



HAL
open science

Sur la prise en compte de quelques conditions aux limites avec la méthode des éléments finis

Franz Chouly

► **To cite this version:**

Franz Chouly. Sur la prise en compte de quelques conditions aux limites avec la méthode des éléments finis. Master. Cours d'analyse numérique et de calcul scientifique, Université Bourgogne Franche-Comté, France. 2017, pp.70. cel-01564693

HAL Id: cel-01564693

<https://cel.hal.science/cel-01564693>

Submitted on 19 Jul 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur la prise en compte de quelques conditions aux limites avec la
méthode des éléments finis

Franz Chouly ¹

19 juillet 2017

¹Laboratoire de Mathématiques - UMR CNRS 6623, Université de Franche Comté, 16 route de Gray,
25030 Besançon Cedex, France. email: franz.chouly@univ-fcomte.fr

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Motivation	5
1.2	Prérequis	6
1.3	Notations	7
2	Résultats fondamentaux d'analyse	9
2.1	Espaces de Sobolev fractionnaires	9
2.2	Opérateurs de trace et de relèvement	13
2.3	Théorèmes généraux liés aux problèmes elliptiques	15
3	Conditions de Dirichlet non-homogènes	17
3.1	Présentation du problème	17
3.2	Discrétisation par éléments finis	21
3.3	La méthode "standard" par relèvement	23
3.3.1	Description	23
3.3.2	Analyse mathématique	24
3.3.3	Implémentation	26
3.4	La méthode de Nitsche	28
3.4.1	Description	28
3.4.2	Analyse mathématique	31
3.4.3	Implémentation	35
3.5	Revue succincte des autres méthodes	36
3.5.1	La méthode de pénalité	36
3.5.2	Les méthodes mixtes	37
3.5.3	Les méthodes stabilisées	38
4	Conditions de Signorini	39
4.1	Présentation du problème	39
4.1.1	Motivation	39
4.1.2	Formulation faible et conditions de contact	42
4.1.3	Existence et unicité de la solution	46
4.1.4	Régularité	48

4.2	Discrétisation par éléments finis	48
4.3	La méthode “standard” via l’inéquation variationnelle	49
4.3.1	Description	49
4.3.2	Analyse mathématique	50
4.3.3	Implémentation	52
4.4	La méthode de Nitsche pour Signorini	52
4.4.1	Dérivation	53
4.4.2	Analyse mathématique	55
4.4.3	Implémentation	60
4.5	Revue succincte des autres méthodes	60
5	Conclusion et perspectives	63

Chapitre 1

Introduction

1.1 Motivation

Nous détaillons dans ce cours certaines techniques pour discrétiser des conditions aux limites spécifiques qui interviennent sur le bord d'un domaine où est défini une équation aux dérivées partielles elliptique. Cette équation aux dérivées partielles représente la plupart du temps, sous forme simplifiée, un problème physique concret à résoudre, et les conditions aux limites tiennent compte alors des phénomènes physiques qui se produisent sur le bord du domaine (valeur d'une quantité physique fixée, flux d'entrée imposé, etc). Nous nous appuyons pour cela sur la Méthode des Eléments Finis (MEF), qui fait intervenir l'écriture sous forme variationnelle (ou faible) de l'équation à résoudre, et c'est via cette réécriture que les conditions limites sont prises en compte, en général après une intégration par parties de l'équation originelle qui fait apparaître une intégrale sur le bord. La MEF permet de tenir compte, pour des domaines de forme relativement arbitraire, d'une grande variété de conditions aux limites. Les conditions les plus standard, *i.e.* Dirichlet homogène, Neumann et Fourier/Robin, peuvent être intégrées sans grande difficulté et on pourra trouver leur étude détaillée dans la plupart des ouvrages de référence sur la MEF.

Néanmoins, certaines conditions, qui peuvent intervenir dans un bon nombre de situations en pratique, demandent d'avantage de travail pour être intégrées dans le formalisme de la MEF et pour être analysées mathématiquement. La première d'entre elle que nous allons étudier ici est la condition de Dirichlet non-homogène. Il s'agit alors simplement d'imposer sur le bord une valeur de la fonction inconnue qui soit différente de zéro. Même s'il existe une façon relativement élémentaire de s'en sortir, cette condition de bord a suscité une littérature abondante au sein de la communauté MEF à partir du tout début des années 1970, car sa compréhension détaillée permet ensuite de s'attaquer à des conditions plus complexes, par exemple, à l'interface entre deux domaines où sont définies deux équations aux dérivées partielles différentes. De plus, certaines des techniques permettent une discrétisation de type "non-conforme" géométrique, où le domaine de calcul n'épouse alors plus le domaine où est défini l'équation, ce qui offre une grande souplesse pour le traitement de problèmes où la forme du domaine original est complexe ou évolue avec le temps. C'est la base de toutes les méthodes de type "domaines fictifs" ou "frontières immergées".

Le deuxième type de conditions que nous allons étudier sont les conditions de Signorini. Celles-ci

représentent de façon simplifiée les actions de contact sans frottement entre un corps élastique et un support rigide. Ce sont des conditions non-linéaires faisant intervenir des inégalités. L'écriture du problème mathématique complet se fait alors sous forme d'une inéquation variationnelle. La compréhension de ces conditions de Signorini est également une base pour décrire des phénomènes de contact et de frottement plus complexes, qui interviennent en particulier dans l'industrie (fondations en génie civil, profilage en métallurgie, "crash-tests" dans l'industrie automobile, mise au point de pneumatiques) ou encore en biomécanique (articulations avec cartilage, dents, valves cardiaques, cordes vocales). Nous verrons par ailleurs que la plupart des techniques développées pour le problème de Dirichlet non-homogène s'étendent à ce cadre.

Ce cours doit beaucoup aux collègues avec qui j'ai pu travailler et échanger sur ces sujets, et que je remercie vivement, en particulier (par ordre alphabétique) : Roland Becker, Stéphane Bordas, Thomas Boiveau, Erik Burman, Daniela Capatina, Susanne Claus, Mathieu Fabre, Miguel A. Fernández, Norbert Heuer, Robert Luce, Patrick Hild, Alexei Lozinski et Yves Renard. Je remercie également les collègues du Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Eléments Finis de l'Université Laval, chez qui j'ai donné une partie de ce cours en 2016. Une autre partie de ce cours provient, entre autres, de mes enseignements, et télé-enseignements, en Master Mathématiques Approfondies à l'Université Bourgogne Franche-Comté depuis 2011, et j'adresse également mes remerciements aux étudiants qui m'ont fait un retour sur ce cours, en signalant les coquilles ou en suggérant des améliorations, tout particulièrement Raphaël Bulle, Stéphane Robin et Aurélien Sezny.

1.2 Prérequis

Ce cours suppose connu le cadre théorique élémentaire pour l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques et leur discrétisation par la Méthode des Eléments Finis. Le lecteur qui désire renforcer, ou réviser, ses acquis, pourra consulter en particulier :

- L'ouvrage de Haïm Brezis [16], l'ouvrage de Jindřich Nečas [67] et l'ouvrage de Lawrence C. Evans [38] en ce qui concerne l'analyse fonctionnelle appliquée et les notions de base sur les équations aux dérivées partielles.
- Pour une étude de la méthode des éléments finis à un niveau introductif : nous recommandons surtout les ouvrages de Jacques Rappaz et Marco Picasso [76], de Francisco Javier Sayas [79], d'André Fortin et André Garon [41] et de Grégoire Allaire [5]. Egalement les ouvrages d'Alexandre Ern [36], de Claes Johnson [57] et de Pierre-Arnaud Raviart et Jean-Marie Thomas [77] pourront être utiles.
- Pour une étude approfondie de la méthode des éléments finis : nous recommandons surtout les ouvrages de Susanne Brenner et L. Ridgway Scott [14], d'Alexandre Ern et Jean-Luc Guermond [37] ainsi que celui d'Olaf Steinbach [81]. Egalement nous pouvons recommander les grands classiques, un peu plus anciens, que sont les ouvrages de Philippe G. Ciarlet [29], d'Alfo Quarteroni et Alberto Valli [74] et de Dietrich Braess [13].
- Le dernier chapitre nécessite des notions de base sur la théorie de l'élasticité linéaire. Pour une introduction à ces notions, le lecteur pourra consulter le Chapitre 11 du polycopié d'André

Fortin et André Garon [41] et les premiers chapitres du livre de Georges Duvaut [35].

1.3 Notations

Nous utiliserons les caractères gras minuscules comme \mathbf{u}, \mathbf{v} pour des quantités vectorielles ou tensorielles, et des caractères gras majuscules (comme \mathbf{V}, \mathbf{K}) pour des ensembles de fonctions, ou des opérateurs, à valeurs vectorielles ou tensorielles. On utilisera les notations c, C pour désigner des constantes “génériques” strictement positives, indépendantes des paramètres de discrétisation, ou éventuellement d’autres paramètres que nous préciserons. La mesure d’un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, sera notée systématiquement $|E|$.

Chapitre 2

Résultats fondamentaux d'analyse

Nous présentons ici les principaux résultats à connaître pour la suite, qui permettent l'étude mathématique de problèmes elliptiques, continus et discrétisés, sur un domaine borné et avec des conditions aux limites particulières sur le bord de ce domaine. Nous commençons avec quelques notions de base sur les espaces de Sobolev fractionnaires. Ensuite une section est consacrée aux théorèmes de trace et de relèvement, qui vont jouer un rôle fondamental dans les chapitres ultérieurs. Nous terminerons avec quelques rappels sur les théorèmes fondamentaux qui servent à étudier les problèmes elliptiques dans un cadre abstrait.

Il est important de bien connaître ces résultats, mais leurs démonstrations, parfois très techniques, pourront éventuellement être admises. Certaines preuves, trop longues ou difficiles, seront d'ailleurs omises, et nous renverrons aux références appropriées à leur sujet.

2.1 Espaces de Sobolev fractionnaires

Nous donnons ici les principales définitions et caractéristiques concernant les espaces de Sobolev fractionnaires sur un domaine et son bord, en suivant principalement l'ouvrage de William McLean [65] (voir également [47, 81]). Nous commençons tout d'abord par quelques rappels sur les espaces de Sobolev à indice entier naturel (voir [5, 1, 16] pour d'avantage de détails).

Soit $d \geq 1$ et ω un sous-ensemble de \mathbb{R}^d , mesurable au sens de Lebesgue et d'intérieur non-vide. On utilisera la notation $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ pour désigner un point générique dans ω . On notera d'abord $\mathcal{D}(\omega)$ l'espace des fonctions de ω à valeurs réelles, à support compact, et infiniment dérivables. On notera $L^2(\omega)$ l'espace de Lebesgue des fonctions de carré intégrable sur ω

$$L^2(\omega) := \left\{ \psi : \omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\omega} \psi(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{\omega} := \int_{\omega} \phi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

pour $\phi, \psi \in L^2(\omega)$. La norme associée sera notée

$$\|\psi\|_{0,\omega} := \left(\int_{\omega} \psi(\mathbf{x})^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Ainsi muni, $L^2(\omega)$ est un espace de Hilbert [16]. C'est une propriété qui sera transmise aux espaces définis ci-après, qui seront construits à partir de $L^2(\omega)$.

Pour tout indice $m \in \mathbb{N}$ l'espace de Sobolev d'ordre m sur ω est défini par

$$H^m(\omega) := \{ \psi \in L^2(\omega) \mid D^\alpha \psi \in L^2(\omega), |\alpha| \leq m \},$$

avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ un multi-indice et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d$. La notation D^α est utilisée pour désigner la dérivée partielle au sens faible

$$D^\alpha \psi := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}} \psi.$$

On adoptera la convention habituelle : $H^0(\omega) := L^2(\omega)$. On introduit sur l'espace $H^m(\omega)$ le produit scalaire suivant

$$(\phi, \psi)_{m,\omega} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha \phi, D^\alpha \psi)_\omega$$

avec pour norme associée

$$\|\psi\|_{m,\omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha \psi\|_{0,\omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour toute fonction ψ dans $H^1(\omega)$, le gradient (faible) de ψ est le champ vectoriel de ω à valeurs dans \mathbb{R}^d défini comme suit :

$$\nabla \psi := \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_d} \right)^T.$$

L'espace des fonctions à valeurs vectorielles de carré intégrable dont la divergence faible est de carré intégrable est noté :

$$\mathbf{H}(\text{div}; \omega) := \left\{ \boldsymbol{\psi} \in (L^2(\omega))^d \mid \text{div } \boldsymbol{\psi} \in L^2(\omega) \right\},$$

où la divergence faible est l'unique fonction de $L^2(\omega)$ définie par :

$$\int_{\omega} (\text{div } \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x})) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \int_{\omega} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\omega).$$

Bien sûr, pour des fonctions $\boldsymbol{\psi} : \omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ suffisamment régulières, par exemple de $(H^1(\omega))^d$, nous avons :

$$\text{div } \boldsymbol{\psi} := \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \psi_d}{\partial x_d},$$

avec $\boldsymbol{\psi} := (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_d)^T$.

Pour caractériser finement la régularité des fonctions et des solutions des équations aux dérivées partielles que nous allons étudier, nous introduisons également la famille des espaces de Sobolev fractionnaires sur ω (voir par exemple [65]). Nous avons besoin à cet effet de la semi-norme de Slobodeckij (ou de Gagliardo), donnée pour θ dans $(0, 1)$ et pour une fonction ψ définie sur ω , par :

$$|\psi|_{\theta, \omega} := \left(\int_{\omega} \int_{\omega} \frac{(\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y}))^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{d+2\theta}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout indice $\tau \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$, on pose $\tau = m + \theta$, $m \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0, 1)$, et on définit alors l'espace de Sobolev fractionnaire $H^\tau(\omega)$ comme suit :

$$H^\tau(\omega) := \{ \psi \in H^m(\omega) \mid |D^\alpha \psi|_{\theta, \omega} < +\infty, |\alpha| = m \}.$$

On munit cet espace de la norme

$$\|\psi\|_{\tau, \omega} := \left(\|\psi\|_{m, \omega}^2 + \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha \psi|_{\theta, \omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour tout $\tau \in \mathbb{R}_+$, on définit le sous-espace $H_0^\tau(\omega)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{D}(\omega)$ dans $H^\tau(\omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\tau, \omega}$.

On définit maintenant les espaces de Sobolev sur le bord $\partial\omega$ d'un domaine ω . On supposera pour cela que la frontière $\partial\omega$ est lipschitzienne, autrement dit qu'elle est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne (en utilisant différents systèmes de coordonnées associés à chaque portion de $\partial\omega$). Si on souhaite en donner une définition précise, on pourra par exemple se référer à [65, Définition 3.28, p.89] :

Définition 2.1.1. *Un ouvert $\omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \geq 1$) est de frontière $\partial\omega$ lipschitzienne si $\partial\omega$ est compacte et s'il existe des familles finies $\{W_j\}$ et $\{\omega_j\}$ qui vérifient les trois propriétés suivantes :*

1. *La famille $\{W_j\}$ est un recouvrement fini d'ouverts de $\partial\omega$.*
2. *Chaque ω_j peut être transformé en hypographe lipschitzien par transformation rigide, autrement dit, dans un système de coordonnées x'_1, \dots, x'_d adéquat :*

$$\omega_j = \{ (x'_1, \dots, x'_d) \in \mathbb{R}^d \mid x'_d < f_j(x'_1, \dots, x'_{d-1}) \},$$

où f_j est une fonction lipschitzienne.

3. *L'ensemble ω est tel que $W_j \cap \omega = W_j \cap \omega_j$.*

On pourra trouver d'autres définitions équivalentes dans les ouvrages classiques sur les équations aux dérivées partielles (par exemple [67, Section 1.3]). Cette hypothèse est assez peu restrictive, et permet d'inclure en particulier la plupart des domaines polygonaux, en dimension deux, ou polyédriques, en dimension trois. Ce sont ces domaines qui nous intéresseront en particulier pour

l'analyse numérique des méthodes éléments finis. Elle exclut par contre certains domaines qui apparaissent dans des applications en mécanique, comme les domaines avec fissures (polygones avec un angle intérieur de 2π), dont le traitement doit être fait séparément (voir par exemple [48]). En deux dimensions, les domaines polygonaux qui sont de frontière lipschitzienne sont appelés *strictement* polygonaux par Pierre Grisvard (tous les angles intérieurs sont strictement inférieurs à 2π) et quand nous évoquerons un domaine polygonal, il faudra entendre strictement polygonal en toute rigueur.

Comme la frontière $\partial\omega$ est lipschitzienne, le théorème de Rademacher [39, Section 3.1.6] nous permet de lui associer une mesure linéique, pour $d = 2$, ou surfacique, pour $d = 3$, que nous noterons toujours ds , et une normale extérieure sortante, définie presque partout, que nous noterons \mathbf{n} . Soit maintenant γ une partie connexe de $\partial\omega$. Pour θ dans $(0, 1)$ et pour toute fonction ψ définie sur γ et à valeurs dans \mathbb{R} , on introduit la semi-norme :

$$|\psi|_{\theta,\gamma} := \left(\int_{\gamma} \int_{\gamma} \frac{(\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{y}))^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{(d-1)+2\theta}} ds(\mathbf{x}) ds(\mathbf{y}) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace de Sobolev fractionnaire sur le bord $H^\theta(\gamma)$ est alors [48] :

$$H^\theta(\gamma) := \{ \psi \in L^2(\gamma) \mid |\psi|_{\theta,\gamma} < +\infty \}.$$

Il est muni de la norme

$$\|\psi\|_{\theta,\gamma} := \left(\|\psi\|_{0,\gamma}^2 + |\psi|_{\theta,\gamma}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le cas qui nous intéressera le plus par la suite correspondra à $\theta = \frac{1}{2}$. Le dual topologique de $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ sera noté $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ et sa norme associée est

$$\|\psi\|_{-\frac{1}{2},\gamma} := \sup_{\phi \in H^{\frac{1}{2}}(\gamma)} \frac{\langle \psi, \phi \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\gamma}}{\|\phi\|_{\frac{1}{2},\gamma}},$$

avec $\langle \cdot, \cdot \rangle_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\gamma}$ le produit de dualité entre $H^{-\frac{1}{2}}(\gamma)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ ($L^2(\gamma)$ étant l'espace pivot).

Pour terminer, nous précisons à partir de quelle régularité de Sobolev une fonction est continue sur son domaine. Il s'agit d'une application directe des *injections de Sobolev* (voir, par exemple, [47, Section 1.4.4]). Nous supposons que ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d , de frontière $\partial\omega$ lipschitzienne. Nous avons alors :

$$H^s(\omega) \subset C^0(\bar{\omega}), \quad \text{pour tout réel } s > \frac{d}{2}. \quad (2.1)$$

On remarquera en particulier, dans la relation ci-dessus, la dépendance par rapport à la dimension d du domaine. Ainsi, pour une fonction sur un domaine ω de \mathbb{R}^3 , on ne peut assurer sa continuité que si sa régularité de Sobolev est strictement supérieure à $\frac{3}{2}$.

2.2 Opérateurs de trace et de relèvement

Nous allons voir ici deux théorèmes qui vont jouer un rôle important dans le chapitre suivant, qui permettent de caractériser précisément les traces de fonctions qui appartiennent à $H^1(\Omega)$, où le bord de Ω est lipschitzien. Le premier est un théorème de trace qui peut s'énoncer comme suit, et qui est une version simplifiée de l'énoncé de Gagliardo (voir [44] pour la preuve, et [47, Theorem 1.5.1.3] ou encore [48, Théorème 1.4.2] pour l'énoncé plus général) :

Théorème 2.2.1. *Soit Ω un ouvert borné, mesurable et d'intérieur non-vide, de \mathbb{R}^d , et dont le bord $\partial\Omega$ est lipschitzien. Alors l'application $v \mapsto v|_{\partial\Omega}$, bien définie sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, admet par densité un prolongement unique*

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega).$$

De plus γ est un opérateur linéaire, continu et surjectif. Son noyau est $H_0^1(\Omega)$.

Ce qui est particulièrement important ici est la surjectivité de γ , qui nous permet tout d'abord de caractériser $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ comme l'espace des traces des fonctions de $H^1(\Omega)$:

$$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) = \{\gamma v \mid v \in H^1(\Omega)\}.$$

De plus, cette surjectivité de γ combinée au Théorème de l'Application Ouverte de Banach nous permet de construire un relèvement du bord $\partial\Omega$ vers tout le domaine Ω . Ce résultat peut être énoncé comme suit (voir [37, Corollaire B.53]) :

Corollaire 2.2.2. *Soit Ω un ouvert borné, mesurable et d'intérieur non-vide de \mathbb{R}^d , et dont le bord $\partial\Omega$ est lipschitzien. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $w \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, il existe (au moins) un élément v_w de $H^1(\Omega)$ tel que*

$$\gamma v_w = w, \quad \|v_w\|_{1,\Omega} \leq C \|w\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}.$$

Un tel élément v_w est appelé un relèvement de w dans $H^1(\Omega)$.

