



**HAL**  
open science

# La méthode des volumes finis pour les équations paraboliques

Julien Vovelle

► **To cite this version:**

Julien Vovelle. La méthode des volumes finis pour les équations paraboliques. Master. Université  
Rennes 1, France. 2012. cel-01872729

**HAL Id: cel-01872729**

**<https://cel.hal.science/cel-01872729>**

Submitted on 12 Sep 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial 4.0 International License

# La méthode des volumes finis pour les équations paraboliques

J. Vovelle

September 12, 2018

## Abstract

On étudie dans ce deuxième cours la méthode des volumes finis appliquée aux équations paraboliques, en dimension 1.

## 1 La méthode des volumes finis en dimension 1

On commence par reprendre la fin du cours précédent pour écrire la méthode des volumes finis en dimension 1 spécifiquement. Ici  $\Omega$  est un intervalle ouvert borné de  $\mathbb{R}$ . Un maillage  $\mathcal{T}$  de  $\Omega$  est une suite d'intervalles ouverts  $(K_i)_{i=0,\dots,L-1}$ . En notant  $x_{i-1/2} < x_{i+1/2}$  les extrémités de  $K_i$ , on a

$$K_i = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}), \quad \bar{\Omega} = \bigcup_{i=0}^{L-1} [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}],$$

et l'interface  $K_i|K_j$  est réduit au point  $x_{i\pm 1/2}$  selon que  $j = i \pm 1$ . Soit donc à approcher, par la méthode des volumes finis, le problème

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial q}{\partial t}(x, t) = f, \quad x \in \Omega, t > 0, \quad (1)$$

par  $u_{h,k}$  constante sur chaque maille espace-temps  $K_i \times (t_n, t_{n+1})$  :

$$u_{h,k}(x, t) = u_i^n, \quad (x, t) \in K_i \times (t_n, t_{n+1}).$$

On rappelle que  $k > 0$  est le pas de temps,  $t_n = nk$  et  $h$  est le pas d'espace,  $h = \sup_{0 \leq i \leq L-1} h_i$  où  $h_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$  est la longueur de  $K_i$ . Le principe de bilan donne

(avec  $u$  interprété comme une densité de masse)

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\text{Masse dans } K_i \text{ au temps } t_{n+1}}_{h_i u_i^{n+1}} - \underbrace{\text{Masse dans } K_i \text{ au temps } t_n}_{h_i u_i^n} \\
&= - \underbrace{\text{Flux de masse sortant de } K_i \text{ entrant dans } K_{i+1} \text{ entre } t_n \text{ et } t_{n+1}}_{k Q_{i \rightarrow i+1}^n} \\
&\quad - \underbrace{\text{Flux de masse sortant de } K_i \text{ entrant dans } K_{i-1} \text{ entre } t_n \text{ et } t_{n+1}}_{k Q_{i \rightarrow i-1}^n} \\
&\quad + \underbrace{\text{Création/Consommation de masse dans } K_i \text{ entre } t_n \text{ et } t_{n+1}}_{k h_i f_i^n}.
\end{aligned}$$

On a donc l'équation

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h_i} (Q_{i \rightarrow i+1}^n + Q_{i \rightarrow i-1}^n) + k f_i^n, \quad (2)$$

avec

$$f_i^n := \frac{1}{k h_i} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{K_i} f(x, t) dx dt. \quad (3)$$

La conservation de la masse impose “flux sortant de  $K_j$  entrant en  $K_{j+1}$ ” = - “flux sortant de  $K_{j+1}$  entrant en  $K_j$ ”, *i.e.*

$$Q_{j \rightarrow j+1}^n = -Q_{j+1 \rightarrow j}^n. \quad (4)$$

**Remarque 1** En notant  $Q_{j+1/2}^n = Q_{j \rightarrow j+1}^n$  on a donc (avec  $j = i - 1$  dans (4)),  $Q_{i \rightarrow i-1}^n = -Q_{i-1/2}^n$ . De (2), on déduit donc

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{k}{h_i} (Q_{i+1/2}^n - Q_{i-1/2}^n) + k f_i^n, \quad (5)$$

où  $f_i^n$  est donné par (3).

## 2 Equation parabolique en dimension 1

Soit  $T > 0$ . On considère l'équation

$$u_t - (a u_x)_x = f \text{ dans } (0, 1) \times (0, T), \quad (6)$$

où  $u(x, t) \in \mathbb{R}$  est l'inconnue,  $a \in L^\infty((0, 1))$  est une fonction strictement positive p.p. indépendante du temps: il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\alpha \leq a(x) \text{ pour presque tout } x \in (0, 1), \quad (7)$$

et  $f \in L^2((0, 1) \times (0, T))$ . On a utilisé les notations

$$u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_x := \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (8)$$

pour les dérivées partielles. Dans le cas  $a \equiv 1$ , (6) est l'équation de la chaleur en dimension 1. Pour compléter (6), on donne une condition initiale

