HAL open science

Formulaire de Probabilités et Statistique

Christophe Chesneau

To cite this version:

Christophe Chesneau. Formulaire de Probabilités et Statistique. Licence. France. 2016. cel-01260327v2

HAL Id: cel-01260327

https://cel.hal.science/cel-01260327v2

Submitted on 22 Mar 2016 (v2), last revised 9 May 2017 (v8)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

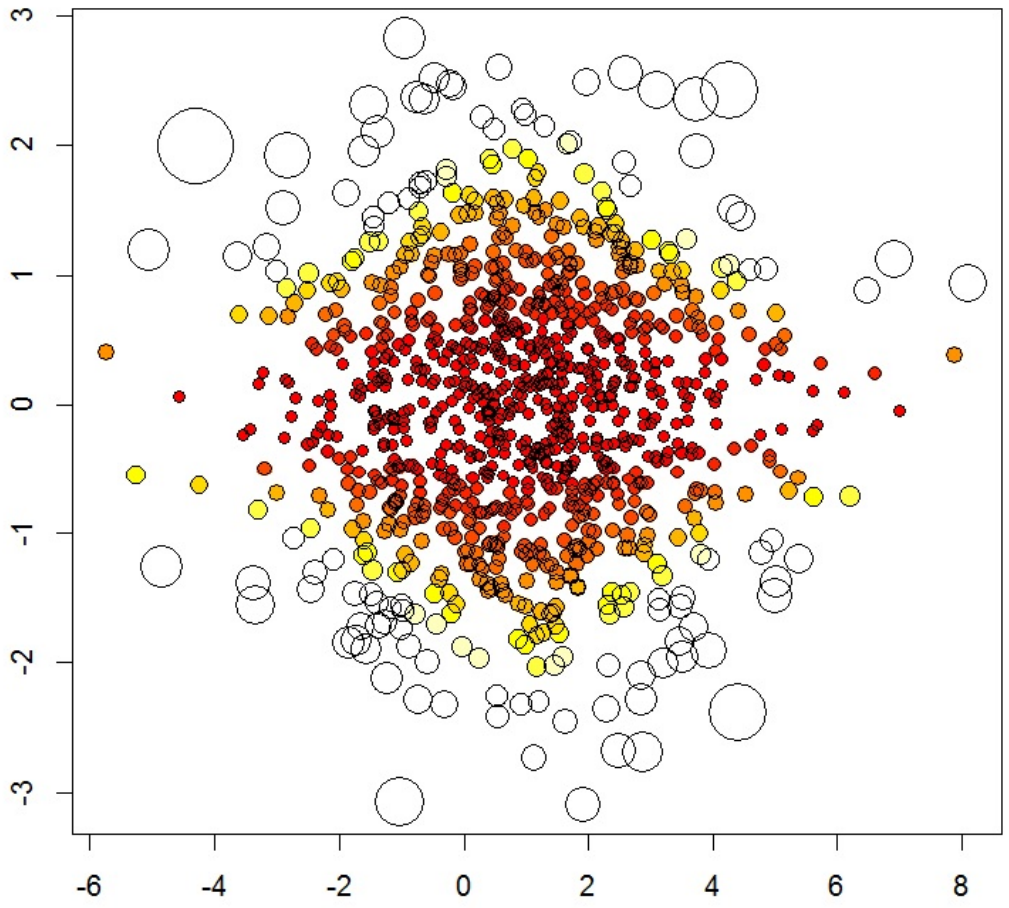
L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Caen

Formulaire de Probabilités et Statistique

Christophe Chesneau

http://www.math.unicaen.fr/~chesneau/



Caen, le 23 Mars 2016

Table des matières

1 Présentation **4**

2 Dénombrement **5**

3 Calculs utiles **9**

4 Espaces probabilisés et probabilités **11**

5 Probabilités conditionnelles et indépendance **15**

6 Variables aléatoires réelles discrètes **17**

7 Lois discrètes usuelles **21**

8 Modélisation **24**

9 Couples de variables aléatoires réelles discrètes **26**

10 Vecteurs de variables aléatoires réelles discrètes **31**

11 Éléments de calcul intégral **35**

12 Variables aléatoires réelles à densité **39**

13 Lois continues usuelles **44**

14 Retour sur la loi normale **48**

15 Couples de variables aléatoires réelles à densité **51**

16 Vecteurs de variables aléatoires réelles à densité **59**

17 Intervalles de confiance bilatéraux **64**

18 Tests de conformité **65**

19 Rappel : p-valeurs **66**

20 Tests de conformité (p-valeurs) **67**

1 Présentation

Ce document présente les principales formules brutes abordées dans le cours *Probabilités et Statistique* du L3 de l'université de Caen.

Note importante : *des points techniques ont volontairement été omis ; lorsqu'une quantité est introduite (dérivé, somme, intégrale, espérance, variance . . .), il est supposé que celle-ci existe.*

Je vous invite à me contacter pour tout commentaire :

christophe.chesneau@gmail.com

Bonne lecture.

2 Dénombrement

Vocabulaires :

Notations	Vocabulaire
$\varnothing$	ensemble vide
Ω	ensemble plein
$\{\omega\}$	singleton de Ω
A	partie de Ω
$\omega \in A$	ω appartient à A
$\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω
$A \cup B$	union de A et B
$A \cap B$	intersection de A et B
$A - B$	intersection de A et $\overline{B}$
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont disjoints
$A \subset B$	A est inclus dans B

Opérations :

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \qquad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \cap B = \bigcup_{k=1}^{n} (A_k \cap B), \qquad \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \cup B = \bigcap_{k=1}^{n} (A_k \cup B).$$

Lois de Morgan :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A}_k, \qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A}_k.$$

Partition : $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ est une partition de E $\Leftrightarrow$ $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ sont disjoints deux à deux et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = E$.

Cardinal : Le nombre des éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E. Il est noté $\mathrm{Card}(E)$.

Formule du crible à l'ordre 2 :

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Formule du crible à l'ordre n :

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in U_k} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{u=1}^{k} A_{i_u}\right),$$

où $U_k = \{(i_1, \ldots, i_k) \in \{1, \ldots, n\}^k; \quad i_1 < \cdots < i_k\}$.

Propriétés du cardinal :

$$\mathrm{Card}(\varnothing) = 0, \qquad A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B),$$

$$\mathrm{Card}(\overline{A}) = \mathrm{Card}(\complement_E A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A),$$

$$\mathrm{Card}(A) = \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cap \overline{B}),$$

$$\mathrm{Card}(A - B) = \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(A \cap B),$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Card}(A) \leq \mathrm{Card}(B),$$

$$\mathrm{Card}(A \times B) = \mathrm{Card}(A)\,\mathrm{Card}(B).$$

Principe additif : On considère une situation qui nous amène à faire un choix parmi n cas différents et exclusifs : le cas 1, ou le cas 2..., ou le cas n. Si, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, il y a u_k possibilités pour le k-ème cas, alors le nombre total de possibilités est $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

Principe multiplicatif : On considère une situation conjuguant k étapes : une étape 1, une étape 2..., et une étape k. Si, pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, il y a n_i possibilités pour la k-ème étape, alors le nombre total de possibilités est $\prod_{i=1}^{k} n_i$.

Ensembles classiques par l'exemple : Le choix de $k = 2$ éléments dans $E = \{a, b, c\}$ peut se faire en répétant ou non un élément, en ordonnant ou non les éléments choisis. Les possibilités de chaque type de choix sont des éléments constituant un ensemble. Les possibilités, ainsi que les cardinaux des ensembles associés, sont confectionnés dans le tableau suivant :

Choix	avec répétition	sans répétition
avec ordre	Listes : $\left.\begin{matrix}(a,a) & (a,b) & (a,c)\\ (b,a) & (b,b) & (b,c)\\ (c,a) & (c,b) & (c,c)\end{matrix}\right\}9$	Arrangements : $\left.\begin{matrix}(a,b) & (a,c)\\ (b,a) & (b,c)\\ (c,a) & (c,b)\end{matrix}\right\}6$
sans ordre	Combinaisons avec répétition : $\left.\begin{matrix}[a,a] & [a,b] & [a,c]\\ [b,b] & [b,c] & [c,c]\end{matrix}\right\}6$	Combinaisons (sans répétition) : $\left.\{a,b\} \quad \{a,c\} \quad \{b,c\}\right\}3$

Les permutations des éléments des 3 éléments de E sont : (a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a). Il y en a 6.

Cardinaux d'ensembles classiques : E un ensemble à n éléments,

- Card($\{$listes de k éléments de $E\}$) $= n^k$,
- Card($\{$arrangements de k éléments de $E\}$) $=$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!},$$

- Card($\{$permutations des n éléments de $E\}$) $= A_n^n = n!$,
- Card($\{$combinaisons de k éléments parmi $n\}$) $=$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

- Card({partitions $(E_i)_{i\in\{1,\dots,k\}}$ de E avec $\mathrm{Card}(E_i) = n_i$}) =

$$\binom{n}{n_1,\dots,n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\dots\binom{n-\sum\limits_{i=1}^{k-1} n_i}{n_k} = \frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{k}(n_i!)}.$$

- Card({combinaisons avec répétition de k éléments de E}) =

$$K_n^k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

3 Calculs utiles

Propriétés élémentaires du coefficient binomial :

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \qquad k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}, \qquad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Formule du binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Formule de Vandermonde :

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}.$$

Somme des n premiers entiers, de leurs carrés et de leurs cubes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Somme des n premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{si } x \in \mathbb{R} - \{1\}, \\ n+1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Série géométrique et ses dérivées :

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad x \in]-1,1[.$$

Formule du binôme négatif :

$$\sum_{k=r}^{\infty} \binom{k}{r} x^{k-r} = \frac{1}{(1-x)^{r+1}}, \qquad x \in]-1,1[.$$

Série entière de la fonction exponentielle :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Sommes doubles :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \right), \qquad \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{i} a_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=j}^{n} a_{i,j} \right).$$

4 Espaces probabilisés et probabilités

Expérience aléatoire : On appelle expérience aléatoire toute expérience dont on connaît parfaitement les conditions mais dont on ne peut pas prévoir l'issue. Elle est notée $\mathcal{E}$.

Univers : On appelle univers d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ l'ensemble des issues possibles. Un univers est noté Ω.

Événement : On appelle événement toute partie de l'univers Ω.

On dit qu'un événement A est réalisé (ou se réalise) lors d'une expérience aléatoire si et seulement si l'issue de cette expérience aléatoire appartient à A.

Vocabulaires :

Notations	Lire	Vocabulaires
$\varnothing$	.	événement impossible
Ω	.	univers (ou événement certain)
ω	.	issue
$\{\omega\}$	.	événement élémentaire
A	.	événement
$\omega \in A$	.	ω est une réalisation possible de A
$\overline{A}$	A barre	événement contraire de A
$A \cup B$	A union B	réalisation de A, ou B, ou les deux
$A \cap B$	A inter B	réalisation de A et B
$A - B$	.	réalisation de A et $\overline{B}$
$A \cap B = \varnothing$	.	A et B sont incompatibles
$A \subset B$	A inclus dans B	A implique B

Toutes les opérations vues sur les ensembles sont aussi valables pour les événements. En particulier, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ = "ni A, ni B se réalise" et $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Système complet d'événements : $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ forme un système complet d'événements $\Leftrightarrow$ $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ sont incompatibles deux à deux et $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Tribu : On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu de l'univers Ω si, et seulement si,

- $\Omega \in \mathcal{A}$,
- pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} \in \mathcal{A}$,
- pour toutes familles d'événements $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k \in \mathcal{A}$, on a

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}.$$

Probabilité $\mathbb{P}$: On appelle probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ toute application $\mathbb{P} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\mathbb{P}(A) \in [0,1], \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1, \qquad A \cap B = \varnothing \Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Le réel $\mathbb{P}(A)$, prononcer "P de A", est la probabilité que (l'événement) A se réalise.

