bpr

```
In[85]:= nt = DefineTensor[{Cos[ $\alpha t$ ], 0, Sin[ $\alpha t$ ]}, {1}, Bpr];
```

```
In[86]:= Nt = nt ⊗ nt;
```

Calcul de $\cos[\alpha t]^2$ en fonction de a

ModeleTKvDeltaA.nb

11

```
In[87]:= eq = a == ((B : Nt) / Kv ^ (2 / 3) /.
      Sin[at]^2 -> 1 - Cos[at]^2 // Collect[#, {Kv, Cos[at]^2}, Simplify] &) /. Cos[at]^2 -> CC
```

```
Out[87]= a ==  $\frac{1}{\lambda^2} + \frac{CC (-1 + \lambda^4)}{\lambda^2}$ 
```

```
In[88]:= solCC = Solve[eq, CC]
```

```
Out[88]= {{CC ->  $\frac{-1 + a \lambda^2}{-1 + \lambda^4}$ }}
```

■ Tenseur des contraintes

```
In[89]:=  $\sigma^4 = \sigma;$ 
```

```
In[90]:= comp $\sigma^4$  = comp $\sigma^4$  // Components // TrigFactor // Simplify;
```

Note: Components in CanonicalBasis

■ mesure de la contrainte de cisaillement

```
In[91]:= eq4 =
       $\tau^4 \text{Exp}[T, Kv, \delta, a] = (\text{comp}\sigma^4[[1, 2]] // \text{Collect}[\#, \{\text{g}4^{(0,0,0,1)}[T, Kv, \delta, a]\}, \text{Simplify}] \&) /.
      at \rightarrow \text{ArcCos}[\text{Sqrt}[\frac{-1 + a \lambda^2}{-1 + \lambda^4}]]$  (* voir Out[91] *)
```

```
Out[91]=  $\tau^4 \text{Exp}[T, Kv, \delta, a] =$ 

$$\frac{\rho_0 \left( (-1 + \lambda^4) \text{Sin}[2 \theta_1] + (1 - a \lambda^2 + \lambda^4) \text{Sin}\left[2 \left( \theta_1 + \text{ArcCos}\left[\sqrt{\frac{-1 + a \lambda^2}{-1 + \lambda^4}}\right]\right)\right] \right) \text{g}4^{(0,0,0,1)}[T, Kv, \delta, a]}{Kv \lambda^2} +$$


$$\frac{1}{6 Kv \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \lambda^2} \left( (-1 + \lambda^4) \text{Sin}[2 \theta_1] \left( \sqrt{3} Kv \tau^3 \text{Exp}[T, Kv, \delta] + \right. \right.$$


$$\left. \left. 3 \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \delta^{1/3} \rho_0 \left( -\text{g}4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta, 1] + \text{g}4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta, a] \right) \right) \right)$$

```

Simplification du Sinus

```
In[92]:= X = Sin[2  $\left( \theta_1 + \text{ArcCos}\left[\sqrt{\frac{-1 + a \lambda^2}{-1 + \lambda^4}}\right] \right)$ ] // TrigExpand // Simplify
```

```
Out[92]=  $\frac{2 \sqrt{-\lambda^4 - a^2 \lambda^4 + a (\lambda^2 + \lambda^6)} \text{Cos}[2 \theta_1] + (-1 + 2 a \lambda^2 - \lambda^4) \text{Sin}[2 \theta_1]}{-1 + \lambda^4}$ 
```

```
In[93]:= eq4 = eq4 /. Sin[2  $\left( \theta_1 + \text{ArcCos}\left[\sqrt{\frac{-1 + a \lambda^2}{-1 + \lambda^4}}\right] \right)$ ] -> X // Simplify
```

```
Out[93]=  $\tau^4 \text{Exp}[T, Kv, \delta, a] = \frac{1}{6 Kv \lambda^2} \left( 6 \rho_0 \left( (-1 + \lambda^4) \text{Sin}[2 \theta_1] - \right. \right.$ 

$$\left. \left. \frac{(1 - a \lambda^2 + \lambda^4) \left( -2 \sqrt{-\lambda^4 - a^2 \lambda^4 + a (\lambda^2 + \lambda^6)} \text{Cos}[2 \theta_1] + (1 - 2 a \lambda^2 + \lambda^4) \text{Sin}[2 \theta_1] \right)}{-1 + \lambda^4} \right) \right)$$


$$\text{g}4^{(0,0,0,1)}[T, Kv, \delta, a] + \frac{1}{\sqrt{-1 + \delta^{2/3}}} \left( (-1 + \lambda^4) \text{Sin}[2 \theta_1] \left( \sqrt{3} Kv \tau^3 \text{Exp}[T, Kv, \delta] + \right. \right.$$


$$\left. \left. 3 \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \delta^{1/3} \rho_0 \left( -\text{g}4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta, 1] + \text{g}4^{(0,0,1,0)}[T, Kv, \delta, a] \right) \right) \right)$$