$$u|_{t=0} = u_0 \text{ dans } (0, 1), \quad (9)$$

avec  $u_0 \in L^2(0, 1)$  et des conditions aux limites, par exemple des conditions aux limites périodiques:

$$u(0, t) = u(1, t), \quad t > 0. \quad (10)$$

Il existe alors un unique  $u \in C([0, T]; L^2(0, 1)) \cap C^1((0, T]; H^1(0, 1))$  1-périodique en temps solution faible de (6)-(9)-(10) au sens où

$$\int_0^T \int_0^1 (uv_t - au_x v_x - fv) dx dt = 0, \quad (11)$$

pour tout  $v \in H_0^1((0, 1) \times (0, T))$ , et  $u(0) = u_0$  dans  $L^2(0, 1)$ . En effet (rappel) pour l'unicité on se ramène, par linéarité au cas  $f \equiv 0$ ,  $u_0 \equiv 0$  et on montre  $u \equiv 0$  pour toute solution faible  $u$  en prenant  $v = \theta u$  dans (11), où  $\theta \in C_c^1((0, T])$  puis en faisant  $\theta \rightarrow 1$ . Pour l'existence on peut utiliser une dcomposition spectrale de  $u \mapsto -(au_x)_x$  : d'après la théorie des équations elliptiques, il existe  $(\lambda_n)$  une suite croissante de réels positifs ou nuls telle que  $\lambda_n \rightarrow +\infty$ , et il existe  $(w^n)$  une base orthonormée de  $H_{\text{per}}^1(0, 1)$  avec  $w^n \in H^2(0, 1)$  telle que  $-(aw_x^n)_x = \lambda_n w^n$ . Alors

$$u(t) := \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \langle u_0, w^n \rangle_{L^2(0,1)} + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t e^{-\lambda_n(t-s)} \langle f(s), w^n \rangle_{L^2(0,1)} ds \quad (12)$$

est solution faible de (6)-(9)-(10).

**Remarque (régularité additionnelle) :** Soit, pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $H^k(0, 1)$  l'espace de Sobolev des fonctions  $v \in L^2(0, 1)$  telles que

$$\|v\|_{H^k(0,1)}^2 := \sum_{j=0}^k \|\partial_x^j v\|_{L^2(0,1)}^2 < +\infty.$$

D'après (12) et l'identification

$$\|v\|_{H^k(0,1)}^2 \simeq \sum_{n \geq 0} (1 + \lambda_n^k) |\langle v, w^n \rangle_{L^2(0,1)}|^2,$$

on a :  $u_0 \in H^k(0, 1)$ ,  $f \in C^k([0, 1]; H^k(0, 1))$  impliquent  $u \in H^k((0, 1) \times (0, T))$ . En particulier, pour  $k = 4$ , on obtient  $u \in C^2([0, 1] \times [0, T])$ , **ce qu'on supposera vérifié dans la suite.**

### 3 La méthode des volumes finis appliquée à l'équation parabolique

Dans cette partie, on détermine les flux numériques (donc la méthode des volumes finis qu'on va utiliser). Les lemmes 2-3-4 suivants assurent au fur et à mesure que les approximations faites sont *consistantes*, au sens où le flux numérique obtenu est proche du flux du problème continu.

Le point de départ est l'équation (2) (plutôt que (5)), avec ici  $(K_i)_{0 \leq i \leq L-1}$  maillage de  $\Omega := (0, 1)$ . Pour l'équation continue (6), d'après la *Loi de Fourier*, le flux en  $x_{i+1/2}$  sortant de  $K_i$  et entrant dans  $K_{i+1}$  est, au temps  $t$ ,

$$q_{i \rightarrow i+1}(t) = -a(x_{i+1/2})u_x(x_{i+1/2}, t). \quad (13)$$

On cherche donc  $Q_{i \rightarrow i+1}^n$  qui soit une approximation de  $-a(x_{i+1/2})u_x(x_{i+1/2}, t)$ , avec ou bien  $t = t_n$  ou bien  $t = t_{n+1}$ . Le choix  $t = t_n$  détermine un schéma dit explicite en temps, le choix  $t = t_{n+1}$  un schéma dit implicite en temps. On préfère utiliser un schéma implicite en temps pour les équations paraboliques (on verra éventuellement pourquoi en exercice ou au chapitre suivant).

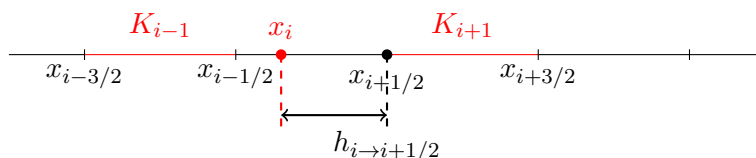
#### 3.1 Etape 1: $a$ discret, $u$ continu, dérivées discrètes

Pour déterminer le flux numérique en implicite, on commence par approcher  $a(x_{i+1/2})$  comme

$$a(x_{i+1/2}) \simeq a_i := \frac{1}{h_i} \int_{K_i} a(x) dx, \quad (14)$$

puis on utilise une approximation par quotient différentiel (dite aussi approximation par différences finies), soit

$$u_x(x_{i+1/2}, t_{n+1}) \simeq \frac{u(x_{i+1/2}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})}{h_{i \rightarrow i+1/2}},$$



où  $x_i$  est un point dans  $K_i$  et  $h_{i \rightarrow i+1/2} := x_{i+1/2} - x_i$ . En posant

$$Q_{i \rightarrow i+1}^{b,n} = -a_i \frac{u(x_{i+1/2}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})}{h_{i \rightarrow i+1/2}}, \quad (15)$$

on obtient un intermédiaire entre  $q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1})$  et le flux numérique  $Q_{i \rightarrow i+1}^n$  qu'on va maintenant calculer.

