HAL open science

Formulaire de Probabilités et Statistique

Christophe Chesneau

To cite this version:

Christophe Chesneau. Formulaire de Probabilités et Statistique. Licence. France. 2016. cel-01260327v1

HAL Id: cel-01260327

https://cel.hal.science/cel-01260327v1

Submitted on 21 Jan 2016 (v1), last revised 9 May 2017 (v8)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

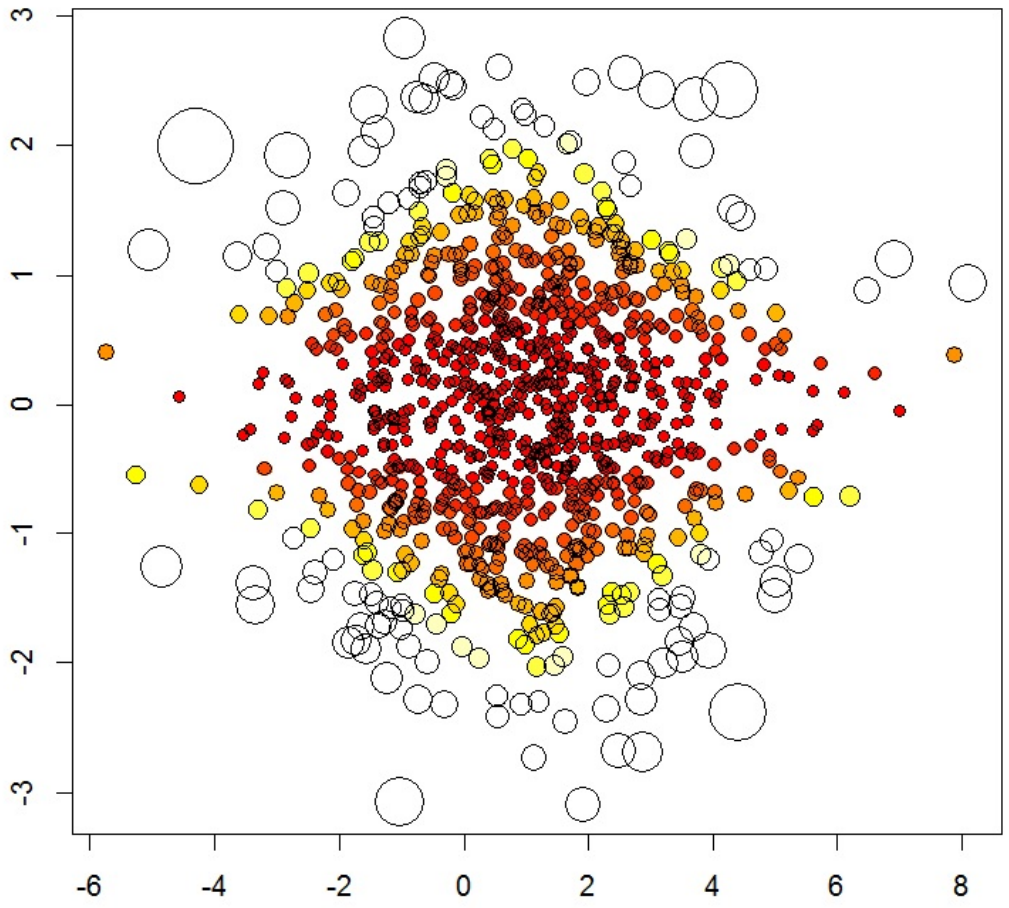
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Caen Basse-Normandie

Formulaire de Probabilités et Statistique

Christophe Chesneau

http://www.math.unicaen.fr/~chesneau/



Caen, le 09 Janvier 2016

Table des matières

1 Présentation **4**

2 Dénombrement **5**

3 Calculs utiles **9**

4 Espaces probabilisés et probabilités **11**

5 Probabilités conditionnelles et indépendance **15**

6 Variables aléatoires réelles discrètes **17**

7 Lois discrètes usuelles **21**

8 Modélisation **24**

9 Couples de variables aléatoires réelles discrètes **26**

10 Vecteurs de variables aléatoires réelles discrètes **31**

11 Variables aléatoires réelles à densité **35**

12 Lois continues usuelles **39**

13 Couples de variables aléatoires réelles à densité **43**

14 Vecteurs de variables aléatoires réelles à densité **52**

15 Convergence **57**

16 Intervalles de confiance bilatéraux **59**

17 Tests de conformité **60**

18 Rappel : p-valeurs **61**

19 Tests de conformité (p-valeurs) 62

1 Présentation

Ce document présente les principales formules brutes abordées dans le cours *Probabilités et Statistique* du L3 de l'université de Caen.

Note importante : *des points techniques ont volontairement été omis ; lorsqu'une quantité est introduite (dérivé, somme, intégrale, espérance, variance . . .), il est supposé que celle-ci existe.*

Je vous invite à me contacter pour tout commentaire :

christophe.chesneau@gmail.com

Bonne lecture.

2 Dénombrement

Vocabulaires :

Notations	Vocabulaire
$\varnothing$	ensemble vide
Ω	ensemble plein
$\{\omega\}$	singleton de Ω
A	partie de Ω
$\omega \in A$	ω appartient à A
$\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω
$A \cup B$	union de A et B
$A \cap B$	intersection de A et B
$A - B$	intersection de A et $\overline{B}$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont disjoints
$A \subset B$	A est inclus dans B

Opérations :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B), \qquad \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B).$$

Lois de Morgan :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k, \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k.$$

Partition : $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ est une partition de E $\Leftrightarrow$ $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ sont disjoints deux à deux et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$.

Cardinal : Le nombre des éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E. Il est noté $\mathrm{Card}(E)$.

Formule du crible à l'ordre 2 :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Formule du crible à l'ordre n :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in U_k} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{u=1}^{k} A_{i_u}\right),$$

où $U_k = \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k; \quad i_1 < \cdots < i_k\}$.

Propriétés du cardinal :

$$\mathrm{Card}(\varnothing) = 0, \qquad A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B),$$

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(\complement_E A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A),$$

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cap \overline{B}),$$

$$\mathrm{Card}(A - B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B),$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B),$$

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B).$$

Principe additif : On considère une situation qui nous amène à faire un choix parmi n cas différents et exclusifs : le cas 1, ou le cas 2..., ou le cas n. Si, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il y a u_k possibilités pour le k-ème cas, alors le nombre total de possibilités est $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Principe multiplicatif : On considère une situation conjuguant k étapes : une étape 1, une étape 2..., et une étape k. Si, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, il y a n_i possibilités pour la k-ème étape, alors le nombre total de possibilités est $\prod_{i=1}^{k} n_i$.

Ensembles classiques par l'exemple : Le choix de $k = 2$ éléments dans $E = \{a, b, c\}$ peut se faire en répétant ou non un élément, en ordonnant ou non les éléments choisis. Les possibilités de chaque type de choix sont des éléments constituant un ensemble. Les possibilités, ainsi que les cardinaux des ensembles associés, sont confectionnés dans le tableau suivant :

Choix	avec répétition	sans répétition
avec ordre	Listes : $\left.\begin{matrix}(a,a) & (a,b) & (a,c)\\ (b,a) & (b,b) & (b,c)\\ (c,a) & (c,b) & (c,c)\end{matrix}\right\}9$	Arrangements : $\left.\begin{matrix}(a,b) & (a,c)\\ (b,a) & (b,c)\\ (c,a) & (c,b)\end{matrix}\right\}6$
sans ordre	Combinaisons avec répétition : $\left.\begin{matrix}[a,a] & [a,b] & [a,c]\\ [b,b] & [b,c] & [c,c]\end{matrix}\right\}6$	Combinaisons (sans répétition) : $\left.\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{b,c\}\right\}3$

Les permutations des éléments des 3 éléments de E sont : (a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Il y en a 6.

Cardinaux d'ensembles classiques : E un ensemble à n éléments,

- Card($\{$listes de k éléments de $E\}$) $= n^k$,
- Card($\{$arrangements de k éléments de $E\}$) $=$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

- Card($\{$permutations des n éléments de $E\}$) $= A_n^n = n!$,
- Card($\{$combinaisons de k éléments parmi $n\}$) $=$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

- Card({partitions $(E_i)_{i\in\{1,\dots,k\}}$ de E avec $\mathrm{Card}(E_i) = n_i$}) =

$$\binom{n}{n_1,\dots,n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\dots\binom{n-\sum\limits_{i=1}^{k-1} n_i}{n_k} = \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{k}(n_i!)}.$$

- Card({combinaisons avec répétition de k éléments de E}) =

$$K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

3 Calculs utiles

Propriétés élémentaires du coefficient binomial :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \qquad k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Formule de Vandermonde :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}.$$

Somme des n premiers entiers, de leurs carrés et de leurs cubes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{1\}, \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Série géométrique et ses dérivées :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad x \in]-1,1[.$$

Formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}, \qquad x \in]-1,1[.$$

Série entière de la fonction exponentielle :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Sommes doubles :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right), \qquad \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j} \right).$$

4 Espaces probabilisés et probabilités

Expérience aléatoire : On appelle expérience aléatoire toute expérience dont on connaît parfaitement les conditions mais dont on ne peut pas prévoir l'issue. Elle est notée $\mathcal{E}$.

