



**HAL**  
open science

## Grandes Déformations

Stéphane Lejeunes

► **To cite this version:**

| Stéphane Lejeunes. Grandes Déformations. École d'ingénieur. France. 2014. cel-01104172v2

**HAL Id: cel-01104172**

**<https://cel.hal.science/cel-01104172v2>**

Submitted on 15 Dec 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Comportement des Matériaux: Grandes Déformations

Ecole Centrale Marseille

Lejeunes Stéphane

Novembre 2014

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

[lejeunes@lma.cnrs-mrs.fr](mailto:lejeunes@lma.cnrs-mrs.fr)

- Comprendre/formuler des lois de comportement en grandes déformations (élasticité, visco-élasticité, plasticité, ...)
- Comprendre/utiliser des outils de calculs E.F. en grandes déformations (Abaqus, ...)
- Aborder le couplage thermo-mécanique.

- 1 Les bases  
*cinématique, sthénique, equation d'équilibre*

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

- 1 Les bases  
*cinématique, sthénique, equation d'équilibre*
- 2 Formulation de loi de comportement  
*principes thermodynamique, objectivité, symétrie matérielle, ...*

- 1 Les bases  
*cinématique, sthénique, equation d'équilibre*
- 2 Formulation de loi de comportement  
*principes thermodynamique, objectivité, symétrie matérielle, ...*
- 3 Elasticité non-linéaire et éléments-finis  
*incompressibilité, formulation faible, ...*

- 1 Les bases  
*cinématique, sthénique, equation d'équilibre*
- 2 Formulation de loi de comportement  
*principes thermodynamique, objectivité, symétrie matérielle, ...*
- 3 Elasticité non-linéaire et éléments-finis  
*incompressibilité, formulation faible, ...*
- 4 Comportement dissipatif  
*visco-élasticité, plasticité, ...*

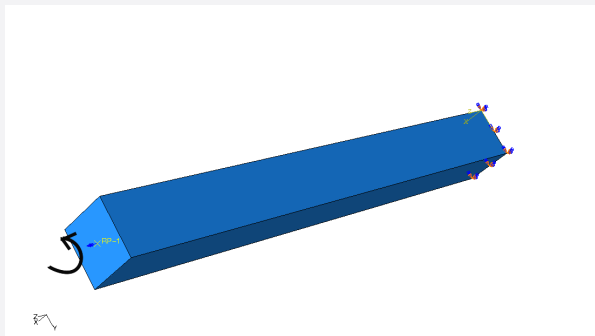
- 1 Les bases  
*cinématique, sthénique, equation d'équilibre*
- 2 Formulation de loi de comportement  
*principes thermodynamique, objectivité, symétrie matérielle, ...*
- 3 Elasticité non-linéaire et éléments-finis  
*incompressibilité, formulation faible, ...*
- 4 Comportement dissipatif  
*visco-élasticité, plasticité, ...*
- 5 Dissipation et couplage thermo-mécanique  
*auto-échauffement, déformation thermique, ...*



## Contexte/Motivations

Quand les petites déformations ne suffisent plus...

### Exemple : Torsion d'un barreau élastique avec Abaqus



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

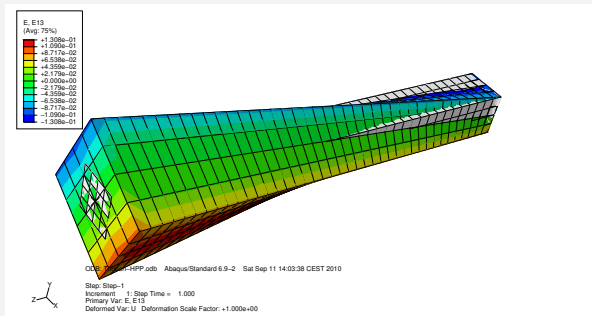
Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

# Contexte/Motivations

Quand les petites déformations ne suffisent plus...

## Exemple : Torsion d'un barreau élastique avec Abaqus, cas petites def



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

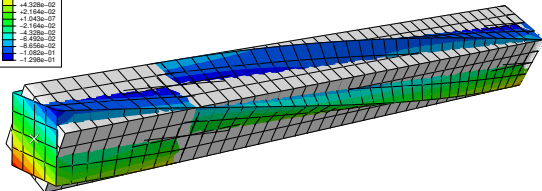
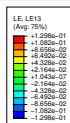
Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

# Contexte/Motivations

Quand les petites déformations ne suffisent plus...

## Exemple : Torsion d'un barreau élastique avec Abaqus, cas grandes def



ODB: Torsion-GD.odb Abaqus/Standard 6.9-2 Sat Sep 11 16:09:23 CEST 2010



Step: Step-1  
Increment: 10; Step Time = 1.000  
Primary Var: LE, LE13  
Deformed Var: U; Deformation Scale Factor: +1.000e+00

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

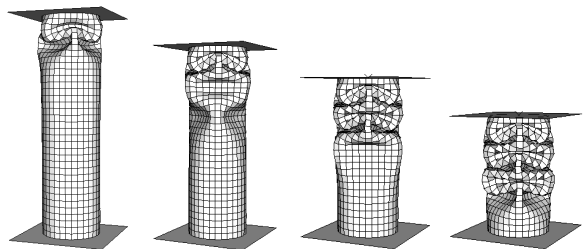
Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

Les domaines courants d'applications :

- Les instabilités de structures

Flambement d'un tube

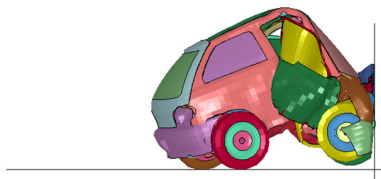


## Contexte/Motivations

### Quand utilise-t-on les grandes déformations ?

Les domaines courants d'applications :

- Les instabilités de structures
- Le crash (dynamique rapide)

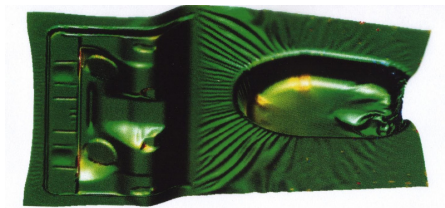


## Contexte/Motivations

### Quand utilise-t-on les grandes déformations ?

Les domaines courants d'applications :

- Les instabilités de structures
- Le crash (dynamique rapide)
- La mise en forme (emboutissage, ...)



Les domaines courants d'applications :

- Les instabilités de structures
- Le crash (dynamique rapide)
- La mise en forme (emboutissage, ...)

Les matériaux qui sont formulés en grandes transformation :

- Les aciers (plasticité/visco-plasticité)
- Les polymères (élastomères, thermoplastiques, ...)
- Les matériaux du vivant (peau, artères, ...)
- ...

Par défaut toutes les quantités sont écrites dans un repère cartésien (base orthonormé  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ )

- Scalaire :  $a$
- Vecteur :  $\mathbf{a}$  ou  $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$
- Tenseur d'ordre 2 :  $\mathbf{A}$  ou  $A_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j$
- Produit simplement contracté :  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_{ik} B_{kj}$  ou  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$
- Produit doublement contracté :  $\mathbf{A} : \mathbf{B} = A_{ij} B_{ij}$
- Norme :  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$  ou  $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$
- Symbole de Kronecker :  $\mathbf{I}$  ou  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$  et  $= 1$  si  $i = j$
- Trace d'un tenseur d'ordre 2 :  $tr(\mathbf{A}) = A_{ii} = A_{ij} \delta_{ij} = \mathbf{A} : \mathbf{I}$
- Cofacteur :  $Cof(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A})\mathbf{A}^{-T}$



- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$
- $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$
- $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$
- $\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$
- $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

exo.

Montrer que

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T) = \mathbf{B} : \mathbf{A}$$

## Rappel d'algèbre tensoriel

- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$
- $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$
- $\det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1}$
- $tr(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = tr(\mathbf{A}) + tr(\mathbf{B})$
- $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$

exo.

Montrer que

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = tr(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) = tr(\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}) = tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T) = tr(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^T) = \mathbf{B} : \mathbf{A}$$

exo.

$$\text{Montrer que } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) : \mathbf{C} = \mathbf{B} : (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} : (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}^T)$$

# Cinématique et Déformations

Introduction

Cinématique

Sthénique

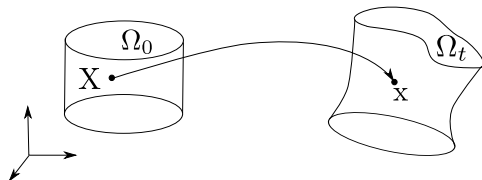
Thermodynamique

Hyperélasticité

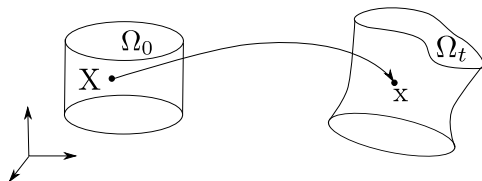
Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique



- 1  $\Omega_0$  un milieu continu dans son état initial et  $\mathbf{X}$  la position d'un point matériel.
- 2  $\Omega_t$  le même milieu à l'instant  $t$  et  $\mathbf{x}$  la position du même point matériel à  $t$ .



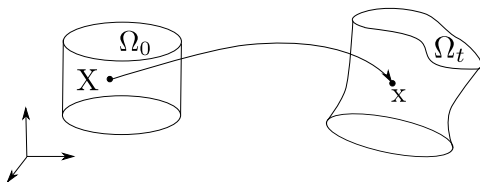
- 1  $\Omega_0$  un milieu continu dans son état initial et  $\mathbf{X}$  la position d'un point matériel.
- 2  $\Omega_t$  le même milieu à l'instant  $t$  et  $\mathbf{x}$  la position du même point matériel à  $t$ .

### définition 1

on note  $\phi(\mathbf{X}, t)$  l'application (vectorielle), bijective,  $tq.$  :

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$$

$\phi$  est appelée **la transformation**.



### définition 1

on note  $\phi(\mathbf{X}, t)$  l'application (vectorielle), bijective, *tg.* :

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$$

$\phi$  est appelée **la transformation**.

### définition 2

Localement, autour du point  $\mathbf{x}$  on a :

$$d\mathbf{x} = (\nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X}, t)) \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X}$$

$\mathbf{F}$  est le **gradient de la transformation**.

### Propriétés de $\mathbf{F}$

- Si on introduit le champ de déplacement  $\mathbf{u}$ , on a

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$$

- Transformation infinitésimale de volume :

$$dv = \det\mathbf{F}dV_0 = JdV_0$$

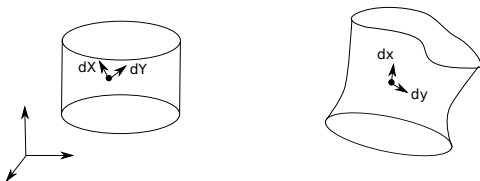
- Transformation infinitésimale de surface :

$$\mathbf{n}ds = \mathbf{J}\mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}dS = (\text{Cof}\mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}dS$$

- Conservation de l'orientation :

$$\det\mathbf{F} > 0$$





### Dans la configuration de référence

- Tenseur des dilatations (variation d'angles et de longueur)

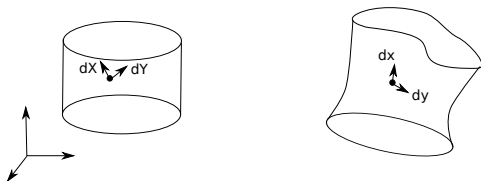
$$dx \cdot dy = dX \cdot F^T \cdot F \cdot dY = dX \cdot C \cdot dY$$

$C = F^T \cdot F$  est le tenseur de Cauchy-Green droit.

- Tenseur des déformations

$$dx \cdot dy - dX \cdot dY = 2dX \cdot E \cdot dY$$

avec  $E = \frac{1}{2}(C - I)$  le tenseur de Green-Lagrange.



### Dans la configuration actuelle

- Tenseur des dilatations (variation d'angles et de longueur)

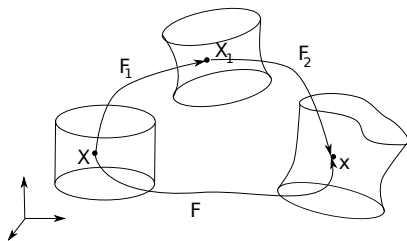
$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{y} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot d\mathbf{y}$$

$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$  est le tenseur de Cauchy-Green gauche.

- Tenseur des déformations

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{y} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{Y} = 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot d\mathbf{y}$$

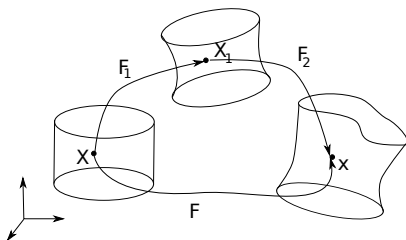
avec  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1})$  le tenseur de Euler-Almansi.



### Décomposition multiplicative

On a :  $dx = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$  et  $d\mathbf{X}_1 = \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{X}$  et  $dx = \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{X}_1$   
d'où :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{F}_1 \neq \mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{F}_2$$



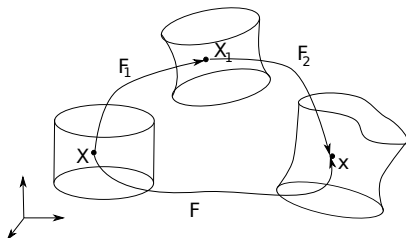
### Décomposition multiplicative

On a :  $dx = F \cdot dX$  et  $dX_1 = F_1 \cdot dX$  et  $dx = F_2 \cdot dX_1$   
d'où :

$$F = F_2 \cdot F_1 \neq F_1 \cdot F_2$$

exo.

Calculer  $E$  en fonction de  $E_1$  et  $E_2$ .



### Décomposition multiplicative

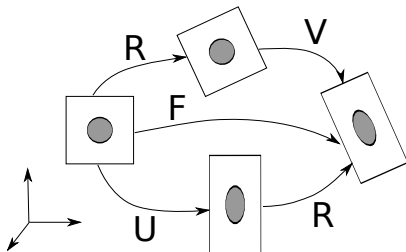
On a :  $dx = F \cdot dX$  et  $dX_1 = F_1 \cdot dX$  et  $dx = F_2 \cdot dX_1$   
d'où :

$$F = F_2 \cdot F_1 \neq F_1 \cdot F_2$$

exo.

Calculer  $E$  en fonction de  $E_1$  et  $E_2$ .

$$E = E_1 + F_1^T \cdot E_2 \cdot F_1$$



### Décomposition polaire

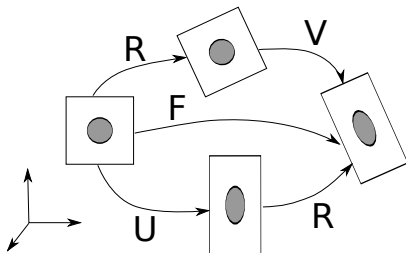
On définit de manière **unique**  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  tel que :

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$$

$\mathbf{R}$  est un tenseur orthogonal qui définit la rotation.  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$  sont des tenseurs de déformations pures droit et gauche.

De plus on a :

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2$$

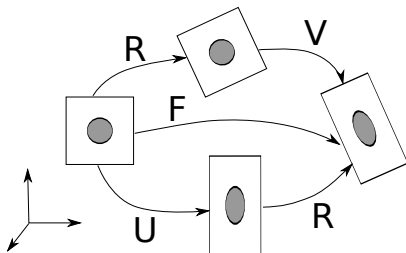


### Propriétés de la décomposition polaire

**U** et **V** ont les mêmes valeurs propres :  $\lambda_i > 0$ . Si on note  $N_j$  les vecteurs propres de **U** et  $n_j$  ceux de **V** on a :

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i N_i \otimes N_i \quad \text{et} \quad \mathbf{V} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i n_i \otimes n_i$$

de plus on a :  $n_j = \mathbf{R}N_j$ . Les  $\lambda_i$  sont appelés dilatations principales.