Preuve : D'après le Théorème de l'Application Ouverte de Banach (voir [16, Théorème II.5]), il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\mathcal{B}_{H^{\frac{1}{2}}}(0, c) \subset \gamma(\mathcal{B}_{H^1}(0, 1)),$$

où $\mathcal{B}_{H^{\frac{1}{2}}}(0, c)$ est la boule ouverte en 0 et de rayon c dans $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et $\mathcal{B}_{H^1}(0, 1)$ est la boule ouverte en 0 et de rayon 1 dans $H^1(\Omega)$. Soit alors $w \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ et posons $\tilde{w} = cw \|w\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}^{-1}$. Nous avons $\|\tilde{w}\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \leq c$. Il existe donc \tilde{v} dans $H^1(\Omega)$ tel que

$$\gamma \tilde{v} = \tilde{w}, \quad \|\tilde{v}\|_{1,\Omega} \leq 1.$$

Autrement dit :

$$\gamma \left(\frac{1}{c} \|w\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \tilde{v} \right) = w, \quad \left\| \frac{1}{c} \|w\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega} \tilde{v} \right\|_{1,\Omega} \leq \frac{1}{c} \|w\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}.$$

On obtient donc le résultat en posant $C = \frac{1}{c}$ et $v_w = \|w\|_{\frac{1}{2}, \partial\Omega} / c \tilde{v}$. \square

Finalement, pour passer des formulations fortes aux formulations faibles, et inversement, il nous faut une formule de Green appropriée. Nous allons énoncer d'abord une première formule, qui est un corollaire du théorème de la divergence (voir [37, Lemma B.56, Corollary B.57]) :

Proposition 2.2.3. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , borné, mesurable, d'intérieur non-vide et de bord $\partial\Omega$ lipschitzien. Pour toutes les fonctions $\boldsymbol{\varphi} \in (L^2(\Omega))^d$ et $\psi \in H^1(\Omega)$ vérifiant $\operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi}) \in L^2(\Omega)$, nous avons alors $(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}) \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ainsi que l'identité suivante :*

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \langle \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}, \psi \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial\Omega}.$$

Démonstration. Prenons tout d'abord φ et ψ des fonctions de $(\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^d$ et de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et appliquons la formule de la divergence :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(\psi\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \psi(\mathbf{x})(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}) \, ds(\mathbf{x}).$$

Ensuite, en remarquant que $\operatorname{div}(\psi\boldsymbol{\varphi}) = \nabla\psi \cdot \boldsymbol{\varphi} + \psi \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})$, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \nabla\psi(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) \operatorname{div}(\boldsymbol{\varphi})(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \psi(\mathbf{x})(\boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}) \, ds(\mathbf{x}).$$

On conclut par densité et en utilisant le Théorème 2.2.1. \square

Nous noterons la dérivée normale d'une fonction u sur le bord $\partial\Omega$ comme suit :

$$\partial_{\mathbf{n}}u := \nabla u \cdot \mathbf{n}.$$

Bien sûr, cette dérivée normale n'est définie que si u et $\partial\Omega$ sont suffisamment réguliers. Nous pouvons maintenant énoncer une formule de Green qui nous servira dans le prochain chapitre (voir [37, Corollary B.59]) :

Proposition 2.2.4. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d , borné, mesurable, d'intérieur non-vide et de bord $\partial\Omega$ lipschitzien. Pour toutes les fonctions $v \in H^1(\Omega)$ et $u \in H^1(\Omega)$, vérifiant $\operatorname{div}(\nabla u) \in L^2(\Omega)$, nous avons alors $\partial_{\mathbf{n}}u \in H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ainsi que l'identité suivante :*

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u)(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \langle \partial_{\mathbf{n}}u, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial\Omega}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 2.2.3 en choisissant :

$$\boldsymbol{\varphi} = \nabla u, \quad \psi = v.$$

\square

2.3 Théorèmes généraux liés aux problèmes elliptiques

Nous terminons ce chapitre avec les résultats fondamentaux d'analyse fonctionnelle qui permettent de montrer qu'un problème aux limites elliptique, mis sous forme d'équation ou d'inéquation variationnelle, est bien posé. En fait, dans les chapitres ultérieurs, nous allons toujours nous ramener au cadre abstrait décrit ci-après.

Nous allons nous placer dans V , un espace de Hilbert muni du produit scalaire (\cdot, \cdot) et de la norme $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$. On désignera par K un sous-ensemble convexe fermé et non-vide de V . On notera $L(\cdot)$ une forme linéaire continue sur V , et $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue sur V . Nous nous intéresserons à des problèmes sous forme d'inéquation variationnelle tels que :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in K \text{ tel que :} \\ &a(u, v - u) \geq L(v - u), \quad \forall v \in K. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Un cas particulier important, qui est celui en général traité dans les cours d'introduction à la MEF, apparaît lorsque $K = V$, et nous obtenons alors tout simplement à partir de (2.2) une équation variationnelle :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u \in V \text{ tel que :} \\ &a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Nous commençons par énoncer le Théorème de Stampacchia, qui permet de montrer l'existence et l'unicité de la solution pour une inéquation variationnelle telle que (2.2).

Théorème 2.3.1. (Stampacchia) *Nous nous plaçons dans le cadre fonctionnel décrit ci-dessus. Nous supposons de plus que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique : il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $v \in V$,*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

Alors le Problème (2.2) admet une solution unique. Si de plus la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique alors la solution u de (2.2) est aussi l'unique minimiseur sur K de la fonctionnelle

$$J : K \ni v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \in \mathbb{R}.$$

On remarquera que si la forme bilinéaire associée à l'inéquation est symétrique, ce théorème est tout simplement une reformulation du théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert. C'est une situation fréquente, qui sera d'ailleurs souvent vérifiée dans la suite de ce cours. C'est dans le cas où la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ n'est pas symétrique que le Théorème de Stampacchia est plus délicat à démontrer, et la preuve est alors basée sur le Théorème de point fixe de Banach. Pour la preuve détaillée, on pourra consulter par exemple l'article original de Lions et Stampacchia [64] ou encore l'ouvrage de Haïm Brezis [16, Théorème V.6].

Un corollaire immédiat est le Lemme de Lax-Milgram, qui permet de montrer que la solution d'une équation variationnelle comme (2.3) existe et est unique :

Corollaire 2.3.2. (Lax-Milgram) *Nous nous plaçons encore dans le cadre fonctionnel décrit ci-dessus. Nous faisons de plus l'hypothèse que $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique. Alors le problème (2.3) admet une unique solution u , qui est de plus l'unique minimiseur sur V de*

$$J : V \ni v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le Théorème 2.3.1 en prenant $K = V$. □

Remarque 2.3.3. *Si $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, compte-tenu des autres hypothèses énoncées dans le Lemme de Lax-Milgram, $a(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire sur V : dans ce cas le Lemme de Lax-Milgram est une reformulation du Théorème de représentation de Riesz.*

Remarque 2.3.4. *Bien sûr, il est possible de démontrer Lax-Milgram directement, en utilisant par exemple des résultats sur la caractérisation des opérateurs linéaires bijectifs, voir par exemple [5, Théorème 3.3.1] ou encore [37, Corollary A.50].*

Le point central pour appliquer les théorèmes ci-dessus consiste à vérifier que la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est V -elliptique. Un autre résultat d'analyse fonctionnelle utile à cet effet est le Lemme de Peetre et Tartar, tel qu'il est formulé et démontré dans le livre d'Alexandre Ern et Jean-Luc Guermond [37, Lemma A.38, p.469].

Lemme 2.3.5. (Peetre-Tartar) *Soient X, Y et Z trois espaces de Banach. Soit $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ un opérateur injectif, et $T \in \mathcal{L}(X, Z)$ un opérateur compact. Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que :*

$$\forall x \in X, \|x\|_X \leq C (\|A(x)\|_Y + \|T(x)\|_Z). \quad (2.4)$$

Alors il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, \|x\|_X \leq \alpha \|A(x)\|_Y. \quad (2.5)$$

Nous avons maintenant tous les concepts nécessaires pour aborder les problèmes elliptiques avec certaines conditions de bord, ainsi que leur discrétisation. Dans les chapitres suivants, nous allons simplifier légèrement certaines conventions et notations, afin d'éviter d'alourdir inutilement les énoncés et les preuves. Déjà, tous les sous-ensembles $\omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, seront supposés mesurables et d'intérieur non-vide. Les autres hypothèses à leur sujet seront explicitées. De plus, nous allons utiliser systématiquement la convention suivante pour les intégrales d'une fonction : nous omettons la variable ainsi que la mesure dans l'écriture de l'intégrale. Par exemple, pour deux fonctions φ et ψ de $L^2(\omega)$, nous écrirons simplement :

$$\int_{\omega} \varphi \psi$$

au lieu de

$$\int_{\omega} \varphi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Chapitre 3

Conditions de Dirichlet non-homogènes

Nous traitons dans ce chapitre des conditions limites de type Dirichlet non-homogène, en nous servant d'un problème modèle très simple (problème de Poisson). Nous présentons d'abord en détails ce problème. Nous abordons ensuite deux méthodes numériques pour sa résolution : la méthode "standard" par relèvement, et la méthode de Nitsche. Finalement nous passons en revue d'autres méthodes qui ont été proposées.

3.1 Présentation du problème

On s'intéresse ici au problème de Poisson défini sur un domaine Ω . On suppose que Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d ($d \geq 2$), de frontière $\Gamma := \partial\Omega$ lipschitzienne. On introduit alors le problème aux limites suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ qui vérifie :} \\ & \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, & (i) \\ u = g & \text{sur } \Gamma, & (ii) \end{cases} \end{aligned} \tag{3.1}$$

où sont donnés le terme source $f \in L^2(\Omega)$, ainsi que le terme de bord $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. L'opérateur laplacien Δ est défini comme :

$$\Delta u := \operatorname{div}(\nabla u) \left(= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} \right).$$

Nous allons supposer que u est dans $H^1(\Omega)$. En appliquant le Théorème de trace 2.2.1, nous avons la trace de u sur Γ qui est bien définie, et (3.1) (ii) qui s'écrit en fait :

$$\gamma u = g \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Comme $f \in L^2(\Omega)$ et compte-tenu de l'équation (3.1) (i) nous avons $\operatorname{div}(\nabla u) \in L^2(\Omega)$. Pour toute fonction test v dans $H^1(\Omega)$, nous avons donc à partir de (3.1) (i) et de la formule de Green

(Proposition 2.2.4) :

$$\int_{\Omega} f v = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) v = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v - \langle \partial_{\mathbf{n}} u, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial \Omega}.$$

Nous restreignons maintenant l'espace des fonctions test v à $H_0^1(\Omega)$: le terme de bord $\langle \partial_{\mathbf{n}} u, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial \Omega}$ est alors nul. On pose $V := H^1(\Omega)$, $V_0 := H_0^1(\Omega)$, et

$$a(v, w) := \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w, \quad L(w) := \int_{\Omega} f w,$$

pour $v, w \in V$. Nous venons alors de montrer que si $u \in H^1(\Omega)$ est solution de (3.1), alors il est solution de l'équation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u \in V \text{ qui vérifie } \gamma u = g \text{ sur } \Gamma \text{ et} \\ & a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in V_0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Nous allons maintenant montrer que les problèmes fort (3.1) et faible (3.2) sont équivalents, dans un sens que nous allons préciser, et que (3.2) admet une unique solution.

Le premier point consiste à établir la V -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$:

Lemme 3.1.1. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , alors il existe une constante α telle que :*

$$\alpha \|v\|_{1, \Omega}^2 \leq \|\nabla v\|_{0, \Omega}^2, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Autrement dit sur $H_0^1(\Omega)$, la semi-norme $\|\nabla \cdot\|_{0, \Omega}$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1, \Omega}$.

Démonstration. Appliquons le Lemme de Peetre-Tartar 2.3.5 en choisissant :

$$X = H_0^1(\Omega), \quad Y = Z = L^2(\Omega),$$

puis $A = \nabla$ l'opérateur gradient et $T = I$ l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. On vérifie que A est injectif, et, comme Ω est borné, le Théorème de Rellich-Kondrachov assure que T est compact. L'inégalité (2.4) est vérifiée : c'est ici une tautologie. On peut alors appliquer le Lemme de Peetre-Tartar et nous obtenons bien l'inégalité voulue. \square

Remarque 3.1.2. *Le Lemme 3.1.1 ne nécessite aucune hypothèse sur la régularité du bord de Ω . Il importe par contre que le domaine soit borné. Bien sûr, on peut également établir ce lemme en utilisant l'inégalité de Poincaré [37, Lemma B.61].*

Nous pouvons alors prouver le résultat principal :

Proposition 3.1.3. *Le Problème (3.2) admet une unique solution $u \in V$, qui vérifie l'estimation a priori :*

$$\|u\|_{1, \Omega} \leq C \left(\|f\|_{0, \Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2}, \Gamma} \right), \tag{3.3}$$

où la constante $C > 0$ est indépendante des données f et g . De plus toute solution u du Problème (3.2) vérifie également (3.1) (i) (resp. (3.1) (ii)) presque partout sur Ω (resp. sur Γ). Réciproquement toute fonction u de $H^1(\Omega)$ qui vérifie (3.1) presque partout est également solution de (3.2).

Démonstration. Commençons déjà par montrer l'existence de solutions pour (3.2). Pour $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, le Corollaire 2.2.2 nous assure qu'il existe $v_g \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\gamma v_g = g, \quad \|v_g\|_{1,\Omega} \leq C \|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}, \quad (3.4)$$

où γv_g est la trace de v_g sur Γ . En posant $u_0 := u - v_g \in H_0^1(\Omega)$, le problème (3.2) est alors équivalent au problème suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_0 \in V_0 \text{ tel que} \\ &a(u_0, v) = L(v) - a(v_g, v) \quad \text{pour tout } v \in V_0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

L'espace V_0 est un sous-espace vectoriel fermé de V , donc c'est bien un espace de Hilbert. La forme linéaire $L(\cdot) - a(v_g, \cdot)$ est bien continue sur V_0 et la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur V_0 . De plus $a(\cdot, \cdot)$ est V_0 -elliptique par application du Lemme 3.1.1. Nous pouvons donc appliquer le "Lemme" de Lax-Milgram (Corollaire 2.3.2) pour conclure que (3.5) admet une unique solution u_0 . La fonction $u = u_0 + v_g$ est bien une solution de (3.2).

Il faut maintenant montrer l'unicité des solutions de (3.2) (il n'y a pas unicité du relèvement pour g) : soit donc u_1 et u_2 deux solutions de (3.2). On voit alors que $\delta u = u_1 - u_2 \in V_0$ est solution de l'équation variationnelle

$$a(\delta u, v) = 0 \quad \text{pour tout } v \in V_0.$$

Nous pouvons à nouveau appliquer le Lemme de Lax-Milgram pour conclure que l'unique solution de cette équation est $\delta u = 0$, ce qui montre l'unicité.

L'estimation *a priori* (3.3) est obtenue comme suit : soit u l'unique solution de (3.2) et posons de nouveau $u_0 := u - v_g$, qui sera alors solution de (3.5). Nous choisissons tout d'abord $v = u_0 \in V_0$ dans (3.5). En utilisant la V_0 -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons :

$$\alpha \|u_0\|_{1,\Omega}^2 \leq a(u_0, u_0) = L(u_0) - a(v_g, u_0) \leq \|f\|_{0,\Omega} \|u_0\|_{0,\Omega} + \|v_g\|_{1,\Omega} \|u_0\|_{1,\Omega},$$

avec $\alpha > 0$ la constante de V_0 -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$. Simplifions l'expression ci-dessus :

$$\alpha \|u_0\|_{1,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} + \|v_g\|_{1,\Omega}.$$

Cette dernière inégalité, combinée à une simple inégalité triangulaire et à l'estimation sur le relèvement (3.4) nous donne alors :

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,\Omega} &\leq \|u_0\|_{1,\Omega} + \|v_g\|_{1,\Omega} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{0,\Omega} + \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \|v_g\|_{1,\Omega} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{0,\Omega} + C \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \|g\|_{\frac{1}{2},\partial\Omega}, \end{aligned}$$

ce qui est bien (3.3).

Soit u la solution de (3.2). Montrons que u est bien solution de (3.1). Déjà la condition $\gamma u = g$ implique que (3.1) (ii) est vraie presque partout sur Γ . Ensuite, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous vérifions pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\left| \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \right| = \left| \int_{\Omega} f \phi \right| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|\phi\|_{0,\Omega},$$

ce qui nous assure l'existence d'une divergence faible de ∇u : $\operatorname{div}(\nabla u) \in L^2(\Omega)$ (voir par exemple [5, Lemme 4.2.7]). Par définition de la divergence faible, nous avons pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\nabla u) \phi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi = \int_{\Omega} f \phi,$$

ou encore

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}(\nabla u) + f) \phi = 0.$$

Ceci implique que (3.1) (i) est vraie presque partout sur Ω . Concernant la réciproque, nous l'avons démontrée auparavant lorsque nous avons dérivé (3.2) à partir de (3.1). \square

Remarque 3.1.4. Comme $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique, le Lemme de Lax-Milgram implique de plus que l'unique solution u du Problème (3.2) est également l'unique minimiseur sur V de

$$J : V \ni v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - L(v) \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

sous la contrainte $\gamma v = g$.

Nous terminons ici avec des résultats de régularité : moyennant des hypothèses supplémentaires sur le bord du domaine Γ et les données f et g , on peut en effet espérer avoir une solution u de (3.2) plus régulière que $H^1(\Omega)$. Ces résultats ont des conséquences pratiques importantes car la régularité maximale de u conditionne le taux de convergence des méthodes numériques.

Il y a deux cas de figures en particulier où il est possible d'avoir u qui appartienne au moins à $H^2(\Omega)$: si Ω a une frontière lisse, et si Ω est un polygone convexe (pour $d = 2$). Nous avons en fait les résultats suivants [37, Theorem 3.10, Theorem 3.12] (voir aussi [47, 48]) :

Théorème 3.1.5. Soit u la solution du problème (3.2) :

- Soit $m \geq 0$. Supposons que Ω est un domaine de classe \mathcal{C}^{m+2} , que $f \in H^m(\Omega)$ et $g \in H^{m+\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Dans ce cas nous avons : $u \in H^{m+2}(\Omega)$.
- Supposons que $d = 2$ et que Ω est un polygone convexe. Supposons de plus $g \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$. Dans ce cas nous avons : $u \in H^2(\Omega)$.

Remarque 3.1.6. Si Ω est un polygone non-convexe, alors le meilleur résultat de régularité que l'on puisse espérer est $u \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ [37, Remark 3.13].

3.2 Discrétisation par éléments finis

Différentes méthodes ont été proposées pour incorporer la condition de bord (3.1) (ii) lorsque nous cherchons à approcher le problème (3.1) à l'aide de la Méthode des Eléments Finis, pour un calcul pratique de la solution. Elles sont relativement nombreuses et peuvent être regroupées en plusieurs familles. Trois parmi elles, la pénalité, les méthodes mixtes et la méthode de Nitsche, ont d'ailleurs été proposées et analysées au tout début des années 1970, dans des articles d'Ivo M. Babuška et de Joachim A. Nitsche : voir, respectivement [9, 8, 68]. Ces premiers résultats sont parus lors de la période "historique" qui a vu la MEF se formaliser mathématiquement. D'autres méthodes, qui sont des méthodes stabilisées, sont plus récentes et remontent aux années 1990 pour les plus anciennes d'entre elles, voir en particulier [10] et [19].

Nous allons tout d'abord étudier dans le détail deux méthodes : une qui est la plus standard et qui consiste à passer par un relèvement discret de la condition de bord, puis une autre, moins standard, qui est la méthode de Nitsche, et qui s'est avérée utile au cours de ces dernières années pour traiter de façon efficace certaines catégories de problèmes complexes. Nous terminerons ce chapitre avec un panorama succinct et superficiel des autres méthodes qui ont été proposées.

Pour se fixer les idées, nous allons considérer que le domaine Ω est polygonal (si $d = 2$) ou polyédrique (si $d = 3$), afin de ne pas avoir de problème d'approximation des bords courbes. Nous avons alors un cas particulier de domaine avec une frontière lipschitzienne, ce qui permettra d'utiliser les théorèmes vus précédemment au Chapitre 2. De plus, nous allons considérer un maillage de Ω par des simplexes (triangles pour $d = 2$, tétraèdres pour $d = 3$) et un espace d'éléments finis de type Lagrange. Ce n'est pas ici une hypothèse très contraignante et la plupart des méthodes peuvent être adaptées pour d'autres choix d'éléments finis.

Soit donc $(V^h)_{h>0}$ une famille d'espaces vectoriels de dimension finie [14, 30, 37] indicée par h , construite à partir d'une famille $(\mathcal{T}^h)_{h>0}$ de triangulations du domaine Ω . Pour un h donné, chaque élément $T \in \mathcal{T}^h$ est un simplexe (de dimension d). La taille du maillage h est définie précisément comme suit :

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}^h} h_T,$$

où h_T est le diamètre du simplexe T . Nous supposons que la famille de triangulations est régulière au sens de Ciarlet : il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma, \quad \forall T \in \mathcal{T}^h,$$

où ρ_T désigne le rayon de la plus grande boule inscrite dans le simplexe T . Nous supposons de plus que, pour chaque triangle (tétraèdre), chacune de ses arêtes (faces) en commun avec Γ est incluse dans une seule des arêtes (faces) du polygone (polyèdre) définissant Γ de telle sorte à ce qu'on puisse écrire :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}^h} T.$$

On considère bien sûr ici chaque simplexe T comme étant un fermé de \mathbb{R}^d . Nous choisissons un espace d'éléments finis de Lagrange de degré $k \geq 1$:

$$V^h := \left\{ v^h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid v^h|_T \in \mathbb{P}_k(T), \forall T \in \mathcal{T}^h \right\}. \quad (3.7)$$

Nous avons ainsi un espace d'éléments finis *conforme* :

$$V^h \subset V.$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ la dimension de V^h . Nous noterons $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ la base nodale de V^h , et $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_N$ les noeuds des degrés de liberté associés. L'opérateur d'interpolation de Lagrange associé à V^h sera noté \mathcal{I}^h . Pour une fonction v continue sur Ω , il est défini par :

$$\mathcal{I}^h(v) := \sum_{i=1, \dots, N} v(\mathbf{a}_i) \varphi_i.$$

Pour l'ensemble des indices $1, \dots, N$ correspondant aux numéros des noeuds des degrés de liberté de V^h , notons $\text{Int} := 1, \dots, N_{\text{int}}$ l'ensemble des indices associés aux noeuds internes, et $\text{Bord} := N_{\text{int}} + 1, \dots, N$ l'ensemble complémentaire des noeuds qui sont sur Γ (on a choisi une indexation des noeuds de telle sorte à ce que les N_{int} premiers soient les noeuds internes).

