



HAL
open science

Calcul des structures

Anders Thorin, Gilles Forêt

► **To cite this version:**

Anders Thorin, Gilles Forêt. Calcul des structures : Introduction au calcul de structures élastiques linéaires. École d'ingénieur. (MEC441) MODAL - Génie Civil, Palaiseau, France. 2013, pp.56. cel-01122394

HAL Id: cel-01122394

<https://cel.hal.science/cel-01122394>

Submitted on 3 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

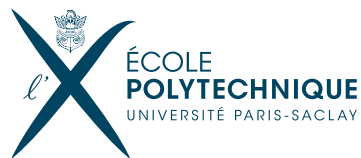


Distributed under a Creative Commons Attribution - ShareAlike 4.0 International License

Génie Civil

Calcul des structures

Anders Thorin – Gilles Foret



Édité le 14 novembre 2014

Ce cours correspond au module MEC441 de l'École Polytechnique. Il a pour objectif de fournir les outils de base pour appréhender le calcul de structures sous des hypothèses simplificatrices qui peuvent être fortes. Il n'a pas vocation à couvrir le calcul de structures au sens le plus large.

*Illustration de la page de garde :
Photographies des en-têtes des chapitres :*

*Mathias Legrand
Anders Thorin*

Polycopié disponible en version pdf sur research.andersthorin.com.
Si vous trouvez une erreur, merci de nous la signaler par mail à anders.thorin@polytechnique.edu.

Table des matières

1	Définitions	7
1.1	Notion de poutre	7
1.2	Géométrie des poutres : cas usuels	8
1.3	Repère central principal d'inertie	8
2	Hypothèses fondamentales de la théorie des poutres	11
2.1	Hypothèses géométriques	11
2.2	Hypothèses sur le matériau	12
2.3	Hypothèse cinématique	12
2.4	Hypothèses sur les actions extérieures	13
3	Système isostatique, système hyperstatique, mécanisme	15
4	Efforts dans les poutres	17
4.1	Efforts extérieurs	17
4.1.1	Les charges	17
4.1.2	Les actions de liaison	18
4.2	Équilibre global d'une poutre	18
4.3	Efforts intérieurs	19
4.3.1	Cas général	19
4.3.2	Cas de la poutre droite	21
4.4	Équations d'équilibre	22

4.5	Diagramme des efforts intérieurs	23
4.5.1	Signe des efforts intérieurs – convention de l'ingénieur	23
4.5.2	Sollicitations simples ou composées	24
5	Relations entre efforts intérieurs et grandeurs locales	27
5.1	Expression de la déformation en fonction des efforts intérieurs	27
5.2	Expressions des contraintes en fonction des efforts intérieurs	29
5.3	Flèche	32
6	Récapitulatif et exemples d'application	33
6.1	Récapitulatif concret	33
6.2	Flexion simple	36
6.3	Chargement mixte	39
7	Annexes	43
7.1	Repère principal d'inerties	45
7.2	Symétrie du tenseur des contraintes	47
7.3	Loi de Hooke tridimensionnelle	49
7.4	Bornes du coefficient de Poisson	51
7.5	Calcul d'une poutre composite	53
	Bibliographie	55



Introduction

Le génie civil est une discipline très vaste. Elle regroupe les constructions civiles, du tunnel ferroviaire à la centrale nucléaire, en passant par le pont, le barrage et le bâtiment. Les principes structurels de ces constructions sont très variés, comme l'arc, la voûte, le fonctionnement en poteau-poutre, la toile tendue, le pont suspendu, le pont haubané, le treillis, etc. Ces différents types de structures s'expriment dans différents matériaux comme l'acier, le béton, le bois, mais aussi le verre, les matériaux composites et d'autres. Les métiers du génie civil sont également très nombreux, selon le domaine (géotechnique, thermique, structure, etc.) ou l'étape du projet de construction (bureau d'étude, méthodes, suivi de chantier, planning, etc.).

Dans ce polycopié, nous ne nous intéresserons qu'aux structures, c'est-à-dire aux éléments qui permettent le transfert des charges jusqu'au support, le sol. En pratique, leur calcul se fait généralement à l'aide de simulations numériques et les résultats doivent vérifier les codes de constructions réglementaires. Il est néanmoins souvent possible d'appréhender le comportement d'une structure à la main. Cela permet d'en comprendre le fonctionnement rapidement et d'éviter l'usage de méthodes numériques qui sont lourdes et dont les incertitudes, souvent oubliées, peuvent être grandes. Nous présenterons ici les méthodes classiques de calcul de structures isostatiques (cf. Chapitre 3) composées d'éléments dont une longueur est grande devant les deux autres (poutres), sous certaines hypothèses (cf. Chapitre 2) qui sont suffisamment peu restrictives pour être bien souvent valides. La figure 6.2 page 35 synthétise la structure du polycopié.

Le formalisme présenté ici a pour but de faire le lien avec la mécanique des milieux continus et de satisfaire le lecteur curieux. Néanmoins, la finalité de ce document est de fournir des outils concrets et applicables, aussi le lecteur plus pressé pourra ne s'arrêter que sur les encadrés.



1 Définitions

1.1 Notion de poutre

Définition 1.1.1 — Poutre. On appelle poutre un solide engendré par une surface plane (Σ) qui peut être variable et dont le centre de gravité G décrit un segment $[AB]$, le plan de (Σ) restant perpendiculaire à cette courbe. Il faut également que la longueur AB soit grande devant les dimensions des sections transverses.

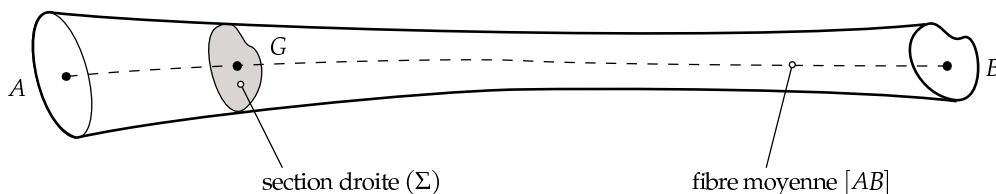


FIGURE 1.1 – Notion de poutre

Une poutre est donc un volume dont une dimension est grande devant les deux autres. De manière analogue, une coque est un volume dont deux dimensions sont grandes devant la troisième.

Définition 1.1.2 — Section droite, fibre moyenne. (Σ) est appelée section droite, (AB) est la fibre moyenne de la poutre (ou ligne moyenne ou encore lieu des centres d'inertie des sections droites de la poutre).

Définition 1.1.3 — Fibre neutre. La ligne d'allongement nul en flexion pure est appelée fibre neutre (ou ligne neutre).

Sous l'hypothèse des petites déformations (voir Chapitre 2), la fibre neutre et la fibre moyenne sont confondues.

1.2 Géométrie des poutres : cas usuels

Si la fibre moyenne (AB) de la poutre est :

- contenue dans un plan, on parle de **poutre plane** (ou **poutre à plan moyen**) ;
- une droite, on parle de **poutre droite** ;
- courbe, on parle de **poutre gauche**.

La section droite (Σ) peut être :

- constante le long de (AB) , on parle alors de **poutre à section constante** ;
- variable, on parle alors de **poutre à section variable** ; en pratique, l'intérêt d'une telle poutre est de s'adapter aux efforts qu'elle supporte et donc d'optimiser l'emplacement de la matière.

Dans la mesure où la complexité apportée par la tridimensionnalité est formelle plus que substantielle, les poutres étudiées en exemples ici sont planes. En outre, elles sont à sections constantes et généralement droites.

1.3 Repère central principal d'inertie

Définition 1.3.1 — Centre d'inertie. Le centre d'inertie G d'un solide \mathcal{S} de masse volumique $\rho(M)$ en $M \in \mathcal{S}$ est le barycentre des masses, c'est-à-dire que si O est le centre du repère :

$$\underline{OG} = \frac{1}{m} \int_{\mathcal{S}} \rho(M) \underline{OM} dV,$$

avec $m = \int_{\Sigma} \rho(M) dV$ la masse du solide Σ .

Le centre de gravité étant le barycentre des poids, le confondre avec le centre d'inertie revient à négliger les variations de la pesanteur. L'erreur commise est très faible en pratique, même pour les plus grandes structures du génie civil.

Définition 1.3.2 — Opérateur d'inertie. On appelle opérateur d'inertie au point P du solide \mathcal{S} l'application qui à tout $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}, P, \underline{u}) = \int_{\mathcal{S}} (\underline{PM} \wedge (\underline{u} \wedge \underline{PM})) dm.$$

L'opérateur d'inertie définit la répartition de la masse d'un solide autour d'un de ses points P . Il s'agit d'un opérateur linéaire en \underline{u} et peut donc être représenté par une matrice dans une base donnée. Par exemple dans une base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 , O le centre du repère considéré et

$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ un vecteur,

$$\mathcal{I}(\mathcal{S}, O, \underline{u}) = \begin{bmatrix} \int_{\mathcal{S}} (y^2 + z^2) dm & \int_{\mathcal{S}} -xy dm & \int_{\mathcal{S}} -xz dm \\ \int_{\mathcal{S}} -yx dm & \int_{\mathcal{S}} (z^2 + x^2) dm & \int_{\mathcal{S}} -yz dm \\ \int_{\mathcal{S}} -zx dm & \int_{\mathcal{S}} -zy dm & \int_{\mathcal{S}} (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}.$$

Soit G le centre d'inertie d'une section droite (Π) et $\mathcal{I}(\mathcal{S}, G, \cdot)$ l'opérateur d'inertie de (Π) en G . $\mathcal{I}(\mathcal{S}, G, \cdot)$ est symétrique défini positif. Ses vecteurs propres (perpendiculaires et normés) dans le plan de la section Π sont notés I_y et I_z .

Définition 1.3.3 — Repère central principal d'inertie. En tout point G de la fibre moyenne, le repère central principal d'inertie est le repère noté $\mathcal{R} = (Gxyz)$, centré en G et formé par les vecteurs propres principaux de l'opérateur d'inertie du solide en G .

Définition 1.3.4 — Matrice d'inertie. Dans le repère central principal d'inertie, la matrice d'inertie associée à $\mathcal{S}(\mathcal{S}, G)$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}$$

avec

$$I_x = I_y + I_z \quad I_y = \int_{\mathcal{S}} z^2 dS \quad I_z = \int_{\mathcal{S}} y^2 dS$$

x, y et z étant les coordonnées d'un point de (\mathcal{S}) dans \mathcal{R} et I_x, I_y, I_z les moments d'inertie (ou moments quadratiques) de la section (Σ) par rapport aux axes $(Gx), (Gy), (Gz)$ respectivement.

Dans toute la suite, il ne sera plus question que du repère central principal d'inertie \mathcal{R} . \mathcal{R} est le repère dans lequel s'écrivent les équations de la théorie des poutres et c'est grâce à ce repère qu'elles s'écrivent si simplement.



2 Hypothèses fondamentales de la théorie des poutres

La mécanique des structures, très utilisée en génie civil, découle de la mécanique des milieux continus. Elle en est une simplification, la contrepartie à la simplicité étant la perte de généralité : la mécanique des structures fournit un modèle satisfaisant sous la condition qu'un certain nombre d'hypothèses soient vérifiées.

2.1 Hypothèses sur la géométrie des poutres

Hypothèses 2.1.1 — Géométrie. La géométrie de la poutre est supposée telle que :

- le rayon de courbure de la fibre moyenne est grand par rapport aux dimensions des sections droites ;
- les éventuelles variations de l'aire de la section droite sont faibles et progressives.

Rappelons que par définition d'une poutre, la longueur de la fibre moyenne est grande devant les dimensions des sections droites (longueur supérieure à une dizaine de fois la plus grande dimension transversale), c'est-à-dire que l'on considère un **solide élancé**.

En particulier, les solides représentés à la figure 2.1 ne sont pas des poutres.

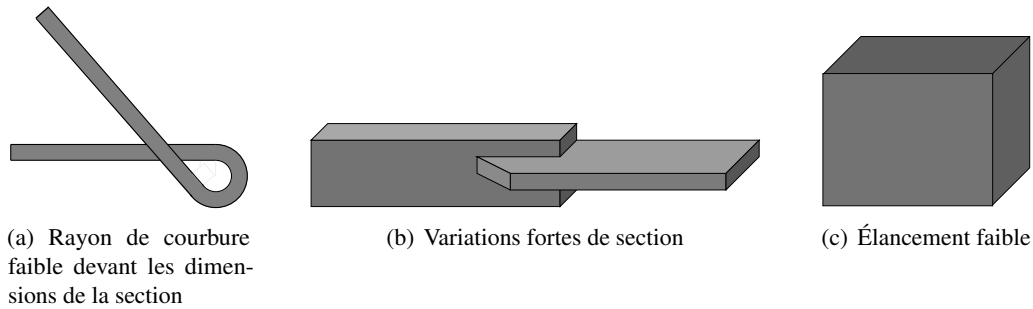


FIGURE 2.1 – Exemples de solides non modélisables par une poutre

2.2 Hypothèses sur le matériau

Hypothèses 2.2.1 — Matériau. Le matériau constitutif de la poutre est supposé être :

- **homogène** : tous les éléments du matériau, aussi petits soient-ils, ont une structure identique à l'échelle considérée¹ ;
- **isotrope** : en tout point, les propriétés mécaniques sont les mêmes dans toutes les directions ;
- **continu** : les propriétés mécaniques varient de manière continue d'un point à l'autre ;
- **utilisé dans le domaine élastique linéaire** : les relations entre contraintes et déformations sont réversibles et linéaires (la loi de comportement est de type **loi de Hooke**)

Ces hypothèses, qui peuvent sembler très restrictives, sont en pratique souvent vérifiées pour les structures courantes en génie civil et dans le cadre de leur utilisation usuelle.

2.3 Hypothèse cinématique

Il convient d'adopter une cinématique adaptée au problème considéré. Celle-ci permet le lien entre les déformations tridimensionnelles et des grandeurs de déformation globales. Le modèle cinématique le plus courant est le modèle de Navier-Bernoulli, qui permet de décrire les déformations d'une poutre par la déformation de sa fibre moyenne uniquement. On peut d'ailleurs prouver que sous cette hypothèse, la déformation de la fibre moyenne est complètement caractérisée par la déformation axiale *et* la variation de courbure [**Bisch**].

Hypothèse 2.3.1 — Cinématique : Navier-Bernoulli. Les sections planes normales à la fibre moyenne avant transformation restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la transformation.

Cette hypothèse est correctement vérifiée par l'expérience dans le cadre des petites perturbations définies ci-après. En revanche, elle n'est plus valable lorsque les déformations liées à l'effort tranchant sont trop importantes. Il faut alors utiliser un autre modèle de poutre, par exemple le modèle de Timoshenko.