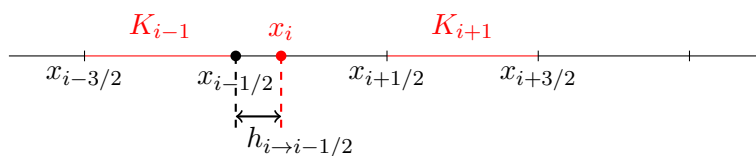
### 3.2 Etape 2: $a$ discret, $u$ discret, dérivées discrètes

En faisant l'approximation  $u(x_i, t_{n+1}) \simeq u_i^{n+1}$  et en notant  $u_{i+1/2}^{n+1}$  la valeur numérique qui tient lieu de  $u(x_{i+1/2}, t_{n+1})$ , on obtient

$$Q_{i \rightarrow i+1}^n = -a_i \frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i \rightarrow i+1/2}}.$$

De même (attention au signe<sup>1</sup>), on a

$$Q_{i \rightarrow i-1}^n = a_i \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1/2}^{n+1}}{h_{i \rightarrow i-1/2}},$$



où  $h_{i \rightarrow i-1/2} = x_i - x_{i-1/2}$ .

C'est maintenant la propriété (4) de **conservation** du flux au niveau discret qui va déterminer  $u_{i+1/2}^{n+1}$ . On a en effet, pour  $0 < i < L - 1$ ,

$$Q_{i \rightarrow i+1}^n = -Q_{i+1 \rightarrow i}^n \iff a_i \frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h_{i \rightarrow i+1/2}} = a_{i+1} \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i+1/2}^{n+1}}{h_{i+1 \rightarrow i+1/2}}.$$

On en déduit

$$\boxed{u_{i+1/2}^{n+1} = \frac{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} u_i^{n+1} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2} u_{i+1}^{n+1}}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}}}, \quad (16)$$

avec

$$\alpha_{i \rightarrow i+1/2} := \frac{a_i}{h_{i \rightarrow i+1/2}}, \quad \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2} := \frac{a_{i+1}}{h_{i+1 \rightarrow i+1/2}}, \quad (17)$$

d'où

$$\boxed{Q_{i \rightarrow i+1}^n = -\tau_{i+1/2} (u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1})}, \quad (18)$$

en posant

$$\tau_{i+1/2} := \frac{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} \cdot \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}}. \quad (19)$$

<sup>1</sup>Pour ne pas faire d'erreur, se rappeler que, d'après la Loi de Fourier, "on donne si on a plus", c'est-à-dire que si  $u_i^{n+1}$  est plus grand que le voisin  $u_{i+1/2}^{n+1}$ , resp.  $u_{i-1/2}^{n+1}$ , alors  $Q_{i \rightarrow i+1}^n \geq 0$ , resp.  $Q_{i \rightarrow i-1}^n \geq 0$ . Pour les mêmes considérations de signe, on voit que  $q_{i \rightarrow i-1}(t) = +a(x_{i-1/2})u_x(x_{i-1/2}, t)$ .

**Exemple 1** Dans le cas  $h_i = h$  pour tout  $i$  avec  $x_i =$  milieu de  $K_i$ , on a

$$\tau_{i+1/2} := \frac{2}{h} \frac{a_i \cdot a_{i+1}}{a_i + a_{i+1}},$$

c'est-à-dire que  $\frac{h}{2}\tau_{i+1/2}$  est la moyenne harmonique de  $a_i$  et  $a_{i+1}$  :

$$\frac{2}{h} \frac{1}{\tau_{i+1/2}} = \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{i+1}}.$$

Finalement, par (2) et (18), on obtient, pour  $0 < i < L - 1$ , les équations

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{k}{h_i} (\tau_{i+1/2}(u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}) - \tau_{i-1/2}(u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1})) + k f_i^n, \quad (20)$$

où  $\tau_{i+1/2}$  est donné par (18). Pour  $i = 0$  et  $i = L - 1$ , il faut préciser à l'aide des conditions limites les valeurs choisies pour, respectivement,  $u_{-1/2}^{n+1}$  et  $u_{L-1/2}^{n+1}$ , de sorte à déterminer, respectivement,  $Q_{0 \rightarrow -1}^n$  et  $Q_{L-1 \rightarrow L}^n$ . L'équivalent des conditions de périodicité (10) est

$$u_{-1}^{n+1} = u_{L-1}^{n+1}, \quad u_L^{n+1} = u_0^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Pour terminer, l'équivalent numérique de la condition initiale (9) est

$$u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u_0(x) dx, \quad \forall i = 0, \dots, L - 1. \quad (22)$$

**Conclusion :** la méthode des volumes finis pour l'approximation de (6)-(9)-(10) est constituée des équations (20)-(21)-(22).

