



**HAL**  
open science

# Introduction à l'analyse mathématique des équations de Maxwell en régime transitoire

Patrick Joly

► **To cite this version:**

Patrick Joly. Introduction à l'analyse mathématique des équations de Maxwell en régime transitoire. École d'ingénieur. France. 1995. cel-01529234

**HAL Id: cel-01529234**

**<https://cel.hal.science/cel-01529234>**

Submitted on 30 May 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

INTRODUCTION Á L'ANALYSE MATHÉMATIQUE DES  
EQUATIONS DE MAXWELL EN RÉGIME TRANSITOIRE

Patrick JOLY

ANNÉE 1994-95

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Equations de Maxwell et équation des ondes</b>	<b>3</b>
1.1	Présentation des équations de Maxwell . . . . .	3
1.2	Propriétés qualitatives des solutions . . . . .	8
1.3	Lien entre les équations de Maxwell et l'équation des ondes . . . . .	12
1.3.1	Formulation des équations de Maxwell sous forme d'un système du second ordre . . . . .	12
1.3.2	Le cas des équations de Maxwell dans le vide . . . . .	13
1.3.3	Le cas des équations de Maxwell bidimensionnelles . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Etude de l'équation des ondes scalaire en régime transitoire</b>	<b>19</b>
2.1	Le problème modèle . . . . .	19
2.2	Le théorème de Hille-Yosida . . . . .	20
2.3	Existence et unicité pour le problème modèle : le cas des solutions fortes . . . . .	21
2.4	Identité de l'énergie - Estimations à priori . . . . .	25
2.5	Existence et unicité pour le problème modèle : le cas des solutions faibles . . . . .	28
2.6	Résultats de régularité - Continuité par rapport aux données . . . . .	31
2.7	Propagation à vitesse finie . . . . .	34
2.8	L'équation des ondes en dimension 1, formule de D'Alembert . . . . .	39
2.9	Les solutions dans tout l'espace homogène - Notion de fonction de Green . . . . .	43
2.10	Calcul de la solution fondamentale de l'équation des ondes en dimensions 2 et 3 . . . . .	46
2.10.1	Calcul de la solution fondamentale en dimension 3 . . . . .	46
2.10.2	Calcul de la solution élémentaire de l'équation des ondes en dimension 2 . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Les équations de Maxwell en régime transitoire</b>	<b>61</b>
3.1	Position du problème de propagation dans tout l'espace . . . . .	61
3.2	Existence et unicité de solutions fortes pour (3.2) . . . . .	62
3.3	Identité de l'énergie - Continuité de la solution par rapport aux données - Solutions faibles . . . . .	66
3.4	Continuité de la solution par rapport aux coefficients $\varepsilon$ et $\mu$ - Résultats de régularité . . . . .	69
3.5	Propagation à vitesse finie . . . . .	70
<b>A</b>	<b>Le théorème de Hille Yosida</b>	<b>75</b>



# Chapitre 1

## Equations de Maxwell et équation des ondes

**Avertissement** : Dans ce chapitre nous ne prétendons pas à la rigueur mathématique. Il s'agit surtout d'introduire les modèles mathématiques, que nous étudierons dans la suite du cours, à partir des équations de base. L'objet de ce chapitre est aussi d'établir, au moins formellement, le lien étroit existant entre les équations de Maxwell et l'équation des ondes. Ce préambule justifiera en grande partie le fait que nous centrons dans la suite la part la plus grande de nos études mathématiques sur le modèle de l'équation des ondes scalaire. En étudiant cette équation on aborde tous les phénomènes qualitatifs que l'on rencontrerait en étudiant directement les équations de Maxwell tout en évitant les difficultés techniques inhérentes à ces équations et qu'il nous serait impossible - faute de temps - de traiter dans le cadre de ce seul cours.

### 1.1 Présentation des équations de Maxwell

Un champ électromagnétique dans un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$  est décrit par un quadruple champ de vecteurs :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(x, t) \quad : \text{champ électrique} \\ \vec{H}(x, t) \quad : \text{champ magnétique} \\ \vec{D}(x, t) \quad : \text{induction électrique} \\ \vec{B}(x, t) \quad : \text{induction magnétique} \end{array} \right.$$

Dans ce qui précède,  $x$  désigne le point courant de  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  et  $t \geq 0$  désigne le temps. Ces champs de vecteurs seront reliés à :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(x, t) \quad : \text{densité de charge électrique} \\ \vec{j}(x, t) \quad : \text{densité de courant} \end{array} \right.$$

Les variations en espace et en temps de ces diverses quantités sont régies par les équations de Maxwell :

$$(1.3) \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \text{rot } \vec{E} = 0$$

$$(1.4) \quad \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \text{rot } \vec{H} + \vec{j} = 0$$

$$(1.5) \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

$$(1.6) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

On notera que les densités  $\rho$  et  $\vec{j}$  sont alors nécessairement reliées par la loi de conservation de la charge :

$$(1.7) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

(Prendre la divergence de (1.4), dériver (1.5) par rapport au temps et ajouter membre à membre les deux équations obtenues)

Les équations (1.3) à (1.7) ne suffisent pas à caractériser le champ électromagnétique. Il convient de :

(i) décrire les lois de comportement du matériau qui vont permettre de relier les champs  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  d'une part, les champs  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  d'autre part.

(ii) décrire les propriétés de conduction du matériau qui vont induire une relation entre la densité de courant  $\vec{j}$  et le champ électrique  $\vec{E}$ .

**Remarque 1 :**

*Il existe des matériaux où les 4 champs ( $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ ) sont couplés par la loi de comportement (par exemple le couple ( $\vec{B}$ ,  $\vec{D}$ ) est déterminé à partir du couple ( $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$ )). De tels matériaux sont appelés chiraux et bi-anisotropes. Nous ne les aborderons pas dans ce cours.*

**Lois de comportement dans les matériaux diélectriques**

Nous nous contenterons ici de décrire les lois de comportement des matériaux les plus simples, à savoir les lois des matériaux linéaires isotropes sans perte qui obéissent aux principes suivants :

1. la loi reliant  $\vec{D}$  (resp.  $\vec{B}$ ) à  $\vec{E}$  (resp.  $\vec{H}$ ) est locale en espace et en temps :  $\vec{D}(x, t)$  ne dépend que de  $\vec{E}(x, t)$  (mais pas de  $\vec{E}(y, s)$  pour  $y \neq x$  et  $s \neq t$ ).

2. la loi reliant  $\vec{D}$  à  $\vec{E}$  est indépendante de la direction de  $\vec{D}$  : c'est une hypothèse d'isotropie du milieu.
3. la loi reliant  $\vec{D}$  à  $\vec{E}$  est linéaire : cette hypothèse est toujours justifiée quand on considère des champs d'intensité suffisamment faible (on peut alors remplacer une loi "quelconque" par son développement de Taylor à l'ordre 1).

Ces considérations entraînent que  $\vec{D}$ , respectivement  $\vec{B}$ , est proportionnel à  $\vec{E}$ , respectivement  $\vec{H}$ . On introduit alors deux fonctions scalaires  $\varepsilon(x)$  et  $\mu(x)$  telles que l'on ait en tout point et à tout instant :

$$(1.8) \quad \begin{cases} \vec{D}(x, t) = \varepsilon(x) \vec{E}(x, t) \\ \vec{B}(x, t) = \mu(x) \vec{H}(x, t) \end{cases}$$

où par définition :

$$\begin{cases} \bullet \varepsilon(x) & \text{est la permittivité diélectrique du milieu} \\ \bullet \mu(x) & \text{est la perméabilité magnétique du milieu} \end{cases}$$

Pour des raisons énergétiques, les quantités  $\varepsilon(x)$  et  $\mu(x)$  sont des quantités strictement positives. La dépendance en  $x$  de ces coefficients caractérise une éventuelle hétérogénéité du milieu de propagation. Lorsque  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont constants, on dit que le milieu est homogène. Le vide est un milieu homogène particulier. Dans ce cas on a :

$$(1.9) \quad \begin{cases} \varepsilon(x) = \varepsilon_0 = (36\pi 10^9)^{-1} \\ \mu(x) = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \end{cases}$$

La vitesse de propagation  $c_0$  des ondes dans le vide est donnée par :

$$(1.10) \quad \varepsilon_0 \mu_0 c_0^2 = 1$$

ce qui donne numériquement la valeur bien connue pour la vitesse de la lumière :

$$(1.11) \quad c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Un milieu quelconque est souvent représenté "relativement" au vide. Ainsi on pose :

$$(1.12) \quad \begin{cases} \varepsilon(x) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(x) \\ \mu(x) = \mu_0 \mu_r(x) \end{cases}$$

où par définition :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \varepsilon_r(x) \text{ est la permittivité diélectrique relative} \\ \bullet \mu_r(x) \text{ est la perméabilité magnétique relative} \end{array} \right.$$

à partir de quoi on définit l'indice du milieu (par rapport au vide) par :

$$(1.13) \quad n(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon(x)\mu(x)}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r(x)\mu_r(x)}$$

De la même façon que l'on a défini en (1.10) la vitesse de propagation des ondes dans le vide, on peut définir en tout point  $x$  la vitesse de propagation locale des ondes électromagnétiques dans un matériau par :

$$(1.14) \quad \varepsilon(x)\mu(x)c(x)^2 = 1$$

Il est alors facile de voir que  $c(x)$  est liée à la vitesse  $c_0$  dans le vide par :

$$(1.15) \quad c(x) = \frac{c_0}{n(x)}$$

Ce qui montre que plus un milieu a un indice élevé, plus les ondes s'y propagent lentement.

### Remarque 2 :

- *Le plus souvent, la localité en espace des lois de comportement est plus que raisonnable. En revanche, le caractère local en temps tombe en défaut pour certains matériaux dits "à mémoire" : l'introduction électrique  $D(x, t)$  dépend non seulement de  $\vec{E}(x, t)$  mais aussi de  $\vec{E}(x, s)$  pour tout  $s \leq t$  (on satisfait toujours un tel principe - dit de causalité - qui exprime que seuls les instants antérieurs interviennent). De façon plus précise, une loi de proportionnalité du type (1.8) est toujours valable mais dans le domaine fréquentiel, c'est à dire pour les transformées de Fourier en temps des champs  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$ . La permittivité diélectrique  $\varepsilon$  est alors une fonction de la fréquence, à valeurs complexes. Dans le domaine temps cela se traduit par le fait que  $\vec{D}$  se déduit de  $\vec{E}$  par un produit de convolution avec un noyau causal (i.e. nul pour les temps négatifs).*
- *Il existe bien entendu des matériaux linéaires dans lesquels certaines directions de l'espace sont privilégiées. De tels matériaux sont dits anisotropes. Les lois (1.8) restent valables à condition d'admettre que  $\varepsilon(x)$  et  $\mu(x)$  deviennent des tenseurs symétriques définis positifs.*

### Modélisation des propriétés de conductivité

Il convient en général de diviser la densité de courant  $\vec{j}$  en deux parties :

$$(1.16) \quad \vec{j}(x, t) = \vec{j}_s(x, t) + \vec{j}_c(x, t)$$



où  $\vec{j}_s$  est un courant source, qui dans la pratique sera une donnée des problèmes que l'on aura à résoudre, courant imposé de façon "extérieure" et où  $\vec{j}_c$  est le courant de conduction, dû aux mouvements des électrons libres dans le matériau.

C'est la caractérisation de  $\vec{j}_c$  qui fait intervenir les propriétés intrinsèques du matériau. Le plus souvent,  $\vec{j}_c$  est relié au champ électrique  $\vec{E}$  par la loi d'Ohm :

$$(1.17) \quad \vec{j}_c(x, t) = \sigma(x)\vec{E}(x, t)$$

où, dans un milieu isotrope,  $\sigma(x)$  est une quantité scalaire et positive appelée conductivité du matériau. Lorsque  $\sigma = 0$ , le milieu est non conducteur. C'est par exemple le cas du vide et c'est le cas des milieux que nous considérerons dans ce cours. En général  $\sigma > 0$  est synonyme de phénomènes d'absorption : une onde qui se propage dans un milieu conducteur est atténuée au cours de sa propagation. D'un point de vue plus purement mathématique - point de vue que nous adopterons dans ce cours - la présence de conductivité a tendance à rendre les problèmes plus faciles à résoudre. En d'autres termes, en traitant le cas  $\sigma = 0$ , on traite le cas "le plus difficile".

### Réécriture du modèle mathématique en tenant compte des propriétés du matériau

On peut maintenant écrire un système d'équations où seuls vont intervenir les champs électrique et magnétique  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ . Ce modèle se compose essentiellement de deux équations d'évolution du premier ordre, tirées de (1.3) :

$$(1.18) \quad \begin{cases} \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E} - \text{rot } \vec{H} + \vec{j}_s = 0 \end{cases}$$

auxquelles on peut adjoindre les deux équations stationnaires :

$$(1.19) \quad \begin{cases} \text{div } (\varepsilon \vec{E}) = \rho \\ \text{div } (\mu \vec{H}) = 0 \end{cases}$$

Le "on peut" se justifie dans la mesure où les équations (1.19) peuvent être considérées comme redondantes :

- l'équation  $\rho = \text{div } (\varepsilon \vec{E})$  peut être considérée comme définissant la densité de charge électrique  $\rho(x, t)$
- l'équation  $\text{div } \vec{B} = 0$  est une conséquence, à une dérivation par rapport au temps près, de la première équation de (1.18).

Nous verrons du reste que, mathématiquement, les seules équations d'évolution (1.18) suffisent à déterminer de façon unique la solution  $(\vec{E}, \vec{H})$  pourvu qu'on leur ait adjoint, afin de

fermer le modèle mathématique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{--des conditions initiales en } t = 0 \\ \text{--des conditions aux limites sur } \Gamma = \partial\Omega \end{array} \right.$$

Il convient également de préciser dans quel cadre fonctionnel (il s'agit là d'un point de vue plus purement mathématique), il convient de chercher la solution. Pour être cohérent avec la physique il faut à tout le moins se limiter aux solutions d'énergie finie c'est à dire aux solutions qui satisfont à tout instant :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int (\varepsilon |\vec{E}(x, t)|^2 + \mu |\vec{H}(x, t)|^2) dx < +\infty$$

où par définition  $\mathcal{E}(t)$  désigne l'énergie électromagnétique de la solution à l'instant  $t$ . Nous verrons plus loin (chapitres 1 et 2) comment l'étude des propriétés de cette énergie est fondamentale pour l'analyse mathématique des équations.

## 1.2 Propriétés qualitatives des solutions - Conditions aux limites et conditions de transmission

Lorsque le domaine de propagation n'est pas l'espace entier, il convient de prescrire des conditions aux limites sur le bord  $\Gamma = \partial\Omega$ . Ainsi, si  $\Omega$  est en contact avec un conducteur parfait (un métal par exemple), il faut imposer :

$$(1.20) \quad \vec{E} \wedge n|_{\Gamma} = 0$$

où  $n$  est le vecteur unitaire normal à  $\Gamma$ , sortant par rapport à  $\Omega$ . Cette condition exprime évidemment que le champ électrique est nécessairement normal à la frontière. Ce type de condition suffit à assurer l'unicité de la solution des équations de Maxwell. Elle a la propriété d'être conservative : le bord renvoie la totalité des ondes électromagnétiques. Certains matériaux ont la propriété d'être absorbants, au moins partiellement. Il est alors usuel d'imposer une condition de type impédance sur la frontière  $\Gamma$  en contact avec ce type de matériau :

$$(1.21) \quad \vec{E} \wedge n + Z \cdot n \wedge (\vec{H} \wedge n) = 0$$

où  $Z(x)$  est une quantité positive ou nulle, qui peut varier le long de  $\Gamma$ . On peut alors montrer que ce type de condition est absorbant dans la mesure où il entraîne la décroissance de l'énergie électromagnétique même si le milieu de propagation est non conducteur.

Revenons à la condition de conducteur parfait. On peut également trouver dans les livres de physique la condition supplémentaire :

$$(1.22) \quad \vec{H} \cdot n = 0$$

qui exprime que le champ magnétique  $\vec{H}$  est nécessairement tangent au bord  $\Gamma$ . En fait on peut considérer cette condition comme redondante, au même titre que les équations (1.19), car elle est une conséquence des autres équations. Menons un petit calcul formel pour nous

en convaincre. Nous avons :

$$(1.23) \quad \frac{\partial}{\partial t}(\mu \vec{H}) + \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

Nous multiplions cette équation par  $\nabla \varphi$ ,  $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , (nous faisons un produit scalaire) et intégrons le résultat sur  $\Omega$  (nous avons choisi  $\varphi$  indépendante de  $t$ ). Il vient :

$$(1.24) \quad \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \mu \vec{H} \cdot \nabla \varphi \, dx \right) + \int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \nabla \varphi \, dx = 0$$

Effectuons des intégrations par parties (Formules de Green) :

$$(1.25) \quad \left| \begin{aligned} \int_{\Omega} \mu \vec{H} \cdot \nabla \varphi \, dx &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mu \vec{H}) \varphi \, dx + \int_{\Gamma} \mu (H \cdot n) \varphi \, d\sigma \\ &= \int_{\Gamma} \mu (\vec{H} \cdot n) \varphi \, d\sigma \end{aligned} \right.$$

puisque  $\operatorname{div} (\mu \vec{H}) = 0$ . Par ailleurs :

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \operatorname{rot} (\nabla \varphi) \, dx = \int_r (\vec{E} \wedge n) \cdot (n \wedge (\nabla \varphi \wedge n)) \, d\sigma$$

Comme  $\vec{E} \wedge n|_{\Gamma} = 0$  et  $\operatorname{rot} (\nabla \varphi) = 0$ , il vient :

$$(1.26) \quad \int_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{E} \cdot \nabla \varphi \, dx = 0$$

Par conséquent compte tenu de (1.25) et (1.26), nous tirons de (1.24), l'égalité :

$$(1.27) \quad \frac{d}{dt} \left( \int_r \mu (\vec{H} \cdot n) \varphi \, d\sigma \right) = 0 \quad \forall \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

ce qui redonne (1.22) à une dérivation par rapport au temps près.

**Remarque 3** : Nous avons utilisé pour établir (1.25) une formule d'intégration par parties que nous réutiliserons, à savoir :

$$(1.28) \quad \left| \begin{aligned} \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in C^1(\overline{\Omega})^3 \times C^1(\overline{\Omega})^3, \\ \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{v} - \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{u}) \, dx = \int_r [n \wedge (\vec{u} \wedge n)] \cdot \vec{v} \wedge n \, d\sigma \end{aligned} \right.$$

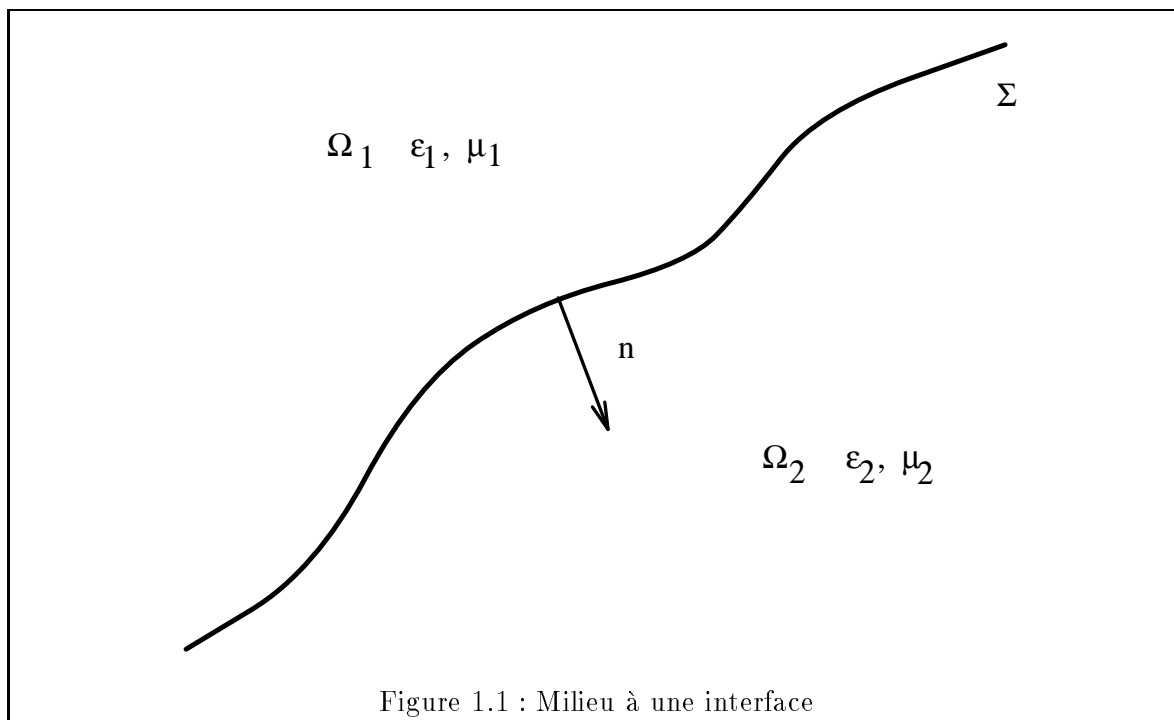
Le lecteur se convaincra aisément que :

$$n \wedge (\vec{u} \wedge n) \cdot (\vec{v} \wedge n) = n \wedge (\vec{v} \wedge n) \cdot (\vec{u} \wedge n)$$

Pour cela, il suffit de remarquer que l'on a en fait affaire à un produit mixte, en l'occurrence :

$$((\vec{u} \wedge n), (\vec{v} \wedge n), n)$$

Il est également instructif de s'intéresser à la régularité des solutions des équations de Maxwell et de bien comprendre que celles-ci ne sont pas continues dès que les coefficients  $\varepsilon$  et  $\mu$  présentent eux mêmes des discontinuités. (Nous nous limitons ici au cas  $\sigma = 0$ ). Pour s'en convaincre il suffit de s'intéresser aux conditions de transmission satisfaitse par le champ électromagnétique le long d'une interface de discontinuité. Nous considérons le cas simplifié où  $\Omega = \mathbb{R}^3$ ,  $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$ ,  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ,  $\Sigma = \partial\Omega_1 = \partial\Omega_2$  (cf figure 1.1) :



Nous supposons par exemple que :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \varepsilon|_{\Omega_1} \in C^\infty(\overline{\Omega}_1) \\ \varepsilon_2 = \varepsilon|_{\Omega_2} \in C^\infty(\overline{\Omega}_2) \end{cases}$$

ainsi que les propriétés équivalentes pour  $\mu$ .

On peut alors montrer que les fonctions  $\vec{E}_1 = \vec{E}|_{\Omega_1}$  et  $\vec{H}_1 = \vec{H}|_{\Omega_1}$  (respectivement  $\vec{E}_2 = \vec{E}|_{\Omega_2}$  et  $\vec{H}_2 = \vec{H}|_{\Omega_2}$ ) sont régulières dans  $\overline{\Omega}_1$  (respectivement  $\overline{\Omega}_2$ ) et qu'elles satisfont en outre les équations (1.18) au sens classique (i.e. en tout point et tout instant) dans  $\Omega_1$  (respectivement  $\Omega_2$ ), pourvu que les données  $\vec{E}_0, \vec{H}_0$  et  $\vec{j}_s$  soient elles-mêmes des fonctions régulières. Il reste à préciser ce qui se passe à travers l'interface ( $\Sigma$ ).

Dans les livres de physique on trouve souvent le fait que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  doivent satisfaire les conditions de transmission :

$$(1.29) \quad \begin{cases} n \wedge \vec{E}_1|_{\Sigma} = n \wedge \vec{E}_2|_{\Sigma} \\ n \wedge \vec{H}_1|_{\Sigma} = n \wedge \vec{H}_2|_{\Sigma} \end{cases}$$

En fait (1.29) sont des conséquences des équations (1.18) si on considère que celles-ci sont vérifiées dans  $\mathbf{R}^3$  au sens des distributions. En effet si tel est le cas, on peut écrire, puisque  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont à tout instant - dès que l'on s'intéresse aux solutions d'énergie finie - dans  $L^2(\mathbf{R}^3)^3$  :

$$(1.30) \quad \left| \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \int (\vec{E} \cdot \varepsilon \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{\varphi}) dx dt + \int_0^{+\infty} \int \vec{j}_s \cdot \vec{\varphi} dx dt = 0 \\ \forall \vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^+)^3 \end{array} \right.$$

Maintenant nous découpons l'intégrale sur  $\Omega$  en deux morceaux, respectivement en intégrant sur  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ , et pouvons appliquer l'intégration par parties dans chaque domaine  $\Omega_j$ . Ainsi nous obtenons :

$$\left| \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_1} (\vec{E}_1 \cdot \varepsilon \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} - \vec{H}_1 \cdot \text{rot } \vec{\varphi}) dx dt = \\ \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_1} (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} - \text{rot } \vec{H}_1) \cdot \vec{\varphi} dx dt \\ - \int_0^{+\infty} \int_{\Sigma} (\vec{H}_1 \wedge n) \cdot (n \wedge (\vec{\varphi} \wedge n)) d\sigma dt \\ \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_2} (\vec{E}_2 \cdot \varepsilon \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} - \vec{H}_2 \cdot \text{rot } \vec{\varphi}) dx dt = \\ \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_2} (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} - \text{rot } \vec{H}_2) \cdot \vec{\varphi} dx dt \\ - \int_0^{+\infty} \int_{\Sigma} (\vec{H}_2 \wedge n) \cdot (n \wedge (\vec{\varphi} \wedge n)) d\sigma dt \end{array} \right.$$

(Pour obtenir ces formules nous avons fait l'hypothèse que la normale était orientée de  $\Omega_1$  vers  $\Omega_2$ ). En reportant ces égalités dans (1.30), nous obtenons finalement :

$$(1.31) \quad \left| \begin{array}{l} \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_1} (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} + \text{rot } \vec{H}_1 + \vec{j}_s) \cdot \vec{\varphi} dx dt + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega_2} (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} + \text{rot } \vec{H}_2 + \vec{j}_s) \cdot \vec{\varphi} dx dt \\ + \int_0^{+\infty} \int_{\Gamma} (\vec{H}_1 \wedge n - \vec{H}_2 \wedge n) \cdot \vec{\varphi} d\sigma dt = 0 \end{array} \right.$$

Les équations de Maxwell étant satisfaites au sens classique dans chaque ouvert  $\Omega_j$ , nous obtenons :

$$(1.32) \quad \int_0^{+\infty} \int_{\Gamma} (\vec{H}_1 \wedge n - \vec{H}_2 \wedge n) \cdot \vec{\varphi} d\sigma dt = 0 \quad \forall \vec{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^+)^3$$

ce qui redonne, au moins formellement, la condition de transmission sur  $\vec{H}$ . On procède de manière analogue pour  $\vec{E}$ .