Univers : On appelle univers d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ l'ensemble des issues possibles. Un univers est noté Ω.

Événement : On appelle événement toute partie de l'univers Ω.

On dit qu'un événement A est réalisé (ou se réalise) lors d'une expérience aléatoire si et seulement si l'issue de cette expérience aléatoire appartient à A.

Vocabulaires :

Notations	Lire	Vocabulaires
$\varnothing$	.	événement impossible
Ω	.	univers (ou événement certain)
ω	.	issue
$\{\omega\}$	.	événement élémentaire
A	.	événement
$\omega \in A$	.	ω est une réalisation possible de A
$\overline{A}$	A barre	événement contraire de A
$A \cup B$	A union B	réalisation de A, ou B, ou les deux
$A \cap B$	A inter B	réalisation de A et B
$A - B$	.	réalisation de A et $\overline{B}$
$A \cap B = \varnothing$	.	A et B sont incompatibles
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B

Toutes les opérations vues sur les ensembles sont aussi valables pour les événements. En particulier, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ = "ni A, ni B se réalise" et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Système complet d'événements : $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ forme un système complet d'événements $\Leftrightarrow$ $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ sont incompatibles deux à deux et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Tribu : On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu de l'univers Ω si, et seulement si,

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$,
- pour toutes familles d'événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k \in \mathcal{A}$, on a

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Probabilité $\mathbb{P}$: On appelle probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathbb{P}(A) \in [0,1], \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1, \qquad A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Le réel $\mathbb{P}(A)$, prononcer "P de A", est la probabilité que (l'événement) A se réalise.

Espace probabilisé : Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Si Ω est fini ou infini dénombrable (comme, par exemple, $\Omega = \mathbb{N}$), on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω.

Propriétés élémentaires :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}),$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

Si Ω est fini ou infini dénombrable :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}), \qquad \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1.$$

Formule d'inclusion-exclusion à 2 termes :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Formule d'inclusion-exclusion à 3 termes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B\cup C) &= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)\\ &- \mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)\\ &+ \mathbb{P}(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

Formule d'inclusion-exclusion à n termes :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in U_k}\mathbb{P}\left(\bigcap_{u=1}^{k} A_{i_u}\right),$$

où $U_k=\{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,n\}^k;\ \ i_1<\ldots<i_k\}$.

Cas particulier : Si $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ incompatibles deux à deux, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k).$$

Inégalité : On a toujours

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k).$$

Propriété de la limite monotone :

$$A_{n+1}\subset A_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

$$A_n\subset A_{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Probabilité uniforme : Si Ω est fini et que tous ses événements élémentaires sont équiprobables, alors on peut considérer l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ désigne la probabilité uniforme définie par

$$\mathbb{P}(A)=\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Autrement écrit,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre d'événements élémentaires de } A}{\text{Nombre d'événements élémentaires de } \Omega}.$$

5 Probabilités conditionnelles et indépendance

Probabilité (conditionnelle) de A sachant B : L'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \to [0,1]$ définie par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \qquad A \in \mathcal{A},$$

est une probabilité.

Le réel $\mathbb{P}_B(A)$, prononcer "P de A sachant B", est la probabilité que (l'événement) A se réalise sachant que (l'événement) B est réalisé (avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$).

Retournement du conditionnement :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = c\mathbb{P}_A(B), \quad \text{avec} \quad c = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Formule des probabilités composées à l'ordre 3 :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}_{A\cap B}(C).$$

Formule des probabilités totales à l'ordre 2 :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

Formule de Bayes à l'ordre 2 :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A})}.$$

Formule des probabilités composées à l'ordre n :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k}(A_i).$$

Formule des probabilités totales à l'ordre n : $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ système complet d'événements,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k).$$

Formule de Bayes à l'ordre n : $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ système complet d'événements,

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)}.$$

Indépendance :

- A et B indépendants $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad\Leftrightarrow\quad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \quad\Leftrightarrow\quad \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

- A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et B indépendants $\Leftrightarrow$ A et $\overline{B}$ indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants
- $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ indépendants deux à deux $\Leftrightarrow$ pour tout $(k,l)\in\{1,\dots,n\}^2$ avec $k\neq l$,

$$\mathbb{P}(A_k\cap A_l) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_l).$$

- $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ indépendants $\Leftrightarrow$ pour tout $I\subseteq\{1,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \prod_{k\in I}\mathbb{P}(A_k).$$

6 Variables aléatoires réelles discrètes

Variable aléatoire réelle (*var*) :

- Une *var* X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \leq x\}$ est un événement.
- On note $X(\Omega) = \{X(\omega);\ \omega \in \Omega\}$, l'ensemble des valeurs prises par X.

***Var* discrète :**

- On appelle *var* discrète toute *var* prenant un ensemble de valeurs fini, ou infini dénombrable.
- La loi d'une *var* discrète X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k), \qquad k \in X(\Omega),$$

où $\mathbb{P}(X = k)$ désigne la probabilité que l'événement $\{X = k\} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\}$ se réalise.

Propriétés :

$$\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

Pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{D}) = \sum_{k \in X(\Omega) \cap \mathcal{D}} \mathbb{P}(X = k).$$

Exemples :

On adopte la notation : $X \sim \ldots \ \Leftrightarrow\ X$ suit la loi $\ldots$

$X \sim$	$\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
$X(\Omega) \quad (k \in)$	$\{1, \ldots, n\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, \ldots, n\}$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\dfrac{1}{n}$	p si $k = 1$	$\dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$p(1-p)^{k-1}$	$e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

Caractérisation : q_k, $k \in \mathcal{D}$, caractérise la loi d'une *var* discrète $\Leftrightarrow$ $q_k \geq 0$, et

$$\sum_{k \in \mathcal{D}} q_k = 1.$$

Loi et probabilité uniforme :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\mathrm{Card}(\{X = k\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}, \qquad k \in X(\Omega).$$

Égalité en loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k), \qquad k \in X(\Omega).$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k \in]-\infty, x] \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fonction de répartition et loi : Pour tout $k \in X(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = F(k) - F(k_*),$$

où k_* est la plus grande valeur de $X(\Omega)$ vérifiant $k_* < k$.

Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k).$$

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k) \mathbb{P}(X = k).$$

Propriétés élémentaires :

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(a) = a$,
- $X(\Omega) \subseteq [0, \infty[\;\Rightarrow\; \mathbb{E}(X) \geq 0$,

- $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$,
- $\mathbb{E}(aX^2+bX+c) = a\mathbb{E}(X^2) + b\mathbb{E}(X) + c$.

Moment d'ordre p :

$$m_p = \mathbb{E}(X^p) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^p \mathbb{P}(X=k).$$

Variance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Propriétés élémentaires :

- $\mathbb{V}(X) \geq 0$,
- $\mathbb{V}(X) = 0 \;\Leftrightarrow\; X$ est une *var* constante,
- $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Formule de König-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}(\{1,\dots,n\})$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(n,p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
$\mathbb{E}(X)$	$\frac{n+1}{2}$	p	np	$\frac{1}{p}$	λ
$\mathbb{V}(X)$	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	$\frac{1-p}{p^2}$	λ

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Inégalité de Markov : Pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction $h : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ croissante, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(h(|X|))}{h(\epsilon)}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}.$$

Fonction génératrice :

$$G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} s^k \mathbb{P}(X = k), \qquad s \in [-1, 1].$$

Propriétés de la fonction génératrice :

$$\mathbb{E}(X) = G'(1), \qquad \mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2.$$

Fonction génératrice et loi :

- Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ et
$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,$$
alors $X(\Omega) = \{k \in \mathbb{N};\ a_k \neq 0\}$ et la loi de X est donnée par
$$\mathbb{P}(X = k) = a_k, \qquad k \in X(\Omega).$$
- Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$, alors $X(\Omega) = \{m \in \mathbb{N};\ G^{(m)}(0) \neq 0\}$ et la loi de X est donnée par
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k \in X(\Omega).$$
- X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ pour tout $s \in [-1, 1]$, $G_X(s) = G_Y(s)$.