■ **Pour aller plus loin 2.1** Le modèle de Timoshenko est plus général que celui de Navier-Bernoulli. Pour prendre en compte les déformations liées à l'effort tranchant, Timoshenko a introduit un nouveau paramètre dans la transformation : à abscisse curviligne fixée, il s'agit de l'angle entre la normale à la section - toujours supposée plane - et la fibre moyenne.

1. Par exemple un cube de béton d'un mètre de côté sera considéré homogène, contrairement à un cube d'un centimètre de côté du même matériau.

On montre que l'effort tranchant et le moment fléchissant dépendent alors de cet angle. En pratique, on utilise un tel modèle pour les poutres peu élancées (rapport longueur/épaisseur inférieur à environ $4f$).

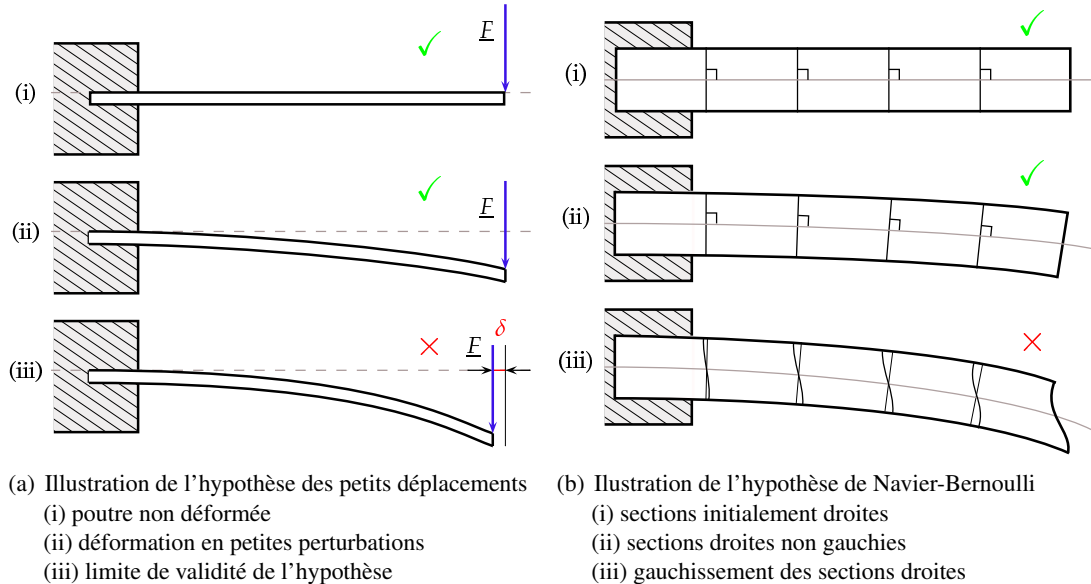


FIGURE 2.2 – Illustration des hypothèses de petits déplacements et de Navier-Bernoulli

2.4 Hypothèses sur les actions extérieures

Hypothèse 2.4.1 — Petites perturbations. C'est la simultanée de :

- l'**hypothèse des petits déplacements** qui permet de confondre la configuration à tout instant avec la configuration initiale ;
- l'**hypothèse des petites déformations**, qui permet de linéariser le tenseur des déformations.

L'hypothèse des petits déplacements simplifie énormément les calculs : pour écrire l'équilibre sur la configuration réelle, celle-ci devrait être connue et il faudrait alors résoudre une équation différentielle non linéaire.

L'hypothèse des petites déformations justifie l'utilisation dans toute la suite du tenseur des déformations linéarisé² ce qui justifiera l'application le principe de superposition !

■ **Pour aller plus loin 2.2** La linéarisation du tenseur de Green-Lagrange permet de confondre les descriptions lagrangienne et eulérienne de la transformation subie par un matériau. En effet si $d\underline{X}$ et $d\underline{Y}$ sont deux vecteurs matériels dont les images par la transformation sont respectivement $d\underline{x}$ et $d\underline{y}$, il vient par définition des tenseurs de Green-Lagrange \underline{E} et Euler-Almansi \underline{A} :

$$d\underline{x}^T d\underline{y} - d\underline{X}^T d\underline{Y} = 2d\underline{X}^T \underline{E} d\underline{Y} = 2d\underline{x}^T \underline{A} d\underline{y}. \quad (2.1)$$

2. Il est rappelé que le tenseur des déformations de Green-Lagrange associé à un champ de déplacements \underline{u} et défini par $\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla}^T \underline{u} + \underline{\nabla}^T \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \underline{u})$ peut se linéariser en petites déformations en $\underline{E} \approx \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla} \underline{u} + \underline{\nabla}^T \underline{u})$.

$\underline{\underline{E}}$ est une application bilinéaire qui agit sur la configuration initiale - lagrangienne - tandis que $\underline{\underline{A}}$ agit sur la configuration actuelle - eulérienne. Elles sont reliées par la relation

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{A}} \underline{\underline{F}}$$

où $\underline{\underline{F}}$ est le gradient de la transformation associée au champ de déplacement \underline{u} et vaut $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}$. En petites déformations, $\underline{\underline{E}} \sim \underline{\underline{A}}$ d'où l'identification des descriptions eulériennes et lagrangiennes.

Il est utile de remarquer que l'hypothèse des petites déformations n'implique pas celle des petits déplacements. Par exemple, l'opération qui consiste à enrouler une feuille de papier est décrite par une transformation vérifiant l'hypothèse des petites déformations mais pas celle des petits déplacements. Symétriquement, les petits déplacements n'impliquent pas l'hypothèse des petites déformations : par exemple, un faible déplacement mettant en traction un élastomère chargé d'inclusions solides peu mener à de grandes déformations.

Théorème 2.4.1 Principe de Saint-Venant (1885) : Suffisamment loin de la zone d'application des efforts extérieurs, le comportement local de la poutre ne dépend pas de la manière dont sont appliqués ces efforts.

Appliquer ce principe revient à négliger les déformations locales liées à l'application d'un effort extérieur, dans le calcul d'une structure. Ce principe permet également de simplifier la formulation des conditions aux limites. En pratique, on peut appliquer le principe de Saint-Venant dès lors que l'on se place à une distance supérieure à 3 fois la dimension caractéristique de la zone d'application du chargement. Par exemple, cela est vérifié pour les éprouvettes de traction normalisées.

■ **Pour aller plus loin 2.3** Un *principe* est une "proposition posée au début d'une déduction, ne se déduisant elle-même d'aucune autre dans le système considéré [...]" (source : dictionnaire de l'Académie Française). Cette définition se rapproche de celle du *postulat*, si ce n'est que celui-ci s'admet, sans pour autant qu'il soit nécessairement impossible de le déduire des autres propositions.

L'appellation courante "principe de Saint-Venant" est en réalité un abus sémantique ; en effet il a été démontré qu'il s'agit en réalité d'un théorème [**Bui**].

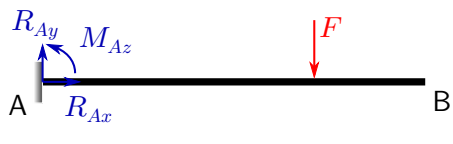
Enfin, on se place dans le cadre d'études **statiques**, c'est-à-dire que l'on **néglige les effets inertiels**.



3 Système isostatique, système hyperstatique, mécanisme

■ **Exemple 3.1 Exemple introductif** Voici trois poutres qui ne diffèrent que par leurs appuis. Elles sont de longueur L et chargées à une distance l de leur encastrement.

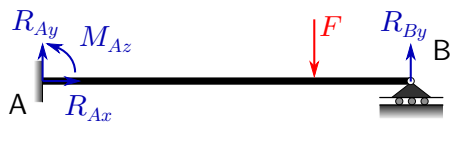
Principe fondamental de la dynamique :



$$\begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} - F = 0 \\ M_{Az} - Fl = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

3 équations indépendantes linéaires, 3 inconnues : les réactions d'appui peuvent être calculés.

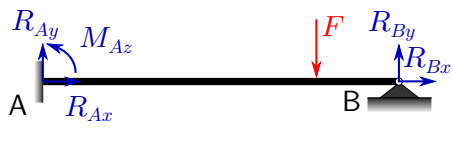
Principe fondamental de la dynamique :



$$\begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} - F = 0 \\ M_{Az} + R_{By}L - Fl = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

3 équations indépendantes linéaires, 4 inconnues : il manque une équation pour calculer les réactions d'appuis.

Principe fondamental de la dynamique :



$$\begin{cases} R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} - F = 0 \\ M_{Az} + R_{By}L - Fl = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

3 équations indépendantes linéaires, 5 inconnues : il manque deux équations pour calculer les réactions d'appuis.

■

Le degré d'hyperstatisme d'un système est une grandeur qui traduit la redondance mécanique de ce système. Cette grandeur influe non seulement sur le comportement structurel, mais aussi

sur son calcul comme cela apparaît clairement dans la définition d'isostatisme :

Définition 3.0.1 — Système isostatique. Un système est dit isostatique si le principe fondamental de la dynamique suffit à déterminer toutes les inconnues de liaison du mécanisme.

Les liaisons d'un système sont des conditions cinématiques, intérieures ou extérieures au système. À chaque liaison correspond des actions de liaison, forces ou moments, inconnues du problème.

Une structure cinématiquement "très" contrainte, i.e. avec un grand nombre de liaisons indépendantes par rapport à ses degrés de liberté, possède un trop grand nombre d'actions de liaison pour qu'elles soient toutes déterminées par le seul principe fondamental de la dynamique.

Il est possible de définir - et donc de calculer - le degré d'hyperstatisme comme la dimension du noyau de la matrice purement géométrique reliant les actions de liaison aux efforts extérieurs - une telle matrice existe par linéarité des équations d'équilibre en les actions de liaison et des actions extérieures - mais le plus simple est de retenir ces deux règles :

Règle pratique 3.1 — Une structure est isostatique si et seulement si l'ajout d'un degré de liberté mène à un mécanisme mobile ;

— Le degré d'hyperstatisme d'une structure est le nombre de degrés de liberté supplémentaires à introduire pour obtenir une structure isostatique.

En d'autres termes, un système est dit isostatique si le nombre de liaisons indépendantes qui le constitue est égal au nombre de ses degrés de liberté.

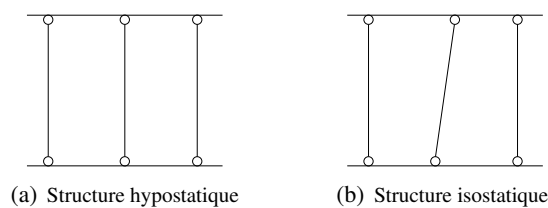


FIGURE 3.1 – Importance de l'indépendance des liaisons dans l'évaluation du degré d'hyperstatisme

■ **Pour aller plus loin 3.1** Attention, l'indépendance des liaisons est à prendre en compte lors d'un calcul de degré d'hyperstatisme. Par exemple, la figure 3.1 présente les mêmes barres et les mêmes liaisons pivots, pourtant le degré d'hyperstatisme n'est pas le même selon qu'elles sont parallèles ou non. À gauche, la structure est mobile (degré d'hyperstatisme négatif), on la qualifie d'hypostatique. Si l'on ajoute un degré de liberté en translation horizontale à l'une des liaisons de la barre centrale de la figure de droite, on obtient également une structure mobile. La structure est donc isostatique.

Dans toute la suite, les structures étudiées seront isostatiques.

En pratique, les structures isostatiques ont l'avantage d'être moins contraignantes à assembler. Par exemple, un tabouret à trois pieds s'assemblera avec n'importe quel sol. Néanmoins, il est parfois préférable d'adopter un mécanisme hyperstatique. Par exemple, si l'on veut augmenter la stabilité du tabouret ou lui permettre de résister à un chargement plus important, il pourra lui être ajouté un pied.

Efforts extérieurs

- Les charges
- Les actions de liaison

Équilibre global d'une poutre

Efforts intérieurs

- Cas général
- Cas de la poutre droite

Équations d'équilibre

Diagramme des efforts intérieurs

- Signe des efforts intérieurs – convention de l'ingénieur
- Sollicitations simples ou composées



4 Efforts dans les poutres

Dans une structure, l'ingénieur est souvent amené à s'intéresser à une ou plusieurs grandeurs locales. Par exemple pour appliquer un critère de rupture ou de plasticité, il disposera d'un critère de rupture portant sur les composantes du tenseur des contraintes - tenseur *local* ! Néanmoins, il est fort intuitif et non moins utile de définir des grandeurs macroscopiques – au sens où elles ne dépendent pas de la position dans une section donnée. Il s'agit des efforts intérieurs.

Les étapes de calcul consistent à partir d'une géométrie, de matériaux et d'efforts extérieurs donnés à déduire les efforts intérieurs pour chaque abscisse curviligne puis à remonter aux contraintes et déformations en tout point. En pratique, les efforts extérieurs sont déterminés par la structure de l'ouvrage (poids propre), sa fonction (par exemple des piétons sur une passerelle), son emplacement (exposition au vent, au séisme, etc.).

4.1 Efforts extérieurs

Définition 4.1.1 — Efforts extérieurs. Les efforts extérieurs sont les efforts s'exerçant sur la poutre isolée. On en distingue deux sortes :

- les **charges**, qui sont des efforts auxquels la poutre est destinée à résister ;
- les **actions de liaison** qui sont des efforts appliqués sur la poutre par les liaisons qui la maintiennent en place.

Dans l'exemple figure 4.1, F et p sont des charges, R_0 , C_0 et R_B sont des actions de liaison. En général, les actions de liaison sont les inconnues du problème.

4.1.1 Les charges

En théorie des poutres, on distingue généralement deux types de charges :

- les **charges concentrées** (ou ponctuelles) qui s'appliquent en un point de la poutre – cf F sur la figure 4.1 ;

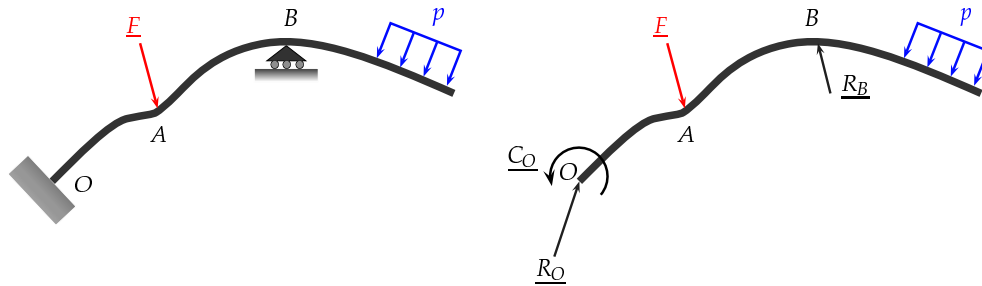


FIGURE 4.1 – Schéma des efforts appliqués à une poutre sur appui

- les **charges réparties** qui sont distribuées continûment le long d'un segment de la poutre – cf p sur la figure 4.1.