On notera \mathcal{I}_{∂}^h l'opérateur d'interpolation de Lagrange associé au bord Γ : il est défini pour tout $w \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$ par

$$\mathcal{I}_{\partial}^h(w) := \sum_{i \in \text{Bord}} w(\mathbf{a}_i) \gamma \varphi_i.$$

Une propriété qui va nous être très utile par la suite est la suivante :

$$\gamma(\mathcal{I}^h v) = \mathcal{I}_{\partial}^h(\gamma v), \quad \forall v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega), \quad (3.8)$$

autrement dit la trace et l'interpolateur de Lagrange "commutent".

En effet, prenons $v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \gamma(\mathcal{I}^h v) &= \gamma \left(\sum_{i=1, \dots, N} v(\mathbf{a}_i) \varphi_i \right) = \sum_{i=1, \dots, N} v(\mathbf{a}_i) \gamma \varphi_i \\ &= \sum_{i \in \text{Bord}} (\gamma v)(\mathbf{a}_i) \gamma \varphi_i = \mathcal{I}_{\partial}^h(\gamma v), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé ici la linéarité de la trace et le fait qu'une fonction φ_i de la base nodale s'annule sur Γ si le noeud correspondant \mathbf{a}_i est à l'intérieur du domaine.

Nous rappelons également les estimations d'erreur suivantes pour l'interpolation de Lagrange, qui seront fondamentales pour la suite (voir par exemple [37, Theorem 1.103] pour la preuve dans le cadre des espaces de Sobolev à coefficients entiers, et [34, Example 3, p.460] pour le cadre des espaces de Sobolev fractionnaires) :

Proposition 3.2.1. *Considérons l'espace d'éléments finis V^h défini ci-dessus. Pour toute fonction $v \in H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega)$, $0 < \nu \leq k - \frac{1}{2}$, l'erreur d'interpolation locale sur un simplexe T du maillage \mathcal{T}^h peut être estimée comme suit :*

$$\|v - \mathcal{I}^h(v)\|_{1,T} \leq Ch_T^{\frac{1}{2}+\nu} \|v\|_{\frac{3}{2}+\nu, T}.$$

De même, pour $w \in H^{1+\nu}(\Gamma)$, $0 < \nu \leq k - \frac{1}{2}$ et pour E une arête (ou face) d'un simplexe T de \mathcal{T}^h , qui appartient au bord Γ :

$$\|w - \mathcal{I}_\partial^h(w)\|_{0,E} \leq Ch_T^{1+\nu} \|w\|_{1+\nu,E}.$$

Les constantes $C > 0$ sont indépendantes de la famille de triangulations $(\mathcal{T}^h)_h$ pourvu qu'elles soient régulières au sens de Ciarlet.

3.3 La méthode “standard” par relèvement

Nous présentons ici la méthode la plus “standard” pour traiter la condition de Dirichlet non-homogène (3.1) (ii). Nous donnons d'abord sa formulation, puis effectuons l'analyse mathématique de la méthode. Nous établirons en particulier le caractère bien posé du problème discret, et la convergence optimale de la solution discrète vers la solution exacte en norme H^1 . Finalement, nous donnerons quelques éléments concernant l'implémentation de cette méthode. Nous nous sommes basés ici sur l'ouvrage d'Alexandre Ern et Jean-Luc Guermond [37, Section 3.2, Section 8.4], et le lecteur curieux pourra en outre se référer à l'ouvrage d'Olaf Steinbach [81, Section 11.1] où une analyse complète et détaillée est effectuée également.

3.3.1 Description

On fera ici, pour simplifier, les deux hypothèses suivantes :

- Dans l'équation (3.1) (ii), la donnée au bord g est continue :

$$g \in \mathcal{C}^0(\Gamma) \cap H^{\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

- Il existe un relèvement de g dans $H^1(\Omega)$ qui est continu (le Corollaire 2.2.2 n'impose pas nécessairement cette propriété). On notera comme précédemment v_g ce relèvement :

$$v_g \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega), \quad \gamma v_g = g.$$

Comme g est continue, on peut alors prendre son interpolée de Lagrange :

$$g^h := \mathcal{I}_\partial^h(g).$$

On peut alors écrire comme suit une contrepartie discrète du Problème (3.2) :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u^h \in V^h \text{ qui vérifie } \gamma u^h = g^h \text{ sur } \Gamma \text{ et} \\ &a(u^h, v^h) = L(v^h) \quad \text{pour tout } v^h \in V_0^h, \end{aligned} \tag{3.9}$$

où $V_0^h := V^h \cap V_0$ est l'espace des fonctions de trace discrète nulle.

On remarque tout d'abord que cette méthode est conforme, ce qui est lié directement au choix des espaces V^h pour u^h et V_0^h pour les fonctions tests v^h . Elle n'est par contre pas consistante à

strictement parler, car la condition $\gamma u^h = g^h$ n'est pas nécessairement vérifiée pour u . Nous avons en fait :

$$\gamma u = g^h + (g - g^h),$$

et l'erreur de consistance sur la condition de bord, $g - g^h$, provient de l'interpolation de Lagrange. En revanche, en prenant comme fonction test $v^h \in V_0^h \subset V_0$ à la place de v dans le Problème (3.2), puis en soustrayant à (3.9), nous obtenons tout de même une propriété d'orthogonalité de Galerkin :

$$a(u - u^h, v^h) = 0, \quad \forall v^h \in V_0^h. \quad (3.10)$$

Nous allons voir par la suite que cette première méthode a de bonnes propriétés mathématiques, et qu'elle peut s'implémenter simplement. Son principal inconvénient est qu'elle ne s'étend pas facilement à d'autres types de conditions aux limites, et également à des discrétisations plus souples, par exemple si le maillage est non conforme avec le bord Γ .

3.3.2 Analyse mathématique

Il faut déjà s'assurer que le Problème (3.9) peut être résolu, autrement dit qu'il existe bien une seule solution u^h à ce problème, qui est celle que l'on obtiendra alors nécessairement par un calcul pratique. Ceci est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 3.3.1. *Le problème discret (3.9) est bien posé : il admet une unique solution u^h dans V^h .*

Démonstration. Soit v_g le relèvement associé à la donnée au bord g . Comme nous avons supposé v_g continu, nous pouvons prendre son interpolée de Lagrange $\mathcal{I}^h(v_g)$. Introduisons, comme pour la démonstration de la Proposition 3.1.3, le problème auxiliaire suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u_0^h \in V_0^h \text{ tel que} \\ &a(u_0^h, v^h) = L(v^h) - a(\mathcal{I}^h(v_g), v^h) \quad \text{pour tout } v^h \in V_0^h. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Comme $V_0^h \subset V_0$, $a(\cdot, \cdot)$ est V_0^h -elliptique, toujours grâce au Lemme 3.1.1. On vérifie donc à nouveau que toutes les hypothèses sont réunies pour pouvoir appliquer le Lemme de Lax-Milgram, et nous obtenons alors l'existence d'une unique solution u_0^h au Problème (3.11). En posant $u^h = u_0^h + \mathcal{I}^h(v_g)$, nous vérifions, en utilisant la propriété (3.8) :

$$\gamma u^h = \gamma u_0^h + \gamma(\mathcal{I}^h(v_g)) = \mathcal{I}_\partial^h(\gamma v_g) = \mathcal{I}_\partial^h(g) = g^h.$$

Comme de plus

$$a(u^h, v^h) = a(u_0^h, v^h) + a(\mathcal{I}^h(v_g), v^h) = L(v^h),$$

pour tout $v^h \in V_0^h$, nous avons bien $u^h \in V^h$ qui est solution du Problème (3.9). On vérifie ensuite qu'il y a unicité, en procédant de façon identique à la Proposition 3.1.3. \square

Montrons maintenant que nous obtenons une solution u^h qui va converger vers la solution exacte u lorsque le maillage sera de plus en plus fin, autrement dit lorsque h tend vers 0. Les estimations

d'erreur les plus faciles à obtenir sont les estimations en norme H^1 , qui proviennent de façon relativement directe du caractère variationnel des problèmes aux limites étudiés. Ce sont ces estimations que nous allons considérer ici.

Nous allons tout d'abord établir une estimation d'erreur abstraite, dans le sens où elle ne prend pas en compte la nature précise de l'espace d'éléments finis V^h . Il s'agit d'une extension du Lemme de Cea.

Théorème 3.3.2. *Soit u la solution du Problème (3.2). La solution u^h du Problème (3.9) vérifie l'estimation d'erreur a priori suivante :*

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v^h \in V^h, \gamma v^h = g^h} \|u - v^h\|_{1,\Omega}. \quad (3.12)$$

La constante $C > 0$ est indépendante de h et de u , et dépend uniquement des constantes d'ellipticité et de continuité de $a(\cdot, \cdot)$.

Démonstration. Considérons u , solution du Problème (3.2), et u^h , solution du Problème (3.9). Prenons $v^h \in V^h$ tel que sa trace γv^h soit égale à g^h . En appliquant d'abord une inégalité triangulaire, puis en utilisant la V_0 -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ et l'orthogonalité de Galerkin (3.10), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|u - u^h\|_{1,\Omega} &\leq \|u - v^h\|_{1,\Omega} + \|v^h - u^h\|_{1,\Omega} \\ &\leq \|u - v^h\|_{1,\Omega} + \frac{1}{\alpha} \frac{a(v^h - u^h, v^h - u^h)}{\|v^h - u^h\|_{1,\Omega}} \\ &\leq \|u - v^h\|_{1,\Omega} + \frac{1}{\alpha} \frac{a(v^h - u^h, v^h - u)}{\|v^h - u^h\|_{1,\Omega}}, \end{aligned}$$

avec $\alpha > 0$ la constante de V_0 -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$. Notons au passage que la première ligne permet d'emblée de séparer erreur d'interpolation (liée à l'approximation de V par V^h) et l'erreur discrète (liée à l'approximation du problème faible par le problème discrétisé (3.9)). L'hypothèse $\gamma v^h = g^h$ permet d'assurer que

$$v^h - u^h \in V_0^h,$$

ce qui est indispensable pour les deux dernières majorations. On conclut la preuve en utilisant la continuité de $a(\cdot, \cdot)$:

$$\frac{a(v^h - u^h, v^h - u)}{\|v^h - u^h\|_{1,\Omega}} \leq C \|v^h - u\|_{1,\Omega},$$

avec $C > 0$ la constante de continuité de $a(\cdot, \cdot)$. Cette inégalité, combinée à la précédente, nous donne bien l'estimation (3.12). \square

Comme nous avons supposé que nos éléments finis étaient de type Lagrange, nous pouvons maintenant donner une estimation d'erreur *a priori* en norme H^1 avec un taux de convergence explicite :

Corollaire 3.3.3. *Supposons $u \in H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega)$, avec $0 < \nu \leq k - \frac{1}{2}$ ($k \geq 1$ est le degré des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_k associés à V^h). La solution u^h du Problème (3.9) vérifie alors :*

$$\|u - u^h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\nu} \|u\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega}, \quad (3.13)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de h et de u .

Démonstration. L'hypothèse $u \in H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega)$ permet d'assurer que u est continue sur $\overline{\Omega}$, même pour $d = 3$, en utilisant les injections de Sobolev (2.1). On peut donc définir $\mathcal{I}^h u$ son interpolée de Lagrange. De plus, grâce à la propriété (3.8), nous avons :

$$\gamma \mathcal{I}^h u = \mathcal{I}_{\partial}^h(\gamma u) = \mathcal{I}_{\partial}^h(g) = g^h,$$

et nous pouvons donc choisir $v^h = \mathcal{I}^h u$ dans l'estimation abstraite (3.12). De plus, l'estimation d'erreur locale pour l'interpolation de Lagrange donnée dans la Proposition 3.2.1, sommée sur tous les simplexes T de \mathcal{T}^h , donne :

$$\|u - \mathcal{I}^h u\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\nu} \|u\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega}.$$

On conclut en combinant (3.12) avec l'estimation ci-dessus. □

On a l'habitude de dire ici que l'estimation d'erreur donnée par la méthode (3.9) est optimale, car, pour une fonction u suffisamment régulière, les taux de convergence sont les mêmes que si nous étions capables d'interpoler directement u par des éléments finis de type Lagrange. En supposant que u est suffisamment régulière, nous avons ainsi un taux de convergence en norme H^1 qui est de 1 pour des éléments linéaires par morceaux, et 2 pour des éléments quadratiques par morceaux, par exemple.

Finalement, que peut-on dire de l'erreur sur la condition de Dirichlet non-homogène ? En faisant l'hypothèse, par exemple, que $d = 2$ et la donnée au bord g est dans $H^k(\Gamma)$, avec $k \geq 1$ le degré polynomial des éléments finis \mathbb{P}_k , nous avons alors $g \in C^0(\Gamma)$. En nous servant de la condition $\gamma u^h = g^h$, nous pouvons alors garantir :

$$\|\gamma u - \gamma u^h\|_{0,\Gamma} = \|g - g^h\|_{0,\Gamma} = \|g - \mathcal{I}_{\partial}^h(g)\|_{0,\Gamma} \leq Ch^k \|g\|_{k,\Gamma},$$

où nous avons tout simplement utilisé l'erreur donnée par l'interpolation de Lagrange sur le bord (Proposition 3.2.1).

Remarque 3.3.4. *Il est également possible d'obtenir des estimations d'erreur en norme $L^2(\Omega)$: voir par exemple [37, Corollary 3.29].*

3.3.3 Implémentation

Voyons maintenant comment la formulation (3.9) peut être implémentée en pratique. Notons $u_i = u^h(\mathbf{a}_i)$ le degré de liberté associé au noeud \mathbf{a}_i , $i = 1, \dots, N$, et plaçons tous les degrés de liberté

dans un vecteur colonne \mathbf{U} :

$$\mathbf{U} := \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N_{\text{Int}}} \\ \hline u_{N_{\text{Int}}+1} \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\text{Int}} \\ \hline \mathbf{U}_{\text{Bord}} \end{bmatrix},$$

où les vecteurs colonnes \mathbf{U}_{Int} , respectivement \mathbf{U}_{Bord} , contiennent les degrés de liberté associés à l'intérieur du domaine, respectivement au bord du domaine.

Examinons tout d'abord la condition de bord $\gamma u^h = g^h$ de (3.9). Elle implique que pour tout noeud \mathbf{a}_i du bord, nous avons :

$$u_i = u^h(\mathbf{a}_i) = g^h(\mathbf{a}_i) = \mathcal{I}_{\partial}^h g(\mathbf{a}_i) = g(\mathbf{a}_i).$$

Réciproquement, si $u_i = g(\mathbf{a}_i)$ pour tout noeud du bord, nous vérifions bien $\gamma u^h = g^h$ par unicité de l'interpolée de Lagrange aux noeuds. Autrement dit tous les degrés de liberté au bord sont obtenus directement par évaluation de la donnée au bord g aux noeuds \mathbf{a}_i .

Ensuite, la deuxième équation de (3.9) s'écrit, en prenant, pour tout indice $i \in \text{Int}$, la fonction de base φ_i comme fonction test ($v^h = \varphi_i \in V_0^h$) :

$$\sum_{j=1, \dots, N} k_{ij} u_j = f_i, \quad \forall i \in \text{Int},$$

avec les conventions usuelles $k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$ et $f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i$. En scindant la somme en deux, pour séparer les degrés de liberté au bord de ceux à l'intérieur du domaine, nous obtenons :

$$\sum_{j \in \text{Int}} k_{ij} u_j = f_i - \sum_{j \in \text{Bord}} k_{ij} u_j = f_i - \sum_{j \in \text{Bord}} k_{ij} g(\mathbf{a}_j), \quad \forall i \in \text{Int}.$$

Ce que nous pouvons mettre sous forme matricielle comme suit :

$$\mathbf{K}_{\text{Int}} \mathbf{U}_{\text{Int}} = \mathbf{F} - \mathbf{K}_{\text{BI}} \mathbf{G},$$

où \mathbf{K}_{Int} est la matrice de rigidité obtenue en considérant uniquement les noeuds internes, \mathbf{K}_{BI} celle qui permet de coupler les noeuds internes et ceux du bord, et \mathbf{F} et \mathbf{G} sont les vecteurs colonnes qui contiennent, respectivement, les composantes f_i provenant du terme source et les données au bord $g(\mathbf{a}_j)$.

Finalement, on peut donner le système matriciel global associé au Problème (3.9) :

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{K}_{\text{Int}} & \mathbf{K}_{\text{BI}} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \mathbf{U}_{\text{Int}} \\ \hline \mathbf{U}_{\text{Bord}} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{F} \\ \hline \mathbf{G} \end{array} \right].$$

Remarque 3.3.5. Soit v_g^h le relèvement discret le plus simple de g^h , autrement dit la fonction de V^h égale à g^h sur le bord, et nulle sur tous les noeuds de Lagrange internes. En utilisant v_g^h pour se ramener à un problème de Dirichlet homogène, nous aboutissons à une formulation matricielle identique à la précédente, voir [37, §3.2.2. pp.124–126, Remark 8.17 p.378].

On pourra trouver d'autres détails, par exemple, dans le polycopié de Francisco J. Sayas [79] ou dans le livre d'Alexandre Ern et Jean-Luc Guermond [37]. Cette méthode est implémentée dans la plupart des codes et bibliothèques éléments finis. Citons entre autres :

- le mini-code Matlab mis à disposition par l'équipe de Carsten Carstensen [4].
- la bibliothèque éléments finis GetFEM++, où une brique est disponible pour les conditions de Dirichlet (voir http://getfem.org/userdoc/model_dirichlet.html).

3.4 La méthode de Nitsche

Nous présentons ici une méthode alternative pour traiter la condition de Dirichlet non-homogène (3.1) (ii), et qui est d'avantage extensible. Cette méthode avait été originellement proposée par Joachim A. Nitsche [68] (voir aussi [6]), dans le cadre que nous étudions ici, avant d'avoir été adaptée à d'autres problèmes à partir des années 2000 essentiellement. Nous donnons d'abord sa formulation, puis effectuons son analyse mathématique. Nous établirons en particulier le caractère bien posé du problème discret, et la convergence optimale de la solution discrète vers la solution exacte. Finalement, nous donnerons quelques éléments concernant l'implémentation de cette méthode. Nous nous sommes basés ici essentiellement sur des articles de Rolf Stenberg [83] et de Peter Hansbo [50], ainsi que sur l'ouvrage de Vidar Thomée [84, Chapter 2].

3.4.1 Description

Nous avons vu précédemment que la résolution du Problème (3.1) était équivalente à la minimisation de la fonctionnelle $J(\cdot)$ donnée par l'expression (3.6), sur le sous-espace affine des fonctions v de V qui vérifient $\gamma v = g$. La contrainte $\gamma v = g$ est dans ce cas imposée de façon essentielle, c'est à dire en restreignant l'ensemble des fonctions sur lesquelles on cherche un minimum. Ici, au niveau discret, nous allons chercher un minimum sur tout V^h , sans imposer de restriction. Par contre, pour satisfaire tout de même $\gamma v = g$ de façon approchée, nous allons rajouter des termes à la fonctionnelle $J(\cdot)$.

Dans son article de 1971 [68], Joachim A. Nitsche a introduit la fonctionnelle suivante, définie pour tout v^h de V^h :

$$J_N(v^h) = J(v^h) - \int_{\Gamma} (v^h - g) \partial_{\mathbf{n}} v^h + \frac{\gamma_N}{2} \int_{\Gamma} (v^h - g)^2,$$

où γ_N est une fonction discrète sur Γ , constante par morceaux, qui s'écrit sous la forme suivante sur chaque arête/face du bord :

$$\gamma_N|_{T \cap \Gamma} := \frac{\gamma_0}{h_T},$$

avec T un simplexe dont l'intersection avec le bord est non-vide. Le paramètre discret $\gamma_0 > 0$ est appelé paramètre de Nitsche et nous verrons par la suite qu'il doit être convenablement choisi. On remarque d'abord le terme

$$\frac{\gamma_N}{2} \int_{\Gamma} (v^h - g)^2,$$

qui sert à imposer faiblement la condition de Dirichlet : les fonctions v^h qui vont permettre de rendre ce terme minimal devront en effet avoir une valeur au bord proche de g , surtout si γ est choisi assez grand. L'originalité de la méthode réside dans l'ajout du terme

$$- \int_{\Gamma} (v^h - g) \partial_{\mathbf{n}} v^h$$

qui peut paraître curieux d'emblée, mais va jouer en effet un rôle crucial. Voyons en effet quel est le système d'optimalité du premier ordre associé à $J_N(\cdot)$, autrement dit la formulation faible discrète provenant d'un traitement à la Nitsche du contact. En écrivant que la différentielle de J_N en u^h est nulle pour toute fonction test v^h dans V^h , il vient :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u^h \in V^h \text{ qui vérifie :} \\ & a(u^h, v^h) - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u^h v^h - \int_{\Gamma} u^h \partial_{\mathbf{n}} v^h + \int_{\Gamma} \gamma_N u^h v^h \\ & = L(v^h) + \int_{\Gamma} g(\gamma_N v^h - \partial_{\mathbf{n}} v^h), \quad \text{pour tout } v^h \in V^h. \end{aligned} \tag{3.14}$$

La différence principale avec une pénalisation "conventionnelle" de la condition de Dirichlet vient des termes additionnels obtenus par dérivation de $-\int_{\Gamma} (v^h - g) \partial_{\mathbf{n}} v^h$:

- le terme $-\int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u^h v^h$ va permettre d'obtenir la méthode consistante,
- le terme $-\int_{\Gamma} u^h \partial_{\mathbf{n}} v^h$ va permettre d'obtenir une forme bilinéaire discrète symétrique, comme c'était le cas pour le problème continu.