```

■ Hypothèse simplificatrice :

In[94]:= hyp = D[g4[T, Kv, δ, a], δ, a] == 0

Out[94]= g4^(0,0,1,1)[T, Kv, δ, a] == 0

In[95]:= DSolve[hyp, g4, {T, Kv, δ, a}]

Out[95]= {{g4 → Function[{T, Kv, δ, a}, C[1][T, Kv][δ] + C[2][T, Kv][a]]}}

g4 est donc sous la forme d'une somme :

In[96]:= g4 = Function[{T, Kv, δ, a}, g41[T, Kv, δ] + g42[T, Kv, a]]

Out[96]= Function[{T, Kv, δ, a}, g41[T, Kv, δ] + g42[T, Kv, a]]

dans ces conditions, l'équation eq4 se simplifie :

In[97]:= eq4

$$\text{Out[97]} = \tau 4 \text{Exp}[T, Kv, \delta, a] = \frac{1}{6 Kv \lambda^2} \left(\frac{\sqrt{3} Kv (-1 + \lambda^4) \text{Sin}[2 \theta 1] \tau 3 \text{Exp}[T, Kv, \delta]}{\sqrt{-1 + \delta^{2/3}}} + 6 \rho 0 \left((-1 + \lambda^4) \text{Sin}[2 \theta 1] - \frac{(1 - a \lambda^2 + \lambda^4) (-2 \sqrt{-\lambda^4 - a^2 \lambda^4 + a (\lambda^2 + \lambda^6)} \text{Cos}[2 \theta 1] + (1 - 2 a \lambda^2 + \lambda^4) \text{Sin}[2 \theta 1])}{-1 + \lambda^4} \right) \right) g42^{(0,0,1)}[T, Kv, a]$$

■ Simplifications manuelles

(pour les remplacements signalés en rouge, voir l'annexe C2)

Le coefficient de $\tau 3 \text{Exp}[T, Kv, \delta]$ dans eq4 vaut 1:

In[98]:= Cτ3 = Coefficient[eq4[[2]], τ3Exp[T, Kv, δ]] /.
 $\frac{1}{(\sqrt{3} \sqrt{-1 + \delta^{2/3}} \lambda^2)} \rightarrow 1 / 2 / \text{Tan}[\phi] / \lambda^2$ /.
 $2 \theta 1 \rightarrow \pi / 2 - \phi$ /.
 $1 / \lambda^2 \rightarrow (1 - \text{Sin}[\phi])^2 / \text{Cos}[\phi]^2$ /.
 $\lambda^4 \rightarrow (1 + \text{Sin}[\phi])^4 / \text{Cos}[\phi]^4$ // Simplify

Out[98]= 1

Coefficient de g42^(0,0,1)[T, Kv, a]

In[99]:= Cg42 = Coefficient[eq4[[2]], g42^(0,0,1)[T, Kv, a]] // Factor // Map[FullSimplify, #] &