Les efforts extérieurs se décomposent ainsi en forces concentrées, forces réparties et moments concentrés, moments répartis. Les efforts répartis peuvent être écrits comme des densités linéiques d'efforts. Les sollicitations les plus courantes sont représentées au tableau 4.1 page 25.

4.1.2 Les actions de liaison

Les poutres étant réduites à des lignes matérielles, le contact avec l'extérieur est schématisé par un contact ponctuel. Une action de liaison est définie en un point par une force et un moment. Nous nous limiterons dans ce cours aux liaisons parfaites, c'est-à-dire dont le travail des actions de liaisons est nul.

En mécanique des structures, on rencontre principalement les trois types de liaisons parfaites *planes* suivantes :

- **encastrement** : la rotation et les déplacements sont bloqués ;
- **articulation** ou **rotule** : la rotation est libre, les déplacements sont bloqués ;
- **appui simple** : la rotation et un unique déplacement sont libres, l'autre déplacement est bloqué.

Les différentes variantes des principaux schémas utilisés pour représenter ces liaisons sont illustrés à la figure 4.2.

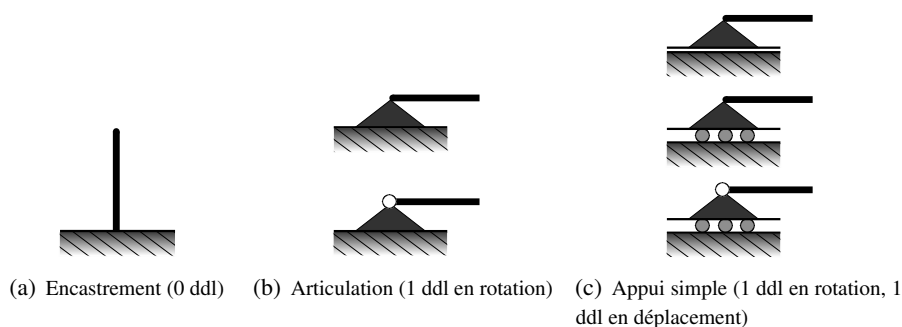


FIGURE 4.2 – Représentations des liaisons parfaites planes usuelles

4.2 Équilibre global d'une poutre

Soit une poutre soumise aux actions extérieures suivantes :

- F_i : les charges concentrées aux points A_i ;
- C_i : les moments concentrés aux points A_i ;

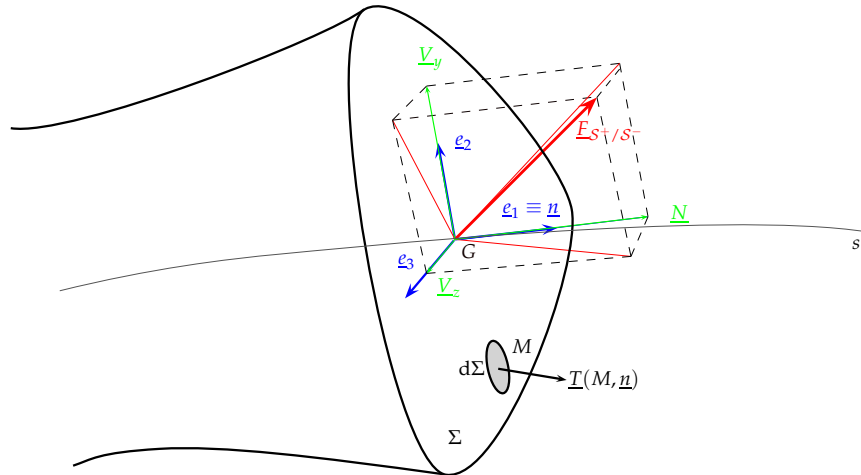


FIGURE 4.3 – Équilibre d'un tronçon de poutre et représentation des projections de la force de réaction

- $\underline{p}(x_i)$: les forces réparties sur les segments Γ_i ;
- \underline{F}_k : les résultantes de liaison aux points B_k ;
- \underline{C}_k : les moments de liaison aux points B_k .

Essentiel 4.1 — Principe fondamental de la statique. Lorsque la poutre est en équilibre, le principe fondamental de la statique s'écrit :

$$\begin{cases} \sum_i \underline{F}_i + \sum_k \underline{F}_k + \int_{\Gamma_i} \underline{p} \, dx = \underline{0} \\ \sum_i \underline{OA}_i \wedge \underline{F}_i + \sum_i \underline{C}_i + \sum_k \underline{OA}_k \wedge \underline{F}_k + \sum_k \underline{C}_k + \int_{\Gamma_i} \underline{OG} \wedge \underline{p} \, dx = \underline{0} \end{cases} \quad (4.1)$$

Ces deux équations vectorielles fournissent 6 équations scalaires dans l'espace, 3 dans le plan (2 équations de forces et une équation de moments).

4.3 Efforts intérieurs

4.3.1 Cas général

Soit une poutre en équilibre sous l'action de ses efforts extérieurs (charges et actions de liaison) et une orientation arbitraire de l'abscisse curviligne ¹. Soit une coupure orthogonale à la fibre neutre en un point G qui divise la poutre en deux parties notées \mathcal{S}^+ et \mathcal{S}^- . Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous les actions $\underline{F}_{\mathcal{S}^+/\mathcal{S}^-}$ et $\underline{M}_{\mathcal{S}^+/\mathcal{S}^-}$ en G de l'autre partie. On note Σ la section de la poutre contenant le point G et \underline{n} sa normale.

Soit M un point de Σ . Le vecteur contrainte $\underline{T}(M, \underline{n})$ au point M de la section Σ de normale \underline{n} est la densité surfacique de l'action résultante $\underline{F}_{\mathcal{S}^+/\mathcal{S}^-}$ sur la section Σ , c'est-à-dire :

$$\underline{T}(M, \underline{n}) = \frac{d\underline{F}_{\mathcal{S}^+/\mathcal{S}^-}}{d\Sigma}(M). \quad (4.2)$$

Naturellement, l'intégrale du vecteur contrainte sur une section qui délimite deux parties de poutre est égale à la force exercée par la partie de la poutre sur l'autre partie.

1. L'abscisse curviligne suit la ligne moyenne.

A priori, il n'y a pas de raison pour que $\underline{T}(\underline{M}, \underline{n})$ ne dépende que de la normale sortante \underline{n} . Cela constitue le postulat de Cauchy qui s'énonce :

$$\underline{T}(\underline{M}, \partial\Sigma) = \underline{T}(\underline{M}, \underline{n}). \quad (4.3)$$

Puis, le lemme du tétraèdre implique qu'il existe un tenseur $\underline{\underline{\sigma}}$ tel que

$$\forall \underline{M}, \underline{T}(\underline{M}, \underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}(\underline{M}) \cdot \underline{n}. \quad (4.4)$$

C'est cette relation qui lie les contraintes, grandeurs locales intrinsèques et indépendantes d'un repère², aux réactions macroscopiques "intuitives" $\underline{F}_{\mathcal{G}^+/\mathcal{G}^-}$ par l'intermédiaire du vecteur contrainte.

Le mécanicien des structures, plutôt que de travailler avec le tenseur des contraintes, utilise des grandeurs "macroscopiques" qui sont les projections des efforts de réaction $\underline{F}_{\mathcal{G}^+/\mathcal{G}^-}$ et $\underline{M}_{\mathcal{G}^+/\mathcal{G}^-}$ dans le repère orthonormal noté $(G, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ lié à l'abscisse curviligne et représenté à la figure 4.3. Il vient alors :

$$\underline{F}_{\mathcal{G}^+/\mathcal{G}^-} = \underbrace{\left(\int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_1 \, dS \right)}_N \underline{e}_1 + \underbrace{\left(\int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_2 \, dS \right)}_{V_y} \underline{e}_2 + \underbrace{\left(\int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_3 \, dS \right)}_{V_z} \underline{e}_3 \quad (4.5)$$

et

$$\underline{M}_{G, \mathcal{G}^+/\mathcal{G}^-} = \int_{\Sigma} \underline{GM} \wedge (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \, dS = \int_{\Sigma} \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_1 \\ (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_2 \\ (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_3 \end{bmatrix} \, dS \quad (4.6)$$

$$= \underbrace{\left(\int_{\Sigma} (y (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_3 - z (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_2) \, dS \right)}_{M_x} \underline{e}_1 \quad (4.7)$$

$$+ \underbrace{\left(\int_{\Sigma} z (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_1 \, dS \right)}_{M_y} \underline{e}_2 + \underbrace{\left(\int_{\Sigma} -y (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_1 \, dS \right)}_{M_z} \underline{e}_3 \quad (4.8)$$

$$(4.9)$$

Définition 4.3.1 — Efforts intérieurs. Les efforts intérieurs se décomposent en :

— résultantes :

$$\left| \begin{array}{l} N \quad \text{effort normal (dans la direction } \underline{x} \text{)} \\ V_y \quad \text{effort tranchant dans la direction } \underline{y} \\ V_z \quad \text{effort tranchant dans la direction } \underline{z} \end{array} \right.$$

$\underline{V} = V_y \underline{y} + V_z \underline{z}$ est appelé **effort tranchant**.

— moments :

$$\left| \begin{array}{l} M_x \quad \text{moment de torsion (dans la direction } \underline{x} \text{)} \\ M_y \quad \text{moment de flexion dans la direction } \underline{y} \\ M_z \quad \text{moment de flexion dans la direction } \underline{z} \end{array} \right.$$

$\underline{M} = M_y \underline{y} + M_z \underline{z}$ est appelé **moment de flexion**.

2. Ne pas confondre tenseur d'ordre 2 et matrice ; le tenseur des contraintes s'exprime dans une base donnée à l'aide d'une matrice.

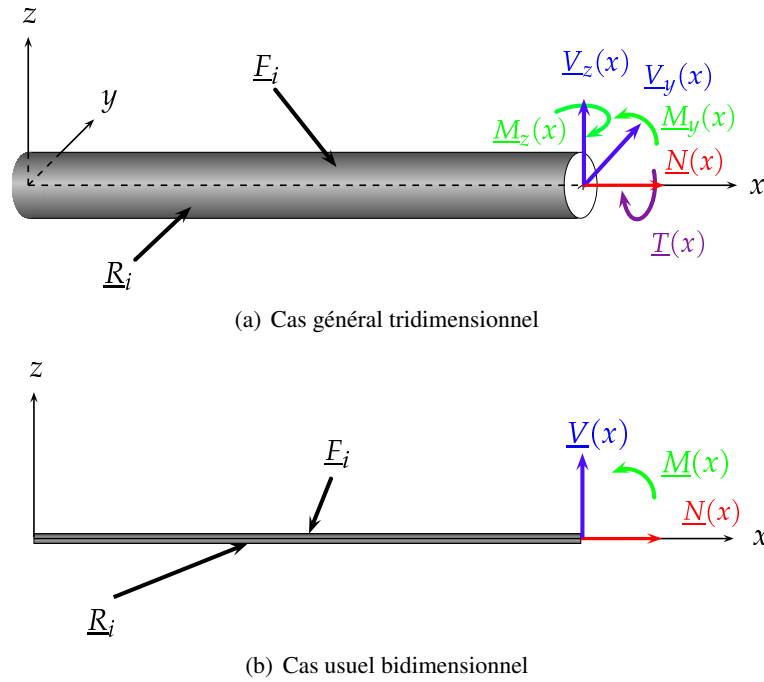


FIGURE 4.4 – Illustrations des efforts intérieurs

Remarque : Les problèmes généralement traités sont des problèmes plans, tous les efforts extérieurs étant situés dans le plan (O, x, y) . Dans ces conditions, les seuls efforts intérieurs non nécessairement nuls sont :

- l'effort normal $N(x)$
- l'effort tranchant suivant \underline{y} , $V_y(x)$ qui sera noté $V(x)$
- le moment fléchissant suivant \underline{z} , $M_z(x)$ qui sera noté $M(x)$.

représentés à la figure 4.4(b).

4.3.2 Cas de la poutre droite

Dans le cas d'une poutre droite, $\underline{n} = \underline{e}_1$. Les définitions des efforts intérieurs se simplifient alors pour les réactions en :

$$N = \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_1 \, dS = \int_{\Sigma} \sigma_{11} \, dS \quad (4.10)$$

$$V_y = \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_2 \, dS = \int_{\Sigma} \sigma_{12} \, dS \quad (4.11)$$

$$V_z = \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_3 \, dS = \int_{\Sigma} \sigma_{13} \, dS \quad (4.12)$$

et pour les moments en :

$$T = \int_{\Sigma} \left(y (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_3 - z (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_2 \right) \, dS = \int_{\Sigma} (y \sigma_{13} - z \sigma_{12}) \, dS \quad (4.13)$$

$$M_y = \int_{\Sigma} z (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_1 \, dS = \int_{\Sigma} z \sigma_{11} \, dS \quad (4.14)$$

$$M_z = \int_{\Sigma} -y (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{e}_1 \, dS = \int_{\Sigma} -y \sigma_{11} \, dS. \quad (4.15)$$

Essentiel 4.2 Dans le cas courant d'une poutre droite plane, les trois efforts intérieurs valent :

$$N = \int_{\Sigma} \sigma_{11} dS \quad (4.16)$$

$$V = \int_{\Sigma} \sigma_{12} dS \quad (4.17)$$

$$M_z = \int_{\Sigma} -y\sigma_{11} dS \quad (4.18)$$

4.4 Équations d'équilibre

Soit une poutre droite orientée selon x et soumise à une force répartie donnée (cf. figure 4.5). Soit une section droite d'abscisse x et une section infinitésimale voisine d'abscisse $x + dx$. Considérons la portion de poutre délimitée par ces deux sections droites.