Espace probabilisé : Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Si Ω est fini ou infini dénombrable (comme, par exemple, $\Omega = \mathbb{N}$), on prend $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω.

Propriétés élémentaires :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A), \qquad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}),$$

$$A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

Si Ω est fini ou infini dénombrable :

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega\in A} \mathbb{P}(\{\omega\}), \qquad \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\{\omega\}) = 1.$$

Formule d'inclusion-exclusion à 2 termes :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Formule d'inclusion-exclusion à 3 termes :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A\cup B\cup C) &= \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)\\ &- \mathbb{P}(A\cap B)-\mathbb{P}(A\cap C)-\mathbb{P}(B\cap C)\\ &+ \mathbb{P}(A\cap B\cap C).\end{aligned}$$

Formule d'inclusion-exclusion à n termes :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in U_k}\mathbb{P}\left(\bigcap_{u=1}^{k} A_{i_u}\right),$$

où $U_k=\{(i_1,\ldots,i_k)\in\{1,\ldots,n\}^k;\ \ i_1<\ldots<i_k\}$.

Cas particulier : Si $(A_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ incompatibles deux à deux, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k).$$

Inégalité : On a toujours

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k).$$

Propriété de la limite monotone :

$$A_{n+1}\subset A_n\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right),$$

$$A_n\subset A_{n+1}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Probabilité uniforme : Si Ω est fini et que tous ses événements élémentaires sont équiprobables, alors on peut considérer l'espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega),\mathbb{P})$, où $\mathbb{P}$ désigne la probabilité uniforme définie par

$$\mathbb{P}(A)=\frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}.$$

Autrement écrit,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Nombre d'événements élémentaires de } A}{\text{Nombre d'événements élémentaires de } \Omega}.$$

5 Probabilités conditionnelles et indépendance

Probabilité (conditionnelle) de A sachant B : L'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{A} \to [0,1]$ définie par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}, \qquad A \in \mathcal{A},$$

est une probabilité.

Le réel $\mathbb{P}_B(A)$, prononcer "P de A sachant B", est la probabilité que (l'événement) A se réalise sachant que (l'événement) B est réalisé (avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$).

Retournement du conditionnement :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = c\mathbb{P}_A(B), \quad \text{avec} \quad c = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Formule des probabilités composées à l'ordre 3 :

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}_{A\cap B}(C).$$

Formule des probabilités totales à l'ordre 2 :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

Formule de Bayes à l'ordre 2 :

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}_{\overline{A}}(B)\mathbb{P}(\overline{A})}.$$

Formule des probabilités composées à l'ordre n :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1)\prod_{i=2}^{n} \mathbb{P}_{\bigcap_{k=1}^{i-1} A_k}(A_i).$$

Formule des probabilités totales à l'ordre n : $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ système complet d'événements,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k).$$

Formule de Bayes à l'ordre n : $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ système complet d'événements,

$$\mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}_{A_i}(B)\mathbb{P}(A_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}_{A_k}(B)\mathbb{P}(A_k)}.$$

Indépendance :

- A et B indépendants $\Leftrightarrow$

$$\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \quad\Leftrightarrow\quad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \quad\Leftrightarrow\quad \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B).$$

- A et B indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et B indépendants $\Leftrightarrow$ A et $\overline{B}$ indépendants $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ et $\overline{B}$ indépendants
- $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ indépendants deux à deux $\Leftrightarrow$ pour tout $(k,l)\in\{1,\dots,n\}^2$ avec $k\neq l$,

$$\mathbb{P}(A_k\cap A_l) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_l).$$

- $(A_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ indépendants $\Leftrightarrow$ pour tout $I\subseteq\{1,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right) = \prod_{k\in I}\mathbb{P}(A_k).$$

6 Variables aléatoires réelles discrètes

Variable aléatoire réelle (*var*) :

- Une *var* X est une application $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- On note $X(\Omega) = \{X(\omega);\ \omega \in \Omega\}$, l'ensemble des valeurs prises par X.

***Var* discrète :**

- On appelle *var* discrète toute *var* prenant un ensemble de valeurs fini, ou infini dénombrable.
- La loi d'une *var* discrète X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k), \qquad k \in X(\Omega),$$

où $\mathbb{P}(X = k)$ désigne la probabilité que l'événement $\{X = k\} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\}$ se réalise.

Propriétés :

$$\sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

Pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}(X \in \mathcal{D}) = \sum_{k \in X(\Omega) \cap \mathcal{D}} \mathbb{P}(X = k).$$

Exemples :

On adopte la notation : $X \sim \ldots \ \Leftrightarrow\ X$ suit la loi $\ldots$

$X \sim$	$\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
$X(\Omega) \quad (k \in)$	$\{1, \ldots, n\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, \ldots, n\}$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}$
$\mathbb{P}(X = k)$	$\dfrac{1}{n}$	p si $k = 1$	$\dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$p(1-p)^{k-1}$	$e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$

Caractérisation : q_k, $k \in \mathcal{D}$, caractérise la loi d'une *var* discrète $\Leftrightarrow$ $q_k \geq 0$, et

$$\sum_{k \in \mathcal{D}} q_k = 1.$$

Loi et probabilité uniforme :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\mathrm{Card}(\{X = k\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}, \qquad k \in X(\Omega).$$

Égalité en loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k), \qquad k \in X(\Omega).$$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k \in]-\infty, x] \cap X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fonction de répartition et loi : Pour tout $k \in X(\Omega)$, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = F(k) - F(k_*),$$

où k_* est la plus grande valeur de $X(\Omega)$ vérifiant $k_* < k$.

Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k).$$

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in X(\Omega)} g(k)\mathbb{P}(X = k).$$

Propriétés élémentaires :

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(a) = a$,
- $X(\Omega) \subseteq [0, \infty[\;\Rightarrow\; \mathbb{E}(X) \geq 0$,
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$,
- $\mathbb{E}(aX^2 + bX + c) = a\mathbb{E}(X^2) + b\mathbb{E}(X) + c$.

Moment d'ordre p :

$$m_p = \mathbb{E}(X^p) = \sum_{k \in X(\Omega)} k^p \mathbb{P}(X = k).$$

Variance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

Propriétés élémentaires :

- $\mathbb{V}(X) \geq 0$,
- $\mathbb{V}(X) = 0 \;\Leftrightarrow\; X$ est une *var* constante,
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$.

Formule de König-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
$\mathbb{E}(X)$	$\frac{n+1}{2}$	p	np	$\frac{1}{p}$	λ
$\mathbb{V}(X)$	$\frac{n^2-1}{12}$	$p(1-p)$	$np(1-p)$	$\frac{1-p}{p^2}$	λ

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Inégalité de Markov : Pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction $h : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ croissante, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(h(|X|))}{h(\epsilon)}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}.$$

Fonction génératrice :

$$G(s) = \mathbb{E}(s^X) = \sum_{k \in X(\Omega)} s^k \mathbb{P}(X = k), \qquad s \in [-1, 1].$$

Propriétés de la fonction génératrice :

$$\mathbb{E}(X) = G'(1), \qquad \mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2.$$

Fonction génératrice et loi :

- Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$ et
$$G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k,$$
alors $X(\Omega) = \{k \in \mathbb{N};\ a_k \neq 0\}$ et la loi de X est donnée par
$$\mathbb{P}(X = k) = a_k, \qquad k \in X(\Omega).$$
- Si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}$, alors $X(\Omega) = \{m \in \mathbb{N};\ G^{(m)}(0) \neq 0\}$ et la loi de X est donnée par
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}, \qquad k \in X(\Omega).$$
- X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $G_X(s) = G_Y(s)$ pour tout $s \in [-1, 1]$.

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}(\{1, \ldots, n\})$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{G}(p)$	$\mathcal{P}(\lambda)$
$G(s)$	$\frac{s}{n}\left(\frac{1-s^n}{1-s}\right)$	$1 + p(s-1)$	$(1 + p(s-1))^n$	$\frac{ps}{1-(1-p)s}$	$e^{\lambda(s-1)}$

7 Lois discrètes usuelles

Loi de Rademacher : X suit la loi de Rademacher $\mathcal{R}(a)$, $a > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \{-a, a\}$,

$$\mathbb{P}(X = -a) = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{P}(X = a) = \frac{1}{2}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = a^2.$$

Loi uniforme (discrète) : X suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\{m, \dots, n\})$, $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $m < n \;\Leftrightarrow$ $X(\Omega) = \{m, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n + 1 - m}, \qquad k \in \{m, \dots, n\}.$$

Quand $m = 1$, $X(\Omega) = \{1, \dots, n\}$ et

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}, \qquad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Espérance et variance pour le cas $m = 1$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

Loi de Bernoulli : X suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in]0, 1[\;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \mathbb{V}(X) = p(1 - p).$$

Loi binomiale : X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ $\Leftrightarrow$ $X(\Omega) = \{0,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0,\dots,n\}.$$

(On a $\mathcal{B}(1,p) = \mathcal{B}(p)$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Loi hypergéométrique : X suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(l,m,n)$, $(l,m,n) \in (\mathbb{N}^*)^3$ $\Leftrightarrow$ $X(\Omega) \subseteq \{0,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\binom{l}{k}\binom{m}{n-k}}{\binom{m+l}{n}}, \qquad k \in \{0,\dots,n\}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{nl}{l+m}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{nlm(l+m-n)}{(l+m)^2(l+m-1)}.$$

Loi géométrique : X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ $\Leftrightarrow$ $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Loi de Pascal : X suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r,p)$, $r \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ $\Leftrightarrow$ $X(\Omega) = \mathbb{N} - \{0,\dots,r-1\}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \qquad k \in \mathbb{N} - \{0,\dots,r-1\}.$$

(On a $\mathcal{G}(1,p) = \mathcal{G}(p)$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Loi binomiale négative : X suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r,p)$, $r \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[\;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r(1-p)}{p}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Loi de Poisson : X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Approximations

- Si $p = l/(l+m)$ et $n \leq (l+m)/10$, alors

$$\mathcal{H}(l,m,n) \approx \mathcal{B}(n,p),$$

- Si $n \geq 31$ et $np \leq 10$, alors

$$\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{P}(np).$$

8 Modélisation

Schéma d'urne :

- *Tirages avec remise.* Une urne contient N boules dont N_1 sont blanches et $N_2 = N - N_1$ sont noires. On effectue des tirages au hasard et avec remise.
  - La *var* X égale au nombre de boules blanches obtenues en n tirages suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{N_1}{N}\right)^k \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \dots, n\}.$$

  - La *var* X égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois une boule blanche suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{N_1}{N} \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

  - La *var* X égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir r boules blanches, $r \in \{1, \dots, N_1\}$, suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r,p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} \left(\frac{N_1}{N}\right)^r \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^{k-r}, \qquad k \in \mathbb{N} - \{0, \dots, r-1\}.$$

  - La *var* X égale au nombre de boules noires tirées avant d'obtenir r boules blanches, $r \in \{1, \dots, N_1\}$, suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r,p)$ avec $p = \frac{N_1}{N}$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} \left(\frac{N_1}{N}\right)^r \left(1 - \frac{N_1}{N}\right)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

- *Tirages simultanés.* Une urne contient N boules dont N_1 sont blanches et $N_2 = N - N_1$ sont noires.

On tire au hasard et simultanément n boules de l'urne. La *var* X égale au nombre de boules blanches obtenues suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N_1, N_2, n)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k \in \{0, \dots, n\}.$$

Répétition d'expériences : On répète, dans les mêmes conditions, une même expérience aléatoire au cours de laquelle un événement A a une probabilité p d'être réalisé.