### Déformations de Hill

Une famille de mesure de déformations :

$$\mathbf{E}_\alpha = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{U}^\alpha - \mathbf{I}) \quad \mathbf{A}_\alpha = \frac{1}{\alpha}(\mathbf{V}^\alpha - \mathbf{I}) \quad \text{si } \alpha \neq 0$$

$$\mathbf{E}_{\log} = \log \mathbf{U} \quad \mathbf{A}_{\log} = \log \mathbf{V} \quad \text{sinon}$$

remarque :

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E} \quad \mathbf{A}_{-2} = \mathbf{A}$$

Attention :  $\log \mathbf{U} \neq \log U_{ij}$



On considère la variation locale de position par rapport au temps, on a :

$$\dot{\mathbf{d}}\mathbf{x} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{d}\mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

dans la configuration actuelle

On a :

$$\overline{(\mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{y})} = \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{d}\mathbf{y}$$

taux de déformation Eulérien :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$$

On considère la variation locale de position par rapport au temps, on a :

$$\dot{\mathbf{d}}\mathbf{x} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{d}\mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

dans la configuration actuelle

On a :

$$\overline{(\mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{y})} = \mathbf{d}\mathbf{x} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \cdot \mathbf{d}\mathbf{y}$$

taux de déformation Eulérien :

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)$$

dans la configuration de référence

On a :

$$\overline{(\mathbf{d}\mathbf{x} \cdot \mathbf{d}\mathbf{y})} = 2\mathbf{d}\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{d}\mathbf{Y}$$

On considère la variation locale de position par rapport au temps, on a :

$$\dot{\mathbf{d}}\mathbf{x} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{d}\mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{d}\mathbf{x} \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

### remarque 1

La partie anti-symétrique de  $\mathbf{L}$  est le taux de rotation (rotationnel du champs des vitesses) :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

On considère la variation locale de position par rapport au temps, on a :

$$d\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x} \quad \mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

### remarque 1

La partie anti-symétrique de  $\mathbf{L}$  est le taux de rotation (rotationnel du champs des vitesses) :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T)$$

### remarque 2

Pour tout mouvement de corps rigide précédé d'une pré-déformation (indépendante de  $t$ ), les taux de déformations  $\mathbf{D}$  et  $\dot{\mathbf{E}}$  s'annulent. Ce qui n'est pas le cas de  $\dot{\mathbf{B}}$ ,  $\dot{\mathbf{A}}$ , ...

### Principaux invariants

"Quantité scalaire invariante par changement de base"

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{X}) \\ I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{X})^2 - \text{tr}(\mathbf{X}^2)) \\ I_3(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}) \end{cases}$$

avec  $\mathbf{X} = \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$

### Principaux invariants

"Quantité scalaire invariante par changement de base"

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{X}) \\ I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{X})^2 - \text{tr}(\mathbf{X}^2)) \\ I_3(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}) \end{cases}$$

avec  $\mathbf{X} = \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$

### remarque

Il existe une infinité d'invariants (par exemple les  $\lambda_i$  sont des invariants)

### Principaux invariants

"Quantité scalaire invariante par changement de base"

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{X}) \\ I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{X})^2 - \text{tr}(\mathbf{X}^2)) \\ I_3(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}) \end{cases}$$

avec  $\mathbf{X} = \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$

### remarque

Il existe une infinité d'invariants (par exemple les  $\lambda_i$  sont des invariants)

### propriété

Equation de Cayley-Hamilton :  $\mathbf{X}^3 - I_1\mathbf{X}^2 + I_2\mathbf{X} - I_3\mathbf{I} = \mathbf{0}$

# Cinématique

## Ce qui faut retenir...

|                          | Lagrangien                                       | Eulérien   |
|--------------------------|--|--|
| Tenseur des dilatations  | $\mathbf{C}, \mathbf{U}$                         | $\mathbf{B}, \mathbf{V}$                         |
| Tenseur des déformations | $\mathbf{E}, \mathbf{E}_\alpha, \log \mathbf{U}$ | $\mathbf{A}, \mathbf{A}_\alpha, \log \mathbf{V}$ |
| Taux de déformation      | $\dot{\mathbf{E}}$                               | $\mathbf{D}$                                     |



# Contraintes et équations d'équilibre

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Une définition...

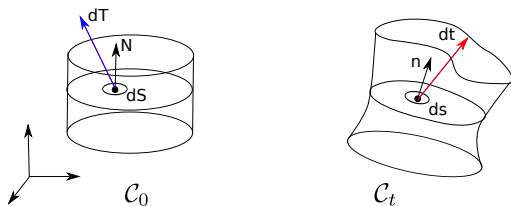
Le champ de contrainte traduit les **efforts** de cohésion interne s'exerçant à travers un **élément de surface** interne, virtuel.

### Une définition...

Le champ de contrainte traduit les **efforts** de cohésion interne s'exerçant à travers un **élément de surface** interne, virtuel.

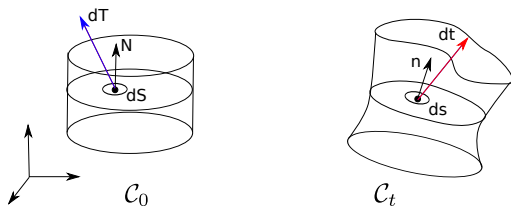
En grandes déformations

- Choix de l'élément de surface (Configuration actuelle ou de référence)
- Choix de la configuration des efforts (idem).



### Dans la configuration actuelle ( $C_t$ )

- Soit  $dt(\mathbf{x}, t)$  le vecteur contrainte, c.a.d les efforts intérieurs à travers  $n ds$ .



### Dans la configuration actuelle ( $C_t$ )

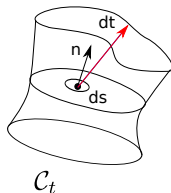
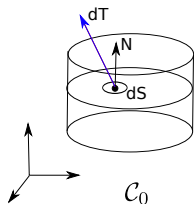
- Soit  $d\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$  le vecteur contrainte, c.a.d les efforts intérieurs à travers  $\mathbf{n}ds$ .

### Dans la configuration de référence ( $C_0$ )

- Soit  $d\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$  le vecteur contrainte transporté, c.a.d les efforts intérieurs à travers  $\mathbf{N}dS$  (sens physique ?).

# Sthénique

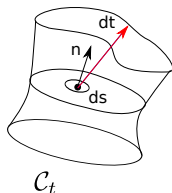
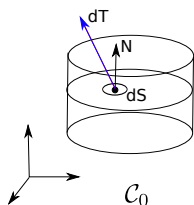
## Contraintes de Cauchy



### Description Eulérienne ( $C_t$ )

- On définit  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  tel que

$$d\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} ds$$

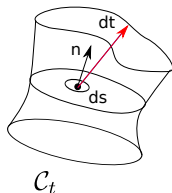
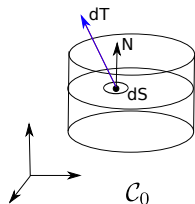


### Description Eulérienne ( $C_t$ )

- On définit  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  tel que

$$d\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma} \cdot n ds$$

- Il caractérise les efforts de cohésions, dans la **configuration actuelle** et qui s'exercent à travers un **élément de surface déformé**.

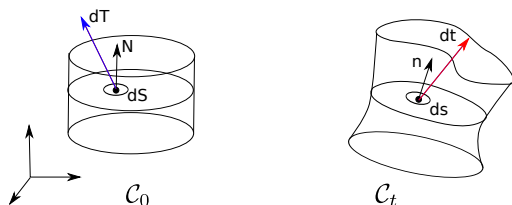


### Description "Mixte"

- On définit  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{X}, t)$  tel que

$$\tilde{\mathbf{d}}\mathbf{t}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{N}dS$$



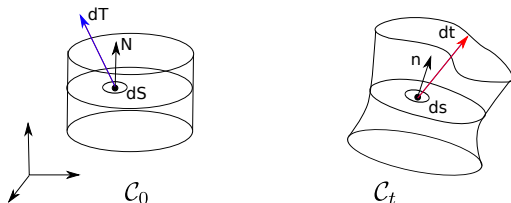


### Description "Mixte"

- On définit  $\Pi(\mathbf{X}, t)$  tel que

$$\tilde{d}\mathbf{t}(\mathbf{X}, t) = \Pi \cdot \mathbf{N}dS$$

- Il caractérise les efforts de cohésions, dans la **configuration actuelle** et qui s'exercent à travers un **élément de surface non-déformé**.

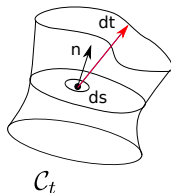
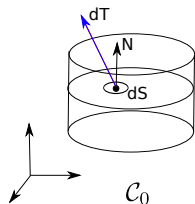


### Description "Mixte"

- On définit  $\Pi(\mathbf{X}, t)$  tel que

$$\tilde{d}\mathbf{t}(\mathbf{X}, t) = \Pi \cdot \mathbf{N} dS$$

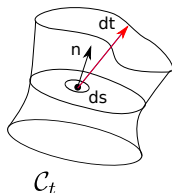
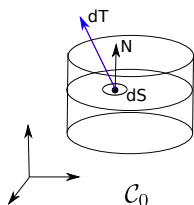
- Il caractérise les efforts de cohésions, dans la **configuration actuelle** et qui s'exercent à travers un **élément de surface non-déformé**.
- Contrainte de l'ingénieur : «simple d'accès par la mesure»



### Description Lagrangienne ( $C_t$ )

- On définit  $\mathbf{S}(\mathbf{X}, t)$  tel que

$$d\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N}dS$$

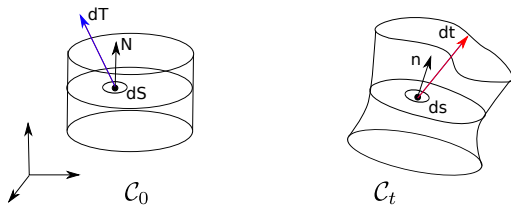


### Description Lagrangienne ( $C_t$ )

- On définit  $\mathbf{S}(\mathbf{X}, t)$  tel que

$$d\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} dS$$

- Il caractérise les efforts de cohésions, dans la **configuration de référence** et qui s'exercent à travers un **élément de surface non-déformé**.



### Description Lagrangienne ( $C_t$ )

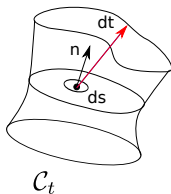
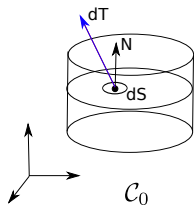
- On définit  $\mathbf{S}(\mathbf{X}, t)$  tel que

$$d\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} dS$$

- Il caractérise les efforts de cohésions, dans la **configuration de référence** et qui s'exercent à travers un **élément de surface non-déformé**.
- Sens physique ?

# Sthénique

## Quelques propriétés

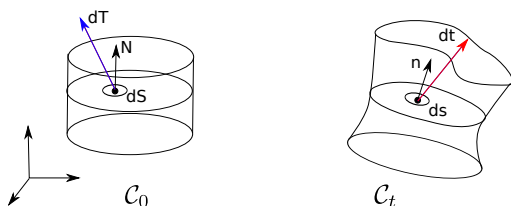


### Remarques

- $\sigma$  et  $S$  sont symétriques.

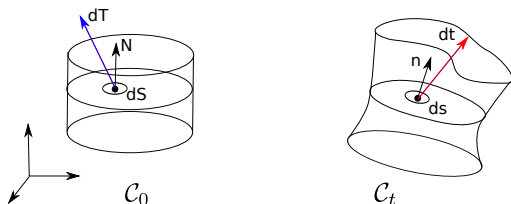
# Sthénique

## Quelques propriétés



### Remarques

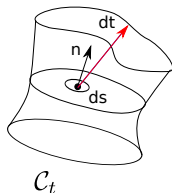
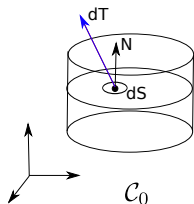
- $\sigma$  et  $S$  sont symétriques.
- En petites déformations tous les tenseurs de contraintes sont équivalents.



### Remarques

- $\sigma$  et  $\mathbf{S}$  sont symétriques.
- En petites déformations tous les tenseurs de contraintes sont équivalents.
- Tenseur de Kirchhoff  $\tau = J\sigma$



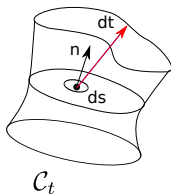
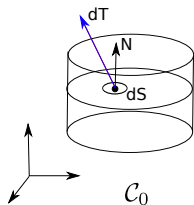


### Remarques

- $\sigma$  et  $\mathbf{S}$  sont symétriques.
- En petites déformations tous les tenseurs de contraintes sont équivalents.
- Tenseur de Kirchhoff  $\tau = J\sigma$

### exo

- Donner la relation liant  $\sigma$ ,  $\Pi$ ,  $\mathbf{S}$



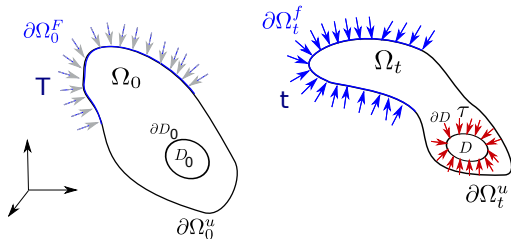
### Remarques

- $\sigma$  et  $\mathbf{S}$  sont symétriques.
- En petites déformations tous les tenseurs de contraintes sont équivalents.
- Tenseur de Kirchhoff  $\tau = J\sigma$

### exo

- Donner la relation liant  $\sigma$ ,  $\Pi$ ,  $\mathbf{S}$

$$J\sigma = \Pi \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$$

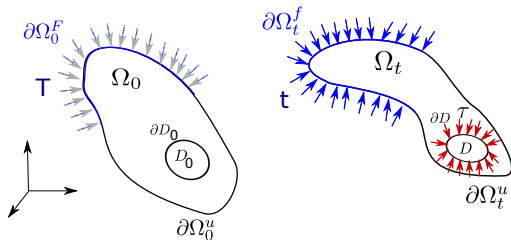


### Configuration actuelle

- $\partial\Omega_t^f$  surface d'application des efforts extérieurs,  $\partial\Omega_t^u$  surface d'application des déplacements, avec :

$$\partial\Omega_t = \partial\Omega_t^f \cup \partial\Omega_t^u \quad \text{et} \quad \partial\Omega_t^f \cap \partial\Omega_t^u = \emptyset$$

- $\mathbf{t}$  efforts extérieurs surfaciques dans la configuration actuelle
- $D$  un sous-domaine de  $\Omega_t$  et  $\tau$  les efforts intérieurs sur  $\partial D$

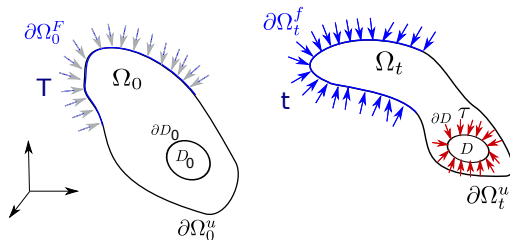


### Configuration de référence

- $\partial\Omega_0^F$  surface d'application des efforts extérieurs,  $\partial\Omega_0^U$  surface d'application des déplacements, avec :

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_0^F \cup \partial\Omega_0^U \quad \text{et} \quad \partial\Omega_0^F \cap \partial\Omega_0^U = \emptyset$$

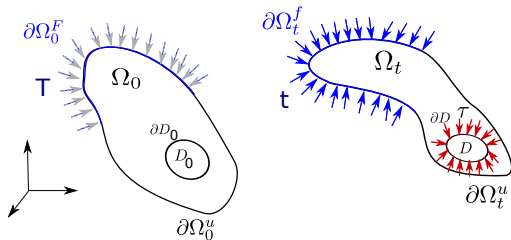
- **T** efforts extérieurs surfaciques transportés dans la configuration de référence.
- $D_0$  un sous-domaine de  $\Omega_0$  et  $\partial D_0$  sa frontière.