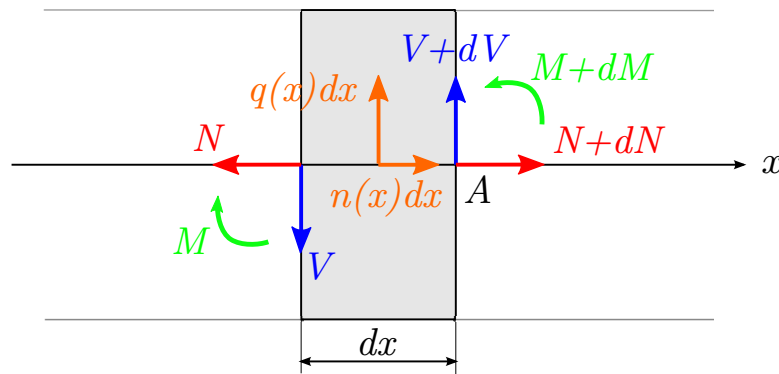


FIGURE 4.5 – Équilibre d'une tranche infinitésimale de poutre

La face à l'abscisse x est soumise aux efforts N , V et M , tandis que la face à l'abscisse $x + dx$ est soumise aux mêmes efforts accrus de leur variation sur dx : dN , dV et dM . Les composantes axiale $n(x)$ et transversale $q(x)$ de la force répartie sur la portion considérée a pour résultantes $n(x)dx$ et $q(x)dx$ au centre A . L'équilibre de la portion infinitésimale de poutre s'écrit donc :

$$\begin{cases} \sum F_x = -N + n(x)dx + N + dN = 0 \\ \sum F_y = -V + q(x)dx + V + dV = 0 \\ \sum M_z = -M + q(x)\frac{dx^2}{2} + M + dM + Vdx = 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

où dans la dernière équation on a utilisé le fait que

$$\int_x^{x+dx} q(s)q(x+dx-s)ds \approx q(x)[(x+dx)(x+dx-x) - q(x)(\frac{1}{2}(x+dx)^2 - x^2)] = q(x)\frac{dx^2}{2}. \quad (4.20)$$

En négligeant le terme du second ordre dans la somme des moments il vient les **équations d'équilibre local** d'une poutre droite.

Essentiel 4.3 — Équations d'équilibre local d'une poutre droite.

$$\frac{dN}{dx} = -n(x) \quad \frac{dV}{dx} = -q(x) \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q(x) \quad (4.21)$$

Remarques importantes :

— Ces équations mettent en évidence un découplage entre les efforts axiaux (N, n) et les efforts transversaux et flexionnels (V, q, M).

— Il apparaît également qu'effort tranchant et moment sont liés par la relation $\frac{dM}{dx} = -V$.

Dans le cas général d'une poutre courbe plane, par une démonstration analogue il vient que :

$$\frac{dN}{dx} - \frac{V}{R} = -n(x) \quad \frac{dV}{dx} + \frac{N}{R} = -q(x) \quad \frac{d^2M}{dx^2} = q(x) \quad (4.22)$$

où R est le rayon de courbure de la fibre neutre. L'effort normal N et l'effort tranchant V ne sont alors plus découplés.

4.5 Diagramme des efforts intérieurs

Définition 4.5.1 — Diagramme des efforts intérieurs (N-V-M). On appelle diagramme des efforts intérieurs (ou diagrammes N-V-M) les diagrammes représentant la variation de chacun des efforts intérieurs selon la ligne moyenne. Ces représentations sont utiles pour situer rapidement les sections les plus sollicitées (cf. Chapitre 6).

Les équations d'équilibre local permettent de calculer les diagrammes des efforts intérieurs par intégration, les constantes qui en résultent se déterminent par conditions statiques aux limites. Par exemple, à une extrémité libre non chargée on a $N = 0, V = 0, M = 0$. Toutefois, on n'utilise rarement cette façon de faire qui est lourde à utiliser.

Règles pratiques pour la construction de diagramme des efforts intérieurs : Les équations différentielles précédentes fournissent les règles suivantes, très utiles pour construire les diagrammes NVM. Pour tout tronçon de poutre droite :

- l'effort normal est constant si la charge axiale est nulle³ ; il varie linéairement si la charge axiale est uniforme.
- l'effort tranchant est constant s'il n'y a pas de charge transversale ; à chaque charge transversale ponctuelle il est discontinu, et la discontinuité vaut la valeur de la charge ; l'effort tranchant est linéaire sous une charge transversale répartie.
- le moment varie linéairement en l'absence de charge transversale répartie ; il est parabolique sous l'action d'une charge transversale répartie ; le moment est extremal là où l'effort tranchant s'annule.

4.5.1 Signe des efforts intérieurs – convention de l'ingénieur

En pratique, N, V ou M peuvent désigner selon le contexte une grandeur vectorielle ou une valeur algébrique. Le signe de celles-ci n'a de sens qu'une fois une orientation fixée. Ainsi, **un diagramme des efforts intérieurs nécessite un schéma présentant les orientations de :**

- l'abscisse curviligne ;
- l'effort normal ;
- l'effort tranchant ;
- le moment fléchissant.

Une fois une l'orientation de l'abscisse curviligne définie, il existe différentes conventions d'orientation. Nous utiliserons la suivante, appelée *convention de l'ingénieur* :

- l'effort normal est positif en traction ;
- l'effort tranchant est positif lorsqu'il directement orthogonal à l'effort normal positif ;

3. Attention, cela ne serait plus garanti si l'hypothèse des petites déformations n'était plus valide.

— le moment fléchissant est positif lorsqu'il tend la fibre inférieure.

Cette dernière convention, représentée sur la figure 4.6 se comprend en examinant la déformation d'un tronçon de poutre fléchi en visualisant l'épaisseur réelle de la poutre. Les fibres bordant la poutre, de part et d'autre de son axe, s'appellent **fibres extrêmes**. La comparaison des configurations initiale et déformée révèle qu'une des deux fibres extrêmes est tendue et l'autre comprimée ; celles-ci s'inversent lorsque le moment de flexion change de signe.



FIGURE 4.6 – Convention ingénieur (grandeurs positives)

Par suite, on distingue sans équivoque le sens d'un moment de flexion, et donc le sens d'une courbure, en dessinant le diagramme des moments fléchissants du côté de la fibre extrême tendue (cela revient à porter la fonction M à gauche ou à droite de l'axe de la poutre, selon que la fibre extrême de gauche ou de droite est tendue).

Remarque : Si l'orientation des efforts normaux et des moments de flexion ne dépendent pas de l'orientation de l'abscisse curviligne, il n'en est pas de même pour l'effort tranchant. C'est pourquoi un diagramme NVM ne peut être correctement interprété que si la convention de signe est précisée.

4.5.2 Sollicitations simples ou composées

Si une seule grandeur parmi N , V , M_f ou T est non nulle, on parle de **sollicitation simple**. À l'inverse, une sollicitation est **composée** lorsqu'au moins deux de ces grandeurs sont non nulles.

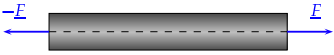
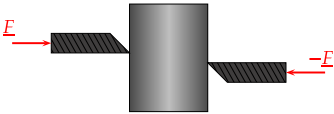
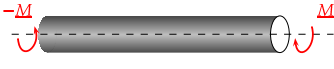

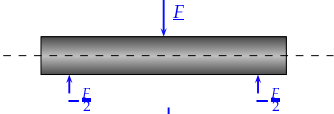
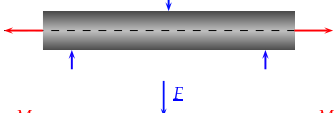
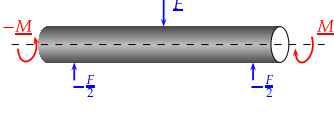
Cas	Schéma	N	V	T	M_f
Traction		N	0	0	0
Cisaillement		0	V	0	0
Torsion		0	0	T	0
Flexion pure		0	0	0	M_{fz}
Flexion simple		0	V_y	0	M_{fz}
Flexion composée		N	V_y	0	M_{fz}
Flexion-Torsion		0	V_y	T	M_{fz}
Flambement		N	0	0	M_{fz}
Flexion déviée		0	V_y, V_z	0	M_{fz}, M_{fy}
...

TABLE 4.1 – Sollicitations usuelles et efforts intérieurs correspondants



5 Relations entre efforts intérieurs et grandeurs locales

Les efforts intérieurs ont été définis à partir des contraintes, qui sont par définition des grandeurs locales, elles-mêmes définies comme limites de densités surfaciques de force. En pratique, les efforts intérieurs d'une structure sont déterminés, en fonction des efforts extérieurs, par l'écriture de l'équilibre global puis des équations d'équilibre.

Un des buts fondamentaux de l'étude de structures est de calculer des grandeurs locales (contraintes ou déformations), en vue de déterminer s'il y a rupture ou autre non-linéarité comportementale (plastification par exemple). L'objet de ce chapitre est de fournir les éléments permettant de calculer les contraintes et les déformations à partir des efforts intérieurs. Dans tout ce chapitre on se place dans le cadre d'une poutre droite plane.

5.1 Expression de la déformation en fonction des efforts intérieurs

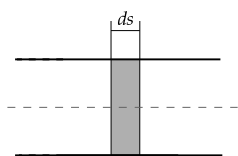


FIGURE 5.1 – Tronçon de poutre droite plane

Soit un tronçon de poutre droite plane soumise en toute généralité à de la flexion et de la traction/compression, et délimité par les abscisses curvilignes s et $s + ds$. La poutre étant droite et plane, pour toute ordonnée y la longueur initiale du tronçon dans la direction 1 notée $dx(y)$ est ds .

On rappelle que l'on se place sous l'hypothèse de Navier-Bernoulli. Par linéarité, la déformation dans la direction 1 à une hauteur donnée est la somme de l'allongement engendré par la flexion (ϵ_{11}^M) et de celui engendré par la traction/compression dans cette même direction (ϵ_{11}^N).

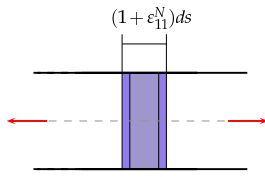


FIGURE 5.2 – Déformations en traction/compression

Soit N l'effort normal appliqué à la poutre et ε_{11}^N la déformation engendrée par la traction/compression. Comme vu au chapitre 4,

$$N = \int_{\Sigma} \sigma_{11}^N dS = \int_{\Sigma} E \varepsilon_{11}^N dS = ES \varepsilon_{11}^N \quad (5.1)$$

d'où

$$\varepsilon_{11}^N = \frac{N}{ES}. \quad (5.2)$$

Soit M le moment de flexion appliqué à la poutre et ε_{11}^M la déformation engendrée par la flexion. On note χ la courbure de la fibre neutre, $R = 1/\chi$ le rayon de courbure et y l'ordonnée dans la section orientée vers le haut. Géométriquement, il vient

$$\frac{ds(1 + \varepsilon_{11}^M(y))}{ds} = \frac{R - y}{R} = 1 - y\chi \quad (5.3)$$

ou encore $\varepsilon_{11}^M(y) = -y\chi$. Comme vu au chapitre 4,

$$M = \int_{\Sigma} -y \sigma_{11}^M(y) dS = - \int_{\Sigma} E (-y\chi) dS = E \underbrace{\int_{\Sigma} y^2 dS}_{I_z \text{ (cf. Chap. 1)}} \chi. \quad (5.4)$$

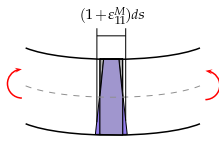


FIGURE 5.3 – Déformations en flexion

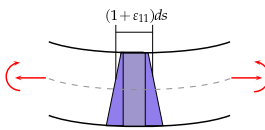


FIGURE 5.4 – Déformations en flexion composée

La déformation longitudinale totale $\varepsilon_{11}^N + \varepsilon_{11}^M$ est donc par linéarité :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon - y\chi. \quad (5.5)$$

Au final, on obtient les deux équations fondamentales suivantes :

Essentiel 5.1 — Loi de comportement global des poutres minces à plan moyen. Sous les hypothèses du Chapitre 1, l'effort normal d'une poutre à plan moyen est proportionnel à l'allongement de la fibre neutre et le moment de flexion est proportionnel à la courbure de la fibre neutre.

$$N = ES \varepsilon \quad (5.6)$$

$$M = EI_z \chi \quad (5.7)$$

ES est la raideur en traction de la poutre et EI_z est la raideur de flexion.

5.2 Expressions des contraintes en fonction des efforts intérieurs

En pratique pour une poutre droite plane, on considère essentiellement les contraintes principales normales σ_{11} . Dans cette section nous allons voir pourquoi.

Contrainte normale σ_{11}

De l'hypothèse d'élasticité linéaire (loi de Hooke), il vient :

$$\sigma_{11} = E \varepsilon_{11} = E(\varepsilon - y\chi) = E \left(\frac{N}{ES} - y \frac{M}{EI_z} \right). \quad (5.8)$$

On en déduit l'expression suivante, très utile en pratique pour déterminer les contraintes en fonction des efforts intérieurs N , M à une hauteur de section donnée y :

Essentiel 5.2 — Expression de la contrainte normale en fonction des efforts intérieurs.

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} - \frac{M}{I_z} y \quad (5.9)$$

Contraintes de cisaillement σ_{12}

Nous allons montrer ici que les contraintes de cisaillement d'une poutre sont négligeables devant les contraintes normales si elle est élancée.

Précisions sur σ_{12} On rappelle que la contrainte de cisaillement σ_{ij} , $i \neq j$ est la contrainte dans la direction j sur une facette de normale i . Par symétrie du tenseur des contraintes (cf. Annexe 7.1), c'est aussi la contrainte dans la direction i sur une facette de normale j . La variation de σ_{11} n'est possible que parce que σ_{12} l'équilibrent (voir figure 5.5) !

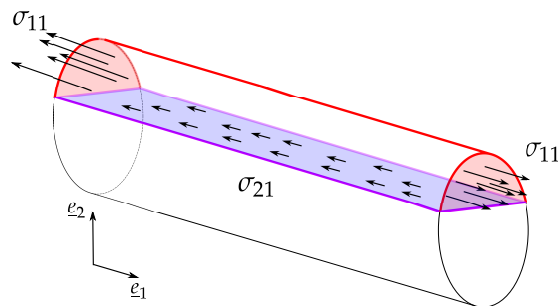
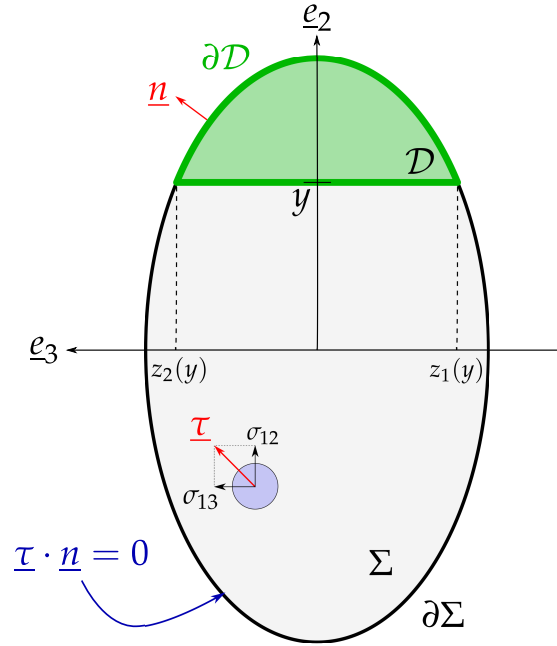


FIGURE 5.5 – Les contraintes σ_{12} équilibrent les variations de σ_{11}

Estimation de σ_{12} Pour évaluer σ_{12} , on établit d'abord la formule de Jouravsky qui permet de les estimer. Remarquons que $\sigma_{12} \neq \frac{V}{S}$ car sinon $\sigma_{12}(y = \pm \frac{h}{2}) \neq 0$ ce qui est incompatible avec la condition de bord libre de contrainte $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = 0$ au bord. Considérons une section de poutre tridimensionnelle, voir figure 5.6. On notera $\underline{\underline{\tau}}$ le vecteur cisaillement sur une section de normale \underline{e}_1 . Par définition, $\underline{\underline{\tau}} = \sigma_{12}\underline{e}_2 + \sigma_{13}\underline{e}_3$.