- La *var* X égale au nombre de réalisations de l'événement A en n expériences (indépendantes) suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \{0, \dots, n\}.$$

- La *var* X égale au nombre d'expériences (indépendantes) nécessaires pour obtenir une réalisation de A suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \mathbb{N}^*.$$

- La *var* X égale au nombre d'expériences (indépendantes) nécessaires pour obtenir exactement r réalisations de A suit la loi de Pascal $\mathcal{G}(r, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, \qquad k \in \mathbb{N} - \{0, \dots, r-1\}.$$

- La *var* X égale au nombre d'expériences (indépendantes) nécessaires pour que A ne se réalise pas avant r réalisations de A suit la loi binomiale négative $\mathcal{B}_{neg}(r, p)$:

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

9 Couples de variables aléatoires réelles discrètes

Couple de *var* :

- Soient X et Y deux *var*. On appelle couple de *var* l'application $(X,Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ vérifiant $(X,Y)(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$, $\omega \in \Omega$.
- On note $(X,Y)(\Omega) = \{(X,Y)(\omega);\ \omega \in \Omega\}$, l'ensemble des valeurs prises par (X,Y).

Couple de *var* discrètes :

- On appelle couple de *var* discrètes tout couple de *var* prenant un ensemble de valeurs fini, ou infini dénombrable.
- La loi de (X,Y) est donnée par

$$\mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}), \qquad (i,j) \in (X,Y)(\Omega).$$

Propriétés :

$$\sum\sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = 1,$$

Pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{D}) = \sum\sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega)\cap\mathcal{D}} \mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}).$$

Caractérisation : $q_{i,j}$, $(i,j) \in \mathcal{D}$, caractérise la loi d'un couple de *var* discrètes $\Leftrightarrow$ $q_{i,j} \geq 0$ et

$$\sum\sum_{(i,j)\in\mathcal{D}} q_{i,j} = 1.$$

Loi et probabilité uniforme :

$$\mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}) = \frac{\mathrm{Card}(\{X=i\} \cap \{Y=j\})}{\mathrm{Card}(\Omega)}, \qquad (i,j) \in (X,Y)(\Omega).$$

Loi et probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \begin{cases} \mathbb{P}_{\{Y=j\}}(X=i)\mathbb{P}(Y=j), \\ \mathbb{P}_{\{X=i\}}(Y=j)\mathbb{P}(X=i), \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega). \end{cases}$$

Fonction de répartition de (X,Y) :

$$F(x,y) = \mathbb{P}(\{X\le x\}\cap\{Y\le y\}), \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Lois marginales :

- On a $X(\Omega) = \bigcup_{j\in\mathbb{R}}\{i\in\mathbb{R};\ \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\neq 0\}$,

  la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X=i) = \sum_{j\in Y(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}), \qquad i\in X(\Omega).$$

- On a $Y(\Omega) = \bigcup_{i\in\mathbb{R}}\{j\in\mathbb{R};\ \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\})\neq 0\}$,

  la loi de Y est donnée par

$$\mathbb{P}(Y=j) = \sum_{i\in X(\Omega)} \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}), \qquad j\in Y(\Omega).$$

Indépendance des *var* X et Y :

- X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow$ $(X,Y)(\Omega) = X(\Omega)\times Y(\Omega)$ et

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j), \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega).$$

- S'il existe deux suites de réels positifs $(a_i)_{i\in X(\Omega)}$ et $(b_j)_{j\in Y(\Omega)}$ telles que

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = a_i b_j, \qquad \sum_{i\in X(\Omega)} a_i = 1, \qquad \sum_{j\in Y(\Omega)} b_j = 1,$$

  alors X et Y sont indépendantes, et la loi de X est donnée par $\mathbb{P}(X=i)=a_i$, $i\in X(\Omega)$ et la loi de Y est donnée par $\mathbb{P}(Y=j)=b_j$, $j\in Y(\Omega)$.

- X et Y sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les *var* $g(X)$ et $h(Y)$ sont indépendantes.
- On dit que X et Y sont *iid* quand elles sont "indépendantes et identiquement distribuées". La mention "identiquement distribuées" signifie "suivent la même loi".
- X et Y *iid* $\Rightarrow$ pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{D}) = \mathbb{P}((Y,X) \in \mathcal{D})$.

Loi d'une somme de deux *var* X et Y indépendantes (produit de convolution) :

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(Y=k-i)\mathbb{P}(X=i), \qquad k \in (X+Y)(\Omega).$$

$X_i \sim$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(m_i,p)$	$\mathcal{P}(\lambda_i)$	$\mathcal{G}(p)$
$X_1+X_2 \sim$	$\mathcal{B}(2,p)$	$\mathcal{B}(m_1+m_2,p)$	$\mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$	$\mathcal{G}(2,p)$

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \sum\sum_{(i,j) \in (X,Y)(\Omega)} g(i,j)\mathbb{P}(\{X=i\} \cap \{Y=j\}).$$

Linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Moments et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y)).$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(X^kY^m) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^m).$$

Fonction génératrice : Si $(X,Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^2$,

$$G(s,t) = \mathbb{E}(s^X t^Y) = \sum_{(i,j)\in(X,Y)(\Omega)}\sum s^i t^j \mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}), \quad (s,t)\in[-1,1]^2.$$

Propriétés de la fonction génératrice :

$$G(s,1) = G_X(s), \qquad G(1,t) = G_Y(t),$$

$$G(s,s) = G_{X+Y}(s), \qquad \mathbb{E}(XY) = \frac{\partial^2 G}{\partial s \partial t}(1,1).$$

Fonction génératrice et loi :

- Si $(X,Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^2$ et

$$G(s,t) = \sum_{i\in K}\sum_{j\in L} a_{i,j} s^i t^j,$$

alors $(X,Y)(\Omega) = \{(i,j)\in K\times L;\ a_{i,j}\neq 0\}$ et la loi de (X,Y) est donnée par

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = a_{i,j}, \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega).$$

- Si $(X,Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^2$ alors $(X,Y)(\Omega) = \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2;\ \frac{\partial^{i+j}G}{\partial^i s\partial^j t}(0,0)\neq 0\right\}$ et la loi de (X,Y) est donnée par

$$\mathbb{P}(\{X=i\}\cap\{Y=j\}) = \frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}G}{\partial^i s\partial^j t}(0,0), \qquad (i,j)\in(X,Y)(\Omega).$$

Fonction génératrice et indépendance :

$$X \text{ et } Y \text{ indépendantes } \Leftrightarrow\ G(s,t) = G_X(s)G_Y(t) \text{ pour tout } (s,t)\in[-1,1]^2.$$

Covariance :

$$\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X) & \mathbb{C}(X,Y) \\ \mathbb{C}(Y,X) & \mathbb{V}(Y) \end{pmatrix}.$$

Propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}(X,Y).$$

Propriétés de la covariance :

- $\mathbb{C}(X,Y) = \mathbb{C}(Y,X)$,
- $\mathbb{C}(aX+b, cY+d) = ac\mathbb{C}(X,Y)$,
- $|\mathbb{C}(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$,
- $\mathbb{C}(aX+bY, cU+dV) = ac\mathbb{C}(X,U) + ad\mathbb{C}(X,V) + bc\mathbb{C}(Y,U) + bd\mathbb{C}(Y,V)$.

Covariance, variance et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$

- $\mathbb{C}(X,Y) = 0$,
- $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Si $\mathbb{C}(X,Y) = 0$, on ne peut rien conclure sur l'indépendance des *var* X et Y.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathbb{C}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On a $\rho(X,Y) \in [-1,1]$. Plus $|\rho(X,Y)|$ est proche de 1, plus la dépendance linéaire entre X et Y est forte.

10 Vecteurs de variables aléatoires réelles discrètes

Vecteur de *var* :

- Soient $X_1, \dots, X_n$ n *var*. On appelle vecteur de *var* l'application $(X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ vérifiant $(X_1, \dots, X_n)(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$.
- On note $(X_1, \dots, X_n)(\Omega) = \{(X_1, \dots, X_n)(\omega);\ \omega \in \Omega\}$, l'ensemble des valeurs prises par $(X_1, \dots, X_n)$.

Vecteur de *var* discrètes :

- On appelle vecteur de *var* discrètes tout vecteur de *var* prenant un ensemble de valeurs fini, ou infini dénombrable.
- La loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est donnée par

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = u_i\}\right), \qquad (u_1, \dots, u_n) \in (X_1 \dots X_n)(\Omega).$$

Propriétés :

$$\sum \dots \sum_{(u_1,\dots,u_n)\in(X_1,\dots,X_n)(\Omega)} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = u_i\}\right) = 1.$$

Pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbb{P}\left((X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{D}\right) = \sum \dots \sum_{(u_1,\dots,u_n)\in(X_1,\dots,X_n)(\Omega)\cap\mathcal{D}} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = u_i\}\right).$$

Caractérisation : $(q_{u_1,\dots,u_n})_{(u_1,\dots,u_n)\in\mathcal{D}}$ est la loi d'un vecteur de *var* discrètes $\Leftrightarrow$

pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{D}$, $q_{u_1,\dots,u_n} \geq 0$ et

$$\sum \dots \sum_{(u_1,\dots,u_n)\in\mathcal{D}} q_{u_1,\dots,u_n} = 1.$$

Loi marginale d'une *var* composante de $(X_1, \dots, X_n)$: La loi de X_1 est donnée par

$$\mathbb{P}(X_1 = u_1) = \sum_{(u_2,\dots,u_n)\in(X_2,\dots,X_n)(\Omega)} \dots \sum \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = u_i\}\right), \qquad u_1 \in X_1(\Omega).$$

On définit de la même manière les lois marginales des autres *var* $X_2, \dots, X_n$.

Fonction de répartition :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i \leq x_i\}\right), \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Fonction génératrice : Si $(X_1, \dots, X_n)(\Omega) \subseteq \mathbb{N}^n$,

$$G(s_1, \dots, s_n) = \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} s_i^{X_i}\right), \qquad (s_1, \dots, s_n) \in [-1, 1]^n.$$

Indépendance de n *var* discrètes :

- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Leftrightarrow$ pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega)$ et tout $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, on a
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i\in I}\{X_i = u_i\}\right) = \prod_{i\in I}\mathbb{P}(X_i = u_i).$$
- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toute fonction $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \dots, n\}$, les *var* $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont indépendantes.
- $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^{n-(q+1)} \to \mathbb{R}$, $q \in \{2, \dots, n-1\}$, les *var* $g(X_1, \dots, X_q)$ et $h(X_{q+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Suite de *var* indépendantes : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de *var* discrètes indépendantes $\Leftrightarrow$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i_1, \dots, i_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$, $X_{i_1}, \dots, X_{i_p}$ sont indépendantes.

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\left(g(X_1, \dots, X_n)\right) = \sum_{(u_1,\dots,u_n)\in(X_1,\dots,X_n)(\Omega)} \dots \sum g(u_1, \dots, u_n)\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i = u_i\}\right).$$

Espérance et indépendance : $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toute fonction $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$i \in \{1, \dots, n\}$, telle que $g_i(X_i)$ admet une espérance, on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(g_i(X_i)).$$

Loi d'une somme de n *var* indépendantes :

$X_i \sim$	$\mathcal{B}(p)$	$\mathcal{B}(m_i, p)$	$\mathcal{P}(\lambda_i)$	$\mathcal{G}(p)$
$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim$	$\mathcal{B}(n, p)$	$\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i, p\right)$	$\mathcal{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$	$\mathcal{G}(n, p)$

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}(X_1, X_2) & \dots & \dots & \mathbb{C}(X_1, X_n) \\ \mathbb{C}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \dots & \dots & \mathbb{C}(X_2, X_n) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbb{C}(X_{n-1}, X_n) \\ \mathbb{C}(X_n, X_1) & \dots & \dots & \dots & \mathbb{V}(X_n) \end{pmatrix}.$$

Bilinéarité de la covariance :

$$\mathbb{C}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \sum_{j=1}^{q} b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{q} a_i b_j \mathbb{C}(X_i, Y_j).$$

Espérance et variance d'une somme de n *var* :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i), \qquad \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{C}(X_i, X_j).$$

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

Convergence en probabilité : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X $\Leftrightarrow$ pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* discrètes admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Convergence en loi : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$ $\Leftrightarrow$ pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} G_{X_n}(s) = G_X(s)$, $s \in [-1, 1]$.