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
$G(s)$	$\frac{s}{n}\left(\frac{1-s^n}{1-s}\right)$	$1 + p(s-1)$	$(1 + p(s-1))^n$	$\frac{ps}{1-(1-p)s}$	$e^{\lambda(s-1)}$

7 Lois discrètes usuelles

Loi de Rademacher : X suit la loi de Rademacher $\mathcal{R}(a) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \{-a, a\}$,

$$\mathbb{P}(X = -a) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{2}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = a^2.$$

Loi uniforme (discrète) : X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{m, \ldots, n\}) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \{m, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n + 1 - m}, \qquad k \in \{m, \ldots, n\}.$$

Quand $m = 1$, $X(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \qquad k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Espérance et variance pour le cas $m = 1$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Loi de Bernoulli : X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

Loi binomiale : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \{0,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0,\dots,n\}.$$

(On a $\mathcal{B}(1,p) = \mathcal{B}(p)$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Loi hypergéométrique : X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(l,m,n) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) \subseteq \{0,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{l}{k}\binom{m}{n-k}}{\binom{m+l}{n}}, \qquad k \in \{0,\dots,n\}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{nl}{l+m}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{nlm(l+m-n)}{(l+m)^2(l+m-1)}.$$

Loi géométrique : X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Loi de Pascal : X suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r,p) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0,\dots,r-1\}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \qquad k \in \mathbb{N} - \{0,\dots,r-1\}.$$

(On a $\mathcal{G}(1,p) = \mathcal{G}(p)$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Loi binomiale négative : X suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r,p) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Loi de Poisson : X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Approximations

- Si $p = l/(l+m)$ et $n \leq (l+m)/10$, alors

$$\mathcal{H}(l,m,n) \approx \mathcal{B}(n,p),$$

- Si $n \geq 31$ et $np \leq 10$, alors

$$\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{P}(np).$$

8 Modélisation

Schéma d'urne :

- *Tirages avec remise.* Une urne contient N boules dont N_1 sont blanches et $N_2 = N - N_1$ sont noires. On effectue des tirages au hasard et avec remise.
  - La *var* X égale au nombre de boules blanches obtenues en n tirages suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{N_1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \dots, n\}.$$

  - La *var* X égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule blanche suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{N_1}{N} \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

  - La *var* X égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir r boules blanches, $r \in \{1, \dots, N_1\}$, suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r,p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \left(\frac{N_1}{N}\right)^r \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{k-r}, \qquad k \in \mathbb{N} - \{0, \dots, r-1\}.$$

  - La *var* X égale au nombre de boules noires tirées avant d'obtenir r boules blanches, $r \in \{1, \dots, N_1\}$, suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r,p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} \left(\frac{N_1}{N}\right)^r \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

- *Tirages simultanés.* Une urne contient N boules dont N_1 sont blanches et $N_2 = N - N_1$ sont noires.

On tire au hasard et simultanément n boules de l'urne. La *var* X égale au nombre de boules blanches obtenues suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N_1, N_2, n)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Répétition d'expériences : On répète, dans les mêmes conditions, une même expérience aléatoire au cours de laquelle un événement A a une probabilité p d'être réalisé.

- La *var* X égale au nombre de réalisations de l'événement A en n expériences (indépendantes) suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \dots, n\}.$$

- La *var* X égale au nombre d'expériences (indépendantes) nécessaires pour obtenir une réalisation de A suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

- La *var* X égale au nombre d'expériences (indépendantes) nécessaires pour obtenir exactement r réalisations de A suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \qquad k \in \mathbb{N} - \{0, \dots, r-1\}.$$

- La *var* X égale au nombre d'expériences (indépendantes) nécessaires pour que A ne se réalise pas avant r réalisations de A suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

9 Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Couple de *var* :

- Soient X et Y deux *var* discrètes. On appelle couple de *var* discrètes l'application (X,Y) : $\Omega \to \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$(X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)), \qquad \omega \in \Omega.$$

- On note $(X,Y)(\Omega) = \{(X,Y)(\omega);\ \omega \in \Omega\}$.
- La loi de (X,Y) est donnée par

$$\mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}), \qquad (i,j) \in (X,Y)(\Omega).$$

Propriétés :

$$\sum\sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = 1,$$

Pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^{\in}$, on a

$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{D}) = \sum\sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega)\cap\mathcal{D}} \mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}).$$

Caractérisation : $q_{i,j}$, $(i,j) \in \mathcal{D}$, caractérise la loi d'un couple de *var* discrètes $\Leftrightarrow$ $q_{i,j} \geq 0$ et

$$\sum\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} q_{i,j} = 1.$$

Loi et probabilité uniforme :

$$\mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \frac{\mathrm{Card}(\{X=i\} \cap \{Y=j\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}, \qquad (i,j) \in (X,Y)(\Omega).$$

Loi et probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \begin{cases} \mathbb{P}_{\{Y=j\}}(X=i)\mathbb{P}(Y=j), \\ \mathbb{P}_{\{X=i\}}(Y=j)\mathbb{P}(X=i), \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega). \end{cases}$$

Fonction de répartition de (X,Y) :

$$F(x,y) = \mathbb{P}(\{X\le x\}\cap\{Y\le y\}), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Lois marginales :

- On a $X(\Omega) = \bigcup_{j\in\mathbb{R}}\{i\in\mathbb{R};\ \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\neq 0\}$,

  la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}), \qquad i\in X(\Omega).$$

- On a $Y(\Omega) = \bigcup_{i\in\mathbb{R}}\{j\in\mathbb{R};\ \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\neq 0\}$,

  la loi de Y est donnée par

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}), \qquad j\in Y(\Omega).$$

Indépendance des *var* X et Y :

- X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow$ $(X,Y)(\Omega) = X(\Omega)\times Y(\Omega)$ et

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j), \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega).$$

- S'il existe deux suites de réels positifs $(a_i)_{i\in X(\Omega)}$ et $(b_j)_{j\in Y(\Omega)}$ telles que

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = a_i b_j, \qquad \sum_{i\in X(\Omega)} a_i = 1, \qquad \sum_{j\in Y(\Omega)} b_j = 1,$$

  alors X et Y sont indépendantes, et la loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X=i)=a_i$, $i\in X(\Omega)$ et la loi de Y est donnée par $\mathbb{P}(Y=j)=b_j$, $j\in Y(\Omega)$.

- X et Y sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les *var* $g(X)$ et $h(Y)$ sont indépendantes.
- On dit que X et Y sont *iid* quand elles sont "indépendantes et identiquement distribuées". La mention "identiquement distribuées" signifie "suivent la même loi".
- X et Y *iid* $\Rightarrow$ pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{D}) = \mathbb{P}((Y,X) \in \mathcal{D})$.

Loi d'une somme de deux *var* X et Y indépendantes (produit de convolution) :

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(Y=k-i)\mathbb{P}(X=i), \qquad k \in (X+Y)(\Omega).$$

$X_i \sim$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(m_i,p)$	$\mathcal{P}(\lambda_i)$	$\mathcal{G}(p)$
$X_1+X_2 \sim$	$\mathcal{B}(2,p)$	$\mathcal{B}(m_1+m_2,p)$	$\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$	$\mathcal{G}(2,p)$

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum\sum_{(i,j) \in (X,Y)(\Omega)} g(i,j)\mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}).$$

Linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Moments et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y)).$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(X^kY^m) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^m).$$

Fonction génératrice : Si $(X,Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^2$,

$$G(s,t) = \mathbb{E}(s^X t^Y) = \sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega)}\sum s^i t^j \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}), \quad (s,t)\in[-1,1]^2.$$

Propriétés de la fonction génératrice :

$$G(s,1) = G_X(s), \qquad G(1,t) = G_Y(t),$$

$$G(s,s) = G_{X+Y}(s), \qquad \mathbb{E}(XY) = \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t}(1,1).$$

Fonction génératrice et loi :

- Si $(X,Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^2$ et

$$G(s,t) = \sum_{i\in K}\sum_{j\in L} a_{i,j} s^i t^j,$$

alors $(X,Y)(\Omega) = \{(i,j)\in K\times L;\ a_{i,j}\neq 0\}$ et la loi de (X,Y) est donnée par

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = a_{i,j}, \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega).$$

- Si $(X,Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^2$ alors $(X,Y)(\Omega) = \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2;\ \frac{\partial^{i+j}G}{\partial^i s \partial^j t}(0,0)\neq 0\right\}$ et la loi de (X,Y) est donnée par

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}G}{\partial^i s\partial^j t}(0,0), \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega).$$

Fonction génératrice et indépendance :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes } \Leftrightarrow \text{ pour tout } (s,t)\in[-1,1]^2,\ G(s,t) = G_X(s)G_Y(t).$$

Covariance :

$$\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X) & \mathbb{C}(X,Y) \\ \mathbb{C}(Y,X) & \mathbb{V}(Y) \end{pmatrix}.$$

Propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}(X,Y).$$

Propriétés de la covariance :

- $\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{C}(Y,X)$,
- $\mathbb{C}(aX+b, cY+d) = ac\mathbb{C}(X,Y)$,
- $|\mathbb{C}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$,
- $\mathbb{C}(aX+bY, cU+dV) = ac\mathbb{C}(X,U) + ad\mathbb{C}(X,V) + bc\mathbb{C}(Y,U) + bd\mathbb{C}(Y,V)$.

Covariance, variance et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$

- $\mathbb{C}(X,Y) = 0$,
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Si $\mathbb{C}(X,Y) = 0$, on ne peut rien conclure sur l'indépendance des *var* X et Y.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{C}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On a $\rho(X,Y) \in [-1,1]$. Plus $|\rho(X,Y)|$ est proche de 1, plus la dépendance linéaire entre X et Y est forte.