### 3.3 Consistance des flux

Soit, pour  $0 \leq i \leq L - 1$ ,

$$Q_{i \rightarrow i+1}^{\#,n} = -\tau_{i+1/2}(u(x_{i+1}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})), \quad (23)$$

qui est le pendant de  $Q_{i \rightarrow i+1}^n$  lorsqu'on remplace les valeurs discrètes  $u_i^{n+1}$  par les valeurs d'une fonction  $u$  aux points  $(x_i, t_{n+1})$ . Dans le paragraphe suivant (paragraphe 4), on va montrer la convergence de la solution de la méthode volumes finis (20)-(21)-(22) vers la solution  $u$  de (6)-(9)-(10) en donnant une estimation de la vitesse de convergence. Pour cela, on va

1. Montrer que  $u$  vérifie les équations du schéma (20)-(21)-(22) en un sens approché.
2. Faire des "estimations d'énergie" à partir de l'équation discrète satisfaite par  $u_i^n - u(x_i, t_n)$ .

Pour préparer la première étape, évaluons l'erreur faite en approchant le flux continu  $q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1})$  défini dans (13) par  $Q_{i \rightarrow i+1}^{\#,n}$ . Pour cela on évalue d'abord les erreurs faites dans chacune des quantités utilisées pour la construction du flux numérique, à savoir le flux intermédiaire  $Q_{i \rightarrow i+1}^{b,n}$  et la valeur d'interface  $u_{i+1/2}^{n+1}$ .

**Lemme 2 (Consistance  $q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1})/Q_{i \rightarrow i+1}^{b,n}$ )** Il existe  $C$  constante dépendant des quantités  $\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}$  et  $\|u_{xx}\|_{L^\infty((0,1) \times (0,T))}$  telle que  $r_{i \rightarrow i+1}^{n+1} := q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1}) - Q_{i \rightarrow i+1}^{b,n}$  satisfasse

$$|r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| \leq Ch, \quad (24)$$

pour tout  $i \in \{0, \dots, L-1\}$  et tout  $n$  tel que  $t_{n+1} \leq T$ .

**Preuve :** en notant  $C$  n'importe quelle constante dépendant de  $\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}$  et de la norme  $\|u_{xx}\|_{L^\infty((0,1) \times (0,T))}$ , on a

$$|a(x) - a(x_{i+1/2})| \leq C|x - x_{i+1/2}| \leq Ch_i,$$

pour tout  $x \in K_i$ , d'où

$$|a_i - a(x_{i+1/2})| = \left| \frac{1}{h_i} \int_{K_i} (a(x) - a(x_{i+1/2})) dx \right| \leq \frac{1}{h_i} \int_{K_i} Ch_i dx \leq Ch_i.$$

De même, un développement de Taylor donne

$$\left| \frac{u(x_{i+1/2}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})}{h_{i \rightarrow i+1/2}} - u_x(x_{i+1/2}, t_{n+1}) \right| \leq Ch_{i \rightarrow i+1/2} \leq Ch_i,$$

d'où (24). ■

**Lemme 3 (Consistance de la valeur intermédiaire)** Si on remplace les valeurs  $u_k^{n+1}$  ( $k \in \{i, i+1/2, i+1\}$ ) par les valeurs continues correspondantes dans (16), on a, pour  $0 \leq i \leq L-1$ ,

$$u(x_{i+1/2}, t_{n+1}) = \frac{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} u(x_i, t_{n+1}) + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2} u(x_{i+1}, t_{n+1})}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}} + s_{i+1/2}^{n+1}, \quad (25)$$

où l'erreur  $s_{i+1/2}^{n+1}$  est

$$s_{i+1/2}^{n+1} = \frac{r_{i+1 \rightarrow i}^{n+1} + r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}}, \quad (26)$$

où  $r_i^{n+1}$  est défini dans le Lemme 2.