Hiérarchie :

- Convergence en probabilité vers X $\Rightarrow$ convergence en loi vers X.
- Convergence en probabilité vers 0 $\Leftrightarrow$ convergence en loi vers 0.

Approximations usuelles :

- Si $p = l/(l + m)$ et $n \leq (l + m)/10$, alors

$$\mathcal{H}(l, m, n) \approx \mathcal{B}(n, p),$$

- Si $n \geq 31$ et $np \leq 10$, alors

$$\mathcal{B}(n, p) \approx \mathcal{P}(np).$$

11 Éléments de calcul intégral

Primitive : On appelle primitive de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ toute fonction F telle que

$$F'(x) = f(x).$$

Dans la suite, on note F une primitive de f et on suppose que toutes les quantités présentées existent.

Propriétés élémentaires :

- Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ est une primitive de f.
- Soient F une primitive de f et G une primitive de g. Alors, pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$.

Primitives usuelles :

$f(x)$	x^α	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x}$	$e^{\alpha x}$	$\ln(x)$
$F(x)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$2\sqrt{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$x\ln(x) - x$
$f(x)$	a^x	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan^2(x) + 1$	$\frac{1}{\sin^2(x)}$
$F(x)$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\tan(x)$	$-\operatorname{cotan}(x)$
$f(x)$	$\tan(x)$	$\operatorname{cotan}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$F(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$\ln(\lvert\sin(x)\rvert)$	$\arctan(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$

Primitive d'une fonction composée : Soit $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est continue. Alors une primitive de $g(x) = u'(x)f(u(x))$ est

$$G(x) = F(u(x)).$$

Exemples de primitives de fonctions composées :

$f(x)$	$\alpha u'(x)(u(x))^{\alpha-1}$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u'(x)e^{u(x)}$
$F(x)$	$(u(x))^{\alpha}$	$2\sqrt{u(x)}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$e^{u(x)}$
$f(x)$	$u'(x)\sin(u(x))$	$u'(x)\cos(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}}$	$\dfrac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$
$F(x)$	$-\cos(u(x))$	$\sin(u(x))$	$\arcsin(u(x))$	$\arctan(u(x))$

Calcul intégral et primitive :

- On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ le réel

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

- On adopte la notation "crochet" : $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, donc

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Propriétés fondamentales :

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0.$
- Linéarité de l'intégration :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))\, dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

- Relation de Chasles : pour tout $c \in]a,b[$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Techniques de calcul intégral : Soient $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables dont les dérivées sont continues.

- Intégration par parties :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx.$$

- Changement de variable :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} f(u(y))u'(y)dy.$$

On dit alors que l'on a fait le changement de variable : $x = u(y)$ (ou $y = u^{-1}(x)$). Ainsi, on remplace x par $u(y)$, donc $dx = d(u(y)) = u'(y)dy$ et on ajuste les bornes d'intégration : $x = a \Leftrightarrow y = u^{-1}(a)$ et $x = b \Leftrightarrow y = u^{-1}(b)$.

Propriétés de l'intégrale d'une fonction positive : Soit f une fonction positive. Alors

- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$
- pour tout $[c, d] \subseteq [a, b]$, on a $\displaystyle\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx.$

Intégrale nulle : Si f est continue et de signe constant sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ si, et seulement si, $f(x) = 0$, pour tout $x \in [a, b]$.

Majoration de l'intégrale :

- $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|.$
- Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}\sqrt{\int_a^b (g(x))^2 dx}.$$

Intégrale sur un intervalle centré en 0 :

- Si f est paire sur $[-a, a]$, *i.e.* $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in [-a, a]$, alors on a

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

- Si f est impaire $[-a, a]$, *i.e.* $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in [-a, a]$, alors (si existence) on a

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

Intégrale généralisée en $-\infty$ ou/et ∞ :

- $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{\ell\to\infty}\int_a^{\ell} f(x)dx,$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\ell\to-\infty}\int_{\ell}^{b} f(x)dx,$
- pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx.$

Intégrales de Riemann :

- L'intégrale $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx$ existe si, et seulement si, $\alpha > 1$.
- L'intégrale $J(\beta) = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^{\beta}}dx$ existe si, et seulement si, $\beta < 1$.

12 Variables aléatoires réelles à densité

Densité : On appelle densité toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

***Var* à densité :** On dit qu'une *var* X est à densité s'il existe une densité f telle que, pour tous $a \leq b$, on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

On dit alors que X est de densité f ou X possède la densité f ou f est une densité de X. La loi de X est caractérisée par f.

Non-unicité de la densité d'une *var* : Si X possède la densité f, alors elle possède d'autres densités. En effet, si g est est une fonction égale à f sauf en quelques points alors g est aussi une densité de X.

Calculs usuels :

$\mathbb{P}(X = a)$	$\mathbb{P}(X \leq b)$	$\mathbb{P}(X \geq a)$	$\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$
0	$\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$	$\displaystyle\int_{a}^{\infty} f(x)dx$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X = a) = 0$ (en cela, le comportement d'une *var* à densité diffère radicalement de celui d'une *var* discrète). On peut donc remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes : $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \mathbb{P}(a < X < b) \ldots$

Fonction de répartition :

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction de répartition caractérise la loi de X ; pour tous $a \leq b$, on a

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Support : Soit F la fonction de répartition d'une *var* X de densité f. Alors $X(\Omega)$ est l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R};\ F(x) \in]0,1[\}$.

Si $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}$ est un intervalle ou $\mathbb{R}$ *(ce qui est souvent le cas)*, alors $X(\Omega)$ est aussi l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) \neq 0\}$.

Note : l'adhérence d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'intervalle fermé de mêmes bornes ; l'adhérence de $]a,b[$ est $[a,b]$ ...

Trois lois continues usuelles :

On adopte la notation : $X \sim \ldots \ \Leftrightarrow\ X$ suit la loi ...

Loi	uniforme	exponentielle	normale
paramètres	$(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \ a < b$	$\lambda > 0$	$\mu \in \mathbb{R},\ \ \sigma > 0$
$X \sim$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$X(\Omega)$	$[a,b]$	$[0,\infty[$	$\mathbb{R}$
$f(x)$	$\dfrac{1}{b-a}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Caractérisation d'une fonction de répartition :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) \in [0,1]$,
- F est continue sur $\mathbb{R}$,
- F est croissante,
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$.

Densité et fonction de répartition : Soit X une *var* à densité de fonction de répartition F. Alors une densité f de X est donnée par

$$f(x) = F'(x)$$

pour tout $x \in X(\Omega)$ sauf les points où F n'est pas dérivable, et par ce qu'on veut ailleurs (du moment que f reste une densité).

Égalité en loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ $F_X(x) = F_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $f_X(x) = f_Y(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points $\Leftrightarrow$ $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

***Var* symétrique :** X est symétrique $\Leftrightarrow$ X et $-X$ suivent la même loi.

X possède une densité f paire $\Rightarrow$ X est symétrique.

Exemple : une var X suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, i.e. de densité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$, est symétrique car f est paire.

Propriétés d'une *var* symétrique : $\mathbb{P}(X \leq -x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$, $x \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\mathbb{P}(X \leq x) - 1$, $x \geq 0$.

Espérance :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

L'espérance de X est la valeur moyenne de X.

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx.$$

Propriétés élémentaires :

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(a) = a$,
- $X(\Omega) \subseteq [0, \infty[\;\Rightarrow\; \mathbb{E}(X) \geq 0$,
- $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$,
- $\mathbb{E}(aX^2 + bX + c) = a\mathbb{E}(X^2) + b\mathbb{E}(X) + c$.

Moment d'ordre r :

$$\mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx.$$

Espérance et *var* symétrique : X est symétrique $\Rightarrow$ pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ impaire (si existence) $\mathbb{E}(g(X)) = 0$.

Variance :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2).$$

La variance de X mesure la dispersion des valeurs de X autour de son espérance.

Propriétés élémentaires :

- $\mathbb{V}(X) \geq 0$,
- $\mathbb{V}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est une *var* constante,
- $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Formule de König-Huyghens :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Tout comme la variance, l'écart-type de X mesure la dispersion des valeurs de X autour de son espérance. Il a l'avantage d'être de la même unité que X contrairement à la variance qui élève l'unité au carré.

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$\mathbb{E}(X)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	μ
$\mathbb{V}(X)$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	σ^2
$\sigma(X)$	$\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\lambda}$	σ

Inégalité de Markov : Pour tout $\epsilon > 0$ et toute fonction $h : \mathbb{R} \to]0, \infty[$ croissante, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(h(|X|))}{h(\epsilon)}.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\epsilon^2}.$$

Transformée de Laplace de X :

$$L(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx.$$

Propriétés de la transformée de Laplace :

$$\mathbb{E}(X) = L'(0), \qquad \mathbb{V}(X) = L''(0) - (L'(0))^2.$$

Transformée de Laplace et loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $L_X(t) = L_Y(t)$.

Fonction caractéristique de X :

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Exemples :

$X \sim$	$\mathcal{U}([a,b])$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
$\varphi(t)$	$\dfrac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - it}$	$e^{it\mu - \sigma^2 \frac{t^2}{2}}$

Fonction caractéristique et densité : Soient X une *var* de densité f et φ sa fonction caractéristique. Alors on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-itx} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Fonction caractéristique et loi : X et Y suivent la même loi $\Leftrightarrow$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$.

13 Lois continues usuelles

Loi uniforme (continue) : X suit la loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [a,b]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Loi triangulaire (continue) : X suit la loi triangulaire $\mathcal{T}_{riang}(a)$, $a > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [-a,a]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}(a - |x|) & \text{si } x \in [-a,a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{a^2}{6}.$$

Loi parabolique : X suit la loi parabolique $\mathcal{P}_{arabol}(a)$, $a > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [-a,a]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4a^3}(a^2 - x^2) & \text{si } x \in [-a,a], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{a^2}{5}.$$

Loi bêta : X suit la loi bêta $B(r,s)$, $(r,s) \in]0,\infty[^2 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0,1]$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(r,s)} x^{r-1}(1-x)^{s-1} & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta(r,s) = \int_0^1 t^{r-1}(1-t)^{s-1}dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{r+s}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{rs}{(r+s)^2(r+s+1)}.$$

Loi de Laplace : X suit la loi de Laplace $\mathcal{L}(a)$, $a > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2a} e^{-\frac{|x|}{a}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = 2a^2.$$

Loi exponentielle : X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0 \;\Leftrightarrow$

$X(\Omega) = [0,\infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Loi gamma : X suit la loi gamma $\Gamma(m,\lambda)$, $(m,\lambda) \in]0,\infty[^2 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0,\infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^m}{\Gamma(m)} x^{m-1} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma(m) = \int_0^\infty t^{m-1}e^{-t}dt$ (on a $\Gamma(m) = (m-1)!$ si $m \in \mathbb{N}^*$).

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{m}{\lambda}, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{m}{\lambda^2}.$$

Loi de Cauchy : X suit la loi de Cauchy $\mathcal{C}(\mu, \lambda)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\lambda}{\pi\left(\lambda^2 + (x-\mu)^2\right)}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance : elles n'existent pas.

Loi de Pareto : X suit la loi de Pareto $\mathcal{P}_{ar}(a, \gamma, x_0)$, $(a, \gamma) \in]0, \infty[^2$, $x_0 \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [a + x_0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\gamma}{a}\left(\dfrac{a}{x - x_0}\right)^{\gamma+1} & \text{si } x > a + x_0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\gamma a}{\gamma - 1} + x_0 \text{ si } \gamma > 1, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{\gamma a^2}{(\gamma-1)^2(\gamma-2)} \text{ si } \gamma > 2.$$

Loi normale : X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

Lorsque $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, on dit que X suit la loi normale "centrée réduite".