10 Vecteurs de variables aléatoires réelles discrètes

Vecteurs de *var* discrètes :

- Soient $X_1, \dots, X_n$ n *var* discrètes. On appelle vecteur de *var* discrètes l'application $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$(X_1, \dots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)), \qquad \omega \in \Omega.$$

- On note $(X_1, \dots, X_n)(\Omega) = \{(X_1, \dots, X_n)(\omega);\ \omega \in \Omega\}$.
- La loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est donnée par

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = u_i\}\right), \qquad (u_1, \dots, u_n) \in (X_1 \dots X_n)(\Omega).$$

Propriétés :

$$\sum_{(u_1,\dots,u_n)\in(X_1,\dots,X_n)(\Omega)} \cdots \sum \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = u_i\}\right) = 1.$$

Pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbb{P}\left((X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{D}\right) = \sum_{(u_1,\dots,u_n)\in(X_1,\dots,X_n)(\Omega)\cap\mathcal{D}} \cdots \sum \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = u_i\}\right).$$

Caractérisation : $(q_{u_1,\dots,u_n})_{(u_1,\dots,u_n)\in\mathcal{D}}$ est la loi d'un vecteur de *var* discrètes $\Leftrightarrow$

pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{D}$, $q_{u_1,\dots,u_n} \geq 0$ et

$$\sum_{(u_1,\dots,u_n)\in\mathcal{D}} \cdots \sum q_{u_1,\dots,u_n} = 1.$$

Loi marginale d'une *var* composante de $(X_1, \dots, X_n)$: La loi de X_1 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = u_1) = \sum_{(u_2,\dots,u_n)\in(X_2,\dots,X_n)(\Omega)} \cdots \sum \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = u_i\}\right), \qquad u_1 \in X_1(\Omega).$$

On définit de la même manière les lois marginales des autres *var* $X_2, \dots, X_n$.

Fonction de répartition :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right), \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Fonction génératrice : Si $(X_1, \dots, X_n)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^n$,

$$G(s_1, \dots, s_n) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} s_i^{X_i}\right), \qquad (s_1, \dots, s_n) \in [-1, 1]^n.$$

Indépendance de n *var* discrètes :

- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Leftrightarrow$ pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$ et tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i = u_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = u_i).$$
- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toute fonction $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, les *var* $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont indépendantes.
- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^{n-(q+1)} \to \mathbb{R}$, $q \in \{2, \dots, n-1\}$, les *var* $g(X_1, \dots, X_q)$ et $h(X_{q+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Suite de *var* indépendantes : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de *var* discrètes indépendantes $\Leftrightarrow$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i_1, \dots, i_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$, $X_{i_1}, \dots, X_{i_p}$ sont indépendantes.

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\left(g(X_1, \dots, X_n)\right) = \sum \dots \sum_{(u_1, \dots, u_n) \in (X_1, \dots, X_n)(\Omega)} g(u_1, \dots, u_n) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i = u_i\}\right).$$

Espérance et indépendance : $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toute fonction $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, telle que $g_i(X_i)$ admet une espérance, on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(g_i(X_i)).$$

Loi d'une somme de n *var* indépendantes :

$X_i \sim$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(m_i, p)$	$\mathcal{P}(\lambda_i)$	$\mathcal{G}(p)$
$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, p\right)$	$\mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$	$\mathcal{G}(n, p)$

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}(X_1, X_2) & \dots & \dots & \mathbb{C}(X_1, X_n) \\ \mathbb{C}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \dots & \dots & \mathbb{C}(X_2, X_n) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbb{C}(X_{n-1}, X_n) \\ \mathbb{C}(X_n, X_1) & \dots & \dots & \dots & \mathbb{V}(X_n) \end{pmatrix}.$$

Bilinéarité de la covariance :

$$\mathbb{C}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{q} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} a_i b_j \mathbb{C}(X_i, Y_j).$$

Espérance et variance d'une somme de n *var* :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i), \qquad \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{C}(X_i, X_j).$$

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

Convergence en probabilité : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X $\Leftrightarrow$ pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* discrètes admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Convergence en loi : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$ $\Leftrightarrow$ pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} G_{X_n}(s) = G_X(s)$, $s \in [-1, 1]$.

Hiérarchie :

- Convergence en probabilité $\Rightarrow$ Convergence en loi.
- Convergence en probabilité vers 0 $\Leftrightarrow$ Convergence en loi vers 0.

Approximations usuelles :

- Si $p = l/(l + m)$ et $n \leq (l + m)/10$, alors

$$\mathcal{H}(l, m, n) \approx \mathcal{B}(n, p),$$

- Si $n \geq 31$ et $np \leq 10$, alors

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{P}(np).$$

11 Variables aléatoires réelles à densité

Densité : On appelle densité toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

***Var* à densité :** On appelle *var* à densité toute application $X : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

- l'ensemble des valeurs possibles de X est infini indénombrable (intervalle, $\mathbb{R}$ ...),
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$.

La loi d'une telle *var* est caractérisée par une densité f. On parle alors de loi continue.

Caractérisation : X est une *var* de densité f $\Leftrightarrow$ pour tout $a \leq b$,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

On a $\mathbb{P}(X \leq b) = \int_{-\infty}^b f(x)dx$ et $\mathbb{P}(X \geq a) = \int_a^{\infty} f(x)dx$.

Support : Le support d'une *var* X à densité est l'ensemble des valeurs possibles de X. Il est noté $X(\Omega)$. En termes de densité f, on définit $X(\Omega)$ parl'adhérence de $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}$.

Note : l'adhérence d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'intervalle fermé de mêmes bornes (l'adhérence de $]a, b[$ est $[a, b]$, l'adhérence de $]-\infty, a[$ est $]-\infty, a]$ ...).

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m,\lambda)$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
$X(\Omega)$ $(x \in)$	$[a,b]$	$[0,\infty[$	$[0,\infty[$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
$f(x)$	$\dfrac{1}{b-a}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\dfrac{\lambda^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Comme la densité, elle caractérise la loi de X ; pour tous $a \leq b$, on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Caractérisation d'une fonction de répartition :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0, 1]$,
- F est continue sur $\mathbb{R}$,
- F est croissante et $F(x) = F(y) \;\Leftrightarrow\; x = y$,
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Densité et fonction de répartition :

$$f(x) = F'(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Égalité en loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $f_X(x) = f_Y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $F_X(x) = F_Y(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

***Var* à densité symétrique :** X est symétrique $\Leftrightarrow$ X et $-X$ suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $f(-x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Propriété d'une *var* à densité symétrique :

$$\mathbb{P}(X \leq -x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x), \qquad \mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\mathbb{P}(X \leq x) - 1.$$

Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Propriétés élémentaires :

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(a) = a$,
- $X(\Omega) \subseteq [0, \infty[\;\Rightarrow\; \mathbb{E}(X) \geq 0$,

- $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$,
- $\mathbb{E}(aX^2+bX+c) = a\mathbb{E}(X^2) + b\mathbb{E}(X) + c$.

Moment d'ordre r :

$$\mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx.$$

Espérance et *var* à densité symétrique : X est symétrique $\Rightarrow$ pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire, *ie*, $g(-x) = -g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}(g(X)) = 0$.

Variance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Propriétés élémentaires :

- $\mathbb{V}(X) \geq 0$,
- $\mathbb{V}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est une *var* constante,
- $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Formule de König-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m,\lambda)$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
$\mathbb{E}(X)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{m}{\lambda}$	0	μ
$\mathbb{V}(X)$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{m}{\lambda^2}$	1	σ^2

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Inégalité de Markov : Pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction $h : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ croissante, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(h(|X|))}{h(\epsilon)}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}.$$

Transformée de Laplace de X :

$$L(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx.$$

Propriétés de la transformée de Laplace :

$$\mathbb{E}(X) = L'(0), \qquad \mathbb{V}(X) = L''(0) - (L'(0))^2.$$

Transformée de Laplace et loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $L_X(t) = L_Y(t)$.

Fonction caractéristique de X :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m,\lambda)$	$\mathcal{N}(0,1)$	$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$
$\varphi(t)$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - it}$	$\dfrac{\lambda^m}{(\lambda - it)^m}$	$e^{-\frac{t^2}{2}}$	$e^{it\mu - \sigma^2 \frac{t^2}{2}}$

Fonction caractéristique et densité : Soient X une *var* de densité f et φ sa fonction caractéristique. Alors on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-itx} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fonction caractéristique et loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$.