Out[99]= $\frac{\rho 0 (2 \lambda \sqrt{(-a + \lambda^2) (-1 + a \lambda^2)} (1 - a \lambda^2 + \lambda^4) \text{Cos}[2 \theta 1] + \lambda^2 (3 a - 2 (2 + a^2) \lambda^2 + 3 a \lambda^4) \text{Sin}[2 \theta 1])}{Kv (-1 + \lambda) \lambda^2 (1 + \lambda) (1 + \lambda^2)}$

Nouvelle forme de eq4 :

ModeleTKvDeltaA.nb

13

```
In[100]:=
eq4Simpl = τ4Exp[T, Kv, δ, a] == Ct3 τ3Exp[T, Kv, δ] + Cg42 g42(0,0,1)[T, Kv, a]

Out[100]=
τ4Exp[T, Kv, δ, a] == τ3Exp[T, Kv, δ] +
(ρ0 (2 λ √(-a + λ²) (-1 + a λ²) (1 - a λ² + λ⁴) Cos[2 θ1] + λ² (3 a - 2 (2 + a²) λ² + 3 a λ⁴) Sin[2 θ1])
g42(0,0,1)[T, Kv, a]) / (Kv (-1 + λ) λ² (1 + λ) (1 + λ²))
```

■ Résolution de eq4Simpl

```
In[101]:=
sol = DSolve[eq4Simpl, g42, {T, Kv, a}]

Out[101]=
{{g42 → Function[{T, Kv, a},
∫1a (-Kv λ τ3Exp[T, Kv, δ] + Kv λ⁵ τ3Exp[T, Kv, δ] + Kv λ τ4Exp[T, Kv, δ, K$2835] -
Kv λ⁵ τ4Exp[T, Kv, δ, K$2835]) / (ρ0 (-2 √(K$2835 - λ² - K$2835² λ² + K$2835 λ⁴) Cos[2 θ1] +
2 K$2835 λ² √(K$2835 - λ² - K$2835² λ² + K$2835 λ⁴) Cos[2 θ1] -
2 λ⁴ √(K$2835 - λ² - K$2835² λ² + K$2835 λ⁴) Cos[2 θ1] - 3 K$2835 λ Sin[2 θ1] +
4 λ³ Sin[2 θ1] + 2 K$2835² λ³ Sin[2 θ1] - 3 K$2835 λ⁵ Sin[2 θ1])) dK$2835 + C[1][T, Kv]]}}
```

```
In[102]:=
sol[[1, 1, 2, 2]] = sol[[1, 1, 2, 2]] /. C[1] → g421 // ChVarMu[#, ax] & // Simplify

Out[102]=
g421[T, Kv] + ∫1a
Kv λ (-1 + λ⁴) (τ3Exp[T, Kv, δ] - τ4Exp[T, Kv, δ, ax])
ρ0 (2 (-1 + ax λ² - λ⁴) √(ax - λ² - ax² λ² + ax λ⁴) Cos[2 θ1] + λ (4 λ² + 2 ax² λ² - 3 ax (1 + λ⁴)) Sin[2 θ1])
dax
```

```
In[103]:=
Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignation de la solution g42 *)
```

```
In[104]:=
g4[T, Kv, δ, a]
```

```
Out[104]=
g41[T, Kv, δ] + g421[T, Kv] + ∫1a
Kv λ (-1 + λ⁴) (τ3Exp[T, Kv, δ] - τ4Exp[T, Kv, δ, ax])
ρ0 (2 (-1 + ax λ² - λ⁴) √(ax - λ² - ax² λ² + ax λ⁴) Cos[2 θ1] + λ (4 λ² + 2 ax² λ² - 3 ax (1 + λ⁴)) Sin[2 θ1])
dax
```

```
In[105]:=
cond = 0 == g4[T, Kv, δ, 1]
```

```
Out[105]=
0 = g41[T, Kv, δ] + g421[T, Kv]
```

```
In[106]:=
sol = DSolve[cond, g41, {T, Kv, δ}]
```

```
Out[106]=
{{g41 → Function[{T, Kv, δ}, -g421[T, Kv]]}}
```

```

In[107]:=
  Evaluate[sol[[1, 1, 1]]] = sol[[1, 1, 2]]; (* Assignment de la solution g41 *)

In[108]:=
  g4[T, Kv, δ, a] /. ax - λ² - ax² λ² + ax λ⁴ → (λ² - ax) (ax λ² - 1) // PowerExpand

Out[108]=

$$\int_1^a \frac{\rho_0 (2 \sqrt{-ax + \lambda^2} \sqrt{-1 + ax \lambda^2} (-1 + ax \lambda^2 - \lambda^4) \cos[2 \theta_1] + \lambda (4 \lambda^2 + 2 ax^2 \lambda^2 - 3 ax (1 + \lambda^4)) \sin[2 \theta_1])}{Kv \lambda (-1 + \lambda^4) (\tau_3 \text{Exp}[T, Kv, \delta] - \tau_4 \text{Exp}[T, Kv, \delta, ax])} dx$$


In[109]:=
  g4[T, Kv, δ, 1]

Out[109]=
  0