En l'absence de force volumique,

$$\text{div } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0} \quad (5.10)$$

FIGURE 5.6 – Section Σ d'une poutre

ce qui donne en projection sur e_1 :

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13} = 0. \quad (5.11)$$

Or

$$\operatorname{div} \underline{\tau} = \partial_2 \sigma_{12} + \partial_3 \sigma_{13}. \quad (5.12)$$

Par le théorème de Stokes appliqué sur un domaine \mathcal{D} ,

$$\iint_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \underline{\tau} \, dS = \oint_{\partial \mathcal{D}} \underline{\tau} \cdot d\underline{S} = \oint_{\partial \mathcal{D}} \underline{\tau} \cdot \underline{n} \, dS \quad (5.13)$$

$$= \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} \underline{\tau} \cdot (-e_2) \, dl \quad \text{car } \underline{\tau} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial \Sigma \text{ puisque } \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial \Sigma \quad (5.14)$$

$$= - \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} \sigma_{12} \, dl = \bar{\sigma}_{12}(y) (z_1(h) - z_2(h)) \quad (5.15)$$

où $\bar{\sigma}_{12}(y)$ est la moyenne de σ_{12} à l'ordonnée y .

Par (5.11) et (5.12),

$$\operatorname{div} \underline{\tau} = -\partial_1 \sigma_{11} \quad (5.16)$$

d'où il vient :

$$\iint_{\mathcal{D}} -\partial_1 \sigma_{11} \, dS = \bar{\sigma}_{12}(y) (z_1(h) - z_2(h)) \quad (5.17)$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} -\partial_1 \left(\frac{My}{I} \right) \, dS = -\frac{V}{I} \iint_{\mathcal{D}} y \, dS. \quad (5.18)$$

Au final,

Définition 5.2.1 — Formule de Jouravsky. La valeur moyenne du cisaillement sur la ligne d'ordonnée y est donnée par :

$$\bar{\sigma}_{12} = \frac{V}{I} \iint_{\mathcal{D}(y)} y dS \frac{1}{z_2(y) - z_1(y)} \quad (5.19)$$

On appelle **moment statique** la grandeur $\iint_{\mathcal{D}(y)} y dS$.

Exemple de profil de $\bar{\sigma}_{12}$ Pour une section rectangulaire de hauteur h et de largeur b ,

$$\iint_{\mathcal{D}(y)} y dS = \int_y^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} u dx du = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (5.20)$$

Le profil des contraintes de cisaillement σ_{12} est donc parabolique, nul aux extrémités ($y = \pm \frac{h}{2}$) et de valeur maximale au centre

$$\sigma_{12}^{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh}. \quad (5.21)$$

Cette valeur maximale peut être retrouvée en cherchant le profil de σ_{12} parabolique sous les trois conditions que $\sigma_{12}(-h/2) = \sigma_{12}(h/2) = 0$ et que l'intégrale de σ_{12} sur la section vaut $V/(bh)$.

Estimation du rapport σ_{11}/σ_{12} On peut désormais estimer le rapport σ_{11}/σ_{12} . Pour une poutre en flexion simple de section rectangulaire de hauteur h et de largeur b , de longueur L et chargée d'une force F ,

$$\begin{aligned} - |\sigma_{11}(y)| &= \left| \frac{M}{I} y \right| = \left| \frac{FL}{I} y \right| \text{ donc le maximum de } |\sigma_{11}| \text{ est } \frac{FLh}{I} \\ - |\bar{\sigma}_{12}(y)| &= \frac{V}{I} \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \text{ qui est borné par } \frac{3}{2} \frac{F}{bh}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{12}} \propto \frac{L}{h}. \quad (5.22)$$

Plus la poutre est élancée, plus les contraintes de cisaillement sont faibles devant les contraintes principales.

Contraintes transverses σ_{22}

Les contraintes σ_{22} sont les contraintes dans la direction 2 a une facette de normale \underline{e}_2 . Elle représentent donc la traction/compression latérale. On sait qu'elles sont nulles aux bords de normale \underline{e}_2 (puisque $\underline{\sigma} \cdot \underline{e}_2$ y est nul). Par définition d'une poutre, la dimension dans la direction 2 est petite devant la dimension caractéristique dans la direction 1. σ_{22} est donc une fonction de la position dans la largeur de la section $z \in [z_-, z_+]$ qui est nulle aux extrémités z_- et z_+ et $z_+ - z_-$ est faible devant la longueur de la poutre. Une approche est alors de considérer que σ_{22} ne peut pas atteindre des valeurs grandes devant celles de σ_{11} .

C'est pour cela que la loi de Hooke 3D pour un matériau isotrope (voir Annexe 7.2) selon laquelle

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})) \quad (5.23)$$

s'approxime bien en

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}. \quad (5.24)$$

Il est rappelé que $\nu \in [-1; 1/2]$ comme le prouve Landau par des considérations thermodynamiques [Landau1967].

5.3 Flèche

Définition 5.3.1 — Flèche. La flèche d'une structure désigne en pratique à la fois la courbe de la fibre neutre de la structure déformée $f(s)$ (que l'on appelle également *la déformée*) et le déplacement maximal de la déformée $\max_s |f(s)|$. En pratique le contexte permet de déterminer quelle définition est utilisée.

La flèche peut être dimensionnante ! En effet, il peut s'agir d'un critère de confort : par exemple, une passerelle, même si elle résiste, ne doit pas fléchir "excessivement" au passage d'un piéton.

Pour calculer la déformée d'une poutre, toujours sous les conditions du Chapitre 1, on utilise la relation

$$M(s) = EI\chi(s). \quad (5.25)$$

Notons qu'il est possible que E ou I (plus précisément I_z) dépende de l'abscisse curviligne s .

En fonction de l'abscisse curviligne s , la courbure $\chi(s)$ s'exprime de manière exacte par

$$\chi(s) = f''(s). \quad (5.26)$$

En fonction de l'abscisse cartésienne x , la courbure $\chi(x)$ s'exprime en toute généralité :

$$\chi(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}} \quad (5.27)$$

mais sous l'approximation¹ $f'(x) \ll 1$ cette relation devient :

$$M(x) = EI f''(x). \quad (5.28)$$

On en déduit que :

Essentiel 5.3 — Calcul de la déformée. Pour calculer la déformée d'une poutre sous un chargement donné, on intègre deux fois la relation

$$f''(s) = \frac{M(s)}{EI} \quad (5.29)$$

en utilisant les conditions aux limites :

- à un encastrement, $f(s) = 0$ et $f'(s) = 0$;
- pour une liaison pivot avec le bâti, $f(s) = 0$;
- sur un axe de symétrie, $f'(s) = 0$.

1. Approximation que l'on peut justifier par le fait que l'énergie élastique nécessaire pour déformer une poutre au point que f' soit de l'ordre de 1 serait bien supérieure à l'énergie élastique de poutre dans sa position d'équilibre.



6 Récapitulatif et exemples d'application

6.1 Récapitulatif concret

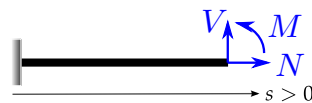


FIGURE 6.1 – Convention ingénieur (grandeurs positives)

Essentiel 6.1 — Calcul de contraintes et flèche. Pour calculer les contraintes et la flèche d'une poutre isostatique soumise à des sollicitations extérieures statiques

- sous les hypothèses du Chapitre 1,
 - sous les conventions $N > 0$ en traction, $V \underline{e}_y$ directement orthogonal à $N \underline{e}_x$ et $M > 0$ lorsque les fibres inférieures sont tendues (voir figure 6.1),
1. On calcule les **réactions d'appuis** en écrivant l'**équilibre global** de la structure (principe fondamental de la dynamique) ;
 2. On détermine les **efforts intérieurs** N , V et M en écrivant l'**équilibre local** de la structure et en précisant les conventions adoptées (par exemple par un schéma) ;
 3. On en déduit les **contraintes** σ_{11} par la formule :

$$\sigma_{11} = \frac{N}{S} - \frac{M}{I}y ; \quad (6.1)$$

On applique un critère de rupture s'il y a lieu (par exemple pour de l'acier a priori la valeur maximale de σ_{11} en fonction de l'abscisse curviligne ne doit pas être supérieure à sa limite d'élasticité) ;

4. Pour calculer **la flèche** f , on intègre deux fois l'équation

$$M(s) = EI f''(s) \tag{6.2}$$

sous les bonnes conditions aux limites.

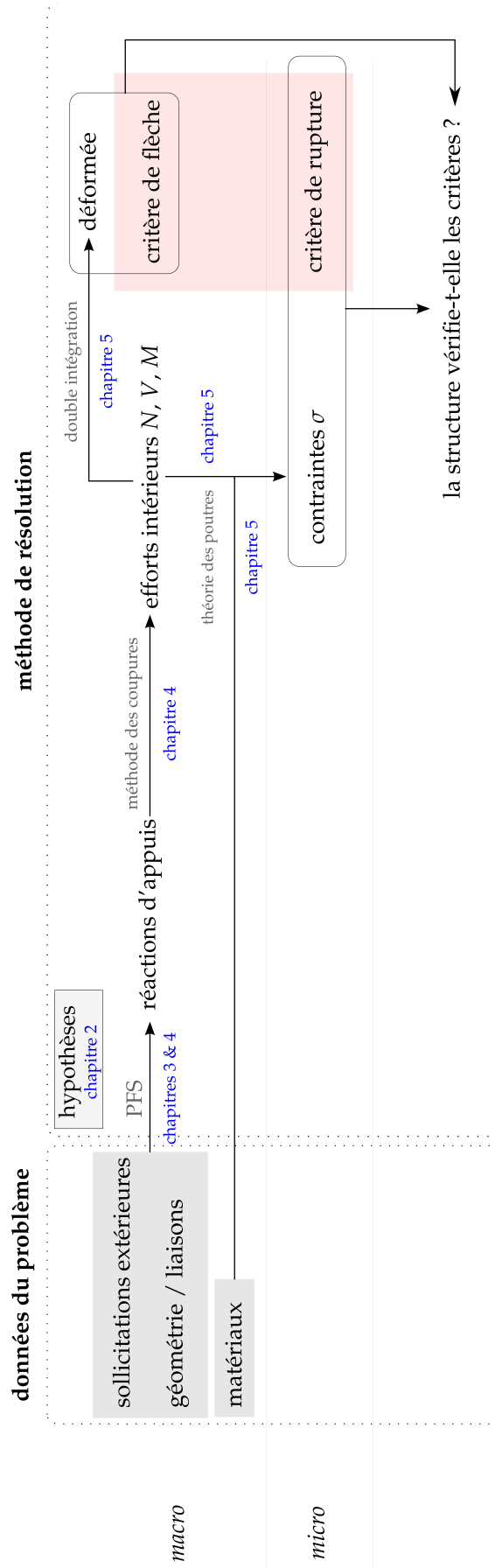


FIGURE 6.2 – Schéma de principe général pour la résolution d'un problème de structure

6.2 Flexion simple d'une poutre encastrée et chargée en son extrémité

Soit une poutre droite de longueur L encastrée à une extrémité (on parle de *poutre console*) et chargée ponctuellement à l'autre extrémité d'une force F comme indiqué à la figure 6.2. L'étude se fait dans le cadre des hypothèses du chapitre 1. Différents cas de géométrie de section seront traités.

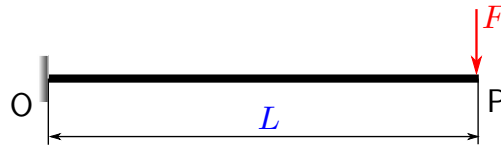


FIGURE 6.3 – Cas d'étude d'une poutre droite simplement encastrée et chargée en son extrémité

1. Écriture de l'équilibre global On vérifie que la poutre est bien isostatique (l'ajout d'un degré de liberté la rend mobile). On est donc assuré que l'écriture du principe fondamental de la statique va permettre de déterminer les 3 réactions d'appuis R_{Ox} , R_{Oy} et M_{Oz} définies sur la figure 6.4.



FIGURE 6.4 – Définition des réactions d'appuis

Il vient en écrivant le principe fondamental de la statique en O (pour le moment M_{Oz}) :

$$\begin{cases} R_{Ox} & = & 0 \\ R_{Oy} - F & = & 0 \\ M_{Oz} - FL & = & 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

ou encore :

$$\boxed{\begin{cases} R_{Ox} & = & 0 \\ R_{Oy} & = & F \\ M_{Oz} & = & FL \end{cases}} \quad (6.4)$$

Notons que l'écriture de l'équilibre des moments en P aurait mené au même résultat $-R_{Oy}L + M_{Oz} = 0$ avec $R_{Oy} = F$ donne $M_{Oz} = FL$.

2. Écriture de l'équilibre local On définit une abscisse curviligne s et l'on écrit l'équilibre d'un tronçon de poutre pour chaque partie (ici, il n'y a qu'une partie) en précisant la convention adoptée, voir figure 6.5.

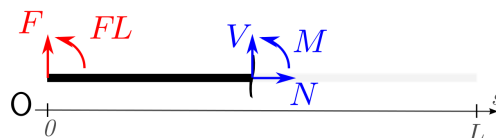


FIGURE 6.5 – Définition des conventions pour l'écriture de l'équilibre local

L'équilibre du tronçon écrit en O (par exemple) fournit alors pour $s \in [0, L]$:

$$\begin{cases} N & = 0 \\ F + V & = 0 \\ FL + M + Vs & = 0 \end{cases} \quad (6.5)$$

ou encore :

$$\begin{cases} N(s) & = 0 \\ V(s) & = -F \\ M(s) & = -F(L-s) \end{cases} \quad (6.6)$$

On vérifie la pertinence de ces résultats :

- l'effort tranchant V est constant sur le (seul) morceau qui n'est pas chargé ;
- la dérivée du moment M est égale à l'opposé de l'effort tranchant V (pour notre convention) ;
- le moment est linéaire (conséquence des deux points précédents) ;
- le moment est négatif (fibre supérieure tendue si $F > 0$, dans notre convention) ;
- le moment est nul à l'extrémité libre.

On récapitule ces résultats dans le schéma, figure 6.6.