12 Lois continues usuelles

Loi uniforme continue : X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b]) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [a,b]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Loi triangulaire continue : X suit la loi triangulaire $\mathcal{T}_{riang}(a) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [-a,a]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}(a - |x|) & \text{si } x \in [-a,a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{a^2}{6}.$$

Loi parabolique : X suit la loi parabolique $\mathcal{P}_{arabol}(a) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [-a,a]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4a^3}(a^2 - x^2) & \text{si } x \in [-a,a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{a^2}{5}.$$

Loi beta : X suit la loi Beta $B(r,s) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(r,s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta(r,s) = \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}dt$. Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{r+s}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}.$$

Loi de Laplace : X suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(a) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x|}{a}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = 2a^2.$$

Loi exponentielle : X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0,\infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Loi gamma : X suit la loi gamma $\Gamma(m,\lambda) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0,\infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}dt$ (on a $\Gamma(m) = (m-1)!$ si $m \in \mathbb{N}^*$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{m}{\lambda}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{m}{\lambda^2}.$$

Loi de Cauchy : X suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(\mu, \lambda) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi\left(\lambda^2 + (x-\mu)^2\right)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \bullet, \qquad \mathbb{V}(X) = \bullet.$$

Loi de Pareto : X suit la loi de Pareto $\mathcal{P}_{ar}(a, \gamma, x_0) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [a + x_0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{a}\left(\dfrac{a}{x - x_0}\right)^{\gamma+1} & \text{si } x \geq a + x_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\gamma a}{\gamma - 1}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{\gamma a^2}{(\gamma-1)^2(\gamma-2)}.$$

Loi normale : X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, On dit que X suit la loi normale "centrée réduite".

Loi du Chi-deux : X suit la loi du Chi-deux $\chi^2(\nu) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-t} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \nu, \qquad \mathbb{V}(X) = 2\nu.$$

Loi de Student : X suit la loi de Student $\mathcal{T}(\nu) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

où, pour tout $\alpha \in \left\{\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}\right\}$, on a $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{\nu}{\nu - 2}.$$

Loi de Fisher : X suit la loi de Fisher $\mathcal{F}(\nu_1, \nu_2) \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right) x} \left(\dfrac{\nu_1 x}{\nu_1 x + \nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \left(1 - \dfrac{\nu_1 x}{\nu_1 x + \nu_2}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}) = \int_0^1 t^{\frac{\nu_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{\nu_2}{2}-1} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)}.$$

Approximations

- si $n \geq 31$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ alors

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p)).$$

- si $\lambda > 15$ alors

$$\mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{N}(\lambda, \lambda).$$

13 Couples de variables aléatoires réelles à densité

Densité (bidimensionnelle) : On appelle densité (bidimensionnelle) toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1$.

Quelques règles de calculs pour les intégrales doubles :

- Les intégrales doubles vérifient les mêmes propriétés que les intégrales simples (linéarité,...),
- La plupart du temps, le calcul des intégrales doubles consiste à exprimer ces intégrales en une série d'intégrales simples calculables.
- Lorsque toutes les fonctions mises en jeu sont intégrables, si le domaine d'intégration est défini en adéquation, l'ordre des intégrations n'a pas d'importance.
  En outre : $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy \right) dx$.
  En intégrant sur $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq y \leq 1\}$, on a
  $\int_0^1 \left(\int_0^y f(x, y)dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_x^1 f(x, y)dy \right) dx$.
- *Changement de variable en coordonnées polaires :* en faisant le changement de variable $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, avec $(r, \theta) \in]0, \infty[\times[0, 2\pi]$, on a

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}^*} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta,$$

  où $\mathcal{D}$ désigne un domaine défini en fonction de (x, y) et $\mathcal{D}^*$ son analogue avec (r, θ).

Couple de *var* à densité : Soient X et Y deux *var* à densité. On appelle couple de *var* à densité l'application $(X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $(X, Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$, $\omega \in \Omega$.

La loi de (X, Y) est caractérisée par une densité (bidimensionnelle) f. On parle alors de loi continue.

Caractérisation : (X,Y) est un couple de *var* de densité f $\Leftrightarrow$ pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathbb{P}\left((X,Y) \in \mathcal{D}\right) = \int\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy.$$

Propriétés élémentaires : Pour tous $a \leq b$, $c \leq d$ et toutes fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(x) \leq h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\{a \leq X \leq b\} \cap \{c \leq Y \leq d\}\right) = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy,$$

$$\mathbb{P}\left(\{a \leq X \leq b\} \cap \{g(X) \leq Y \leq h(X)\}\right) = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right) dx,$$

$$\mathbb{P}(g(X) \leq Y \leq h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right) dx.$$

Support :

- Le support d'un couple de *var* (X,Y) à densité est l'ensemble des valeurs possibles de (X,Y). Il est noté $(X,Y)(\Omega)$. En termes de densité f, on définit $(X,Y)(\Omega)$ par l'adhérence de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) \neq 0\}$.
- On définit $X(\Omega)$ par l'adhérence de $\bigcup_{y\in\mathbb{R}}\{x \in \mathbb{R};\ f(x,y) \neq 0\}$.
- On définit $Y(\Omega)$ par l'adhérence de $\bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{y \in \mathbb{R};\ f(x,y) \neq 0\}$.

Fonction de répartition :

$$F(x,y) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x,y)$, $x \in \mathbb{R}$, et $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Densité et fonction de répartition :

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Lois marginales :

- La densité de X est
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
- La densité de Y est
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, \qquad y \in \mathbb{R}.$$
- Si $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, alors X et Y suivent la même loi : $f_Y(y) = f_X(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Indépendance de X et Y :

- X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ $\Leftrightarrow$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.
- S'il existe deux fonctions h et g telles que
$$f(x,y) = g(x)h(y), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy = 1,$$
alors X et Y sont indépendantes, et la densité de X est g et la densité de Y est h.
- X et Y sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les *var* $g(X)$ et $h(Y)$ sont indépendantes.
- On dit que X et Y sont *iid* quand elles sont "indépendantes et identiquement distribuées". La mention "identiquement distribuées" signifie "suivent la même loi".
- X et Y *iid* $\Rightarrow$ pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{D}) = \mathbb{P}((Y,X) \in \mathcal{D})$.

Loi d'un couple de *var* $(\phi(X,Y), \psi(X,Y))$:

(théorème du changement de variable) Soient (X,Y) un couple de *var* de densité $f_{(X,Y)}$, et $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On considère le couple de *var*
$$(U,V) = (\phi(X,Y), \psi(X,Y)).$$

On suppose qu'il existe deux fonctions $h : \mathbb{R}^2 \to X(\Omega)$ et $k : \mathbb{R}^2 \to Y(\Omega)$ telles que

$$\begin{cases} u = \phi(x, y), \\ v = \psi(x, y), \end{cases} \iff \begin{cases} x = h(u, v), \\ y = k(u, v). \end{cases}$$

Soit $J(u, v)$ le jacobien associé à $(x, y) = (h(u, v), k(u, v))$ défini par le déterminant :

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial h}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{\partial k}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial k}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\frac{\partial k}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial k}{\partial u}(u,v)\frac{\partial h}{\partial v}(u,v).$$

Alors la densité de (U, V) est

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(h(u,v), k(u,v))|J(u,v)|, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Densité d'une somme de deux *var* X et Y indépendantes :

(produit de convolution)

$$f_{X+Y}(x) = (f_X * f_Y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y(x-u)du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On a aussi $f_{X+Y}(x) = (f_Y * f_X)(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Quelques lois usuelles d'une somme de deux *var* indépendantes :

$X_i \sim$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m_i, \lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$	$\chi^2(\nu_i)$
$X_1 + X_2 \sim$	$\Gamma(\lambda, 2)$	$\Gamma(m_1 + m_2, \lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$	$\chi^2(\nu_1 + \nu_2)$

Ainsi, toute *var* définie comme une combinaison linéaire de 2 *var* indépendantes suivant chacune une loi normale suit une loi normale.

Densité du produit de deux *var* X et Y indépendantes :

$$f_{XY}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) f_X\left(\frac{x}{u}\right)\frac{1}{|u|}du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Densité du quotient de deux *var* X et Y indépendantes :

$$f_{\frac{X}{Y}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y\left(\frac{u}{x}\right) du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Caractérisations de quelques lois connues :

- Loi du Chi-deux : X et Y *iid* avec $X \sim \mathcal{N}(0,1) \;\Rightarrow$

$$X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2).$$

- Loi de Student : X et Y indépendantes avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(\nu) \;\Rightarrow$

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}} = \sqrt{\nu}\frac{X}{\sqrt{Y}} \sim \mathcal{T}(\nu).$$

- Loi de Fisher : X et Y indépendantes avec $X \sim \chi^2(\nu_1)$ et $Y \sim \chi^2(\nu_2) \;\Rightarrow$

$$\frac{\frac{X}{\nu_1}}{\frac{Y}{\nu_2}} = \frac{\nu_2 X}{\nu_1 Y} \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2).$$

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy.$$

Méthode de la fonction muette : Soient (X,Y) et (U,V) deux couples de *var* à densité. Si, pour toute fonction continue bornée $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \mathbb{E}(g(U,V)),$$

alors (X,Y) et (U,V) suivent la même loi.

Linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Moments et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y)).$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(X^k Y^m) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^m).$$

Transformée de Laplace :

$$L(s,t) = \mathbb{E}(e^{sX}e^{tY}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{sx}e^{ty}f(x,y)dxdy.$$

Propriétés de la transformée de Laplace :

$$L(s,0) = L_X(s), \qquad L(0,t) = L_Y(t),$$

$$L(s,s) = L_{X+Y}(s), \qquad \mathbb{E}(XY) = \frac{\partial^2 L}{\partial s \partial t}(0,0).$$

Transformées de Laplace et indépendance :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes } \Leftrightarrow \text{ pour tout } (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ L(s,t) = L_X(s)L_Y(t).$$

Fonction caractéristique :

$$\varphi(s,t) = \mathbb{E}(e^{isX+itY}) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}e^{ity}f(x,y)dxdy, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Propriétés de la fonction caractéristique :

$$\varphi(s,0) = \varphi_X(s), \qquad \varphi(0,t) = \varphi_Y(t),$$

$$\varphi(s,s) = \varphi_{X+Y}(s), \qquad \mathbb{E}(XY) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(0,0).$$

Fonction caractéristique et indépendance :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes } \Leftrightarrow \text{ pour tout } (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(s,t) = \varphi_X(s)\varphi_Y(t).$$

Covariance :

$$\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X) & \mathbb{C}(X,Y) \\ \mathbb{C}(Y,X) & \mathbb{V}(Y) \end{pmatrix}.$$

Propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}(X,Y).$$

Propriétés de la covariance :

- $\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{C}(Y,X)$,
- $\mathbb{C}(aX+b, cY+d) = ac\mathbb{C}(X,Y)$,
- $|\mathbb{C}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$,
- $\mathbb{C}(aX+bY, cU+dV) = ac\mathbb{C}(X,U) + ad\mathbb{C}(X,V) + bc\mathbb{C}(Y,U) + bd\mathbb{C}(Y,V)$.

Propriétés d'un couple de *var* défini en fonction d'un autre : Soient (X,Y) un couple de *var* d'espérance $\mu = (\mu_1, \mu_2)(= (\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)))$ et de matrice de covariance Σ, A une matrice carré 2×2 et (U,V) un couple de *var* défini par

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Alors

- l'espérance de (U,V) est μ_* tel que $\mu_*^t = A\mu^t$,
- la matrice de covariance de (U,V) est $\Sigma_* = A\Sigma A^t$.

Covariance, variance et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$

- $\mathbb{C}(X,Y) = 0$,
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Si $\mathbb{C}(X,Y) = 0$, on ne peut rien conclure sur l'indépendance de X et Y.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{C}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On a $\rho(X,Y) \in]-1,1[$. Plus $|\rho(X,Y)|$ est proche de 1, plus la dépendance linéaire entre X et Y est forte.

Couple aléatoire réel gaussien (*carg*) :

- (X,Y) est un *carg* $\Leftrightarrow$ pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la *var* $aX + BY$ suit une loi normale.
- Un *carg* (X,Y) est caractérisé par une moyenne μ et de matrice de covariance Σ. La loi de (X,Y) est notée $\mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)$.

Loi marginales : Si (X,Y) est un *carg*, alors $X \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X))$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(Y), \mathbb{V}(Y))$.

***Carg* et indépendance :** Si (X,Y) est un *carg* alors X et Y indépendantes $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}(X,Y) = 0$.

Densité et fonction caractéristique d'un *carg* : Soit $(X,Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)$ avec $\mu = (\mu_1,\mu_2)$ et $\det(\Sigma) > 0$.

- La densité de (X,Y) est

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\det(\Sigma)|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1, y-\mu_2)\Sigma^{-1}(x-\mu_1, y-\mu_2)^t}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

- La fonction caractéristique de (X,Y) est

$$\varphi(s,t) = e^{i(\mu_1,\mu_2)(s,t)^t - \frac{1}{2}(s,t)\Sigma(s,t)^t}, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Cas particulier : Soit $(X,Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)$ avec $\mu = (0,0) = 0_2$ et $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, $\rho \in]-1,1[$.

- La densité de (X,Y) est

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

- La fonction caractéristique de (X,Y) est

$$\varphi(s,t) = e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2+2\rho st)}, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Système linéaire et *carg* : Soient $(a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2) \in \mathbb{R}^6$, $Z = (X,Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu,\Sigma)$ et $W = (U,V)$ avec

$$\begin{cases} U = a_1X + b_1Y + c_1, \\ V = a_2X + b_2Y + c_2. \end{cases}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ et $C = (c_1,c_2)$, on a

$$W^t = AZ^t + C^t.$$

Alors $W \sim \mathcal{N}_2(A\mu^t + C^t, A\Sigma A^t)$.

14 Vecteurs de variables aléatoires réelles à densité

Définition d'une densité (n-dimensionnelle) : On appelle densité (n-dimensionnelle) toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1$.

Vecteur de *var* à densité : Soient $X_1, \dots, X_n$ n *var* à densité. On appelle vecteurs de *var* à densité l'application $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $(X_1, \dots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$. La loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est caractérisée par une densité (n-dimensionnelle) f.

Caractérisation : $(X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur de *var* de densité f $\Rightarrow$ pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbb{P}\left((X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{D}\right) = \int \dots \int_{\mathcal{D}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Support : Le support d'un vecteur de *var* à densité $(X_1, \dots, X_n)$ est l'ensemble des valeurs possibles de $(X_1, \dots, X_n)$. Il est noté $(X_1, \dots, X_n)(\Omega)$. En termes de densité f, on définit $(X_1, \dots, X_n)(\Omega)$ par l'adhérence de $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ f(x_1, \dots, x_n) \neq 0\}$.

Fonction de répartition :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right), \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Densité et fonction de répartition :

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \dots \partial x_n}(x_1, \dots, x_n), \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Densité d'une *var* composante de $(X_1, \dots, X_n)$: La densité de X_1 est donnée par

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n, \qquad x_1 \in \mathbb{R}.$$

On définit de la même manière les densités des autres *var* $X_2, \dots, X_n$.

Densité d'un vecteur de *var* composantes de $(X_1, \dots, X_n)$: La densité de (X_1, X_2) est donnée par

$$f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_3 \dots dx_n, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On définit de la même manière les densités des autres vecteurs de *var* possibles parmi $(X_1, \dots, X_n)$.

Indépendance de n *var* à densité :

- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Leftrightarrow$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i \leq x_i\}\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \leq x_i).$$

- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toute fonction $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, les *var* $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont indépendantes.
- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^{n-(q+1)} \to \mathbb{R}$, $q \in \{2, \dots, n-1\}$, les *var* $g(X_1, \dots, X_q)$ et $h(X_{q+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Indépendance et densité : $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Leftrightarrow$ pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i).$$

Suite de *var* indépendantes : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de *var* indépendantes $\Leftrightarrow$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i_1, \dots, i_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$, $X_{i_1}, \dots, X_{i_p}$ sont indépendantes.

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\left(g(X_1, \dots, X_n)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_n) f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Espérance et indépendance : $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toute fonction $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(g_i(X_i)).$$

Quelques lois usuelles d'une somme de n *var* indépendantes :

$X_i \sim$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m_i, \lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$	$\chi^2(\nu_i)$
$\sum_{i=1}^n X_i \sim$	$\Gamma(n, \lambda)$	$\Gamma\left(\sum_{i=1}^n m_i, \lambda\right)$	$\mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$	$\chi^2\left(\sum_{i=1}^n \nu_i\right)$

Ainsi, toute *var* définie comme une combinaison linéaire de n *var* indépendantes suivant chacune une loi normale suit une loi normale.

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}(X_1, X_2) & \dots & \dots & \mathbb{C}(X_1, X_n) \\ \mathbb{C}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \dots & \dots & \mathbb{C}(X_2, X_n) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbb{C}(X_{n-1}, X_n) \\ \mathbb{C}(X_n, X_1) & \dots & \dots & \dots & \mathbb{V}(X_n) \end{pmatrix}.$$

Espérance et variance d'une somme de n *var* :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i), \qquad \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{C}(X_i, X_j).$$

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i).$$

Bilinéarité de la covariance :

$$\mathbb{C}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^q b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_i b_j \mathbb{C}(X_i, Y_j).$$

Propriétés d'un vecteur de *var* à densité défini en fonction d'un autre : Soient $(X_1, \dots, X_n)$ un vecteur de *var* à densité d'espérance $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ et de matrice de covariance Σ, A une matrice carré $n \times n$ et $(U_1, \dots, U_n)$ un vecteur de *var* à densité défini par

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Alors

- l'espérance de $(U_1, \dots, U_n)$ est μ_* tel que $\mu_*^t = A\mu^t$,
- la matrice de covariance de $(U_1, \dots, U_n)$ est $\Sigma_* = A\Sigma A^t$.

Fonction caractéristique d'un vecteur de *var* à densité :

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \dots, t_n) &= \mathbb{E}(e^{it_1X_1 + \dots + it_nX_n}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{it_1X_1 + \dots + it_nX_n} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n, \qquad (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Vecteur de *var* gaussien (*vectarg*) :

- $(X_1, \dots, X_d)$ est un vecteur de *var* gaussien (ou vecteur aléatoire réel gaussien *vectarg*) $\Leftrightarrow$ pour tout $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, la *var* $\sum_{i=1}^{d} a_i X_i$ suit une loi normale.
- Un *vectarg* $(X_1, \dots, X_d)$ est caractérisé par une moyenne μ et de matrice de covariance Σ. La loi de $(X_1, \dots, X_d)$ est notée $\mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$.