**Remarque 4 :**

- *Le lecteur se convaincra aisément que les résultats précédents se généralisent en fait sans problème en présence de conductivité. Cette remarque permet de “comprendre” la condition aux limites de conducteur parfait. Il suffit pour cela de considérer un problème de transmission entre un milieu non conducteur, par exemple  $\Omega_1$ , et un milieu conducteur, par exemple  $\Omega_2$ , puis de faire tendre vers  $+\infty$  la conductivité  $\sigma$  du milieu  $\Omega_2$  (qui tend alors à être un conducteur parfait). On peut alors montrer que le champ électrique  $\vec{E}_2$  dans  $\Omega_2$  tend vers 0 ce dont on peut avoir au moins l’intuition à partir de l’égalité  $\vec{E}_2 = -\frac{1}{\sigma}(\varepsilon_2 \frac{\partial \vec{E}_2}{\partial t} + \text{rot } \vec{H}_2 + \vec{j}_s)$ . On obtient alors la condition aux limites de conducteur parfait en passant formellement à la limite dans la condition de transmission (1.29) portant sur  $\vec{E}$ .*
- *La condition de transmission (1.29) assure la continuité des composantes tangentielles. Elle ne dit rien sur la composante normale de ces mêmes champs. En fait, on peut montrer que ces composantes seront en général discontinues puisqu’elles satisfont les conditions de transmission :*

$$(1.33) \quad \begin{cases} \varepsilon_1 \vec{E}_1 \cdot \vec{n} &= \varepsilon_2 \vec{E}_2 \cdot \vec{n} \\ \mu_1 \vec{H}_1 \cdot \vec{n} &= \mu_2 \vec{H}_2 \cdot \vec{n} \end{cases}$$

**Exercice 1 :** *Démontrer formellement les conditions de transmission (1.33).*

Cette propriété des solutions des équations de Maxwell constitue l’une des différences fondamentales avec le modèle de l’équation des ondes scalaires dont les solutions sont en général continues. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

## 1.3 Lien entre les équations de Maxwell et l’équation des ondes

### 1.3.1 Formulation des équations de Maxwell sous forme d’un système du second ordre

Nous nous limitons ici au cas non conducteur  $\sigma = 0$ . Nous pouvons éliminer entre les deux équations de (1.18) soit le champ électrique  $\vec{E}$ , soit le champ magnétique  $\vec{H}$ , pour obtenir deux formulations “équivalentes” des équations de Maxwell sous forme de systèmes hyperboliques du second ordre :

#### Formulation en $\vec{E}$

$$(1.34) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \text{rot} (\mu^{-1} \text{rot } \vec{E}) + \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = 0$$

#### Formulation en $\vec{H}$

$$(1.35) \quad \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \text{rot} (\varepsilon^{-1} \text{rot } \vec{H}) + \text{rot} (\varepsilon^{-1} \vec{j}_s) = 0$$

**Remarque 5** En présence de conductivité ( $\sigma \neq 0$ ) on peut toujours écrire une formulation en  $\vec{E}$  :

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \text{rot}(\mu^{-1} \text{rot} \vec{E}) = 0$$

En revanche on ne sait pas écrire une formulation en  $H$  du même type sauf dans le cas où  $\varepsilon$  et  $\mu$  sont constants.

On peut déjà noter une parenté entre les systèmes (1.34) ou (1.35) et l'équation des ondes scalaires qui, rappelons le, s'écrit en milieu homogène :

$$(1.36) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f$$

(où  $c > 0$  désigne la vitesse de propagation et  $u$  l'inconnue, scalaire) et en milieu hétérogène :

$$(1.37) \quad \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \text{div}(\mu \nabla u) = f$$

où  $\rho(x)$  et  $\mu(x)$  sont des coefficients positifs, équivalents de  $\varepsilon(x)$  et  $\mu(x)$  pour le système de Maxwell.

En effet (1.34), (1.35) et (1.37) appartiennent à une classe de problèmes de la forme :

$$(1.38) \quad \frac{d^2 U}{dt^2} + AU = F$$

où  $U$  désigne l'inconnue, scalaire ou vectorielle, du problème et où  $A$  désigne un opérateur différentiel en espace, linéaire et du second ordre. Nous allons voir maintenant que dans certains cas particulier la relation Maxwell-ondes dépasse le simple cadre du formalisme.

### 1.3.2 Le cas des équations de Maxwell dans le vide

Dans le vide, l'équation (1.34) devient :

$$(1.39) \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + c_0^2 \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t}$$

Notons que si  $\text{div} \vec{j}_s = 0$  nous avons :

$$\text{div} \vec{E} = 0$$

à condition que cette égalité soit vraie à l'instant  $t = 0$ . Nous utilisons alors la formule :

$$(1.40) \quad \text{rot}(\text{rot} \vec{E}) = \text{grad}(\text{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

où le laplacien vectoriel  $\Delta \vec{E}$  est simplement défini par :

$$\Delta \vec{E} = \begin{pmatrix} \Delta E_1 \\ \Delta E_2 \\ \Delta E_3 \end{pmatrix}$$

si  $(E_1, E_2, E_3)$  désignent les coordonnées de  $\vec{E}$  dans un repère cartésien  $0x_1x_2x_3$ . Il s'ensuit que  $\vec{E}$  est solution de l'équation des ondes vectorielles

$$(1.41) \quad \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t}$$

ce qui signifie que chaque composante  $E_j$  vérifie une équation des ondes scalaire en milieu homogène.

**Remarque 6** *Il est naturel de se demander si (1.39) et (1.41) sont équivalentes. Nous avons montré que toute solution de (1.39) était solution de (1.41). Pour la réciproque nous introduisons les données initiales :*

$$(1.42) \quad \begin{cases} \vec{E}(x, 0) &= \vec{E}_0(x) \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, 0) &= \varepsilon_0^{-1} \text{rot} \vec{H}_0(x) \end{cases}$$

et nous supposons de plus :

$$(1.43) \quad \text{div} \vec{E}_0 = 0$$

Nous allons voir que, si  $\Omega = \mathbb{R}^3$ , alors on peut revenir de (1.41) à (1.39). En effet posons  $d = \text{div} \vec{E}$ . Appliquons l'opérateur divergence à (1.41). Il vient, compte tenu de (1.43) et de  $\text{div} \vec{j}_s = 0$  :

$$(1.44) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta d = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ d(x, 0) = \frac{\partial d}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

Grâce au résultat d'unicité pour l'équation des ondes - que nous verrons au chapitre 1 -, il s'ensuit que  $d = \text{div} \vec{E} = 0$ . Nous en déduisons l'égalité  $\Delta \vec{E} = -\text{rot}(\text{rot} \vec{E})$  ce qui nous permet de remonter de (1.41) à (1.39). Ce résultat signifie que, dans le vide et dans tout l'espace, les 3 composantes du champ sont totalement découplées. Ainsi si les 3 champs  $\vec{E}_0, \vec{E}_1$  et  $\vec{j}_s$  sont orientés dans la direction  $0x$ , la solution  $\vec{E}$  va rester à tout instant dans la direction  $0x$ .

Ce phénomène disparaît lorsque le domaine de propagation  $\Omega$  n'est pas l'espace entier. En effet, les diverses composantes sont recouplées au niveau des conditions aux limites. En fait, on montre que, si on considère la condition de conducteur parfait, on a équivalence, au moins



formelle, entre les deux problèmes suivants :

$$(1.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c_0^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = 0 \\ \vec{E}(x, 0) = \vec{E}_0(x) \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, 0) = \vec{E}_1(x) \\ \vec{E} \wedge n|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

$$(1.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \vec{E} + \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = 0 \\ \vec{E}(x, 0) = \vec{E}_0(x) \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, 0) = \vec{E}_1(x) \\ \vec{E} \wedge n|_{\Gamma} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E}|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right.$$

Il est intéressant de noter que, pour passer du système de Maxwell à l'équation des ondes vectorielle, on a dû rajouter une condition aux limites supplémentaire relative à la condition de divergence nulle. Cela est dû au fait que, pour prouver que  $d = 0$  dans  $\Omega$ , les deux seules équations :

$$(1.47) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta d = 0 \quad (\Omega) \\ d(x, 0) = \frac{\partial d}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (\Omega) \end{array} \right.$$

ne suffisent pas. En revanche, le rajout de la condition de Dirichlet  $d|_{\Gamma} = 0$  permet de conclure.

### 1.3.3 Le cas des équations de Maxwell bidimensionnelles

On s'intéresse à un problème de propagation de nature "cylindrique", c'est à dire :

- le domaine de propagation  $\Omega$  est de la forme :

$$\Omega = \mathcal{O} \times \mathbb{R}, \quad \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$$

- les coefficients sont indépendants de la coordonnée  $x_3$  :

$$\varepsilon = \varepsilon(x_1, x_2) \quad \mu = \mu(x_1, x_2) \quad \sigma = \sigma(x_1, x_2)$$

- les sources sont indépendantes de  $x_3$

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_0(x_1, x_2) \quad \vec{H}_0 = \vec{H}_0(x_1, x_2) \quad \vec{j}_s = \vec{j}_s(x_1, x_2)$$

Notons que l'on sort nécessairement du cadre des solutions d'énergie finie et que la direction  $x_3$  joue un rôle tout à fait privilégié. On peut "montrer" que les solutions  $(\vec{E}, \vec{H})$  de (1.18) sont, dans ce contexte, indépendantes de  $x_3$  et que le système (1.18) se découple en deux sous-systèmes d'équations posées dans  $\Omega \times \mathbb{R}$ , à savoir (dans ce qui suit  $(E_1, E_2, E_3)$  sont les coordonnées de  $\vec{E}$  dans le repère  $0x_1x_2x_3$ ,  $(H_1, H_2, H_3)$  sont celles de  $\vec{H}$  et  $(j_s^{(1)}, j_s^{(2)}, j_s^{(3)})$  sont celles de  $\vec{j}_s$ ) :

**Un système en  $(E_1, E_2, H_3)$  : le système (TE)**

$$(1.48) \quad \begin{cases} \varepsilon \frac{\partial E_1}{\partial t} + \sigma E_1 - \frac{\partial H_3}{\partial x_2} + j_s^{(1)} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial E_2}{\partial t} + \sigma E_2 - \frac{\partial H_3}{\partial x_1} + j_s^{(2)} = 0 \\ \mu \frac{\partial H_3}{\partial t} + \frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

C'est le système des ondes transverses électriques. (En effet, le champ électrique  $\vec{E}$  reste dans le plan "transverse"  $0x_1x_2$  orthogonal à la direction d'invariance  $0x_3$ )

**Un système en  $(H_1, E_2, E_3)$  : le système (TM)**

$$(1.49) \quad \begin{cases} \mu \frac{\partial H_1}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial x_2} = 0 \\ \mu \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\partial E_3}{\partial x_1} = 0 \\ \varepsilon \frac{\partial E_3}{\partial t} + \sigma E_3 - \left( \frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \right) = 0 \end{cases}$$

C'est le système des ondes transverses magnétiques.

**Exercice 2** Etablir les deux systèmes (1.48) et (1.49) à partir de (1.18).

Il est facile de voir que chacun des systèmes (1.48) et (1.49) est en fait équivalent à une équation des ondes scalaire 2D si on suppose que  $\sigma = 0$  (milieu non conducteur).

$$(1.50) \quad \mu \frac{\partial H_3}{\partial t^2} - \operatorname{div}_T(\varepsilon^{-1} \nabla_T H_3) + \frac{\partial}{\partial x_1}(\varepsilon^{-1} j_s^{(2)}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\varepsilon^{-1} j_s^{(1)}) = 0$$

alors que pour le système (TM), il faut choisir  $E_3$  pour inconnue auquel cas on obtient l'équation :

$$(1.51) \quad \varepsilon \frac{\partial E_3}{\partial t^2} - \operatorname{div}_T(\mu^{-1} \nabla_T E_3) + \frac{\partial j_s^{(3)}}{\partial t} = 0$$

Dans (1.50) et (1.51) les opérateurs  $\operatorname{div}_T$  et  $\nabla_T$  sont les opérateurs divergence et gradient transverses qui ne sont autres que les opérateurs divergence et gradient usuels dans  $\mathbb{R}^2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \operatorname{div}_T \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (\vec{u} = (u_1, u_2)) \\ \bullet \nabla_T \varphi = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right)^t \end{array} \right.$$

Chacune des équations (1.50) et (1.51) est bien de la forme générale (1.37) avec un choix judicieux pour chacun des coefficients  $\rho$  et  $\mu$ .

**Remarque 7** Dans un milieu conducteur ( $\sigma \neq 0$ ) on peut réduire le système (TM) à une équation des ondes avec amortissement pour  $E_3$ . Cette équation s'écrit :

$$(1.52) \quad \varepsilon \frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} + \sigma \frac{\partial E_3}{\partial t} - \operatorname{div}_T(\mu^{-1} \nabla_T E_3) + \frac{\partial j_s^{(3)}}{\partial t} = 0$$

Il n'est pas évident de faire de même avec le système (TE) !



## Chapitre 2

# Etude de l'équation des ondes scalaire en régime transitoire

### 2.1 Le problème modèle

Nous considérons le problème de propagation dans tout l'espace suivant :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u(x, t) : \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R} / & \\ \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) = f & \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^+ \\ u(x, 0) = u_0(x) & \mathbf{R}^N \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) & \mathbf{R}^N \end{array} \right.$$

Les coefficients  $\rho(x)$  et  $\mu(x)$  caractérisant le milieu de propagation sont supposés satisfaire les hypothèses suivantes :

$$\left\| \begin{array}{l} \bullet \rho(x), \mu(x) \text{ mesurables} \\ \bullet 0 < \rho_- \leq \rho(x) \leq \rho_+ < +\infty \quad p.p. x \in \mathbf{R}^N \\ \bullet 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty \quad p.p. x \in \mathbf{R}^N \end{array} \right.$$

Les données du problème sont donc, outre les coefficients  $\rho(x)$  et  $\mu(x)$  :

- les données initiales  $(u_0(x), u_1(x))$
- le second membre  $f(x, t)$ .

L'inconnue du problème est la fonction  $u(x, t)$ .

## 2.2 Le théorème de Hille-Yosida

Le théorème de Hille-Yosida est un outil fondamental pour résoudre les équations d'évolution dans les espaces de Banach (équations linéaires). Lorsque cet espace est lui même un espace fonctionnel, espace de Sobolev par exemple, ce théorème s'applique aux équations aux dérivées partielles d'évolution. C'est précisément la démarche que nous allons appliquer à l'équation des ondes, puis aux équations de Maxwell. Nous nous contenterons du cadre hilbertien, suffisant pour notre propos. Dans ce court paragraphe nous ne ferons qu'énoncer le théorème. Une démonstration détaillée est donnée dans l'annexe A.

Rappelons d'abord qu'un opérateur  $A$  dans un espace de Hilbert  $H$ , muni d'un produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_H$ , est caractérisé comme étant une application linéaire d'un sous-espace  $D(A)$  de  $H$ , appelé domaine de  $A$ , dans  $H$ . Le théorème de Hille-Yosida fait appel à la notion d'opérateur maximal monotone.

**Définition 1** *Un opérateur  $A$  dans  $H$  de domaine  $D(A)$  est dit maximal monotone si et seulement si :*

- (i)  $A + I$  est surjectif de  $D(A)$  dans  $H$
- (ii)  $\forall u \in D(A), (Au, u)_H \geq 0$

Dans la suite nous nous intéressons à l'équation d'évolution dans  $H$  :

$$(2.2) \quad \begin{cases} \text{Trouver } u(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow D(A) \subset H \\ \frac{du}{dt} + Au = F & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

où  $F(t)$  est une fonction donnée de  $\mathbb{R}^+$  dans  $H$ . Par définition, on appellera solution classique, ou solution forte, de (2.2), toute fonction  $u$  vérifiant :

$$(2.3) \quad \begin{cases} t \rightarrow u(t) \in C^1(0, T; H), \\ \forall t \geq 0, u(t) \in D(A) \\ t \rightarrow Au(t) \in C^0(0, T; D(A)) \end{cases}$$

ce que l'on note :

$$(2.4) \quad u \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C^0(\mathbb{R}^+; D(A))$$

et vérifiant l'équation  $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = F(t)$  pour tout  $t \geq 0$  et satisfaisant  $u(0) = u_0$  (le lecteur notera que cela nécessite que  $F \in C^0(\mathbb{R}^+; H)$  et que  $u_0 \in D(A)$ ).

**Théorème 1** (Hille-Yosida)

On suppose qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A + \lambda I$  soit maximal monotone. Alors pour tout  $u_0 \in D(A)$  et tout  $F(t) \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$ , le problème (2.2) admet une unique solution classique (ou solution forte) :

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C^0(\mathbb{R}; D(A))$$

**Remarque 8** Pour donner un sens à la notation (2.4) il faut munir  $D(A)$  de la topologie hilbertienne associée à la norme du graphe

$$\| u \|_{D(A)}^2 = \| u \|^2 + \| Au \|^2$$

**Remarque 9** Le lecteur notera que l'on demande à  $F(t)$  la régularité  $C^1(\mathbb{R}^+; H)$  alors qu'on aurait pu attendre  $C^0(\mathbb{R}^+; H)$ . On notera que si la somme  $\frac{du}{dt} + Au \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$  on a seulement pour chaque terme  $\frac{du}{dt} \in C^0(\mathbb{R}^+; H)$  et  $Au \in C^0(\mathbb{R}^+; H)$

### 2.3 Existence et unicité pour le problème modèle :le cas des solutions fortes

On fait entrer (2.1) dans le cadre du théorème de Hille-Yosida en remarquant que (2.1) est équivalent au système :

$$(2.5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla v) = \frac{f}{\rho} \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ v(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

On introduit alors l'espace de Hilbert :

$$(2.6) \quad H = H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N)$$

muni du produit scalaire

$$(2.7) \quad (U, U')_H = (u, u')_\rho + (\nabla u, \nabla u')_\mu + (v, v)_\rho$$

si  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  et  $U' = \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ . On a posé :

$$(2.8) \quad \begin{cases} (u, u')_\alpha = \int u(x)u'(x)\alpha(x)dx \\ \forall (u, u', \alpha) \in L^2(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N) \times L^\infty(\mathbb{R}^N), \alpha \geq 0. \end{cases}$$

On introduit alors :

$$(2.9) \quad D(A) = \mathcal{D}(A) \times H^1(\mathbf{R}^N)$$

où

$$(2.10) \quad \mathcal{D}(A) = \{u \in H^1(\mathbf{R}^N) / \operatorname{div}(\mu \nabla u) \in L^2(\mathbf{R}^N)\}$$

et on définit l'opérateur non borné sur  $H$  :

$$A : D(A) \subset H \rightarrow H$$

$$(2.11) \quad A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla v) \end{pmatrix}$$

Le problème (2.5) se réécrit avec  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$(2.12) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F \\ U(0) = U_0 \end{cases}$$

où nous avons posé :

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ f/\rho \end{pmatrix} \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

**Lemme 1** *L'opérateur  $A + \lambda I$  est maximal monotone pour tout  $\lambda \geq \frac{1}{2}$ .*

**Démonstration :**

1. Si  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  notons que :

$$(AU, U)_H = -(u, v)_\rho - (\nabla u, \nabla v)_\mu - \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla u), v\right)_\rho$$

Mais, grâce à la formule de Green

$$\left| \begin{aligned} -\left(\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla u), v\right)_\rho &= -(\operatorname{div}(\mu \nabla u), v) \\ &= (\mu \nabla u, \nabla v) = (\nabla u, \nabla v)_\mu \end{aligned} \right.$$



Nota : Nous désignons par  $(\cdot, \cdot)$  le produit scalaire usuel de  $L^2(\mathbb{R}^N)$  ce qui correspond à  $(\cdot, \cdot)_\alpha$  lorsque  $\alpha(x) \equiv 1$

Par conséquent :

$$(AU, U)_H = -(u, v)_\rho \geq -\frac{1}{2} \|u\|_\rho^2 - \frac{1}{2} \|v\|_\rho^2$$

D'autre part :

$$\|U\|_H^2 = \|u\|_\rho^2 + \|\nabla u\|_\mu^2 + \|v\|_\rho^2$$

Donc

$$(AU, U)_H + \lambda \|U\|_H^2 \geq \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) \left[ \|u\|_\rho^2 + \|v\|_\rho^2 \right]$$

donc

$$\forall \lambda \geq \frac{1}{2} \quad (AU, U)_H + \lambda \|U\|_H^2 \geq 0 \quad \forall U \in D(A)$$

2. La surjectivité de  $A + \nu I, \nu > 0$ , équivaut à trouver  $U \in D(A)$  solution de :

$$AU + \nu U = F$$

où  $F$  est un élément quelconque de  $H$ .

Si  $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  et  $F = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ , ceci équivaut à :

$$(2.13) \quad \begin{cases} -v + \nu u = f & f \in H^1(\mathbb{R}^N) \\ -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla u) + \nu v = g & g \in L^2(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

En éliminant  $v$ , nous obtenons :

$$(2.14) \quad -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\mu \nabla u) + \lambda^2 u = g + \lambda f$$

dont la formulation variationnelle est :

$$(2.15) \quad (\mu \nabla u, \nabla u') + \nu^2(\rho u, u') = (\rho(g + \lambda f), u') \quad \forall u' \in H^1(\mathbb{R}^N)$$

Le théorème de Lax-Milgram permet d'affirmer que le problème (2.15) admet bien une solution (unique) dans  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . En remontant à (2.14), on voit que  $\operatorname{div}(\mu \nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$  donc que  $u \in \mathcal{D}(A)$ .

Pour remonter à (2.13) il suffit alors de poser  $v = \nu u - f$  qui est bien un élément de  $H^1(\mathbb{R}^N)$ . Nous avons donc démontré que  $A + \nu I$  était surjectif pour tout  $\nu \geq 0$ . Pour conclure au caractère maximal monotone de  $A + \lambda I$ , il suffit de raisonner avec  $\nu = \lambda + 1$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer un théorème d'existence et d'unicité pour le problème (2.1) :

**Théorème 2** *Avec les hypothèses :*

$$(u_0, u_1) \in \mathcal{D}(A) \times H^1(\mathbb{R}^N)$$

$$f \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N))$$

le problème (2.1) admet une unique solution forte dans l'espace :

$$C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(A))$$

**Remarque 10** *On a muni  $\mathcal{D}(A)$  de la topologie associée à la norme :*

$$\|u\|_{\mathcal{D}(A)}^2 = \|u\|_\rho^2 + \|\nabla u\|_\mu^2 + \|\operatorname{div}(\mu \nabla u)\|_\rho^2$$

**Démonstration :** Les hypothèses du théorème équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in D(A) \\ F = \begin{pmatrix} 0 \\ f/\rho \end{pmatrix} \in C^0(0, T; H) \end{array} \right.$$

Grâce au lemme (1) et au théorème de Hille-Yosida, nous déduisons que le problème d'évolution (2.12) admet une unique solution forte  $U_0$  dans l'espace  $C^0(\mathbb{R}^+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H)$ . On a :

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^0(\mathbb{R}^+; D(A)) \iff \begin{cases} u \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(A)) \\ v \in C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^N)) \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \iff \begin{cases} u \in C^1(\mathbb{R}^+; H^1(\mathbb{R}^N)) \\ v \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N)) \end{cases}$$

Comme  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ , on déduit que  $u \in C^2(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^N))$  ce qui achève la démonstration. ■

**Remarque 11** Principe de superposition

Le théorème 2 permet de définir une application :

$$(u_0, u_1, f) \rightarrow u$$

$$H^1 \times L^2 \times C^1(\mathbb{R}^+; L^2) \rightarrow C^2(\mathbb{R}^+; L^2) \cap C^1(\mathbb{R}^+; H^1) \cap C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(A))$$

Cette application est évidemment linéaire. C'est le principe de superposition.

**2.4 Identité de l'énergie - Estimations à priori**

Soit  $u$  la solution forte de (2.1), on appelle énergie de  $u$  à l'instant  $t$  la quantité :

$$(2.16) \quad \left| \begin{aligned} E(u, t) &= \frac{1}{2} \int \rho \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int \mu |\nabla u(x, t)|^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_\rho^2 + \frac{1}{2} \left\| \nabla u(t) \right\|_\mu^2 \end{aligned} \right.$$

Compte tenu de la régularité de  $u$ , il est clair que cette énergie est finie à tout instant :

$$\forall t \geq 0 \quad E(u, t) < +\infty$$

et qu'il s'agit d'une fonction dérivable du temps

$$t \rightarrow E(u, t) \in C^1(\mathbb{R}^+)$$

On a en fait le résultat suivant :

**Théorème 3** (Identité de l'énergie)

$$(2.17) \quad \frac{d}{dt} E(u, t) = (f(t), \frac{du}{dt}(t))$$

**Démonstration :**

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \left( \mu \nabla u, \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

Soit, avec la formule de Green :

$$\frac{d}{dt} E(u, t) = \left( \frac{\partial u}{\partial t}, \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u) \right)$$

C'est à dire, compte tenu de l'équation satisfaite par  $u$ , l'identité annoncée. ■

**Corollaire 1** Si pendant un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ , le terme source  $f(x, t)$  est identiquement nul, l'énergie  $E(u, t)$  est constante entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . C'est un résultat de conservation de l'énergie.

Nous allons maintenant déduire de l'identité d'énergie (2.17) des estimations à priori sur la solution, c'est à dire des estimations de certaines normes de  $u$  sans en connaître l'expression.

**Théorème 4** (*Estimations en norme  $H^1$  et  $L^2$* )

Pour tout instant  $t \geq 0$ , on a les estimations :

$$(2.18) \quad \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_{\rho} \leq (2E_0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|f(s)\|_{\frac{1}{p}} ds$$

$$(2.19) \quad \|\nabla u(t)\|_{\mu} \leq (2E_0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t \|f(s)\|_{\frac{1}{p}} ds$$

$$(2.20) \quad \|u(t)\|_{\rho} \leq \|u_0\|_{\rho} + t(2E_0)^{\frac{1}{2}} + \int_0^t (t-s) \|f(s)\|_{\frac{1}{p}} ds$$

où  $E_0$  désigne l'énergie initiale

$$E_0 = \frac{1}{2} \left\{ \|u_1\|_{\rho}^2 + \|\nabla u_0\|_{\mu}^2 \right\}$$

**Démonstration** : En intégrant entre 0 et  $T$  l'identité (2.17) nous obtenons :

$$(2.21) \quad E(u, t) = E_0 + \int_0^t (f(s), \frac{du}{dt}(s)) ds$$

Or grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous avons :

$$\left| (f(s), \frac{du}{dt}(s)) \right| \leq \left\| \frac{du}{dt}(s) \right\|_{\rho} \|f(s)\|_{\frac{1}{p}}$$

Soit encore, comme  $\left\| \frac{du}{dt}(s) \right\|_{\rho}^2 \leq 2E(u, s)$  :

$$\left| (f(s), \frac{du}{dt}(s)) \right| \leq \sqrt{2E(u, s)^{\frac{1}{2}}} \|f(s)\|_{\frac{1}{p}}$$

En reportant dans (2.21), nous obtenons :

$$(2.22) \quad E(u, s) \leq E_0 + \sqrt{2} \int_0^t \|f(s)\|_{\frac{1}{p}} E(u, s)^{\frac{1}{2}} ds$$

Pour conclure nous utiliserons une variante du lemme de Gronwall, que nous démontrerons un peu plus loin.