**Preuve :** Remarquons d'abord que, dans (25) pour  $i = L-1$ ,  $u(x_L, t)$  est défini par  $u(x_L, t) := u(x_0, t)$  en utilisant la 1-périodicité de  $u$ . On a

$$q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1}) = -q_{i+1 \rightarrow i}(t_{n+1}),$$

soit, avec les notations du Lemme 2,

$$Q_{i \rightarrow i+1}^{b,n} + r_{i \rightarrow i+1}^{n+1} = -(Q_{i+1 \rightarrow i}^{b,n} + r_{i+1 \rightarrow i}^{n+1}),$$



c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & - a_i \frac{u(x_{i+1/2}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})}{h_{i \rightarrow i+1/2}} \\ & = a_{i+1} \frac{u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i+1/2}, t_{n+1})}{h_{i+1 \rightarrow i+1/2}} - (r_{i+1 \rightarrow i}^{n+1} + r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}). \end{aligned}$$

On en déduit (25). ■

**Lemme 4 (Consistance  $q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1})/Q_{i \rightarrow i+1}^{\sharp, n}$ )** *Il existe  $C$  constante dépendant de  $\alpha$  (la constante de coercivité dans (7)),  $\|a\|_{L^\infty(0,1)}$ ,  $\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}$  et  $\|u_{xx}\|_{L^\infty((0,1) \times (0,T))}$  telle que*

$$|z_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| \leq Ch, \quad z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} := q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1}) - Q_{i \rightarrow i+1}^{\sharp, n}, \quad (27)$$

pour tout  $i \in \{0, \dots, L-1\}$  et tout  $n$  avec  $t_n \leq T$ .

**Preuve :** on reporte la valeur de  $u(x_{i+1/2}, t_{n+1})$  donnée par (25) dans l'expression de  $Q_{i \rightarrow i+1}^{b, n+1}$  (voir (15)):

$$Q_{b, i \rightarrow i+1}^{n+1} = Q_{i \rightarrow i+1}^{\sharp, n+1} - \alpha_{i \rightarrow i+1/2} s_{i+1/2}^{n+1}.$$

Par (24) et la définition de  $s_{i+1/2}^{n+1}$  (cf. (26)), on a donc

$$\begin{aligned} |q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1}) - Q_{i \rightarrow i+1}^{\sharp, n+1}| & \leq |r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| + |\alpha_{i \rightarrow i+1/2} s_{i+1/2}^{n+1}|, \\ & \leq |r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| + \frac{\alpha_{i \rightarrow i+1/2}}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}} (|r_{i+1 \rightarrow i}^{n+1}| + |r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}|). \end{aligned}$$

On conclut avec l'estimation  $|r_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| \leq Ch$  et l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{i \rightarrow i+1/2}}{\alpha_{i \rightarrow i+1/2} + \alpha_{i+1 \rightarrow i+1/2}} & = \frac{a_i h_{i+1 \rightarrow i+1/2}}{a_i h_{i+1 \rightarrow i+1/2} + a_{i+1} h_{i \rightarrow i+1/2}} \\ & \leq \frac{\|a\|_{L^\infty(0,1)}}{\alpha} \frac{h_{i+1 \rightarrow i+1/2}}{h_{i+1 \rightarrow i+1/2} + h_{i \rightarrow i+1/2}} \\ & = \frac{\|a\|_{L^\infty(0,1)}}{\alpha} \frac{h_{i+1 \rightarrow i+1/2}}{h_i} \leq \frac{\|a\|_{L^\infty(0,1)}}{\alpha}. \end{aligned}$$

■

**Exercice 1** *Proposer des conditions aux bord numériques pour remplacer (21) lorsque on substitue à (10) une des trois conditions suivantes :*

1. *Conditions de Dirichlet homogènes :*

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

2. Conditions de Neumann homogènes :

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

3. Conditions mixtes Dirichlet-Neumann homogènes :

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

## 4 Estimation d'erreur

On va montrer que  $u_{h,k}$  définie par (20)-(21)-(22) ci-dessus converge vers la solution  $u$  de (6)-(9)-(10) lorsque  $h$  et  $k$  tendent vers 0 (avec estimation de cette convergence). Avant tout, comme (20) est implicite en temps (c'est une équation de la forme  $u^{n+1} = F(u^{n+1})$ ), montrons que (20)-(21)-(22) a une solution.

### 4.1 Existence de solution

**Proposition 5 (Existence, Bornes  $L^\infty$ )** *Il existe une unique solution  $u_{h,k}$  à (20)-(21)-(22). De plus,*

$$\max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^n \leq \max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^0 + k \sum_{p=0}^{n-1} \max_{0 \leq i \leq L-1} f_i^p, \quad (28)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et, similairement,

$$\min_{0 \leq i \leq L-1} u_i^n \geq \min_{0 \leq i \leq L-1} u_i^0 + k \sum_{p=0}^{n-1} \min_{0 \leq i \leq L-1} f_i^p, \quad (29)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Preuve:** Montrons d'abord (28) en supposant que  $u_{h,k}$  existe. Soit  $i^* \in \{0, \dots, L-1\}$  tel que

$$\max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^{n+1} = u_{i^*}^{n+1}.$$

Alors,  $u_{i^*}^{n+1} - u_j^{n+1} \geq 0$  pour  $j = i^* \pm 1$ . D'après (20), on a

$$u_{i^*}^{n+1} \leq u_{i^*}^n + k f_{i^*}^n,$$

en particulier

$$\max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^{n+1} \leq \max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^n + k \max_{0 \leq i \leq L-1} f_i^n. \quad (30)$$