***Vectarg* et indépendance :**

- Si $(X_1, \dots, X_d)$ est un *vectarg* alors X_i et X_j indépendantes $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}(X_i, X_j) = 0$.
- Si $(X_1, \dots, X_d)$ est un *vectarg* alors $X_1, \dots, X_d$ sont indépendantes $\Leftrightarrow$ pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$ avec $i \neq j$, $\mathbb{C}(X_i, X_j) = 0$.

Densité et fonction caractéristique d'un *vectarg* : Soit $(X_1, \dots, X_d) \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$ avec $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ et $\det(\Sigma) > 0$.

- La densité de $(X_1, \dots, X_d)$ est

$$f(x_1, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{|\det(\Sigma)|}} e^{-\frac{1}{2}(x_1-\mu_1, \dots, x_d-\mu_d)\Sigma^{-1}(x_1-\mu_1, \dots, x_d-\mu_d)^t}, \qquad (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

- La fonction caractéristique de $(X_1, \ldots, X_d)$ est

$$\varphi(t_1, \ldots, t_d) = e^{i(\mu_1, \ldots, \mu_d)(t_1, \ldots, t_d)^t - \frac{1}{2}(t_1, \ldots, t_d)\Sigma(t_1, \ldots, t_d)^t}, \qquad (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Système linéaire et *vectarg* **:** Soient $Z \sim \mathcal{N}_d(\mu, \Sigma)$, A une matrice carré $p \times p$ et C un vecteur réel dans $\mathbb{R}^d$ et W tels que

$$W^t = AZ^t + C^t.$$

Alors $W \sim \mathcal{N}_d(A\mu^t + C^t, A\Sigma A^t)$.

Lois usuelles associées à la loi normale : $X_1, \ldots, X_n$ *iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

var	$\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$	$\dfrac{n-1}{\sigma^2}S_n^2$	$\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\right)$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$
Loi	$\mathcal{N}(0,1)$	$\chi^2(n-1)$	$\mathcal{T}(n-1)$	$\chi^2(n)$

15 Convergence

Convergence en probabilité : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X $\Leftrightarrow$ pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Convergence en loi : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout point de continuité x de F_X $\Leftrightarrow$ pour toute fonction f continue bornée, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Théorème central limite (ou Théorème de la limite centrale) : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sigma(\overline{X}_n)} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sigma(X_1)}\right).$$

Alors la suite de *var* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une *var* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Approximations binomiale et Poisson :

- Si $n \geq 31$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ alors

$$\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}(np, np(1-p)).$$

- Si $\lambda > 15$ alors

$$\mathcal{P}(\lambda) \approx \mathcal{N}(\lambda, \lambda).$$

Théorème de continuité (continuous mapping theorem)

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $X \Rightarrow$ pour toute fonction $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points, $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $g(X)$,
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \Rightarrow$ pour toute fonction $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ continue, sauf éventuellement en un nombre fini de points, $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $g(X)$.

Convergence $\mathbb{L}^p$: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge $\mathbb{L}^p$ vers $X \;\Leftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(|X_n - X|^p\right) = 0$.

Hiérarchie :

- Convergence $\mathbb{L}^p \;\Rightarrow\;$ Convergence en probabilité $\;\Rightarrow\;$ Convergence en loi.
- Convergence en probabilité vers 0 $\;\Leftrightarrow\;$ Convergence en loi vers 0.

Convergence presque sûre : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement (ps) vers $X \;\Leftrightarrow$

$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$.

Critère de convergence ps : Pour tout $\epsilon > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) < \infty \;\Rightarrow\; (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ps vers X.

Loi forte des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant une espérance. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ps vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Hiérarchie : Convergence $ps \;\Rightarrow\;$ convergence en probabilité $\;\Rightarrow\;$ convergence en loi. En revanche, il n'y a pas d'implication entre la convergence $\mathbb{L}^p$ et la convergence ps.

16 Intervalles de confiance bilatéraux

Lois : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $T \sim \mathcal{T}(\nu)$, $K \sim \chi^2(\nu)$, $\nu = n-1$. Niveau : $100(1-\alpha)\%$, $\alpha \in]0,1[$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	valeurs	i_μ
σ connu Z-IntConf	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\overline{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
σ inconnu T-IntConf	$\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq t_\alpha(\nu)) = \alpha$	$\left[\overline{x} - t_\alpha(\nu) \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_\alpha(\nu) \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	valeurs	i_{σ^2}
Chi-Square-IntConf	$\mathbb{P}(K \geq a_\alpha(\nu)) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\mathbb{P}(K \geq b_\alpha(\nu)) = \frac{\alpha}{2}$	$\left[\frac{n-1}{b_\alpha(\nu)} s^2,\ \frac{n-1}{a_\alpha(\nu)} s^2\right]$
$n \geq 31$ (parfois utilisé)	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\frac{2(n-1)s^2}{\left(\sqrt{2n-3} + z_\alpha\right)^2},\ \frac{2(n-1)s^2}{\left(\sqrt{2n-3} - z_\alpha\right)^2}\right]$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	valeurs	i_p
$n \geq 31$ $np_1 \geq 5$, $n(1-p_2) \geq 5$ Prop-Z-IntConf	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\overline{x} - z_\alpha \frac{\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}}{\sqrt{n-1}},\ \overline{x} + z_\alpha \frac{\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}}{\sqrt{n-1}}\right] = [p_1, p_2]$
X de loi quelconque	valeurs	$i_{\mathbb{E}(X)}$
$n \geq 1000$ Z-IntConf-Lim	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\overline{x} - z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

17 Tests de conformité

Lois : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $T \sim \mathcal{T}(\nu)$, $K \sim \chi^2(\nu)$, $\nu = n-1$. Risque : $100\alpha\%$, $\alpha \in]0,1[$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	H_0	H_1	Stat. test obs.	Valeurs	Rejet de H_0 si
σ connu : Z-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$z_{obs} = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$ $\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z^*_\alpha) = 2\alpha$	$\lvert z_{obs}\rvert \geq z_\alpha$ $z_{obs} \geq z^*_\alpha$ $z_{obs} \leq -z^*_\alpha$
σ inconnu : T-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$t_{obs} = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq t_\alpha(\nu)) = \alpha$ $\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq t^*_\alpha(\nu)) = 2\alpha$	$\lvert t_{obs}\rvert \geq t_\alpha(\nu)$ $t_{obs} \geq t^*_\alpha(\nu)$ $t_{obs} \leq -t^*_\alpha(\nu)$
1-Chi2-Test	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2_{obs} = \dfrac{n-1}{\sigma_0^2} s^2$	$\mathbb{P}(K \geq a_\alpha(\nu)) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\mathbb{P}(K \geq b_\alpha(\nu)) = \frac{\alpha}{2}$ $\mathbb{P}(K \geq b^*_\alpha(\nu)) = \alpha$ $\mathbb{P}(K \geq a^*_\alpha(\nu)) = 1 - \alpha$	$\chi^2_{obs} \notin [a_\alpha(\nu), b_\alpha(\nu)]$ $\chi^2_{obs} \geq b^*_\alpha(\nu)$ $\chi^2_{obs} \leq a^*_\alpha(\nu)$
$n \geq 31$ (parfois utilisé)	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$z_{obs} = \sqrt{\dfrac{2(n-1)}{\sigma_0^2} s^2} - \sqrt{2n-3}$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$ $\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z^*_\alpha) = 2\alpha$	$\lvert z_{obs}\rvert \geq z_\alpha$ $z_{obs} \geq z^*_\alpha$ $z_{obs} \leq -z^*_\alpha$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	H_0	H_1	Stat. test obs.	Valeurs	Rejet de H_0 si
$n \geq 31$, $np_0 \geq 5$, $n(1-p_0) \geq 5$: 1-Prop-Z-Test	$p = p_0$ $p \leq p_0$ $p \geq p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$z_{obs} = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$ $\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z^*_\alpha) = 2\alpha$	$\lvert z_{obs}\rvert \geq z_\alpha$ $z_{obs} \geq z^*_\alpha$ $z_{obs} \leq -z^*_\alpha$

18 Rappel : p-valeurs

On considère un test d'hypothèses de la forme :

$$H_0 : \text{A} \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \text{contraire de A}$$

La p-valeur est la probabilité exacte (ou presque) de se tromper en rejetant H_0.

Ainsi, le plus petit risque de se tromper en rejetant H_0 est ($100\times$ p-valeur)%.

Degré de significativité : Le rejet de H_0 sera :

- significatif si p-valeur $\in]0.01, 0.05]$, symbolisé par $*$,
- très significatif si p-valeur $\in]0.001, 0.01]$, symbolisé par $**$,
- hautement significatif si p-valeur < 0.001, symbolisé par $***$,
- (presque significatif si p-valeur $\in]0.05, 0.1]$, symbolisé par . (un point)).

Il y a non rejet de H_0 si p-valeur > 0.05.