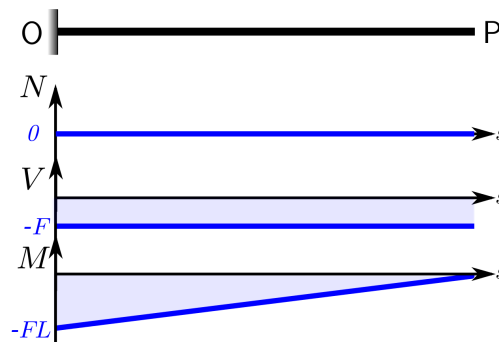


FIGURE 6.6 – Synthèse du calcul des efforts intérieurs

3. Calcul des contraintes Le calcul donne :

$$\sigma_{11}(s) = \frac{N(s)}{S} - \frac{M(s)}{I}y = \frac{F(L-s)}{I}y. \quad (6.7)$$

■ **Exemple 6.1** La poutre est de section rectangulaire, de hauteur h et de largeur b . Alors l'inertie (de flexion selon l'axe z) est donnée par :

$$I = \frac{bh^3}{12}. \quad (6.8)$$

À une abscisse donnée, les contraintes seront maximales pour $y = \frac{h}{2}$ (traction) et minimales pour $y = -\frac{h}{2}$ (compression), le profil des contraintes dans la section étant linéaire.

Les contraintes extrémales sur l'ensemble de la poutre ($\max_{s,y} F(L-s)y/I$) sont atteintes pour $s = 0$ soit à l'encastrement, et valent

$$\sigma_{\text{extrem.}} = \pm \frac{12L}{bh^2}F. \quad (6.9)$$

■

Il apparaît que doubler l'épaisseur (tout en restant suffisamment élancé) réduit les contraintes par 4 (et augmente la raideur en flexion EI d'un facteur 8).

■ **Exemple 6.2** La poutre est de section profilée en I, schématisée (en pratique les sections sont standardisées et plus complexes) par la figure 6.7.

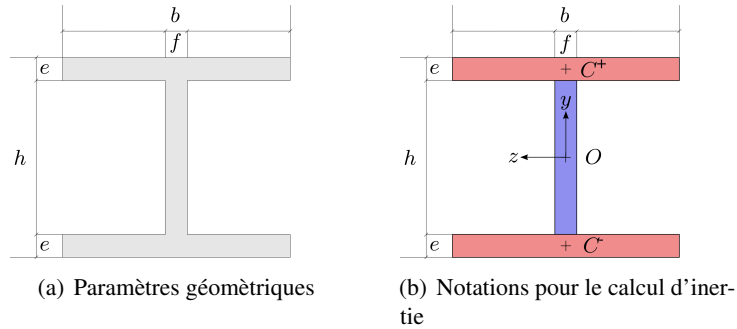


FIGURE 6.7 – Schéma simplifié d'un profilé IPN

Une manière de calculer l'inertie de la section (ou moment quadratique) par rapport à l'axe (O, z) est de décomposer le profil en trois sections rectangulaires : les semelles supérieures et inférieures (rouges) et l'âme (bleue). On connaît pour chacune l'inertie par rapport à leur centre de gravité. Le calcul donne :

$$\begin{aligned} I &= I_O^{\text{semelle}^+} + I_O^{\text{semelle}^-} + I_O^{\text{âme}} \\ &= 2I_O^{\text{semelle}^+} + I_O^{\text{âme}} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Le théorème de Huygens permet de ramener l'inertie de la semelle supérieure par rapport à l'axe (C^+, z) à l'axe (O, z) . Il vient :

$$I_O^{\text{semelle}^+} = I_{C^+}^{\text{semelle}^+} + \|OC^+\|^2 be = \frac{be^3}{12} + \left(\frac{h-e}{2}\right)^2 be \quad (6.11)$$

Finalement,

$$I = \frac{be^3}{6} + \frac{(h-e)^2}{2} be + \frac{f(h-2e)^3}{12} \quad (6.12)$$

4. **Calcul de la flèche** $M(s) = EI f''(s)$ d'où par double intégration :

$$f(s) = \frac{1}{EI} \left(\frac{1}{6} F s^3 - \frac{1}{2} FL s^2 + c_1 s + c_2 \right) \quad (6.13)$$

On détermine les constantes d'intégrations c_1 et c_2 avec les conditions limites :

$$f(0) = 0 \quad \implies \quad c_1 = 0 \quad (6.14)$$

$$f'(0) = 0 \quad \implies \quad c_2 = 0 \quad (6.15)$$

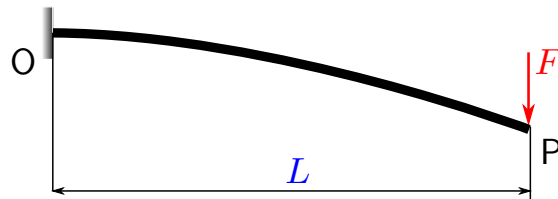


FIGURE 6.8 – Allure de la déformée conformément au résultat (6.2)

soit finalement :

$$f(s) = \frac{F}{EI} \left(\frac{1}{6}s^3 - \frac{1}{2}Ls^2 \right), \quad s \in [0, L] \quad (6.16)$$

En particulier, la flèche au bout (déflexion) vaut

$$F(L) = -\frac{FL^3}{3EI}. \quad (6.17)$$

6.3 Chargement mixte

Soit une poutre droite de longueur L soumise à deux sollicitations : une charge répartie q et une charge ponctuelle telles qu'indiqué à la figure 6.9.

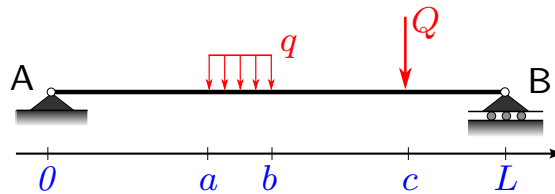


FIGURE 6.9 – Schéma et notation de la poutre étudiée

1. Écriture de l'équilibre global Le système est isostatique. Les réactions de liaisons sont notées et représentées sur la figure 6.10.

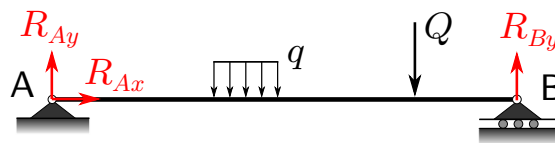


FIGURE 6.10 – Réactions d'appui

Les équations d'équilibre fournissent (le moment est écrit en A) :

$$\begin{cases} R_{Ax} & = 0 \\ R_{Ay} - q(b-a) - Q + R_{By} & = 0 \\ -\int_a^b qx dx - Qc + R_{By}L & = 0 \end{cases} \quad (6.18)$$

Notons que $\int_a^b qx dx$ peut-être évaluée directement en considérant l'ensemble de la charge $q(b-a)$ concentrée sur le bras de levier moyen $(a+b)/2$ ce qui donne un moment $q(b-a)(a+b)/2 = q(b^2 - a^2)/2 = \int_a^b qx dx$.

Au final, les réactions aux appuis sont données par :

$$\begin{cases} R_{Ax} & = 0 \\ R_{Ay} = Q\left(1 - \frac{c}{L}\right) + q(b-a)\left(1 - \frac{b+a}{2L}\right) & = 0 \\ R_{By} = \frac{Qc}{L} + q(b-a)\frac{b+a}{2L} & = 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

2. Écriture des équilibres locaux Il faut distinguer les équilibres des différents tronçons : $[0, a]$, $[a, b]$, $[b, c]$ et $[c, L]$.

$s \in [0, a]$ (figure 6.11) :

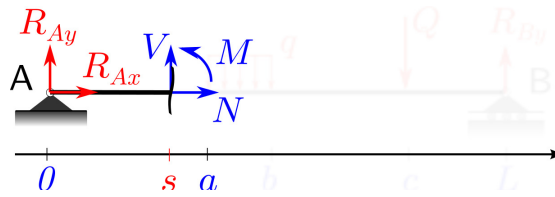


FIGURE 6.11 – Équilibre d'un tronçon de $[0, a]$

$$\begin{cases} N & = 0 \\ -R_{Ay} + V & = 0 \\ M + Vs & = 0 \end{cases} \quad (6.20)$$

ou encore :

$$\text{pour } x \in [0, a], \quad \begin{cases} N(s) & = 0 \\ V(s) & = -Q\left(1 - \frac{c}{L}\right) - q(b-a)\left(1 - \frac{b+a}{2L}\right) \\ M(s) & = Q\left(1 - \frac{c}{L}\right)s + q(b-a)\left(1 - \frac{b+a}{2L}\right)s \end{cases} \quad (6.21)$$

$s \in [a, b]$ (figure 6.12) :

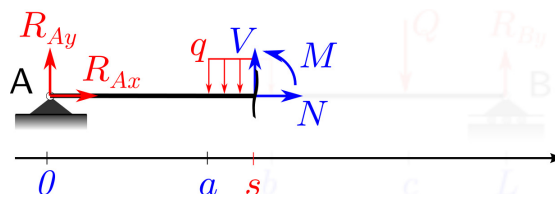
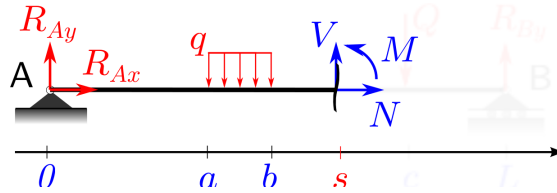


FIGURE 6.12 – Équilibre d'un tronçon de $[a, b]$

$$\begin{cases} N & = 0 \\ R_{Ay} - q(s-a) + V & = 0 \\ -\int_a^s qxdx + Vs + M & = 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

ou encore :

$$\text{pour } x \in [a, b], \quad \begin{cases} N(s) & = 0 \\ V(s) & = -R_{Ay} + q(s-a) \\ M(s) & = R_{Ay}s - q(s-a)s + q(s^2 - a^2)/2 \end{cases} \quad (6.23)$$

FIGURE 6.13 – Équilibre d'un tronçon de $[b, c]$

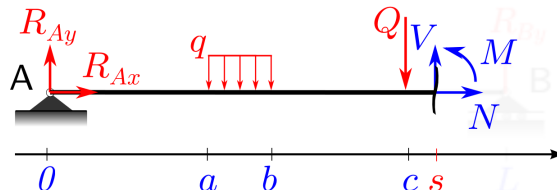
$s \in [b, c]$ (figure 6.13) :

$$\begin{cases} N & = 0 \\ R_{Ay} - q(b-a) + V & = 0 \\ -q(b^2 - a^2)/2 + Vs + M & = 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

ou encore :

$$\text{Pour } s \in [b, c], \quad \begin{cases} N(s) & = 0 \\ V(s) & = -R_{Ay} + q(b-a) \\ M(s) & = q(b^2 - a^2)/2 + R_{Ay}s - q(b-a)s \end{cases} \quad (6.25)$$

$s \in [c, L]$ (figure 6.14) :

FIGURE 6.14 – Équilibre d'un tronçon de $[c, L]$

$$\begin{cases} N & = 0 \\ R_{Ay} - q(b-a) - Q + V & = 0 \\ -q(b^2 - a^2)/2 - Qc + Vs + M & = 0 \end{cases} \quad (6.26)$$

ou encore :

$$\text{Pour } x \in [c, L], \quad \begin{cases} N(s) & = 0 \\ V(s) & = -R_{Ay} + q(b-a) + Q \\ M(s) & = q(b^2 - a^2)/2 - Q(s-c) + R_{Ay}s - q(b-a)s \end{cases} \quad (6.27)$$

La figure 6.15 représente un résultat pour des valeurs de (a, b, c) et (q, Q) arbitraires. On peut vérifier la pertinence du résultat à l'aide des remarques de la section 4.5.

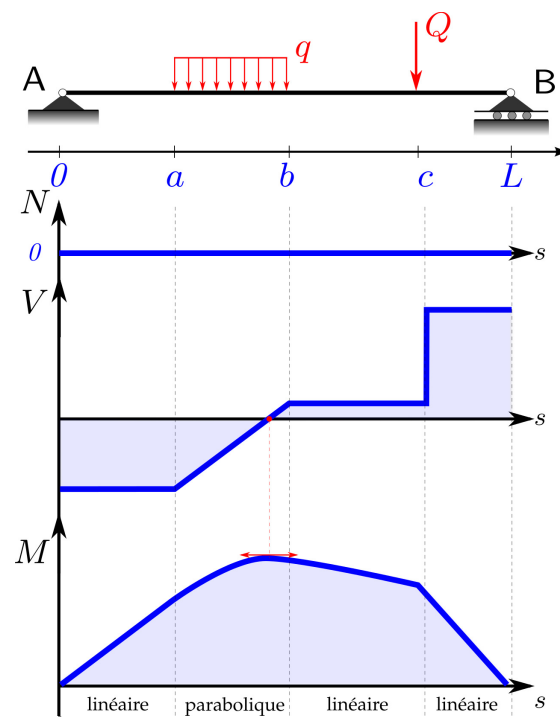


FIGURE 6.15 – Exemple de diagramme des efforts intérieurs pour des valeurs de chargement données q et Q



7 Annexes

Les annexes ci-après sont des fiches rédigées indépendamment de ce polycopié et peuvent donc présenter des redondances avec les chapitres précédents.

Le repère principal d'inertie pour un volume ou une section

Objectif Définir le repère principal d'inertie et les éléments qui en découlent, pour un solide et pour une section.

Notations

- Ω : le solide considéré
- ρ : la masse volumique de Ω au point considéré
- \mathcal{I} : l'opérateur d'inertie

Définition Le centre d'inertie G d'un solide Ω de masse volumique $\rho(M)$ en $M \in \Omega$ est le barycentre des masses, c'est-à-dire que si O est le centre du repère :

$$\underline{OG} = \frac{1}{m} \int_{\Omega} \rho(M) \underline{OM} dV, \quad (1)$$

avec $m = \int_{\Sigma} \rho(M) dV$ la masse du solide Σ .

Le centre de gravité étant le barycentre des poids, le confondre avec le centre d'inertie revient à négliger les variations de la pesanteur. L'erreur commise est très faible en pratique dès lors que les variations de hauteur du système étudié sont faibles devant le rayon de la Terre.

Définition On appelle **opérateur d'inertie** au point P du solide Ω l'application qui à tout $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$\mathcal{I}(\Omega, P, \underline{u}) = \int_{\Omega} (\underline{PM} \wedge (\underline{u} \wedge \underline{PM})) dm. \quad (2)$$

L'opérateur d'inertie définit la répartition de la masse d'un solide autour d'un de ses points P . Il s'agit d'un opérateur linéaire en \underline{u} et peut donc être représenté par une matrice dans une base donnée. Par exemple dans une base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ de \mathbb{R}^3 , avec O l'origine du repère considéré et $\underline{u} = [u_1, u_2, u_3]^T$ un vecteur,

$$\mathcal{I}(\Omega, O, \underline{u}) = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} (y^2 + z^2) dm & \int_{\Omega} -xy dm & \int_{\Omega} -xz dm \\ \int_{\Omega} -yx dm & \int_{\Omega} (z^2 + x^2) dm & \int_{\Omega} -yz dm \\ \int_{\Omega} -zx dm & \int_{\Omega} -zy dm & \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

\mathcal{I} étant symétrique réel, l'opérateur peut être diagonalisé dans un repère appelé repère principal d'inertie (pas forcément unique).