En dépit des apparences, cette méthode est donc bien distincte de la pénalité, et il s'agit en fait d'une méthode stabilisée, très proche de la stabilisation à la Barbosa & Hugues [58, 83]. Elle peut également être considérée comme une méthode de type lagrangien augmenté, où le multiplicateur est donné explicitement (ici le multiplicateur est la dérivée normale discrète sur le bord) [21]. On remarquera que, du fait que V^h n'est pas inclus dans V_0 , cette méthode est non-conforme.

Nous allons montrer dans la section suivante que le Problème (3.14) admet une solution unique, et converge de façon optimale, moyennant une condition sur le paramètre de Nitsche γ_0 , qui doit être pris suffisamment grand. Avant cela, introduisons quelques notations. Nous poserons, pour $u^h, v^h \in V^h$:

$$A_N(u^h, v^h) := a(u^h, v^h) - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u^h v^h - \int_{\Gamma} u^h \partial_{\mathbf{n}} v^h + \int_{\Gamma} \gamma_N u^h v^h,$$

et

$$L_N(v^h) := L(v^h) + \int_{\Gamma} g(\gamma_N v^h - \partial_{\mathbf{n}} v^h),$$

de telle sorte à ce que le Problème (3.14) puisse être reformulé de façon condensée comme suit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u^h \in V^h \text{ qui vérifie :} \\ & A_N(u^h, v^h) = L_N(v^h), \quad \text{pour tout } v^h \in V^h. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Nous allons également avoir besoin des les normes discrètes suivantes, qui sont des normes à poids dépendantes de h :

Définition 3.4.1. *Pour toute fonction $v \in L^2(\Gamma_C)$, introduisons :*

$$\|v\|_{-\frac{1}{2}, h, \Gamma_C} := \|(\gamma_0/\gamma_N)^{\frac{1}{2}} v\|_{0, \Gamma_C}, \quad \|v\|_{\frac{1}{2}, h, \Gamma_C} := \|(\gamma_N/\gamma_0)^{\frac{1}{2}} v\|_{0, \Gamma_C}.$$

Pour toute fonction $v \in V$, introduisons :

$$\|v\|_h := \left(\|\nabla v\|_{0, \Omega}^2 + \|v\|_{\frac{1}{2}, h, \Gamma_C}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On vérifie que $\|\cdot\|_h$ est bien une norme sur V . En fait, c'est une norme équivalente à la norme H^1 , comme le montre le résultat suivant :

Proposition 3.4.2. *Il existe une constante $c > 0$, indépendante de h , telle que pour tout $v \in V$, nous ayons*

$$c\|v\|_{1, \Omega} \leq \|v\|_h.$$

Démonstration. Nous appliquons le Lemme de Peetre-Tartar 2.3.5, en choisissant :

$$X = H^1(\Omega), \quad Y = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma), \quad Z = L^2(\Omega),$$

avec Y muni de la norme $(\|\cdot\|_{0, \Omega}^2 + \|\cdot\|_{\frac{1}{2}, h, \Gamma_C}^2)^{\frac{1}{2}}$. L'opérateur A est défini comme suit :

$$A : v \mapsto (\nabla v, \gamma v),$$

et A est ainsi bien injectif. L'opérateur T est à nouveau l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, et c'est bien un opérateur compact par application du Théorème de Rellich-Kondrachov. Comme nous avons de plus :

$$\|v\|_{1, \Omega} \leq \left(\|v\|_{0, \Omega} + (\|\nabla v\|_{0, \Omega}^2 + \|v\|_{\frac{1}{2}, h, \Gamma_C}^2)^{\frac{1}{2}} \right),$$

nous obtenons bien :

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq \alpha \left(\|\nabla v\|_{0,\Omega}^2 + \|v\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

avec une constante $\alpha > 0$, ce qui est bien l'inégalité souhaitée. \square

3.4.2 Analyse mathématique

L'outil essentiel dans l'analyse de la méthode est une inégalité de trace inverse discrète, qui permet de majorer le gradient d'une fonction v^h de V^h sur le bord Γ du domaine par la norme L^2 du gradient sur le domaine Ω :

Lemme 3.4.3. *Il existe une constante $c_I > 0$, qui ne dépend ni du paramètre de Nitsche γ_0 , ni de la taille du maillage h , telle que, pour tout $v^h \in V^h$:*

$$\|\partial_{\mathbf{n}} v^h\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C}^2 \leq c_I \|\nabla v^h\|_{0,\Omega}^2. \quad (3.16)$$

Démonstration. Nous donnons ici une preuve qui fonctionne uniquement pour des éléments finis de Lagrange linéaires ($k = 1$). Pour le cas général, on procède en passant à l'élément de référence (voir par exemple [84, Lemma 2.1] pour plus de détails).

Soit E une face/arête sur le bord Γ et soit T le simplexe à laquelle elle appartient. Prenons v^h dans V^h , comme le gradient de v^h est constant sur T (et donc sur E), nous avons :

$$\begin{aligned} \|\partial_{\mathbf{n}} v^h\|_{0,E} &\leq \|\nabla v^h\|_{0,E} \\ &= \frac{|E|^{\frac{1}{2}}}{|T|^{\frac{1}{2}}} \|\nabla v^h\|_{0,T} \\ &\leq c_I^{\frac{1}{2}} h_T^{-\frac{1}{2}} \|\nabla v^h\|_{0,T} \\ &= c_I^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\gamma_N}{\gamma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla v^h\|_{0,T}. \end{aligned}$$

Nous avons ici utilisé le fait que le maillage est régulier au sens de Ciarlet, ce qui permet de majorer de façon uniforme le quotient $\frac{|E|^{\frac{1}{2}}}{|T|^{\frac{1}{2}}}$ par une constante, ici notée $c_I^{\frac{1}{2}}$. La constante c_I ne dépend donc que de la régularité des simplexes du maillage (pour $k = 1$, car pour $k \geq 1$, cette constante est aussi dépendante de k). On obtient finalement (3.16) par sommation sur toutes les arêtes/faces du bord Γ . \square

Montrons maintenant que la méthode (3.15) est consistante :

Lemme 3.4.4. *Supposons que la solution u de (3.1) soit dans $H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega)$, avec $\nu > 0$, alors u est aussi solution de*

$$A_N(u, v^h) = L_N(v^h), \quad \forall v^h \in V^h.$$

Démonstration. Considérons u la solution de (3.1), et prenons $v^h \in V^h$. Comme $u \in H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega)$ avec $\nu > 0$, nous avons $\partial_{\mathbf{n}}u \in L^2(\Gamma)$ et $A_N(u, v^h)$ a bien un sens. D'abord, en utilisant la condition $\gamma u = g$ sur Γ , il vient :

$$\begin{aligned} A_N(u, v^h) &= a(u, v^h) - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}}u v^h - \int_{\Gamma} (\gamma u) \partial_{\mathbf{n}}v^h + \int_{\Gamma} \gamma_N(\gamma u) v^h \\ &= a(u, v^h) - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}}u v^h - \int_{\Gamma} g \partial_{\mathbf{n}}v^h + \int_{\Gamma} \gamma_N g v^h \\ &= a(u, v^h) - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}}u v^h + \int_{\Gamma} g(\gamma_N v^h - \partial_{\mathbf{n}}v^h). \end{aligned}$$

D'un autre côté, en utilisant (3.1) et la formule de Green, nous obtenons :

$$a(u, v^h) - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}}u v^h = L(v^h).$$

Il suffit alors pour terminer la preuve de combiner cette égalité à la précédente. \square

Remarque 3.4.5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et la méthode de Nitsche modifiée suivante :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } u^h \in V^h \text{ qui vérifie :} \\ &a(u^h, v^h) - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}}u^h v^h - \theta \int_{\Gamma} u^h \partial_{\mathbf{n}}v^h + \int_{\Gamma} \gamma_N u^h v^h \\ &= L(v^h) + \int_{\Gamma} g(\gamma_N v^h - \theta \partial_{\mathbf{n}}v^h), \quad \text{pour tout } v^h \in V^h. \end{aligned} \tag{3.17}$$

La méthode (3.14) correspond au cas particulier $\theta = 1$. On vérifie sans difficulté que la consistance est préservée indépendamment de la valeur de θ , qui peut même être nul. En fait, on peut montrer que la méthode de Nitsche modifiée reste bien posée et converge de façon optimale pour toutes les valeurs de θ , pourvu que γ_0 soit suffisamment grand. Bien sûr, pour $\theta \neq 1$, la formulation discrète n'est plus symétrique, ce qui n'est pas souhaitable dans certaines configurations (si par exemple, on souhaite absolument utiliser des méthodes efficaces pour la résolution de systèmes linéaires symétriques de grande taille). Néanmoins, certaines valeurs de θ autres que 1 ont un intérêt, en particulier la variante anti-symétrique $\theta = -1$, qui est stable et converge de façon optimale quelque soit la valeur du paramètre de Nitsche γ_0 , qui peut même être nul (voir par exemple [18]).

Montrons ensuite que, si le paramètre de Nitsche est pris suffisamment grand, nous avons un problème discret bien posé. En fait, nous allons montrer que la forme bilinéaire $A_N(\cdot, \cdot)$ est V^h -elliptique pour la norme $\|\cdot\|_h$.

Proposition 3.4.6. Supposons que le paramètre de Nitsche γ_0 soit pris de telle sorte à ce que :

$$\gamma_0 \geq c_I,$$

où $c_I > 0$ est la constante de l'inégalité (3.16). Alors, pour tout $v^h \in V^h$, nous avons :

$$A_N(v^h, v^h) \geq \alpha_N \|v^h\|_h^2,$$

où la constante d'ellipticité $\alpha_N > 0$ est indépendante de h et de γ_0 . De plus, le Problème (3.15) admet une unique solution $u^h \in V^h$.

Démonstration. Prenons v^h dans V^h . En appliquant d'abord une inégalité de Cauchy-Schwarz, puis une inégalité d'Young, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
A_N(v^h, v^h) &= a(v^h, v^h) - 2 \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} v^h v^h + \int_{\Gamma} \gamma_N v^h v^h \\
&= \|\nabla v^h\|_{0,\Omega}^2 - 2 \int_{\Gamma} (\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \partial_{\mathbf{n}} v^h)(\gamma_N^{\frac{1}{2}} v^h) + \gamma_0 \|v^h\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C}^2 \\
&\geq \|\nabla v^h\|_{0,\Omega}^2 - 2 \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \partial_{\mathbf{n}} v^h\|_{0,\Gamma} \|\gamma_N^{\frac{1}{2}} v^h\|_{0,\Gamma} + \gamma_0 \|v^h\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C}^2 \\
&\geq \|\nabla v^h\|_{0,\Omega}^2 - \frac{1}{2\gamma_0} \|\partial_{\mathbf{n}} v^h\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C}^2 + 2\gamma_0 \|v^h\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C}^2.
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant (3.16) pour minorer le terme de bord restant :

$$A_N(v^h, v^h) \geq \left(1 - \frac{c_I}{2\gamma_0}\right) \|\nabla v^h\|_{0,\Omega}^2 + 2\gamma_0 \|v^h\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C}^2.$$

Pour avoir la V^h -ellipticité de $A_N(\cdot, \cdot)$, il suffit de prendre $\gamma_0 \geq c_I$. Pour conclure au caractère bien posé de (3.15), nous appliquons le Lemme de Lax-Milgram (Corollaire 2.3.2) dans l'espace de dimension finie $(V^h, \|\cdot\|_h)$, en vérifiant soigneusement que $A_N(\cdot, \cdot)$ et $L_N(\cdot)$ sont continues pour la norme $\|\cdot\|_h$, ce qui est une conséquence à nouveau de l'inégalité (3.16). \square

A nouveau, comme pour la méthode standard, nous allons établir une estimation d'erreur abstraite.

Théorème 3.4.7. *Soit u la solution du Problème (3.2) et u^h la solution du Problème (3.15). Une estimation a priori de l'erreur de discrétisation en norme $\|\cdot\|_h$ est donnée par :*

$$\|u - u^h\|_h \leq C \inf_{v^h \in V^h} \left(\|u - v^h\|_{1,\Omega} + \|u - v^h\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C} + \|\partial_{\mathbf{n}} u - \partial_{\mathbf{n}} v^h\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \right). \quad (3.18)$$

La constante $C > 0$ est indépendante de h , mais pas de γ_0 .

Démonstration. Considérons u , solution du Problème (3.2), et u^h , solution du Problème (3.15). Prenons $v^h \in V^h$. En appliquant d'abord une inégalité triangulaire, puis en utilisant la V^h -ellipticité de $A_N(\cdot, \cdot)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\|u - u^h\|_h &\leq \|u - v^h\|_h + \|v^h - u^h\|_h \\
&\leq \|u - v^h\|_h + \frac{1}{\alpha_N} \frac{A_N(v^h - u^h, v^h - u^h)}{\|v^h - u^h\|_h} \\
&\leq \|u - v^h\|_h + \frac{1}{\alpha_N} \frac{A_N(v^h - u^h, v^h - u)}{\|v^h - u^h\|_h},
\end{aligned}$$

avec $\alpha_N > 0$ la constante de V^h -ellipticité de $A_N(\cdot, \cdot)$. Pour obtenir la troisième ligne, nous avons utilisé la consistance de la méthode, qui nous donne à nouveau une orthogonalité de Galerkin pour la forme bilinéaire $A_N(\cdot, \cdot)$. Intéressons-nous maintenant à la continuité de $A_N(\cdot, \cdot)$. En utilisant Cauchy-Schwarz, puis l'inégalité (3.16) nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
& A_N(v^h - u^h, v^h - u) \\
\leq & \|\nabla(v^h - u^h)\|_{0,\Omega} \|\nabla(v^h - u)\|_{0,\Omega} + \|\partial_{\mathbf{n}}v^h - \partial_{\mathbf{n}}u^h\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \|v^h - u\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \\
& + \|v^h - u^h\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \|\partial_{\mathbf{n}}v^h - \partial_{\mathbf{n}}u\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C} + \gamma_0 \|v^h - u^h\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \|v^h - u\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \\
\leq & \|\nabla(v^h - u^h)\|_{0,\Omega} \left(\|\nabla(v^h - u)\|_{0,\Omega} + c_I^{\frac{1}{2}} \|v^h - u\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \right) \\
& + \|v^h - u^h\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \left(\|\partial_{\mathbf{n}}v^h - \partial_{\mathbf{n}}u\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C} + \gamma_0 \|v^h - u\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \right) \\
\leq & C \|v^h - u^h\|_h \left(\|\nabla(v^h - u)\|_{0,\Omega} + \|\partial_{\mathbf{n}}v^h - \partial_{\mathbf{n}}u\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C} + \|v^h - u\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \right),
\end{aligned}$$

où $C > 0$ est bien indépendante de h , mais pas de γ_0 . Cette inégalité, combinée à la précédente, nous donne bien l'estimation (3.18). \square

Pour l'espace d'éléments finis de Lagrange d'ordre k que nous considérons, nous pouvons maintenant donner une estimation en norme $\|\cdot\|_h$ avec un taux de convergence :

Corollaire 3.4.8. *Supposons $u \in H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega)$, avec $0 < \nu \leq k - \frac{1}{2}$ ($k \geq 1$ est le degré des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_k associés à V^h). La solution u^h du Problème (3.15) vérifie alors :*

$$\|u - u^h\|_h \leq Ch^{\frac{1}{2}+\nu} \|u\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega}, \quad (3.19)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de h , mais pas de γ_0 .

Démonstration. Comme $u \in H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega)$, on peut définir $\mathcal{I}^h u$, son interpolée de Lagrange. Nous pouvons donc choisir $v^h = \mathcal{I}^h u \in V^h$ dans l'estimation abstraite (3.18). Les deux premiers termes de (3.18) sont majorés en utilisant les estimations sur l'erreur d'interpolation de la Proposition 3.2.1, puis en sommant les contributions de chaque simplexe. Pour le deuxième terme, il faut également utiliser un résultat de trace pour effectuer la majoration suivante :

$$\|\gamma(u)\|_{1+\nu,\Gamma_j} \leq C \|u\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega}$$

sur chaque arête/face Γ_j de Γ .

Pour le troisième terme $\|\partial_{\mathbf{n}}u - \partial_{\mathbf{n}}(\mathcal{I}^h u)\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C}$, nous procédons de la façon ci-dessous, en suivant [42, (2.18), p.11] : nous introduisons tout d'abord l'interpolée de Scott-Zhang de ∇u , que nous noterons $\mathcal{SZ}_h(\nabla u)$ [80] : en effet, comme $\nabla u \in H^{\frac{1}{2}+\nu}(\Omega)$, on ne peut pas assurer qu'il soit continu et donc prendre son interpolée de Lagrange. Ensuite, pour toute face/arête E du bord Γ , qui appartient à un élément $T \in \mathcal{T}^h$, nous appliquons d'abord une inégalité triangulaire, puis l'inégalité

de trace inverse (3.16) (localement) :

$$\begin{aligned}
& \|\gamma(\nabla u) - \gamma(\nabla(\mathcal{I}^h u))\|_{0,E} \\
& \leq \|\gamma(\nabla u) - \gamma(\mathcal{SZ}_h(\nabla u))\|_{0,E} + \|\gamma(\mathcal{SZ}_h(\nabla u)) - \gamma(\nabla(\mathcal{I}^h u))\|_{0,E} \\
& \leq \|\gamma(\nabla u) - \gamma(\mathcal{SZ}_h(\nabla u))\|_{0,E} + c_I^{\frac{1}{2}} h_T^{-\frac{1}{2}} \|\mathcal{SZ}_h(\nabla u) - \nabla(\mathcal{I}^h u)\|_{0,T} \\
& \leq \|\gamma(\nabla u) - \gamma(\mathcal{SZ}_h(\nabla u))\|_{0,E} + c_I^{\frac{1}{2}} h_T^{-\frac{1}{2}} \left(\|\mathcal{SZ}_h(\nabla u) - \nabla u\|_{0,T} + \|\nabla(u - \mathcal{I}^h u)\|_{0,T} \right) \\
& \leq Ch_T^\nu \|\gamma(\nabla u)\|_{\nu, \omega_T} + h_T^{-\frac{1}{2}} \left(Ch_T^{\frac{1}{2}+\nu} \|\nabla u\|_{\frac{1}{2}+\nu, \omega_T} + Ch_T^{\frac{1}{2}+\nu} \|u\|_{\frac{3}{2}+\nu, T} \right) \\
& \leq Ch_T^\nu \|u\|_{\frac{3}{2}+\nu, \omega_T},
\end{aligned}$$

où ω_T est un voisinage d'éléments de T , et où nous avons utilisé les estimation d'erreur sur l'interpolation de Lagrange (Proposition 3.2.1) et de Scott-Zhang [80]. Le résultat souhaité est obtenu par sommation sur les arêtes/faces du bord Γ . \square

Remarque 3.4.9. *Une alternative pour estimer l'erreur d'interpolation du gradient sur le bord Γ consiste à passer par l'élément de référence, puis utiliser les résultats d'approximation polynomiale dans les espaces de Sobolev fractionnaires de Tod Dupont et L. Ridgway Scott [34] (voir [28] pour la preuve détaillée).*

Remarque 3.4.10. *Comme nous l'avons vu avec la Proposition 3.4.2, la norme $\|\cdot\|_h$ permet d'avoir une estimation d'erreur optimale en norme H^1 . De plus, grâce au terme $\|u - u^h\|_{\frac{1}{2}, h, \Gamma_C}$, on obtient également une estimation de l'erreur sur la condition de Dirichlet (3.1) (ii).*

Remarque 3.4.11. *Il est également possible d'obtenir une estimation d'erreur en norme L^2 pour la solution u^h du Problème (3.15), voir [84, Theorem 2.2] pour plus de détails.*

3.4.3 Implémentation

Nous reprenons ici les mêmes notations que pour la méthode standard. Nous notons toujours $u_i = u^h(\mathbf{a}_i)$ le degré de liberté associé au noeud de Lagrange \mathbf{a}_i , $i = 1, \dots, N$, et plaçons tous les degrés de liberté dans un vecteur colonne \mathbf{U} .

Testons maintenant la formulation faible discrète (3.14) en prenant, pour tout indice $i \in 1, \dots, N$, la fonction de base φ_i comme fonction test ($v^h = \varphi_i \in V^h$). Nous obtenons :

$$\sum_{j=1, \dots, N} (k_{ij} - n_{ij} - n_{ji} + \gamma_0 m_{ij}) u_j = f_i + \sum_{j=1, \dots, N} (\gamma_0 m_{ij} - n_{ji}) g_j, \quad \forall i = 1, \dots, N.$$

Nous avons repris les conventions usuelles $k_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j$ et $f_i = \int_{\Omega} f \varphi_i$. A ceci s'ajoutent donc deux nouvelles matrices qui proviennent des termes de Nitsche :

$$\mathbf{N}_{\Gamma} = (n_{ij})_{i,j=1, \dots, N}, \quad n_{ij} = \int_{\Gamma} \varphi_i \partial_{\mathbf{n}} \varphi_j,$$

et

$$\mathbf{M}_\Gamma = (m_{ij})_{i,j=1,\dots,N}, \quad m_{ij} = \int_\Gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma_0} \right) \varphi_i \varphi_j.$$

Nous aboutissons alors au système matriciel suivant :

$$(\mathbf{K} - \mathbf{N}_\Gamma - \mathbf{N}_\Gamma^\top + \gamma_0 \mathbf{M}_\Gamma) \mathbf{U} = \mathbf{F} + (\gamma_0 \mathbf{M}_\Gamma - \mathbf{N}_\Gamma^\top) \mathbf{G}.$$

Nous avons toujours \mathbf{F} et \mathbf{G} qui sont les vecteurs colonnes qui contiennent, respectivement, les composantes f_i provenant du terme source et les données au bord $g(\mathbf{a}_j)$.