### Equation bilan

- Conservation de la masse (système fermé)

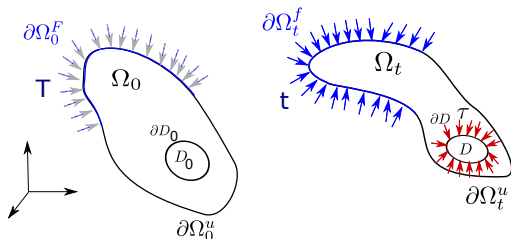
$$\int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dv = \int_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{X}, t) dV \quad \implies \quad J\rho = \rho_0$$



### Description Eulérienne

- Résultante statique

$$\int_{\partial D} \boldsymbol{\tau} ds + \int_D \mathbf{f}^v dD = 0 \quad \forall D \subset \Omega_t$$



### Description Eulerienne

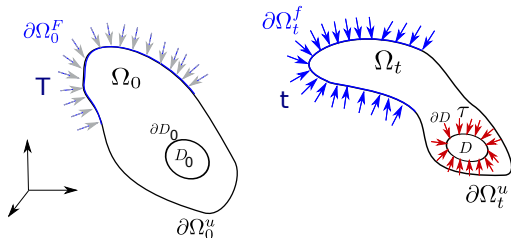
- Résultante statique

$$\int_{\partial D} \tau ds + \int_D \mathbf{f}^v dD = 0 \quad \forall D \subset \Omega_t$$

- Equilibre local

$$\operatorname{div}_x \sigma + \mathbf{f}^v = 0 \quad \text{dans } \Omega_t$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^s \quad \text{sur } \partial \Omega_t^f$$



### Description Eulérienne

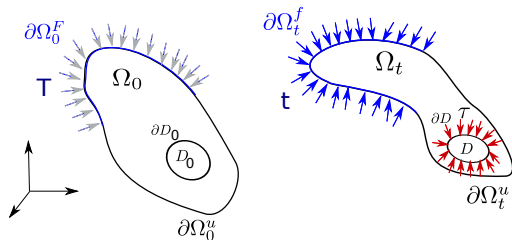
- Equilibre local

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^V = 0 \quad \text{dans } \Omega_t$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^S \quad \text{sur } \partial\Omega_t^f$$

- Le moment statique donne la symétrie de  $\boldsymbol{\sigma}$ .

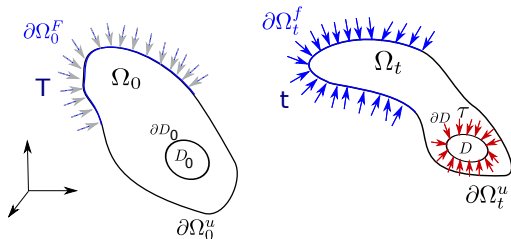




### Description Mixte

- Résultante statique

$$\int_{\partial D_0} \tilde{\tau} dS + \int_{D_0} \mathbf{f}^V dD_0 = 0 \quad \forall D_0 \subset \Omega_0$$



### Description Mixte

- Résultante statique

$$\int_{\partial D_0} \tilde{\tau} dS + \int_{D_0} \mathbf{f}^V dD_0 = 0 \quad \forall D_0 \subset \Omega_0$$

- Equilibre local

$$\begin{aligned} \text{DIV}_{\mathbf{x}} \Pi + \mathbf{f}^V &= 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \Pi \cdot \mathbf{N} &= \mathbf{t}^S & \text{sur } \partial \Omega_t^f \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_{int}(\delta \mathbf{u}) + \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

### Description Eulerienne

- Champ de vitesse virtuel :

$$\mathbf{x} \in \Omega_t \longrightarrow \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3$$

- Puissance des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{u}))_{sym} d\Omega$$

- Puissance des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_{ext} = \int_{\Omega_t} \mathbf{f}^v \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} ds$$

$$\mathcal{P}_{int}(\delta \mathbf{u}) + \mathcal{P}_{ext}(\delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

### Description Mixte

- Champ de vitesse virtuel :

$$\mathbf{X} \in \Omega_0 \longrightarrow \delta \mathbf{u}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^3$$

- Puissance des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega_0} \mathbf{\Pi} : (\nabla_{\mathbf{X}}(\delta \mathbf{u})) d\Omega_0$$

- Puissance des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_{ext} = \int_{\Omega_0} \mathbf{f}^V \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 + \int_{\partial\Omega_0} (\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{N}) \cdot \delta \mathbf{u} dS$$

### Puissance massique interne

- Pour les configurations Eulérienne et mixte :

$$\mathcal{W}_{int} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}}$$

### Puissance massique interne

- Pour les configurations Eulérienne et mixte :

$$\mathcal{W}_{int} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}}$$

- $\mathbf{D}$  et  $\dot{\mathbf{F}}$  sont duales de  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\Pi}$

### Puissance massique interne

- Pour les configurations Eulérienne et mixte :

$$\mathcal{W}_{int} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}}$$

- $\mathbf{D}$  et  $\dot{\mathbf{F}}$  sont duales de  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\Pi}$

### Exo

- Quel est la densité de puissance interne dans la configuration Lagrangienne ?

### Puissance massique interne

- Pour les configurations Eulérienne et mixte :

$$\mathcal{W}_{int} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = -\frac{1}{\rho_0} \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}}$$

- $\mathbf{D}$  et  $\dot{\mathbf{F}}$  sont duales de  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\Pi}$

### Exo

- Pour la configuration Lagrangienne :

$$\mathcal{W}_{int} = -\frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$$

- $\dot{\mathbf{E}}$  est duale de  $\mathbf{S}$ .



# Thermodynamique

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Définition

- Conservation de l'énergie totale :

$$\frac{d}{dt} (E + K) = \mathcal{P}^{ext} + Q$$

avec  $E$  énergie interne,  $K$  énergie cinétique,  $\mathcal{P}^{ext}$  puissance des efforts extérieurs,  $Q$  taux de chaleur apporté.

- Avec le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt} (E) = -\mathcal{P}^{int} + Q$$

### Définition

- Conservation de l'énergie totale :

$$\frac{d}{dt} (E + K) = \mathcal{P}^{ext} + Q$$

avec  $E$  énergie interne,  $K$  énergie cinétique,  $\mathcal{P}^{ext}$  puissance des efforts extérieurs,  $Q$  taux de chaleur apporté.

- Avec le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt} (E) = -\mathcal{P}^{int} + Q$$

### Version Eulérienne

- $E = \int_D \rho e dD$
- $\mathcal{P}^{int} = - \int_D \sigma : \mathbf{D} dD$
- $Q = \int_D \rho r dD - \int_{\partial D} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$

### Définition

- Conservation de l'énergie totale :

$$\frac{d}{dt} (E + K) = \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{Q}$$

avec  $E$  énergie interne,  $K$  énergie cinétique,  $\mathcal{P}^{ext}$  puissance des efforts extérieurs,  $\mathcal{Q}$  taux de chaleur apporté.

- Avec le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt} (K) = \mathcal{P}^{int} + \mathcal{Q}$$

### Version Eulerienne

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho e dD = \int_D (\sigma : \mathbf{D} + \rho r) dD - \int_{\partial D} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} ds$$

version locale :

$$\rho \dot{e} = \sigma : \mathbf{D} + \rho r - \operatorname{div}_x \mathbf{q}$$

### Définition

- Conservation de l'énergie totale :

$$\frac{d}{dt} (E + K) = \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{Q}$$

avec  $E$  énergie interne,  $K$  énergie cinétique,  $\mathcal{P}^{ext}$  puissance des efforts extérieurs,  $\mathcal{Q}$  taux de chaleur apporté.

- Avec le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt} (K) = \mathcal{P}^{int} + \mathcal{Q}$$

### Version Lagrangienne

- $E = \int_{D_0} \rho_0 e dD$
- $\mathcal{P}^{int} = - \int_{D_0} \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} dD_0 = - \int_{D_0} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} dD_0$
- $\mathcal{Q} = \int_{D_0} \rho_0 r dD_0 - \int_{\partial D_0} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} dS$

### Définition

- Conservation de l'énergie totale :

$$\frac{d}{dt} (E + K) = \mathcal{P}^{ext} + \mathcal{Q}$$

avec  $E$  énergie interne,  $K$  énergie cinétique,  $\mathcal{P}^{ext}$  puissance des efforts extérieurs,  $\mathcal{Q}$  taux de chaleur apporté.

- Avec le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{d}{dt} (E) = -\mathcal{P}^{int} + \mathcal{Q}$$

### Version Lagrangienne

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \rho_0 e dD_0 = \int_{D_0} (\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} + \rho_0 r) dD_0 - \int_{\partial D_0} \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} dS$$

version locale :  $\rho_0 \dot{e} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} + \rho_0 r - \text{DIV}_X \mathbf{Q}$

### Définition

- Variation d'entropie :

$$\dot{\mathcal{S}} - \mathcal{T}_{ext} \geq 0$$

avec  $\mathcal{S}$  l'entropie, et  $\mathcal{T}_{ext}$  l'apport extérieur d'entropie.

### Définition

- Variation d'entropie :

$$\dot{\mathcal{S}} - \mathcal{T}_{ext} \geq 0$$

avec  $\mathcal{S}$  l'entropie, et  $\mathcal{T}_{ext}$  l'apport extérieur d'entropie.

### Version Eulérienne

- soit  $\Theta$  la température absolue.
- $\mathcal{S} = \int_D \rho \eta dD$  avec  $\eta$  l'entropie spécifique.
- $\mathcal{T}_{ext} = \int_D \frac{\rho r}{\Theta} dD - \int_{\partial D} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\Theta} ds$



### Définition

- Variation d'entropie :

$$\dot{\mathcal{S}} - \mathcal{T}_{ext} \geq 0$$

avec  $\mathcal{S}$  l'entropie, et  $\mathcal{T}_{ext}$  l'apport extérieur d'entropie.

### Version Eulérienne

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \eta dD - \int_D \frac{\rho r}{\Theta} dD + \int_{\partial D} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\Theta} ds \geq 0 \quad \forall D \in \Omega_t$$

### Définition

- Variation d'entropie :

$$\dot{S} - \mathcal{T}_{ext} \geq 0$$

### Version Eulérienne

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \eta dD - \int_D \frac{\rho r}{\Theta} dD + \int_{\partial D} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\Theta} ds \geq 0 \quad \forall D \in \Omega_t$$

$$\text{version locale : } \rho \Theta \dot{\eta} - \rho r + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \geq 0$$

### Définition

- Variation d'entropie :

$$\dot{\mathcal{S}} - \mathcal{T}_{ext} \geq 0$$

### Version Eulérienne

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \eta dD - \int_D \frac{\rho r}{\Theta} dD + \int_{\partial D} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\Theta} ds \geq 0 \quad \forall D \in \Omega_t$$

$$\text{version locale : } \rho \Theta \dot{\eta} - \rho r + \text{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \geq 0$$

### Version Lagrangienne

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \rho_0 \eta dD_0 - \int_{D_0} \frac{\rho_0 r}{\Theta} dD_0 + \int_{\partial D_0} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}}{\Theta} dS \geq 0 \quad \forall D_0 \in \Omega_0$$

### Définition

- Variation d'entropie :

$$\dot{S} - \mathcal{T}_{ext} \geq 0$$

### Version Eulérienne

$$\frac{d}{dt} \int_D \rho \eta dD - \int_D \frac{\rho r}{\Theta} dD + \int_{\partial D} \frac{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}}{\Theta} ds \geq 0 \quad \forall D \in \Omega_t$$

version locale :  $\rho \Theta \dot{\eta} - \rho r + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \geq 0$

### Version Lagrangienne

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} \rho_0 \eta dD_0 - \int_{D_0} \frac{\rho_0 r}{\Theta} dD_0 + \int_{\partial D_0} \frac{\mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}}{\Theta} dS \geq 0 \quad \forall D_0 \in \Omega_0$$

version locale :  $\rho_0 \Theta \dot{\eta} - \rho_0 r + \operatorname{DIV}_{\mathbf{x}} \mathbf{Q} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \geq 0$

### en Eulerien

- Le premier principe :

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q}$$

- Le second principe :

$$\rho \Theta \dot{\eta} - \rho r + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \geq 0$$

- Energie libre de Helmholtz :

$$\psi = e - \Theta \eta$$

### en Eulerien

- Le premier principe :

$$\rho \dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q}$$

- Le second principe :

$$\rho \Theta \dot{\eta} - \rho r + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \geq 0$$

- Energie libre de Helmholtz :

$$\psi = \mathbf{e} - \Theta \eta$$

### Clausius Duhem (en Eulerien)

$$\Phi = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + \eta \dot{\Theta}) - \frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \geq 0$$

### en Lagrangien

- Le premier principe :

$$\rho_0 \dot{\mathbf{e}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} + \rho_0 r - \text{DIV}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q}$$

- Le second principe :

$$\rho_0 \Theta \dot{\eta} - \rho_0 r + \text{DIV}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \Theta \geq 0$$

- Energie libre de Helmholtz :

$$\psi = \mathbf{e} - \Theta \eta$$

### en Lagrangien

- Le premier principe :

$$\rho_0 \dot{e} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} + \rho_0 r - \text{DIV}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q}$$

- Le second principe :

$$\rho_0 \Theta \dot{\eta} - \rho_0 r + \text{DIV}_{\mathbf{X}} \mathbf{Q} - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \Theta \geq 0$$

- Energie libre de Helmholtz :

$$\psi = e - \Theta \eta$$

### Clausius Duhem (en Lagrangien)

$$\Phi_0 = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 (\dot{\psi} + \eta \dot{\Theta}) - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \Theta \geq 0$$

$$\Phi_0 = \mathbf{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0 (\dot{\psi} + \eta \dot{\Theta}) - \frac{1}{\Theta} \mathbf{Q} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} \Theta \geq 0$$



### Sources de Dissipations

- La dissipation se décompose en partie intrinsèque et partie thermique :

$$\Phi = \Phi^{intr} + \Phi^{therm}$$

$\Phi^{intr}$  est lié aux irréversibilités mécanique,  $\Phi^{therm}$  est la dissipation thermique.

### Sources de Dissipations

- La dissipation se décompose en partie intrinsèque et partie thermique :

$$\Phi = \Phi^{intr} + \Phi^{therm}$$

$\Phi^{intr}$  est lié aux irréversibilités mécanique,  $\Phi^{therm}$  est la dissipation thermique.

- Par Exemple, en Eulérien :

$$\Phi^{intr} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\Theta})$$

$$\Phi^{therm} = -\frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Theta$$

### Sources de Dissipations

- La dissipation se décompose en partie intrinsèque et partie thermique :

$$\Phi = \Phi^{intr} + \Phi^{therm}$$

$\Phi^{intr}$  est lié aux irréversibilités mécanique,  $\Phi^{therm}$  est la dissipation thermique.