Par récurrence, (28) se déduit de (30). De même pour (29). Revenons maintenant à la question de l'existence de  $u_{h,k}$ . En raisonnant par récurrence, il suffit de montrer que, une

fois  $U^n := (u_i^n)_{0 \leq i \leq L-1}$  déterminée, il existe une unique solution  $U^{n+1} := (u_i^{n+1})_{0 \leq i \leq L-1}$  de (20). Comme (20) est linéaire, elle définit alors un système linéaire sur  $\mathbb{R}^L$  :

$$AU^{n+1} = U^n + B, \quad A \in \mathcal{M}_L(\mathbb{R}), \quad B \in \mathbb{R}^L. \quad (31)$$

Il suffit alors de montrer que  $A$  est inversible, *i.e.* sans noyau, ce qui revient à montrer que la seule solution  $(u_i^{n+1})_{0 \leq i \leq L-1}$  de (20) lorsque

$$u_i^n = 0, \quad f_i^n = 0, \quad \forall i \in \{0, \dots, L-1\}, \quad (32)$$

est la solution nulle. Si (32) est satisfait, on a, d'après (30),  $\max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^{n+1} \leq 0$ . De même, on montre  $\min_{0 \leq i \leq L-1} u_i^{n+1} \geq 0$ , ce qui implique  $u_i^{n+1} = 0$  pour tout  $i$ . ■

**Exercice 2** Déterminer  $A$  et  $B$  dans (31).

**Exercice 3** Montrer, en utilisant (28)-(29), que, pour  $t_N = Nk$  ( $N \in \mathbb{N}^*$ ),

$$\|u_{h,k}\|_{L^\infty([0,1] \times [0,t_N])} \leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} + \int_0^{t_N} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt.$$

On peut maintenant montrer l'estimation d'erreur.

## 4.2 Estimation d'erreur

**Théorème 6 (Estimation d'erreur)** Soit  $u \in C^2([0,1] \times [0,T])$  la solution du problème parabolique (6)-(9)-(10) et soit  $u_{h,k}$  la solution approchée déterminée par la méthode des volumes finis (20)-(21)-(22). Il existe une constante  $C \geq 0$  ne dépendant que de  $\alpha$  (la constante de coercivité dans (7)),  $\|a\|_{L^\infty(0,1)}$ ,  $\|a_x\|_{L^\infty(0,1)}$ ,  $\|u\|_{C^2([0,1] \times [0,T])}$  et  $T$  telle qu'on ait l'estimation d'erreur  $L_t^\infty L_x^2$

$$\left( \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^n|^2 \right)^{1/2} \leq C(k+h), \quad \forall n \text{ t.q. } t_n \leq T, \quad (33)$$

où  $e_i^n := u_i^n - u(x_i, t_n)$ .

**Remarque 7** On a la même estimation d'erreur pour un problème parabolique en dimension  $d > 1$  (avec les mêmes méthodes que celles qui suivent, – il faut cependant déterminer le schéma dans ce cas plus élaboré, voir [EGH00]).

**Preuve :** Dans toute la preuve, on désigne invariablement par  $C$  n'importe qu'elle constante ne dépendant que de  $\alpha$ ,  $\|a\|_{C^1([0,1])}$ ,  $\|u\|_{C^2([0,1] \times [0,T])}$  et  $T$ . On note aussi

$$w_i^n = \mathcal{O}(z_i^n),$$

s'il existe  $C \geq 0$  telle que  $|w_i^n| \leq C|z_i^n|$  pour tout  $0 \leq i \leq L-1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $t_n \leq T$ .

**Etape 1 : Equation approchée pour  $u$**  En intégrant l'équation (6) prise au temps  $t = t_{n+1}$  sur  $K_i$ ,  $0 \leq i \leq L - 1$ , on obtient (en utilisant les notations du paragraphe 3)

$$\int_{K_i} u_t(x, t_{n+1}) dx + (q_{i \rightarrow i+1}(t_{n+1}) + q_{i \rightarrow i-1}(t_{n+1})) = \int_{K_i} f(x, t_{n+1}) dx.$$

On applique le résultat de *consistance du flux* démontré dans le Lemme 4. Comme  $z_{i \rightarrow i-1}^{n+1} = -z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}$  (car  $q_{i \rightarrow i-1}(t_{n+1}) = -q_{i-1 \rightarrow i}(t_{n+1})$ ) et de même pour  $Q_{i \rightarrow i-1}^{\#,n}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{K_i} u_t(x, t_{n+1}) dx + (Q_{i \rightarrow i+1}^{\#,n} + Q_{i \rightarrow i-1}^{\#,n}) \\ = \int_{K_i} f(x, t_{n+1}) dx - (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}). \end{aligned} \quad (34)$$

Par des développements de Taylor, on a

$$\int_{K_i} u_t(x, t_{n+1}) dx = h_i u_t(x_i, t_{n+1}) + \mathcal{O}(h_i^2),$$

et

$$\frac{1}{k} (u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)) = u_t(x_i, t_{n+1}) + \mathcal{O}(k),$$

d'où

$$\int_{K_i} u_t(x, t_{n+1}) dx = \frac{h_i}{k} (u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)) + \mathcal{O}(kh_i + h_i^2).$$