Notons qu'en fait, bien que de taille $N \times N$, les matrices liées au terme de Nitsche \mathbf{N}_Γ et \mathbf{M}_Γ ont leur coefficients calculés à partir d'une intégrale de bord. Lors de la procédure d'assemblage, seules les contributions des éléments ayant une arête/face sur le bord seront à prendre en compte. Notons de plus que la matrice \mathbf{N}_Γ n'est pas vraiment standard, mais elle ne pose aucun problème pour un calcul pratique : il suffit d'avoir une structure de données appropriée qui contient les informations liées à toute la couche d'éléments sur le bord Γ (et non pas uniquement les arêtes).

La méthode de Nitsche est implémentée, par exemple, dans la librairie éléments finis GetFEM++, où une brique est disponible pour les conditions de Dirichlet (voir http://getfem.org/userdoc/model_Nitsche.html).

3.5 Revue succincte des autres méthodes

Nous allons faire ici un panorama rapide des autres méthodes existantes pour incorporer la condition de bord (3.1) (ii) lorsque nous cherchons à approcher le Problème (3.1) à l'aide de la Méthode des Éléments Finis. Dans cette revue, nous nous contenterons d'expliquer informellement le principe de chaque méthode et d'explicitier le problème discrétisé correspondant. Nous nous sommes inspirés fortement d'un article de Rolf Stenberg [83] que nous avons complété, en mentionnant certaines méthodes qui y avaient été omises. Nous renvoyons à cet article pour d'avantage d'informations concernant ces méthodes, leur analyse et les liens qui les unissent. Par ailleurs, le panorama proposé ici n'est certainement pas exhaustif, mais nous avons mentionné au moins les méthodes qui nous ont semblé les plus répandues.

3.5.1 La méthode de pénalité

L'idée de base de la méthode de pénalité [8, 11] consiste à remplacer la condition de Dirichlet (3.1) (ii) par une condition de Robin. On introduit pour cela un paramètre de pénalité noté $\varepsilon > 0$, et nous cherchons une fonction u_ε solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u_\varepsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ qui vérifie :} \\ & \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{dans } \Omega, & (i) \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(u_\varepsilon - g) & \text{sur } \Gamma. & (ii) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

L'heuristique derrière cette méthode est la suivante : pour ε suffisamment petit, la condition (3.20) (ii) approche la condition de Dirichlet (3.1) (ii).

La formulation faible pénalisée (continue) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u_\varepsilon \in V \text{ qui vérifie :} \\ & a(u_\varepsilon, v) + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Gamma u_\varepsilon v = L(v) + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Gamma gv \quad \text{pour tout } v \in V. \end{aligned} \quad (3.21)$$

On remarque que cette équation variationnelle est la condition d'optimalité du premier ordre associée à la fonctionnelle

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{2\varepsilon} \int_\Gamma (v - g)^2,$$

et on peut montrer que l'unique solution u_ε du Problème (3.21) est également l'unique minimiseur de $J_\varepsilon(\cdot)$.

Pour obtenir une formulation discrétisée, il suffit de prendre un paramètre de pénalité dépendant de h : $\varepsilon_h = \varepsilon_0 \Phi(h)$, où $\varepsilon_0 > 0$ est un paramètre fixé, et $\Phi(h)$ est une fonction de h bien choisie (en général une puissance de h). Il suffit de prendre également une inconnue u_ε^h et une fonction test v^h dans V^h . Nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } u_\varepsilon^h \in V^h \text{ qui vérifie :} \\ & a(u_\varepsilon^h, v^h) + \frac{1}{\varepsilon_h} \int_\Gamma u_\varepsilon^h v^h = L(v^h) + \frac{1}{\varepsilon_h} \int_\Gamma gv^h \quad \text{pour tout } v^h \in V^h. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Cette méthode a pour atout principal qu'elle est très facile à mettre en oeuvre et qu'elle s'étend naturellement à des problèmes beaucoup plus complexes. Pour le problème (3.1), on peut montrer qu'en choisissant convenablement $\Phi(h)$, la solution u_ε^h converge en norme H^1 vers u , avec le taux optimal, fonction de la régularité de u et du degré des éléments finis associés.

En revanche, l'approximation de la condition de Dirichlet homogène par une condition de Robin vient provoquer une perte de consistance. Il faut alors prendre ε_0 aussi petit que possible pour satisfaire au mieux la condition de Dirichlet. D'un autre côté, plus ε_0 est petit, plus le Problème (3.22) est mal conditionné et donc difficile à résoudre. Il faut donc choisir avec habileté ε_0 , ce qui reste un problème délicat.

3.5.2 Les méthodes mixtes

Les méthodes mixtes permettent de traiter la condition (3.1) (ii) de manière faible, en introduisant pour cela un multiplicateur de Lagrange $-\lambda$ qui se substitue à la dérivée normale $\partial_{\mathbf{n}}u$ [9, 17, 72, 73]. Le problème faible que l'on cherche à approcher est alors le suivant :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (u, \lambda) \in V \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ qui vérifient :} \\ & \begin{cases} a(u, v) + \langle \lambda, \gamma v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} + \langle \mu, \gamma u \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} = (f, v)_\Omega + \langle \mu, g \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} \\ \text{pour tout couple } (v, \mu) \in V \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma). \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Le problème (3.23) est obtenu comme point-selle du Lagrangien

$$\mathcal{L}(v, \mu) := J(v) + \langle \mu, \gamma v - g \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma}.$$

On peut montrer également au niveau continu que les problèmes (3.2) et (3.23) sont équivalents. Pour obtenir un problème discret, il suffit d'introduire un espace d'éléments finis $M^H \subset H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ pour le multiplicateur λ , construit à partir d'un maillage donné sur Γ (qui n'est pas nécessairement la trace du maillage \mathcal{T}^h). Le problème mixte discret s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (u^h, \lambda^H) \in V^h \times M^H \text{ qui vérifient :} \\ a(u^h, v^h) + \langle \lambda^H, \gamma v^h \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} + \langle \mu^H, \gamma u^h \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} = (f, v^h)_\Omega + \langle \mu^H, g \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} \\ \text{pour tout couple } (v^h, \mu^H) \in V^h \times M^H. \end{cases} \quad (3.24)$$

Différents choix d'approximation pour le multiplicateur de Lagrange correspondent à différentes méthodes, mais une condition inf-sup discrète doit être vérifiée pour le couple d'espaces d'éléments finis correspondant aux variables (u, λ) . Cette condition va garantir le caractère bien posé du problème discret et la convergence optimale de la méthode. Par contre, elle restreint fortement les choix possibles pour les espaces d'éléments finis, qui doivent être construits de façon soignée [83].

3.5.3 Les méthodes stabilisées

Les méthodes stabilisées s'appuient sur la formulation mixte (3.23), en y introduisant des termes additionnels au niveau discret. Ceux-ci permettent de conserver le caractère bien posé du problème, ainsi que la convergence optimale, pour des couples d'espaces d'éléments finis ne vérifiant pas nécessairement la condition inf-sup discrète (pour l'idée originale, appliquée à Stokes, voir l'article de Hughes et Franca [56]).

Dans cette catégorie, citons tout d'abord la méthode stabilisée de Barbosa et Hughes de type résiduelle/moindres-carrés où le terme additionnel peut prendre la forme suivante [83] :

$$\alpha_0 h \int_{\Gamma} (\lambda^h + \partial_{\mathbf{n}} u^h)(\mu^h + \partial_{\mathbf{n}} v^h),$$

avec α_0 comme paramètre de stabilisation, et h est le paramètre de discrétisation en espace. Plus récemment a été proposée une stabilisation par projections L^2 locales [19], où le terme de stabilisation peut prendre la forme :

$$\alpha_0 h \int_{\Gamma} ((I - \pi)\lambda^h)((I - \pi)\mu^h),$$

où π désigne la projection sur un espace discret plus grossier que celui où vivent λ^h et μ^h , et qui permet de vérifier la condition de compatibilité inf-sup discrète.

Chapitre 4

Conditions de Signorini

Il va s'agir ici d'étudier un problème simplifié de type contact. Ces problèmes ont un rôle important dans l'industrie ou encore en biomécanique. En général, la simulation numérique de ce type de problème se fait en utilisant la Méthode des Eléments Finis (voir, entre autres, [46, 49, 52, 59, 62, 85, 86]). Les conditions de contact sont non-linéaires, et peuvent être écrites sous forme d'un jeu d'inéquations qui font intervenir les déplacements et les contraintes sur le bord. Elle peuvent être transcrites ensuite sous forme faible, en utilisant le formalisme des inéquations variationnelles (voir par exemple [40]). Il existe un grand nombre de techniques qui permettent d'incorporer de façon efficace ces conditions dans une résolution par éléments finis, les deux plus répandues à ce jour étant la pénalité et les formulations mixtes. Dans ce chapitre, nous verrons en détail deux techniques, qui sont les extensions à Signorini des deux techniques vues précédemment pour le traitement des conditions de Dirichlet : une méthode "standard" qui consiste à approcher directement l'inéquation variationnelle, et en particulier l'ensemble convexe où vivent la solution et les fonctions tests, et une autre basée sur un traitement à la Nitsche des conditions de Signorini.

Nous nous bornerons au problème de contact dit "de Signorini", c'est à dire le contact sans frottement entre un corps élastique en petites déformations et un support rigide plan. En effet, nous retrouverons déjà dans cette situation des difficultés propres au traitement des conditions non-linéaires de contact. Ce chapitre contient du matériel publié précédemment dans des articles de l'auteur et de ses co-auteurs [24, 26, 28]. Une connaissance basique de l'élasticité linéaire est prérequis, et le lecteur qui ne la posséderait pas peut se reporter par exemple au cours polycopié d'André Fortin et André Garon [41], ou au livre de Georges Duvaut [35].

4.1 Présentation du problème

4.1.1 Motivation

Nous étudions un corps élastique dont la configuration de référence correspond au domaine Ω inclus dans \mathbb{R}^d avec $d = 2$ ou $d = 3$. Le domaine Ω est un ouvert borné connexe et non-vide (voir Figure 4.1.1 lorsque $d = 2$). Nous ferons l'hypothèse des petites transformations élastiques (petits déplacements et petites déformations), ainsi que des déformations planes lorsque $d = 2$. La frontière

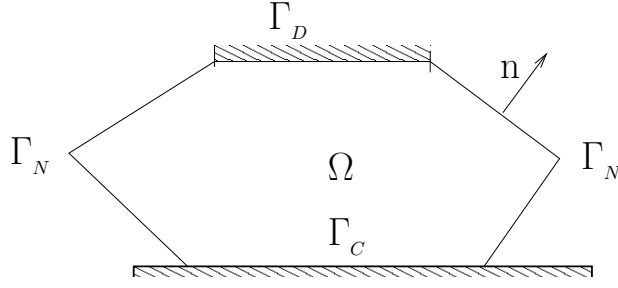


FIGURE 4.1 : Corps élastique qui occupe un domaine Ω . Sa frontière $\partial\Omega$ est scindée en trois parties distinctes : Γ_D (conditions d'encastrement), Γ_N (tractions imposées) et Γ_C (frontière de contact avec non-pénétration dans le support rigide).

$\partial\Omega$ de Ω est polygonale ou polyédrique, et elle est composée de trois sous-ensembles qui forment une partition de $\partial\Omega$: Γ_D , Γ_N et la frontière de contact Γ_C . Nous supposons que $|\Gamma_D| > 0$ et $|\Gamma_C| > 0$. On supposera de plus que Γ_D est incluse de façon compacte dans $\partial\Omega \setminus \overline{\Gamma_C}$, ce qui garantira que l'espace de trace restreint à Γ_C ne sera pas affecté par les conditions limites sur Γ_D . La frontière de contact est une ligne droite en dimension deux, et un polygone plan en dimension trois. Le vecteur normal unitaire sortant sur $\partial\Omega$ est noté \mathbf{n} . Initialement, le corps Ω est en contact sur Γ_C avec la fondation rigide qui le supporte, et nous supposons que la zone de contact effective après déformation, qui est inconnue, restera incluse dans Γ_C . Le corps est encasté sur Γ_D . Il est soumis à des forces volumiques $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^d$ et à des forces surfaciques $\mathbf{f}_N \in (L^2(\Gamma_N))^d$.

Notre but est de trouver un champ de déplacements $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ pour le corps élastique. D'abord ce champ doit satisfaire les équations de l'élasticité linéarisée, ainsi que les conditions limites de Dirichlet et Neumann, respectivement, sur Γ_D et Γ_N :

$$\begin{aligned}
\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} &= \mathbf{0} && \text{dans } \Omega, \\
\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) &= \mathcal{C} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) && \text{dans } \Omega, \\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sur } \Gamma_D, \\
\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} &= \mathbf{f}_N && \text{sur } \Gamma_N,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

où $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})$, $1 \leq i, j \leq d$, est le tenseur des contraintes de Cauchy et \mathbf{div} est l'opérateur divergence pour des fonctions à valeur tensorielle. La notation $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T)$ est utilisée pour le tenseur des déformations linéarisées et $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_{ijkl})_{1 \leq i, j, k, l \leq d}$ est le tenseur d'élasticité d'ordre 4. Ce tenseur \mathcal{C} sera supposé doté des propriétés suivantes :

- La symétrie :

$$\mathcal{C}_{ijkl} = \mathcal{C}_{klij} = \mathcal{C}_{jikl}, \quad \forall 1 \leq i, j, k, l \leq d.$$

- L'ellipticité uniforme : il existe $\alpha_C > 0$ tel que, pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$ et pour tout tenseur symétrique du deuxième ordre $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$((\mathcal{C}(\mathbf{x})\boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon}) \geq \alpha_C \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}.$$

- Le caractère uniformément borné : $\mathcal{C} \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}$.

Introduisons l'espace de Hilbert \mathbf{V} des déplacements qui satisfont les conditions aux limites de Dirichlet (d'encastrement) :

$$\mathbf{V} := \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \right\}.$$

Nous allons définir :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \quad L(\mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f}_N \cdot \mathbf{v}.$$

pour \mathbf{u} et \mathbf{v} dans \mathbf{V} . L'énergie mécanique totale associée au corps élastique est donné par la fonctionnelle :

$$J(\mathbf{u}) := \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}).$$

Pour les problèmes d'élasticité linéaire avec uniquement des conditions de Dirichlet, ou des conditions mêlées Dirichlet/Neumann (autrement dit des déplacements et tractions imposées, et $|\Gamma_C| = 0$), trouver la solution du problème (4.1) revient à trouver l'unique minimum de $J(\cdot)$ au sein de l'ensemble \mathbf{V} des déplacements cinématiquement admissibles (voir par exemple [29, 37] et aussi le chapitre précédent sur le problème de Poisson). Une équation variationnelle (travaux virtuels) est obtenue en écrivant la condition d'optimalité du premier ordre

$$\langle J'(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = 0$$

pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, avec J' la différentielle au sens de Fréchet de J . Ici, la notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit de dualité entre l'espace \mathbf{V} et son dual \mathbf{V}' (que nous pouvons éventuellement identifier à \mathbf{V} via le Théorème de représentation de Riesz).

Nous allons adopter pour le contact un point de vue similaire, la différence principale est que nous allons restreindre l'ensemble des déplacements cinématiquement admissibles de façon à interdire la pénétration dans le support rigide. Tout d'abord, pour tout champ de déplacement \mathbf{v} et pour tout vecteur densité de forces surfaciques $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n}$ définis sur $\partial\Omega$ nous utiliserons les notations suivantes :

$$\mathbf{v} = v_n \mathbf{n} + \mathbf{v}_t \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n} = \sigma_n(\mathbf{v})\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{v}),$$

où \mathbf{v}_t (respectivement $\boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{v})$) sont les composantes tangentielles de \mathbf{v} (resp. $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n}$). Ce qui signifie :

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_t \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \sigma_n = (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Par ailleurs, nous ne noterons plus explicitement l'opérateur de trace γ sur le bord $\partial\Omega$, tel qu'il avait été introduit au Théorème 2.2.1 mais il sera bien entendu que pour une fonction \mathbf{v} de \mathbf{V} , des quantités telles que v_n et \mathbf{v}_t doivent être entendues au sens des traces (normales et tangentielles).

Nous introduisons maintenant le cône convexe \mathbf{K} des déplacements admissibles qui satisfont la non-pénétration sur la frontière de contact Γ_C :

$$\mathbf{K} := \{ \mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \leq 0 \text{ sur } \Gamma_C \}.$$

La condition de non-pénétration $v_n \leq 0$ s'écrit en fait précisément : $v_n(\mathbf{x}) \leq 0$ pour presque tout \mathbf{x} sur Γ_C (voir [59] pour plus de détails et pour d'autres définitions équivalentes). Le problème de contact sans frottement en élasticité linéaire (problème de Signorini) s'écrit alors :

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{K} \text{ tel que : } J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in \mathbf{K}} J(\mathbf{v}). \quad (4.2)$$

4.1.2 Formulation faible et conditions de contact

On peut remarquer tout d'abord que le Problème (4.2) est un problème de minimisation sous contraintes d'inégalité : en écrivant la condition d'optimalité du premier ordre correspondante, nous allons retrouver l'inéquation variationnelle qui lui est associée. Ensuite nous expliciterons quelles sont les conditions de contact sur Γ_C en formulation forte, et nous montrerons l'équivalence entre les formulations fortes et faibles.

Compte-tenu des hypothèses formulées sur le tenseur d'élasticité \mathcal{C} , et sur les données f et f_N , nous avons $a(\cdot, \cdot)$, respectivement $L(\cdot)$, qui sont continues sur $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$, respectivement sur \mathbf{V} . Donc la fonctionnelle $J(\cdot)$ est Fréchet-différentiable en tout point $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ et sa différentielle au sens de Fréchet est donnée par :

$$\langle J'(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - L(\mathbf{w}).$$

Supposons que $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$ soit un minimiseur local de $J(\cdot)$, alors l'inéquation variationnelle suivante est vérifiée (voir par exemple [59]) :

$$\langle J'(\mathbf{u}), \mathbf{v} - \mathbf{u} \rangle \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}, \quad (4.3)$$

Injectons maintenant l'expression obtenue ci-dessus pour J' dans la condition d'optimalité du premier ordre (4.3) : nous obtenons que toute solution \mathbf{u} du Problème (4.2) est aussi solution de :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathbf{K} \text{ telle que :} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{K}. \end{cases} \quad (4.4)$$

Nous venons d'obtenir alors l'inéquation variationnelle associée au Problème (4.2) (voir, entre autres, [40, 52, 59]). Nous allons voir par la suite que pour le problème étudié ici, les formulations (4.2) et (4.4) sont équivalentes.

Analysons alors le Problème (4.4) afin d'explicitier les conditions de contact (conditions de Signorini) sur Γ_C , en formulation forte. Nous établirons alors au passage l'équivalence entre la formulation forte et la formulation faible, en supposant que \mathbf{u} est suffisamment régulière. Nous aurons besoin de la formule de Green suivante, qui s'appuie sur la Proposition 2.2.3 vue au premier chapitre :

Lemme 4.1.1. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Pour tout $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d$ avec $\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \in (L^2(\Omega))^d$, et pour tout $\mathbf{w} \in (H^1(\Omega))^d$, nous avons :*

$$- \int_{\Omega} (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{w} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}) - \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial\Omega}. \quad (4.5)$$

Démonstration. Nous appliquons composante par composante la formule de la Proposition 2.2.3. Dans ce but, nous introduisons $\boldsymbol{\varphi} := \sigma_{ij}(\mathbf{v})\mathbf{e}_j$ et $\psi = w_i$, pour tout $i = 1, \dots, d$. Nous avons alors :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma_{ij}(\mathbf{v})\mathbf{e}_j)w_i = \int_{\Omega} (\sigma_{ij}(\mathbf{v})\mathbf{e}_j) \cdot \nabla w_i - \langle (\sigma_{ij}(\mathbf{v})\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{n}, w_i \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial\Omega}.$$

En sommant pour toutes les valeurs de i , il vient :

$$- \int_{\Omega} (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})) \cdot \mathbf{w} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) : \nabla \mathbf{w} - \langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n}, \mathbf{w} \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \partial\Omega}.$$

On obtient alors la formule souhaitée en utilisant les propriétés de symétrie de $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})$ et $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w})$. \square

Par la suite, nous ferons l'hypothèse que le champ de déplacements solution \mathbf{u} est dans $(H^2(\Omega))^d$, ce qui implique que $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}$ appartient à $L^2(\partial\Omega)$. En remplaçant \mathbf{v} par \mathbf{u} dans l'énoncé de la Proposition 4.1.1, nous pourrions ainsi écrire le produit de dualité sur $\partial\Omega$ comme une simple intégrale sur le bord.

Le principal énoncé de cette section est le suivant :

Théorème 4.1.2. *Supposons : $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ et $\mathbf{f}_N \in L^2(\Gamma_N)$. Supposons de plus que la solution \mathbf{u} du Problème (4.4), si elle existe, appartient à $(H^2(\Omega))^d$. Alors la solution \mathbf{u} du Problème (4.4) est une solution du Problème (4.1)–(4.6), avec les conditions de contact (4.6) sur Γ_C qui sont les suivantes :*

$$\begin{aligned} u_n &\leq 0 & (i) \\ \sigma_n(\mathbf{u}) &\leq 0 & (ii) \\ \sigma_n(\mathbf{u}) u_n &= 0 & (iii) \\ \boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{u}) &= \mathbf{0} & (iv) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ceci signifie que (4.1)–(4.6) sont satisfaites presque partout sur le domaine Ω ou sur les parties appropriées de la frontière $\partial\Omega$. Réciproquement, si $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^d$ est une solution du Problème (4.1)–(4.6), alors il vérifie l'inéquation variationnelle (4.4).