**Lemme 2** Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $C > 0$  et  $\varphi(t)$  et  $m(t)$  deux fonctions continues et positives définies sur  $[0, T]$  et satisfaisant :

$$\forall t \in [0, T] \quad \varphi(t) \leq C + \int_0^t m(s) \varphi(s)^{\alpha} ds$$

alors on a :

$$\forall t \in [0, T] \quad \varphi(t) \leq \left\{ C^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t m(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Appliquons le résultat de ce lemme avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = E(u, t) \\ m(t) = \sqrt{2} \| f(t) \|_{\frac{1}{p}} \\ C = E_0 \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$

Il vient :

$$E(u, t) \leq \left\{ E_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t \| f(s) \|_{\frac{1}{p}} ds \right\}^2$$

Pour obtenir les estimations (2.18) et (2.19) il suffit alors de remarquer que  $\| \frac{du}{dt}(t) \|_{\rho}$  et  $\| \nabla u(t) \|_{\mu}$  sont majorés par  $\sqrt{2}E(u, t)$ . Enfin pour obtenir (2.20) il suffit d'écrire que  $u(t) = u_0 + \int_0^t \frac{du}{dt}(s) ds$  et d'utiliser (2.18). ■

Preuve du lemme de Gronwall :

Introduisons la fonction :

$$G(t) = C + \int_0^t m(s) \varphi(s)^\alpha ds$$

$G$  est dérivable et on a :

$$G'(t) = m(t) \varphi(t)^\alpha$$

Par hypothèse  $\varphi(t) \leq G(t)$ . De plus, comme  $\alpha$  est positif, la fonction  $x \rightarrow x^\alpha$  est croissante. Par conséquent, compte tenu de la positivité de  $m(t)$ , il vient :

$$G'(t) \leq m(t) G(t)^\alpha$$

Soit encore

$$G(t)^{-\alpha} G'(t) \leq m(t)$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et  $t$ , nous obtenons :

$$\frac{1}{1-\alpha} \{G(t)^{1-\alpha} - C^{1-\alpha}\} \leq \int_0^t m(s) ds$$

Comme  $\alpha < 1$ ,  $1-\alpha > 0$  et la fonction  $x \rightarrow x^{\frac{1}{1-\alpha}}$  est croissante. Nous en déduisons l'inégalité

$$G(t) \leq \left\{ C^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_0^t m(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

et donc le résultat annoncé puisque  $\varphi(t) \leq G(t)$ .

**Remarque 12** *Le résultat du théorème 4 est bien un résultat de continuité de la solution par rapport aux données. Plus exactement il exprime que l'application  $(u_0, u_1, f) \rightarrow u$  définie par le théorème d'existence et unicité est continue de  $D(A) \times H^1(\mathbb{R}^N) \times C^1(0, T; \mathbb{R})$ , munie de la topologie de l'espace  $H^1(\mathbb{R}^N) \times L^2(\mathbb{R}^N) \times C^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^N))$ , dans l'espace  $C^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^0(0, T; H^1(\mathbb{R}^N))$  muni de la norme :*

$$u \rightarrow \sup_{[0, T]} \|u(t)\|_\rho + \sup_{[0, T]} \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_\rho + \sup_{[0, T]} \|\nabla u(t)\|_\mu$$

qui est en fait, rappelons le, un espace de Banach.

## 2.5 Existence et unicité pour le problème modèle : le cas des solutions faibles

Notre but est ici d'étendre la notion de solution, quitte à en affaiblir la régularité, au cas où les données du problème sont elles mêmes moins régulières. Dans le cas où  $u$  est une solution forte, si  $v(x, t)$  désigne une fonction test quelconque dans  $C^2(\mathbb{R}^2 \times [0, T])$  vérifiant en outre :

$$v(x, T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = 0$$

nous avons :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla u)) v dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f v dx dt$$

En intégrant par parties nous avons :

$$(2.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} (\rho u \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mu \nabla u \cdot \nabla v) dx dt = \\ = \int_{\mathbb{R}^N} \rho v(x, 0) u_1(x) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \rho \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) u_0(x) dx \\ + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} f v dx dt \end{array} \right.$$

On peut remarquer en fait, que par densité, l'identité est en fait satisfaite pour toute fonction test  $v$  vérifiant : (on peut même le démontrer directement - exercice)

$$(2.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} v \in C^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap C^1(0, T; H^1(\mathbb{R}^2)) / \\ v(x, t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = 0 \end{array} \right.$$

On remarque alors que l'identité (2.23) conserve un sens même si la fonction  $u(x, t)$  est moins régulière par exemple, si on a seulement :

$$(2.25) \quad u \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1)$$

Ceci justifie pleinement la :

**Définition 2** On appelle solution faible sur l'intervalle  $[0, T]$  du problème (2.1) toute fonction  $u$  satisfaisant :

$$u \in C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1)$$

et satisfaisant (2.23) pour toute fonction test  $v$  satisfaisant (2.24) (fonction test admissible).

**Remarque 13** L'un des intérêts de cette définition est aussi qu'elle garde un sens si on suppose seulement :

$$(2.26) \quad \begin{cases} (u_0, u_1) \in H^1 \times L^2 \\ f \in L^1(0, T; L^2) \end{cases}$$

**Remarque 14** Par construction même la notion de solution faible prolonge la notion de solution forte : toute solution forte est a fortiori solution faible (sur tout intervalle !)

**Théorème 5** Avec l'hypothèse :

$$(u_0, u_1, f) \in H^1 \times L^2 \times L^1(0, T; L^2)$$

Le problème (2.1) admet une unique solution faible  $u$  dans l'intervalle  $[0, T]$ . Cette solution vérifie les estimations du théorème (4) ainsi que l'identité d'énergie :

$$E(u, t) = E(u, 0) + \int_0^t \int f(x, s) \frac{\partial u}{\partial t}(x, s) dx ds$$

En particulier l'application  $(u_0, u_1, f) \rightarrow u$  est une application linéaire continue de  $H^1 \times L^2 \times L^1(0, T; L^2)$  dans  $C^0(0, T; H^1) \cap C^1(0, T; L^2)$

**Démonstration :** Par densité on peut construire une suite  $(u_0^m, u_1^m, f^m)$  dans  $\mathcal{D}(A) \times H^1 \times C^0(\mathbb{R}^+; L^2)$  telle que :

$$\begin{cases} u_0^m \rightarrow u_0 & \text{dans } H^1 \\ u_1^m \rightarrow u_1 & \text{dans } L^2 \\ f^m \rightarrow f & \text{dans } L^1(0, T; L^2) \end{cases}$$

Désignons par  $u_0^m$  la solution forte du problème (2.1) associé au triplet de données  $(u_0^m, u_1^m, f^m)$ . Les estimations du théorème 3 appliquées aux différences  $u^p - u^q$  permettent d'affirmer que la suite  $u^m$  est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach  $C^0(0, T; H^1) \cap C^1(0, T; L^2)$  muni de la norme :

$$\| u \| = \sup_{[0, T]} \| u(t) \|_\rho + \sup_{[0, T]} \| \nabla u(t) \|_\mu + \sup_{[0, T]} \| \frac{du}{dt}(t) \|_\rho$$

Par conséquent :

$$u^m \rightarrow u \text{ dans } C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1)$$

Il reste à démontrer que  $u$  est solution faible. Or, pour tout  $m$  et toute fonction test  $v$  admissible on a :

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} (\rho u^m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mu \nabla u^m \cdot \nabla v) dx dt = \int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} f^m v dx dt \right. \\ \left. + \int_{\mathbf{R}^N} \rho (v(x, 0) u_1^m(x) - \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) u_0^m(x)) dx \right.$$

Il suffit de passer à la limite dans cette égalité ce qui se fait sans douleur. Ceci établit la partie existence de la solution.

Pour démontrer l'unicité, considérons une solution faible associée à des données nulles, c'est à dire vérifiant :

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} (\rho u \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mu \nabla u \cdot \nabla v) dx dt = 0$$

pour toute fonction test  $v$  admissible.

D'après les théorèmes sur les solutions fortes et le caractère réversible en temps de l'équation des ondes, nous pouvons construire une fonction  $v$  telle que :

$$v \in C^2(0, T; L^2) \cap C^1(0, T; H^1) \cap C^0(O, T; \mathcal{D}(A))$$

et vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla v) = u \quad (\text{dans } C^0(0, T; L^2)) \\ v(x, T) = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, T) = 0 \end{array} \right.$$

Cette fonction  $v$  est en particulier une fonction test admissible et l'identité (2.23) a lieu. Mais comme  $v \in C^0(O, T; \mathcal{D}(A))$ , une intégration par parties supplémentaires fournit :

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} \mu \nabla u \cdot \nabla v dx dt = - \int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} u \operatorname{div}(\mu \nabla v) dx dt$$

Par conséquent :

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} u (\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\mu \nabla v)) dx dt = 0$$

Soit, compte tenu de l'équation satisfaite par  $v$

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} |u(x, t)|^2 dx dt = 0.$$



Ce qui entraîne  $u = 0$  et démontre donc l'unicité de la solution.

Les estimations du théorème 4 et l'identité d'énergie s'obtient par passage à la limite dans les estimations équivalentes écrites pour la solution forte  $u^m$ . ■

**Remarque 15** *Nous avons utilisé dans la démonstration la densité dans l'espace  $H^1$  de l'espace  $\mathcal{D}(A) = \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) / \operatorname{div}(\mu \nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}$ . Lorsque  $\mu$  est constant ou simplement suffisamment régulier (de classe  $C^1$  suffit) il est clair que  $\mathcal{D}(A)$  coïncide avec  $H^2(\mathbb{R}^N)$  auquel cas le résultat de densité est évident. En revanche si  $\mu$  est par exemple discontinue,  $\mathcal{D}(A)$  contient des fonctions qui ne sont pas dans  $H^2(\mathbb{R}^N)$ . Pour prouver le résultat de densité il faut procéder différemment. Rappelons qu'un sous espace d'un espace de Hilbert est dense si et seulement si son orthogonal est réduit à  $\{0\}$ . Si nous munissons  $H^1(\mathbb{R}^N)$  du produit scalaire :*

$$(u, v) \rightarrow (u, v)_\rho + (\nabla u, \nabla v)_\mu$$

Nous avons :

$$u \in D(A)^\perp \iff (u, v)_\rho + (\nabla u, \nabla v)_\mu = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(A)$$

Soit alors  $u \in D(A)^\perp$ , par le théorème de Lax-Milgram il existe un unique élément  $v$  de  $\mathcal{D}(A)$  tel que

$$-\operatorname{div}(\mu \nabla v) + \rho v = u$$

En particulier nous avons :

$$\left| \begin{aligned} \|u\|^2 &= (\mu \nabla u, \nabla v) + (\rho u, v) \\ &= (\nabla u, \nabla v)_\mu + (u, v)_\rho \\ &= 0 \end{aligned} \right.$$

Ceci entraîne  $u = 0$  et par conséquent la densité de  $\mathcal{D}(A)$  dans  $H$ .

## 2.6 Résultats de régularité - Continuité par rapport aux données

Nous avons déjà obtenu aux sections 4 et 5 des résultats de continuité de la solution par rapport aux données  $(u_0, u_1, f)$ . Nous allons examiner ce qui se passe lorsque l'on fait varier les coefficients  $\rho$  et  $\mu$ . L'affaire est techniquement plus délicate car la dépendance de la solution vis à vis de ces paramètres est non linéaire. Nous considérons donc une suite de données  $(\rho^\epsilon, \mu^\epsilon, f^\epsilon, u_0^\epsilon, u_1^\epsilon)$  vérifiant :

$$(2.27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet u_0^\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{dans } H^1 \\ \bullet u_1^\varepsilon \rightarrow u_1 \quad \text{dans } L^2 \\ \bullet f^\varepsilon \rightarrow f \quad \text{dans } L^1(0, T; L^2) \\ \bullet \rho^\varepsilon(x) \rightarrow \rho(x) \quad p.p. x \in \mathbf{R}^N \\ \bullet \mu^\varepsilon(x) \rightarrow \mu(x) \quad p.p. x \in \mathbf{R}^N \end{array} \right.$$

avec en outre des bornes uniformes sur les coefficients  $\rho^\varepsilon$  et  $\mu^\varepsilon$

$$(2.28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet 0 < \rho_- \leq \rho^\varepsilon(x) \leq \rho^+ < +\infty \quad p.p. x \in \mathbf{R}^N, \forall \varepsilon \\ \bullet 0 < \mu_- \leq \mu^\varepsilon(x) \leq \mu^+ < +\infty \quad p.p. x \in \mathbf{R}^N, \forall \varepsilon \end{array} \right.$$

Nous désignons en outre par  $W(0, T)$  l'espace de Banach

$$W(0, T) = C^1(0, T; L^2) \cap C^0(0, T; H^1)$$

$$\| u \|_{W(0, T)} = \sup_{[0, T]} \{ \| u(t) \|_\rho + \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_\rho + \| \nabla u(t) \|_\mu \}$$

**Théorème 6** *On suppose que (2.27) et (2.28) ont lieu. Soit  $u^\varepsilon$  la solution faible de (2.1) associée aux données  $(\rho^\varepsilon, \mu^\varepsilon, u_0^\varepsilon, u_1^\varepsilon, f^\varepsilon)$  et  $u$  celle associée aux données  $(\rho, \mu, u_0, u_1, f)$ , on a le résultat de convergence :*

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } W(0, T) \text{ faible } *$$

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u \text{ dans } H^1(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1) \text{ faible}$$

et pour tout compact  $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  et tout  $t \geq 0$ .

$$u^\varepsilon(\cdot, t) \rightarrow u(\cdot, t) \text{ dans } L^2(\Omega)$$

$$u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ p.p. } x \in \Omega$$

**Démonstration :** Les estimations du théorème 4 appliquées à  $u^\varepsilon$  montrent que :

$$(2.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sup_{[0, T]} \left\| \frac{du^\varepsilon}{dt} \right\|_{\rho^\varepsilon} \leq (\| u_1^\varepsilon \|_{\rho^\varepsilon}^2 + \| \nabla u_0^\varepsilon \|_{\rho^\varepsilon}^2)^{\frac{1}{2}} + \int_0^T \| f^\varepsilon(t) \|_{\frac{1}{\rho^\varepsilon}} dt \\ \sup_{[0, T]} \| \nabla u^\varepsilon \|_{\mu^\varepsilon} \leq (\| u_1^\varepsilon \|_{\rho^\varepsilon}^2 + \| \nabla u_0^\varepsilon \|_{\rho^\varepsilon}^2)^{\frac{1}{2}} + \int_0^T \| f^\varepsilon(t) \|_{\frac{1}{\rho^\varepsilon}} dt \\ \sup_{[0, T]} \| u^\varepsilon \|_{\rho^2} \leq \| u_0^\varepsilon \|_{\rho^\varepsilon} + T(\| u_1^\varepsilon \|_{\rho^\varepsilon}^2 + \| \nabla u_0^\varepsilon \|_{\rho^\varepsilon}^2)^{\frac{1}{2}} + (1 + T) \int_0^T \| f^\varepsilon(t) \|_{\frac{1}{\rho^\varepsilon}} dt \end{array} \right.$$

Comme pour tout  $v$  dans  $L^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^- \|v\|^2 \leq \|v\|_{\rho^\varepsilon}^2 \leq \rho^+ \|v\|^2 \\ \mu^- \|v\|^2 \leq \|v\|_{\mu^\varepsilon}^2 \leq \mu^+ \|v\|^2 \\ \|v\|_{\frac{1}{\rho^\varepsilon}}^2 \leq \frac{1}{\rho^-} \|v\|^2 \end{array} \right.$$

(2.29) montre que la suite  $u^\varepsilon$  est bornée dans  $W(0, T)$ . On en déduit (entre autres) que  $u^\varepsilon$  admet une sous suite (toujours notée  $u^\varepsilon$  pour simplifier) satisfaisant :

$$(2.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } W(0, T) \text{ - faible } * \\ u^\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2) \text{ faible} \\ \frac{du^\varepsilon}{dt} \rightharpoonup \frac{du}{dt} \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2) \text{ faible} \\ \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup \nabla u \quad \text{dans } L^2(0, T; L^2) \text{ faible} \end{array} \right.$$

De même,  $t$  étant fixé, on a :

$$u^\varepsilon(., t) \text{ est borné dans } H^1$$

Par compacité on a, quitte à extraire une autre suite :

$$(2.31) \quad \left\| \forall \Omega \text{ compact } \left\{ \begin{array}{l} u^\varepsilon(., t) \rightarrow u(., t) \text{ dans } L^2(\Omega) \\ u^\varepsilon(x, t) \rightarrow u(x, t) \text{ p.p. } x \in \Omega \end{array} \right. \right.$$

Il reste à démontrer que  $u$  est solution faible du problème limite ce qui démontrera en fait la convergence de toute la suite puisque cette limite est unique. Pour cela il nous suffit de passer à la limite dans l'égalité ( $v$  désignant une fonction test admissible) :

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} (\rho^\varepsilon u^\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mu^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \nabla v) \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} f^\varepsilon v \, dx \, dt \right. \\ \left. + \int_{\mathbf{R}^N} \rho [v(x, 0) u_1^\varepsilon(x) - \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) u_0^\varepsilon(x)] \, dx \right.$$

Le passage à la limite dans les termes de droite se passe sans problème. Pour les termes de gauche, il suffit de remarquer que l'application du théorème de convergence dominée de Lebesgue (on utilise les bornes uniformes sur  $\rho^\varepsilon$  et  $\mu^\varepsilon$ ) montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \rightarrow \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{dans } L^2(\mathbf{R}^N \times [0, T]) \text{ fort} \\ \mu^\varepsilon \nabla u \rightarrow \mu \nabla v \quad \text{dans } L^2(\mathbf{R}^N \times [0, T]) \text{ fort} \end{array} \right.$$

et d'écrire alors :

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} \rho^\varepsilon u^\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx dt = (u^\varepsilon, \rho^\varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2})_{L^2(\mathbf{R}^N \times [0, T])}$$

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}^N} \mu^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v dx dt = (\nabla u^\varepsilon, \mu^\varepsilon \nabla v)_{L^2(\mathbf{R}^N \times [0, T])}$$

Il est alors clair que l'on peut passer à la limite car dans chacun de ces produits scalaires un terme converge fortement et l'autre converge faiblement. ■

Nous allons maintenant énoncer sans démonstration un résultat de régularité.

**Théorème 7** *Si les données  $(\rho, \mu, u_0, u_1, f)$  du problème (2.1) satisfont :*

$$\begin{cases} (\rho, \mu) & \in C^\infty(\mathbf{R}^N)^2 \\ (u_0, u_1) & \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N) \\ f & \in C^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^+), \quad f(., t) \text{ supp. compact} \end{cases}$$

*alors l'unique solution  $u$  du problème (2.1) satisfait :*

$$u \in C^\infty(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^+)$$

## 2.7 Propagation à vitesse finie

Nous définissons en tout point la vitesse locale :

$$(2.32) \quad c(x) = \left( \frac{\mu(x)}{\rho(x)} \right)^{\frac{1}{2}} \in L^\infty(\mathbf{R}^N)$$

et posons :

$$(2.33) \quad c^+ = \sup_{x \in \mathbf{R}^N} c(x) \quad (< +\infty)$$

**Théorème 8** *Si les données  $(u_0, u_1, f)$  satisfont*

$$\text{supp } u_0 \cup \text{supp } u_1 \subset K$$

$$\forall t \geq 0, \text{supp } f(., t) \subset K$$

*où  $K$  est un compact fixe, alors on a :*

$$\forall t \geq \text{supp } u(., t) \subset K + B(0, c^+ t)$$

**Démonstration** : Nous ne ferons la démonstration que dans le cas où :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_0, u_1) \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \\ f = 0 \\ \rho(x), \mu(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

Nous savons alors que la solution est de classe  $C^\infty$  en temps et en espace. La démonstration rigoureuse dans le cas général fait appel à des raisonnements de densité et continuité. Les difficultés sont d'ordre purement technique, il s'agit essentiellement d'appliquer le théorème 6 et d'utiliser des arguments que nous détaillerons davantage dans la partie sur les équations de Maxwell.

Nous allons de plus supposer que  $K$  est une boule, par exemple  $K = B(0, R)$ . Nous considérons maintenant,  $n$  désignant un vecteur quelconque de la sphère de  $\mathbb{R}^N$ , le demi-espace mobile

$$\Omega_n^t = \{x \in \mathbb{R}^N / x \cdot n > X(t)\}$$

où  $X(t)$  est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt}(t) = V > 0 \quad (\text{à déterminer}) \\ X(0) = R \end{array} \right.$$

Nous désignerons par  $\Gamma_n^t$  la frontière de  $\Omega_n^t$  (voir figure 2.1). Nous allons nous intéresser à l'évolution de la fonction :

$$(2.34) \quad E(u, \Omega_n^t, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_n^t} (\rho \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \mu |\nabla u|^2) dx$$

Nous calculons sa dérivée. Pour cela nous utilisons le :

**Lemme 3** Soit  $F(x, t) \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)$ , il vient :

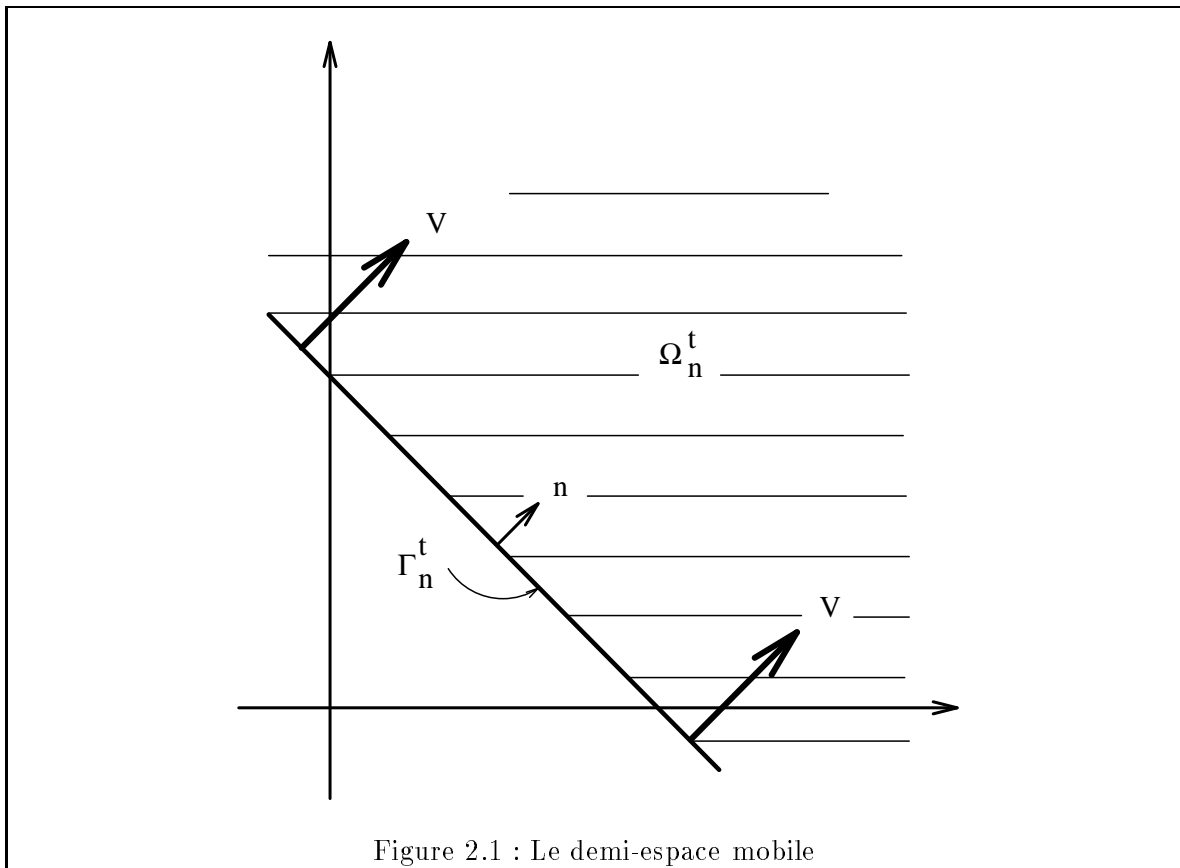
$$(2.35) \quad \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_n^t} F(x, t) dt \right) = \int_{\Omega_n^t} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dt - V \int_{\Gamma_n^t} F(x, t) d\sigma$$

**Démonstration** : Utilisons un changement de coordonnées par rotation  $(x_1, x_2, \dots, x_N) \rightarrow (X_1, X_2, \dots, X_N)$  tel que l'axe  $OX_N$  soit orienté par le vecteur  $n$ . Nous avons :

$$(x_1, \dots, x_N) \in \Omega_n^t \iff X_N > R + Vt$$

Posons  $X = (X', X_N)$  et  $F(x, t) = \tilde{F}(X', X_N, t)$

$$\int_{\Omega_n^t} F(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left( \int_{R+Vt}^{+\infty} \tilde{F}(X', X_N, t) dX_N \right) dX'$$



$$\begin{aligned}
\left| \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_n^t} F(x, t) dx \right) \right. &= \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \int_{R+Vt}^{+\infty} \tilde{F}(X', X_N, t) dX_N \right) \right] dX' \\
&= \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \int_{R+Vt}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial t}(X', X_N, t) dX_N dX' - V \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \tilde{F}(X', R + Vt, t) dX' \\
&= \int_{\Omega_n^t} \frac{\partial F}{\partial t}(x, t) dx - V \int_{\Gamma_n^t} F(x, t) d\sigma
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\left| \frac{d}{dt} (E(u, \Omega_n^t, t)) = \int_{\Omega_n^t} \left( \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} + \mu \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \nabla u \right) dx \right. \\
\left. - \frac{V}{2} \int_{\Gamma_n^t} \left( \rho \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \mu |\nabla u|^2 \right) d\sigma \right.$$

Par la formule de Green :

$$\int \mu \nabla \frac{\partial u}{\partial t} \nabla u = - \int_{\Omega_n^t} \operatorname{div} (\mu \nabla u) \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{\Gamma_n^t} \mu \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} d\sigma$$

Par suite, compte tenu de l'équation satisfaite par  $u$  avec  $f = 0$ , il vient :

$$\frac{d}{dt} E(u, \Omega_n^t, t) = - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ V \left( \rho \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \mu |\nabla u|^2 \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} \right\} d\sigma$$

Comme  $|\nabla u|^2 = |\nabla_{\Gamma} u|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2$

$$\left| \frac{d}{dt} E(u, \Omega_n^t, t) = - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mu V |\nabla_{\Gamma} u|^2 d\sigma \right. \\
\left. - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left\{ V \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} \right\} d\sigma \right.$$

Or

$$\left| V \left( \rho \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 + \mu \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} = \right. \\
= \rho V \left( \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 - 2 \frac{c^2}{V} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial t} + c^2 \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right) \\
= \rho V \left( \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right| - \frac{c^2}{V} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \right\}^2 + c^2 \left( 1 - \frac{c^2}{V^2} \right) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 \right)$$

Donc finalement :

$$(2.36) \quad \left| \begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u, \Omega_n^t, t) = & -\frac{1}{2} \int \mu V |\nabla_{\Gamma} u|^2 d\sigma - \frac{1}{2} \int \rho V \left| \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c^2}{V} \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma \\ & - \frac{1}{2} \int \mu V \left(1 - \frac{c^2}{V^2}\right) \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\sigma \end{aligned} \right.$$

Pour avoir  $\frac{d}{dt} E(u, \Omega_n^t, t) \leq 0$ , il suffit que :

$$1 - \frac{c^2}{V^2} \geq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^N$$

et il suffit donc de choisir  $V = c^+$ . Avec  $V = c^+$  on a donc l'inégalité :

$$E(u, \Omega_n^t, t) \leq E(u, \Omega_n^t, 0)$$

Mais par construction :

$$\begin{aligned} E(u, \Omega_n^t, 0) &= 0 \\ \implies E(u, \Omega_n^t, t) &= 0 \\ \implies u(x, t) &= 0 \text{ dans } \Omega_n^t \\ \implies \text{supp } u(\cdot, t) &\subset \Omega_n^t \end{aligned}$$

Remarquons que si  $f$  n'est pas nul, on a l'inégalité :

$$\frac{d}{dt} E(u, \Omega_n^t, t) \leq \int_{\Omega} f \frac{\partial u}{\partial t} dx dt$$

Dans ce cas c'est le lemme de Gronwall qui permet de conclure.