- Par Exemple, en Eulérien (si on suit Germain...) :

$$\Phi^{intr} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\Theta}) \geq 0$$

$$\Phi^{therm} = -\frac{1}{\Theta} \mathbf{q} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \geq 0$$

### Sources de Dissipations

- La dissipation se décompose en partie intrinsèque et partie thermique :

$$\Phi = \Phi^{intr} + \Phi^{therm}$$

$\Phi^{intr}$  est lié aux irréversibilités mécaniques,  $\Phi^{therm}$  est la dissipation thermique.

- Si on néglige les effets thermiques :

$$\Phi = \sigma : \mathbf{D} - \rho \dot{\psi} \geq 0$$

La puissance interne se décompose en une partie stockée et une partie dissipée.

### Principes généraux

- La loi de comportement doit fournir l'état de contrainte en fonction des variables thermodynamiques. De manière générale :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \underset{\tau \leq t, \mathbf{y} \in \mathcal{V}(\mathbf{x})}{\mathcal{G}} (\mathbf{B}(\mathbf{y}, \tau), \Theta(\mathbf{y}, \tau), \dots)$$

### Principes généraux

- La loi de comportement doit fournir l'état de contrainte en fonction des variables thermodynamiques. De manière générale :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t, \mathbf{y} \in \mathcal{V}(\mathbf{x})}(\mathbf{B}(\mathbf{y}, \tau), \Theta(\mathbf{y}, \tau), \dots)$$

- Hypothèse de l'état local :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \Theta(\mathbf{x}, t), \alpha_j(\mathbf{x}, t), \dots)$$

avec  $\alpha_j$  les variables internes.

### Principes généraux

- La loi de comportement doit fournir l'état de contrainte en fonction des variables thermodynamiques. De manière générale :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}_{\tau \leq t, \mathbf{y} \in \mathcal{V}(\mathbf{x})}(\mathbf{B}(\mathbf{y}, \tau), \Theta(\mathbf{y}, \tau), \dots)$$

- Hypothèse de l'état local :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \Theta(\mathbf{x}, t), \alpha_j(\mathbf{x}, t), \dots)$$

avec  $\alpha_j$  les variables internes.

- Une loi de comportement doit vérifier le principe d'objectivité (indifférence matérielle).

### Une définition

«La loi de comportement doit être invariante (hormis le transport d'un référentiel à un autre) pour tout changement de référentiel de la configuration actuelle.»



### Une définition

«La loi de comportement doit être invariante (hormis le transport d'un référentiel à un autre) pour tout changement de référentiel de la configuration actuelle.»

### En pratique

- Soit  $\mathcal{C}_t$  la configuration courante, et  $\mathcal{C}_t^*$  la même configuration dans un autre repère (tourné de  $\mathbf{Q}$ ) :

| Description  | Vecteur objectif                             | Tenseur ordre 2 objectif        |
|--------------|--|---------------------------------|
| Lagrangienne | $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}$                  | $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$     |
| Eulérienne   | $\mathbf{y}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}$ | $\mathbf{A}^* = \mathbf{QAQ}^T$ |
| Mixte        | $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}$ | $\mathbf{A}^* = \mathbf{QA}$    |

### Une définition

«La loi de comportement doit être invariante (hormis le transport d'un référentiel à un autre) pour tout changement de référentiel de la configuration actuelle.»

### En pratique

- Soit  $\mathcal{C}_t$  la configuration courante, et  $\mathcal{C}_t^*$  la même configuration dans un autre repère (tourné de  $\mathbf{Q}$ ) :

| Description  | Vecteur objectif                             | Tenseur ordre 2 objectif                          |
|--------------|--|---|
| Lagrangienne | $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Y}$                  | $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$                       |
| Eulerienne   | $\mathbf{y}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{y}$ | $\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}\mathbf{Q}^T$ |
| Mixte        | $\mathbf{Y}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Y}$ | $\mathbf{A}^* = \mathbf{Q}\mathbf{A}$             |

- Une loi de comportement  $\mathcal{G}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \Theta(\mathbf{x}, t), \alpha_i(\mathbf{x}, t), \dots)$  est objective si :
  - 1 toutes les variables sont objectives ( $\alpha_i, \dots$ ).
  - 2  $\mathcal{G}$  est objectif.

### Lois élastiques

Exemple de loi de comportement :

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \lambda \text{Tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \\ \sigma = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}(\mathbf{B} - \mathbf{I})\mathbf{I} + \mu(\mathbf{B} - \mathbf{I}) \\ \sigma = \lambda \text{Tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{A} \end{cases}$$

### Lois élastiques

Exemple de loi de comportement :

$$\begin{cases} \mathbf{S} = \lambda \text{Tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \\ \sigma = \frac{\lambda}{2} \text{Tr}(\mathbf{B} - \mathbf{I})\mathbf{I} + \mu(\mathbf{B} - \mathbf{I}) \\ \sigma = \lambda \text{Tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{A} \end{cases}$$

### Exo

Les lois précédentes sont elles objectives ?

# Hyperélasticité

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Une définition

Un comportement hyperélastique est réversible (pas de dissipation mécanique)  
le comportement mécanique est entièrement défini par la donnée d'une énergie de déformation.

### Une définition

Un comportement hyperélastique est réversible (pas de dissipation mécanique)

le comportement mécanique est entièrement défini par la donnée d'une énergie de déformation.

### Dissipation intrinsèque (en isotherme)

- En eulérien :

$$\Phi^{intr} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \dot{\psi}(\mathbf{B}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = 2\rho \mathbf{B} \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}}$$

- En mixte :

$$\Phi^{intr} = \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0 \dot{\psi}(\mathbf{F}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}}$$

- En lagrangien :

$$\Phi^{intr} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \rho_0 \dot{\psi}(\mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}$$

### Propriétés de l'énergie libre

- Normalisation (pas d'énergie pour une déformation nulle) :

$$\psi(\mathbf{F} = \mathbf{I}) = 0$$



### Propriétés de l'énergie libre

- Normalisation (pas d'énergie pour une déformation nulle) :

$$\psi(\mathbf{F} = \mathbf{I}) = 0$$

- Etat de référence libre de contraintes :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \Big|_{\mathbf{B}=\mathbf{I}} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = 0$$

### Propriétés de l'énergie libre

- Normalisation (pas d'énergie pour une déformation nulle) :

$$\psi(\mathbf{F} = \mathbf{I}) = 0$$

- Etat de référence libre de contraintes :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \Big|_{\mathbf{B}=\mathbf{I}} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = 0$$

- Coercivité :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \psi(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty & \text{si} & \lambda_i \rightarrow +\infty \\ \psi(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty & \text{si} & \det \mathbf{F} \rightarrow +\infty \\ \psi(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty & \text{si} & \det \mathbf{F} \rightarrow 0^+ \end{array} \right.$$

### Propriétés de l'énergie libre

- Normalisation (pas d'énergie pour une déformation nulle) :

$$\psi(\mathbf{F} = \mathbf{I}) = 0$$

- Etat de référence libre de contraintes :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{F}} \Big|_{\mathbf{F}=\mathbf{I}} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \Big|_{\mathbf{B}=\mathbf{I}} = 0 \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \Big|_{\mathbf{E}=\mathbf{0}} = 0$$

- Coercivité :

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty & \text{si} & \lambda_i \rightarrow +\infty \\ \psi(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty & \text{si} & \det \mathbf{F} \rightarrow +\infty \\ \psi(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty & \text{si} & \det \mathbf{F} \rightarrow 0^+ \end{cases}$$

- Polyconvexité (existence et unicité de solution du p.b. d'équilibre) :

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi^*(\mathbf{F}, \text{Cof} \mathbf{F}, \det \mathbf{F}) \quad \text{avec} \quad \psi^* \quad \text{convexe}$$

### Isotropie

Invariance matérielle pour toute rotation  $\mathbf{Q}$  de la configuration de référence. Se traduit par :

$$\psi(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}) = \psi(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q} \text{ tenseur orthogonal}$$

### Isotropie

Invariance matérielle pour toute rotation  $\mathbf{Q}$  de la configuration de référence. Se traduit par :

$$\psi(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}) = \psi(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q} \text{ tenseur orthogonal}$$

### Isotropie transverse

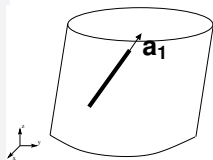
On définit les tenseurs d'orientations :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_1 = \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_3 = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1) \end{cases}$$

Isotropie transverse :

$$\psi(\mathbf{F} \cdot \mathbf{Q}) = \psi(\mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{Q} \in \mathcal{O}$$

avec  $\mathcal{O}$  tel que :  $\mathbf{Q}\mathbf{M}_i\mathbf{Q}^T = \mathbf{M}_i$



### Théorème de représentation

Une fonction scalaire isotrope  $\psi(\mathbf{X})$ , où  $\mathbf{X}$  est un tenseur symétrique, peut-être représentée par les invariants de  $\mathbf{X}$  :

$$\psi(\mathbf{X}) = \psi(I_1, I_2, I_3)$$

avec

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{X}) \\ I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{X})^2 - \text{tr}(\mathbf{X}^2)) \\ I_3(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}) \end{cases}$$

### Théorème de représentation

Une fonction scalaire isotrope  $\psi(\mathbf{X})$ , où  $\mathbf{X}$  est un tenseur symétrique, peut-être représentée par les invariants de  $\mathbf{X}$  :

$$\psi(\mathbf{X}) = \psi(I_1, I_2, I_3)$$

avec

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{X}) \\ I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{X})^2 - \text{tr}(\mathbf{X}^2)) \\ I_3(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}) \end{cases}$$

### Propriétés

- **Hyperélasticité isotrope :  $\mathbf{X} = \mathbf{B}$  ou  $\mathbf{X} = \mathbf{C}$**

### Théorème de représentation

Une fonction scalaire isotrope  $\psi(\mathbf{X})$ , où  $\mathbf{X}$  est un tenseur symétrique, peut-être représentée par les invariants de  $\mathbf{X}$  :

$$\psi(\mathbf{X}) = \psi(I_1, I_2, I_3)$$

avec

$$\begin{cases} I_1(\mathbf{X}) = \text{tr}(\mathbf{X}) \\ I_2(\mathbf{X}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{X})^2 - \text{tr}(\mathbf{X}^2)) \\ I_3(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{X}) \end{cases}$$

### Propriétés

- **Hyperélasticité isotrope :  $\mathbf{X} = \mathbf{B}$  ou  $\mathbf{X} = \mathbf{C}$**
- Ce théorème est généralisable à  $\psi(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \dots)$



### Loi de comportement

- en eulérien :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left( (\psi_1 + \psi_2 I_1) \mathbf{B} - \psi_2 \mathbf{B}^2 + \psi_3 I_3 \mathbf{I} \right)$$

- en mixte :

$$\boldsymbol{\Pi} = 2\rho_0 \left( (\psi_1 + \psi_2 I_1) \mathbf{F} - \psi_2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{C} + \psi_3 I_3 \mathbf{F}^{-T} \right)$$

- en lagrangien :

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \left( (\psi_1 + \psi_2 I_1) \mathbf{I} - \psi_2 \mathbf{C} + \psi_3 I_3 \mathbf{C}^{-1} \right)$$

avec  $\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial I_i}$

### Loi de comportement (autre approche)

- en eulérien :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2 \sum_{a=1}^3 \rho \lambda_a \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_a} (\mathbf{n}_a \otimes \mathbf{n}_a)$$

- en mixte :

$$\boldsymbol{\Pi} = \sum_{a=1}^3 \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_a} (\mathbf{n}_a \otimes \mathbf{N}_a)$$

- en lagrangien :

$$\mathbf{S} = 2 \sum_{a=1}^3 \rho_0 \frac{1}{\lambda_a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_a} (\mathbf{N}_a \otimes \mathbf{N}_a)$$

avec  $\mathbf{N}_a$  et  $\mathbf{n}_a$  les vecteurs propres de  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}$ .

### Incompressibilité

On impose  $J = 1$ , ou encore  $I_3(\mathbf{B}) = I_3(\mathbf{C}) = 1$ , à l'aide d'un **multiplicateur de Lagrange**  $p$  tel que :

$$\psi = \psi(\mathbf{X}) - p(\det(\mathbf{F}) - 1)$$

### Incompressibilité

On impose  $J = 1$ , ou encore  $I_3(\mathbf{B}) = I_3(\mathbf{C}) = 1$ , à l'aide d'un **multiplicateur de Lagrange**  $p$  tel que :

$$\psi = \psi(\mathbf{X}) - p(\det(\mathbf{F}) - 1)$$

- Dans chaque configuration on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \rho_0 \mathbf{B} \frac{\partial \psi(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} - p \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p \text{cof} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{S} = 2 \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p J \mathbf{C}^{-1}$$

### Incompressibilité

On impose  $J = 1$ , ou encore  $I_3(\mathbf{B}) = I_3(\mathbf{C}) = 1$ , à l'aide d'un **multiplicateur de Lagrange**  $p$  tel que :

$$\psi = \psi(\mathbf{X}) - p(\det(\mathbf{F}) - 1)$$

- Dans chaque configuration on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \rho_0 \mathbf{B} \frac{\partial \psi(\mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}} - p \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = \rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} - p \text{cof} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{S} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} - p J \mathbf{C}^{-1}$$

- $p$  est assimilable à une pression.

### Modèles phénoménologiques incompressibles

- Le modèle de MOONEY & RIVLIN (1940)

$$\psi(I_1, I_2) = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3)$$

- Le modèle de RIVLIN & SAUNDERS (1951)

$$\psi(I_1, I_2) = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_{ij}(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \quad \text{avec} \quad C_{00} = 0$$

- Le modèle de GENT & THOMAS (1958)

$$\psi(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2 \ln \left( \frac{I_2}{3} \right)$$

- Le modèle de OGDEN (1972)

$$\psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad \text{avec} \quad \mu_p \alpha_p > 0$$

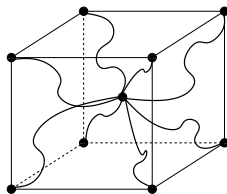
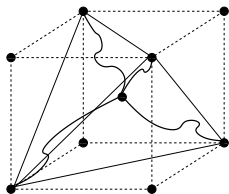
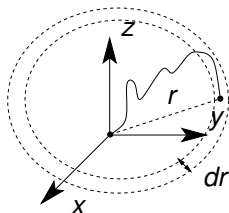
### Modèles statistiques

- NEO-HOOKE (1943)

$$\psi(I_1) = \frac{1}{2} Nk\Theta(I_1 - 3)$$

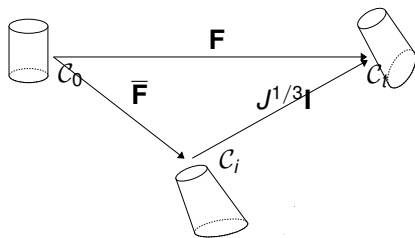
N : nombre de chaînes par unité de volume, k : constante de Boltzmann.

- 3 chaînes, 8 chaînes, ...