Moments d'inertie

Définition Dans un repère principal d'inertie d'origine P , la **matrice d'inertie** associée à $\mathcal{I}(\Omega, P, \cdot)$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_x & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_y & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{I}_z \end{bmatrix} \quad (4)$$

avec

$$\mathcal{I}_x = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) dm \quad \mathcal{I}_y = \int_{\Omega} (z^2 + x^2) dm \quad \mathcal{I}_z = \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dm \quad (5)$$

x, y et z étant les coordonnées d'un point de (Ω) dans \mathcal{R} et $\mathcal{I}_x, \mathcal{I}_y, \mathcal{I}_z$ les **moments d'inertie principaux** du volume (Ω) par rapport aux axes $(Px), (Py), (Pz)$ respectivement. dm est un élément de masse du volume (Ω) .

Exemple : Calculons la matrice d'inertie dans le repère principal d'un cône homogène en son sommet P :

$$\mathcal{I}_z = \int_{\Omega} \rho (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^h \int_0^{r(z)} r^2 2\pi r dr dz = \frac{3}{10} MR^2 \quad (6)$$

car $r(z) = \tan(\theta)z$, $V = \pi R^2 h/3$ et $M = \rho V$. Puis par symétrie cylindrique $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}_y$ et pour la même raison

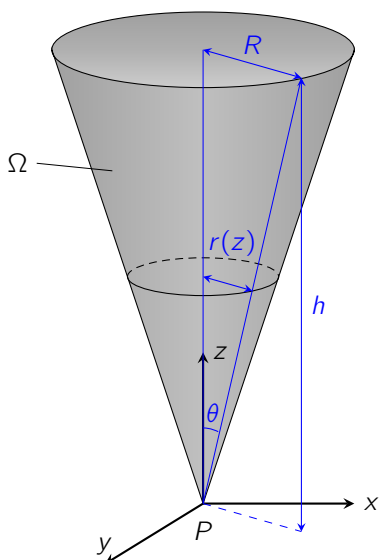
$$\int_{\Omega} (x^2 + y^2) dm = 2 \int_{\Omega} x^2 dm \quad (7)$$

Le calcul donne :

$$\mathcal{I}_x = \int_{\Omega} (y^2 + z^2) dm = \int_0^h z^2 \rho \pi r(z)^2 dz + \frac{1}{2} \mathcal{I}_z = \frac{3}{5} Mh^2 + \frac{3}{20} MR^2 \quad (8)$$

soit au final, une matrice d'inertie :

$$\mathcal{I} = M \begin{bmatrix} \frac{3}{5} h^2 + \frac{3}{20} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} h^2 + \frac{3}{20} R^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} R^2 \end{bmatrix} \quad (9)$$



Le repère principal d'inertie pour un volume ou une section

La notion de moment quadratique est très souvent confondue avec la notion de moment d'inertie pour un matériau homogène car leurs définitions sont très proches. Le moment quadratique est, lui, purement géométrique. D'ailleurs un moment d'inertie est homogène à $[M.L^2]$ alors qu'un moment quadratique est homogène à $[L^4]$.

Moments quadratiques

De même que l'on a défini un repère principal d'inertie pour un solide, on peut définir un repère principal d'inertie pour la section d'une poutre¹.

Définition On appelle **opérateur d'inertie** au point P d'une **section** Σ l'application qui à tout $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ associe le vecteur

$$\mathcal{I}(\Sigma, P, \underline{u}) = \int_{\Sigma} (\underline{PM} \wedge (\underline{u} \wedge \underline{PM})) dS. \quad (10)$$

où dS est un élément surfacique de Σ infinitésimal.

De même que pour l'opérateur d'inertie d'un solide, l'opérateur d'inertie d'une section est symétrique défini-positif et se diagonalise dans la base des vecteurs propres. Ceux-ci forment un repère principal d'inertie de la section Σ .

Définition La **fibre moyenne** est le lieu des centres d'inertie des sections droites de la poutre. La **fibre neutre** est la ligne d'allongement nul en flexion pure. Sous l'hypothèse des petites déformations, la fibre neutre et la fibre moyenne sont confondues (cf. Fiche ??).

Définition En tout point G de la fibre moyenne, le **repère central principal d'inertie** de la section Σ est le repère noté $\mathcal{R} = (Gxyz)$, centré en G et formé par les vecteurs propres principaux de l'opérateur d'inertie de la section en G .

Définition Dans le repère central principal d'inertie, la **matrice des moments quadratiques** associée à $\mathcal{I}(\Omega, G)$ s'écrit

$$\begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \quad (11)$$

avec

$$I_x = I_y + I_z \quad I_y = \int_{\Sigma} z^2 dS \quad I_z = \int_{\Sigma} y^2 dS \quad (12)$$

x, y et z étant les coordonnées d'un point de (Ω) dans \mathcal{R} et I_x, I_y, I_z les **moments quadratiques** (ou seconds moments d'aire) de la section (Σ) par rapport aux axes $(Gx), (Gy), (Gz)$ respectivement.

\mathcal{R} est le repère dans lequel s'écrivent les équations de la théorie des poutres et c'est grâce à ce repère qu'elles s'écrivent si simplement.

Exemple : Calculons les moments quadratiques de la section d'une poutre parallélépipédique. Les moments quadratiques sont :

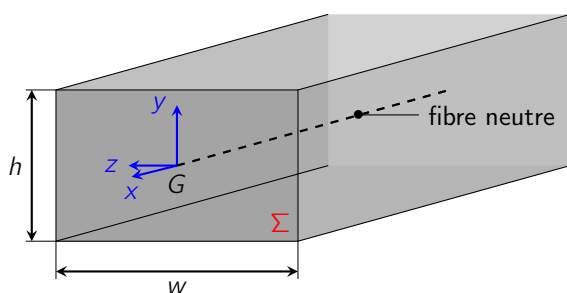
$$I_z = \int_{\Sigma} y^2 dS = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{w/2}^{w/2} y^2 dz dy = \frac{1}{12} h^3 w \quad (13)$$

De la même manière,

$$I_y = \frac{1}{12} w^3 h \quad (14)$$

et donc au final :

$$I = \frac{hw}{12} \begin{bmatrix} h^2 + w^2 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{bmatrix} \quad (15)$$



Conclusion

- Pour un solide, on peut définir un opérateur d'inertie ainsi que un repère principal d'inertie dans lequel il se représente par une matrice diagonale dont les termes sont homogènes à $[M.L^2]$. Un moment d'inertie d'un solide selon un axe est proportionnel au moment nécessaire pour le mettre en rotation autour de cet axe.
- Pour la section d'une poutre, on peut également définir un opérateur d'inertie et un repère principal d'inertie, qui devient repère principal central d'inertie s'il est centré au centre d'inertie de la section. Le moment quadratique d'une section est une grandeur purement géométrique qui s'exprime en $[L^4]$. Le moment à appliquer pour fléchir une poutre selon un axe d'une certaine courbure est proportionnel au moment quadratique selon cet axe.

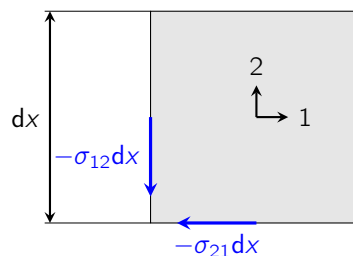
1. Une poutre est un solide dont une dimension est grande devant les deux autres.

Objectif Cette fiche a pour objectif de démontrer la symétrie du tenseur de Cauchy.

Notations σ_{ij} : composante i, j du tenseur des contraintes.

Hypothèses

- les éventuels moments volumiques sont négligés ;
- la déformation est statique ou quasi-statique.



On se place dans le plan pour simplifier les notations. Le tenseur des contraintes est alors une application bilinéaire de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$. Montrons par des considérations physiques qu'il est symétrique.

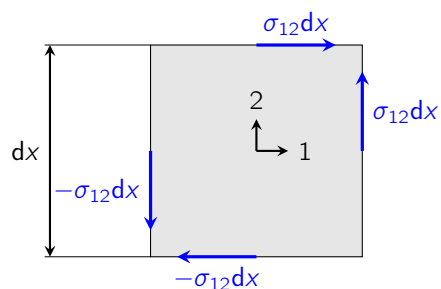
Soit un élément carré infinitésimal de côté dx cisailé sur sa partie supérieure par la force $\sigma_{21}dx$ et à droite par $\sigma_{12}dx$, voir figure ci-dessus. On peut vérifier que les contraintes σ_{21} portent bien sur les contraintes dans la direction 1 à la facette de normale 2, et inversement.

L'élément est en équilibre car les déformations sont quasi-statiques. L'écriture de l'équilibre en résultante implique les efforts qui s'exercent sur la face droite du cube est l'opposée de ceux qui s'exercent sur la face gauche, et de même pour la face supérieure et la face inférieure. Aussi, l'écriture de l'équilibre en moment, calculé ici au point inférieur gauche du carré, donne :

$$\sigma_{12} dx^2 - \sigma_{21} dx^2 = 0 \iff \boxed{\sigma_{12} = \sigma_{21}} \quad (1)$$

Remarquons que l'équilibre du moment deviendrait fautive, si les moments volumiques n'avaient pas été négligés ! (par exemple des particules ferromagnétiques noyées dans un matériau et exerceraient un moment volumique sous l'effet d'un champ magnétique).

Conclusion En l'absence de moments volumiques, le tenseur des contraintes de Cauchy est symétrique : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.



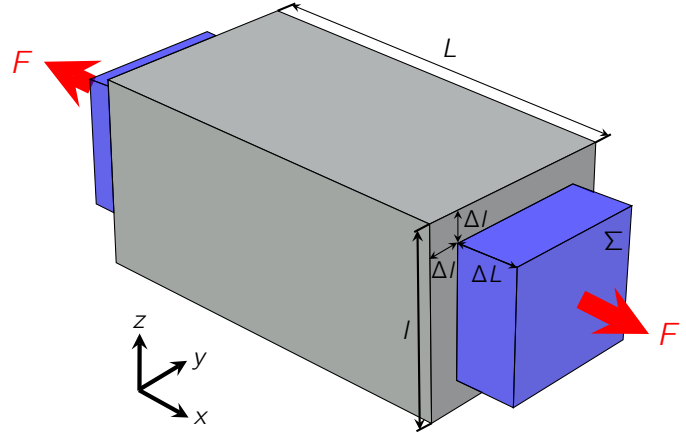
Objectif Établir la loi de Hooke tridimensionnelle à partir des lois fondamentales de Hooke et de Poisson.

Hypothèses

- Matériau élastique linéaire
- Petites déformations
- Isotropie

Notations

- ν : coefficient de Poisson
- $\underline{\underline{\sigma}}$: tenseur des contraintes
- $\underline{\underline{\epsilon}}$: tenseur des déformations
- E : module d'Young
- L : longueur dans la direction de la force
- l : longueur transverse



Lois fondamentales

Loi de Hooke En 1660, Hooke¹ stipule une relation de proportionnalité entre la force exercée sur un solide et sa déformation,

$$F \propto S \frac{\Delta L}{L} \quad (1)$$

Le coefficient de proportionnalité est homogène à une pression et il caractérise son élasticité : c'est le module d'Young, E .

$$F = ES \frac{\Delta L}{L} \quad (2)$$

Loi de Poisson En 1811, Poisson² énonce la seconde loi fondamentale de l'élasticité classique : un allongement dans une direction est accompagné d'un rétrécissement³ dans la direction transverse,

$$\frac{\Delta l}{l} = -\nu \frac{\Delta L}{L} \quad (3)$$

Compression homogène

On considère une compression homogène du solide, dans les directions 1, 2 et 3. On peut écrire la loi de Hooke dans la direction de sollicitation et la loi de Poisson dans les directions transverses dans le tableau suivant, avec les notations tensorielles via les déformations et les contraintes, et en utilisant l'hypothèse d'isotropie :

	Effet de σ_{11}	Effet de σ_{22}	Effet de σ_{33}
Sur ϵ_{11}	$\epsilon_{11}^* = \sigma_{11}/E$	$\epsilon_{11} = -\nu \epsilon_{22}^*$	$\epsilon_{11} = -\nu \epsilon_{33}^*$
Sur ϵ_{22}	$\epsilon_{22} = -\nu \epsilon_{11}^*$	$\epsilon_{22}^* = \sigma_{22}/E$	$\epsilon_{22} = -\nu \epsilon_{33}^*$
Sur ϵ_{33}	$\epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{11}^*$	$\epsilon_{33} = -\nu \epsilon_{22}^*$	$\epsilon_{33}^* = \sigma_{33}/E$

Puisque les déformations sont petites, la déformation totale ϵ_{11} dans la direction 1 s'exprime comme la somme des contributions sur la direction 1 de la compression dans chaque direction :

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{11}^* - \nu \epsilon_{22}^* - \nu \epsilon_{33}^* = \frac{\sigma_{11}}{E} - \nu \frac{\sigma_{22}}{E} - \nu \frac{\sigma_{33}}{E} \quad (4)$$

1. Hooke (1635-1703) est un scientifique anglais, ayant étudié à Oxford où il fut le disciple de Robert Boyle. Il est surtout connu pour sa loi de déformation des solides mais, comme souvent pour l'époque, il fut un scientifique universel. Adeptes du microscope, il fera de nombreuses observations d'objets biologiques microscopiques qu'il consignera dans son ouvrage *Micrographia*.

2. Scientifique français (1781-1840), élève de l'École polytechnique, il fit de nombreuses contributions à la physique (astronomie, élasticité et ondes) et aux mathématiques (probabilités, calcul intégral, etc.)

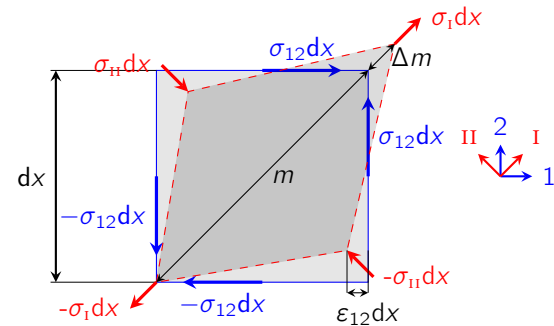
3. Un rétrécissement si $\nu > 0$ mais il peut être négatif pour les matériaux auxétiques, voir Fiche ??.

ou de manière plus générale :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (5)$$

Il reste à déterminer les relations entre ε_{ij} et σ_{ij} , $i \neq j$; c'est ce qui correspond aux termes de cisaillement.