De même,

$$\int_{K_i} f(x, t_{n+1}) dx = h_i f_i^n + \mathcal{O}(kh_i).$$

En remplaçant dans (34) et en multipliant par  $\frac{k}{h_i}$ , on obtient

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + \frac{k}{h_i} (Q_{i \rightarrow i+1}^{\#,n} + Q_{i \rightarrow i-1}^{\#,n}) + k f_i^n \\ - \frac{k}{h_i} (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}) + \mathcal{O}(k^2 + kh_i). \end{aligned}$$

Par définition de  $Q_{i \rightarrow i+1}^{\#,n}$  (cf. (23)), on obtient donc l'approximation suivante de (20) pour  $u(x_i, t_n)$  :

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) \\ + \frac{k}{h_i} (\tau_{i+1/2}(u(x_{i+1}, t_{n+1}) - u(x_i, t_{n+1})) - \tau_{i-1/2}(u(x_i, t_{n+1}) - u(x_{i-1}, t_{n+1}))) + k f_i^n \\ - \frac{k}{h_i} (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}) + k \varepsilon_i^{n+1}, \end{aligned} \quad (35)$$

où  $|\varepsilon_i^{n+1}| \leq C(k + h_i)$ .

**Etape 2 : Estimation d'erreur** Soit  $e_i^n := u_i^n - u(x_i, t_n)$ . En faisant la différence entre (20) et (35), on a, pour  $0 \leq i \leq L - 1$ ,

$$e_i^{n+1} = e_i^n + \frac{k}{h_i} (\tau_{i+1/2}(e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) - \tau_{i-1/2}(e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1})) - \frac{k}{h_i} (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}) + k\varepsilon_i^{n+1},$$

avec  $|\varepsilon_i^{n+1}| \leq C(k + h_i)$ .

**Exercice 4 (Version continue de l'étape 2)** Soit  $e \in C^2([0, 1] \times [0, T])$  vérifiant

$$e_t - (ae_x)_x = \varepsilon + z_x, \quad (36)$$

où  $a \in C([0, 1])$  vérifie la condition de positivité (7),  $\varepsilon, z \in C([0, 1] \times [0, T])$  sont telles que

$$\|\varepsilon\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} \leq Ch, \quad \|z\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} \leq Ch.$$

On suppose de plus  $\|e(0)\| \leq Ch$  et  $e, a, z$  1-périodique en  $x$ .

1. Montrer que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \alpha \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, 0) dx \\ &+ \int_0^t \int_0^1 (\varepsilon e - z e_x) dx ds, \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

2. En déduire, en utilisant l'inégalité (40) ci dessous, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \alpha \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds &\leq Ch^2 \\ &+ \int_0^t \int_0^1 (|e|^2 - z e_x) dx ds, \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

3. Montrer ensuite avec l'inégalité (40) ci dessous que

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds \leq Ch^2 + \int_0^t \int_0^1 |e|^2 dx ds,$$

pour tout  $t \in [0, T]$ .

4. Conclure que

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx \text{ et } \int_0^T \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds \leq Ch^2.$$

Voici maintenant la version discrète : en multipliant par  $h_i e_i^{n+1}$  et en sommant sur  $n \in \{0, \dots, p\}$ ,  $i \in \{0, \dots, L-1\}$  on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^p \sum_{i=0}^{L-1} h_i e_i^{n+1} (e_i^{n+1} - e_i^n) \\
&= \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{n+1} (\tau_{i+1/2} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) - \tau_{i-1/2} (e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1})) \\
&\quad - \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{n+1} (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}) + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i e_i^{n+1} \varepsilon_i^{n+1}. \quad (37)
\end{aligned}$$

Par glissement d'indices, on a

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{n+1} (\tau_{i+1/2} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) - \tau_{i-1/2} (e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1})) \\
&= - \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 - \sum_{n=0}^p k e_0^{n+1} \tau_{-1/2} (e_0^{n+1} - e_{-1}^{n+1}) \\
&\quad + \sum_{n=0}^p k e_L^{n+1} \tau_{L-1/2} (e_L^{n+1} - e_{L-1}^{n+1}).
\end{aligned}$$

La condition de périodicité pour  $u$  et son équivalent discret (21) assurent que les termes de bord se compensent :

$$0 = -e_0^{n+1} \tau_{-1/2} (e_0^{n+1} - e_{-1}^{n+1}) + e_L^{n+1} \tau_{L-1/2} (e_L^{n+1} - e_{L-1}^{n+1}).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{n+1} (\tau_{i+1/2} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) - \tau_{i-1/2} (e_i^{n+1} - e_{i-1}^{n+1})) \\
&= - \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2.
\end{aligned}$$