# Hyperélasticité

## Hyperélasticité faiblement compressible



### Modélisation compressible

- Décomposition de FLORY :

$$\mathbf{F} = (J^{1/3}\mathbf{I})\bar{\mathbf{F}}$$



### Modélisation compressible

- Décomposition de FLORY :

$$\mathbf{F} = (J^{1/3}\mathbf{I})\bar{\mathbf{F}}$$

- Décomposition de l'énergie :

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi_{iso}(\bar{\mathbf{F}}) + \psi_{vol}(J)$$

### Modélisation compressible

- Décomposition de FLORY :

$$\mathbf{F} = (J^{1/3}\mathbf{I})\bar{\mathbf{F}}$$

- Décomposition de l'énergie :

$$\psi(\mathbf{F}) = \psi_{iso}(\bar{\mathbf{F}}) + \psi_{vol}(J)$$

- Dans chaque configuration on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{B}}}) + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = (\bar{\boldsymbol{\Pi}} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{F}}}) + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \text{Cof} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{S} = (\bar{\mathbf{S}} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}}) + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}$$

### Modélisation compressible

- Dans chaque configuration on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{B}}}) + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = (\bar{\boldsymbol{\Pi}} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{F}}}) + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \text{Cof} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{S} = (\bar{\mathbf{S}} : \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}}) + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}$$

- avec :

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = 2\rho_0 J^{-1} \bar{\mathbf{B}} \frac{\partial \psi_{iso}(\bar{\mathbf{B}})}{\partial \bar{\mathbf{B}}} \quad \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{B}}} = \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} \right]$$

$$\bar{\boldsymbol{\Pi}} = \rho_0 \frac{\partial \psi_{iso}(\bar{\mathbf{F}})}{\partial \bar{\mathbf{F}}} \quad \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{F}}} = J^{-1/3} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{F} \otimes \mathbf{F}^{-T} \right]$$

$$\bar{\mathbf{S}} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi_{iso}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \quad \mathbb{P}_{\bar{\mathbf{C}}} = J^{-2/3} \left[ \mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right]$$

### Modélisation compressible

- Dans chaque configuration on a :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbb{P}_{\mathbf{B}}) + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{I}$$

$$\boldsymbol{\Pi} = (\bar{\boldsymbol{\Pi}} : \mathbb{P}_{\mathbf{F}}) + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \text{Cof} \mathbf{F}$$

$$\mathbf{S} = (\bar{\mathbf{S}} : \mathbb{P}_{\mathbf{C}}) + \frac{\partial \psi_{vol}}{\partial J} \mathbf{C}^{-1}$$

- Modèles courants pour  $\psi_{vol}(J)$  :

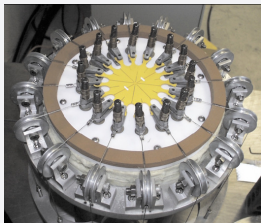
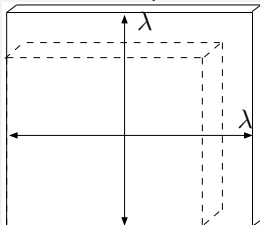
$$\psi_{vol}(J) = \frac{k}{2}(J - 1)^2$$

$$\psi_{vol}(J) = \frac{k}{2}(\ln J)^2$$

avec  $k$  module de compressibilité.

### Les essais courants

- Extension equi-biaxiale

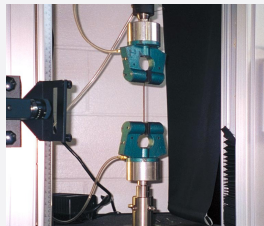
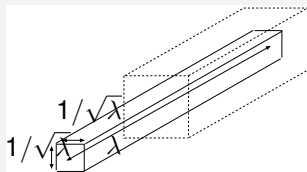


$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{11} = \Pi_{22} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) + 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \left( \lambda^3 - \frac{1}{\lambda^3} \right)$$

### Les essais courants

- La traction uni-axiale

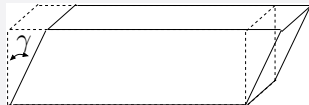


$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{11} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^3} \right)$$

### Les essais courants

- Le glissement simple

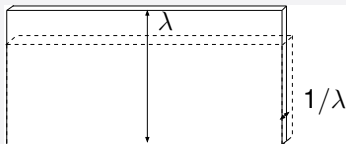


$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{12} = 2\rho_0\gamma\left(\frac{\partial\psi}{\partial l_1} + \frac{\partial\psi}{\partial l_2}\right)$$

### Les essais courants

- Le cisaillement pur



$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$$

$$\Pi_{11} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) + 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right)$$

$$\Pi_{22} = 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_1} \left( 1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) + 2\rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial I_2} (\lambda^2 - 1)$$



### Utilisation d'une loi de comportement hyperélastique

Deux cas de figure :

- On connaît le module de cisaillement ( $G$ ) et le module de compressibilité ( $K$ ) :

On utilise néoHooke avec :  $C_1 = G/2$ . (pour un caoutchouc  $G \simeq 2 \text{ Mpa}$ ,  $K \simeq 1500 \text{ Mpa}$ )

- On a des essais matériaux :

On identifie les paramètres du modèle choisi ( $C_{ij}$ ) en minimisant l'erreur suivante :

$$Err(C_{ij}) = \frac{\sum_{k=1}^{N_{pt}} (\mathbf{\Pi}^{mod}(\mathbf{F}_k, C_{ij}) - \mathbf{\Pi}_k^{exp})^2}{\sum_{k=1}^{N_{pt}} (\mathbf{\Pi}_k^{exp})^2}$$

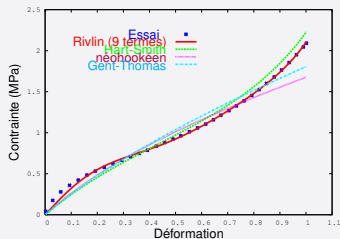
# Hyperélasticité

## Identification de lois Hyperélastiques

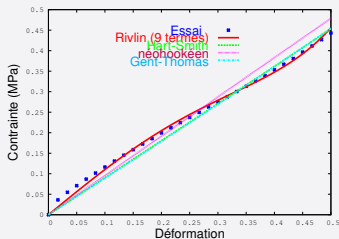
- Introduction
- Cinématique
- Sthénique
- Thermodynamique
- Hyperélasticité
- Mise en œuvre numérique
- Comportements Dissipatifs
- Couplages Thermo-Mécanique

### Un exemple d'identification

Identification couplée traction+cisaillement.



Traction uniaxiale



Glissement simple

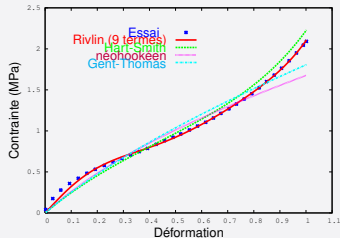
# Hyperélasticité

## Identification de lois Hyperélastiques

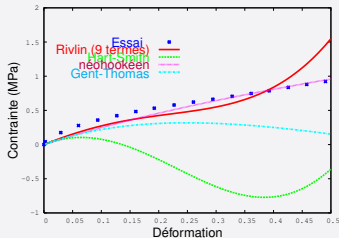
- Introduction
- Cinématique
- Sthénique
- Thermodynamique
- Hyperélasticité
- Mise en œuvre numérique
- Comportements Dissipatifs
- Couplages Thermo-Mécanique

### Un exemple d'instabilité liée à l'identification

Identification en traction seule.



Traction uniaxiale



Glissement simple

# Mise en œuvre numérique par éléments-finis

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas général

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Retour sur le P.P.V.

- En eulérien ( $\forall \delta \mathbf{u}$ ) :

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{u}))_{sym} d\Omega - \int_{\Omega_t} \mathbf{f}^V \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}^S \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0$$

# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas général

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Retour sur le P.P.V.

- En eulérien ( $\forall \delta \mathbf{u}$ ) :

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{u}))_{sym} d\Omega - \int_{\Omega_t} \mathbf{f}^V \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}^S \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0$$

- En lagrangien ( $\forall \delta \mathbf{u}$ ) :

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{u}))^T \cdot \mathbf{F})_{sym} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f}^V \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}^S \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0$$

# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas général

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Retour sur le P.P.V.

- En eulérien ( $\forall \delta \mathbf{u}$ ) :

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{u}))_{sym} d\Omega - \int_{\Omega_t} \mathbf{f}^V \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}^S \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0$$

- En lagrangien ( $\forall \delta \mathbf{u}$ ) :

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{u}))^T \cdot \mathbf{F})_{sym} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f}^V \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}^S \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0$$

- En mixte ( $\forall \delta \mathbf{u}$ ) :

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Pi} : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta \mathbf{u})) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f}^V \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}^S \cdot \delta \mathbf{u} dS = 0$$

# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas général

### Retour sur le P.P.V.

- En eulérien ( $\nabla\delta\mathbf{u}$ ) :

$$\int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta\mathbf{u}))_{sym} d\Omega - \int_{\Omega_t} \mathbf{f}^V \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega - \int_{\partial\Omega_t} \mathbf{t}^S \cdot \delta\mathbf{u} ds = 0$$

- En lagrangien ( $\nabla\delta\mathbf{u}$ ) :

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta\mathbf{u}))^T \cdot \mathbf{F} d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f}^V \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}^S \cdot \delta\mathbf{u} dS = 0$$

- En mixte ( $\nabla\delta\mathbf{u}$ ) :

$$\int_{\Omega_0} \boldsymbol{\Pi} : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta\mathbf{u})) d\Omega_0 - \int_{\Omega_0} \mathbf{f}^V \cdot \delta\mathbf{u} d\Omega_0 - \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{t}^S \cdot \delta\mathbf{u} dS = 0$$

### Remarque

- Problème non-linéaire du type  $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \delta\mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u}$
- Eulérien : intégrales sur le domaine mobile à transporter.



# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas général

### Paramétrage du chargement

On introduit le paramètre  $\lambda(t)$  tel que :

$$\mathbf{f}^V = \lambda \tilde{\mathbf{f}}^V \quad \mathbf{t}^S = \lambda \tilde{\mathbf{t}}^S$$

Le problème devient : trouver  $\mathbf{u}$  et  $\lambda$  tel que

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}, \lambda, \delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u}$$

### Remarques

- le système est sous-déterminé : il faut rajouter une équation pour le résoudre :

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}, \lambda) = 0$$

- dans le cas général  $\tilde{\mathbf{f}}^V$  et  $\tilde{\mathbf{t}}^S$  peuvent dépendre de  $\mathbf{u}$ .

# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas général

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Résolution incrémentale par Newton Raphson

**Etape de prédiction** : on suppose connu l'état d'équilibre  $\mathbf{u}_0, \lambda_0$  on cherche  $\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda$  t.q :

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta \lambda) = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta \lambda) = 0$$

### Résolution incrémentale par Newton Raphson

**Etape de prédiction** : on suppose connu l'état d'équilibre  $\mathbf{u}_0, \lambda_0$  on cherche  $\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda$  t.q :

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta \lambda) = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta \lambda) = 0$$

① On linéarise autour de  $\mathbf{u}_0, \lambda_0$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta \lambda) &= \mathcal{R}(\mathbf{u}_0, \lambda_0) + \frac{\partial \mathcal{R}(\mathbf{u}_0, \lambda_0)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{R}(\mathbf{u}_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \Delta \lambda + o(\Delta \mathbf{u}^2, \Delta \lambda^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta \lambda) &= \mathcal{C}(\mathbf{u}_0, \lambda_0) + \frac{\partial \mathcal{C}(\mathbf{u}_0, \lambda_0)}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u} \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{C}(\mathbf{u}_0, \lambda_0)}{\partial \lambda} \Delta \lambda + o(\Delta \mathbf{u}^2, \Delta \lambda^2) \end{aligned}$$

# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas général

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Résolution incrémentale par Newton Raphson

**Etape de prédiction** : on suppose connu l'état d'équilibre  $\mathbf{u}_0, \lambda_0$  on cherche  $\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda$  t.q :

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta \lambda) = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta \lambda) = 0$$

② On résout :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas général

### Résolution incrémentale par Newton Raphson

**Etape de prédiction** : on suppose connu l'état d'équilibre  $\mathbf{u}_0, \lambda_0$  on cherche  $\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda$  t.q :

$$\mathcal{R}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta \lambda) = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{u}_0 + \Delta \mathbf{u}, \lambda_0 + \Delta \lambda) = 0$$

② On résout :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

### Remarques

- Le terme  $\partial \mathcal{R} / \partial \mathbf{u}$  est appelé opérateur tangent (noté  $\mathbf{K}$ ).
- Le terme  $\partial \mathcal{R} / \partial \lambda$  est appelé opérateur de chargement (noté  $\mathbf{F}$ ).

### Résolution incrémentale par Newton Raphson

#### Etape de prédiction (suite)

- 3 On incrémente :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}$  et  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ .
- 4 On calcul le résidu :  $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \lambda)$  et  $\mathcal{C}(\mathbf{u}, \lambda)$ .

### Résolution incrémentale par Newton Raphson

#### Etape de prédiction (suite)

- 3 On incrémente :  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \Delta\mathbf{u}$  et  $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ .
- 4 On calcul le résidu :  $\mathcal{R}(\mathbf{u}, \lambda)$  et  $\mathcal{C}(\mathbf{u}, \lambda)$ .

**Etape(s) de correction** : on cherche  $\delta\mathbf{u}, \delta\lambda$  t.q.

$$\mathcal{R}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, \lambda + \delta\lambda) = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{C}(\mathbf{u} + \delta\mathbf{u}, \lambda + \delta\lambda) = 0$$

- 1 On linéarise et on tombe sur :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u} \\ \delta\lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathcal{R}(\mathbf{u}, \lambda) \\ -\mathcal{C}(\mathbf{u}, \lambda) \end{Bmatrix}$$

- 2 On itère  $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$  et  $\lambda = \lambda + \delta\lambda$  tant qu'on n'atteint pas un critère de convergence (ou un nombre limite d'itérations).

# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas général

### Exemple de fonction de contrôle

- Contrôle en effort

$$d\mathcal{C} = \Delta\lambda - l_n = 0$$

on obtient :

- 1 prédicteur

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{u} = l_n\mathbf{F}$$

- 2 correcteur

$$\mathbf{K}\delta\mathbf{u} = -\mathcal{R}(\mathbf{u}, \lambda)$$

- Contrôle en longueur d'arc (uniquement pour le correcteur) :

$$d\mathcal{C} = \Delta\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} + \delta\lambda^2 - l_n = 0$$

- Contrôle en longueur d'arc linéarisé (uniquement pour le correcteur) :

$$d\mathcal{C} = \Delta\mathbf{u} \cdot \delta\mathbf{u} + \delta\lambda\Delta\lambda - l_n = 0$$



# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas incompressible

### Formulation mixte déplacement/pression

- On impose la condition d'incompressibilité  $J(\mathbf{u}) - 1 = 0$  avec un multiplicateur de lagrange noté  $p$ .