Le raisonnement étant valable pour tout  $n \in S^{N-1}$ , sphère unité de  $\mathbf{R}^N$ , on a :

$$\left| \begin{aligned} \text{supp } u(\cdot, t) \subset \bigcap_{n \in S^{N-1}} \Omega_n^t &= B(0, R + c^+ t) \\ &= B(0, R) + B(c^+ t) \end{aligned} \right.$$

Le résultat est donc démontré lorsque  $K$  est une boule. Dans le cas général, il suffit d'utiliser le principe de superposition et le théorème 6 après avoir remarqué que tout compact est "limite" d'une réunion finie de boules fermées. Pour les détails nous renvoyons le lecteur à la partie sur les équations de Maxwell. ■

**Exercice 3** : Adapter la démonstration du résultat précédent pour démontrer le théorème lorsque  $f \neq 0$ . (Supposer que les données sont de classe  $C^\infty$ ).



## 2.8 L'équation des ondes en dimension 1, formule de D'Alembert

Nous considérons maintenant l'équation des ondes 1D avec vitesse de propagation constante égale à  $c$ . Nous nous intéressons à la solution du problème :

$$(2.37) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

**Théorème 9** *La solution  $u$  du problème (2.37) est donnée par la formule de D'Alembert :*

$$(2.38) \quad \begin{cases} u(x, t) = \frac{1}{2} \{u_0(x + ct) + u_0(x - ct)\} \\ \quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi \end{cases}$$

**Démonstration :** Nous utiliserons le changement de variable :

$$\xi = x + ct \quad \eta = x - ct$$

et introduisons la fonction :

$$U(\xi, \eta) = u(x, t)$$

dont il est facile de vérifier qu'elle satisfait

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Nous en déduisons qu'il existe deux fonctions d'une variable  $f(\cdot)$  et  $g(\cdot)$  telles que :

$$U(\xi, \eta) = f(\eta) + g(\xi)$$

En revenant à l'inconnue originale  $u$ , nous obtenons :

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

Pour obtenir  $f$  et  $g$  nous utilisons les conditions initiales :

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad \implies f(x) + g(x) = u_0(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad \implies c\{f'(x) - g'(x)\} = u_1(x)$$

Nous en déduisons qu'il existe une constante  $A$  telle que :

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x u_1(t) dt + A \\ f(x) + g(x) = u_0(x) \end{cases}$$

d'où nous tirons les identités :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(t)dt + \frac{A}{2} \\ g(x) = \frac{1}{2}u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(t)dt - \frac{A}{2} \end{cases}$$

expressions dont le résultat annoncé se déduit aisément. Le lecteur notera que, contrairement aux fonctions  $f$  et  $g$ , la quantité  $f(x - ct) + g(x + ct)$  est indépendante de  $A$ . ■

**Remarque 16** Nous avons établi ci-dessus un résultat intermédiaire important qui exprime que toute solution de l'équation des ondes homogènes  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  se décompose sous la forme :

$$u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t)$$

où :

- $u^+(x, t) = f(x - ct)$  est une onde progressive se propageant à la vitesse  $c$  dans la direction  $x > 0$  :

$$u^+(x + L, t) = u^+(x, t - \frac{L}{c})$$

(le graphe de  $x \rightarrow u(x, t+T)$  se déduit de celui de  $x \rightarrow u(x, t)$  par une simple translation de  $L = ct$  vers la droite).

- $u^-(x, t) = g(x + ct)$  est une onde progressive se propageant à la vitesse  $c$  dans la direction  $x < 0$ .

$$u^-(x - L, t) = u^-(x, t - \frac{L}{c})$$

(le graphe de  $x \rightarrow u(x, t+T)$  se déduit de celui de  $x \rightarrow u(x, t)$  par une simple translation de  $L = ct$  vers la gauche).

Le théorème 9 est pour nous l'occasion d'une première incursion dans la notion de solution élémentaire (où fonction de Green) qui sera introduite au prochain paragraphe. Considérons la solution  $u^\varepsilon$  associées aux données initiales :

$$\begin{cases} u^\varepsilon(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = \delta^\varepsilon(x) \end{cases}$$

où  $\delta^\varepsilon(x)$  est une fonction telle que, lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0 :

$$\delta^\varepsilon \rightarrow \delta \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

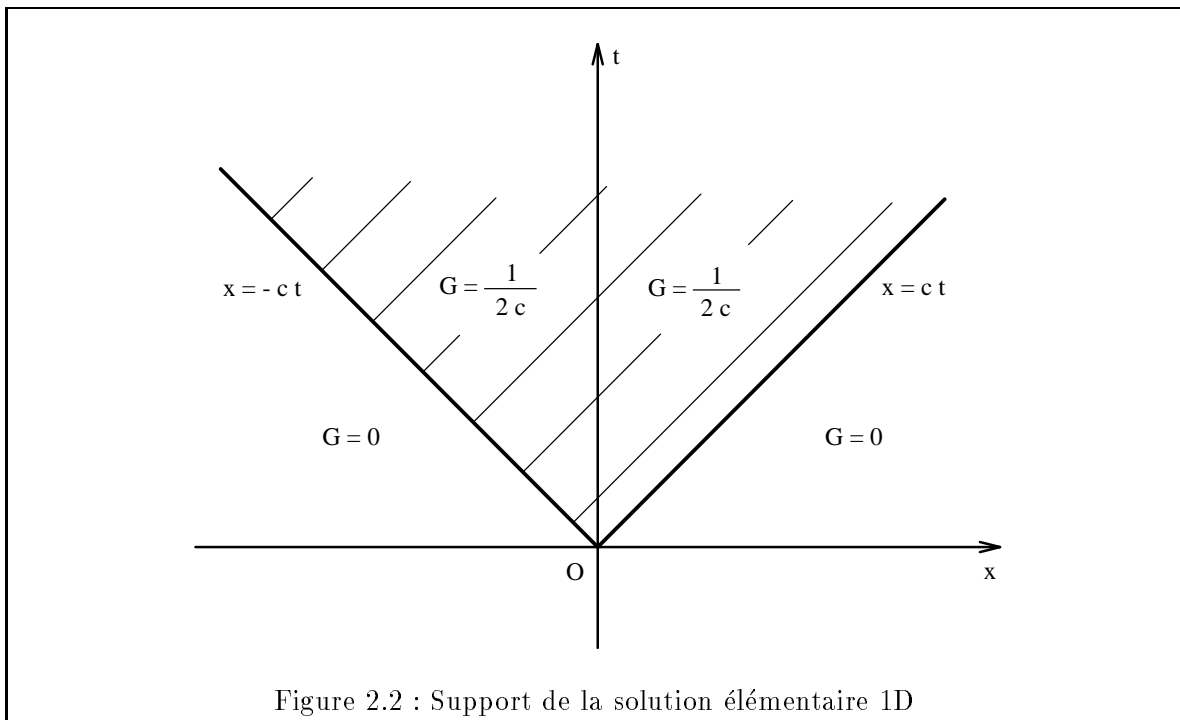
Il est facile de voir sur la formule (2.38) que, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a :

$$u^\varepsilon(x, t) \rightarrow G(x, t) \text{ presque partout}$$

où la fonction  $G(x, t)$  est donnée par :

$$(2.39) \quad \begin{cases} G(x, t) = \frac{1}{2c} & \text{si } x \in [-ct, ct] \\ G(x, t) = 0 & \text{si } |x| > ct \end{cases}$$

**Exercice 4** Démontrer le résultat précédent.



Il est alors facile de vérifier que la formule (2.38) s'écrit encore :

$$(2.40) \quad \left| \begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbf{R}} G(x, y, t) u_1(y) dy \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\mathbf{R}} G(x - y, t) u_0(y) dy \right) \end{aligned} \right.$$

Cette formule est en fait générale car elle s'étend, ainsi que nous le verrons au paragraphe 9 à n'importe quelle dimension d'espace. Par définition la fonction  $G(x, t)$  est la fonction de Green ou solution élémentaire de l'équation des ondes 1D (2.37).

Cette fonction de Green sert également à représenter la solution du problème avec second membre :

$$(2.41) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \\ u(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Nous verrons dans le chapitre qui suit que la solution de ce problème s'écrit :

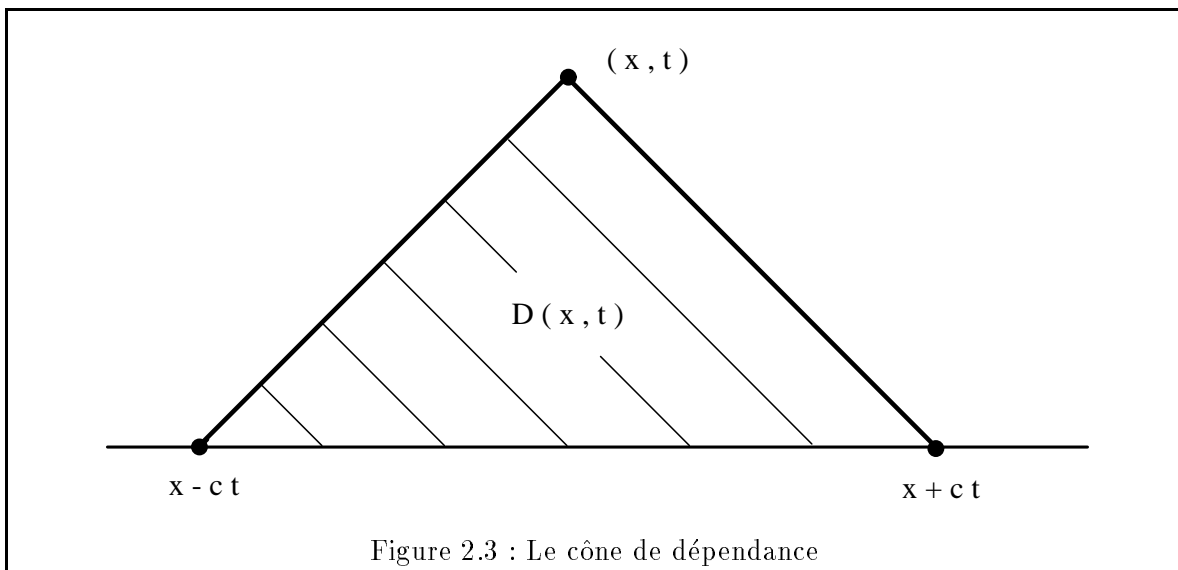
$$(2.42) \quad u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(x - y, t - s) f(y, s) dy ds$$

Dans notre cas particulier cette formule devient :

$$(2.43) \quad u(x, t) = \frac{1}{2c} \int \int_{D_{x,t}} f(y, s) dy ds$$

où  $D_{x,t}$  est le cône caractéristique issu du point  $(x, t)$  :

$$(2.44) \quad D(x, t) = \left\{ (y, s) / 0 \leq s \leq t, |y - x| \leq c(t - s) \right\}$$



**Exercice 5** : Démontrer directement la formule (2.43) en décomposant l'équation des ondes (2.41) en la succession de deux équations de transport :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial t} - c \frac{\partial v}{\partial x} = f \\ v(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = v \\ u(x, 0) = 0 \end{array} \right.$$

et en utilisant la méthode des caractéristiques pour résoudre chaque équation de transport.

## 2.9 Les solutions dans tout l'espace homogène - Notion de fonction de Green

Nous considérons l'équation :

$$(2.45) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f \quad x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad x \in \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \quad x \in \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

où la vitesse  $c$  est ici une constante  $> 0$ .

Nous allons résoudre (2.45) par transformation de Fourier en espace.

### Rappels sur la transformation de Fourier dans $\mathbb{R}^N$

Nous considérons ici la transformation définie de  $L^1(\mathbb{R}^N)$  dans  $C^0(\mathbb{R}^N)$  par :

$$(2.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F} : \quad L^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^N) \\ u(x) \rightarrow \hat{u}(k) \\ \hat{u}(k) = \int_{\mathbb{R}^N} u(x) e^{-ikx} dx \end{array} \right.$$

(Nous nous plaçons dans le cadre des fonctions à valeurs complexes)

Il est bien connu que  $\mathcal{F}$  applique de façon bijective l'espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$  dans lui-même et que la formule d'inversion est alors donnée par :

$$(2.47) \quad u(x) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} \hat{u}(k) e^{ikx} dk$$

Par dualité on peut prolonger la transformation de Fourier à l'espace  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  des distributions tempérées dans  $\mathbb{R}^N$  par :

$$\forall \mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N), \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \quad \langle \mathcal{F}\mu, \varphi \rangle = \langle \mu, \mathcal{F}\varphi \rangle$$

Il est alors facile de voir que cette définition prolonge à  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$  celle donnée dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$ . Egalement on vérifie les propriétés suivantes :

$$(2.48) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}\delta = 1 \\ \mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g) \quad (\text{si } f * g \text{ existe}) \end{array} \right.$$

Enfin, on peut étendre par densité de  $L^1 \cap L^2$  dans  $L^2$ , la transformation de Fourier à l'espace  $L^2(\mathbb{R}^N)$  en une application bijective de  $L^2$  dans lui même vérifiant en outre les relations de Plancherel-Parceval :

$$(2.49) \quad \left\{ \begin{array}{l} (2\pi)^N (\hat{u}, \hat{v}) = (u, v) \\ (2\pi)^N \|\hat{u}\|^2 = \|u\|^2 \end{array} \right.$$

On a les formules :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{u}(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| \leq R} u(x) e^{-ikx} dx \\ u(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|k| \leq R} \hat{u}(k) e^{ikx} \frac{dk}{(2\pi)^N} \end{array} \right.$$

les limites devant être prises au sens de  $L^2(\mathbb{R}^N)$ . Enfin, on a la propriété fondamentale :

$$(2.50) \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = ik_j(\mathcal{F}u) \quad \forall u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

### Application à la résolution de (2.45)

Désignons par  $\hat{u}(k, t)$  la transformée de Fourier en espace de  $u(x, t)$ , nous avons pour chaque  $k$  l'équation différentielle ordinaire :

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \hat{u}}{dt^2}(k, t) + c^2 |k|^2 \hat{u}(k, t) = \hat{f}(k, t) \\ \hat{u}(k, 0) = \hat{u}_0(k) \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial t}(k, 0) = \hat{u}_1(k) \end{array} \right.$$

équation qui se résout aisément :

$$(2.52) \quad \left| \begin{aligned} \hat{u}(k, t) = & \hat{u}_0(k) \cos(c|k|t) + \hat{u}_1(k) \left[ \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|} \right] \\ & + \int_0^t \frac{\sin(c|k|(t-s))}{c|k|} \hat{f}(k, s) ds \end{aligned} \right.$$

Introduisons alors la fonction, continue sur  $\mathbf{R}^N$ , définie par :

$$(2.53) \quad \hat{G}(k, t) = \frac{\sin(c|k|t)}{c|k|}$$

Il est facile de voir que la formule (2.52) se réécrit :

$$(2.54) \quad \left| \begin{aligned} \hat{u}(k, t) = & \frac{d}{dt} (\hat{G}(k, t) \hat{u}_0(k)) + \hat{G}(k, t) \hat{u}_1(k) \\ & + \int_0^t \hat{G}(k, t-s) \hat{f}(k, s) ds \end{aligned} \right.$$

Il est clair que pour tout  $t$  la fonction  $k \rightarrow \hat{G}(k, t)$  est dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$ . Mieux on a :

$$\hat{G}(., t) \in C^0(\mathbf{R}^+; \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N))$$

au sens où :

$$t_n \rightarrow t \implies \hat{G}(., t_n) \rightarrow \hat{G}(., t) \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$$

Nous pouvons introduire alors pour chaque  $t$  la distribution tempérée

$$(2.55) \quad G(., t) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}(\hat{G}(., t)) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$$

(qu'on notera parfois  $G(x, t)$  avec un abus de notation). Par continuité de la transformation de Fourier dans  $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^N)$  on a :

$$G(., t) \in C^0(\mathbf{R}^+; \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N))$$

et, avec les propriétés de  $\mathcal{F}$  vis à vis de la convolution, on a :

$$(2.56) \quad \left\{ \begin{aligned} u(., t) &= \frac{\partial}{\partial t} (G(., t) * u_0) + G(., t) * u_1 \\ &+ \int_0^t \hat{G}(., t-s) * f(., s) ds \end{aligned} \right.$$

\* désignant le produit de convolution en espace.

Par abus de notation, on pourra écrire :

$$\left| \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \int G(x-y, t) u_0(y) dy \right) + \int G(x-y, t) u_1(y) dy \\ &+ \int_0^t \int G(x-y, t-s) f(y, s) dy ds \end{aligned} \right.$$

On retrouve là la structure de la formule trouvée en 1D ce qui prouve que, pour  $N = 1$

$$G(x, t) = \frac{1}{2c} \chi_{[-ct, ct]}(x)$$

Il est d'ailleurs bien connu que la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de l'intervalle  $[-ct, ct]$  est  $2 \frac{\sin(|k|ct)}{|k|}$ .

**Exercice 6** : Démontrer ce résultat.

On notera que si on fait  $u_0 = f = 0$  et  $u_1 = \delta$  on obtient  $u(\cdot, t) = G(\cdot, t)$ . En d'autres termes  $G(\cdot, t)$  est solution du problème suivant :

$$(2.57) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - c^2 \Delta G = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^N \\ G(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t}(x, 0) = \delta(x) \end{cases}$$

toutes les inégalités étant à prendre au sens des distributions. Par définition,  $G(\cdot, t)$  est la fonction de Green ou solution fondamentale de l'équation des ondes dans  $\mathbb{R}^N$  (ou solution élémentaire).

Nous verrons que la régularité en espace de la distribution  $x \rightarrow G(x, t)$  dépend de la dimension d'espace  $N$ . On notera en particulier que la fonction  $k \rightarrow \hat{G}(k, t)$  n'est jamais dans  $L^1(\mathbb{R}^N)$ , ce qui permet de prévoir que  $x \rightarrow G(x, t)$  ne sera jamais continue alors que  $k \rightarrow \hat{G}(k, t)$  n'est dans  $L^2(\mathbb{R}^N)$  que pour  $N = 1$  (en effet  $\frac{1}{2c} \chi_{[-ct, ct]}$  est bien dans  $L^2(\mathbb{R})$ ).

Nous verrons en fait que la singularité de  $G(x, t)$  en tant que distribution sur  $\mathbb{R}^N$  augmente avec la dimension d'espace  $N$ . Ainsi :

$$\begin{cases} N = 1 & G(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}) \\ N = 2 & G(\cdot, t) \in L^1(\mathbb{R}^2) \\ N = 3 & G(\cdot, t) \text{ est une mesure sur } \mathbb{R}^3 \end{cases}$$

**Exercice 7** Démontrer que  $G(\cdot, t) \in L^2(\mathbb{R}^N)$  si et seulement si  $N = 1$ .

## 2.10 Calcul de la solution fondamentale de l'équation des ondes en dimensions 2 et 3

### 2.10.1 Calcul de la solution fondamentale en dimension 3

Notion d'onde sphérique



On appelle onde sphérique dans  $\mathbf{R}^N$ , toute solution de l'équation des ondes de la forme :

$$(2.58) \quad u(x, t) = u(r, t) \text{ avec } r = |x| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{\frac{1}{2}}$$

Nous allons voir que la recherche des ondes sphériques fait jouer un rôle particulier à la dimension 3. Notons que :

$$\left\| \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(u(r, t)) &= \frac{x_i}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u(r, t)) &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x_i^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x_i^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \\ \Delta u(r, t) &= \frac{N-1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \end{aligned} \right.$$

Rappelons que :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\varphi\Psi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \Psi + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \varphi \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}$$

Introduisons alors  $v = r^{\frac{N-1}{2}} u$ . Un calcul simple donne :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(v) = r^{\frac{N-1}{2}} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (N-1)r^{\frac{N-1}{2}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{(N-1)(N-3)}{4} r^{\frac{N-1}{2}-2} u$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{N-1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r^{\frac{N-1}{2}}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{(N-1)(N-3)}{4} \frac{v}{r^2} \right)$$

Autrement dit si  $u(r, t)$  est une onde sphérique,  $v = r^{\frac{N-1}{2}} u$  est solution de l'équation :

$$(2.59) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{(N-1)(N-3)}{4} c^2 \frac{v}{r^2} = 0$$

qui apparaît comme une équation des ondes 1D perturbée. Toutefois pour  $N = 3$ , le terme de perturbation disparaît ce qui signifie que, en dimension 3, toute onde sphérique est de la forme :

$$(2.60) \quad u(r, t) = \frac{1}{r} v(r, t)$$

où  $v$  est une solution de l'équation des ondes 1D

$$(2.61) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = 0$$

Autrement dit, en dimension 3, toute onde sphérique est de la forme

$$(2.62) \quad u(r, t) = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right)$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \text{ est une onde sphérique divergente} \\ \frac{1}{r} g\left(t + \frac{r}{c}\right) \text{ est une onde sphérique convergente} \end{array} \right.$$

Définition et résolution d'un problème approché

Nous allons concrétiser la solution par un procédé limite :

$$(2.63) \quad G(., t) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} u^\varepsilon(., t)$$

(la limite étant prise au sens des distributions) où  $u^\varepsilon(x, t)$  est la solution du problème :

$$(2.64) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial t^2} - c^2 \Delta u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}(x, 0) = \delta_\varepsilon(x) \end{cases}$$

où  $\delta_\varepsilon(x)$  est une approximation de la distribution  $\delta(x)$

$$\delta_\varepsilon \rightarrow \delta \quad \text{dans } S'(\mathbf{R}^3)$$

Nous choisisons :

$$(2.65) \quad \begin{cases} \delta_\varepsilon(x) = \left(\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3\right)^{-1} & \text{si } |x| < \varepsilon \\ \delta_\varepsilon(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Notons que par construction  $\delta_\varepsilon \in L^2(\mathbf{R}^2)$  de telle sorte que nous savons que (cf solutions faibles)

$$u^\varepsilon \in C^1(\mathbf{R}^+; L^2) \cap C^0(\mathbf{R}^+; H^1)$$

en particulier :

$$\forall t \geq 0 \quad u^\varepsilon(., t) \in H^1(\mathbf{R}^3)$$

Nous cherchons naturellement la solution à symétrie sphérique puisque la donnée  $\delta_\varepsilon(x)$  est elle même à symétrie sphérique. Autrement dit nous posons :

$$u^\varepsilon(x, t) = \frac{1}{|x|} v^\varepsilon(|x|, t)$$

La fonction  $v^\varepsilon(r, t)$  vérifiant :

$$(2.66) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v^\varepsilon}{\partial r^2} = 0 & r > 0, t > 0 \\ v^\varepsilon(r, 0) = 0 \\ \frac{\partial v^\varepsilon}{\partial t}(r, 0) = \varphi_\varepsilon(r) \end{cases}$$

où  $\varphi_\varepsilon(r)$  est la fonction définie par :

$$\begin{cases} \varphi_\varepsilon(r) = \left(\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3\right)^{-1} & \text{si } r < \varepsilon \\ \varphi_\varepsilon(r) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Au système (2.66), il convient d'adjoindre la condition aux limites en  $r = 0$

$$(2.67) \quad v^\varepsilon(0, t) = 0$$

qui provient de  $v^\varepsilon(r, t) = ru^\varepsilon(r, t)$ .

**Exercice 8** : Vérifier que  $u^\varepsilon(x, t) \in H^1(\mathbf{R}^3) \implies v^\varepsilon(r, t) \in H^1(0, +\infty) \subset C^0(0, +\infty)$ .

Pour résoudre ((2.66), (2.67)), nous utilisons le principe de réflexion ou principe des images qui exprime (exercice) que  $v^\varepsilon(r, t)$  est la restriction des images à  $r > 0$  de la fonction  $\tilde{v}^\varepsilon(r, t)$  définie pour  $r \in \mathbf{R}$  comme étant la solution du problème :

$$(2.68) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{v}^\varepsilon}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}^\varepsilon}{\partial r^2} = 0 & r \in \mathbf{R}, t > 0 \\ \tilde{v}^\varepsilon(r, 0) = 0 & r \in \mathbf{R} \\ \frac{\partial \tilde{v}^\varepsilon}{\partial t}(r, 0) = \tilde{\varphi}_\varepsilon(r) & r \in \mathbf{R} \end{cases}$$

où  $\tilde{\varphi}_\varepsilon(r)$  est défini par :

$$(2.69) \quad \begin{cases} \tilde{\varphi}_\varepsilon(r) = \left(\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3\right)^{-1} & \text{si } |r| < \varepsilon \\ \tilde{\varphi}_\varepsilon(r) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On notera que  $\tilde{\varphi}_\varepsilon(r)$  étant impaire, on a  $\int_{\mathbf{R}} \tilde{\varphi}_\varepsilon(r) dr = 0$ .