```

Résultats

```

In[110]:=
  g4[T, Kv, δ, a]

Out[110]=

$$\int_1^a \frac{\rho_0 (2 (-1 + ax \lambda^2 - \lambda^4) \sqrt{ax - \lambda^2 - ax^2 \lambda^2 + ax \lambda^4} \cos[2 \theta_1] + \lambda (4 \lambda^2 + 2 ax^2 \lambda^2 - 3 ax (1 + \lambda^4)) \sin[2 \theta_1])}{Kv \lambda (-1 + \lambda^4) (\tau_3 \text{Exp}[T, Kv, \delta] - \tau_4 \text{Exp}[T, Kv, \delta, ax])} dx$$


In[111]:=
  g3[T, Kv, δ]

Out[111]=

$$\frac{Kv \int_1^{\delta} \frac{\tau_3 \text{Exp}[T, Kv, \delta x]}{\sqrt{-1 + \delta x^{2/3}} \delta x^{1/3}} dx}{\sqrt{3} \rho_0}$$


In[112]:=
  g2[T, Kv]

Out[112]=

$$\frac{\int_1^{Kv} \sigma_2 m[T, Kv x] dx}{\rho_0}$$


In[113]:=
  g1[T]

Out[113]=

$$-T \int_{T_0}^T \frac{Q_1 \text{Exp}[Tx]}{Tx^2} dTx$$


```

Présentation de l'intégrande de g4

```

In[114]:=
  integrandeg4 = D[g4[T, Kv, δ, a], a]

Out[114]=

$$\frac{Kv \lambda (-1 + \lambda^4) (\tau_3 \text{Exp}[T, Kv, \delta] - \tau_4 \text{Exp}[T, Kv, \delta, a])}{\rho_0 (2 (-1 + a \lambda^2 - \lambda^4) \sqrt{a - \lambda^2 - a^2 \lambda^2 + a \lambda^4} \cos[2 \theta_1] + \lambda (4 \lambda^2 + 2 a^2 \lambda^2 - 3 a (1 + \lambda^4)) \sin[2 \theta_1])}$$


```

ModeleTKvDeltaA.nb

15

In[115]:=

fa = Denominator[integrandeg4] / rho0

Out[115]=

$2 (-1 + a \lambda^2 - \lambda^4) \sqrt{a - \lambda^2 - a^2 \lambda^2 + a \lambda^4} \cos[2 \theta 1] + \lambda (4 \lambda^2 + 2 a^2 \lambda^2 - 3 a (1 + \lambda^4)) \sin[2 \theta 1]$

In[116]:=

fa = fa /. a -> (B : Nt) / Kv^(2/3) // Simplify

Out[116]=

$$\frac{(-1 + \lambda^4) (3 (-1 + \lambda^4) \sin[2 \theta 1] + 2 (1 + \lambda^4) \sin[2 (\alpha t + \theta 1)] - (-1 + \lambda^4) \sin[4 \alpha t + 2 \theta 1])}{4 \lambda}$$