Loi du Chi-deux : X suit la loi du Chi-deux $\chi^2(\nu)$, $\nu > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} x^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) = \int_0^\infty t^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-t} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \nu, \qquad \mathbb{V}(X) = 2\nu.$$

Loi de Student : X suit la loi de Student $\mathcal{T}(\nu)$, $\nu > 0 \;\Leftrightarrow\; X(\Omega) = \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

où, pour tout $\alpha \in \left\{\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}\right\}$, on a $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = 0, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{\nu}{\nu - 2} \text{ si } \nu > 2.$$

Loi de Fisher : X suit la loi de Fisher $\mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$, $(\nu_1, \nu_2) \in]0, \infty[^2$:

$X(\Omega) = [0, \infty[$,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta\left(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}\right) x} \left(\dfrac{\nu_1 x}{\nu_1 x + \nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} \left(1 - \dfrac{\nu_1 x}{\nu_1 x + \nu_2}\right)^{\frac{\nu_2}{2}} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\beta(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}) = \int_0^1 t^{\frac{\nu_1}{2}-1}(1-t)^{\frac{\nu_2}{2}-1} dt$.

Espérance et variance :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \text{ si } \nu_2 > 2, \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)} \text{ si } \nu_2 > 4.$$

14 Retour sur la loi normale

Loi normale : *Rappel :* La *var* X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, si elle possède la densité :

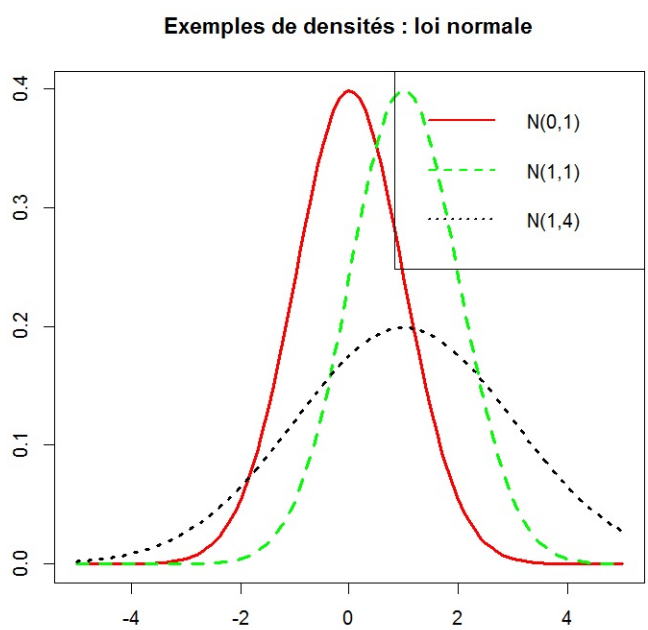
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La loi normale est particulièrement intéressante car

- elle modélise correctement de nombreuses mesures physiques pouvant prendre une infinité de valeurs (avec les décimales) : poids, tailles, durées, vitesses...
- elle est une loi limite universelle. Cela découle du théorème central limite présenté plus loin.

Graphe : Le graphe de f est symétrique par rapport à μ. Celui-ci est en forme de "cloche" plus ou moins arrondie selon les valeurs de σ. Ce graphe a

- un point maximum de coordonnées : $(x_*, y_*) = (\mu, f(\mu)) = \left(\mu, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)$,
- deux points d'inflexion de coordonnées
  $(x_0, y_0) = (\mu - \sigma, f(\mu - \sigma)) = \left(\mu - \sigma, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$ et
  $(x_1, y_1) = (\mu + \sigma, f(\mu + \sigma)) = \left(\mu + \sigma, \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}}\right)$.



Espérance, variance et écart-type : Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Alors on a

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathbb{V}(X) = \sigma^2, \qquad \sigma(X) = \sigma.$$

Ainsi, μ est la valeur moyenne de X et σ mesure la dispersion des valeurs de X autour de μ.

Loi normale centrée réduite : La *var* X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ si elle possède la densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On a $\mathbb{E}(X) = 0$, d'où le "centrée", et $\mathbb{V}(X) = 1$, d'où le "réduite".

Comme une densité de X est paire, X est symétrique. Cela implique :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(-X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)$,
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{P}(X \leq -x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$,
- pour tout $x \geq 0$, on a $\mathbb{P}(|X| \leq x) = 2\mathbb{P}(X \leq x) - 1$,
- pour toute fonction impaire g, si existence, on a $\mathbb{E}(g(X)) = 0$.

Propriétés : Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$:

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, $X + a$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu + a, \sigma^2)$,
- pour tout $b \in \mathbb{R}$, bX suit la loi normale $\mathcal{N}(b\mu, b^2\sigma^2)$,
- la *var* $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, la transformation opérée par Z a centrée et réduite la *var* X. Cette transformation est souvent utilisée en pratique.

Moments : Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{E}(X^{2k}) = \prod_{i=1}^{k} (2i - 1), \qquad \mathbb{E}(X^{2k+1}) = 0.$$

Table de valeurs et loi normale centrée réduite : Soit X une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. La fonction de la répartition de X est

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On a $F(x) = F(y) \;\Leftrightarrow\; x = y$, et $f(x) = F'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

La fonction F ne peut pas s'écrire sous une forme analytique, sans intégrale. C'est pourquoi on utilise une table de valeurs associée donnant $F(x)$ avec $x \in [0; 3,99]$ et $x = x_1 + x_2$ (voir la table $\mathcal{N}(0,1)$ page 69).

Approximation : loi binomiale et loi normale : Soient X une *var* suivant la loi binomiale de paramètres n et p notée $\mathcal{B}(n,p)$ et Y une *var* suivant la loi normale $\mathcal{N}(np, np(1-p))$. Si $n \geq 31$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, la loi $\mathcal{B}(n,p)$ peut être approchée par $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

En outre, avec une correction de continuité,

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(X \leq k) \simeq \mathbb{P}(Y \leq k + 0,5)$,
  $\mathbb{P}(X \geq k) \simeq \mathbb{P}(Y \geq k - 0,5)$ et

$$\mathbb{P}(X = k) \simeq \mathbb{P}(k - 0,5 \leq Y \leq k + 0,5).$$

- pour tout $(k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k_1 < k_2$, on a

$$\mathbb{P}(k_1 \leq X \leq k_2) \simeq \mathbb{P}(k_1 - 0,5 \leq Y \leq k_2 + 0,5).$$

Approximation : loi de Poisson et la loi normale : Si $\lambda \geq 15$ alors la loi de Poisson de paramètre λ notée $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \lambda)$.

15 Couples de variables aléatoires réelles à densité

Densité (bidimensionnelle) : On appelle densité (bidimensionnelle) toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) \geq 0$,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1.$

Quelques règles de calculs pour les intégrales doubles :

- Les intégrales doubles vérifient les mêmes propriétés que les intégrales simples (linéarité, relation de Chasles...),
- La plupart du temps, le calcul des intégrales doubles consiste à exprimer ces intégrales en une série d'intégrales simples calculables.
- Lorsque toutes les fonctions mises en jeu sont intégrables, si le domaine d'intégration est défini en adéquation, l'ordre des intégrations n'a pas d'importance.
  En outre : $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx\right)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy\right)dx.$
  En intégrant sur $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq y \leq 1\}$, on a
  $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^y f(x, y)dx\right)dy = \int_0^1\left(\int_x^1 f(x, y)dy\right)dx.$
- *Changement de variable en coordonnées polaires :* en faisant le changement de variable : $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, avec $(r, \theta) \in]0, \infty[\times[0, 2\pi]$, on a

$$\int\int_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy = \int\int_{\mathcal{D}^*} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta,$$

  où $\mathcal{D}$ désigne un domaine défini en fonction de (x, y) et $\mathcal{D}^*$ son analogue avec (r, θ).

Couple de *var* à densité : On dit qu'un couple de *var* (X, Y) est à densité s'il existe une densité f telle que, pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathbb{P}\left((X, Y) \in \mathcal{D}\right) = \int\int_{\mathcal{D}} f(x, y)dxdy,$$

(x est associé à X et y est associé à Y).

On dit alors que (X,Y) est de densité f ou (X,Y) possède la densité f ou f est une densité de (X,Y). La loi de (X,Y) est caractérisée par f.

Propriétés élémentaires : Pour tous $a \leq b$, $c \leq d$ et toutes fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $g(x) \leq h(x)$, $x \in \mathbb{R}$, on a

- $\mathbb{P}(\{a \leq X \leq b\} \cap \{c \leq Y \leq d\}) = \displaystyle\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx \right) dy,$
- $\mathbb{P}(\{a \leq X \leq b\} \cap \{g(X) \leq Y \leq h(X)\}) = \displaystyle\int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx,$
- $\mathbb{P}(g(X) \leq Y \leq h(X)) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx.$

Fonction de répartition :

$$F(x,y) = \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

On a $F_X(x) = \lim\limits_{y\to\infty} F(x,y)$, $x \in \mathbb{R}$, et $F_Y(y) = \lim\limits_{x\to\infty} F(x,y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Support : Soit F la fonction de répartition d'un couple de *var* (X,Y) de densité f. Alors $(X,Y)(\Omega)$ est l'adhérence de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ F(x,y) \in]0,1[\}$.

Si $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) \neq 0\}$ est un domaine infini indénombrable de $\mathbb{R}^2$ "sans points ou courbes isolés" *(ce qui est souvent le cas)*, alors $(X,Y)(\Omega)$ est aussi l'adhérence de $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ f(x,y) \neq 0\}$. De plus, $X(\Omega)$ est l'adhérence de l'ensemble des x vérifiant $f(x,y) \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, et $Y(\Omega)$ est l'adhérence de l'ensemble des y vérifiant $f(x,y) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Densité et fonction de répartition : Soit (X,Y) un couple de *var* à densité de fonction de répartition F. Alors une densité f de (X,Y) est donnée par

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$$

pour tout $(x,y) \in (X,Y)(\Omega)$ sauf les points of F n'est pas différentiable, et par ce qu'on veut ailleurs (du moment que f reste une densité).

Lois marginales :

- Une densité de X est
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
- Une densité de Y est
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, \qquad y \in \mathbb{R}.$$
- Si $f(x,y) = f(y,x)$, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points, alors X et Y suivent la même loi ; une densité de Y est $f_Y(y) = f_X(y)$, $y \in \mathbb{R}$.

Indépendance : X et Y sont indépendantes $\Leftrightarrow$ (X,Y) possède la densité produit : $f_X(x)f_Y(y)$, *i.e.* $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points (impliquant $(X,Y)(\Omega) = X(\Omega) \times Y(\Omega)$) $\Leftrightarrow$
pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$ $\Leftrightarrow$ pour tous $a \leq b$, $c \leq d$,

$$\mathbb{P}\left(\{a \leq X \leq b\} \cap \{c \leq Y \leq d\}\right) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b)\mathbb{P}(c \leq Y \leq d).$$

Sur l'indépendance :

- Si $(X,Y)(\Omega)$ n'est pas un ensemble produit, i.e. on ne peut pas écrire $(X,Y)(\Omega) = I \times J$ avec $(I,J) \subseteq \mathbb{R}^2$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.
- S'il existe deux fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$f(x,y) = g(x)h(y), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} h(y)dy = 1,$$
alors X et Y sont indépendantes, une densité de X est g et une densité de Y est h.
- X et Y sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les *var* $g(X)$ et $h(Y)$ sont indépendantes.
- On dit que X et Y sont *iid* quand elles sont "indépendantes et identiquement distribuées". La mention "identiquement distribuées" signifie "suivent la même loi".
- X et Y *iid* $\Rightarrow$ pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\mathbb{P}((X,Y) \in \mathcal{D}) = \mathbb{P}((Y,X) \in \mathcal{D})$.