Nous pouvons utiliser pour la solution de (2.68) la formule de D'Alembert. Nous obtenons :

$$(2.70) \quad \tilde{v}_\varepsilon(r, t) = \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) d\xi$$

On notera en particulier que :

$$\text{supp } \tilde{v}_\varepsilon(\cdot, t) \subset [ct - \varepsilon, ct + \varepsilon] \cup [-ct - \varepsilon, -ct + \varepsilon]$$

En effet si  $r$  n'appartient pas à l'un de ces deux intervalles, on est dans l'une des deux situations :

$$\text{supp } \varphi_\varepsilon \subset [r - ct, r + ct]$$

ou

$$\text{supp } \varphi_\varepsilon \cap [r - ct, r + ct] = \emptyset$$

Dans tous les cas,  $\int_{r-ct}^{r+ct} \varphi_\varepsilon(\xi) d\xi = 0$ . Fixons  $t > 0$ , pour  $\varepsilon < ct$ , nous savons que :

$$\text{supp } \tilde{v}_\varepsilon(\cdot, t) \cap \mathbb{R}^+ = [ct - \varepsilon, ct + \varepsilon]$$

Donc :

$$(2.71) \quad \begin{cases} \text{supp } v_\varepsilon(\cdot, t) = [ct - \varepsilon, ct + \varepsilon] \\ v_\varepsilon(r, t) = \frac{1}{2c} \int_{r-ct}^{r+ct} \tilde{\varphi}_\varepsilon(\xi) d\xi \end{cases}$$

Il est facile à partir de cette formule de voir que le graphe de  $r \rightarrow v_\varepsilon(r, t)$  est un arc de parabole tronqué. Plus précisément, pour  $t > \frac{\varepsilon}{c}$ , nous avons :

$$(2.72) \quad \begin{aligned} v^\varepsilon(r, t) &= f_\varepsilon(r - ct) \\ u^\varepsilon(r, t) &= \frac{1}{r} f_\varepsilon(r - ct) \end{aligned}$$

où  $f_\varepsilon(x)$  est un arc de parabole à support dans  $[-\varepsilon, \varepsilon]$

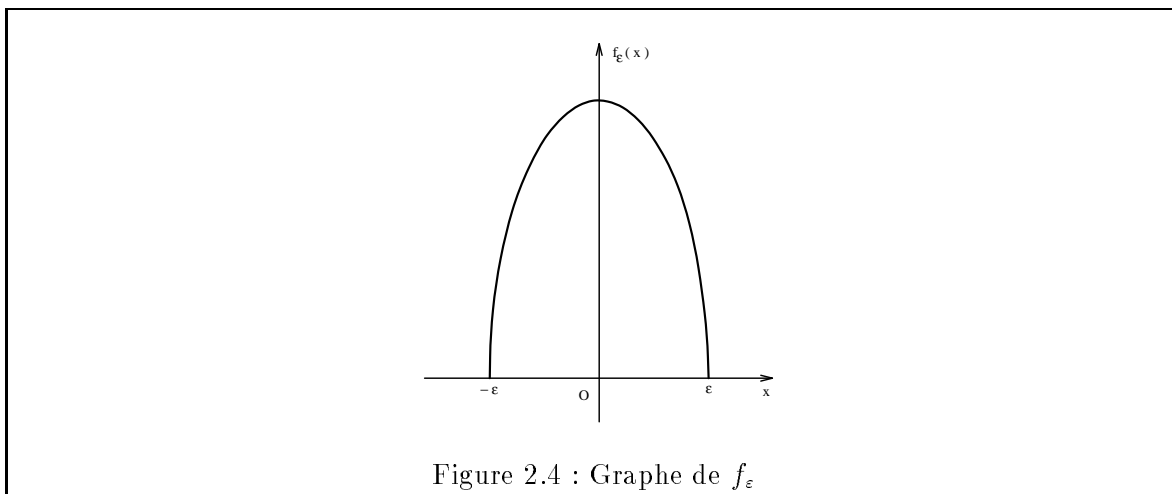


Figure 2.4 : Graphe de  $f_\varepsilon$

A partir de (2.71), il est facile de voir que :

$$\left| \begin{aligned} A^\varepsilon &= \frac{1}{2c} \int_0^\varepsilon \varphi^\varepsilon(x) dx \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^\varepsilon \left(\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3\right)^{-1} x dx = \frac{3}{8\pi\varepsilon c} \end{aligned} \right.$$

Autrement dit :

$$(2.73) \quad f_\varepsilon(x) = \frac{3}{8\pi\varepsilon c} \left(1 - \frac{x^2}{\varepsilon^2}\right)$$

Passage à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ 

Notons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{supp } f_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon] \\ \int f_\varepsilon(x) dx = \frac{3}{8\pi\varepsilon c} \left( \varepsilon - \frac{\varepsilon}{3} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon c} \\ f_\varepsilon(x) \geq 0 \end{array} \right.$$

C'est un résultat classique de la théorie des distributions que :

$$f_\varepsilon \rightarrow \frac{1}{4\pi c} \delta \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbf{R})$$

**Exercice 9** : Démontrer ce résultat.

Par suite, si  $\Theta(r)$  désigne une fonction continue de la variable  $r$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f_\varepsilon(r - ct) \Theta(r) dr = \frac{\Theta(ct)}{4\pi c}$$

Nous allons voir que :

$$(2.74) \quad G(., t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(., t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \delta(|x| - ct)$$

c'est à dire une distribution mesure portée par la sphère de centre 0 et de rayon  $ct$ . Pour cela nous écrivons :

$$\langle u^\varepsilon(., t), \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^3} u^\varepsilon(x, t) \varphi(x) dx$$

Nous passons en coordonnées sphériques :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\omega \quad |\omega| = 1 \\ dx = r^2 dr d\omega \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \langle u^\varepsilon(., t), \varphi \rangle &= \int_{S^2} \left( \int_0^{+\infty} \frac{1}{r} f_\varepsilon(r - ct) \varphi(r\omega) r^2 dr \right) d\omega \\ \text{(Fubini)} \quad &= \int_0^{+\infty} f_\varepsilon(r - ct) \Theta(r) dr \end{aligned}$$

où nous avons posé :

$$\Theta(r) = r \left( \int_{S^2} \varphi(r\omega) d\omega \right)$$

Donc :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \langle u^\varepsilon(\cdot, t), \varphi \rangle = \frac{\Theta(ct)}{4\pi c} = \frac{1}{4\pi c} \int_{S^2} \varphi(ct\omega) ct \, d\omega$$

En faisant le changement de variable  $X = ct\omega$ , comme  $d\sigma = c^2 t^2 d\omega$  sur la sphère de rayon  $ct$ , il vient :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \langle u^\varepsilon(\cdot, t), \varphi \rangle = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|x|=ct} \varphi(x) d\sigma(x)$$

**Remarque 17** La solution élémentaire  $G(\cdot, t)$  est indifféremment définie par l'une de ces deux formules :

$$\begin{cases} G(\cdot, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \delta(|x| - ct) \\ G(\cdot, t) = \frac{1}{4\pi c|x|} \delta(|x| - ct) \end{cases}$$

Application à l'expression de la solution de l'équation des ondes. Principe d'Huyghens

En appliquant la formule générale (2.56) à notre cas nous obtenons :

$$(2.75) \quad \left| \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi ct} \int_{|y|=ct} u_0(x-y) d\sigma(y) \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi ct} \int_{|y|=ct} u_1(x-y) d\sigma(y) \\ &+ \int_0^t \frac{1}{4\pi cs} \left( \int_{|y|=cs} f(x-y, t-s) d\sigma(y) \right) ds \end{aligned} \right.$$

où encore la formule équivalente :

$$(2.76) \quad \left| \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi ct} \int_{|x-y|=ct} u_0(y) d\sigma(y) \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi ct} \int_{|x-y|=ct} u_1(y) d\sigma(y) \\ &+ \frac{1}{4\pi c} \int_0^t \frac{1}{(t-s)} \int_{|x-y|=cs} f(y, s) d\sigma(y) ds \end{aligned} \right.$$

Nous nous intéressons maintenant au cas du problème de Cauchy et supposons que les données initiales  $(u_0, u_1)$  sont à support compact. La formule (2.76) nous permet d'avoir une idée plus précise du support de la solution à un instant donné par :

$$U(x, t) = \int_{|x-y|=ct} \varphi(y) dy$$

où  $\varphi$  est à support compact dans  $\mathbf{R}^3$ .  $U(x, t)$  est donc le résultat de l'intégration de  $\varphi$  sur la sphère de rayon  $r$  et de centre  $x$ . Si la distance de  $x$  au support de  $\varphi$  est supérieure à  $ct$ , on obtient évidemment 0. On retrouve là le phénomène de propagation à vitesse finie déjà rencontré. Si nous supposons que  $t$  est assez grand, à savoir  $t > \frac{1}{2c} \text{diam}(\text{supp } \varphi)$  alors il

Il y a une autre région en dehors de la région  $\text{dist}(x, \text{supp } \varphi) > ct$  en laquelle la fonction  $U(x, t)$  s'annule. Illustrons ceci en considérant ce qui se passe lorsque le support de  $\varphi$  (ou ici, le support des données) est une sphère de rayon  $R$ . Dans ce cas, dès que  $t > \frac{R}{c}$ , le support de la solution est une couronne sphérique comprise entre les sphères de rayon  $t - \frac{R}{c}$  et  $t + \frac{R}{c}$ . Autrement dit, au bout d'un certain temps, il se forme un trou dans le support de la solution c'est à dire il y a formation de deux fronts d'onde, un front d'onde avant et un front d'onde arrière qui dans ce cas précis sont les sphères de rayons respectifs  $ct + R$  et  $ct - R$ .

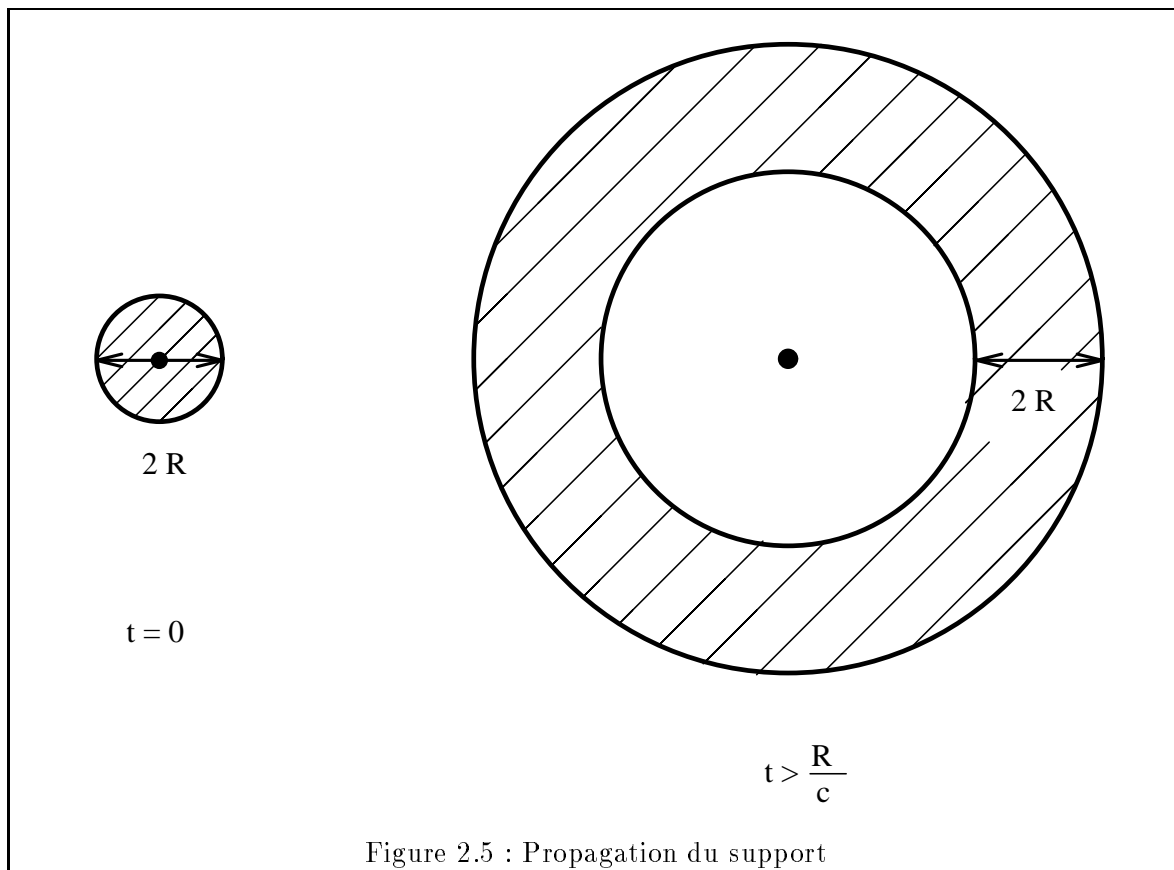


Figure 2.5 : Propagation du support

Dans le cas par exemple où le support des données initiales est un convexe, il est facile de voir que si  $[A, B]$  correspond à un diamètre de ce convexe, le trou va se créer au temps  $t = \frac{1}{2c} \text{diam}(\text{supp donnée au point } I \text{ milieu de } AB)$ . La lacune va alors se développer autour de ce point. Une autre façon de considérer ce phénomène, également appelé principe d'Huyghens est d'examiner la solution en un point  $x$  au cours du temps. On a le double phénomène suivant :

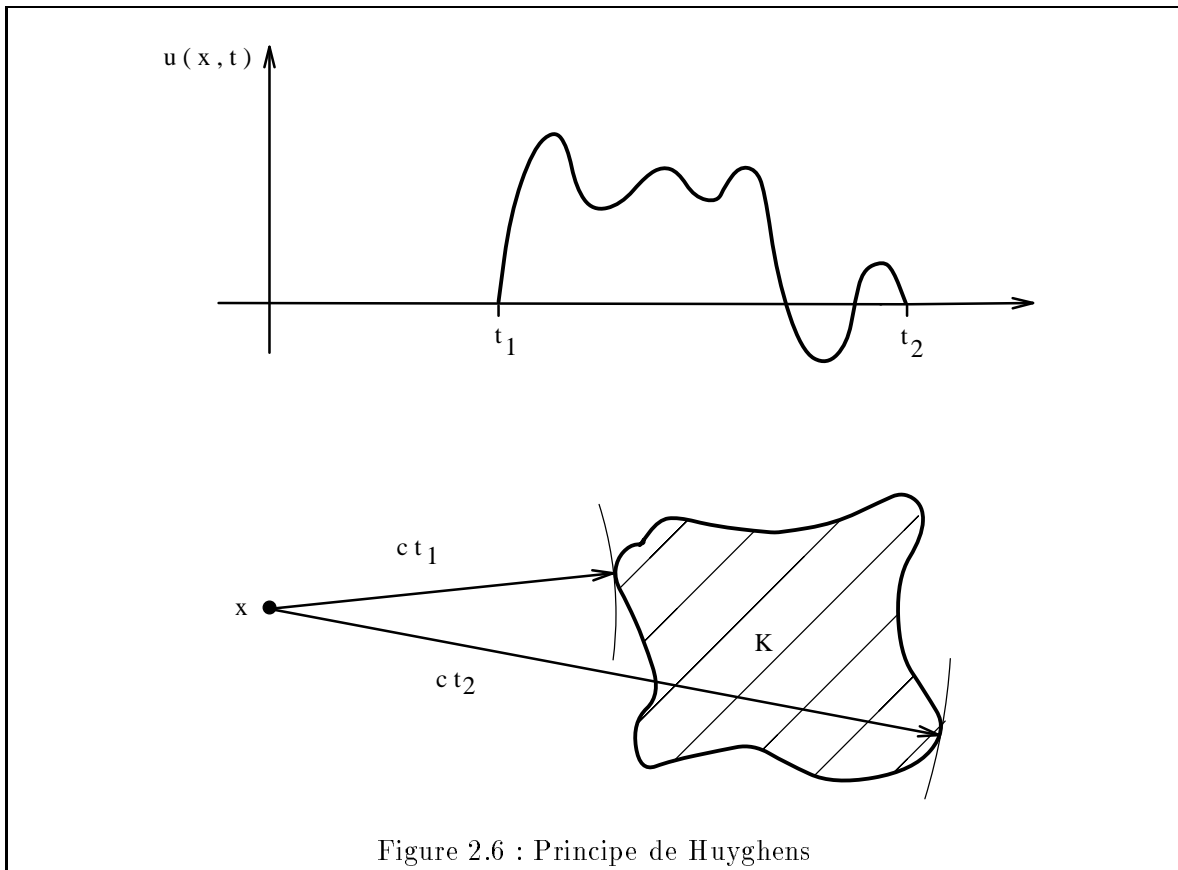
- Si  $x \notin \text{support}\{\text{données}\}$ , il existe un instant  $t_1 > 0$  tel que  $t < t_1 \implies u(x, t) = 0$ . Cet instant  $t_1$  est évidemment donné par ( $K$  étant le support des données) :

$$t_1 = \frac{1}{c} \min\{|x - y|, y \in K\}$$

c'est ce qui illustre la propagation à vitesse finie.

-  $\forall x$ , il existe un temps  $t_2$  tel que pour  $t > t_2$ ,  $u(x, t) = 0$ . En effet pour  $t$  assez grand la sphère de centre  $x$  et de rayon  $ct$  va complètement englober le support des données. Il est clair que :

$$t_2 = \frac{1}{c} \max\{|x - y|, y \in K\}$$



### 2.10.2 Calcul de la solution élémentaire de l'équation des ondes en dimension 2

Nous allons utiliser la méthode de descente qui consiste à résoudre un problème en dimension 2 à partir de la résolution d'un problème posé en dimension 3. Nous nous intéressons ici à la résolution du problème :



$$(2.77) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x) \end{cases}$$

Nous supposons  $u_1(x)$  régulière à support compact pour simplifier. Soit  $\varphi(x_3)$  une fonction d'une variable  $C^\infty$  à support compact et d'intégrale unité :

$$(2.78) \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x_3) dx_3 = 1$$

Nous considérons alors le problème auxiliaire :

$$(2.79) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \tilde{u}(x, x_3, t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \quad (x = x_1, x_2) \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_2^2} \right) - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_3^2} = 0 \\ \tilde{u}(x, x_3, 0) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, x_3, 0) = u_1(x)\varphi(x_3) \end{array} \right.$$

Nous savons que ce problème admet une solution unique qui est à tout instant à support compact. Nous allons montrer que :

$$(2.80) \quad u(x, t) = \int \tilde{u}(x, x_3, t) dx_3$$

Pour cela, considérons la fonction :

$$v(x, t) = \int \tilde{u}(x, x_3, t) dx_3$$

Nous allons montrer que  $v$  est solution de (2.77). Il suffit alors d'invoquer le résultat d'unicité. Or :

$$\left| \begin{array}{l} v(x, 0) = \int \tilde{u}(x, x_3, 0) dx_3 = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = \int \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x, x_3, 0) dx_3 \\ \quad = \left( \int \varphi(x_3) dx_3 \right) u_1(x) = u_1(x) \end{array} \right.$$

D'autre part nous avons :

$$\int \left[ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_2^2} \right) - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_3^2} \right] dx_3 = 0$$

Or :

$$\int \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} dx_3 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \int \tilde{u} dx_3 \right) = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2}$$

$$\int \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_j^2} dx_3 = \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left( \int \tilde{u} dx_3 \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \quad j = 1, 2$$

et comme  $\tilde{u}$  est à support compact

$$\int \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_3^2} dx_3 = 0$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) = 0$$

ce que nous voulions démontrer. Nous savons que (cf formule (2.75))

$$(2.81) \quad \tilde{u}(x, x_3, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}} \tilde{u}_1(x - y) \varphi(x_3 - y_3) d\sigma(y, y_3)$$

où  $S_{ct} = \{(y, y_3) / |y|^2 + y_3^2 = c^2 t^2\}$  que nous décomposons en :

$$S_{ct} = S_{ct}^+ \cup S_{ct}^-$$

avec :

$$\begin{cases} (y, y_3) \in S_{ct}^+ \iff y_3 = +(c^2 t^2 - |y|^2)^{\frac{1}{2}} & |y| \leq ct \\ (y, y_3) \in S_{ct}^- \iff y_3 = -(c^2 t^2 - |y|^2)^{\frac{1}{2}} & |y| \leq ct \end{cases}$$

Ecrivons :

$$(2.82) \quad \left| \begin{aligned} \tilde{u}(x, x_3, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}^+} \tilde{u}_1(x - y) \varphi(x_3 - y_3) dr(y, y_3) \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}^-} \tilde{u}_1(x - y) \varphi(x_3 - y_3) dr(y, y_3) \end{aligned} \right.$$

Nous utilisons la paramétrisation  $y_3 = \pm(c^2 t^2 - |y|^2)^{\frac{1}{2}}$  sur  $S_{ct}^\pm$ . Nous avons :

$$\begin{cases} d\sigma(y, y_3) = (1 + |\nabla_y f|^2)^{\frac{1}{2}} dy \\ f(y) = (c^2 t^2 - |y|^2)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Un calcul simple donne :

$$d\sigma(y, y_3) = \left( 1 + \frac{|y|^2}{(c^2 t^2 - |y|^2)} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{ct}{(c^2 t^2 - |y|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Par conséquent :

$$(2.83) \quad \left| \begin{aligned} \tilde{u}(x, x_3, t) &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y| \leq ct} \frac{u_1(x-y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} \varphi(x_3 + \sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}) dy \\ &+ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|y| \leq ct} \frac{u_1(x-y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} \varphi(x_3 - \sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}) dy \end{aligned} \right.$$

Par le théorème de Fubini :

$$\left| \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi c} \int_{|y| \leq ct} \frac{u_1(x-y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} \left[ \int_{\mathbf{R}} \varphi(x_3 + \sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}) dx_3 \right] dy \\ &+ \frac{1}{4\pi c} \int_{|y| \leq ct} \frac{u_1(x-y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} \left[ \int_{\mathbf{R}} \varphi(x_3 - \sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}) dx_3 \right] dy \end{aligned} \right.$$

Mais,  $\forall |y| \leq ct$  :

$$\int_{\mathbf{R}} \varphi(x_3 - \sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}) dx_3 = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x_3 + \sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}) dx_3 = 1$$

Donc finalement :

$$(2.84) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_{|y| \leq ct} \frac{u_1(x-y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} dy$$

Sur cette formule nous pouvons identifier la solution élémentaire de l'équation des ondes en dimension 2 comme étant la fonction  $G(x, t)$  définie par :

$$(2.85) \quad \left\{ \begin{aligned} G(x, t) &= \frac{1}{2\pi c} \frac{1}{\sqrt{c^2 t^2 - |x|^2}} & \text{si } |x| \leq ct \\ G(x, t) &= 0 & \text{si } |x| > ct \end{aligned} \right.$$

On remarquera que la fonction  $x \rightarrow G(x, t)$  est à support compact, non bornée, discontinue mais que néanmoins  $x \rightarrow G(x, t) \in L^1(\mathbf{R}^2)$ , comme annoncé précédemment.

Nous sommes maintenant en mesure de donner l'expression de la solution du problème :

$$(2.86) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= f & x \in \mathbf{R}^2, t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x) & x \in \mathbf{R}^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= u_1(x) & x \in \mathbf{R}^2 \end{aligned} \right.$$

à savoir :

$$(2.87) \quad \left| \begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{|y| \leq ct} \frac{u_0(x-y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} dy \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi c} \int_{|y| \leq ct} \frac{u_1(x-y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |y|^2}} dy \\ &+ \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \int_{|y| \leq cs} \frac{f(x-y, t-s)}{\sqrt{c^2 s^2 - |y|^2}} dy ds \end{aligned} \right.$$

Notons que si on s'intéresse au problème de Cauchy ( $f = 0$ ) avec des données initiales  $(u_0, u_1)$  à support compact, la solution au point  $x$  résulte d'un calcul d'intégrale de ces données sur un disque (et non plus une sphère comme en dimension 3) de centre  $x$  et dont le rayon augmente proportionnellement au temps. Ainsi si le phénomène de propagation à vitesse finie persiste bien évidemment, il n'en est plus de même du phénomène de formation d'une lacune, d'un trou dans le support de la solution. Autrement dit, en un point  $x$  donné, il n'existe pas d'instant  $t$  au delà duquel la solution sera identiquement nulle comme en dimension 3. En revanche, on a bien :

$$(2.88) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t) = 0$$

On peut même préciser le comportement asymptotique de  $u(x, t)$ . Considérons tout d'abord le cas  $u_0 \equiv 0$  et désignons par  $K$  le support de  $u_1$ , supposé régulier.

Nous avons :

$$u(x, t) = \int_{|x-y| \leq ct} \frac{u_1(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}}$$

Pour  $t$  assez grand,  $\{y \in K\} \subset \{|x-y| \leq ct\}$  et donc

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_K (c^2 t^2 - |x-y|^2)^{-\frac{1}{2}} u_1(y) dy$$

Nous avons :

$$(c^2 t^2 - |x-y|^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{ct} + \frac{|x-y|^2}{2c^3 t^3} + \varepsilon(x, y, t)$$

$$\text{avec } \forall y \in K \quad \varepsilon(x, y, t) \leq \frac{C(x, K)}{t^5}$$

Par conséquent, nous avons le développement :

$$(2.89) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = \frac{1}{2\pi c^2 t} \left( \int u_1(y) dy \right) + \frac{1}{4\pi c^4 t^3} \left( \int |x-y|^2 u_1(y) dy \right) \\ r(x, t) \\ r(x, t) \leq \frac{c(x)}{t^5} \end{array} \right.$$

Considérons maintenant le cas  $u_1 \equiv 0$  et  $u_0$  à support compact  $K$ . Pour  $t$  assez grand :

$$\int_{|x-y| \leq ct} \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} dy = \int_K \frac{u_0(y)}{\sqrt{c^2 t^2 - |x-y|^2}} dy$$

Donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_K (c^2 t^2 - |x-y|^2)^{-\frac{1}{2}} u_0(y) dy \right) = -c^2 \left( \int_K (c^2 t^2 - |x-y|^2)^{-\frac{3}{2}} u_0(y) dy \right)$$

Par conséquent :

$$u(x, t) = \frac{ct}{2\pi} \int_K (c^2 t^2 - |x-y|^2)^{-\frac{3}{2}} u_0(y) dy$$

Or :

$$\begin{cases} (c^2 t^2 - |x - y|^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{c^3 t^3} + \frac{3}{2} \frac{|x - y|^2}{c^5 t^5} + \varepsilon(x, y, t) \\ \varepsilon(x, y, t) \leq \frac{C(x, K)}{t^7} \text{ pour } y \in K \end{cases}$$

Nous en déduisons le développement :

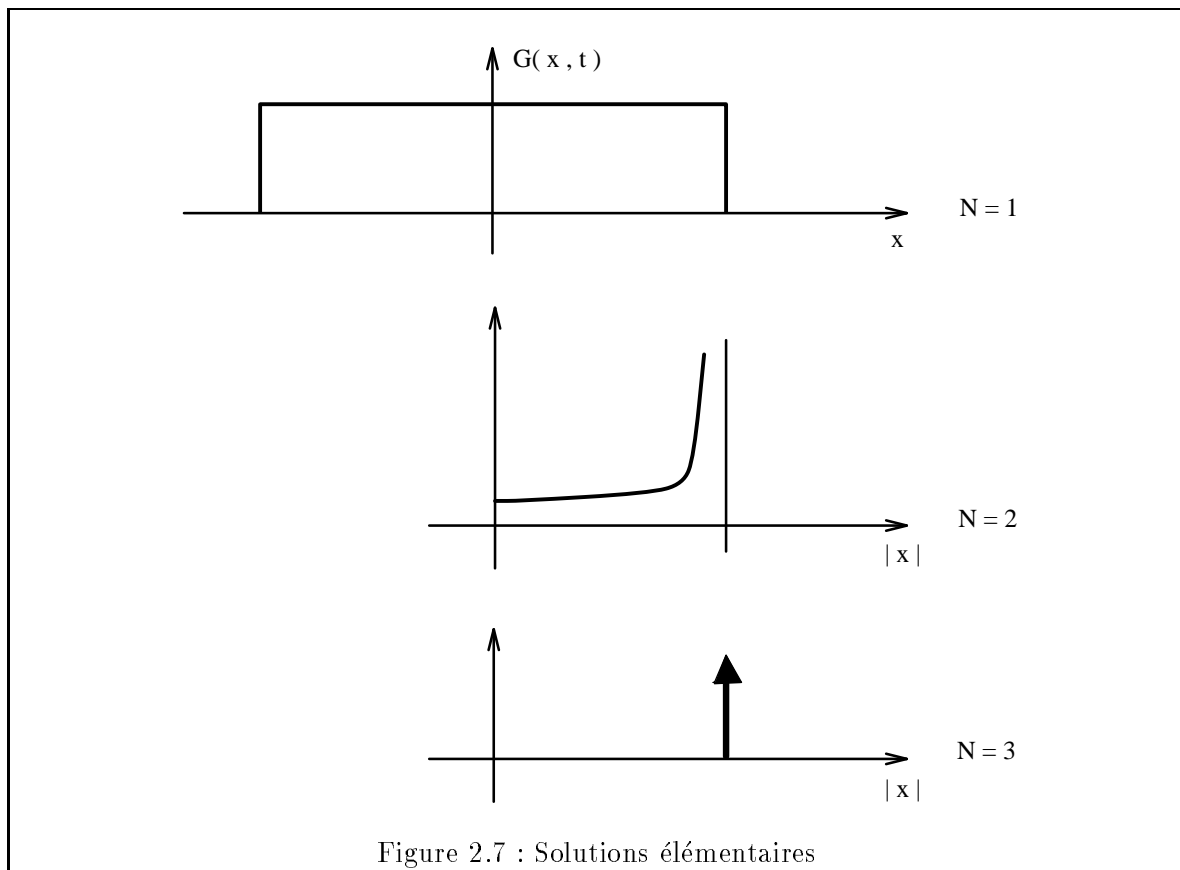
$$(2.90) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = \frac{1}{2\pi c^2 t^2} \left( \int u_0(y) dy \right) - \frac{3}{4\pi c^4 t^4} \left( \int |x - y|^2 u_0(y) dy \right) \\ \quad + r(x, t) \\ r(x, t) \leq \frac{C(x)}{t^6} \end{array} \right.$$

Bien entendu dans le cas général, le comportement asymptotique est donné par la somme des deux résultats (2.89) et (2.90).