Le problème devient : trouver  $(\mathbf{u}, p)$  t.q

$$\mathcal{R}_u = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}) : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta\mathbf{u}))_{sym} d\Omega - \mathcal{P}_{ext}(\delta\mathbf{u}) \quad \forall \delta\mathbf{u}$$

$$\mathcal{R}_p = \int_{\Omega} \delta p (J(\mathbf{u}) - 1) d\Omega_t \quad \forall \delta p$$

- Système linéarisé du type :

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta p \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_u \\ \mathcal{R}_p \end{Bmatrix}$$

### Remarques

Numériquement on peut avoir  $p \rightarrow \infty$  et  $\mathbf{u} \rightarrow 0$  (phénomène de blocage ou verrouillage)

# Forme faible des équations d'équilibre

## Cas incompressible perturbé

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Formulation mixte déplacement/pression

- Forme perturbée : trouver  $(\mathbf{u}, p)$  t.q

$$\mathcal{R}_u = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - p\mathbf{I}) : (\nabla_{\mathbf{x}}(\delta\mathbf{u}))_{sym} d\Omega - \mathcal{P}_{ext}(\delta\mathbf{u}) \quad \forall \delta\mathbf{u}$$

$$\mathcal{R}_p = \int_{\Omega} \delta p (-\alpha p - (J(\mathbf{u}) - 1)) d\Omega_t \quad \forall \delta p$$

- Système linéarisé du type :

$$\begin{bmatrix} K & G \\ G^T & \alpha I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta p \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathcal{R}_u \\ \mathcal{R}_p \end{Bmatrix}$$

### Remarque

$\alpha$  est un coefficient de perturbation (proche de 0,  $D_1$  dans Abaqus)

### E.F. standard

① On discrétise l'espace :

$$\int_{\Omega_0} = \sum_e \int_{\Omega_e}$$

### E.F. standard

- ① On discrétise l'espace :

$$\int_{\Omega_0} = \sum_e \int_{\Omega_e}$$

- ② On approxime les champs (cas isoparamétrique) :

$$\mathbf{u}^h = \langle N_u^i \rangle \{u^i\} \quad \delta \mathbf{u}^h = \langle N_u^i \rangle \{\delta u^i\}$$

$$p^h = \langle N_p^i \rangle \{p^i\} \quad \delta p^h = \langle N_p^i \rangle \{\delta p^i\}$$

### E.F. standard

- ① On discrétise l'espace :

$$\int_{\Omega_0} = \sum_e \int_{\Omega_e}$$

- ② On approxime les champs (cas isoparamétrique) :

$$\mathbf{u}^h = \langle N_u^i \rangle \{u^i\} \quad \delta \mathbf{u}^h = \langle N_u^i \rangle \{\delta u^i\}$$

$$p^h = \langle N_p^i \rangle \{p^i\} \quad \delta p^h = \langle N_p^i \rangle \{\delta p^i\}$$

- ③ On calcul le résidu et la matrice tangente :

$$\mathcal{R}^h = \mathcal{A}R_e(\mathbf{u}^h, p^h) \quad \mathcal{K}^h = \mathcal{A}K_e(\mathbf{u}^h, p^h)$$

### E.F. standard

- ① On discrétise l'espace :

$$\int_{\Omega_0} = \sum_e \int_{\Omega_e}$$

- ② On approxime les champs (cas isoparamétrique) :

$$\mathbf{u}^h = \langle N_u^i \rangle \{u^i\} \quad \delta \mathbf{u}^h = \langle N_u^i \rangle \{\delta u^i\}$$

$$p^h = \langle N_p^i \rangle \{p^i\} \quad \delta p^h = \langle N_p^i \rangle \{\delta p^i\}$$

- ③ On calcul le résidu et la matrice tangente :

$$\mathcal{R}^h = \mathcal{A}R_e(\mathbf{u}^h, p^h) \quad \mathcal{K}^h = \mathcal{A}K_e(\mathbf{u}^h, p^h)$$

### Remarques

- Les fonctions d'approximation de la pression et de la cinématique ( $N_u^i, N_p^i$ ) doivent être choisies de manière à éviter des instabilités (condition LBB).

# Discrétisation

## Cas des formes mixtes

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

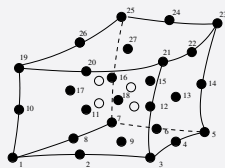
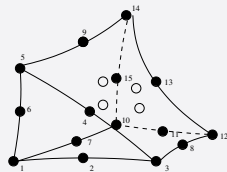
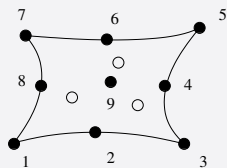
Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

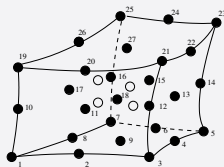
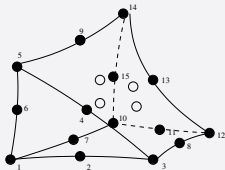
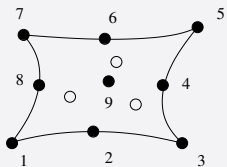
### Exemple d'E.F. stables



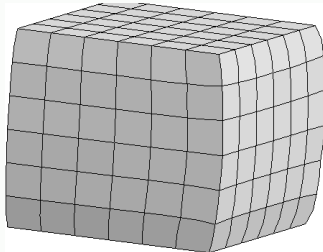
# Discrétisation

## Cas des formes mixtes

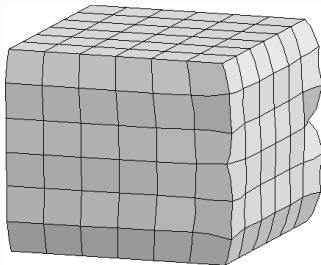
### Exemple d'E.F. stables



### Comparaison stable et instable



H20P2



H20P1

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique



# Comportements mécaniques dissipatifs

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Définition

- On considère des comportements irréversibles, *cad*  
 $\Phi > 0$ .

### Définition

- On considère des comportements irréversibles, *cad*  
 $\Phi > 0$ .
- On reste dans le cadre de l'état local.

### Définition

- On considère des comportements irréversibles, *cad*  $\Phi > 0$ .
- On reste dans le cadre de l'état local.
- Approches possibles :
  - approche héréditaire (viscosité, endommagement, ...)

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \int_{\tau=0}^t \mathcal{G}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, \tau))$$

### Définition

- On considère des comportements irréversibles, *cad*  $\Phi > 0$ .
- On reste dans le cadre de l'état local.
- Approches possibles :
  - approche héréditaire (viscosité, endommagement, ...)

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \int_{\tau=0}^t \mathcal{G}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, \tau))$$

- dérivées fractionnaires (viscosité)

$$\mathcal{D}_t^n \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{D}_t^m \mathcal{G}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t))$$

### Définition

- On considère des comportements irréversibles, *cad*  $\Phi > 0$ .
- On reste dans le cadre de l'état local.
- Approches possibles :
  - approche héréditaire (viscosité, endommagement, ...)

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \int_{\tau=0}^t \mathcal{G}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, \tau))$$

- dérivées fractionnaires (viscosité)

$$\mathcal{D}_t^n \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{D}_t^m \mathcal{G}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t))$$

- **modèle à variable(s) interne(s)** (plasticité, viscosité, endommagement, ...)

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathcal{G}(\mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\alpha}_I, \dots)$$

### Définition

- On note  $\alpha_j$  les variables internes (de type flux) et on prend  $\psi(\mathbf{B}, \alpha_j)$ .
- Claussius-Duhem nous donne (en Eulérien et sans la température) :

$$\Phi^{intr} = \left( \sigma - 2\mathbf{B}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right) : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \right) : \dot{\alpha}_j \geq 0$$

### Définition

- On note  $\alpha_j$  les variables internes (de type flux) et on prend  $\psi(\mathbf{B}, \alpha_j)$ .
- Clausius-Duhem nous donne (en Eulérien et sans la température) :

$$\Phi^{intr} = \left( \boldsymbol{\sigma} - 2\mathbf{B}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right) : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \right) : \dot{\alpha}_j \geq 0$$

- La force thermodynamique associée au flux  $\dot{\alpha}_j$  est notée  $\mathbf{A}_j$ .

$$\mathbf{A}_j = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j}$$



### Définition

- On note  $\alpha_j$  les variables internes (de type flux) et on prend  $\psi(\mathbf{B}, \alpha_j)$ .
- Clausius-Duhem nous donne (en Eulérien et sans la température) :

$$\Phi^{intr} = \left( \boldsymbol{\sigma} - 2\mathbf{B}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right) : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \right) : \dot{\alpha}_j \geq 0$$

- La force thermodynamique associée au flux  $\dot{\alpha}_j$  est notée  $\mathbf{A}_j$ .

$$\mathbf{A}_j = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j}$$

### Remarque

$\mathbf{A}_j$  et  $\alpha_j$  dépendent de la configuration.

### Matériaux Standard Généralisés

- On introduit un pseudo-potentiel de dissipation  $\varphi(\dot{\alpha}_i)$ .
- Les forces thermodynamiques dérivent de ce pseudo-potentiel (principe de normalité)

$$\mathbf{A}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_i}$$

### Matériaux Standard Généralisés

- On introduit un pseudo-potentiel de dissipation  $\varphi(\dot{\alpha}_j)$ .
- Les forces thermodynamiques dérivent de ce pseudo-potentiel (principe de normalité)

$$\mathbf{A}_j = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_j}$$

### Matériaux Standard Généralisés (dualité)

- On introduit un pseudo-potentiel de dissipation dual  $\varphi^*(\mathbf{A}_j)$ .
- Les flux thermodynamiques dérivent de ce pseudo-potentiel (principe de normalité)

$$\dot{\alpha}_j = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{A}_j}$$

### Matériaux Standard Généralisés

- On introduit un pseudo-potential de dissipation  $\varphi(\dot{\alpha}_i)$ .
- Les forces thermodynamiques dérivent de ce pseudo-potential (principe de normalité)

$$\mathbf{A}_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_i}$$

### Remarques

- Passage de  $\varphi$  à  $\varphi^*$  par la transformée de Legendre-Fenchel :

$$\varphi^*(\mathbf{A}_i) = \sup_{\dot{\alpha}_i} \{ \mathbf{A}_i : \dot{\alpha}_i - \varphi(\dot{\alpha}_i) \}$$

- Le pseudo-potential (ou son dual) doit être convexe, non-négatif et nul à l'origine.
- Le pseudo-potential (ou son dual) doit vérifier l'objectivité.

### Matériaux Standard Généralisés

- En négligeant les effets thermiques (en Eulérien) :

$$\Phi^{intr} = \left( \boldsymbol{\sigma} - 2\mathbf{B}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right) : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_j} \right) : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{D}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_j$$

### Matériaux Standard Généralisés

- En négligeant les effets thermiques (en Eulérien) :

$$\Phi^{intr} = \left( \boldsymbol{\sigma} - 2\mathbf{B}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right) : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \right) : \dot{\alpha}_i \geq 0 \quad \forall \mathbf{D}, \dot{\alpha}_i$$

- La dissipation est toujours positive si on prend :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{B}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}_i = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_i} \quad (2)$$

### Matériaux Standard Généralisés

- En négligeant les effets thermiques (en Eulérien) :

$$\Phi^{intr} = \left( \boldsymbol{\sigma} - 2\mathbf{B}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right) : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} \right) : \dot{\alpha}_i \geq 0 \quad \forall \mathbf{D}, \dot{\alpha}_i$$

- La dissipation est toujours positive si on prend :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mathbf{B}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \quad (1)$$

$$\mathbf{A}_i = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\alpha}_i} \quad (2)$$

- L'évolution de la variable interne est régie par une équation complémentaire (2)

### Matériaux Standard Généralisés

- En négligeant les effets thermiques (en Eulérien) :

$$\Phi^{intr} = \left( \boldsymbol{\sigma} - 2\mathbf{B}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right) : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \alpha_j} \right) : \dot{\alpha}_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{D}, \dot{\alpha}_j$$

### Remarque 1

Si  $\varphi$  est fonction de  $\mathbf{D}$  alors  $\Phi^{intr} = (\partial \varphi / \partial \mathbf{D}) : \mathbf{D}$



### Matériaux Standard Généralisés

- En négligeant les effets thermiques (en Eulérien) :

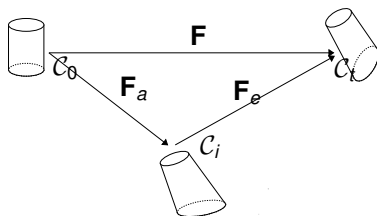
$$\Phi^{intr} = \left( \boldsymbol{\sigma} - 2\mathbf{B}\rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}} \right) : \mathbf{D} - \rho \left( \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}_j} \right) : \dot{\boldsymbol{\alpha}}_j \geq 0 \quad \forall \mathbf{D}, \dot{\boldsymbol{\alpha}}_j$$

#### Remarque 1

Si  $\varphi$  est fonction de  $\mathbf{D}$  alors  $\Phi^{intr} = (\partial \varphi / \partial \mathbf{D}) : \mathbf{D}$

#### Remarque 2 : autre approche

On définit directement  $\Phi^{intr}$  comme une fonction objective et positive des V.E. et V.I.



### Décomposition de la transformation

- On postule une décomposition de la forme (SIDOROFF) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_a$$

avec  $\mathbf{F}_e$  une transformation purement élastique et  $\mathbf{F}_a$  une transformation anélastique.

### Décomposition de la transformation

- On postule une décomposition de la forme (SIDOROFF) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_a$$

avec  $\mathbf{F}_e$  une transformation purement élastique et  $\mathbf{F}_a$  une transformation anélastique.

### Propriétés

- Dans le cas isotrope  $\psi$  est une fonction isotrope de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}_e$  (ou  $\mathbf{C}_e, \mathbf{C}_a, B_a$ )

### Décomposition de la transformation

- On postule une décomposition de la forme (SIDOROFF) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_a$$

avec  $\mathbf{F}_e$  une transformation purement élastique et  $\mathbf{F}_a$  une transformation anélastique.

### Propriétés

- Dans le cas isotrope  $\psi$  est une fonction isotrope de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}_e$  (ou  $\mathbf{C}_e, \mathbf{C}_a, B_a$ )
- Il faut faire attention à l'objectivité !

### Décomposition de la transformation

- On postule une décomposition de la forme (SIDOROFF) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_a$$

avec  $\mathbf{F}_e$  une transformation purement élastique et  $\mathbf{F}_a$  une transformation anélastique.

### Propriétés

- Dans le cas isotrope  $\psi$  est une fonction isotrope de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}_e$  (ou  $\mathbf{C}_e$ ,  $\mathbf{C}_a$ ,  $B_a$ )
- Il faut faire attention à l'objectivité !
- On peut généraliser à  $n$  états intermédiaires.

### Décomposition de la transformation

- On postule une décomposition de la forme (SIDOROFF) :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \mathbf{F}_a$$

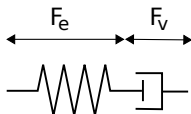
avec  $\mathbf{F}_e$  une transformation purement élastique et  $\mathbf{F}_a$  une transformation anélastique.

### Propriétés

- Dans le cas isotrope  $\psi$  est une fonction isotrope de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{B}_e$  (ou  $\mathbf{C}_e$ ,  $\mathbf{C}_a$ ,  $B_a$ )
- Il faut faire attention à l'objectivité !
- On peut généraliser à  $n$  états intermédiaires.
- On peut construire des modèles rhéologiques.