Cisaillement



On considère un élément infinitésimal surfacique du solide au repos (en **bleu**) et son état déformé (en **rouge**). Sous l'effet du chargement extérieur, des contraintes de cisaillement apparaissent, notées σ_{12} dans le repère (1, 2). On remarque que $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ puisque le tenseur des contraintes est symétrique (voir Fiche ??).

Le tenseur des contraintes étant symétrique réel, il existe une base dite principale dans laquelle $\underline{\underline{\sigma}}$ est représenté par une matrice diagonale. Cette base est notée (I, II) et s'obtient par le calcul des vecteurs propres de la représentation de $\underline{\underline{\sigma}}$ dans la base (1, 2) :

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{12} & 0 \\ 0 & -\sigma_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Puisque :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \quad (7)$$

la base principale s'obtient par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ si bien que les directions du repère (I, II) coïncident avec les diagonales du carré en cisaillement pur et $\sigma_I = \sigma_{12}$ (en traction si $\sigma_{12} > 0$) et $\sigma_{II} = -\sigma_{12}$ (en compression si $\sigma_{12} > 0$).

Dans le repère (I, II), les lois de Hooke et de Poisson peuvent désormais s'écrire puisque dans ce repère le cisaillement est nul. Leur superposition en petites déformations fournit :

$$\varepsilon_I = \frac{\sigma_I}{E} - \nu \frac{\sigma_{II}}{E} = \frac{(1+\nu)}{E}\sigma_{12} \quad (8)$$

De même que $\sigma_I = \sigma_{12}$ et $\sigma_{II} = -\sigma_{12}$, on prouve que $\varepsilon_I = \varepsilon_{12}$ et $\varepsilon_{II} = -\varepsilon_{12}$ et au final :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}, \quad i \neq j \quad (9)$$

Loi de Hooke généralisée Les deux résultats précédents (5) et (9) peuvent s'écrire de manière synthétique :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\delta_{ij} \quad (10)$$

Ou encore, en notation tensorielle :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} \quad (11)$$

La loi de Hooke peut s'inverser afin d'exprimer les contraintes en fonction des déplacements :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}} \quad (12)$$

L'équation (12) s'obtient facilement⁴ à partir de l'équation (11) en prenant la trace de $\underline{\underline{\varepsilon}}$.

Conclusion La loi de comportement d'un matériau isotrope homogène linéaire élastique, appelée loi de Hooke tridimensionnelle, se déduit des lois de Hooke et Poisson unidimensionnelles, et s'écrit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}} - \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{1}} \quad (14)$$

ou, de manière équivalente :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E}{1+\nu}\underline{\underline{\varepsilon}} - \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}})\underline{\underline{1}} \quad (15)$$

4.

$$\text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}) = \text{tr}\left(\frac{1+\nu}{E}\underline{\underline{\sigma}}\right) - 3\frac{\nu}{E}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{1-2\nu}{E}\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \quad (13)$$

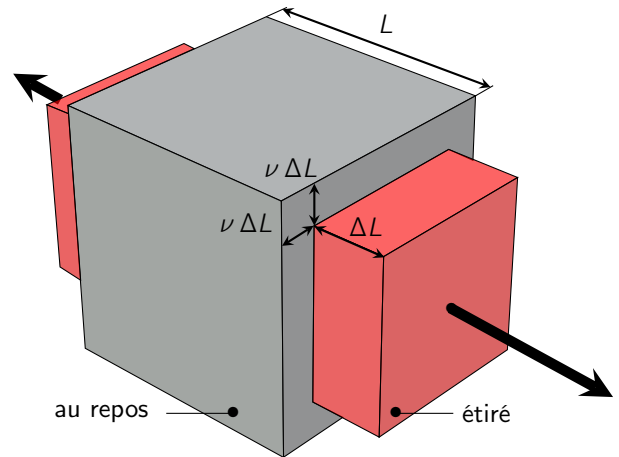
Objectif Montrer, à partir de considérations thermodynamiques, que le coefficient de Poisson en élasticité est borné entre -1 et 1/2.

Hypothèses

- Matériau élastique linéaire
- Matériau homogène et isotrope
- Petites déformations
- Déformations isothermes

Notations

- ν : coefficient de Poisson
- $\underline{\underline{\sigma}}$: tenseur des contraintes
- $\underline{\underline{\epsilon}}$: tenseur des déformations
- E : module d'Young
- K : coefficient de compression
- μ : coefficient de glissement
- \mathcal{W} : travail extérieur
- T : température
- \mathcal{F} : énergie libre
- S : entropie



On considère un solide se déformant sous l'application d'efforts extérieurs, avec les hypothèses indiquées ci-dessus.

Thermodynamique de la déformation du solide

Le solide ne fait que recevoir de l'énergie de l'action extérieure, purement élastique, donc sa variation d'énergie libre est strictement positive :

$$\Delta \mathcal{E} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} > 0 \quad (1)$$

Loi de Hooke Le comportement linéaire élastique homogène isotrope est décrit par la loi de Hooke tridimensionnelle (cf Fiche ??) que l'on rappelle :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{1}} + \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\epsilon}} \quad (2)$$

Limite thermodynamique du coefficient de Poisson Ainsi,

$$\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} > 0 \iff \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}})^2 + \frac{E}{1+\nu} \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\epsilon}} > 0 \quad (3)$$

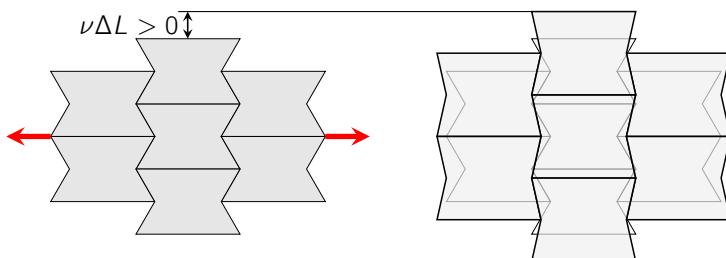
La trace carrée d'une matrice et sa double contraction sont deux invariants positifs et indépendants d'une matrice donc (3) impose :

$$\left\{ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{E}{1+\nu} > 0 \right\} \quad \text{ou} \quad \left\{ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{E}{1+\nu} \geq 0 \right\} \quad (4)$$

On détermine ainsi les valeurs maximales de ν :

$$-1 < \nu \leq 1/2 \quad (5)$$

Matériaux auxétiques Certains matériaux présentent effectivement un coefficient de Poisson négatif, c'est-à-dire que lorsque l'on les étire dans une direction, leur dimension dans les autres directions augmentent également, à l'inverse des matériaux courants.



On voit ci-contre un exemple classique d'architecture auxétique : lorsque l'on tire selon les flèches rouges, chaque cellule élémentaire s'étend également dans la direction perpendiculaire.

Conclusion Pour un matériau élastique linéaire homogène isotrope, sous l'hypothèse de petites déformations isothermes, le coefficient de Poisson est défini et borné pour des raisons thermodynamiques par :

$$\nu \in] -1, 1/2] \quad (6)$$

Références Les remarquables travaux de Landau incluent la démonstration thermodynamique du fait que $\nu \in] - 1, 1/2]$ [n, a]. Les coefficients de Poisson négatifs ont été particulièrement étudiés à partir de la fin du XX^{ème} siècle. On peut citer par exemple [k, a].

Références

Lakes, R. (1993). Advances in negative poisson's ratio materials. *Advanced Materials* **5**, 293–296.

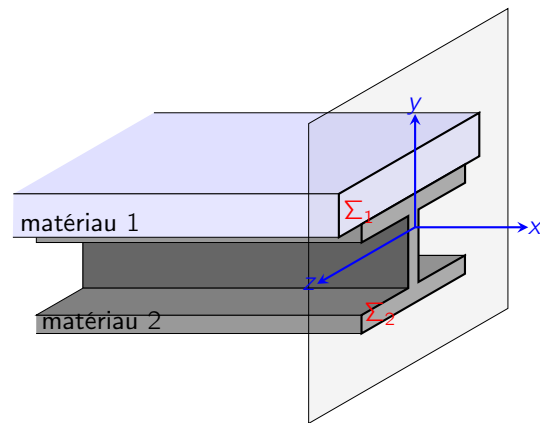
Landau, L. D. and Lifshitz, E. (1959). *Course of Theoretical Physics Vol 7 : Theory and Elasticity*. Pergamon Press.

Grandeurs caractéristiques des poutres composites

Objectif On s'intéresse ici à l'extension de la théorie des poutres homogènes isotropes, pour des poutres constituées de plusieurs matériaux homogènes isotropes.

Notations

- $E(y)$: module d'Young en un point de hauteur y
- ε : déformations longitudinales σ_{11}
- σ : contraintes normales σ_{11}
- y_0 : position de la fibre neutre
- Σ : section transverse de la poutre
- s : abscisse curviligne
- Σ_i : section du matériau i
- $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$: section totale



Hypothèses

- petites déformations
- petits déplacements
- chacun des matériaux est linéaire, homogène
- les matériaux sont parfaitement collés
- un axe parallèle à l'axe (Oz) ne traverse qu'un seul matériau^a

a. Cette hypothèse a pour seul but de simplifier les notations, car E ne dépend plus de z .

On se donne une poutre constituée de deux matériaux de module d'Young différents, et vérifiant les hypothèses ci-dessus.

Position de l'axe neutre L'axe neutre (ou fibre neutre) d'une poutre est défini(e) comme la ligne d'allongement nul en flexion pure. En chaque point de la poutre, la loi de Hooke donne :

$$\sigma = E(y) \varepsilon \quad (1)$$

De plus, pour des raisons géométriques :

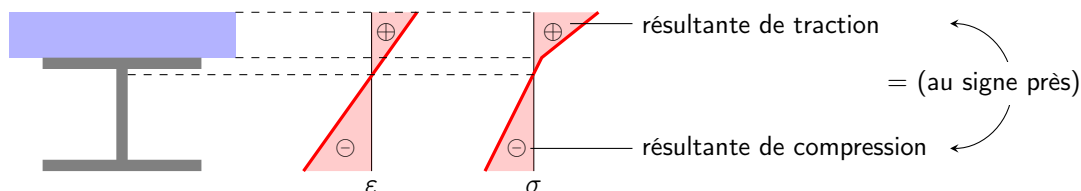
$$\varepsilon \propto (y - y_0) \quad (2)$$

donc les contraintes sont proportionnelles à $E(y)(y - y_0)$. On note α le coefficient de proportionnalité. Or en flexion pure, il n'y a pas d'effort normal donc :

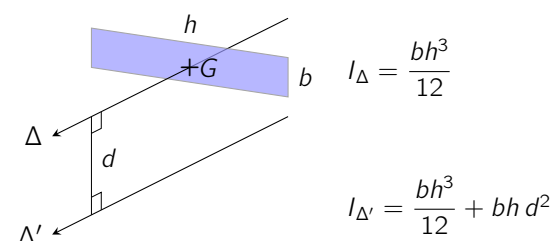
$$\int \sigma dS = 0 = \int \alpha E(y) (y - y_0) dS = 0 \quad (3)$$

et $dS = dydz$. Au final, y_0 est donc tel que :

$$y_0 = \frac{\int_{\Sigma} E(y) y dy dz}{\int_{\Sigma} E(y) dy dz} \quad (4)$$



Transport du moment quadratique



Les moments quadratiques d'une section Σ d'aire S , souvent ou calculés par rapport à l'axe Δ perpendiculaire à la section et passant en son centre de gravité, peuvent être calculés par rapport un autre axe Δ' parallèle à Δ en appliquant le théorème de Huygens :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + S \cdot d(\Delta, \Delta')^2 \quad (5)$$

Cela implique d'ailleurs que le moment quadratique de Σ est minimum par rapport à l'axe qui passe par son centre de gravité.

Raideur en effort normal L'effort normal en un point de l'abscisse curviligne est la somme des efforts normaux dans chacun des matériaux :

$$N(s) = \int_{\Sigma_1} \sigma^1 y \, dS + \int_{\Sigma_2} \sigma^2 y \, dS = E_1 S_1 \varepsilon + E_2 S_2 \varepsilon \quad (6)$$

$$N(s) = \underbrace{(E_1 S_1 + E_2 S_2)}_{(ES)_{\text{éq}}} \varepsilon \quad (7)$$

si bien que la raideur équivalente en effort normal de la poutre composite est :

$$\boxed{(ES)_{\text{éq}} = E_1 S_1 + E_2 S_2} \quad \text{et} \quad N = (ES)_{\text{éq}} \varepsilon \quad (8)$$

Raideur de flexion équivalente En un point s de l'abscisse curviligne, le moment $M(s)$ est la somme du moment dans le matériau 1 et de celui dans le matériau 2 :

$$M(s) = - \int_{\Sigma_1} \sigma^1 y \, dS - \int_{\Sigma_2} \sigma^2 y \, dS = E_1 \chi \int_{\Sigma_1} y^2 \, dS + E_2 \chi \int_{\Sigma_2} y^2 \, dS \quad \text{car } \varepsilon = -y \chi \quad (9)$$

$$M(s) = \underbrace{(E_1 I_1 + E_2 I_2)}_{(EI)_{\text{éq}}} \chi \quad (10)$$

si bien que la raideur de flexion équivalente de la poutre composite est :

$$\boxed{(EI)_{\text{éq}} = E_1 I_1 + E_2 I_2} \quad \text{et} \quad M = (EI)_{\text{éq}} \chi \quad (11)$$

Attention, I_1 et I_2 sont les moments quadratiques de Σ_1 et Σ_2 au niveau de l'axe neutre, et doivent donc être calculées à l'aide du théorème de Huygens.

Conclusion Pour calculer les efforts intérieurs d'une poutre composite,

1. on calcule la position y_0 de la fibre neutre par :

$$y_0 = \frac{\int_{\Sigma} E(y) y \, dy dz}{\int_{\Sigma} E(y) \, dy dz} \quad (12)$$

2. on calcule alors les inerties des sections de chaque matériau par rapport à l'axe passant par y_0 , à l'aide de la formule de Huygens
3. on obtient ensuite la déformation et la courbure de la fibre neutre à l'aide de :

$$N = (ES)_{\text{éq}} \varepsilon \quad \text{où } (ES)_{\text{éq}} = E_1 S_1 + E_2 S_2 \quad (13)$$

$$M = (EI)_{\text{éq}} \chi \quad \text{où } (EI)_{\text{éq}} = E_1 I_1 + E_2 I_2 \quad (14)$$



Bibliographie

- [1] Philippe Bisch. Mécanique des Structures. 2008. ENPC.
- [2] Alain Ehlacher, Xanthippi Markenscoff. Duality, symmetry and symmetry lost in solid mechanics – Selected works of H.D. BUI. 2011. Presse des Ponts.
- [Landau1967] Lev Landau et al. Théorie de l'élasticité. 1967. Mir Moscow.