### Bilan sur la solution élémentaire

Nous avons vu que la solution élémentaire ne dépendait que de  $|x|$  et était à support dans  $\{|x| \leq ct\}$ . D'autre part la singularité de la solution élémentaire augmente avec la dimension de l'espace ce que nous pouvons illustrer graphiquement en représentant  $|x| \rightarrow G(x, t)$  à  $t > 0$  fixé

On notera que dans chaque cas le support singulier (lieu des singularités) de la solution élémentaire est la "sphère"  $\{|x| = ct\}$ . En dimension 1 et 2, le support de cette solution est la "boule"  $\{|x| \leq ct\}$  alors qu'en dimension 3 support et support singulier coïncident. C'est le principe de Huyghens.



## Chapitre 3

# Les équations de Maxwell en régime transitoire

### 3.1 Position du problème de propagation dans tout l'espace

Nous nous plaçons dans  $\mathbb{R}^3$  et nous nous donnons  $\varepsilon(x)$  et  $\mu(x)$  (permittivité diélectrique et perméabilité magnétique) vérifiant :

$$(3.1) \quad \left| \begin{array}{l} \bullet \varepsilon(x), \mu(x) \text{ mesurables} \\ \bullet 0 < \varepsilon_- \leq \varepsilon(x) \leq \varepsilon_+ < +\infty \quad p.p. x \in \mathbb{R}^3 \\ \bullet 0 < \mu_- \leq \mu(x) \leq \mu_+ < +\infty \quad p.p. x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

Les inconnues du problème sont :

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \text{ le champ électrique } \vec{E}(x, t) \\ \bullet \text{ le champ magnétique } \vec{H}(x, t) \end{array} \right.$$

Les données du problème sont :

$$\left| \begin{array}{l} \bullet \text{ le champ électrique initial } \vec{E}_0(x) \\ \bullet \text{ le champ magnétique initial } \vec{H}_0(x) \\ \bullet \text{ le courant source : } \vec{j}_S(x, t) \end{array} \right.$$

Le problème à résoudre s'écrira :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver} & \vec{E}(x, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ & \vec{H}(x, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot } \vec{H} = -\vec{j}_s & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot } \vec{E} = 0 & x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ \vec{E}(x, 0) = \vec{E}_0(x) & x \in \mathbb{R}^3 \\ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, 0) = \vec{E}_1(x) & x \in \mathbb{R}^3 \end{array} \right.$$

### 3.2 Existence et unicité de solutions fortes pour (3.2)

On introduit l'espace de Hilbert :

$$(3.3) \quad H = L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3)^3$$

muni du produit scalaire :

$$(3.4) \quad ((\vec{E}, \vec{H}), (\vec{E}', \vec{H}'))_H = \int_{\mathbb{R}^3} (\varepsilon(x) \vec{E}(x) \cdot \vec{E}'(x) + \mu(x) \vec{H}(x) \cdot \vec{H}'(x)) dx$$

où  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  désigne le produit scalaire usuel de  $\mathbb{R}^3$ .

On introduit par ailleurs l'espace :

$$(3.5) \quad D(A) = H(\text{rot}, \mathbb{R}^3) \times H(\text{rot}; \mathbb{R}^3)$$

où  $H(\text{rot}; \mathbb{R}^3)$  désigne l'espace de champ de vecteurs (3.2)

$$(3.6) \quad H(\text{rot}; \mathbb{R}^3) = \{ \vec{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3, \text{rot } \vec{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \}$$

qui est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\| \vec{u} \|_{\text{rot}}^2 = \int_{\Omega} (|\vec{u}|^2 + |\text{rot } \vec{u}|^2) dx$$

(Dans la définition (3.6), les dérivées sont bien entendu prises au sens des distributions).

**Exercice 10** Démontrer que l'espace  $H(\text{rot}; \mathbb{R}^3)$ , muni de la norme  $\| \cdot \|_{\text{rot}}$ , est un espace de Hilbert.

Nous introduisons dans  $H$  l'opérateur  $A$  non borné, de domaine  $D(A)$ , défini par :

$$(3.7) \quad \forall (\vec{E}, \vec{H}) \in D(A) \quad A(\vec{E}, \vec{H}) = (-\varepsilon^{-1} \text{rot } \vec{H}, +\mu^{-1} \text{rot } \vec{E})$$



Nous faisons l'hypothèse que :

$$(3.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_0 \in H(\text{rot}; \mathbb{R}^3) \\ \vec{H}_0 \in H(\text{rot}; \mathbb{R}^3) \\ \vec{j}_s \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)) \end{array} \right.$$

de telle sorte que

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\vec{E}_0, \vec{H}_0) \in D(A) \\ (-\frac{\vec{j}_s}{\varepsilon}, 0) \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \end{array} \right.$$

Résoudre le problème (3.2) équivaut alors à résoudre dans  $H$  l'équation d'évolution :

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\vec{E}, \vec{H}) + A(\vec{E}, \vec{H}) = (-\frac{\vec{j}_s}{\varepsilon}, 0) \quad t > 0 \\ (\vec{E}, \vec{H})(0) = (\vec{E}_0, \vec{H}_0) \end{array} \right.$$

Nous pouvons énoncer le :

**Théorème 10** *Le problème (3.2) (ou (3.10) admet une unique solution forte :*

$$(\vec{E}, \vec{H}) \in (C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; H(\text{rot}; \mathbb{R}^3)))^2$$

*pourvu que les hypothèses (3.1) et (3.9) soient satisfaites.*

**Démonstration :** Le lecteur se convaincra aisément que, pour pouvoir appliquer le théorème de Hille Yosida il suffit de vérifier que pour  $\lambda > 0$  assez grand, l'opérateur  $A + \lambda I$  est maximal monotone. Or un rapide calcul montre que :

$$\left| \begin{array}{l} ((A + \lambda I)(\vec{E}, \vec{H}), (\vec{E}, \vec{H}))_H = \int_{\mathbb{R}^3} (\text{rot } \vec{E} \cdot \vec{H} - \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{E}) dx \\ + \lambda \|(\vec{E}, \vec{H})\|_H^2 \end{array} \right.$$

La formule de Green montre que :

$$(3.11) \quad \int_{\mathbb{R}^3} (\text{rot } \vec{E} \cdot \vec{H} - \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{E}) dx = 0$$

**Exercice 11** 1. Démontrer que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$  est dense dans  $H(\text{rot}; \mathbb{R}^3)$

2. Montrer que la formule (3.11) est vraie pour tout couple  $(\vec{E}; \vec{H})$  dans  $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3)^2$ . En déduire qu'elle est vraie pour tout  $(\vec{E}, \vec{H})$  dans  $H(\text{rot}; \mathbb{R}^3)^2$ .

Par conséquent nous avons :

$$(3.12) \quad \forall (\vec{E}, \vec{H}) \in D(A) \quad ((A + \lambda I)(\vec{E}, \vec{H}), (\vec{E}, \vec{H}))_H = \lambda \| (\vec{E}, \vec{H}) \|_H^2$$

Il s'ensuit que l'opérateur  $A + \lambda I$  est positif pour tout  $\lambda \geq 0$ .

**Remarque 18** *On constate en fait que l'opérateur  $A$  a la propriété remarquable suivante :*

$$(3.13) \quad (A(\vec{E}, \vec{H}), (\vec{E}', \vec{H}'))_H = -((\vec{E}, \vec{H}), A(\vec{E}', \vec{H}'))_H$$

pour tout  $((\vec{E}, \vec{H}), (\vec{E}', \vec{H}'))$  dans  $D(A) \times D(A)$ . On dit que l'opérateur  $A$  est antiadjoint.

Il nous reste à démontrer que  $A + \lambda I$  est surjectif, c'est à dire de montrer que pour tout couple  $(\vec{F}, \vec{G})$  dans  $H$ , le problème :

$$(3.14) \quad \begin{cases} \text{Trouver } (\vec{E}, \vec{H}) \in D(A) \times D(A) / \\ A(\vec{E}, \vec{H}) + \lambda(\vec{E}, \vec{H}) = (\vec{F}, \vec{G}) \end{cases}$$

a une solution.

Il s'agit donc de trouver  $(\vec{E}, \vec{H})$  tel que :

$$(3.15) \quad \begin{cases} -\text{rot } \vec{H} + \lambda \varepsilon \vec{E} = \varepsilon \vec{F} & (\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)^3) \\ \text{rot } \vec{E} + \lambda \mu \vec{H} = \mu \vec{G} & (\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)^3) \end{cases}$$

Éliminons  $\vec{H}$  entre ces deux équations, nous obtenons au sens des distributions

$$(3.16) \quad \begin{cases} \text{rot } (\mu^{-1} \text{rot } \vec{E}) + \lambda^2 \varepsilon \vec{E} = \lambda \varepsilon \vec{F} - \text{rot } \vec{G} \\ \vec{E} \in H(\text{rot}; \mathbf{R}^3) \end{cases}$$

problème dont la formulation variationnelle s'écrit :

$$(3.17) \quad \begin{cases} \text{Trouver } \vec{E} \in H(\text{rot}; \mathbf{R}^3) / \forall \vec{E}' \in H(\text{rot}; \mathbf{R}^3) \\ \int \mu^{-1} \text{rot } \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{E}' \, dx + \lambda^2 \int \varepsilon \vec{E} \cdot \vec{E}' \, dx = \\ = \lambda \int \varepsilon \vec{F} \cdot \vec{E}' \, dx + \int \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{E}' \, dx \end{cases}$$

Le théorème de Lax-Milgram nous permet alors d'affirmer que le problème (3.16) admet pour tout  $\lambda > 0$  une unique solution  $\vec{E}$  dans  $H(\text{rot}; \Omega)$ .

**Exercice 12** 1. *Montrer que les problèmes (3.16) et (3.17) sont équivalents.*

2. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution de (3.16) pour  $\lambda > 0$ .

Posons alors  $\vec{H} = -\frac{1}{\lambda\mu} \text{rot } \vec{E} + \vec{G} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3$ , nous avons alors :

$$\begin{cases} -\text{rot } \vec{H} + \lambda\varepsilon\vec{E} = \varepsilon\vec{F} \\ \text{rot } \vec{E} + \lambda\mu\vec{H} = \mu\vec{G} \end{cases}$$

(la première équation se déduit de (3.16), la seconde n'est autre que la définition de  $H$ ). Pour conclure il suffit alors de remarquer que l'égalité  $\text{rot } \vec{H} = \lambda\varepsilon\vec{E} - \varepsilon\vec{F}$  montre que  $\text{rot } \vec{H} \in L^2(\mathbb{R}^3)$  et donc que le couple  $(\vec{E}, \vec{H})$  appartient à  $D(A)$ .

Nous avons donc démontré que l'opérateur  $A + \lambda I$  était maximal monotone dans  $H$  pour tout  $\lambda > 0$ . Le théorème est alors une conséquence directe de l'application du théorème de Hille-Yosida. ■

Avant de passer au paragraphe 3, il est utile de mettre en exergue une propriété remarquable du système (3.2) :

**Théorème 11** *Si les données initiales  $(\vec{E}_0, \vec{H}_0)$  du problème vérifiant :*

$$\text{div}(\varepsilon\vec{E}_0) = \text{div}(\mu\vec{H}_0) = \text{div}(\vec{j}_s) = 0$$

alors pour tout  $t \geq 0$  on a :

$$\text{div}(\varepsilon\vec{E}) = \text{div}(\mu\vec{H}) = 0$$

**Démonstration :** Formellement le résultat est évident. En effet, en prenant la divergence de chacune des équations de (3.2) il vient, compte tenu de  $\text{div}(\text{rot}) \equiv 0$ ,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\text{div}(\varepsilon\vec{E})) = -\text{div } \vec{j}_s = 0 \\ \frac{d}{dt}(\text{div}(\mu\vec{H})) = 0 \end{cases}$$

ce qui signifie que les fonctions  $\text{div}(\varepsilon\vec{E})$  et  $\text{div}(\mu\vec{H})$  sont indépendantes du temps ! (ce qui entraîne a fortiori le résultat du théorème). Il reste à faire un raisonnement rigoureux : les quantités  $\text{div}(\varepsilon\vec{E})$  et  $\text{div}(\mu\vec{H})$  ne sont a priori que des distributions de  $H^{-1}(\mathbb{R}^3)^3$  qui doivent être traitées en tant que telles.

Soit  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ , multiplions scalairement la première équation de (3.2) par  $\nabla\varphi$  et intégrons le résultat sur  $\mathbb{R}^3$ .

$$\left| \begin{aligned} \int \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) dx &+ \int \text{rot } \vec{H}(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) dx \\ &+ \int \vec{j}_s(x, t) \cdot \nabla \varphi(x) dx = 0 \end{aligned} \right.$$

En utilisant la formule de Green, ou même plus simplement en raisonnant au sens des distributions nous avons évidemment ( $\text{rot}(\nabla\varphi) = 0$  !) :

$$\int \text{rot} \vec{H}(x, t) \cdot \nabla\varphi(x) dx = 0$$

De même, comme  $\text{div} \vec{j}_s = 0$ , il vient :

$$\int \vec{j}_s(x, t) \cdot \nabla\varphi(x) dx = 0$$

Enfin,  $\varphi$  étant indépendant du temps :

$$\int \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(x, t) \cdot \nabla\varphi(x) dx =$$

Il s'ensuit que pour tout  $t \geq 0$

$$\text{div}(\varepsilon \vec{E}) = \text{div}(\varepsilon \vec{E}_0) = 0$$

On procède de la même façon pour  $\text{div}(\mu \vec{H})$

■

**Remarque 19** Si on se souvient que  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  et  $D = \varepsilon \vec{E}$ , le résultat précédent ne fait exprimer que  $\text{div} \vec{D} = \text{div} \vec{B} = 0$ , ce qui vient en fait des équations de Maxwell si on tient compte de la loi de conservation de la charge.

### 3.3 Identité de l'énergie - Continuité de la solution par rapport aux données - Solutions faibles

Nous nous plaçons dans le cadre des hypothèses du théorème 10. Nous définissons l'énergie électromagnétique  $\mathcal{E}(t)$  par :

$$(3.18) \quad \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int (\varepsilon |\vec{E}(x, t)|^2 + \mu |\vec{H}(x, t)|^2) dx$$

qui est, compte tenu de la régularité de la solution forte  $(\vec{E}, \vec{H})$ , une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Théorème 12** L'évolution de l'énergie  $\mathcal{E}(t)$  est régie par l'identité :

$$(3.19) \quad \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} + \int_{\mathbb{R}^3} \vec{j}_s \cdot \vec{E} dx = 0$$

**Démonstration** : Nous avons :

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \text{rot} \vec{H} = -\vec{j}_s \\ \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \text{rot} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

Nous multiplions la première équation scalairement par  $E$ , la seconde par  $H$ , ajoutons membre à membre les deux égalités obtenues et intégrons le résultat sur  $\mathbb{R}^3$ . Nous obtenons alors, compte tenu de la formule de Green (3.11) :

$$\int (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H}) dx + \int \vec{j}_S \cdot \vec{E} dx = 0$$

On conclut après avoir remarqué que :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) = \int (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H}) dx$$

■

**Remarque 20** On aurait pu obtenir l'identité de façon plus abstraite en remarquant que :

$$\left( \frac{d}{dt} (\vec{E}, \vec{H}), (\vec{E}, \vec{H}) \right)_H + (A(\vec{E}, \vec{H}), (\vec{E}, \vec{H}))_H = 0$$

Le fait que  $A$  soit antiadjoint entraîne que  $(A(\vec{E}, \vec{H}), (\vec{E}, \vec{H}))_H = 0$  et par ailleurs on a :

$$\left( \frac{d}{dt} (\vec{E}, \vec{H}), (\vec{E}, \vec{H}) \right)_H = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| (\vec{E}, \vec{H}) \|_H^2$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \| (\vec{E}(t), \vec{H}(t)) \|_H^2$$

**Remarque 21** L'identité (3.19) montre qu'en l'absence de source ( $\vec{j}_S = 0$ ), il y a conservation au cours du temps de l'énergie électromagnétique  $\mathcal{E}(t)$ .

**Théorème 13** (Estimations a priori)

L'énergie  $\mathcal{E}$  définie par (2.5) vérifie :

$$\mathcal{E}(t) \leq (\mathcal{E}(0))^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^t \| j_S(\sigma) \|_{\frac{1}{2}} d\sigma^2$$

**Démonstration** : Nous remarquons que :

$$\left| \int \vec{j}_S \cdot \vec{E} dx \right| \leq \left( \int |\vec{j}_S|^2 \varepsilon^{-1} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int \varepsilon |\vec{E}|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \leq \left( \int |\vec{j}_S|^2 \varepsilon^{-1} dx \right) \mathcal{E}(t)^{\frac{1}{2}}$$

Si nous posons :

$$\| \vec{j}_S(t) \|_{\frac{1}{2}}^2 = \int |\vec{j}_S(x, t)|^2 \varepsilon(x)^{-1} dx$$

nous avons :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) \leq \| \vec{j}_S(t) \|_{\frac{1}{2}} \mathcal{E}(t)^{\frac{1}{2}}$$

le résultat annoncé se déduit alors du lemme de Gronwall généralisé (cf. chapitre 1 - il suffit en fait d'intégrer cette inéquation différentielle).

**Corollaire 2** *Pour tout  $T > 0$ , la solution  $(\vec{E}, \vec{H})$  de (??) satisfait les estimations a priori :*

$$\|\vec{E}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\vec{H}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C(\|\vec{E}_0\| + \|\vec{H}_0\| + \|\vec{j}_S\|_{L^\infty(0,T;L^2)})$$

où la constante  $C$ , indépendante de  $T$ , ne dépend que de  $\varepsilon_-, \varepsilon_+, \mu_-$  et  $\mu^+$  et où nous avons posé :

$$\begin{aligned} \|\vec{E}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} &= \sup_{0 \leq t \leq T} \left( \int |\vec{E}(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ \|\vec{j}_S\|_{L^1(0,T;L^2)} &= \int_0^T \left( \int |\vec{j}_S(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \end{aligned}$$

**Exercice 13** *Démontrer ce corollaire.*

Le résultat du corollaire 2 est un résultat de continuité (ou encore de stabilité) de la solution  $(\vec{E}, \vec{H})$  par rapport aux données  $(\vec{E}_0, \vec{H}_0$  et  $\vec{j}_S$ ). Plus exactement il exprime le fait que l'application qui à :

$$(\vec{E}_0, \vec{H}_0, \vec{j}_S) \in H(\text{rot}; \mathbb{R}^3) \times H(\text{rot}; \mathbb{R}^3) \times L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$$

associe :

$$(\vec{E}, \vec{H}) \in \{C^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3) \cap C^0(0, T; H(\text{rot}; \mathbb{R}^3)^3)\}^2$$

est continue si on munit l'espace de départ de la topologie de  $L^2(\mathbb{R}^3)^2 \times L^2(\mathbb{R}^3)^2 \times L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$  c'est à dire de la norme  $\|\vec{E}_0\| + \|\vec{H}_0\| + \|\vec{j}_S\|_{L^1(0,T;L^2)}$ , et si on munit l'espace d'arrivée de la topologie de  $C^0(0, T; \mathbb{R}^3)^2$  c'est à dire de la norme  $\|\vec{E}\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\vec{H}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$ . L'espace  $H(\text{rot}; \mathbb{R}^3) \times H(\text{rot}; \mathbb{R}^3) \times C^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$  étant dense dans  $L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$ , on peut prolonger de façon unique cette application en une application linéaire continue de  $L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$  dans  $C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)^2$ . C'est ce qui permet de définir les solutions faibles du système de Maxwell (3.2), en procédant comme on l'a fait pour l'équation des ondes scalaires. Nous laissons le soin de cette construction au lecteur, à titre d'exercice :

**Exercice 14** 1. *Définir pour des données  $(\vec{E}_0, \vec{H}_0, \vec{j}_S)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$ , une notion de solution faible de (3.2) dans l'espace  $C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$ .*

2. *Démontrer l'existence de la solution faible en regularisant les données du problème.*

3. *Démontrer l'unicité de la solution faible en utilisant une méthode de dualité.*

### 3.4. CONTINUITÉ DE LA SOLUTION PAR RAPPORT AUX COEFFICIENTS $\varepsilon$ ET $\mu$ - RÉSULTATS DE

4. Démontrer que si les données  $(\vec{E}_0, \vec{H}_0)$  vérifiant  $\operatorname{div}(\varepsilon \vec{E}_0) = \operatorname{div}(\mu \vec{H}_0) = 0$  alors pour tout  $t \geq 0$  la solution faible vérifie  $\operatorname{div}(\varepsilon E) = \operatorname{div}(\mu H) = 0$

Nous nous contenterons ici d'écrire le résultat final (qui n'a en fait de sens qu'une fois qu'on a défini correctement - (c'est l'objet de la question 1) - la notion de solution faible !).

**Théorème 14** *Sous l'hypothèse :*

$$(\vec{E}_0, \vec{H}_0, \vec{j}_S) \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$$

le problème (3.2) admet une unique solution faible  $(\vec{E}, \vec{H}) \in C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)^2$  et l'application  $(\vec{E}_0, \vec{H}_0, \vec{j}_S) \rightarrow (\vec{E}, \vec{H})$  ainsi construite est linéaire et continue de  $L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^2(\mathbb{R}^3)^3 \times L^1(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)$  dans  $C^0(0, T; L^2(\mathbb{R}^3)^3)^2$

### 3.4 Continuité de la solution par rapport aux coefficients $\varepsilon$ et $\mu$ - Résultats de régularité

Dans cette section nous établissons l'équivalent pour les équations de Maxwell des résultats de la section du chapitre 1, résultats valables pour l'équation des ondes. Nous nous contenterons ici d'énoncer ces résultats. La démonstration du premier (résultat de continuité par rapport aux données) est laissée en exercice (c'est une suite pour l'exercice qui précède). Celle du second (régularité) est admise.

Considérons donc une suite de données  $(\varepsilon^\eta, \mu^\eta, \vec{j}_S^\eta, \vec{E}_0^\eta, \vec{H}_0^\eta)$  vérifiant lorsque  $\eta$  tend vers 0 :

$$(3.20) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bullet \vec{E}_0^\eta \rightarrow \vec{E}_0 & \text{dans } (L^2)^3 \\ \bullet \vec{H}_0^\eta \rightarrow \vec{H}_0 & \text{dans } (L^2)^3 \\ \bullet \vec{j}_S^\eta \rightarrow \vec{j}_S & \text{dans } L^1(0, T; L^2)^3 \\ \bullet \varepsilon^\eta(x) \rightarrow \varepsilon(x) & p.p. x \in \mathbb{R}^N \\ \bullet \mu^\eta(x) \rightarrow \mu(x) & p.p. x \in \mathbb{R}^N \end{array} \right.$$

avec en outre des bornes uniformes sur les coefficients  $\rho_\eta$  et  $\mu_\eta$

$$(3.21) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \bullet 0 < \varepsilon_- \leq \varepsilon^\eta(x) \leq \varepsilon^+ < +\infty & p.p. x \in \mathbb{R}^N, \forall \eta \\ \bullet 0 < \mu_- \leq \mu^\eta(x) \leq \mu^+ < +\infty & p.p. x \in \mathbb{R}^N, \forall \eta \end{array} \right.$$

**Théorème 15** *On suppose que (3.20) et (3.21) ont lieu. Soit  $\vec{E}^\eta, \vec{H}^\eta$  la solution faible de (3.2) associée aux données  $(\varepsilon^\eta, \mu^\eta, \vec{j}_S^\eta, \vec{E}_0^\eta, \vec{H}_0^\eta)$  et  $\vec{E}, \vec{H}$  celle associée aux données limites  $(\varepsilon, \mu, \vec{j}_S, \vec{E}_0, \vec{H}_0)$  alors pour tout  $t \geq 0$ , on a, lorsque  $\eta$  tend vers 0 :*

$$\vec{E}^\eta(\cdot, t) \rightharpoonup \vec{E}(\cdot, t) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3)^3 \text{ faible}$$

$$\vec{H}^\eta(\cdot, t) \rightharpoonup \vec{H}(\cdot, t) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3)^3 \text{ faible}$$

Ce résultat, qui n'est pas optimal (on a seulement la convergence faible), sera néanmoins suffisant pour établir les résultats de propagation à vitesse finie (prochaine section).