19 Tests de conformité (p-valeurs)

Lois : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $T \sim \mathcal{T}(\nu)$, $K \sim \chi^2(\nu)$, $\nu = n-1$. Rejet de H_0 au risque $100\alpha\%$ $\Leftrightarrow$ p-valeur $\leq \alpha$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	H_0	H_1	Stat. test obs.	p-valeurs
σ connu : Z-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$z_{obs} = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq \lvert z_{obs}\rvert)$ $\mathbb{P}(Z \geq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_{obs})\text{ si } z_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(Z \leq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq -z_{obs})\text{ si } z_{obs} < 0\right)$
σ inconnu : T-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$t_{obs} = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq \lvert t_{obs}\rvert)$ $\mathbb{P}(T \geq t_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq t_{obs})\text{ si } t_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(T \leq t_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq -t_{obs})\text{ si } t_{obs} < 0\right)$
1-Chi2-Test	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2_{obs} = \dfrac{n-1}{\sigma_0^2}s^2$	$2\min\left(\mathbb{P}(K \geq \chi^2_{obs}),\ \mathbb{P}(K \leq \chi^2_{obs})\right)$ $\mathbb{P}(K \geq \chi^2_{obs})$ $\mathbb{P}(K \leq \chi^2_{obs})$
$n \geq 31$ (parfois utilisé)	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$z_{obs} = \sqrt{\dfrac{2(n-1)}{\sigma_0^2}s^2} - \sqrt{2n-3}$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq \lvert z_{obs}\rvert)$ $\mathbb{P}(Z \geq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_{obs})\text{ si } z_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(Z \leq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq -z_{obs})\text{ si } z_{obs} < 0\right)$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	H_0	H_1	stat. test obs. et *var*	p-valeurs
$n \geq 31$, $np_0 \geq 5$, $n(1-p_0) \geq 5$: 1-Prop-Z-Test	$p = p_0$ $p \leq p_0$ $p \geq p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$z_{obs} = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq \lvert z_{obs}\rvert)$ $\mathbb{P}(Z \geq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_{obs})\text{ si } z_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(Z \leq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq -z_{obs})\text{ si } z_{obs} < 0\right)$

(Table 1) Loi normale 1

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table ci-dessous donne, pour un α choisi, la valeur z_α telle que $\mathbb{P}(|Z| \geq z_\alpha) = \alpha$.

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

(Table 2) Loi normale 2

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table de valeurs ci-dessous donne les valeurs de $F(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$, avec $x \in [0; 3,99]$ et $x = x_1 + x_2$.

x_1 \ x_2	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

(Table 3) Loi normale 3

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table ci-dessous donne, pour un z choisi, la valeur α telle que $\mathbb{P}(|Z| \geq z) = \alpha$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	1,00000	0,99202	0,98404	0,97607	0,96809	0,96012	0,95216	0,94419	0,93624	0,92829
0,10	0,92034	0,91241	0,90448	0,89657	0,88866	0,88076	0,87288	0,86501	0,85715	0,84931
0,20	0,84148	0,83367	0,82587	0,81809	0,81033	0,80259	0,79486	0,78716	0,77948	0,77182
0,30	0,76418	0,75656	0,74897	0,74140	0,73386	0,72634	0,71885	0,71138	0,70395	0,69654
0,40	0,68916	0,68181	0,67449	0,66720	0,65994	0,65271	0,64552	0,63836	0,63123	0,62413
0,50	0,61708	0,61005	0,60306	0,59611	0,58920	0,58232	0,57548	0,56868	0,56191	0,55519
0,60	0,54851	0,54186	0,53526	0,52869	0,52217	0,51569	0,50925	0,50286	0,49650	0,49019
0,70	0,48393	0,47770	0,47152	0,46539	0,45930	0,45325	0,44725	0,44130	0,43539	0,42953
0,80	0,42371	0,41794	0,41222	0,40654	0,40091	0,39533	0,38979	0,38430	0,37886	0,37347
0,90	0,36812	0,36282	0,35757	0,35237	0,34722	0,34211	0,33706	0,33205	0,32709	0,32217
1,00	0,31731	0,31250	0,30773	0,30301	0,29834	0,29372	0,28914	0,28462	0,28014	0,27571
1,10	0,27133	0,26700	0,26271	0,25848	0,25429	0,25014	0,24605	0,24200	0,23800	0,23405
1,20	0,23014	0,22628	0,22246	0,21870	0,21498	0,21130	0,20767	0,20408	0,20055	0,19705
1,30	0,19360	0,19020	0,18684	0,18352	0,18025	0,17702	0,17383	0,17069	0,16759	0,16453
1,40	0,16151	0,15854	0,15561	0,15272	0,14987	0,14706	0,14429	0,14156	0,13887	0,13622
1,50	0,13361	0,13104	0,12851	0,12602	0,12356	0,12114	0,11876	0,11642	0,11411	0,11183
1,60	0,10960	0,10740	0,10523	0,10310	0,10101	0,09894	0,09691	0,09492	0,09296	0,09103
1,70	0,08913	0,08727	0,08543	0,08363	0,08186	0,08012	0,07841	0,07673	0,07508	0,07345
1,80	0,07186	0,07030	0,06876	0,06725	0,06577	0,06431	0,06289	0,06148	0,06011	0,05876
1,90	0,05743	0,05613	0,05486	0,05361	0,05238	0,05118	0,05000	0,04884	0,04770	0,04659
2,00	0,04550	0,04443	0,04338	0,04236	0,04135	0,04036	0,03940	0,03845	0,03753	0,03662
2,10	0,03573	0,03486	0,03401	0,03317	0,03235	0,03156	0,03077	0,03001	0,02926	0,02852
2,20	0,02781	0,02711	0,02642	0,02575	0,02509	0,02445	0,02382	0,02321	0,02261	0,02202
2,30	0,02145	0,02089	0,02034	0,01981	0,01928	0,01877	0,01827	0,01779	0,01731	0,01685
2,40	0,01640	0,01595	0,01552	0,01510	0,01469	0,01429	0,01389	0,01351	0,01314	0,01277
2,50	0,01242	0,01207	0,01174	0,01141	0,01109	0,01077	0,01047	0,01017	0,00988	0,00960
2,60	0,00932	0,00905	0,00879	0,00854	0,00829	0,00805	0,00781	0,00759	0,00736	0,00715
2,70	0,00693	0,00673	0,00653	0,00633	0,00614	0,00596	0,00578	0,00561	0,00544	0,00527
2,80	0,00511	0,00495	0,00480	0,00465	0,00451	0,00437	0,00424	0,00410	0,00398	0,00385
2,90	0,00373	0,00361	0,00350	0,00339	0,00328	0,00318	0,00308	0,00298	0,00288	0,00279
3,00	0,00270	0,00261	0,00253	0,00245	0,00237	0,00229	0,00221	0,00214	0,00207	0,00200
3,10	0,00194	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00163	0,00158	0,00152	0,00147	0,00142
3,20	0,00137	0,00133	0,00128	0,00124	0,00120	0,00115	0,00111	0,00108	0,00104	0,00100
3,30	0,00097	0,00093	0,00090	0,00087	0,00084	0,00081	0,00078	0,00075	0,00072	0,00070
3,40	0,00067	0,00065	0,00063	0,00060	0,00058	0,00056	0,00054	0,00052	0,00050	0,00048
3,50	0,00047	0,00045	0,00043	0,00042	0,00040	0,00039	0,00037	0,00036	0,00034	0,00033
3,60	0,00032	0,00031	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022
3,70	0,00022	0,00021	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015
3,80	0,00014	0,00014	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010
3,90	0,00010	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007
4,00	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004

(Table 4) Loi de Student à ν degrés de liberté

Soit $T \sim \mathcal{T}(\nu)$. La table ci-dessous donne, pour un α et un ν choisis, la valeur $t_\alpha(\nu)$ telle que $\mathbb{P}(|T| \geq t_\alpha(\nu)) = \alpha$.

ν \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646

(Table 5) Loi du chi-deux à ν degrés de liberté

Soit $K \sim \chi^2(\nu)$. La table ci-dessous donne, pour un α et un ν choisis, la valeur $k_\alpha(\nu)$ telle que $\mathbb{P}(K \geq k_\alpha(\nu)) = \alpha$.

ν \ α	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0002	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,51
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,12
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,31
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

(Table 6) Loi de Fisher à (ν_1, ν_2) degrés de liberté ($\alpha = 0,025$)

Soit $F \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$. La table ci-dessous donne, pour un α, un ν_1 et un ν_2 choisis, la valeur $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ telle que $\mathbb{P}(F \geq f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha = 0,025$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1001
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57
17	6,04	4,32	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71

(Table 7) Loi de Fisher à (ν_1, ν_2) degrés de liberté $(\alpha = 0,05)$

Soit $F \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$. La table ci-dessous donne, pour un α, un ν_1 et un ν_2 choisis, la valeur $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ telle que $\mathbb{P}(F \geq f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha = 0,05$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
1	161	300	216	225	230	234	239	242	246	248	250
2	18,5	19	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57