Loi d'un couple de *var* $(\phi(X,Y),\psi(X,Y))$:

(théorème du changement de variable) Soient (X,Y) un couple de *var* de densité $f_{(X,Y)}$, et $\phi : (X,Y)(\Omega) \to \mathbb{R}$ et $\psi : (X,Y)(\Omega) \to \mathbb{R}$ deux fonctions. On considère le couple de *var*

$$(U,V) = (\phi(X,Y),\psi(X,Y)).$$

On suppose que $g(x,y) = (\phi(x,y),\psi(x,y))$ est injective et qu'il existe deux fonctions $h : \mathbb{R}^2 \to X(\Omega)$ et $k : \mathbb{R}^2 \to Y(\Omega)$ différentiables telles que

$$\begin{cases} u = \phi(x,y), \\ v = \psi(x,y), \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = h(u,v), \\ y = k(u,v). \end{cases}$$

Soit $J(u,v)$ le jacobien associé à $(x,y) = (h(u,v),k(u,v))$ défini par le déterminant :

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial h}{\partial v}(u,v) \\ \\ \frac{\partial k}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial k}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = \frac{\partial h}{\partial u}(u,v)\frac{\partial k}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial k}{\partial u}(u,v)\frac{\partial h}{\partial v}(u,v).$$

Alors une densité de (U,V) est donnée par

$$f_{(U,V)}(u,v) = f_{(X,Y)}(h(u,v),k(u,v))|J(u,v)|, \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Densité d'une somme de deux *var* X et Y indépendantes :

(produit de convolution) Soient X une *var* de densité f_X et Y une *var* de densité f_Y. On suppose que X et Y sont indépendantes. Alors une densité de $X+Y$ est donnée par

$$f_{X+Y}(x) = (f_X * f_Y)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(x-u)du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On a aussi $f_{X+Y}(x) = (f_Y * f_X)(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Si f_X ou f_Y est bornée, alors $(f_X * f_Y)(x)$ existe.

Trois exemples fondamentaux :

$X_i \sim$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$	$\chi^2(\nu_i)$
$X_1 + X_2 \sim$	$\Gamma(2, \lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$	$\chi^2(\nu_1 + \nu_2)$

En particulier, toute *var* définie comme une combinaison linéaire de 2 *var* indépendantes suivant chacune une loi normale suit une loi normale.

Densité du produit de deux *var* X et Y indépendantes :

$$f_{XY}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(u) f_X\left(\frac{x}{u}\right) \frac{1}{|u|} du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Densité du quotient de deux *var* X et Y indépendantes :

$$f_{\frac{X}{Y}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u) f_Y\left(\frac{u}{x}\right) du, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Caractérisations de quelques lois connues :

- Loi du Chi-deux : X et Y *iid* avec $X \sim \mathcal{N}(0,1) \;\Rightarrow$

$$X^2 + Y^2 \sim \chi^2(2).$$

- Loi de Student : X et Y indépendantes avec $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \chi^2(\nu) \;\Rightarrow$

$$\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}} = \sqrt{\nu}\frac{X}{\sqrt{Y}} \sim \mathcal{T}(\nu).$$

- Loi de Fisher : X et Y indépendantes avec $X \sim \chi^2(\nu_1)$ et $Y \sim \chi^2(\nu_2) \;\Rightarrow$

$$\frac{\frac{X}{\nu_1}}{\frac{Y}{\nu_2}} = \frac{\nu_2 X}{\nu_1 Y} \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2).$$

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X,Y)) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy.$$

Méthode de la fonction muette : Soient (X, Y) et (U, V) deux couples de *var* à densité. Si, pour toute fonction continue bornée $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \mathbb{E}(g(U, V))$, alors (X, Y) et (U, V) suivent la même loi.

Linéarité de l'espérance :

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}.$$

Moments et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}(g(X)h(Y)) = \mathbb{E}(g(X))\mathbb{E}(h(Y)).$$

En particulier, on a $\mathbb{E}(X^k Y^m) = \mathbb{E}(X^k)\mathbb{E}(Y^m)$.

Covariance :

$$\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

La covariance mesure la liaison linéaire entre X et Y.

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X) & \mathbb{C}(X, Y) \\ \mathbb{C}(Y, X) & \mathbb{V}(Y) \end{pmatrix}.$$

Propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{C}(X, Y).$$

Propriétés de la covariance :

- $\mathbb{C}(X, Y) = \mathbb{C}(Y, X)$,
- $\mathbb{C}(aX + b, cY + d) = ac\mathbb{C}(X, Y)$,
- $|\mathbb{C}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$,

- $\mathbb{C}(aX + bY, cU + dV) = ac\mathbb{C}(X, U) + ad\mathbb{C}(X, V) + bc\mathbb{C}(Y, U) + bd\mathbb{C}(Y, V)$.

Covariance, variance et indépendance : X et Y indépendantes $\Rightarrow$

- $\mathbb{C}(X, Y) = 0$,
- $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

$\mathbb{C}(X, Y) = 0 \;\Rightarrow\;$ on ne peut rien dire sur l'indépendance de X et Y.

Coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbb{C}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On a $\rho(X, Y) \in]-1, 1[$. Plus $|\rho(X, Y)|$ est proche de 1, plus la liaison linéaire entre X et Y est forte.

Propriétés d'un couple de *var* défini en fonction d'un autre : Soient (X, Y) un couple de *var* d'espérance $\mu = (\mu_1, \mu_2)(= (\mathbb{E}(X), \mathbb{E}(Y)))$ et de matrice de covariance Σ, A une matrice carré 2×2 et (U, V) un couple de *var* défini par

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Alors

- l'espérance de (U, V) est μ_* tel que $\mu_*^t = A\mu^t$,
- la matrice de covariance de (U, V) est $\Sigma_* = A\Sigma A^t$.

Couple aléatoire réel gaussien (*carg*) :

- (X, Y) est un *carg* $\Leftrightarrow$ pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la *var* $aX + BY$ suit une loi normale.
- Un *carg* (X, Y) est caractérisé par une moyenne μ et de matrice de covariance Σ. La loi de (X, Y) est notée $\mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$.

Loi marginales d'un *carg* : Si (X, Y) est un *carg*, alors $X \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(X), \mathbb{V}(X))$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}(Y), \mathbb{V}(Y))$.

***Carg* et indépendance :** Si (X, Y) est un *carg* alors X et Y indépendantes $\Leftrightarrow$ $\mathbb{C}(X, Y) = 0$.

Densité et fonction caractéristique d'un *carg* : Soit $(X, Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$ avec $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ et $\det(\Sigma) > 0$.

- La densité de (X, Y) est

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\det(\Sigma)|}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_1, y-\mu_2)\Sigma^{-1}(x-\mu_1, y-\mu_2)^t}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

- La fonction caractéristique de (X, Y) est

$$\varphi(s,t) = e^{i(\mu_1,\mu_2)(s,t)^t - \frac{1}{2}(s,t)\Sigma(s,t)^t}, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Cas particulier : Soit $(X, Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$ avec $\mu = (0,0) = 0_2$ et $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, $\rho \in]-1, 1[$.

- La densité de (X, Y) est

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

- La fonction caractéristique de (X, Y) est

$$\varphi(s,t) = e^{-\frac{1}{2}(s^2+t^2+2\rho st)}, \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Système linéaire et *carg* : Soient $(a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2) \in \mathbb{R}^6$, $Z = (X, Y) \sim \mathcal{N}_2(\mu, \Sigma)$ et $W = (U, V)$ avec

$$\begin{cases} U = a_1 X + b_1 Y + c_1, \\ V = a_2 X + b_2 Y + c_2. \end{cases}$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ et $C = (c_1, c_2)$, on a

$$W^t = AZ^t + C^t.$$

Alors $W \sim \mathcal{N}_2(A\mu^t + C^t, A\Sigma A^t)$.

16 Vecteurs de variables aléatoires réelles à densité

Densité (n-dimensionnelle) : On appelle densité (n-dimensionnelle) toute fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x_1, \dots, x_n) \geq 0$,
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1.$

Vecteur de *var* à densité : On dit qu'un vecteur de *var* $(X_1, \dots, X_n)$ est à densité s'il existe une densité f, telle que, pour tout $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$, on a

$$\mathbb{P}\left((X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{D}\right) = \int \dots \int_{\mathcal{D}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

On dit alors que $(X_1, \dots, X_n)$ est de densité f ou $(X_1, \dots, X_n$ possède la densité f ou f est une densité de $(X_1, \dots, X_n)$. La loi de $(X_1, \dots, X_n)$ est caractérisée par f.

Fonction de répartition :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}\right), \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Retour sur le support : Soit F la fonction de répartition d'un vecteur de *var* $(X_1, \dots, X_n)$ à densité. On définit $(X_1, \dots, X_n)(\Omega)$ par l'adhérence de $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ F(x_1, \dots, x_n) \in]0, 1[\}$.

Densité d'une *var* composante de $(X_1, \dots, X_n)$: Une densité de X_1 est donnée par

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n, \qquad x_1 \in \mathbb{R}.$$

On définit de la même manière des densités pour d'autres *var* $X_2, \dots, X_n$.

Densité d'un vecteur de *var* composantes de $(X_1, \dots, X_n)$: Une densité de (X_1, X_2) est donnée par

$$f_{(X_1, X_2)}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_3 \dots dx_n, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

On définit de la même manière des densités d'autres vecteurs de *var*.

Indépendance mutuelle de n *var* à densité : $X_1, \ldots, X_n$ sont (mutuellement) indépendantes $\Leftrightarrow$ $(X_1, \ldots, X_n)$ possède la densité produit : $\prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$, *i.e.*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i)$$

pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ sauf, éventuellement, en un nombre fini de points (impliquant $(X_1, \ldots, X_n)(\Omega) = X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$) $\Leftrightarrow$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a $F(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) \Leftrightarrow$ pour tous $a_i \leq b_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{a_i \leq X_i \leq b_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(a_i \leq X_i \leq b_i).$$

Sur l'indépendance :

- Si $(X_1, \ldots, X_n)(\Omega)$ n'est pas un ensemble produit, alors $X_1, \ldots, X_n$ ne sont pas (mutuellement) indépendantes.
- $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, les *var* $g_1(X_1), \ldots, g_n(X_n)$ sont indépendantes.
- $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toutes fonctions $g : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^{n-(q+1)} \to \mathbb{R}$, $q \in \{2, \ldots, n-1\}$, les *var* $g(X_1, \ldots, X_q)$ et $h(X_{q+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Suite de *var* indépendantes : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de *var* indépendantes $\Leftrightarrow$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i_1, \ldots, i_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$, $X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}$ sont indépendantes.

Formule du transfert : Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{E}\left(g(X_1, \ldots, X_n)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n.$$

Espérance et indépendance : $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$ pour toute fonction $g_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n g_i(X_i)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(g_i(X_i)).$$

Quelques lois usuelles d'une somme de n *var* indépendantes :

$X_i \sim$	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\Gamma(m_i, \lambda)$	$\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$	$\chi^2(\nu_i)$
$\sum_{i=1}^n X_i \sim$	$\Gamma(n, \lambda)$	$\Gamma\left(\sum_{i=1}^n m_i, \lambda\right)$	$\mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$	$\chi^2\left(\sum_{i=1}^n \nu_i\right)$

Ainsi, toute *var* définie comme une combinaison linéaire de n *var* indépendantes suivant chacune une loi normale suit une loi normale.

Matrice de covariance :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathbb{V}(X_1) & \mathbb{C}(X_1, X_2) & \dots & \dots & \mathbb{C}(X_1, X_n) \\ \mathbb{C}(X_2, X_1) & \mathbb{V}(X_2) & \dots & \dots & \mathbb{C}(X_2, X_n) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \mathbb{C}(X_{n-1}, X_n) \\ \mathbb{C}(X_n, X_1) & \dots & \dots & \dots & \mathbb{V}(X_n) \end{pmatrix}.$$

Espérance et variance d'une somme de n *var* :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i), \quad \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2\sum_{i=2}^n \sum_{j=1}^{i-1} \mathbb{C}(X_i, X_j).$$

$X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes $\Rightarrow$

$$\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i).$$

Bilinéarité de la covariance :

$$\mathbb{C}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i, \sum_{j=1}^q b_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^q a_i b_j \mathbb{C}(X_i, Y_j).$$

Lois usuelles associées à la loi normale : Soient $X_1, \ldots, X_n$ *n var iid* suivant chacune la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2.$$

Alors on a $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \mu$ et $\mathbb{E}(S_n^2) = \sigma^2$. De plus :

var	$\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\right)$	$\dfrac{n-1}{\sigma^2}S_n^2$	$\sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{X}_n - \mu}{S_n}\right)$	$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i - \mu}{\sigma}\right)^2$
Loi	$\mathcal{N}(0,1)$	$\chi^2(n-1)$	$\mathcal{T}(n-1)$	$\chi^2(n)$

Convergence en probabilité : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers X $\Leftrightarrow$ pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0.$$

Loi faible des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Convergence en loi : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers X $\Leftrightarrow$

$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ en tout point de continuité x de F_X $\Leftrightarrow$

pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée, on a

$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$ $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Théorème central limite : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant un moment d'ordre 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(\overline{X}_n)}{\sigma(\overline{X}_n)} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_1)}{\sigma(X_1)}\right).$$

Alors la suite de *var* $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une *var* Z suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Théorème de continuité (continuous mapping theorem) :

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $X \Rightarrow$ pour toute fonction $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ continue, sauf, éventuellement, en un nombre fini de points, $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $g(X)$,
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $X \Rightarrow$ pour toute fonction $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ continue, sauf, éventuellement, en un nombre fini de points, $(g(X_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers $g(X)$.