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^d$ est une solution de (4.4). En constatant que $\mathbf{0} \in \mathbf{K}$, et en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dans (4.4), nous obtenons :

$$a(\mathbf{u}, -\mathbf{u}) \geq L(-\mathbf{u}).$$

Prenons maintenant $\mathbf{v} = 2\mathbf{u} \in \mathbf{K}$ dans (4.4) :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{u}).$$

Combinons les deux inégalités précédentes :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = L(\mathbf{u}). \tag{4.7}$$

Ceci implique que pour $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$ et chaque $\mathbf{v} \in \mathbf{K}$ l'inéquation variationnelle (4.4) s'écrit :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + L(\mathbf{v}) - L(\mathbf{u}) = L(\mathbf{v}).$$

Appliquons la formule (4.5) : l'inégalité précédente peut alors s'écrire

$$\int_{\Omega} (-\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \geq \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f}_N \cdot \mathbf{v}.$$

Comme nous avons $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, ceci implique que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur Γ_D , donc :

$$\int_{\Omega} (-\mathbf{f} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_N} (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} - \mathbf{f}_N) \cdot \mathbf{v} + \int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \geq 0. \quad (4.8)$$

Choisissons maintenant $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ qui s'annule sur toute la frontière : $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur $\partial\Omega$. Pour $\varepsilon = 1$, puis pour $\varepsilon = -1$, nous avons $\varepsilon\mathbf{v} \in \mathbf{K}$ et nous déduisons de (4.8) :

$$\int_{\Omega} (-\mathbf{f} - \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Ce qui signifie :

$$\mathbf{f} + \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{p.p. dans } \Omega. \quad (4.9)$$

Nous retrouvons donc la première condition (équilibre statique) de (4.1). Un argument similaire nous permet de retrouver la condition de Neumann de (4.1) :

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} - \mathbf{f}_N = \mathbf{0} \quad \text{p.p. sur } \Gamma_N. \quad (4.10)$$

Tirons partie des relation (4.9)–(4.10), et utilisons la decomposition de $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n}$ et \mathbf{v} en composantes normales et tangentielles. Nous pouvons alors écrire (4.8) comme :

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})v_n + \int_{\Gamma_C} \boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}_t \geq 0.$$

Prenons $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tel que $v_n = 0$ sur Γ_C , et utilisons à nouveau la propriété $\varepsilon\mathbf{v} \in \mathbf{K}$, pour $\varepsilon = \pm 1$ afin d'obtenir la condition :

$$\boldsymbol{\sigma}_t(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \text{p.p. sur } \Gamma_C. \quad (4.11)$$

On peut alors simplifier de nouveau l'inégalité (4.8) :

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})v_n \geq 0, \quad (4.12)$$

qui reste vraie pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{K}$. Comme la relation ci-dessus (4.12) est vraie pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ qui vérifie $v_n \leq 0$ presque partout sur Γ_C , ceci implique inexorablement :

$$\sigma_n(\mathbf{u}) \leq 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_C. \quad (4.13)$$

Revenons maintenant à l'équation (4.7) : nous appliquons à nouveau la formule de Green (4.5) et obtenons :

$$\int_{\Omega} (-\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{u} + \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{f}_N \cdot \mathbf{u}.$$

En tenant compte des conditions $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ sur Γ_D , (4.9), (4.10) et (4.11), nous aboutissons à :

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})u_n = 0.$$

Comme nous avons $\sigma_n(\mathbf{u})u_n \geq 0$ presque partout sur Γ_C , nous en concluons :

$$\sigma_n(\mathbf{u})u_n = 0 \quad \text{p.p. sur } \Gamma_C. \quad (4.14)$$

Pour résumer, comme \mathbf{u} est dans \mathbf{K} et en regroupant les relations (4.9)–(4.10)–(4.11)–(4.13)–(4.14), nous avons montré que \mathbf{u} est une solution du Problème (4.1)–(4.6).

Voyons maintenant la réciproque et supposons que \mathbf{u} vérifie les conditions (4.1) et (4.6), avec de plus $\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^d$. Montrons que \mathbf{u} est une solution de (4.4). La première observation est que \mathbf{u} appartient bien à \mathbf{K} , car il vérifie la condition de Dirichlet sur Γ_D et la condition de non-pénétration (4.6)–(i). Partons alors de (4.1) et prenons $\mathbf{v} \in \mathbf{K}$. En appliquant la formule de Green (4.5), puis en tenant compte des conditions de Dirichlet, de Neumann, et d'absence de frottement (4.6)–(iv), nous parvenons à :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) = \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n - u_n) + L(\mathbf{v} - \mathbf{u}).$$

En tenant compte de la condition de complémentarité (4.6)–(iii) il vient :

$$\int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n - u_n) = \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u})v_n.$$

Comme \mathbf{v} appartient à \mathbf{K} et en tenant compte de la condition (4.6)–(ii), on constate que ce terme est positif. Nous parvenons alors à :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v} - \mathbf{u}),$$

qui est l'inéquation variationnelle (4.4). □

Remarque 4.1.3. *Pour en dire un peu plus sur les conditions de contact (4.6) : la condition (i) vient directement de l'appartenance de \mathbf{u} au convexe \mathbf{K} et signifie qu'il ne peut pas y avoir de pénétration dans le support rigide. La condition (ii) signifie que la réaction normale du support rigide est orientée vers l'intérieur du corps élastique (les forces de contact ne peuvent être que répulsives). La condition de complémentarité (iii) peut être interprétée comme suit : si, en un point, le corps élastique est strictement séparé du support rigide ($u_n < 0$) alors nécessairement $\sigma_n = 0$ (il ne peut pas y avoir d'action de contact) ; de plus si la force de contact est strictement négative ($\sigma_n < 0$), le corps élastique doit nécessairement adhérer au support ($u_n = 0$). La dernière condition (iv) signifie qu'il n'y a pas de frottement.*

4.1.3 Existence et unicité de la solution

Dans cette section, nous allons montrer que le problème de Signorini (4.4) (ou encore (4.2)) est bien posé. Dans ce but, nous allons appliquer le Théorème de Stampacchia 2.3.1. Nous observons déjà que $(\mathbf{V}, \|\cdot\|_{1,\Omega})$ est un espace de Hilbert, en tant que sous-espace fermé de $(H^1(\Omega))^d$, et que \mathbf{K} est un cône convexe fermé non-vide de \mathbf{V} (voir par exemple [59, Chapter 5] pour la preuve détaillée). On remarque également que $L(\cdot)$ est une forme linéaire continue sur \mathbf{V} , compte-tenu des hypothèses sur les données \mathbf{f} et \mathbf{f}_N . La forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique. Nous allons montrer ci-dessous qu'elle est également continue et \mathbf{V} -elliptique. Il nous faut d'abord un résultat assez délicat à démontrer, qui assure qu'on peut majorer la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$ en utilisant uniquement la partie symétrique du gradient (qui intervient dans le tenseur des petites déformations élastiques). Il s'agit de la deuxième inégalité de Korn (voir, par exemple, [59, Theorem 5.13]) :

Théorème 4.1.4. (deuxième inégalité de Korn) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) un ouvert borné de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$. Alors il existe $c > 0$ tel que :*

$$c \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq (\|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2 + \|\mathbf{v}\|_{0,\Omega}^2)^{1/2}, \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d. \quad (4.15)$$

Un deuxième résultat préliminaire indispensable concerne la caractérisation du noyau du tenseur des petites déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$: il est formé en fait par les déplacements rigides infinitésimaux (voir par exemple [59, Lemma 6.1, p.113]) :

Lemme 4.1.5. *Soit Ω un ouvert borné et connexe de \mathbb{R}^d . Pour tout $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d$ l'équivalence suivante a lieu :*

$$\begin{aligned} & (\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \text{ avec } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{d \times d}, \mathbf{M} = -\mathbf{M}^T) \\ \Leftrightarrow & \quad (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{p.p. dans } \Omega). \end{aligned}$$

Nous pouvons alors énoncer le résultat suivant :

Proposition 4.1.6. *Soit Ω un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^d de frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Soit $\Gamma_D \subset \partial\Omega$ telle que $|\Gamma_D| > 0$, et définissons \mathbf{V} comme :*

$$\mathbf{V} := \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^d \mid \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D \right\}.$$

Soit $a(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire définie par :

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}),$$

avec le tenseur d'élasticité \mathcal{C} qui est symétrique, uniformément borné et uniformément elliptique. Alors la forme bilinéaire $a(\cdot, \cdot)$ est continue sur $\mathbf{V} \times \mathbf{V}$ et \mathbf{V} -elliptique : il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2.$$

Démonstration. La continuité de $a(\cdot, \cdot)$ est une conséquence directe de l'hypothèse $\mathcal{C} \in (L^\infty(\Omega))^{d \times d}$. Montrons maintenant que $a(\cdot, \cdot)$ est \mathbf{V} -elliptique. En premier lieu, l'ellipticité uniforme de \mathcal{C} permet d'écrire, pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\mathcal{C}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \\ &\geq \alpha_C \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \\ &= \alpha_C \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Appliquons alors le Lemme de Peetre-Tartar 2.3.5. Posons : $X = \mathbf{V}$, $Y = (L^2(\Omega))^{d \times d}$ et $Z = (L^2(\Omega))^d$. On pose

$$A : \begin{cases} X & \rightarrow & Y \\ \mathbf{v} & \mapsto & \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \end{cases}$$

qui est bien linéaire et continu. Reste à montrer qu'il est injectif. Soit donc un champ de déplacement $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ tel que $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ presque partout sur Ω . Le Lemme 4.1.5 nous permet de conclure que \mathbf{v} est de la forme :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

avec \mathbf{M} antisymétrique. On vérifie alors sans difficulté que si le déplacement \mathbf{v} n'est pas nul sur Ω , alors il s'annule au maximum en un point de \mathbb{R}^2 , ce qui est incompatible avec la condition de Dirichlet homogène $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ sur Γ_D , portion de la frontière de mesure strictement positive. Le seul déplacement $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ de la forme $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ est donc le déplacement nul $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Il s'en suit que A est bien injectif.

Nous choisissons ensuite comme opérateur T l'injection canonique de \mathbf{V} dans $(L^2(\Omega))^d$. C'est un opérateur linéaire et continu. De plus T est compact compte-tenu du Théorème de Rellich-Kondrachov. La deuxième inégalité de Korn (Théorème 4.1.4), nous permet alors d'affirmer que la condition 2.4 du Lemme de Peetre-Tartar 2.3.5 est vérifiée. L'application de ce Lemme nous assure donc que :

$$c \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \leq \|\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})\|_{0,\Omega},$$

avec $c > 0$, ce qui termine la preuve. □

Nous pouvons maintenant nous appuyer sur les résultats précédents pour énoncer le théorème principal de cette section :

Théorème 4.1.7. *Prenons les mêmes hypothèses que pour la Proposition 4.1.6. Supposons également que $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$ et $\mathbf{f}_N \in L^2(\Gamma_N)$. Alors le Problème (4.4) admet une unique solution $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$. Cette solution est également l'unique minimiseur de $J(\cdot)$ (les Problèmes (4.4) et (4.2) sont en fait équivalents). De plus \mathbf{u} vérifie l'estimation a priori suivante :*

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\alpha} (\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{f}_N\|_{0,\Gamma_N}),$$

avec $C > 0$, et où $\alpha > 0$ est la constante de \mathbf{V} -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$.

Démonstration. L'existence et l'unicité d'une solution au Problème (4.4) est une conséquence de la Proposition 4.1.6 et du Théorème de Stampacchia 2.3.1. Le Théorème de Stampacchia garantit également l'équivalence entre les problèmes (4.2) et (4.4). L'estimation *a priori* est obtenue en prenant $\mathbf{v} = \mathbf{0}(\in \mathbf{K})$ dans l'inéquation variationnelle (4.4) :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq L(\mathbf{u})$$

puis en ayant recours à la \mathbf{V} -ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$ et à la continuité de $L(\cdot)$:

$$\alpha \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 \leq a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq \|L\| \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}.$$

En reprenant la définition de $L(\cdot)$, et par application de Cauchy-Schwarz et du Théorème de trace 2.2.1, il vient :

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq \frac{C}{\alpha} (\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{f}_N\|_{0,\Gamma_N}),$$

avec $C > 0$, ce qui termine la preuve. □

4.1.4 Régularité

Les problèmes de contact unilatéral sont limités en régularité, compte-tenu des conditions de Signorini sur la frontière de contact Γ_C : des singularités apparaissent aux points de transition entre adhésion et décollement. A ceci peuvent s'ajouter bien sûr toutes les singularités qui sont rencontrées pour des problèmes d'élasticité avec un bord polygonal ou polyédrique, et qui proviennent, par exemple, des données, des angles rentrants et des transitions Dirichlet-Neumann (voir par exemple [47, 48]).

De telles propriétés de régularité sont étudiées précisément dans l'article de Mohand Moussaoui et Khadidja Khodja [66] qui porte sur le problème de Signorini scalaire. On déduit d'études comme celles-ci que la régularité de Sobolev $(H^{\frac{5}{2}}(\Omega))^d$ est celle maximale (voir par exemple l'article de Guillaume Drouet et Patrick Hild [32] et les références citées). Cette limitation en régularité a des conséquences importantes au niveau numérique. Elle motive l'utilisation d'éléments finis d'ordre bas, comme les éléments de Lagrange linéaires et quadratiques.

4.2 Discrétisation par éléments finis

Nous allons maintenant nous intéresser à des méthodes numériques de type éléments finis pour la résolution du Problème (4.4). Diverses méthodes existent pour traiter les conditions de contact, dont certaines sont des extensions plus ou moins directes des méthodes que nous avons vu au chapitre précédent pour l'étude des conditions de Dirichlet. Nous faisons les mêmes choix ici que pour les conditions de Dirichlet. Nous allons d'abord étudier en détails deux méthodes. La première consiste en une approximation directe de l'inéquation variationnelle, sans traitement additionnel des conditions de contact, et elle correspond à la méthode "standard" que nous avons vue pour les conditions de Dirichlet non-homogènes. La deuxième est une méthode de Nitsche qui est également une extension de celle que nous avons vue précédemment. Nous terminerons ce chapitre avec un

panorama très superficiel des autres méthodes existantes. Nous reprenons, avec les adaptations nécessaires, le même cadre qu’au chapitre précédent pour la discrétisation par éléments finis de (4.4).

Soit donc $(\mathbf{V}^h)_{h>0}$ une famille d’espaces vectoriels de dimension finie [30, 37, 14] indicée par h , construite à partir d’une famille $(\mathcal{T}^h)_{h>0}$ de triangulations du domaine Ω . Pour un h donné, chaque élément $T \in \mathcal{T}^h$ est un simplexe. La taille du maillage h est définie comme suit :

$$h = \max_{T \in \mathcal{T}^h} h_T,$$

où h_T est le diamètre du simplexe T . Nous supposons que la famille de triangulations est régulière au sens de Ciarlet : il existe $\sigma > 0$ tel que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma, \quad \forall T \in \mathcal{T}^h,$$

où ρ_T désigne le rayon de la plus grande boule inscrite dans le simplexe T . Nous supposons de plus que la triangulation est conforme au découpage de la frontière en parties Γ_D , Γ_N et Γ_C : aucune face/arête du bord ne peut être partagée entre deux ou trois de ces parties. On considère bien sûr ici chaque simplexe T comme étant un fermé de \mathbb{R}^d . Nous choisissons un espace d’éléments finis de Lagrange de degré $k = 1, 2$:

$$\mathbf{V}^h := \left\{ \mathbf{v}^h \in (\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}))^d \mid \mathbf{v}^h|_T \in (\mathbb{P}_k(T))^d, \forall T \in \mathcal{T}^h \right\}. \quad (4.16)$$

4.3 La méthode “standard” via l’inéquation variationnelle

Nous décrivons ici la méthode la plus simple pour obtenir un problème discret à partir de (4.4). Cette méthode est rarement utilisée en pratique car, même si le problème obtenu dans notre cadre simplifié peut être résolu ici, elle s’étend mal à des problèmes de contact plus complexes. Elle a surtout un intérêt théorique, car de toutes façons elle concentre les difficultés importantes que l’on trouve dans l’analyse numérique de ce type d’inéquations variationnelles, et qui apparaissent également dans l’analyse numérique de la plupart des autres méthodes.

Nous commencerons par décrire la méthode, puis effectuerons son analyse : nous montrerons que le problème discret obtenu est bien posé, et, surtout, dériverons une estimation d’erreur en norme H^1 . Nous terminerons sur quelques mots concernant l’implémentation de cette méthode. Nous allons nous restreindre ici à des éléments de Lagrange linéaires et supposons donc : $k = 1$.

4.3.1 Description

Posons

$$\mathbf{K}^h := \mathbf{K} \cap \mathbf{V}^h,$$

et introduisons le Problème discret suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u}^h \in \mathbf{K}^h \text{ telle que :} \\ a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) \geq L(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{K}^h. \end{cases} \quad (4.17)$$

Ici, nous avons tout simplement discrétisé l'inéquation variationnelle, en introduisant un sous-ensemble de dimension finie du convexe \mathbf{K} qui contient les déplacements cinématiquement admissibles. De même que pour la formulation continue (4.4) le Problème (4.17) équivaut à trouver le minimiseur sur \mathbf{K}^h de la fonctionnelle $J(\cdot)$. La méthode peut être dite conforme car $\mathbf{K}^h \subset \mathbf{K}$. Elle est consistante car nous vérifions :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}) \geq L(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}), \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{K}^h,$$

pour \mathbf{u} solution du Problème (4.4).

4.3.2 Analyse mathématique

Comme $\mathbf{K}^h \subset \mathbf{K}$ est un convexe fermé non-vidé, et que $a(\cdot, \cdot)$ et $L(\cdot)$ ont les mêmes propriétés sur \mathbf{K}^h que sur \mathbf{K} , nous pouvons appliquer à nouveau le Théorème de Stampacchia 2.3.1. En conséquence, le Problème (4.17) est bien posé : il admet une unique solution \mathbf{u}^h .

Nous allons maintenant dériver une estimation abstraite de l'erreur de discrétisation en norme H^1 :

Théorème 4.3.1. *Supposons que la solution \mathbf{u} du Problème (4.4) appartienne à $(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega))^d$ avec $\nu > 0$. Alors la solution \mathbf{u}^h du Problème (4.17) vérifie l'estimation a priori suivante :*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{\mathbf{v}^h \in \mathbf{K}^h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{1,\Omega} + \left(\int_{\Omega} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n^h - u_n) \right)^{\frac{1}{2}} \right), \quad (4.18)$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de h et de \mathbf{u} .

Démonstration. Soit $\mathbf{v}^h \in \mathbf{K}^h$. Utilisons d'abord la \mathbf{V} -ellipticité et la continuité de $a(\cdot, \cdot)$, combinées aux inégalités de Cauchy-Schwarz et d'Young, pour obtenir :

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega}^2 &\leq a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, (\mathbf{u} - \mathbf{v}^h) + (\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)) \\ &\leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{1,\Omega} + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h), \end{aligned}$$

puis :

$$\frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{C^2}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{1,\Omega}^2 + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) - a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h), \quad (4.19)$$

où $\alpha > 0$ est la constante d'ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$. Comme \mathbf{v}^h est dans \mathbf{K}^h , et \mathbf{u}^h est solution de (4.17), nous avons déjà :

$$-a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) \leq -L(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h).$$

Par ailleurs, en utilisant la formule de Green (4.5), nous obtenons :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) = L(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) + \int_{\Omega} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n^h - u_n^h).$$

Ce qui nous donne avec (4.19) :

$$\frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{C^2}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{1,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n^h - u_n^h).$$

Ecrivons le dernier terme de cette estimation comme suit :

$$\int_{\Omega} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n^h - u_n^h) = \int_{\Omega} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n^h - u_n) + \int_{\Omega} \sigma_n(\mathbf{u})u_n - \int_{\Omega} \sigma_n(\mathbf{u})u_n^h.$$

Nous utilisons alors les conditions de contact (4.6), et la propriété $u_n^h \leq 0$ ($\mathbf{u}^h \in \mathbf{K}^h$) qui vont impliquer :

$$\int_{\Omega} \sigma_n(\mathbf{u})u_n = 0, \quad - \int_{\Omega} \sigma_n(\mathbf{u})u_n^h \leq 0.$$

Nous obtenons finalement :

$$\frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega}^2 \leq \frac{C^2}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{1,\Omega}^2 + \int_{\Omega} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n^h - u_n),$$

ce qui donne l'estimation d'erreur souhaitée. \square

Le taux de convergence pour des éléments de Lagrange linéaire est donné ci-dessous :

Théorème 4.3.2. *Supposons que la solution \mathbf{u} du Problème (4.4) appartienne à $(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega))^d$, avec $0 < \nu \leq 1/2$. Alors la solution \mathbf{u}^h du Problème (4.17) satisfait à l'estimation d'erreur suivante :*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\frac{\nu}{2}} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega}, \quad (4.20)$$

avec $C > 0$ une constante, indépendante de h et \mathbf{u} .