Enonçons maintenant sans preuve un résultat de régularité :

**Théorème 16** *Si les données  $(\varepsilon, \mu, \vec{j}_S, \vec{E}_0, \vec{H}_0)$  du problème (3.2) satisfont :*

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon, \mu) \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^N)^2 \\ (\vec{E}_0, \vec{H}_0) \quad \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)^3 \\ \vec{j}_S \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)^3, \quad \vec{j}_S(\cdot, t) \text{ supp. compact} \end{array} \right.$$

*alors l'unique solution  $u$  du problème (3.2) satisfait :*

$$(\vec{E}, \vec{H}) \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+)^3$$

### 3.5 Propagation à vitesse finie

Nous nous intéressons ici au seul problème de Cauchy ( $\vec{j}_S = 0$ ). Nous définissons maintenant la vitesse de propagation locale  $c(x)$  par :

$$(3.22) \quad c(x)^2 = \varepsilon(x)^{-1} \mu(x)^{-1}$$

Il est évident, compte tenu des propriétés des fonctions  $\varepsilon$  et  $\mu$ , que la vitesse  $c(x)$  est strictement positives. Pour la suite nous introduisons :

$$(3.23) \quad c^* = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} c(x)$$

**Théorème 17** *On suppose que l'ensemble :*

$$K = \text{supp } \vec{E}_0 \cup \text{supp } \vec{H}_0$$

*est compact, alors pour tout  $t \geq 0$ , la solution  $(E(\cdot, t), H(\cdot, t))$  est à support compact en espace et plus précisément :*

$$(3.24) \quad \text{supp } \vec{E}(\cdot, t) \cup \text{supp } \vec{H}(\cdot, t) \subset K + B(0, c^*t)$$

*où  $B(0, c^*t)$  est la boule de  $\mathbb{R}^3$  (fermée) de centre 0 et de rayon  $c^*t$ .*



**Démonstration :** Nous allons dans un premier temps supposer que les données du problème sont très régulières :

$$(\varepsilon, \mu) \in C^\infty(\mathbf{R}^3), (\vec{E}_0, \vec{H}_0) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$$

auquel cas la solution  $(\vec{E}, \vec{H})$  est elle-même de classe  $C^\infty$  en espace et en temps.

Nous allons, comme pour l'équation des ondes scalaires, donner une démonstration du résultat par techniques énergétiques.

**Etape 1 : Obtention d'une identité d'énergie.** Soit  $n$  un vecteur unitaire de  $\mathbf{R}^3$ , nous introduisons, comme dans le cas de l'équation des ondes scalaire, les domaines mobiles :

$$\Omega_n^t = \{x \in \mathbf{R}^3 / x.n > R + Vt\}$$

$$\Gamma_n^t = \partial\Omega_n^t = \{x \in \mathbf{R}^3 / x.n = R + Vt\}$$

$R$  et  $V$  restant à déterminer ( $V > 0$ ). Nous introduisons l'énergie électromagnétique contenue dans le demi espace mobile  $\Omega_n^t$  à l'instant  $t$  :

$$(3.25) \quad \mathcal{E}(\vec{E}, \vec{H}, \Omega_n^t, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_n^t} (\varepsilon |\vec{E}(x, t)|^2 + \mu |\vec{H}(x, t)|^2) dx$$

Il s'agit d'une fonction régulière du temps dont la dérivée est donnée par (pour les détails des calculs le lecteur peut se reporter à la partie I sur l'équation des ondes scalaire).

$$(3.26) \quad \left| \begin{aligned} \frac{d}{dt} \{\mathcal{E}(\vec{E}, \vec{H}, \Omega_n^t, t)\} &= \int_{\Omega_n^t} (\varepsilon \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{H}) dx \\ &\quad - \frac{V}{2} \int_{\Gamma_n^t} (\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) d\sigma \end{aligned} \right.$$

(nous désignons par  $d\sigma$  la mesure superficielle sur  $\Gamma_n^t$ ).

Par ailleurs, nous tirons de l'équation (3.2) :

$$\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} = (\text{rot } \vec{E} \cdot \vec{H} - \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{E})$$

Par conséquent :

$$(3.27) \quad \int_{\Omega_n^t} (\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H}) dx = \int_{\Omega_n^t} (\text{rot } \vec{E} \cdot \vec{H} - \text{rot } \vec{H} \cdot \vec{E}) dx$$

Or nous avons la formule de Green (compte tenu du fait que  $n$  est la normale unitaire à  $\Gamma_n^t$  qui est rentrante par rapport à  $\Omega_n^t$ )

$$(3.28) \quad \left| \begin{aligned} \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in H(\text{rot}; \mathbf{R}^3) \cap C^1(\mathbf{R}^3)^3 \\ \int_{\Omega_n^t} (\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{v} - \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{u}) dx = \int_{\Gamma_n^t} (\vec{u} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{v} d\sigma \end{aligned} \right.$$

**Exercice 15** Démontrer la formule de Green (3.28). On admette que  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)^3$  est dense dans  $H(\text{rot}; \mathbb{R}^3) \cap C^1(\mathbb{R}^3)^3$

En joignant (3.26), (3.27) et (3.28) on obtient :

$$(3.29) \quad \frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}(\vec{E}, \vec{H}, \Omega_n^t, t) \} + \frac{1}{2} \{ V(\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2) - 2(\vec{E} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{H} \} d\sigma = 0$$

**Etape 2 : Choix de la valeur de  $V$ .** De l'inégalité  $|(\vec{E} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{H}| \leq |\vec{E}| |\vec{H}|$ , nous déduisons que :

$$\left| \begin{aligned} & V[\varepsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2] - 2(\vec{E} \wedge \vec{n}) \cdot \vec{H} \geq \\ & \geq \varepsilon V |\vec{E}|^2 + \mu V |\vec{H}|^2 - 2|\vec{E}| \cdot |\vec{H}| \end{aligned} \right.$$

Le membre de droite de cette inégalité est une forme quadratique dont le discriminant est donné par  $1 - \varepsilon \mu V^2$ , soit encore  $1 - \frac{V^2}{c^2}$ . Si nous choisissons  $V = c^*$ , il est clair que ce discriminant est en tout point négatif ou nul et que par conséquent la forme quadratique en question est positive (elle garde un signe constant, il suffit donc de regarder son signe pour  $|\vec{E}| = 0$  par exemple). En reportant ce résultat dans (3.29) on obtient :

$$\frac{d}{dt} \{ \mathcal{E}(\vec{E}, \vec{H}, \Omega_n^t, t) \} \leq 0$$

donc en particulier :

$$(3.30) \quad \mathcal{E}(\vec{E}, \vec{H}, \Omega_n^t, t) \leq \mathcal{E}_0(\vec{E}_0, \vec{H}_0, \Omega_n^0, 0)$$

**Etape 3 : Démonstration du résultat pour  $K = B(0, R)$ .** Si  $K = B(0, R)$ , il est facile de voir que  $\mathcal{E}_0(\vec{E}_0, \vec{H}_0, \Omega_n^0, 0)$  est nul puisque  $\text{supp } \vec{E}_0 \cup \text{supp } \vec{H}_0 \cap \Omega_n^0 = \emptyset$ . Par conséquent de (3.30) nous tirons :

$$(3.31) \quad \forall t \geq 0 \quad \int_{\Omega_n^t} (\varepsilon |\vec{E}(x, t)|^2 + \mu |\vec{H}(x, t)|^2) dx = 0$$

ce qui entraîne  $\vec{E}(x, t) = \vec{H}(x, t) = \vec{0}, \forall x \in \Omega_n^t$  et donc que  $\text{supp } \vec{E}(\cdot, t) \cup \text{supp } \vec{H}(\cdot, t) \subset \mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} \Omega_n^t$ . Ceci étant vrai pour tout vecteur unitaire  $n$  il s'ensuit que :

$$\text{supp } E(\cdot, t) \cup \text{supp } H(\cdot, t) \subset \bigcap_{|n|=1} \mathcal{C}_{\mathbb{R}^3} \Omega_n^t$$

d'où le résultat puisque  $B(0, R) + B(0, c^*t) = B(0, R + c^*t)$

**Etape 4 : Extension au cas où  $K$  est un compact quelconque de  $\mathbb{R}^3$ .** Le résultat précédent est évidemment vrai si on remplace  $B(0, R)$  par n'importe quelle boule fermée de  $\mathbb{R}^3$ . En vertu du principe de superposition, il s'étend à n'importe quelle réunion de boules fermées de  $\mathbb{R}^3$ . Maintenant si  $K$  est un compact quelconque on peut le recouvrir, quelque soit  $\varepsilon > 0$ , par un ouvert  $\mathcal{O}_\varepsilon$  qui soit réunion finie de boules ouvertes de rayon

$\varepsilon$ . De ce qui précède nous déduisons que :

$$\text{supp } E(., t) \cup \text{supp } H(., t) \subset \overline{\mathcal{O}_\varepsilon} + B(0, c^*t)$$

**Etape 5 : Extension du résultat au cas de données non nécessairement régulières**

Nous commençons par régulariser la vitesse  $c(x)$  en posant :

$$c = \rho_\delta * c$$

où  $\rho_\delta$  est une suite régularisante définie par :

$$\begin{cases} \rho = \frac{1}{\delta^3} \rho\left(\frac{x}{\delta}\right) & \delta > 0 \\ \rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3), \rho \geq 0, \int \rho dx = 1 \end{cases}$$

Nous savons alors (résultat classique) que :

$$\begin{cases} c_\delta(x) \leq c^* \\ c_\delta(x) \rightarrow c(x) \quad p.p. \end{cases}$$

Nous posons ensuite :

$$\begin{cases} \varepsilon_\delta = \rho * \varepsilon \\ \mu_\delta = \frac{1}{\varepsilon c^2} \end{cases}$$

de telle sorte que

$$\varepsilon_\delta \rightarrow \varepsilon \quad p.p.$$

$$\mu_\delta \rightarrow \mu \quad p.p.$$

les fonctions  $\varepsilon_\delta$  et  $\mu_\delta$  restant “coincées” entre deux constantes strictement positives indépendantes de  $\delta$ .

Nous régularisons de même les données initiales et considérons :

$$\begin{cases} (\vec{E}_0^\delta, \vec{H}_0^\delta) \in C_0^\infty(K) / \\ (\vec{E}_0^\delta, \vec{H}_0^\delta) \rightarrow (\vec{E}_0, \vec{H}_0) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^3) \quad (\delta \rightarrow 0) \end{cases}$$

Soit alors  $(\vec{E}^\delta, \vec{H}^\delta)$  la solution régulière associée aux données  $(\varepsilon_\delta, \mu_\delta, \vec{E}_0^\delta, \vec{H}_0^\delta)$ . En vertu de ce qui précède, nous avons :

$$\text{supp } E^\delta(., t) \cup \text{supp } H^\delta(., t) \subset K + B(0, c^*t)$$

Mais, le théorème 5 nous dit que  $E^\delta(., t)$  et  $H^\delta(., t)$  convergent faiblement vers  $E(., t)$  et  $H(., t)$ . Le résultat final est alors immédiat. En effet pour tout champ de vecteurs  $\vec{\psi}$  de carré intégrable et à support dans le complémentaire de l'ensemble  $K + B(0, c^*t)$ , on a évidemment :

$$\int \vec{E}^\delta(., t) \cdot \vec{\psi} \, dx = 0$$

En passant à la limite quand  $\delta$  tend vers 0, on obtient :

$$\int \vec{E}(., t) \cdot \vec{\psi} \, dx = 0$$

ce qui montre que le champ électrique  $\vec{E}$  est à l'instant  $t$  à support dans  $K + B(0, c^*t)$ . On fait de même avec le champ magnétique. ■

## Annexe A

# Le théorème de Hille Yosida

Soit  $(A, D(A))$  un opérateur non borné dans un espace de Hilbert  $H$ , par définition :

$$A \text{ maximal monotone} \iff \begin{cases} (Au, u) \geq 0 \quad \forall u \in D(A) \\ A + I \text{ est surjectif de } D(A) \rightarrow H \end{cases}$$

Nous allons dans ce paragraphe nous intéresser à l'équation d'évolution dans  $H$  :

$$(A.1) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f & (4.1)_1 \\ u(0) = u_0 & (4.1)_2 \end{cases}$$

où  $u_0 \in D(A)$  et  $f \in C^0(\mathbb{R}^+; H)$  sont les données du problème. Par définition on appelle solution forte ou solution classique de (A.1), toute fonction  $u$  possédant la régularité :

$$(A.2) \quad u \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C^0(\mathbb{R}^+; D(A))$$

vérifiant (A.1) au sens classique c'est à dire que l'égalité  $(A.1)_1$  a lieu pour tout  $t > 0$ , en tant qu'égalité entre éléments de l'espace  $H$ .

**Remarque 22** *L'assertion (A.2) signifie que les fonctions  $t \rightarrow \frac{du}{dt}(t)$  et  $t \rightarrow Au(t)$  sont continues de  $\mathbb{R}^+$  à valeurs dans  $H$ , ce qui donne un sens à notre définition.*

Nous allons dans un premier temps nous intéresser à l'équation homogène ( $f = 0$ ). Pour pouvoir énoncer et démontrer un résultat d'existence et unicité, il nous faut d'abord donner quelques propriétés des opérateurs maximaux monotones et introduire la notion de régularisé de Yosida de l'opérateur  $A$ .

Il est utile tout d'abord de rappeler la notion d'opérateur fermé :

**Définition 3** Un opérateur  $A$  de domaine  $D(A)$  est fermé si et seulement si son graphe est fermé c'est à dire si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} u_n \in D(A) \\ u_n \rightarrow u \text{ dans } H \\ Au_n \rightarrow v \text{ dans } H \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} u \in D(A) \\ v = Au \end{array} \right.$$

**Remarque 23** Il est usuel de munir  $D(A)$  d'une structure d'espace vectoriel normé à l'aide de la norme du graphe :

$$\| u \|_{D(A)} = \| u \| + \| Au \|$$

Dire qu'un opérateur est fermé équivaut à dire que son domaine  $D(A)$ , muni de la norme du graphe, est un espace de Banach.

**Lemme 4** Si  $A$  est un opérateur maximal monotone dans  $H$ , alors :

- (i)  $A + I$  est un isomorphisme de  $D(A)$  dans  $H$
- (ii)  $A$  est fermé
- (iii)  $D(A)$  est dense.

**Démonstration :**

(i)  $u \in \text{Ker}(A + I) \implies Au + u = 0 \implies (Au, u) + \| u \|^2 = 0 \implies u = 0$ .  $(A + I)$  est donc injectif, et par suite bijectif.

(ii) Soit  $u^n \in D(A)$  telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^n \rightarrow u \\ Au^n \rightarrow v \end{array} \right.$$

Par surjectivité de  $A + I$ , il existe  $z$  (unique) dans  $D(A)$  tel que  $v + u = Az + z$ . Nous allons montrer que  $u = z$  ce qui montrera que  $u \in D(A)$  et  $Au = v$ . Dans ce qui suit nous posons  $v^n = Au^n$  or :

$$\begin{aligned} \| u^n - z \|^2 &\leq (A(u^n - z), (u^n - z)) + \| u^n - z \|^2 \\ &= (Au^n + u^n, u^n - z) - (Az + z, u^n - z) \\ &= (v^n + u^n - (Az + z), u^n - z) \\ &\leq \| u^n - z \| (\| v^n - v \| + \| u^n - u \|) \end{aligned}$$

On en déduit que  $u^n \rightarrow z$  et donc que  $z = u$

(iii) Soit  $u \in D(A^\perp)$ . Il existe  $z \in D(A)$  tel que  $u = Az + z$ . Alors  $(u, z) = 0 = (Az, z) + \|z\|^2 \geq \|z\|^2$ . Il s'ensuit que  $z = 0$  et donc que  $u = 0$ .

■

**Lemme 5** *Si  $A$  est un opérateur maximal monotone alors pour tout  $\lambda > 0$ ,  $I + \lambda A$  est un isomorphisme de  $D(A)$  dans  $H$ .*

**Démonstration :** Nous allons démontrer tout d'abord que si  $I + \lambda_0 A$  est un isomorphisme de  $D(A)$  dans  $H$ , alors il en est de même pour  $I + \mu A$ , et ce pour tout  $\mu > \frac{\lambda_0}{2} > 0$ . En effet, comme il est immédiat de vérifier que pour tout  $\mu > 0$ ,  $I + \mu A$  est injectif, il suffit de montrer que  $I + \mu A$  est surjectif c'est à dire que, pour tout  $f$  dans  $H$ , l'équation :

$$(A.3) \quad \mu Au + u = f$$

admet une solution  $u$  dans  $D(A)$ . Pour démontrer cela, nous allons réécrire différemment l'équation (A.3).

$$\begin{aligned} (A.3) &\iff Au + \frac{1}{\mu}u = \frac{1}{\mu}f \\ &\iff Au + \frac{1}{\lambda_0}u = \frac{1}{\mu}f + \left( \frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\mu} \right) u \\ &\iff (I + \lambda_0 A)u = \frac{\lambda_0}{\mu}f + \left( 1 - \frac{\lambda_0}{\mu} \right) u \\ &\iff u = (I + \lambda_0 A)^{-1} \left[ \left( 1 - \frac{\lambda_0}{\mu} \right) u + \frac{\lambda_0}{\mu}f \right] \end{aligned}$$

Nous allons appliquer le théorème du point fixe à l'application :

$$F(u) = \left( 1 - \frac{\lambda_0}{\mu} \right) (I + \lambda_0 A)^{-1} u + \frac{\lambda_0}{\mu} (I + \lambda_0 A)^{-1} f$$

$$\|F(u) - F(v)\| = \| (I + \lambda_0 A)^{-1} (u - v) \| \left| 1 - \frac{\lambda_0}{\mu} \right|$$

Or  $\| (I + \lambda_0 A)^{-1} \| \leq 1$ . En effet  $u = (I + \lambda_0 A)^{-1} f$  entraîne  $u + \lambda_0 Au = f$ , ce qui implique  $\lambda_0 (Au, u) + \|u\|^2 = (f, u)$ , d'où nous déduisons  $\|u\| \leq \|f\|$ .

Par suite,  $F$  est contractante dès que :

$$\left| 1 - \frac{\lambda_0}{\mu} \right| < 1$$

ce qui équivaut à  $1 - \frac{\lambda_0}{\mu} > -1$  c'est à dire  $\mu > \frac{\lambda_0}{2}$ .

Pour conclure, nous notons que le fait que  $A + I$  soit un isomorphisme entraîne que  $I + \mu A$

est un isomorphisme pour tout  $\mu \geq \frac{2}{3}$  (puisque vrai pour  $\mu > \frac{1}{2}$ ).

Supposons avoir montré que  $(I + \mu A)$  est un isomorphisme pour tout  $\mu \geq (\frac{2}{3})^n$ , il s'ensuit que  $(I + \mu A)$  est un isomorphisme pour tout  $\mu > \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n$  donc en particulier pour  $\mu \geq (\frac{2}{3})^{n+1}$ . Par récurrence nous avons donc montré que  $(I + \mu A)$  était un isomorphisme pour tout  $\mu > 0$ . ■

Le lemme précédent nous permet d'introduire une famille d'opérateurs bornés dans  $H$ , qui envoient  $H$  dans  $D(A)$  :

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(H; D(A)) \subset \mathcal{L}(H)$$

$J_\lambda$  est en fait une approximation "régularisante" de l'identité u sens du lemme suivant :

**Lemme 6**

- (i)  $\forall \lambda > 0 \quad \| J_\lambda \| \leq 1$
- (ii)  $\forall u \in D(A) \quad \| J_\lambda u - u \| \leq \lambda \| Au \|$
- (iii)  $\forall u \in H \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda u = u$

**Démonstration :** Le point (i) a déjà été démontré au passage dans la démonstration du lemme 2. Par ailleurs :

$$J_\lambda u - u = (I + \lambda A)^{-1}u - u$$

Si  $u \in D(A)$ , nous avons  $u = (I + \lambda A)^{-1}(I + \lambda A)u$ , donc :

$$J_\lambda u - u = \lambda J_\lambda Au$$

Par suite  $\| J_\lambda u - u \| = \lambda \| J_\lambda Au \| \leq \lambda \| Au \|$ , soit (ii).

Pour (iii), étant donné  $u$  dans  $H$ , par densité de  $D(A)$  nous pouvons trouver  $u_\varepsilon$  dans  $D(A)$  tel que  $\| u - u_\varepsilon \| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ , ce qui pour tout  $\varepsilon > 0$ . Or, de l'identité :

$$J_\lambda u - u = J_\lambda u - J_\lambda u_\varepsilon + J_\lambda u_\varepsilon - u_\varepsilon + u_\varepsilon - u$$

nous tirons l'inégalité :

$$\begin{aligned} \| J_\lambda u - u \| &\leq 2 \| u - u_\varepsilon \| + \| J_\lambda u_\varepsilon - u_\varepsilon \| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \lambda \| Au_\varepsilon \| \end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\lambda < \frac{\varepsilon}{2 \| Au_\varepsilon \|} \implies \| J_\lambda u - u \| < \varepsilon$$



Nous allons construire à l'aide de  $J_\lambda$  des approximations "bornées" de l'opérateur  $A$ . Le principe est le même que celui qui consiste à approcher la fonction  $f(x) = x$  de  $\mathbf{R}_*^+$  dans  $\mathbf{R}_*^+$ , fonction non bornée, par la suite de fonctions  $f_\lambda(x) = \frac{x}{1 + \lambda x}$ , bornées ( $|f_\lambda| \leq \frac{1}{\lambda}$  pour tout  $x$ ). On notera que la convergence de  $f_\lambda$  vers  $f$  est ponctuelle mais pas uniforme sur  $\mathbf{R}_*^+$ . De façon plus précise nous considérons l'opérateur :

$$A_\lambda = AJ_\lambda = A(I + \lambda A)^{-1}$$

Notons que comme  $(I + \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(H, D(A))$  et  $A \in \mathcal{L}(D(A), H)$  on a bien :

$$\forall \lambda > 0 \quad A_\lambda \in \mathcal{L}(H)$$

Les propriétés essentielles de  $A_\lambda$  sont résumées par le :

### Lemme 7

- (i)  $A_\lambda \in \mathcal{L}(H)$  et  $\|A_\lambda\| \leq \frac{1}{\lambda}$ ,  $\forall \lambda \in \mathbf{R}_*^+$
- (ii)  $\forall u \in D(A) \quad A_\lambda u = J_\lambda(Au)$
- (iii)  $\forall u \in D(A) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} A_\lambda u = Au$
- (iv)  $\forall u \in H, (A_\lambda u, u) \geq 0$

**Démonstration :** (i) Notons que si  $v = A_\lambda u$ , nous avons la décomposition :

$$\begin{cases} v = Az & z \in D(A) \\ z + \lambda Az = u \end{cases}$$

De la deuxième égalité nous tirons :

$$\lambda \|Az\|^2 + (Az, z) = (Az, u)$$

D'où

$$\|v\| = \|Az\| \leq \frac{1}{\lambda} \|u\|$$

(ii) Il s'agit en quelque sorte de montrer que  $J_\lambda$  est  $A$  commutant. Or si  $v = A_\lambda u$ , nous avons  $v = Az$  avec  $z + \lambda Az = u$ . Cette dernière égalité montre que si  $u \in D(A)$  alors  $Az \in D(A)$  et, de plus,  $Az + \lambda A^2 z = Au$ . Comme  $Az + \lambda A^2 z = (I + \lambda A)Az = (I + \lambda A)v$ . Nous en déduisons  $(I + \lambda A)v = Au$ , c'est à dire  $v = J_\lambda Au$ , ce que nous voulions démontrer.

(iii) Si  $u \in D(A)$  nous avons d'après ce qui précède :

$$A_\lambda u - Au = J_\lambda(Au) - Au$$

Du lemme 6, nous tirons donc que  $A_\lambda u$  converge vers  $Au$  lorsque  $\lambda$  tend vers 0.

(iv) Nous avons, si  $v = A_\lambda u$ ,  $v = Az$  et  $z + \lambda v = u$ . Nous avons donc  $(u, v) = (A_\lambda u, u) = (z, v) + \lambda \|v\|^2 = (Az, z) + \lambda \|v\|^2$ . Donc  $(A_\lambda u, u) \geq 0$ , pour tout  $u$  dans  $H$ . ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème d'existence et unicité relatif à l'équation sans second membre.

**Théorème 18** *Soit  $A$  un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert  $H$ . Alors pour tout  $u_0$  dans  $D(A)$  l'équation différentielle :*

$$(A.4) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution (classique) unique :

$$u \in C^1(\mathbf{R}^+; H) \cap C^0(\mathbf{R}^+; D(A))$$

De plus on a l'estimation a priori :

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| \quad \forall t \geq 0$$

**Démonstration :** (i) Unicité de la solution - Estimation a priori

Soit  $u$  une solution. En multipliant l'équation par  $u$  nous obtenons  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\|u(t)\|^2] + (Au(t), u(t)) = 0$  ce qui établit que la fonction  $t \rightarrow \|u(t)\|$  est décroissante.

Nous en déduisons en particulier (ceci est valable pour tout  $u_0 \in D(A)$ ) :

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|$$

En particulier lorsque  $u_0 = 0$ ,  $u = 0$ . Compte tenu de la linéarité de l'équation, ce résultat démontre l'unicité de la solution.

(ii) Existence de la solution

La preuve est assez longue. Avant d'entrer dans les détails, indiquons en le principe et le plan :

**Étape 1 :** On "approche" l'équation par l'équation régularisée ( $\lambda > 0$ ) :

$$(A.5) \quad \begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0, & t > 0 \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

L'idée est ensuite de montrer que  $u_\lambda$  converge, en un sens à préciser, vers une solution  $u$  de (A.4) lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ .

**Etape 2 :** On démontre que la suite  $u_\lambda(t)$  reste bornée pour tout  $t \leq 0$ , uniformément par rapport à  $t$ , puis qu'il en est de même pour  $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ , si la donnée initiale appartient à l'espace  $D(A^2)$ .

**Etape 3 :** On démontre, toujours lorsque  $u_0 \in D(A^2)$  que pour tout  $T > 0$ , la suite  $u_\lambda$  est une suite de Cauchy dans  $C^1(0, T; H) \cap C^0(0, T; D(A))$ . Ceci permet d'établir le résultat d'existence pour  $u_0 \in D(A^2)$  par passage à la limite.

**Etape 4 :** On étend le résultat d'existence à  $u_0 \in D(A)$  après avoir démontré que l'espace  $D(A^2)$  est dense dans  $D(A)$ .