# Comportements Dissipatifs

## Exemple : Viscosité de Maxwell

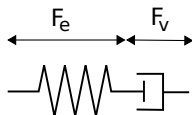


### Données du modèle

- variable interne :  $F_v$ .
- fonction d'énergie libre :  $\psi(\mathbf{B}_e)$  (associé à l'élément rhéologique ressort).
- pseudo potentiel de dissipation  $\varphi$  (associé à l'élément rhéologique amortisseur)

# Comportements Dissipatifs

## Exemple : Viscosité de Maxwell



### Equations constitutives (en Eulérien)

- Clausius-Duhem

$$\Phi^{\text{intr}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} : \dot{\mathbf{B}}_e \geq 0$$

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

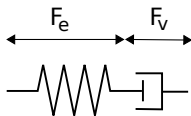
Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique



# Comportements Dissipatifs

## Exemple : Viscosité de Maxwell



### Equations constitutives (en Eulérien)

- Clausius-Duhem

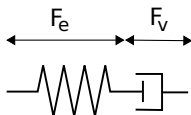
$$\phi^{\text{intr}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} : \dot{\mathbf{B}}_e \geq 0$$

- Variation de  $\mathbf{B}_e$  :

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{L}^T - 2\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{F}_e^T$$

# Comportements Dissipatifs

## Exemple : Viscosité de Maxwell



### Equations constitutives (en Eulérien)

- Clausius-Duhem

$$\Phi^{\text{intr}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} : \dot{\mathbf{B}}_e \geq 0$$

- Variation de  $\mathbf{B}_e$  :

$$\dot{\mathbf{B}}_e = \mathbf{L} \cdot \mathbf{B}_e + \mathbf{B}_e \cdot \mathbf{L}^T - 2\mathbf{F}_e \cdot \mathbf{D}_v \cdot \mathbf{F}_e^T$$

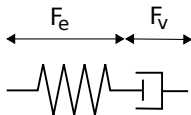
- On obtient :

$$\Phi^{\text{intr}} = \left( \boldsymbol{\sigma} - 2\rho \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \right) : \mathbf{D} + \left( 2\rho \mathbf{V}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{V}_e \right) : \mathbf{D}_v^o \geq 0$$

avec  $\mathbf{D}_v^o = \mathbf{R}_e \mathbf{D}_v \mathbf{R}_e^T$  mesure anélastique **objective**.

# Comportements Dissipatifs

## Exemple : Viscosité de Maxwell



### Equations constitutives (en Eulérien)

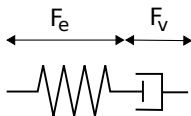
- On obtient :

$$\Phi^{\text{intr}} = (\boldsymbol{\sigma} - 2\rho \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e}) : \mathbf{D} + (2\rho \mathbf{V}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{V}_e) : \mathbf{D}_v^o \geq 0$$

doit être vérifié  $\forall \mathbf{D}$  et  $\forall \mathbf{D}_v^o$ .

- Loi de comportement et équation complémentaire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2\rho \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \\ 2\rho \mathbf{V}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{V}_e = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{D}_v^o} \end{cases}$$



### Equations constitutives dans le cas incompressible

- On obtient :

$$\Phi^{\text{intr}} = (\boldsymbol{\sigma} - 2\rho\mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{B}_e} - p\mathbf{I}) : \mathbf{D} + (2\rho\mathbf{V}_e \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{V}_e) : \mathbf{D}_v^o \geq 0$$

avec  $\text{tr}(\mathbf{D}_v^o) = \text{tr}(\mathbf{D}) = 0$

- Loi de comportement et équation complémentaire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left( \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{B}_e} \right)^D - p\mathbf{I} \\ \left( 2\rho\mathbf{V}_e \cdot \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{V}_e \right)^D = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{D}_v^o} \end{cases}$$

# Comportements Dissipatifs

## Particularité des Grandes-Déformations

Introduction

Cinématique

Sthénique

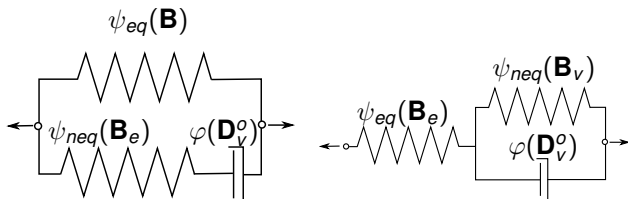
Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

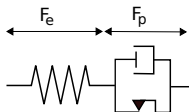
Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique



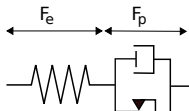
### Particularité des Grandes-Déformations

- Des modèles rhéologiques équivalents en petites déformations conduisent à des modèles différents en grandes déformations.
- Les lois complémentaires sont souvent complexes à intégrer.



### Données du modèle

- variable interne :  $\mathbf{F}_p$ .
- fonction d'énergie libre :  $\psi(\mathbf{B}_e)$  (associé à l'élément rhéologique ressort).
- pseudo potentiel de dissipation dual  $\varphi^*(\sigma)$  (associé à l'élément rhéologique amortisseur)



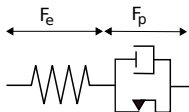
### Modèle Fluide de Bingham

- Clausius-Duhem nous donne :

$$\Phi^{\text{intr}} = (\boldsymbol{\sigma} - 2\rho \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e}) : \mathbf{D} + (2\rho \mathbf{V}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \cdot \mathbf{V}_e) : \mathbf{D}_\rho^o \geq 0$$

- Loi de comportement et équation complémentaire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left( \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \right) \\ \mathbf{D}_\rho^o = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \end{cases}$$



### Modèle de Bingham

- On peut prendre par exemple (avec  $f$  une fonction seuil) :

$$\psi(\mathbf{B}_e) = c_{10}(I_1^e - 3) \quad \text{et} \quad \varphi^*(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\langle \|\boldsymbol{\sigma}^D\| - \xi \rangle}{\eta}$$

- Loi de comportement et équation complémentaire :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = 2\rho \left( \mathbf{B}_e \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{B}_e} \right) \\ \mathbf{D}_\rho^o = \frac{\langle \|\boldsymbol{\sigma}^D\| - \xi \rangle}{\eta} \frac{\boldsymbol{\sigma}^D}{\|\boldsymbol{\sigma}^D\|} \end{cases}$$



# Couplages Thermo-Mécanique

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 1er exemple : Etirement d'un caoutchouc

### Thermographie d'un élastique



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

## Quelques exemples

### 1er exemple : Etirement d'un caoutchouc

#### Thermographie d'un élastique



#### Constat

La déformation conduit à une évolution de la température.

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 2eme exemple : Moteur à chaleur

### Moteur à chaleur



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

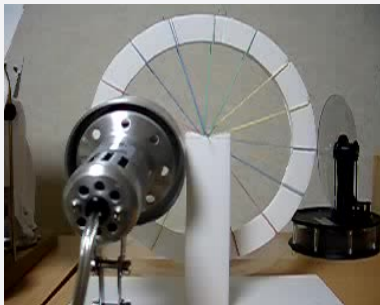
Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 2eme exemple : Moteur à chaleur

### Moteur à chaleur



### Constat

L'échauffement conduit à une déformation.

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

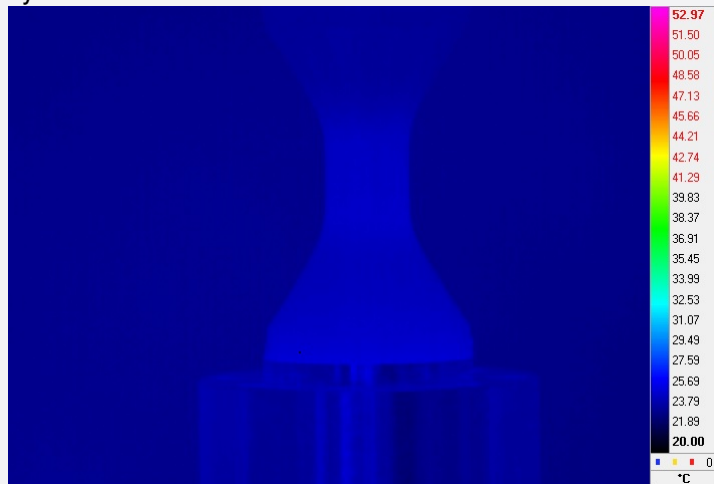
Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diabolo

cycle 1



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

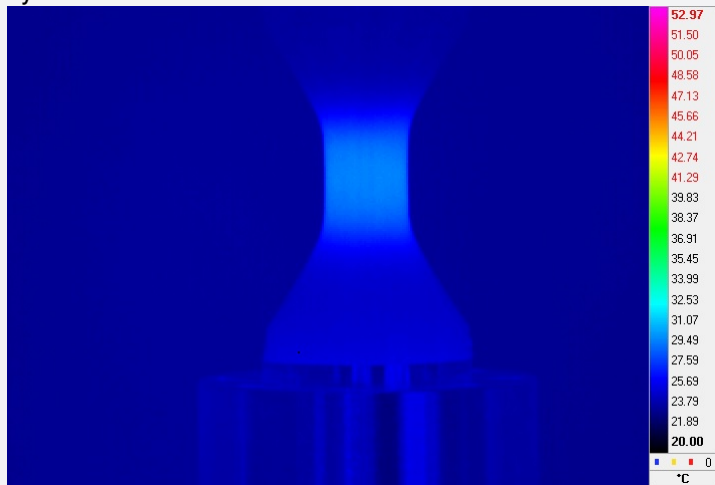
Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diablo

cycle 720



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

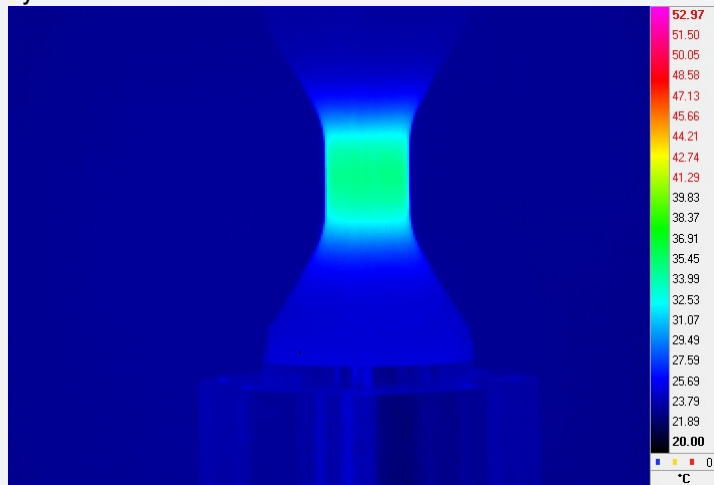
Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diablo

cycle 1800



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

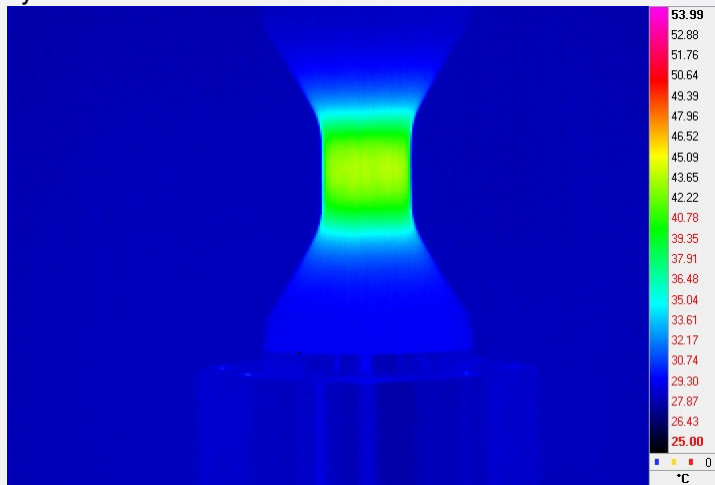


# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diablo

cycle 4380



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

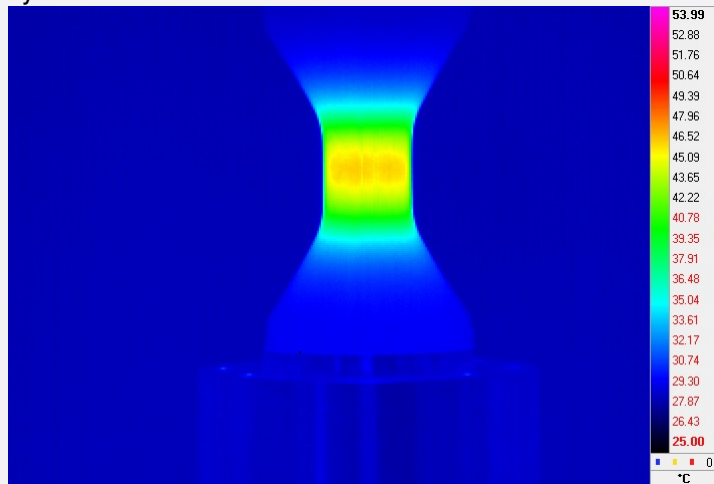
Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diablo

cycle 5300



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

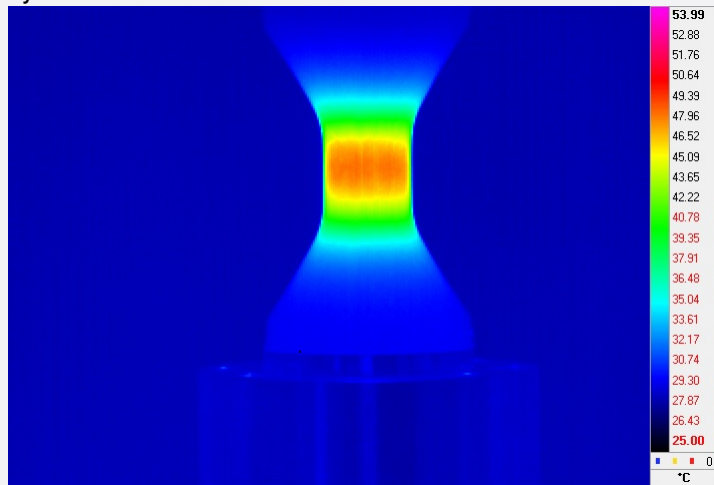
Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diablo

cycle 6800



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

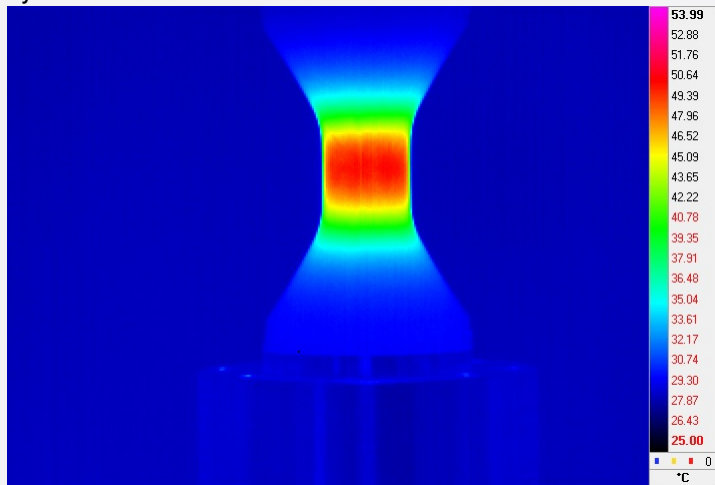
Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diablo

cycle 8400



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

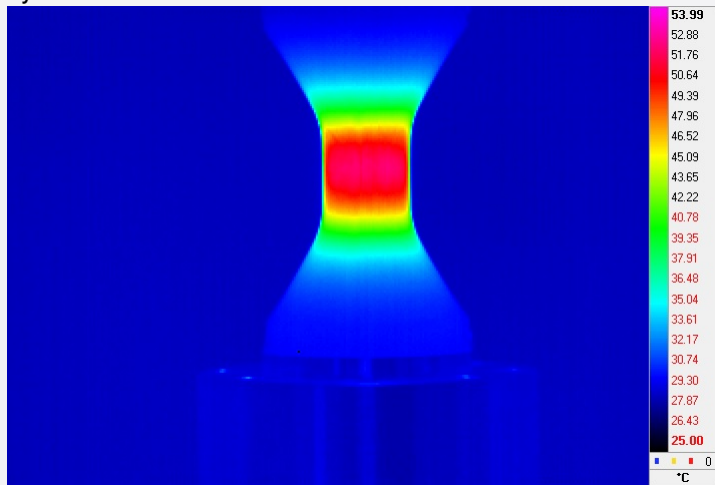
Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diablo