Preuve : Nous devons majorer les deux termes de droite dans l'estimation (4.18) et nous choisissons alors $\mathbf{v}^h = \mathcal{I}^h \mathbf{u}$ où \mathcal{I}^h désigne l'interpolateur de Lagrange sur \mathbf{V}^h . La régularité de \mathbf{u} assure en effet qu'elle est continue et qu'on puisse prendre son interpolée de Lagrange. De plus, nous avons bien $\mathcal{I}^h \mathbf{u} \in \mathbf{K}^h$ car $\mathbf{u} \in \mathbf{K}$ et les éléments finis considérés sont linéaires : \mathcal{I}^h préserve alors le signe sur le bord Γ_C , autrement dit :

$$(\mathcal{I}^h(u))_n \leq 0.$$

L'estimation de l'erreur en norme H^1 dans le domaine Ω sur l'interpolée de Lagrange est obtenue à partir de la Proposition 3.2.1 :

$$\|\mathbf{u} - \mathcal{I}^h \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\nu} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega} \quad (4.21)$$

pour $-1/2 < \nu \leq 1/2$. Pour le deuxième terme de (4.18), on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que l'estimation de l'erreur d'interpolation sur la trace (voir à nouveau la Proposition 3.2.1) :

$$\int_{\Gamma} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n^h - u_n) \leq \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{0,\Gamma} \|(\mathcal{I}^h(u))_n - u_n\|_{0,\Gamma} \leq \|\sigma_n(\mathbf{u})\|_{0,\Gamma} Ch^{1+\nu} \|u_n\|_{1+\nu,\Gamma}$$

où nous avons à nouveau utilisé la propriété 3.8. et donc :

$$\left(\int_{\Gamma} \sigma_n(\mathbf{u})(v_n^h - u_n) \right)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^{\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2} + \nu, \Omega}.$$

En combinant ce résultat avec (4.21), nous obtenons bien (4.20). \square

Remarque 4.3.3. *Remarquons ici que le taux d'erreur obtenu est sous-optimal : par exemple pour une solution de régularité H^2 , le taux d'erreur obtenu est $O(h^{\frac{3}{4}})$ au lieu de $O(h)$. Il faut raffiner considérablement l'analyse si on souhaite retrouver le taux optimal tout en faisant un minimum d'hypothèses sur la solution \mathbf{u} (voir l'article de Guillaume Drouot et Patrick Hild [32] et les références citées pour d'avantage de détails).*

Remarque 4.3.4. *Il est en général très difficile d'obtenir des estimations d'erreur en norme L^2 pour ce type d'inéquation variationnelle, et cela reste dans une assez large mesure un problème ouvert. On pourra néanmoins consulter [31] et [82] pour des premiers résultats partiels.*

4.3.3 Implémentation

En général, la méthode étudiée ici ne sert que pour l'analyse. On ne l'implémente pas telle qu'elle car l'ensemble \mathbf{K}^h n'est pas très commode à manier. La plupart des méthodes numériques pour le contact passent par une reformulation des conditions de Signorini (pénalité, mixte, lagrangien augmenté, Nitsche, etc), qui donnent des méthodes plus souples et plus efficaces pour résoudre des problèmes plus complexes.

Toutefois, on peut voir ici ce problème comme un problème discret de minimisation d'une fonctionnelle quadratique sous contraintes d'inégalités, et utiliser une méthode dédiée, par exemple une méthode itérative de type sur-relaxation : voir [45, Section 4.6.1] ou encore [59, Chapter 6] à ce sujet.

4.4 La méthode de Nitsche pour Signorini

Nous allons voir que la méthode de Nitsche présentée au chapitre précédent pour une condition de Dirichlet non-homogène peut être adaptée pour les conditions de Signorini vues ici. Nous détaillons tout d'abord un procédé pour obtenir la formulation faible discrète, puis nous passerons à l'analyse de la méthode. Nous retrouverons à nouveau un problème discret bien posé si le paramètre de Nitsche est choisi comme étant suffisamment grand. Contrairement à la méthode "standard" vue précédemment, la convergence optimale en norme H^1 peut être obtenue sans difficulté majeure, car il n'apparaît pas de terme dans l'estimation abstraite qui soit compliqué à majorer de façon optimale. Nous terminerons cette section avec quelques remarques sur la résolution effective du problème discrétisé et son implémentation.

4.4.1 Dérivation

Introduisons la notation $[\cdot]_{\mathbb{R}^-}$ pour la projection sur l'ensemble des réels négatifs :

$$[a]_{\mathbb{R}^-} = \begin{cases} a & \text{si } a < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous utiliserons par la suite les propriétés suivantes :

$$[a]_{\mathbb{R}^-} \leq a, \quad a[a]_{\mathbb{R}^-} = [a]_{\mathbb{R}^-}^2, \quad \forall a \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

Nous en déduisons en particulier la propriété de monotonie ci-dessous, qui est en fait une propriété des projections sur un ensemble convexe :

$$\begin{aligned} ([a]_{\mathbb{R}^-} - [b]_{\mathbb{R}^-})(a - b) &= a[a]_{\mathbb{R}^-} + b[b]_{\mathbb{R}^-} - b[a]_{\mathbb{R}^-} - a[b]_{\mathbb{R}^-} \\ &\geq [a]_{\mathbb{R}^-}^2 + [b]_{\mathbb{R}^-}^2 - 2[a]_{\mathbb{R}^-}[b]_{\mathbb{R}^-} \\ &= ([a]_{\mathbb{R}^-} - [b]_{\mathbb{R}^-})^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

La méthode de Nitsche repose ici sur l'observation fondamentale suivante, qui est une reformulation des conditions de contact (4.6) (voir par exemple, [2]) :

Proposition 4.4.1. *Soit $\gamma_N > 0$. Les conditions de contact (4.6) (i)-(iii) sur Γ_C sont équivalentes à :*

$$\sigma_n(\mathbf{u}) = [\sigma_n(\mathbf{u}) - \gamma_N u_n]_{\mathbb{R}^-}. \quad (4.24)$$

En suivant la même approche que précédemment, nous allons obtenir la méthode de Nitsche pour les conditions de Signorini en écrivant la condition d'optimalité du premier ordre associée à la fonctionnelle :

$$J_N(\mathbf{u}^h) := J(\mathbf{u}^h) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \sigma_n(\mathbf{u}^h)^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} [\sigma_n(\mathbf{u}) - \gamma_N u_n]_{\mathbb{R}^-}^2.$$

La condition d'optimalité du premier ordre s'écrit :

$$\langle J'_N(\mathbf{u}^h), \mathbf{v}^h \rangle = 0,$$

pour tout \mathbf{v}^h dans \mathbf{V}^h , avec

$$\begin{aligned} \langle J'_N(\mathbf{u}^h), \mathbf{v}^h \rangle &= a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - L(\mathbf{v}^h) - \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \sigma_n(\mathbf{u}^h) \sigma_n(\mathbf{v}^h) \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} [\sigma_n(\mathbf{u}) - \gamma_N u_n]_{\mathbb{R}^-} (\sigma_n(\mathbf{v}^h) - \gamma_N v_n). \end{aligned}$$

Comme dans le chapitre précédent, nous allons considérer que γ_N est une fonction discrète sur Γ , constante par morceaux, qui s'écrit sous la forme suivante sur chaque arête/face du bord :

$$\gamma_N|_{T \cap \Gamma} := \frac{\gamma_0}{h_T},$$

avec T un simplexe dont l'intersection avec le bord est non-vide. Nous avons à nouveau $\gamma_0 > 0$ qui est le paramètre de Nitsche. Introduisons l'opérateur linéaire

$$\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}} : \begin{array}{l} \mathbf{V}^h \rightarrow L^2(\Gamma_C) \\ \mathbf{v}^h \mapsto \sigma_n(\mathbf{v}^h) - \gamma_N v_n^h, \end{array}$$

et la forme bilinéaire

$$A_N(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) := a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \sigma_n(\mathbf{u}^h) \sigma_n(\mathbf{v}^h).$$

La méthode de Nitsche pour le problème de Signorini s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h \text{ tel que :} \\ A_N(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} [\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h)]_{\mathbb{R}^-} \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h) = L(\mathbf{v}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

Remarque 4.4.2. *Pour comprendre d'avantage le lien entre cette formulation et celle proposée au chapitre précédent pour la condition de Dirichlet, rappelons-nous que pour la condition de Dirichlet, la fonctionnelle proposée par Joachim A. Nitsche est la suivante :*

$$J_N(v^h) = J(v^h) - \int_{\Gamma} (v^h - g) \partial_{\mathbf{n}} v^h + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \gamma_N (v^h - g)^2.$$

En rajoutant à cette fonctionnelle

$$-\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{\gamma_N} (\partial_{\mathbf{n}} v^h)^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{\gamma_N} (\partial_{\mathbf{n}} v^h)^2,$$

puis en factorisant l'expression obtenue, il vient :

$$J_N(v^h) = J(v^h) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{\gamma_N} (\partial_{\mathbf{n}} v^h)^2 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{1}{\gamma_N} \left(\partial_{\mathbf{n}} v^h - \gamma_N (v^h - g) \right)^2,$$

qui est similaire à la fonctionnelle introduite pour les conditions de Signorini, à ceci près que l'opérateur de projection sur les réels négatifs a été remplacé ici par l'identité. En effet, la condition de Dirichlet homogène $u = g$ sur Γ peut également s'écrire :

$$\partial_{\mathbf{n}} u = \partial_{\mathbf{n}} u - \gamma_N (u - g).$$

Ces formulations de type Nitsche sont par ailleurs très reliées aux formulations de type lagrangien augmenté.

La méthode proposée ici n'est pas conforme, car la fonction \mathbf{u}^h recherchée n'appartient pas nécessairement à l'ensemble \mathbf{K} . Par contre, elle est consistante, comme nous allons le voir par la suite. Nous allons de toutes façons retrouver les mêmes propriétés que pour le problème de Dirichlet non-homogène. En particulier, nous allons pouvoir montrer que cette méthode converge en norme H^1 avec le taux optimal, ce que nous n'avons pas pu faire ici pour la méthode précédente.

Remarque 4.4.3. *Comme pour le problème de Dirichlet, on peut introduire des variantes non-symétrique / anti-symétrique à l'aide d'un paramètre $\theta \in \mathbb{R}$, voir [28] à ce sujet.*

4.4.2 Analyse mathématique

Nous établissons tout d'abord la consistance de la méthode (4.25) ci-dessous :

Lemme 4.4.4. *La méthode de Nitsche pour le contact (4.25) est consistante : en supposant que la solution \mathbf{u} de (4.1)–(4.6) est dans $(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega))^d$, avec $\nu > 0$, alors \mathbf{u} vérifie également*

$$A_N(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} [\mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{u})]_{\mathbb{R}^-} \mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{v}^h) = L(\mathbf{v}^h), \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h.$$

Démonstration. Comme $\mathbf{u} \in (H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega))^d$ et $\nu > 0$, nous avons $\sigma_n(\mathbf{u}) \in H^\nu(\Gamma_C) \subset L^2(\Gamma_C)$. En conséquence, $\mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{u}) \in L^2(\Gamma_C)$ et $A_N(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h)$ sont convenablement définis. D'un côté, nous utilisons les définitions de $\mathbf{P}_{1,N}^n(\cdot)$ et $A_N(\cdot, \cdot)$ ainsi que la reformulation (4.24) des conditions de contact et obtenons :

$$\begin{aligned} & A_N(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} [\mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{u})]_{\mathbb{R}^-} \mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{v}^h) \\ &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) - \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \sigma_n(\mathbf{u}) \sigma_n(\mathbf{v}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \sigma_n(\mathbf{u}) (\sigma_n(\mathbf{v}^h) - \gamma_N v_n^h) \\ &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) - \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}) v_n^h. \end{aligned}$$

D'un autre côté, nous vérifions :

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h) - \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}) v_n^h = L(\mathbf{v}^h),$$

ce qui nous permet de conclure la preuve. \square

Remarque 4.4.5. *Cette propriété de consistance joue un rôle crucial dans la preuve de l'estimation d'erreur a priori, et nous avons pu l'établir aisément lorsque la régularité \mathbf{u} de la solution du problème de Signorini est au-dessus de $(H^{\frac{3}{2}}(\Omega))^d$. L'analyse numérique de la méthode de Nitsche (4.25) pour des régularités de Sobolev inférieures à $\frac{3}{2}$ reste un problème ouvert.*

Pour montrer que la formulation à la Nitsche du problème de Signorini est bien posée, nous avons besoin du lemme préliminaire suivant que nous rappelons ici, et dont la preuve est analogue à celle du Lemme 3.4.3 vu au chapitre précédent.

Lemme 4.4.6. *L'inégalité de trace discrète suivante a lieu :*

$$\|\sigma_n(\mathbf{v}^h)\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \leq C \|\mathbf{v}^h\|_{1,\Omega} \tag{4.26}$$

pour tout $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$. De plus, si on suppose que γ_0 est suffisamment grand, la forme bilinéaire $A_N(\cdot, \cdot)$ est elliptique sur \mathbf{V}^h : il existe une constante $\alpha > 0$, indépendante du paramètre γ_0 et de la taille du maillage h , telle que :

$$A_N(\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^h) \geq \alpha \|\mathbf{v}^h\|_{1,\Omega}^2,$$

pour tout $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$.

Montrons maintenant que le Problème (4.25) est bien posé en utilisant un argument de Haïm Brezis pour les opérateurs de type M [15] (voir également [63] et [60]). Nous rappelons brièvement cet argument ci-dessous. Nous avons d'abord besoin de la définition de l'hémi-continuité pour un opérateur :

Définition 4.4.7. *Soit E un espace de Banach réflexif, E' son dual topologique, et $X \subset E$ un ensemble convexe. L'opérateur $A : X \rightarrow E'$ est hémicontinu si, pour tout couple $(x, y) \in X^2$, l'application*

$$[0, 1] \ni t \mapsto \langle A(x - tx + ty), x - y \rangle_{E', E} \in \mathbb{R}$$

est continue.

Pour montrer notre résultat, nous allons avoir besoin du Corollaire 15 (p.126) de [15], que nous rappelons ci-dessous, sous une forme légèrement simplifiée :

Théorème 4.4.8. *Soit E un espace de Banach réflexif et $A : E \rightarrow E'$ un opérateur hémicontinu. Nous supposons qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout couple $(x, y) \in E^2$*

$$\langle A(x) - A(y), x - y \rangle_{E', E} \geq c \|x - y\|^2.$$

Alors A est un opérateur bijectif de E vers son dual E' .

Nous pouvons maintenant démontrer :

Théorème 4.4.9. *Supposons que γ_0 soit suffisamment grand. Alors le Problème (4.25) admet une unique solution \mathbf{u}^h dans \mathbf{V}^h .*

Preuve : En utilisant le Théorème de représentation de Riesz, nous définissons l'opérateur non-linéaire $\mathbf{B}^h : \mathbf{V}^h \rightarrow \mathbf{V}^h$, par le biais de la formule suivante :

$$(\mathbf{B}^h \mathbf{v}^h, \mathbf{w}^h)_{1, \Omega} = A_N(\mathbf{v}^h, \mathbf{w}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left[\mathbf{P}_{1, N}^n(\mathbf{v}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} \mathbf{P}_{1, N}^n(\mathbf{w}^h),$$

pour $\mathbf{v}^h, \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h$. Remarquons que le Problème (4.25) est bien posé si et seulement si \mathbf{B}^h est un opérateur bijectif.

Soient $\mathbf{v}^h, \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h$, en utilisant la propriété (4.23) puis le Lemme 4.4.6, il vient :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{B}^h \mathbf{v}^h - \mathbf{B}^h \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}^h)_{1, \Omega} \\ &= A_N(\mathbf{v}^h - \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left(\left[\mathbf{P}_{1, N}^n(\mathbf{v}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} - \left[\mathbf{P}_{1, N}^n(\mathbf{w}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} \right) \mathbf{P}_{1, N}^n(\mathbf{v}^h - \mathbf{w}^h) \\ &\geq A_N(\mathbf{v}^h - \mathbf{w}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{w}^h) \\ &\geq \alpha \|\mathbf{v}^h - \mathbf{w}^h\|_{1, \Omega}^2. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ensuite montrons que \mathbf{B}^h est hémicontinu. Puisque \mathbf{V}^h est un espace vectoriel, il suffit de montrer que

$$[0, 1] \ni t \mapsto \varphi(t) = (\mathbf{B}^h(\mathbf{v}^h - t\mathbf{w}^h), \mathbf{w}^h)_{1, \Omega} \in \mathbb{R}$$

est une fonction réelle continue, pour $\mathbf{v}^h, \mathbf{w}^h \in \mathbf{V}^h$. Soient $s, t \in [0, 1]$, nous majorons :

$$\begin{aligned}
& |\varphi(t) - \varphi(s)| \\
&= |(\mathbf{B}^h(\mathbf{v}^h - t\mathbf{w}^h) - \mathbf{B}^h(\mathbf{v}^h - s\mathbf{w}^h), \mathbf{w}^h)_{1,\Omega}| \\
&= \left| A_N((s-t)\mathbf{w}^h, \mathbf{w}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left(\left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - t\mathbf{w}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - s\mathbf{w}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} \right) \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{w}^h) \right| \\
&\leq |s-t| A_N(\mathbf{w}^h, \mathbf{w}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left| \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - t\mathbf{w}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - s\mathbf{w}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} \right| |\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{w}^h)|.
\end{aligned}$$

En utilisant la relation $|[a]_{\mathbb{R}^-} - [b]_{\mathbb{R}^-}| \leq |a - b|$, pour $a, b \in \mathbb{R}$, et la linéarité de $\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\cdot)$, nous remarquons alors :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left| \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - t\mathbf{w}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - s\mathbf{w}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} \right| |\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{w}^h)| \\
&\leq \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left| \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - t\mathbf{w}^h) - \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - s\mathbf{w}^h) \right| |\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{w}^h)| \\
&= \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} |(s-t)\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{w}^h)| |\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{w}^h)| \\
&= |s-t| \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left(\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{w}^h) \right)^2.
\end{aligned}$$

Nous en concluons :

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq |s-t| \left(A_N(\mathbf{w}^h, \mathbf{w}^h) + \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{w}^h)\|_{0,\Gamma_C}^2 \right),$$

ce qui signifie que φ est Lipschitz, et donc \mathbf{B}^h est hemicontinu. Puisque la propriété (4.27) est également vérifiée, nous appliquons le Théorème 4.4.8 pour en déduire que \mathbf{B}^h est un opérateur bijectif. \square

En ce qui concerne la convergence, nous montrons tout d'abord une estimation d'erreur abstraite :

Théorème 4.4.10. *Supposons que la solution \mathbf{u} du Problème (4.4) appartienne à $(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega))^d$, avec $\nu > 0$. Supposons également que le paramètre γ_0 soit suffisamment grand. Alors la solution \mathbf{u}^h du Problème (4.25) vérifie l'estimation d'erreur a priori suivante :*

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} + \gamma_0^{-\frac{1}{2}} \left\| \left[\sigma_n(\mathbf{u}) - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} \right] \right\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \\
&\leq C \inf_{\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h} \left(\|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{1,\Omega} + \gamma_0^{\frac{1}{2}} \|u_n - v_n^h\|_{\frac{1}{2},h,\Gamma_C} + \gamma_0^{-\frac{1}{2}} \|\sigma_n(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h)\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \right),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de h et \mathbf{u} .

Preuve : Soit $\mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h$. Nous utilisons tout d'abord la \mathbf{V} -ellipticité et la continuité de $a(\cdot, \cdot)$, ainsi que l'inégalité d'Young, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega}^2 &\leq a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \\
&= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, (\mathbf{u} - \mathbf{v}^h) + (\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)) \\
&\leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{1,\Omega} + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) \\
&\leq \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega}^2 + \frac{C^2}{2\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{1,\Omega}^2 + a(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) - a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h), \quad (4.29)
\end{aligned}$$

où $\alpha > 0$ est la constante d'ellipticité de $a(\cdot, \cdot)$.