- Convergence dans $\mathbb{L}^p$ vers $X \;\Rightarrow\;$ convergence en probabilité vers $X \;\Rightarrow\;$ convergence en loi vers X.
- Convergence en probabilité vers 0 $\;\Leftrightarrow\;$ convergence en loi vers 0.

Convergence presque sûre : $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement (ps) vers $X \;\Leftrightarrow$

$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega;\ \lim\limits_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$

Critère de convergence *ps* : Pour tout $\epsilon > 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \epsilon) < \infty \;\Rightarrow\; (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ps vers X.

Loi forte des grands nombres : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de *var iid* admettant une espérance. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors $(\overline{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ps vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Hiérarchie : Convergence $ps \;\Rightarrow\;$ convergence en probabilité $\;\Rightarrow\;$ convergence en loi. En revanche, il n'y a pas d'implication entre la convergence dans $\mathbb{L}^p$ et la convergence ps.

17 Intervalles de confiance bilatéraux

Lois : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $T \sim \mathcal{T}(\nu)$, $K \sim \chi^2(\nu)$, $\nu = n-1$. Niveau : $100(1-\alpha)\%$, $\alpha \in]0,1[$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	valeurs	i_μ
σ connu Z-IntConf	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\overline{x} - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$
σ inconnu T-IntConf	$\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq t_\alpha(\nu)) = \alpha$	$\left[\overline{x} - t_\alpha(\nu) \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + t_\alpha(\nu) \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	valeurs	i_{σ^2}
Chi-Square-IntConf	$\mathbb{P}(K \geq a_\alpha(\nu)) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\mathbb{P}(K \geq b_\alpha(\nu)) = \frac{\alpha}{2}$	$\left[\frac{n-1}{b_\alpha(\nu)} s^2,\ \frac{n-1}{a_\alpha(\nu)} s^2\right]$
$n \geq 31$ (parfois utilisé)	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\frac{2(n-1)s^2}{\left(\sqrt{2n-3} + z_\alpha\right)^2},\ \frac{2(n-1)s^2}{\left(\sqrt{2n-3} - z_\alpha\right)^2}\right]$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	valeurs	i_p
$n \geq 31$ $np_1 \geq 5$, $n(1-p_2) \geq 5$ Prop-Z-IntConf	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\overline{x} - z_\alpha \frac{\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}}{\sqrt{n-1}},\ \overline{x} + z_\alpha \frac{\sqrt{\overline{x}(1-\overline{x})}}{\sqrt{n-1}}\right] = [p_1, p_2]$
X de loi quelconque	valeurs	$i_{\mathbb{E}(X)}$
$n \geq 1000$ Z-IntConf-Lim	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$	$\left[\overline{x} - z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}\right]$

18 Tests de conformité

Lois : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $T \sim \mathcal{T}(\nu)$, $K \sim \chi^2(\nu)$, $\nu = n-1$. Risque : $100\alpha\%$, $\alpha \in]0,1[$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	H_0	H_1	Stat. test obs.	Valeurs	Rejet de H_0 si
σ connu : Z-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$z_{obs} = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$ $\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z^*_\alpha) = 2\alpha$	$\lvert z_{obs}\rvert \geq z_\alpha$ $z_{obs} \geq z^*_\alpha$ $z_{obs} \leq -z^*_\alpha$
σ inconnu : T-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$t_{obs} = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq t_\alpha(\nu)) = \alpha$ $\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq t^*_\alpha(\nu)) = 2\alpha$	$\lvert t_{obs}\rvert \geq t_\alpha(\nu)$ $t_{obs} \geq t^*_\alpha(\nu)$ $t_{obs} \leq -t^*_\alpha(\nu)$
1-Chi2-Test	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2_{obs} = \dfrac{n-1}{\sigma_0^2} s^2$	$\mathbb{P}(K \geq a_\alpha(\nu)) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ $\mathbb{P}(K \geq b_\alpha(\nu)) = \frac{\alpha}{2}$ $\mathbb{P}(K \geq b^*_\alpha(\nu)) = \alpha$ $\mathbb{P}(K \geq a^*_\alpha(\nu)) = 1 - \alpha$	$\chi^2_{obs} \notin [a_\alpha(\nu), b_\alpha(\nu)]$ $\chi^2_{obs} \geq b^*_\alpha(\nu)$ $\chi^2_{obs} \leq a^*_\alpha(\nu)$
$n \geq 31$ (parfois utilisé)	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$z_{obs} = \sqrt{\dfrac{2(n-1)}{\sigma_0^2} s^2} - \sqrt{2n-3}$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$ $\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z^*_\alpha) = 2\alpha$	$\lvert z_{obs}\rvert \geq z_\alpha$ $z_{obs} \geq z^*_\alpha$ $z_{obs} \leq -z^*_\alpha$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	H_0	H_1	Stat. test obs.	Valeurs	Rejet de H_0 si
$n \geq 31$, $np_0 \geq 5$, $n(1-p_0) \geq 5$: 1-Prop-Z-Test	$p = p_0$ $p \leq p_0$ $p \geq p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$z_{obs} = \sqrt{n}\left(\dfrac{\overline{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_\alpha) = \alpha$ $\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z^*_\alpha) = 2\alpha$	$\lvert z_{obs}\rvert \geq z_\alpha$ $z_{obs} \geq z^*_\alpha$ $z_{obs} \leq -z^*_\alpha$

19 Rappel : p-valeurs

On considère un test d'hypothèses de la forme :

$$H_0 : \text{A} \qquad \text{contre} \qquad H_1 : \text{contraire de A}$$

La p-valeur est la probabilité exacte (ou presque) de se tromper en rejetant H_0.

Ainsi, le plus petit risque de se tromper en rejetant H_0 est ($100\times$ p-valeur)%.

Degré de significativité : Le rejet de H_0 sera :

- significatif si p-valeur $\in]0.01, 0.05]$, symbolisé par $*$,
- très significatif si p-valeur $\in]0.001, 0.01]$, symbolisé par $**$,
- hautement significatif si p-valeur < 0.001, symbolisé par $***$,
- (presque significatif si p-valeur $\in]0.05, 0.1]$, symbolisé par . (un point)).

Il y a non rejet de H_0 si p-valeur > 0.05.

20 Tests de conformité (p-valeurs)

Lois : $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $T \sim \mathcal{T}(\nu)$, $K \sim \chi^2(\nu)$, $\nu = n-1$. Rejet de H_0 au risque $100\alpha\%$ $\Leftrightarrow$ p-valeur $\leq \alpha$.

$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	H_0	H_1	Stat. test obs.	p-valeurs
σ connu : Z-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$z_{obs} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq \lvert z_{obs}\rvert)$ $\mathbb{P}(Z \geq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_{obs})\text{ si } z_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(Z \leq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq -z_{obs})\text{ si } z_{obs} < 0\right)$
σ inconnu : T-Test	$\mu = \mu_0$ $\mu \leq \mu_0$ $\mu \geq \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu < \mu_0$	$t_{obs} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{x} - \mu_0}{s}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq \lvert t_{obs}\rvert)$ $\mathbb{P}(T \geq t_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq t_{obs})\text{ si } t_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(T \leq t_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert T\rvert \geq -t_{obs})\text{ si } t_{obs} < 0\right)$
1-Chi2-Test	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2_{obs} = \frac{n-1}{\sigma_0^2}s^2$	$2\min\left(\mathbb{P}(K \geq \chi^2_{obs}),\ \mathbb{P}(K \leq \chi^2_{obs})\right)$ $\mathbb{P}(K \geq \chi^2_{obs})$ $\mathbb{P}(K \leq \chi^2_{obs})$
$n \geq 31$ (parfois utilisé)	$\sigma^2 = \sigma_0^2$ $\sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 < \sigma_0^2$	$z_{obs} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{\sigma_0^2}s^2} - \sqrt{2n-3}$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq \lvert z_{obs}\rvert)$ $\mathbb{P}(Z \geq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_{obs})\text{ si } z_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(Z \leq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq -z_{obs})\text{ si } z_{obs} < 0\right)$
$X \sim \mathcal{B}(p)$	H_0	H_1	stat. test obs. et *var*	p-valeurs
$n \geq 31$, $np_0 \geq 5$, $n(1-p_0) \geq 5$: 1-Prop-Z-Test	$p = p_0$ $p \leq p_0$ $p \geq p_0$	$p \neq p_0$ $p > p_0$ $p < p_0$	$z_{obs} = \sqrt{n}\left(\frac{\overline{x} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\right)$	$\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq \lvert z_{obs}\rvert)$ $\mathbb{P}(Z \geq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq z_{obs})\text{ si } z_{obs} > 0\right)$ $\mathbb{P}(Z \leq z_{obs})$ $\left(= \frac{1}{2}\mathbb{P}(\lvert Z\rvert \geq -z_{obs})\text{ si } z_{obs} < 0\right)$

(Table 1) Loi normale 1

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table ci-dessous donne, pour un α choisi, la valeur z_α telle que $\mathbb{P}(|Z| \geq z_\alpha) = \alpha$.

α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311
0,20	1,282	1,254	1,227	1,200	1,175	1,150	1,126	1,103	1,080	1,058
0,30	1,036	1,015	0,994	0,974	0,954	0,935	0,915	0,896	0,878	0,860
0,40	0,842	0,824	0,806	0,789	0,772	0,755	0,739	0,722	0,706	0,690
0,50	0,674	0,659	0,643	0,628	0,613	0,598	0,583	0,568	0,553	0,539
0,60	0,524	0,510	0,496	0,482	0,468	0,454	0,440	0,426	0,412	0,399
0,70	0,385	0,372	0,358	0,345	0,332	0,319	0,305	0,292	0,279	0,266
0,80	0,253	0,240	0,228	0,215	0,202	0,189	0,176	0,164	0,151	0,138
0,90	0,126	0,113	0,100	0,088	0,075	0,063	0,050	0,038	0,025	0,013

(Table 2) Loi normale 2

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table de valeurs ci-dessous donne les valeurs de $F(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$, avec $x \in [0; 3,99]$ et $x = x_1 + x_2$.