cycle 10800



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

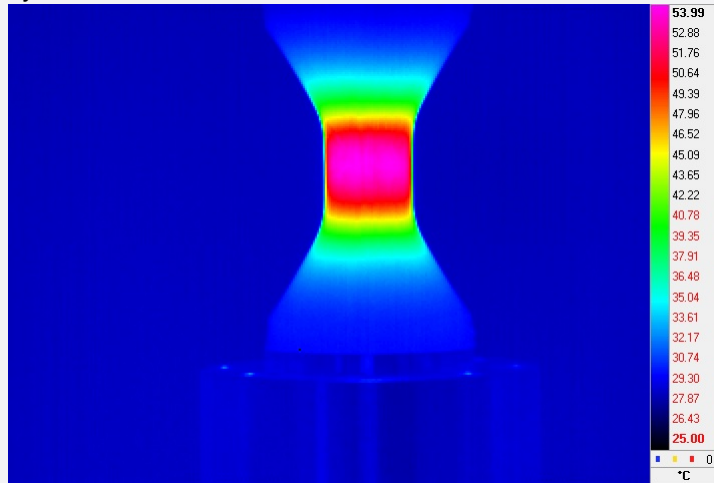
Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diablo

cycle 17350



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

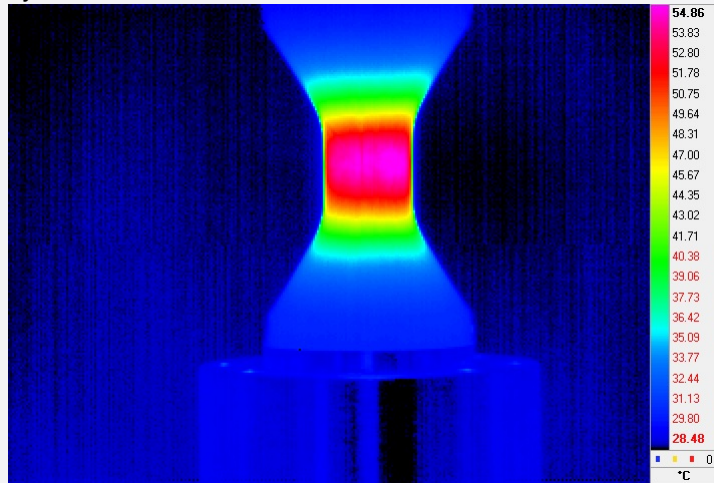
Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diablo

cycle 50000



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

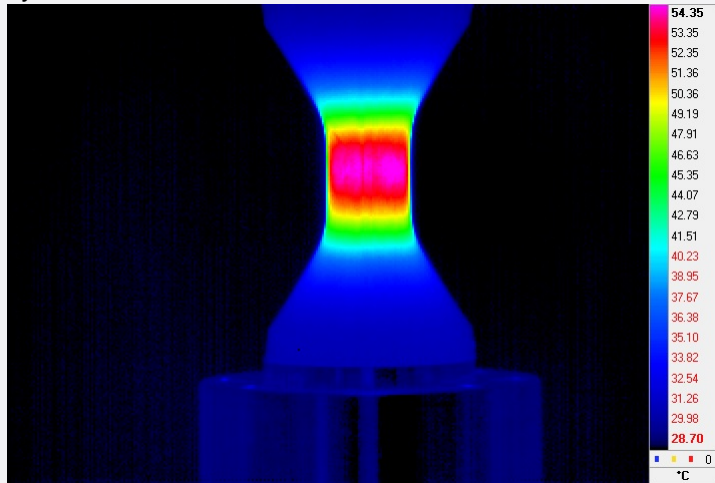
Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques exemples

## 3eme exemple : Auto-échauffement

### Traction cyclique sur un diablo

cycle 160000



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

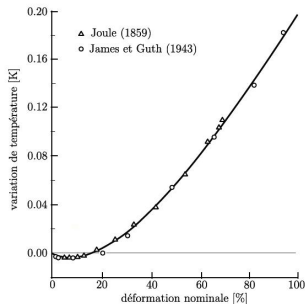
Couplages  
Thermo-Mécanique



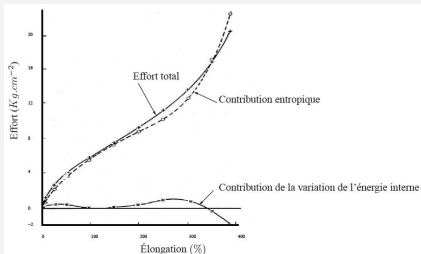
# Quelques observations

## Effet Gough-Joule

### Inversion thermoélastique



### Elasticité Entropique



Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

# Quelques observations

## Matériaux "dur" vs matériaux "mou"

|  | Polymères (loin de l'état vitreux)                              | Métaux   |
|--|---|--|
| Soumis à une déformation                               | s'échauffent  | se refroidissent   |
| Soumis à un effort puis un échauffement                | se contractent  | se dilatent  |
| Variation énergétique pour un incrément de déformation | la variation d'entropie prime :<br><b>élasticité entropique</b> | la déformation perturbe le réseau cristallin :<br><b>variation d'énergie interne</b> |

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre numérique

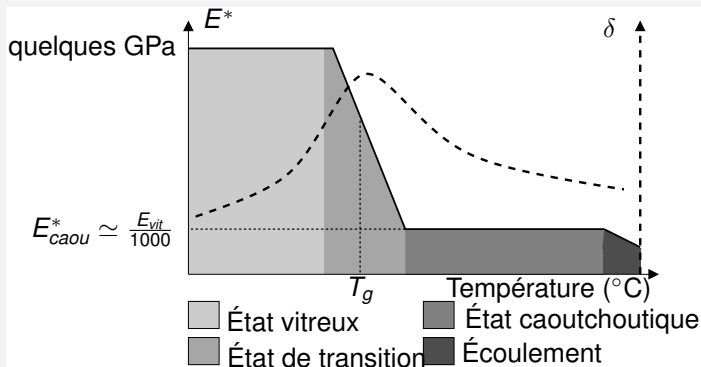
Comportements Dissipatifs

Couplages Thermo-Mécanique

# Quelques observations

## Effet de la température sur les caractéristiques mécaniques

### Exemple : transition vitreuse des polymères



# Modélisation : Thermo-Elasticité

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### Hypothèses

- La conductivité est décrite par la loi de Fourier

$$\text{dans } \Omega_t \quad \mathbf{q} = -\mathbf{K}_t \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \quad \rightarrow \quad \Phi^{therm} \geq 0$$

$$\text{dans } \Omega_0 \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{K}_T \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \quad \rightarrow \quad \Phi^{therm} \geq 0$$

### Hypothèses

- La conductivité est décrite par la loi de Fourier

$$\text{dans } \Omega_t \quad \mathbf{q} = -\mathbf{K}_t \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \quad \rightarrow \quad \Phi^{therm} \geq 0$$

$$\text{dans } \Omega_0 \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{K}_T \nabla_{\mathbf{X}} \Theta \quad \rightarrow \quad \Phi^{therm} \geq 0$$

- L'énergie libre est seulement fonction de la température et de la déformation

### Hypothèses

- La conductivité est décrite par la loi de Fourier

$$\text{dans } \Omega_t \quad \mathbf{q} = -\mathbf{K}_t \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \quad \rightarrow \quad \Phi^{therm} \geq 0$$

$$\text{dans } \Omega_0 \quad \mathbf{Q} = -\mathbf{K}_T \nabla_{\mathbf{x}} \Theta \quad \rightarrow \quad \Phi^{therm} \geq 0$$

- L'énergie libre est seulement fonction de la température et de la déformation
- La dissipation intrinsèque est nulle

$$\text{dans } \Omega_t \quad \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + \eta \dot{\Theta}) = 0$$

$$\text{dans } \Omega_0 \quad \boldsymbol{\Pi} : \dot{\mathbf{F}} - \rho_0(\dot{\psi} + \eta \dot{\Theta}) = 0$$

### En eulérien

- Avec la forme locale du 1er principe

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q}$$

- la définition de l'énergie libre

$$\psi = e - \eta \Theta$$

- la définition de l'entropie

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}$$

- on obtient :

$$\rho C \dot{\Theta} = \rho \Theta \left( 2 \mathbf{B} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{B} \partial \Theta} : \mathbf{D} \right) + \rho r - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q}$$



# Thermo-élasticité

## Equation de la chaleur

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### En eulérien

$$\underbrace{\rho C \dot{\Theta}}_1 = \underbrace{\rho l_m}_2 + \underbrace{\rho r}_3 - \underbrace{\operatorname{div}_x \mathbf{q}}_4 \quad \text{dans } \Omega_t$$

- 1 est un terme d'absorption de chaleur :  $C = -\Theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2}$  (capacité calorifique)
- 2 est un terme de couplage thermo-mécanique :  
 $l_m = \Theta \left( \rho \frac{\partial \rho^{-1} \boldsymbol{\sigma}}{\partial \Theta} : \mathbf{D} \right)$  (chaleur latente mécanique)
- 3 est un terme radiant
- 4 est un terme de conduction

### Remarques

$$\rho C \dot{\Theta} - \rho l_m - \rho r + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} = 0$$

- Si  $l_m = 0$  (pas de couplage TM), l'élévation de température est due aux conditions de bord (et à  $r$ ).
- Si  $l_m = 0$  et  $\mathbf{q} = 0$  (cas adiabatique) il n'y a pas d'évolution de la température (sauf si  $r$  est imposé non nul).

### En eulérien

Trouver  $\mathbf{u}$  et  $\Theta$  tq :

$$\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}^V = \mathbf{0} \quad \text{dans } \Omega_t$$

$$\rho C \dot{\Theta} - \rho l_m - \rho r + \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q} = 0 \quad \text{dans } \Omega_t$$

Avec les conditions de bords :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^s \quad \text{sur } \partial\Omega_t^f$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{sur } \partial\Omega_t^u$$

$$\mathbf{q} = h(\Theta - \Theta_{ext}) \mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\Omega_t^q$$

$$\Theta = \Theta_{ext} \quad \text{sur } \partial\Omega_t^\Theta$$

Et les conditions initiales :

$$\Theta(t=0) = \Theta_0 \quad \text{dans } \Omega_t$$

### Une proposition

- Décomposition de la déformation

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{F}_\Theta$$

avec

$$\mathbf{F}_\Theta = (1 + \alpha(\Theta - \Theta_0))^{1/3} \mathbf{I}$$

$\alpha$  est un coefficient de dilatation.

### Une proposition

- Décomposition de la déformation

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{F}_\Theta$$

avec

$$\mathbf{F}_\Theta = (1 + \alpha(\Theta - \Theta_0))^{1/3} \mathbf{I}$$

$\alpha$  est un coefficient de dilatation.

### Variation de volume

Question : que vaut la variation de volume totale ?

### Une proposition

- Décomposition de la déformation

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{F}_\Theta$$

avec

$$\mathbf{F}_\Theta = (1 + \alpha(\Theta - \Theta_0))^{1/3} \mathbf{I}$$

$\alpha$  est un coefficient de dilatation.

### Variation de volume

Question : que vaut la variation de volume totale ?

$$J = J_\Theta J_m = (1 + \alpha(\Theta - \Theta_0)) J_m$$

### Elasticité entropique

- On choisi

$$\rho\psi = \mu \frac{\Theta}{\Theta_0} (I_1(\mathbf{B}) - 3) + C_0((\Theta - \Theta_0) - \Theta \ln(\frac{\Theta}{\Theta_0})) - p(J_m - 1)$$

- La nullité de la dissipation intrinsèque nous donne

$$\boldsymbol{\sigma} = \left( 2\mu \frac{\Theta}{\Theta_0} \mathbf{B} \right) - pJ_m \mathbf{I}$$

$$\eta = -\frac{\mu}{\Theta_0} (I_1(\mathbf{B}) - 3) - \alpha p \frac{J_m}{J_\Theta} + C_0 \ln(\frac{\Theta}{\Theta_0})$$

### Elasticité entropique

- Cas de l'extension uniaxiale (avec  $J_m = 1$ )

$$F = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{J_\Theta}{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{J_\Theta}{\lambda}} \end{bmatrix}$$

- En tenant compte des conditions de bord ( $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ )

$$\sigma_{11} = 2\mu \frac{\Theta}{\Theta_0} \left( \lambda^2 - \frac{J_\Theta}{\lambda} \right)$$

$$\eta = -\frac{\mu}{\Theta_0} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} (J_\Theta + \alpha\Theta) - 3 \right) + C_0 \ln\left(\frac{\Theta}{\Theta_0}\right)$$



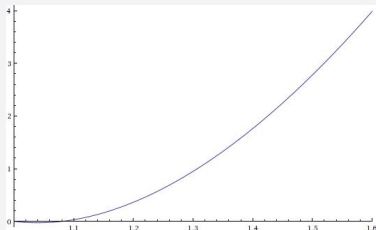
### Elasticité entropique

- Si on considère un processus adiabatique et isentropique

$$\sigma_{11} = 2\mu \frac{\Theta}{\Theta_0} \left( \lambda^2 - \frac{J_\Theta}{\lambda} \right)$$

$$\eta = -\frac{\mu}{\Theta_0} \left( \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} (J_\Theta + \alpha\Theta) - 3 \right) + C_0 \ln\left(\frac{\Theta}{\Theta_0}\right) = \text{const}$$

- Variation de la température avec l'élongation



# Modélisation : Cas général

Introduction

Cinématique

Sthénique

Thermodynamique

Hyperélasticité

Mise en œuvre  
numérique

Comportements  
Dissipatifs

Couplages  
Thermo-Mécanique

### En eulérien

- Avec la forme locale du 1er principe

$$\rho \dot{\mathbf{e}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} + \rho r - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q}$$

- la définition de l'énergie libre

$$\psi = \mathbf{e} - \eta \Theta$$

- la définition de l'entropie

$$\eta = - \frac{\partial \psi}{\partial \Theta}$$

- dissipation intrinsèque

$$\Phi^{intr} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} - \rho(\dot{\psi} + \eta \dot{\Theta}) > 0$$

### En eulérien

$$\underbrace{\rho C \dot{\Theta}}_1 = \underbrace{\Phi^{intr}}_2 + \underbrace{\rho l_m}_3 + \underbrace{\rho r}_4 - \underbrace{\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{q}}_5 \quad \text{dans } \Omega_t$$

- 1 est un terme d'absorption de chaleur :  $C = -\Theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \Theta^2}$  (capacité calorifique)
- 2 est un terme de production de chaleur interne
- 3 est un terme de couplage thermo-mécanique
- 4 est un terme radiant
- 5 est un terme de conduction

## Bilan

La nature du couplage thermo-mécanique dépend :

- de la dépendance des propriétés mécaniques à la température (termes de chaleur latente)
- de la dilatation thermique
- de la capacité calorifique
- de la dissipation mécanique (auto-échauffement)

## Difficultés en grandes déformations

- Dépendance à la déformation des propriétés thermiques (capacité calorifique, dilatation, conductivité,...)
- Problématique de la configuration pour définir et quantifier les termes d'échanges sur les surfaces qui se déforment (convection par exemple)
- Importance de la dissipation intrinsèque.

- **François Sidoroff**, *Cours sur les grandes déformations*, Rapport GRECO N°51, 1982
- **Gerard A. Holzapffel**, *Nonlinear solid mechanics*, Wiley, 2000
- **Adnane Boukamel**, *Modélisations mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères*, mémoire d'HDR, 2006 , <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00517997/>
- **Jean Garrigues**, *Cinématique des milieux continus*, <http://jean.garrigues.perso.centrale-marseille.fr/>
- **Carlos Felippa**, *Non Linear Finite Elements*, <http://www.colorado.edu/engineering/cas/courses.d/NFEM.d/Home.html>