Comme \mathbf{u} et \mathbf{u}^h sont solutions respectives de (4.4) et (4.25), et en utilisant la consistance de la méthode, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
&a(\mathbf{u}, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) - a(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) \\
&= \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}) (v_n^h - u_n^h) - \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \sigma_n(\mathbf{u}^h) \sigma_n(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) \\
&= \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left(\left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) \right]_{\mathbb{R}^-} \right) \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) - \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}^h - \mathbf{u}) \sigma_n(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) \\
&= \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left(\left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) \right]_{\mathbb{R}^-} \right) \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}) \\
&\quad + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left(\left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) \right]_{\mathbb{R}^-} \right) \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \\
&\quad - \int_{\Gamma_C} \sigma_n(\mathbf{u}^h - \mathbf{u}) \sigma_n(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h). \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Nous majorons le premier terme de (4.30) en utilisant (4.24), puis les inégalités de Cauchy-Schwarz et d'Young :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left(\left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) \right]_{\mathbb{R}^-} \right) \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}) \\
&\leq \frac{1}{2} \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} (\sigma_n(\mathbf{u}) - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h) \right]_{\mathbb{R}^-})\|_{0,\Gamma_C}^2 + \frac{1}{2} \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{v}^h - \mathbf{u})\|_{0,\Gamma_C}^2 \\
&\leq \frac{1}{2} \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} (\sigma_n(\mathbf{u}) - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h) \right]_{\mathbb{R}^-})\|_{0,\Gamma_C}^2 + \|\gamma_N^{\frac{1}{2}} (u_n - v_n^h)\|_{0,\Gamma_C}^2 + \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \sigma_n(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h)\|_{0,\Gamma_C}^2. \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Nous estimons le deuxième terme de (4.30) en utilisant aussi (4.24) combiné à (4.23) :

$$\int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \left(\left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h) \right]_{\mathbb{R}^-} - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}) \right]_{\mathbb{R}^-} \right) \mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \leq -\|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} (\sigma_n(\mathbf{u}) - \left[\mathbf{P}_{1,N}^{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^h) \right]_{\mathbb{R}^-})\|_{0,\Gamma_C}^2. \quad (4.32)$$

Pour le troisième terme de (4.30), nous utilisons (4.26) et une inégalité d'Young :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} \sigma_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h) \sigma_n(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h) \\
& \leq \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \sigma_n(\mathbf{u} - \mathbf{u}^h)\|_{0,\Gamma_C} \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \sigma_n(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)\|_{0,\Gamma_C} \\
& \leq C \gamma_0^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} \left(\|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \sigma_n(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h)\|_{0,\Gamma_C} + \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \sigma_n(\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h)\|_{0,\Gamma_C} \right) \\
& \leq C \left(\frac{1}{\gamma_0} \|\mathbf{v}^h - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega}^2 + \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \sigma_n(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h)\|_{0,\Gamma_C}^2 \right) \\
& \leq C \left(\frac{1}{\gamma_0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{\gamma_0} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{1,\Omega}^2 + \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \sigma_n(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h)\|_{0,\Gamma_C}^2 \right). \tag{4.33}
\end{aligned}$$

Regroupons finalement les estimations (4.30), (4.31), (4.32), (4.33) avec (4.29) :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{C}{\gamma_0} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \left\| \gamma_N^{-\frac{1}{2}} \left(\sigma_n(\mathbf{u}) - [\mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{u}^h)]_{\mathbb{R}^-} \right) \right\|_{0,\Gamma_C}^2 \\
& \leq \left(\frac{C^2}{2\alpha} + \frac{C}{\gamma_0} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{v}^h\|_{1,\Omega}^2 + \|\gamma_N^{\frac{1}{2}}(u_n - v_n^h)\|_{0,\Gamma_C}^2 + (C+1) \|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \sigma_n(\mathbf{u} - \mathbf{v}^h)\|_{0,\Gamma_C}^2,
\end{aligned}$$

où C est la constante dans (4.33). Pour obtenir l'estimation (4.28), il suffit de prendre γ_0 suffisamment grand. \square

Contrairement à la méthode "standard" précédente, où il est difficile de montrer une convergence optimale, nous pouvons ici y parvenir sans réelle difficulté, pour des éléments linéaires comme pour des éléments quadratiques :

Théorème 4.4.11. *Supposons que la solution \mathbf{u} du Problème (4.4) appartienne à $(H^{\frac{3}{2}+\nu}(\Omega))^d$ avec $0 < \nu \leq k - 1/2$ ($k \geq 1$ est le degré des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_k). Supposons aussi que le paramètre de Nitsche γ_0 soit suffisamment grand. Alors la solution \mathbf{u}^h du Problème (4.25) vérifie l'estimation a priori suivante :*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{1,\Omega} + \gamma_0^{-\frac{1}{2}} \left\| \sigma_n(\mathbf{u}) - [\mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{u}^h)]_{\mathbb{R}^-} \right\|_{-\frac{1}{2},h,\Gamma_C} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\nu} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega}, \tag{4.34}$$

avec $C > 0$ une constante indépendante de h et \mathbf{u} .

Démonstration. Nous procédons exactement comme pour la preuve du Corollaire 3.4.8. Nous devons majorer les termes de droite dans l'estimateur (4.28) et nous choisissons $\mathbf{v}^h = \mathcal{I}^h \mathbf{u}$. Les deux premiers termes sont majorés en utilisant la Proposition 3.2.1 :

$$\|\mathbf{u} - \mathcal{I}^h \mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\nu} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega}, \tag{4.35}$$

et

$$\|\gamma_N^{\frac{1}{2}}(u_n - (\mathcal{I}^h \mathbf{u})_n)\|_{0,\Gamma_C} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\nu} \|u_n\|_{1+\nu,\Gamma_C} \leq Ch^{\frac{1}{2}+\nu} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2}+\nu,\Omega}. \tag{4.36}$$

En suivant de nouveau l'argument proposé dans [43, 42], l'estimation suivante peut être faite :

$$\|\gamma_N^{-\frac{1}{2}} \sigma_n(\mathbf{u} - \mathcal{I}^h \mathbf{u})\|_{0, \Gamma_C} \leq Ch^{\frac{1}{2} + \nu} \|\mathbf{u}\|_{\frac{3}{2} + \nu, \Omega}. \quad (4.37)$$

Nous obtenons l'estimation souhaitée en insérant (4.35)–(4.37) dans l'expression (4.28). \square

4.4.3 Implémentation

Le Problème (4.25) est non-linéaire, et doit être résolu itérativement, par exemple à l'aide d'une méthode de Newton généralisée [78]. Le problème tangent qui doit être résolu à chaque itération s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta \mathbf{u}^h \in \mathbf{V}^h \text{ tel que :} \\ A_N(\delta \mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) - \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} H(-\mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{u}^h)) \mathbf{P}_{1,N}^n(\delta \mathbf{u}^h) \mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{v}^h) = -R(\mathbf{u}^h; \mathbf{v}^h) \quad \forall \mathbf{v}^h \in \mathbf{V}^h. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

où $H(\cdot)$ est la fonction de Heaviside, et où le résidu associé à l'approximation déjà calculée \mathbf{u}^h s'écrit :

$$R(\mathbf{u}^h; \mathbf{v}^h) := A_N(\mathbf{u}^h, \mathbf{v}^h) + \int_{\Gamma_C} \frac{1}{\gamma_N} [\mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{u}^h)]_{\mathbb{R}^-} \mathbf{P}_{1,N}^n(\mathbf{v}^h) - L(\mathbf{v}^h).$$

Il suffit ensuite de remettre à jour \mathbf{u}^h en lui ajoutant $\delta \mathbf{u}^h$.

Si on rencontre un point de non-différentiabilité, qui correspond à une évaluation en 0 de $H(\cdot)$ (qui est multi-valué en ce point), il suffit de choisir librement une valeur de $H(0)$ entre 0 et 1 (c'est le principe des méthodes de Newton pour les problèmes semi-lisses). Pour résoudre le Problème tangent (4.38), il suffit d'utiliser les méthodes standard pour l'assemblage et la résolution du système matriciel. On pourra trouver une implémentation complète de la méthode dans la librairie éléments finis GetFEM++ par exemple (voir http://getfem.org/userdoc/model_Nitsche.html).

4.5 Revue succincte des autres méthodes

Tout comme pour les conditions de Dirichlet, d'autres méthodes ont été proposées pour résoudre le problème de Signorini, et les problèmes de contact en général. Nous pouvons en faire un panorama bref et lacunaire, et mentionner au moins, entre autres :

- Les méthodes de type nodal, très utilisées pour les calculs en génie mécanique : voir par exemple les livres de Tod Laursen [62] et Peter Wriggers [86].
- Les méthodes de pénalité, proposées et étudiées initialement par John T. Oden et ses collègues : voir [69, 60, 71, 70, 59], et plus récemment [23, 27].
- Les méthodes mixtes et de type mortar : voir par exemple les articles de Faker Ben Belgacem, Patrick Hild, Patrick Laborde, Yves Renard, Barbara Wohlmuth (voir donc, entre autres [52, 53, 12, 55, 61, 85]).

- Les méthodes stabilisées : voir l'article de Patrick Hild et Yves Renard [54], et les travaux récents d'Erik Burman, de Peter Hansbo et leurs collègues [22, 51].
- Les méthodes de type LAC ("Local Average Contact") : voir le travail récent de Guillaume Drouet et Patrick Hild [33].

Les premières méthodes proposées datent des années 1970 ou 1980, mais, comme on peut le voir avec certaines références très récentes, la mise au point de nouvelles méthodes avec de bonnes propriétés mathématiques et de bonnes performances numériques reste un sujet encore ouvert et très actif.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Nous avons vu dans ce cours les techniques de base pour imposer certains types de conditions aux limites dans le cadre de la MEF, ainsi que leur analyse mathématique. De nombreux aspects n'ont malheureusement pas pu être détaillés, et le lecteur intéressé pourra trouver des informations utiles dans les ouvrages et articles sur le sujet cités dans la bibliographie.

En particulier, les techniques mentionnées dans ce cours peuvent présenter un intérêt pour les méthodes de type "domaines fictifs" ou "frontières immergées". Pour ces méthodes, le maillage ne correspond pas au domaine physique, ce qui est très bien adapté pour les problèmes avec des changements de topologie importants au cours du temps, comme par exemple les problèmes d'interaction fluide-structure. On traite alors la plupart du temps les conditions limites ou d'interface avec de la pénalité [75], ou sinon une approche mixte qui fait intervenir un multiplicateur de Lagrange [7]. Plus récemment, des techniques basées sur la méthode de Nitsche ont été proposées pour ce type de problème [3, 20].

Par ailleurs, les techniques présentées, ou évoquées, pour le problème de Signorini s'étendent à des problèmes de contact et de frottement plus complexes : grandes transformations élastiques, contact entre plusieurs corps élastiques, contact en dynamique, contact avec frottement de Coulomb. On pourra trouver une présentation de ces différents problèmes, ainsi que de certaines techniques pour les résoudre, dans les ouvrages ou articles de revue suivants : [25, 59, 85].

Bibliographie

- [1] R.-A. ADAMS, *Sobolev spaces*, vol. 65 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York-London, 1975.
- [2] P. ALART AND A. CURNIER, *A generalized Newton method for contact problems with friction*, J Mec. Theor. Appl., 7 (1988), pp. 67–82.
- [3] F. ALAUZET, B. FABRÈGES, M. A. FERNÁNDEZ, AND M. LANDAJUELA, *Nitsche-XFEM for the coupling of an incompressible fluid with immersed thin-walled structures*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 301 (2016), pp. 300–335.
- [4] J. ALBERTY, C. CARSTENSEN, AND S. A. FUNKEN, *Remarks around 50 lines of Matlab : short finite element implementation*, Numer. Algorithms, 20 (1999), pp. 117–137.
- [5] G. ALLAIRE, *Numerical analysis and optimization*, Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, Oxford, 2007. An introduction to mathematical modelling and numerical simulation, Translated from the French by Alan Craig.
- [6] D. ARNOLD, *An interior penalty finite element method with discontinuous elements*, SIAM J. Numer. Anal., 19 (1982), pp. 742–760.
- [7] F. P. T. BAAIJENS, *A fictitious domain/mortar element method for fluid-structure interaction*, Internat. J. Numer. Methods Fluids, 35 (2001), pp. 743–761.
- [8] I. BABUŠKA, *The finite element method with Lagrangian multipliers*, Numer. Math., 20 (1972/73), pp. 179–192.
- [9] ———, *The finite element method with penalty*, Math. Comp., 27 (1973), pp. 221–228.
- [10] H. J. C. BARBOSA AND T. J. R. HUGHES, *Boundary Lagrange multipliers in finite element methods : error analysis in natural norms*, Numer. Math., 62 (1992), pp. 1–15.
- [11] J. W. BARRETT AND C. M. ELLIOTT, *Finite element approximation of the Dirichlet problem using the boundary penalty method*, Numerische Mathematik, 49 (1986), pp. 343–366.
- [12] F. BEN BELGACEM AND Y. RENARD, *Hybrid finite element methods for the Signorini problem*, Math. Comp., 72 (2003), pp. 1117–1145.

- [13] D. BRAESS, *Finite elements*, Cambridge University Press, Cambridge, third ed., 2007. Theory, fast solvers, and applications in elasticity theory, Translated from the German by Larry L. Schumaker.
- [14] S.-C. BRENNER AND L.-R. SCOTT, *The mathematical theory of finite element methods*, vol. 15 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2007.
- [15] H. BREZIS, *Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 18 (1968), pp. 115–175.
- [16] ———, *Analyse fonctionnelle*, Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master’s Degree], Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].
- [17] F. BREZZI, *On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrangian multipliers*, Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge, 8 (1974), pp. 129–151.
- [18] E. BURMAN, *A penalty-free nonsymmetric Nitsche-type method for the weak imposition of boundary conditions*, SIAM J. Numer. Anal., 50 (2012), pp. 1959–1981.
- [19] ———, *Projection stabilization of Lagrange multipliers for the imposition of constraints on interfaces and boundaries*, Numer. Methods Partial Differential Equations, 30 (2014), pp. 567–592.
- [20] E. BURMAN AND M. A. FERNÁNDEZ, *An unfitted Nitsche method for incompressible fluid-structure interaction using overlapping meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 279 (2014), pp. 497–514.
- [21] E. BURMAN AND P. HANSBO, *Deriving robust unfitted finite element methods from augmented Lagrangian formulations*, arXiv preprint arXiv :1702.08340, (2017).
- [22] E. BURMAN, P. HANSBO, AND M. LARSON, *Augmented Lagrangian finite element methods for contact problems*, ArXiv e-prints, (2016).
- [23] M. CHERNOV, A. MAISCHAK AND E. STEPHAN, *A priori error estimates for hp penalty BEM for contact problems in elasticity*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 196 (2007), pp. 3871–3880.
- [24] F. CHOULY, *An adaptation of Nitsche’s method to the Tresca friction problem*, J. Math. Anal. Appl., 411 (2014), pp. 329–339.
- [25] F. CHOULY, M. FABRE, P. HILD, R. MLIKA, J. POUSIN, AND Y. RENARD, *An overview of recent results on Nitsche’s method for contact problems*, (2016).
- [26] F. CHOULY AND P. HILD, *A Nitsche-based method for unilateral contact problems : numerical analysis*, SIAM J. Numer. Anal., 51 (2013), pp. 1295–1307.

- [27] F. CHOULY AND P. HILD, *On convergence of the penalty method for unilateral contact problems*, Appl. Numer. Math., 65 (2013), pp. 27–40.
- [28] F. CHOULY, P. HILD, AND Y. RENARD, *Symmetric and non-symmetric variants of Nitsche’s method for contact problems in elasticity : theory and numerical experiments*, Math. Comp., 84 (2015), pp. 1089–1112.
- [29] P. G. CIARLET, *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [30] ———, *The finite element method for elliptic problems*, vol. II of Handbook of Numerical Analysis (eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991.
- [31] P. COOREVITS, P. HILD, K. LHALOUANI, AND T. SASSI, *Mixed finite element methods for unilateral problems : convergence analysis and numerical studies*, Math. Comp., 71 (2002), pp. 1–25.
- [32] G. DROUET AND P. HILD, *Optimal convergence for discrete variational inequalities modelling Signorini contact in 2D and 3D without additional assumptions on the unknown contact set*, SIAM J. Numer. Anal., 53 (2015), pp. 1488–1507.
- [33] ———, *An accurate local average contact method for nonmatching meshes*, Numer. Math., 136 (2017), pp. 467–502.
- [34] T. DUPONT AND R. SCOTT, *Polynomial approximation of functions in Sobolev spaces*, Math. Comp., 34 (1980), pp. 441–463.
- [35] G. DUVAUT, *Mécanique des milieux continus*, Dunod, 1998.
- [36] A. ERN, *Aide-mémoire des éléments finis*, Dunod, 2005.
- [37] A. ERN AND J.-L. GUERMOND, *Theory and practice of finite elements*, vol. 159 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2004.
- [38] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.
- [39] H. FEDERER, *Geometric measure theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
- [40] G. FICHERA, *Problemi elastostatici con vincoli unilaterali : Il problema di Signorini con ambigue condizioni al contorno*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I (8), 7 (1963/1964), pp. 91–140.
- [41] A. FORTIN AND A. GARON, *Les éléments finis : de la théorie à la pratique*, 2016. http://giref.ulaval.ca/files/afortin/Publications/elements_finis.pdf.

- [42] A. FRITZ, S. HÜEBER, AND B. I. WOHLMUTH, *A comparison of mortar and Nitsche techniques for linear elasticity*, Universität Stuttgart, IANS Preprint, (2003).
- [43] ———, *A comparison of mortar and Nitsche techniques for linear elasticity*, *Calcolo*, 41 (2004), pp. 115–137.
- [44] E. GAGLIARDO, *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili*, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 27 (1957), pp. 284–305.
- [45] R. GLOWINSKI, *Numerical methods for nonlinear variational problems*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [46] R. GLOWINSKI AND P. LE TALLEC, *Augmented Lagrangian and operator-splitting methods in nonlinear mechanics*, vol. 9 of SIAM Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1989.
- [47] P. GRISVARD, *Elliptic problems in nonsmooth domains*, vol. 24 of Monographs and Studies in Mathematics, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [48] ———, *Problèmes aux limites dans les polygones. Mode d’emploi*, *EDF Bull. Direction Études Rech. Sér. C Math. Inform.*, (1986), pp. 3, 21–59.
- [49] W. HAN AND M. SOFONEA, *Quasistatic contact problems in viscoelasticity and viscoplasticity*, vol. 30 of AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [50] P. HANSBO, *Nitsche’s method for interface problems in computational mechanics*, *GAMM-Mitt.*, 28 (2005), pp. 183–206.
- [51] P. HANSBO, A. RASHID, AND K. SALOMONSSON, *Least-squares stabilized augmented Lagrangian multiplier method for elastic contact*, *Finite Elem. Anal. Des.*, 116 (2016), pp. 32–37.
- [52] J. HASLINGER, I. HLAVÁČEK, AND J. NEČAS, *Numerical methods for unilateral problems in solid mechanics*, vol. IV of Handbook of Numerical Analysis (eds. P.G. Ciarlet and J.L. Lions), North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1996.
- [53] P. HILD, *Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 184 (2000), pp. 99–123.
- [54] P. HILD AND Y. RENARD, *A stabilized Lagrange multiplier method for the finite element approximation of contact problems in elastostatics*, *Numer. Math.*, 115 (2010), pp. 101–129.
- [55] S. HÜEBER AND B. I. WOHLMUTH, *An optimal a priori error estimate for nonlinear multibody contact problems*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 43 (2005), pp. 156–173.
- [56] T. J. R. HUGHES AND L. P. FRANCA, *A new finite element formulation for computational fluid dynamics. VII. The Stokes problem with various well-posed boundary conditions : symmetric formulations that converge for all velocity/pressure spaces*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 65 (1987), pp. 85–96.

- [57] C. JOHNSON, *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [58] M. JUNTUNEN, *On the connection between the stabilized Lagrange multiplier and Nitsche's methods*, Numer. Math., 131 (2015), pp. 453–471.
- [59] N. KIKUCHI AND J. T. ODEN, *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*, vol. 8 of SIAM Studies in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1988.
- [60] N. KIKUCHI AND Y. J. SONG, *Penalty-finite-element approximation of a class of unilateral problems in linear elasticity*, Quart. Appl. Math., 39 (1981), pp. 1–22.
- [61] P. LABORDE AND Y. RENARD, *Fixed point strategies for elastostatic frictional contact problems*, Math. Methods Appl. Sci., 31 (2008), pp. 415–441.
- [62] T. A. LAURSEN, *Computational contact and impact mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [63] J.-L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [64] J.-L. LIONS AND G. STAMPACCHIA, *Variational inequalities*, Comm. Pure Applied Math., XX (1967), pp. 493–519.
- [65] W. MCLEAN, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [66] M. MOUSSAOUI AND K. KHODJA, *Régularité des solutions d'un problème mêlé Dirichlet-Signorini dans un domaine polygonal plan*, Comm. Partial Differential Equations, 17 (1992), pp. 805–826.
- [67] J. NEČAS, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris ; Academia, Éditeurs, Prague, 1967.
- [68] J. NITSCHKE, *Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 36 (1971), pp. 9–15.
- [69] J. T. ODEN, *Penalty-finite-element methods for constrained problems in elasticity*, Symposium on finite element methods, (1981), pp. 1–22.
- [70] J. T. ODEN AND N. KIKUCHI, *Finite element methods for constrained problems in elasticity*, Internat. J. Numer. Meth. Engrg., 18 (1982), pp. 701–725.
- [71] J. T. ODEN AND S. J. KIM, *Interior penalty methods for finite element approximations of the Signorini problem in elastostatics*, Comput. Math. Appl., 8 (1982), pp. 35–56.

- [72] J. PITKÄRANTA, *Boundary subspaces for the finite element method with Lagrange multipliers*, *Numerische Mathematik*, 33 (1979), pp. 273–289.
- [73] ———, *Local stability conditions for the Babuška method of Lagrange multipliers*, *Mathematics of Computation*, 35 (1980), pp. 1113–1129.
- [74] A. QUARTERONI AND A. VALLI, *Numerical approximation of partial differential equations*, vol. 23 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [75] I. RAMIÈRE, P. ANGOT, AND M. BELLIARD, *A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 196 (2007), pp. 766–781.
- [76] J. RAPPAZ AND M. PICASSO, *Introduction à l'analyse numérique*, *Mathématiques*. [Mathematics], Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1998.
- [77] P.-A. RAVIART AND J.-M. THOMAS, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, *Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise*. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree], Masson, Paris, 1983.
- [78] Y. RENARD, *Generalized Newton's methods for the approximation and resolution of frictional contact problems in elasticity*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 256 (2012), pp. 38–55.
- [79] F.-J. SAYAS, *A gentle introduction to the Finite Element Method*, 2015. http://www.math.udel.edu/~fjsayas/documents/anIntro2FEM_2015.pdf.
- [80] L. R. SCOTT AND S. ZHANG, *Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions*, *Math. Comp.*, 54 (1990), pp. 483–493.
- [81] O. STEINBACH, *Numerical approximation methods for elliptic boundary value problems*, Springer, New York, 2008. Finite and boundary elements, Translated from the 2003 German original.
- [82] O. STEINBACH, B. WOHLMUTH, AND L. WUNDERLICH, *Trace and flux a priori error estimates in finite-element approximations of Signorni-type problems*, *IMA J. Numer. Anal.*, 36 (2016), pp. 1072–1095.
- [83] R. STENBERG, *On some techniques for approximating boundary conditions in the finite element method*, *J. Comput. Appl. Math.*, 63 (1995), pp. 139–148.
- [84] V. THOMÉE, *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, vol. 25 of Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [85] B. I. WOHLMUTH, *Variationally consistent discretization schemes and numerical algorithms for contact problems*, *Acta Numer.*, 20 (2011), pp. 569–734.
- [86] P. WRIGGERS, *Computational Contact Mechanics*, Wiley, 2002.