x_1 \ x_2	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

(Table 3) Loi normale 3

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table ci-dessous donne, pour un z choisi, la valeur α telle que $\mathbb{P}(|Z| \geq z) = \alpha$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	1,00000	0,99202	0,98404	0,97607	0,96809	0,96012	0,95216	0,94419	0,93624	0,92829
0,10	0,92034	0,91241	0,90448	0,89657	0,88866	0,88076	0,87288	0,86501	0,85715	0,84931
0,20	0,84148	0,83367	0,82587	0,81809	0,81033	0,80259	0,79486	0,78716	0,77948	0,77182
0,30	0,76418	0,75656	0,74897	0,74140	0,73386	0,72634	0,71885	0,71138	0,70395	0,69654
0,40	0,68916	0,68181	0,67449	0,66720	0,65994	0,65271	0,64552	0,63836	0,63123	0,62413
0,50	0,61708	0,61005	0,60306	0,59611	0,58920	0,58232	0,57548	0,56868	0,56191	0,55519
0,60	0,54851	0,54186	0,53526	0,52869	0,52217	0,51569	0,50925	0,50286	0,49650	0,49019
0,70	0,48393	0,47770	0,47152	0,46539	0,45930	0,45325	0,44725	0,44130	0,43539	0,42953
0,80	0,42371	0,41794	0,41222	0,40654	0,40091	0,39533	0,38979	0,38430	0,37886	0,37347
0,90	0,36812	0,36282	0,35757	0,35237	0,34722	0,34211	0,33706	0,33205	0,32709	0,32217
1,00	0,31731	0,31250	0,30773	0,30301	0,29834	0,29372	0,28914	0,28462	0,28014	0,27571
1,10	0,27133	0,26700	0,26271	0,25848	0,25429	0,25014	0,24605	0,24200	0,23800	0,23405
1,20	0,23014	0,22628	0,22246	0,21870	0,21498	0,21130	0,20767	0,20408	0,20055	0,19705
1,30	0,19360	0,19020	0,18684	0,18352	0,18025	0,17702	0,17383	0,17069	0,16759	0,16453
1,40	0,16151	0,15854	0,15561	0,15272	0,14987	0,14706	0,14429	0,14156	0,13887	0,13622
1,50	0,13361	0,13104	0,12851	0,12602	0,12356	0,12114	0,11876	0,11642	0,11411	0,11183
1,60	0,10960	0,10740	0,10523	0,10310	0,10101	0,09894	0,09691	0,09492	0,09296	0,09103
1,70	0,08913	0,08727	0,08543	0,08363	0,08186	0,08012	0,07841	0,07673	0,07508	0,07345
1,80	0,07186	0,07030	0,06876	0,06725	0,06577	0,06431	0,06289	0,06148	0,06011	0,05876
1,90	0,05743	0,05613	0,05486	0,05361	0,05238	0,05118	0,05000	0,04884	0,04770	0,04659
2,00	0,04550	0,04443	0,04338	0,04236	0,04135	0,04036	0,03940	0,03845	0,03753	0,03662
2,10	0,03573	0,03486	0,03401	0,03317	0,03235	0,03156	0,03077	0,03001	0,02926	0,02852
2,20	0,02781	0,02711	0,02642	0,02575	0,02509	0,02445	0,02382	0,02321	0,02261	0,02202
2,30	0,02145	0,02089	0,02034	0,01981	0,01928	0,01877	0,01827	0,01779	0,01731	0,01685
2,40	0,01640	0,01595	0,01552	0,01510	0,01469	0,01429	0,01389	0,01351	0,01314	0,01277
2,50	0,01242	0,01207	0,01174	0,01141	0,01109	0,01077	0,01047	0,01017	0,00988	0,00960
2,60	0,00932	0,00905	0,00879	0,00854	0,00829	0,00805	0,00781	0,00759	0,00736	0,00715
2,70	0,00693	0,00673	0,00653	0,00633	0,00614	0,00596	0,00578	0,00561	0,00544	0,00527
2,80	0,00511	0,00495	0,00480	0,00465	0,00451	0,00437	0,00424	0,00410	0,00398	0,00385
2,90	0,00373	0,00361	0,00350	0,00339	0,00328	0,00318	0,00308	0,00298	0,00288	0,00279
3,00	0,00270	0,00261	0,00253	0,00245	0,00237	0,00229	0,00221	0,00214	0,00207	0,00200
3,10	0,00194	0,00187	0,00181	0,00175	0,00169	0,00163	0,00158	0,00152	0,00147	0,00142
3,20	0,00137	0,00133	0,00128	0,00124	0,00120	0,00115	0,00111	0,00108	0,00104	0,00100
3,30	0,00097	0,00093	0,00090	0,00087	0,00084	0,00081	0,00078	0,00075	0,00072	0,00070
3,40	0,00067	0,00065	0,00063	0,00060	0,00058	0,00056	0,00054	0,00052	0,00050	0,00048
3,50	0,00047	0,00045	0,00043	0,00042	0,00040	0,00039	0,00037	0,00036	0,00034	0,00033
3,60	0,00032	0,00031	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022
3,70	0,00022	0,00021	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015
3,80	0,00014	0,00014	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010
3,90	0,00010	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00007
4,00	0,00006	0,00006	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004

(Table 4) Loi de Student à ν degrés de liberté

Soit $T \sim \mathcal{T}(\nu)$. La table ci-dessous donne, pour un α et un ν choisis, la valeur $t_\alpha(\nu)$ telle que $\mathbb{P}(|T| \geq t_\alpha(\nu)) = \alpha$.

ν \ α	0,90	0,50	0,30	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	0,158	1,000	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,142	0,816	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,137	0,765	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	0,134	0,741	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,132	0,727	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	0,131	0,718	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,130	0,711	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	0,130	0,706	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,129	0,703	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,129	0,700	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	0,129	0,697	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,128	0,695	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	0,128	0,694	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,128	0,692	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,128	0,691	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	0,128	0,690	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,128	0,689	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,127	0,688	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,127	0,688	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	0,127	0,687	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	0,127	0,686	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,127	0,686	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,127	0,685	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,127	0,685	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,127	0,684	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,127	0,684	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,127	0,684	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,127	0,683	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,127	0,683	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,127	0,683	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646

(Table 5) Loi du chi-deux à ν degrés de liberté

Soit $K \sim \chi^2(\nu)$. La table ci-dessous donne, pour un α et un ν choisis, la valeur $k_\alpha(\nu)$ telle que $\mathbb{P}(K \geq k_\alpha(\nu)) = \alpha$.

ν \ α	0,99	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,01	0,001
1	0,0002	0,001	0,004	0,016	2,71	3,84	5,02	6,63	10,83
2	0,02	0,05	0,10	0,21	4,61	5,99	7,38	9,21	13,82
3	0,11	0,22	0,35	0,58	6,25	7,81	9,35	11,34	16,27
4	0,30	0,48	0,71	1,06	7,78	9,49	11,14	13,28	18,47
5	0,55	0,83	1,15	1,61	9,24	11,07	12,83	15,09	20,51
6	0,87	1,24	1,64	2,20	10,64	12,59	14,45	16,81	22,46
7	1,24	1,69	2,17	2,83	12,02	14,07	16,01	18,48	24,32
8	1,65	2,18	2,73	3,49	13,36	15,51	17,53	20,09	26,12
9	2,09	2,70	3,33	4,17	14,68	16,92	19,02	21,67	27,88
10	2,56	3,25	3,94	4,87	15,99	18,31	20,48	23,21	29,59
11	3,05	3,82	4,57	5,58	17,28	19,68	21,92	24,73	31,26
12	3,57	4,40	5,23	6,30	18,55	21,03	23,34	26,22	32,91
13	4,11	5,01	5,89	7,04	19,81	22,36	24,74	27,69	34,53
14	4,66	5,63	6,57	7,79	21,06	23,68	26,12	29,14	36,12
15	5,23	6,26	7,26	8,55	22,31	25,00	27,49	30,58	37,70
16	5,81	6,91	7,96	9,31	23,54	26,30	28,85	32,00	39,25
17	6,41	7,56	8,67	10,09	24,77	27,59	30,19	33,41	40,79
18	7,01	8,23	9,39	10,86	25,99	28,87	31,53	34,81	42,31
19	7,63	8,91	10,12	11,65	27,20	30,14	32,85	36,19	43,82
20	8,26	9,59	10,85	12,44	28,41	31,41	34,17	37,57	45,31
21	8,90	10,28	11,59	13,24	29,62	32,67	35,48	38,93	46,80
22	9,54	10,98	12,34	14,04	30,81	33,92	36,78	40,29	48,27
23	10,20	11,69	13,09	14,85	32,01	35,17	38,08	41,64	49,73
24	10,86	12,40	13,85	15,66	33,20	36,42	39,36	42,98	51,18
25	11,52	13,12	14,61	16,47	34,38	37,65	40,65	44,31	52,62
26	12,20	13,84	15,38	17,29	35,56	38,89	41,92	45,64	54,05
27	12,88	14,57	16,15	18,11	36,74	40,11	43,19	46,96	55,48
28	13,56	15,31	16,93	18,94	37,92	41,34	44,46	48,28	56,89
29	14,26	16,05	17,71	19,77	39,09	42,56	45,72	49,59	58,30
30	14,95	16,79	18,49	20,60	40,26	43,77	46,98	50,89	59,70

(Table 6) Loi de Fisher à (ν_1, ν_2) degrés de liberté ($\alpha = 0,025$)

Soit $F \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$. La table ci-dessous donne, pour un α, un ν_1 et un ν_2 choisis, la valeur $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ telle que $\mathbb{P}(F \geq f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha = 0,025$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
1	648	800	864	900	922	937	957	969	985	993	1001
2	38,5	39,0	39,2	39,2	39,3	39,3	39,4	39,4	39,4	39,4	39,5
3	17,4	16,0	15,4	15,1	14,9	14,7	14,5	14,4	14,3	14,2	14,1
4	12,2	10,6	9,98	9,60	9,36	9,20	8,98	8,84	8,66	8,56	8,46
5	10,0	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,76	6,62	6,43	6,33	6,23
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,60	5,46	5,27	5,17	5,07
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,90	4,76	4,57	4,47	4,36
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,43	4,30	4,10	4,00	3,89
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,10	3,96	3,77	3,67	3,56
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,85	3,72	3,52	3,42	3,31
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,66	3,53	3,33	3,23	3,12
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,51	3,37	3,18	3,07	2,96
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,39	3,25	3,05	2,95	2,84
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,29	3,15	2,95	2,84	2,73
15	6,20	4,76	4,15	3,80	3,58	3,41	3,20	3,06	2,86	2,76	2,64
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,12	2,99	2,79	2,68	2,57
17	6,04	4,32	4,01	3,66	3,44	3,28	3,06	2,92	2,72	2,62	2,50
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,01	2,87	2,67	2,56	2,44
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	2,96	2,82	2,62	2,51	2,39
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	2,91	2,77	2,57	2,46	2,35
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,84	2,70	2,50	2,39	2,27
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,78	2,64	2,44	2,33	2,21
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,73	2,59	2,39	2,28	2,16
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,69	2,55	2,34	2,23	2,11
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,65	2,51	2,31	2,20	2,07
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,53	2,39	2,18	2,07	1,94
50	5,34	3,98	3,39	3,06	2,83	2,67	2,46	2,32	2,11	1,99	1,87
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,41	2,27	2,06	1,94	1,82
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,36	2,21	2,00	1,88	1,75
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,32	2,18	1,97	1,85	1,71

(Table 7) Loi de Fisher à (ν_1, ν_2) degrés de liberté $(\alpha = 0,05)$

Soit $F \sim \mathcal{F}(\nu_1, \nu_2)$. La table ci-dessous donne, pour un α, un ν_1 et un ν_2 choisis, la valeur $f_\alpha(\nu_1, \nu_2)$ telle que $\mathbb{P}(F \geq f_\alpha(\nu_1, \nu_2)) = \alpha = 0,05$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30
1	161	300	216	225	230	234	239	242	246	248	250
2	18,5	19	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,96	5,86	5,80	5,75
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	2,95	2,85	2,72	2,65	2,57
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,75	2,62	2,54	2,47
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,77	2,67	2,53	2,46	2,38
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,70	2,60	2,46	2,39	2,31
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,59	2,49	2,35	2,28	2,19
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,45	2,31	2,23	2,15
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,51	2,41	2,27	2,19	2,11
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,48	2,38	2,23	2,16	2,07
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,40	2,30	2,15	2,07	1,98
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,36	2,25	2,11	2,03	1,94
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,32	2,22	2,07	1,99	1,90
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,29	2,19	2,04	1,96	1,87
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,13	2,03	1,87	1,78	1,69
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,06	1,95	1,79	1,70	1,60
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,03	1,93	1,77	1,68	1,57