Nous donnons maintenant le détail de chacune de ces étapes :

**Etape 1 :** L'opérateur  $A_\lambda$  étant borné, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous permet d'affirmer que l'équation approchée (A.5) admet bien une solution unique  $u_\lambda$  dans l'espace  $C^1(\mathbb{R}^+; H)$ . Tout ceci est vrai dès que  $u_0 \in H$  et il est aisé de démontrer que  $u_\lambda$  possède en fait la régularité :

$$u_\lambda \in C^\infty(\mathbb{R}^+; H)$$

**Etape 2 :** Estimations a priori (I)

Nous supposons d'abord que  $u_0 \in H$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \left( \frac{du_\lambda}{dt}, u_\lambda \right) + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\lambda\|^2 + (A_\lambda u_\lambda, u_\lambda) &= 0 \end{aligned}$$

Il s'ensuit, l'opérateur  $A_\lambda$  étant positif, que :

$$\forall t \geq 0 \quad \|u_\lambda(t)\| \leq \|u_0\|$$

Soit maintenant  $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$ . Comme  $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$  et  $v_\lambda(0) = v_0 = -A_\lambda u_0$ , le raisonnement précédent appliqué à  $v_\lambda$  nous donne :

$$\left\| \frac{du_\lambda}{dt}(t) \right\| \leq \|A_\lambda u_0\|$$



Lorsque maintenant  $u_0 \in D(A^2)$ , nous pouvons appliquer le même raisonnement à  $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$  pour obtenir l'estimation :

$$\left| \begin{array}{l} \left\| \left( \frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} \right) (t) \right\|^2 \leq 4(\lambda + \mu) \| A^2 u_0 \|^2 t \\ \left\| (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu)(t) \right\|^2 \leq 4(\lambda + \mu) \| A^2 u_0 \|^2 t \end{array} \right.$$

**Etape 4 : Passage à la limite**

Nous supposons que  $u_0 \in D(A^2)$ . Dans ce cas pour tout  $t > 0$  les suites  $u_\lambda(t)$  et  $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$  sont des suites de Cauchy. Il existe donc  $(u(t), v(t)) \in H \times H$  tel que :

$$\left| \begin{array}{l} u_\lambda(t) \rightarrow u(t) \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 0 \\ \frac{du_\lambda}{dt}(t) \rightarrow v(t) \quad \text{quand } \lambda \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Par ailleurs on déduit des estimations de l'étape 3 que la convergence de ces suites de fonctions est uniforme sur tout intervalle  $[0, T]$ . Les fonctions  $t \rightarrow u_\lambda(t)$  et  $t \rightarrow \frac{du_\lambda}{dt}(t)$  étant continues il s'ensuit qu'il en est de même des fonctions  $u(t)$  et  $v(t)$ . De plus  $u$  est dérivable et  $v = \frac{du}{dt}$  ce qui montre que  $u \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$ . De même, toujours de l'étape 3 nous déduisons que la suite  $A_\lambda u_\lambda(t)$  est convergente (vers  $-\frac{du}{dt}(t)$ ). Or nous avons :

$$A_\lambda u_\lambda(t) = A[J_\lambda u_\lambda(t)]$$

Et par ailleurs nous avons :

$$J_\lambda u_\lambda(t) = J_\lambda u(t) + J_\lambda(u - u_\lambda)(t)$$

D'où nous tirons :

$$\| J_\lambda u_\lambda(t) - u(t) \| \leq \| J_\lambda u(t) - u(t) \| + \| (u_\lambda - u)(t) \|$$

ce qui démontre (cf lemme 6) que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (J_\lambda u_\lambda)(t) = u(t)$$

Ceci joint à :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(J_\lambda u_\lambda)(t) = -\frac{du}{dt}(t)$$

et au fait que l'opérateur  $A$  est fermé, établit que  $u(t) \in D(A)$  et que  $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0$ . On en déduit alors que  $u \in C^0(\mathbb{R}^+; D(A))$  et que  $u$  est solution de (A.4). Ceci démontre le résultat d'existence lorsque  $u_0 \in D(A^2)$ . De plus la solution  $u(t)$  vérifie les estimations

a priori :

$$(A.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \| u(t) \| \leq \| u_0 \| \quad \forall t \geq 0 \\ \| \frac{du}{dt}(t) \| \leq \| Au_0 \| \quad \forall t \geq 0 \\ \| Au(t) \| \leq \| Au_0 \| \quad \forall t \geq 0 \end{array} \right.$$

La première estimation a déjà été obtenue au point (i). La seconde s'obtient par passage à la limite, quand  $\lambda \rightarrow 0$ , dans l'estimation (A.6) de l'étape 2 et la troisième découle de l'équation satisfaite par  $u$ .

Pour conclure, nous aurons besoin du :

**Lemme 8**  $D(A^2)$  est dense dans  $D(A)$  (muni de la norme du graphe).

**Démonstration** : Soit  $u_\lambda = J_\lambda u$  nous allons montrer que si  $u \in D(A)$ ,  $u_\lambda \in D(A^2)$  et  $u_\lambda \rightarrow u$  dans  $D(A)$  lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ . Nous savons déjà que  $u_\lambda \rightarrow u$  dans  $H$  en vertu du lemme 6. De plus,  $Au_\lambda = AJ_\lambda u = A_\lambda u = J_\lambda(Au)$  (cf Lemme 7 (ii)). Comme  $J_\lambda$  envoie  $H$  dans  $D(A)$  il s'ensuit que  $Au_\lambda \in D(A)$  c'est à dire,  $u_\lambda \in D(A^2)$ . La convergence de  $Au_\lambda$  vers  $Au$  résulte de l'égalité  $Au_\lambda = A_\lambda u$  et du point (iii) du lemme 7. ■

Soit alors  $u_0 \in D(A)$ , par densité nous pouvons construire  $u_0^n \in D(A^2)$  tel que :

$$\begin{aligned} u_0^n &\rightarrow u_0 \\ Au_0^n &\rightarrow Au_0 \end{aligned}$$

Soit  $u^n(t)$  la solution forte de (A.1) associée à la donnée  $u_0^n$ , nous avons les estimations (cf (A.7)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \| u^p(t) - u^q(t) \| \leq \| u_0^p - u_0^q \| \\ \| \frac{du^p}{dt}(t) - \frac{du^q}{dt}(t) \| \leq \| Au_0^p - Au_0^q \| \\ \| Au^p(t) - Au^q(t) \| \leq \| Au_0^p - Au_0^q \| \end{array} \right.$$

Par suite les suites  $u^n$ ,  $\frac{du^n}{dt}$ , et  $Au^n$  convergent, uniformément en temps vers  $u$ ,  $\frac{du}{dt}$  et  $Au$  (pour ce dernier point nous utilisons le caractère fermé de l'opérateur  $A$ ). L'égalité  $\frac{du}{dt} + Au = 0$  s'obtient par passage à la limite dans  $\frac{du^n}{dt} + Au^n = 0$  et  $u(0) = u_0$  à partir de  $u^n(0) = u_0^n$ . ■

Il s'agit maintenant d'obtenir un théorème pour l'équation avec second membre. Dans ce but, il va être utile d'introduire la notion de semi-groupe. Considérons pour cela l'application

qui a  $u_0 \in D(A)$  fait correspondre  $u(t) \in D(A)$  où  $u$  est l'unique solution forte de (4) ( $t$  étant fixé). Cet opérateur est linéaire de  $D(A)$  dans lui même et sera noté  $S(t)$ .

L'estimation du théorème 1 montre que :

$$(A.8) \quad \forall u_0 \in D(A) \quad \| S(t)u_0 \| \leq \| u_0 \|$$

Par densité de  $D(A)$  dans  $H$ ,  $S(t)$  se prolonge de manière unique en un opérateur linéaire continu de  $H$  dans lui même vérifiant :

$$(A.9) \quad \| S(t)u_0 \| \leq \| u_0 \|$$

Bien entendu  $S(0) = I$ . On a ainsi construit une famille d'opérateurs  $\{S(t), t \geq 0\}$  ayant les propriétés suivantes :

$$(A.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad S(0) = I \quad S(t+s) = S(t)S(s) \\ (ii) \quad \| S(t) \| \leq 1 \\ (iii) \quad \forall u_0 \in H \quad \lim_{t \searrow 0} \| S(t)u_0 - u_0 \| = 0 \end{array} \right.$$

On dit que la famille  $\{S(t), t \geq 0\}$  est semi groupe (propriété (i)), continu (propriété (iii)), de contractions (propriétés (ii)). La propriété (ii) venant d'être établie, seules les propriétés (i) et (iii) appellent un commentaire. Pour (i), si  $u_0 \in D(A)$  et  $u$  est la solution de (4) nous avons  $u(s) = S(s)u_0$  et  $S(t)S(s)u_0 = v(t)$  où  $v(t)$  est l'unique solution forte de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{dt} + Av = 0 \quad t \geq 0 \\ v(0) = S(s)u_0 = u(s) \end{array} \right.$$

Soit alors  $\tilde{u}(\tau)$  la fonction définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}(\tau) = u(\tau) \quad si \quad 0 \leq \tau \leq s \\ \tilde{u}(\tau) = v(\tau - t) \quad si \quad \tau \geq s \end{array} \right.$$

C'est un exercice facile de vérifier que  $\tilde{u}(\tau) \in C^1(\mathbf{R}; H) \cap C^0(\mathbf{R}; D(A))$  et que l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\tilde{u}}{dt} + A\tilde{u} = 0 \\ \tilde{u}(0) = u_0 \end{array} \right.$$

En vertu du résultat d'unicité on a  $\tilde{u} = u$ . Par suite :

$$u(t+s) = S(t+s)u_0 = v(t) = S(t)S(s)u_0$$

L'égalité  $S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0$  a lieu pour tout  $u_0$  dans  $D(A)$ . On en déduit l'égalité  $S(t+s) = S(t)S(s)$  dans  $\mathcal{L}(H)$  en utilisant la densité de  $D(A)$  dans  $H$ . Pour la propriété

(iii) nous remarquons que si  $u_0$  appartient à  $D(A)$  nous avons  $S(t)u_0 - u_0 = u(t) - u_0$ . La propriété annoncée résulte alors du fait que  $u \in C^0(\mathbb{R}^+; H)$ . Dans le cas général, par densité de  $D(A)$  dans  $H$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver, étant donné  $u_0$  dans  $H$ , un élément  $u_0^\varepsilon$  de  $D(A)$  tel que :

$$\|u_0 - u_0^\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Par suite :

$$S(t)u_0 - u_0 = S(t)(u_0 - u_0^\varepsilon) + S(t)u_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon + u_0^\varepsilon - u_0$$

Par conséquent,  $S(t)$  étant contractante

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0 - u_0\| &\leq \|S(t)u_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon\| + 2\|u_0 - u_0^\varepsilon\| \\ &\leq \|S(t)u_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon\| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$u_0^\varepsilon$  étant fixé, on sait que  $\lim_{t \rightarrow 0} \|S(t)u_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\exists t_\varepsilon > 0 \ / \ \forall t < t_\varepsilon \quad \|S(t)u_0^\varepsilon - u_0^\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

On conclut alors aisément.

Une conséquence immédiate des propriétés (10) sont les propriétés de continuité du semi-groupe, propriétés que nous utiliserons dans la suite :

$$(A.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i) \quad \forall t \geq 0, \forall u_0 \in H \quad \lim_{h \rightarrow 0} S(t+h)u_0 = S(t)u_0 \\ (ii) \quad \forall t > 0, \forall u_0 \in H \quad \lim_{h \rightarrow 0} S(t-h)u_0 = S(t)u_0 \end{array} \right.$$

Pour obtenir (i) il suffit de remarquer que  $S(t+h)u_0$  est égal à  $S(h)[S(t)u_0]$  et d'appliquer la propriété (iii) de (??) en remplaçant  $u_0$  par  $S(t)u_0$ . Pour (ii) il suffit d'écrire  $S(t-h)u_0 - S(t)u_0 = S(t-h)(u_0 - S(h)u_0)$ . Pour en déduire  $\|S(t-h)u_0 - S(t)u_0\| \leq \|S(h)u_0 - u_0\|$ . On conclut à nouveau à l'aide de (??) (iii).

**Remarque 24** Dans la suite, nous supposons le lecteur familiarisé avec la notion d'intégrale à valeurs vectorielles, ou simplement à valeurs dans un espace de Hilbert.

Une propriété fondamentale du semi-groupe  $S(t)$  est qu'il permet une caractérisation complète de l'opérateur  $A$ . C'est l'objet du :

**Lemme 9**

$$\begin{array}{l} (i) \quad D(A) = \{u_0 \in H / \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_0 - S(h)u_0}{h} \text{ existe dans } H\} \\ (ii) \quad \forall u_0 \in D(A) \quad Au_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_0 - S(h)u_0}{h} \end{array}$$



**Démonstration :** Elle passe à nouveau par l'utilisation des opérateurs régularisés de Yosida  $A_\lambda$  et plus précisément des semi-groupes associés

$$S_\lambda(t) = \exp(-tA_\lambda)$$

**Etape 1** Montrons que pour tout  $u_0 \in H$  :

$$\frac{1}{h} \int_0^h S(t)u_0 dt \in D(A)$$

et que l'on a la formule :

$$A\left[\frac{1}{h} \int_0^h S(t)u_0 dt\right] = \frac{u_0 - S(h)u_0}{h}$$

En effet soit  $u_\lambda(t) = S_\lambda(t)u_0$ .  $U - \lambda$  est la solution de :

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} = A_\lambda u_\lambda = 0 \\ u_\lambda(0) = u_0 \end{cases}$$

Après intégration entre 0 et  $h$  nous obtenons :

$$\frac{u_\lambda(h) - u_0}{h} + \frac{1}{h} \int_0^h A_\lambda u_\lambda(\tau) d\tau = 0$$

ce que nous pouvons encore écrire, l'opérateur  $A_\lambda$  étant borné :

$$A_\lambda \left[ \frac{1}{h} \int_0^h S_\lambda(t)u_0 dt \right] = \frac{u_0 - S_\lambda(h)u_0}{h}$$

ce que nous pouvons écrire en posant :

$$(A.12) \quad z_\lambda = \frac{1}{h} \int_0^h S_\lambda(t)u_0 dt$$

$$(A.13) \quad A[J_\lambda z_\lambda] = \frac{u_0 - S_\lambda(h)u_0}{h}$$

Il s'agit maintenant de passer à la limite quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Nous savons déjà (cf démonstration du théorème 1) que :

$$(A.14) \quad \forall u_0 \in H \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\lambda(t)u_0 = S(t)u_0$$

En effet le résultat a déjà été établi au cours de la démonstration du théorème 1 pour  $u_0 \in D(A^2)$  (cf étape 3). Pour conclure il suffit d'utiliser la densité de  $D(A^2)$  dans  $H$  et le fait que  $S_\lambda(t)$  et  $S(t)$  sont des contractions. Nous laissons les détails au lecteur à titre d'exercice. A partir de (A.14) nous déduisons que :

$$(A.15) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{u_0 - S_\lambda(h)u_0}{h} = \frac{u_0 - S(h)u_0}{h}$$

D'autre part, le théorème de convergence dominée de Lebesgue (notons en effet que  $\|S_\lambda(t)u_0\| \leq \|u_0\|$ ) nous permet d'affirmer que :

$$(A.16) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} z_\lambda = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)u_0 dt = z \text{ (définition)}$$

Alors en remarquant que

$$J_\lambda z_\lambda - z = J_\lambda(z_\lambda - z) + J_\lambda z - z$$

il vient,  $J_\lambda$  étant contractante

$$\|J_\lambda z_\lambda - z\| \leq \|z_\lambda - z\| + \|J_\lambda z - z\|$$

Alors en utilisant (A.16) et la propriété (ii) du lemme ?? il vient :

$$(A.17) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} J_\lambda z_\lambda = z$$

En joignant (A.15) et (A.17) à (A.13), nous observons que :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\lambda z_\lambda \rightarrow z \\ A(J_\lambda z_\lambda) \rightarrow \frac{u_0 - S(h)u_0}{h} \end{array} \right.$$

Le fait que  $A$  soit fermé entraîne alors que  $z$  appartient à  $D(A)$  et que :

$$Az = \frac{u_0 - S(h)u_0}{h}$$

ce qui est le résultat annoncé.

**Etape 2 : Fin de la preuve** Posons  $v_h = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)u_0 dt$ . Par le théorème de la moyenne nous avons :

$$v_h = S(\theta h)u_0 \text{ avec } \theta \in ]0, 1[.$$

Il s'ensuit que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} v_h = u_0$$

Posons maintenant :

$$V = \{u_0 \in H / \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_0 - S(h)u_0}{h} \text{ existe dans } H\}$$

Pour tout  $u_0$  dans  $V$  nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_h \text{ converge vers } u_0 \text{ dans } H \\ Av_h \text{ converge dans } H \end{array} \right.$$

(en effet, d'après l'étape 1,  $Av_h = \frac{u_0 - S(h)u_0}{h}$  qui converge par définition de  $V$ ).  $A$  étant fermé il s'ensuit que :

$$V \subset D(A) \text{ et } \forall u_0 \in V \quad Au_0 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_0 - S(h)u_0}{h}$$

Réciproquement si  $u_0 \in D(A)$  alors  $u(t) = S(t)u_0$  est la solution forte de

$$(A.18) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Donc :

$$\frac{u_0 - S(h)u_0}{h} = \frac{u(0) - u(h)}{h}$$

Comme  $u \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$ ,  $\frac{u_0 - u(h)}{h}$  converge vers  $-\frac{du}{dt}(0)$  qui n'est autre que  $Au_0$  en vertu de (A.18). Nous avons donc montré que  $D(A) \subset V$  et que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u_0 - S(h)u_0}{h} = Au_0 \quad \forall u_0 \in D(A)$$

■

**Remarque 25** *Nous avons utilisé le fait que si  $B$  est un opérateur borné de  $H$  dans lui même et si  $v(t) \in L^1(0, T; H)$  alors  $Bv \in L^1(0, T; H)$  et :*

$$\int_0^t Bv(t)dt = B\left(\int_0^t v(t)dt\right)$$

On dit que l'opérateur  $A$  est le générateur infinitésimal du semi-groupe de contractions  $S(t)$ . En quelque sorte, le lemme précédent établit une sorte d'équivalence entre opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions. On peut en fait démontrer qu'à tout semi-groupe  $S(t)$  de contractions on peut, par le biais des points (i) et (ii) du lemme, associer un opérateur maximal monotone.

Avant de passer à la démonstration du théorème d'existence pour l'équation non homogène, énonçons un lemme qui nous sera utile par la suite.

**Lemme 10**  *$S(t)$  et  $A$  commutent sur  $D(A)$  :*

$$\forall u_0 \in D(A) \quad S(t)Au_0 = A(S(t)u_0)$$

**Démonstration** : En notant que  $\frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} = S(t)\left(\frac{S(h)u_0 - u_0}{h}\right)$ , il vient immédiatement :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} = S(t)Au_0$$

Par ailleurs, comme  $\frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} = \frac{S(h)[S(t)u_0] - S(t)u_0}{h}$  et comme  $S(t)u_0 \in D(A)$  lorsque  $u_0 \in D(A)$  (en effet  $u(t) = S(t)u_0 \in C^0(\mathbb{R}^+; D(A))$  d'après le théorème 1) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} = AS(t)u_0$$

On conclut alors immédiatement. ■

Nous revenons maintenant avec l'équation avec second membre :

$$(A.19) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f & f \in C^0(\mathbb{R}^+; H) \\ u(t) = u_0 & u_0 \in D(A) \end{cases}$$

Notons tout d'abord que le résultat d'unicité établi pour l'équation homogène au théorème s'applique évidemment à l'équation (A.19). De même, compte tenu de la linéarité de l'équation, il suffit de considérer le cas  $u_0 = 0$  (retrancher  $S(t)u_0$  à  $u$  et considérer le nouveau problème) :

$$(A.20) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f & f \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

Rappelons ici que l'on appelle solution classique de (A.20) toute fonction  $u \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C^0(\mathbb{R}^+; D(A))$  satisfaisant  $u(0) = 0$  et pour tout  $t > 0$ , l'égalité dans  $H$  :  $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t)$ . Commençons alors par établir le :

**Lemme 11** *Si  $u$  est une solution classique de (A.20), elle est nécessairement donnée par la formule*

$$(A.21) \quad u(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

**Démonstration** : Introduisons,  $a > 0$  étant fixé, la fonction :

$$\psi_a(t) = S(a-t)u(t) \quad 0 \leq t \leq a$$

Il est facile de voir que  $\psi_a \in C^1(0, a; H)$  et que :

$$(A.22) \quad \frac{d\psi_a}{dt}(t) = S(a-t)\frac{du}{dt}(t) + AS(a-t)u(t)$$

Compte tenu de l'équation satisfaite par  $u(t)$  il vient :

$$\frac{d\psi_a}{dt}(t) = S(a-t)f(t)$$

(Nous avons utilisé le fait que  $S(t)$  et  $A$  commutent sur  $D(A)$ ). Il vient alors :

$$\psi_a(a) - \psi(0) = \int_0^a S(a-s)f(s)ds$$

C'est à dire le résultat annoncé puisque :  $\psi(0) = 0$  et  $\psi_a(a) = u(a)$

**Remarque 26** Pour démontrer (A.22), il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}[\psi_a(t+h) - \psi_a(t)] &= S(a-t-h)\left[\frac{u(t+h) - u(t)}{h}\right] \\ &+ \frac{S(a-t) - S(a-t-h)}{h}u(t) \end{aligned}$$

Le fait que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(a-t) - S(a-t-h)}{h}u(t) = A(a-t)u(t)$$

provient du fait que  $u(t) \in D(A)$ . Par ailleurs nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} S(a-t-h)\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - S(a-t)\frac{du}{dt}(t) &= S(a-t-h)\left[\frac{u(t+h) - u(t)}{h} - \frac{du}{dt}(t)\right] \\ &+ [S(a-t-h) - S(a-t)]\frac{du}{dt}(t) \end{aligned}$$

dont on déduit aisément que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} S(a-t-h)\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = S(a-t)\frac{du}{dt}(t)$$

Pour conclure nous utiliserons le

**Lemme 12** Si  $f \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$ , alors la fonction

$$u(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

est une solution forte de (A.20)

**Démonstration** : Elle comporte trois étapes :

(i)  $u(t) \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$ . En effet soit  $h > 0$ , nous avons :

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h} S(s)f(t+h-s)ds - \int_0^t S(s)f(t-s)ds\right\}$$

(Il suffit de remarquer que, grâce au changement de variable  $s \rightarrow t-s$ , on a aussi

$$u(t) = \int_0^t S(s)f(t-s)ds.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left\{\int_0^{t+h} S(s)f(t+h-s)ds\right\} \\ &+ \int_0^t S(s)\left(\frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h}\right)ds \end{aligned}$$

En vertu du théorème de la moyenne, il vient

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s) = S(t+\theta h)f((1-\theta)h) \quad \theta \in [0, 1]$$

Or en écrivant :

$$\left| \begin{aligned} S(t+\theta h)f(1-\theta)h - f(0) = \\ S(t+\theta h)f(0) - f(0) + S(t+\theta h)[f((1-\theta)h) - f(0)] \end{aligned} \right.$$

On obtient l'estimation

$$\left| \begin{aligned} \| S(t+\theta h)f(1-\theta)h - f(0) \| &\leq \| S(t+\theta h)f(0) - f(0) \| \\ &+ \| f((1-\theta)h) - f(0) \| \end{aligned} \right.$$

qui démontre que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(s)f(t+h-s)ds = f(0)$$

Par ailleurs nous avons :

$$\frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} \rightarrow f'(t-s) \quad h \rightarrow 0 \text{ (dans } H)$$

Par continuité de  $S(s)$

$$S(s) \frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} \rightarrow S(s)f'(t-s)$$

Par ailleurs nous avons (avec  $(t, t+h) \in [0, T]$ )

$$\| S(s) \frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} \| \leq \sup_{t \in [0, T]} \| f'(t) \|$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous dit alors que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^t \frac{f(t+h-s) - f(t-s)}{h} ds = \int_0^t S(s)f'(t-s)ds$$

Nous avons donc bien  $u(t) \in C^1(0, T; H)$  avec en outre :

$$u'(t) = f(0) + \int_0^t S(s)f'(t-s)ds$$

- (ii)  $u(t) \in C^0(0, T; D(A))$  et  $\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t)$ . Nous allons en fait montrer que  $\frac{u(t) - S(h)u(t)}{h}$  converge vers  $f(t) - \frac{du}{dt}(t)$  ce qui, en utilisant le lemme 9, établit le résultat désiré.

Remarquons que :

$$\begin{aligned} u(t+h) - u(t) &= \int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds - \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ &= \int_0^t [S(t+h-s) - S(t-s)]f(s)ds + \int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \end{aligned}$$

Remarquons alors que (cf remarque ci-après)

$$\int_0^t [S(t+h-s) - S(t-s)]f(s)ds = S(h)u(t) - u(t)$$

et donc que :

$$\frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{S(h)u(t) - u(t)}{h} + \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds$$

D'après le point (i) de la preuve :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{du}{dt}(t)$$

et par ailleurs :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds = f(t)$$

on conclut alors de façon évidente. ■

Joignant le théorème 1 à ce dernier lemme, nous voyons que nous avons démontré le théorème de Hille-Yosida :

**Théorème 19** *Soit  $A$  un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert  $H$ . Alors pour tout  $u_0$  dans  $D(A)$  et tout  $f$  dans  $C^1(\mathbb{R}^+; H)$  l'équation différentielle :*

$$(A.23) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une solution (classique) unique :

$$u \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C^0(\mathbb{R}^+; D(A))$$

Il existe d'autres variantes de ce théorème. Indiquons en une à titre d'exercice.

**Exercice 16** *Démontrer que la conclusion du théorème 19 reste vraie si on remplace l'hypothèse :*

$$f \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$$

par l'hypothèse :

$$f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+; D(A))$$

Cette dernière hypothèse signifie que pour presque tout  $t$ ,  $f(t) \in D(A)$  et que la fonction  $t \mapsto \|Af(t)\|$  est intégrable sur tout intervalle  $[0, T]$ ,  $T > 0$ .

Il nous reste maintenant à démontrer le théorème énoncé au chapitre 2, à savoir le :

**Théorème 20** (Hille-Yosida)

On suppose qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $A + \lambda I$  soit maximal monotone. Alors pour tout  $u_0 \in D(A)$  et tout  $f(t) \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$ , l'équation différentielle :

$$(A.24) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution classique (ou solution forte) :

$$u(t) \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C^0(\mathbb{R}; D(A))$$

**Démonstration :** Posons  $\tilde{f} = e^{-\lambda t} f \in C^1(\mathbb{R}^+; H)$ . Le théorème 19 permet d'assurer que le problème :

$$(A.25) \quad \begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av + \lambda v = \tilde{f} & t > 0 \\ v(0) = u_0 \end{cases}$$

admet une unique solution classique :

$$v(t) \in C^1(\mathbb{R}^+; H) \cap C^0(\mathbb{R}; D(A))$$

On conclut à l'existence en observant que :

$$u = ve^{\lambda t}$$

est solution forte de (A.24). La démonstration de l'unicité ne pose pas de difficulté. ■