De même, par glissement d'indices,

$$- \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} e_i^{n+1} (z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} - z_{i-1 \rightarrow i}^{n+1}) = \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) z_{i \rightarrow i+1}^{n+1}.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité

$$a(a-b) \geq \frac{1}{2}(a^2 - b^2), \quad (38)$$

avec  $a = e_i^{n+1}$ ,  $b = e_i^n$ , la première somme dans (37) se réécrit

$$\sum_{n=0}^p \sum_{i=0}^{L-1} h_i e_i^{n+1} (e_i^{n+1} - e_i^n) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{p+1}|^2 - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^0|^2.$$

Par conséquent, (37) donne

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{p+1}|^2 + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^0|^2 + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i e_i^{n+1} \varepsilon_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (39)$$

Par l'inégalité

$$ab \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad \mu > 0, \quad (40)$$

avec  $a = (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1})$ ,  $b = z_{i \rightarrow i+1}^{n+1}$ ,  $\mu = \frac{1}{2} \tau_{i+1/2}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} & \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \frac{1}{2\tau_{i+1/2}} |z_{i \rightarrow i+1}^{n+1}|^2. \end{aligned}$$

Par la condition (cf (7))

$$\alpha \leq a \leq M := \|a\|_{L^\infty(0,1)},$$

on a  $\frac{1}{2\tau_{i+1/2}} \leq \frac{2M}{\alpha^2} h$ . L'estimation (27)  $|z_{i \rightarrow i+1}^{n+1}| \leq Ch$  donne donc

$$\sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} (e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}) z_{i \rightarrow i+1}^{n+1} \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 + Ch^2.$$

En remplaçant dans (39) :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{p+1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^0|^2 + Ch^2 + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i e_i^{n+1} \varepsilon_i^{n+1}. \end{aligned} \quad (41)$$

Par hypothèse,  $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^0|^2 \leq Ch^2$ . Pour le dernier terme, on a, en appliquant (40) avec  $a = e_i^{n+1}$ ,  $b = \varepsilon_i^{n+1}$ ,  $\mu = 1$ ,

$$\sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{n+1}|^2 + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i |\varepsilon_i^{n+1}|^2,$$

et, par l'estimation  $|\varepsilon_i^{n+1}| \leq C(k + h_i)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{p+1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} \tau_{i+1/2} |e_{i+1}^{n+1} - e_i^{n+1}|^2 \\ \leq C(k + h)^2 + \sum_{n=0}^p k \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{n+1}|^2. \end{aligned} \quad (42)$$

On a donc, en particulier,

$$\frac{1}{2} E^p \leq C(h + k)^2 + \sum_{n=0}^p k E^n, \quad E^n := \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{n+1}|^2.$$

Pour  $k < \frac{1}{4}$ , on obtient

$$\frac{1}{4} E^p \leq C(h + k)^2 + \sum_{n=0}^{p-1} k E^n, \quad E^n := \sum_{i=0}^{L-1} h_i |e_i^{n+1}|^2.$$

En utilisant le

**Lemme 8 (Lemme de Gronvall discret)** *Soit  $(E_p)$  vérifiant*

$$E^p \leq c + d \sum_{n=0}^{p-1} k E^n, \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

*Alors  $E^p \leq ce^{pkd}$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .*

on en déduit (33). ■

**Exercice 5** *Montrer (38).*

**Exercice 6** *Montrer (40) (on commencera par le cas  $\mu = \frac{1}{2}$ ).*

**Exercice 7** *Montrer le Lemme 8. On pourra par exemple*

1. *Introduire  $\mathcal{E}^p = c + d \sum_{n=0}^{p-1} k E^n$  et montrer  $\mathcal{E}^{p+1} - \mathcal{E}^p \leq dk \mathcal{E}^p$ .*
2. *Utiliser l'inégalité  $dk \leq e^{dk} - 1$ , puis une récurrence pour conclure.*

## 5 Solution des exercices

### 5.1 Exercice 1

Rappelons que le choix des conditions aux limites numériques se fait à travers la détermination des valeurs aux interfaces  $u_{-1/2}^{n+1}$  et  $u_{L-1/2}^{n+1}$ , on en déduit ensuite la valeur des flux  $Q_{0 \rightarrow -1}^n$  et  $Q_{L-1 \rightarrow L}^n$  respectivement.



1. Les conditions de Dirichlet homogènes correspondent au choix

$$u_{-1/2}^{n+1} = 0, \quad u_{L-1/2}^{n+1} = 0.$$

2. Les conditions de Neumann homogènes correspondent au choix  $Q_{0 \rightarrow -1}^n = 0$  et  $Q_{L-1 \rightarrow L}^n = 0$ , soit :

$$u_{-1/2}^{n+1} = u_0^{n+1}, \quad u_{L-1/2}^{n+1} = u_{L-1}^{n+1}.$$

3. Les conditions mixtes Dirichlet-Neumann homogènes correspondent au choix :

$$u_{-1/2}^{n+1} = u_0^{n+1}, \quad u_{L-1/2}^{n+1} = 0.$$

## 5.2 Exercice 2

L'équation (20) se réécrit

$$\left(1 + \frac{k}{h_i} \tau_{i+1/2} + \frac{k}{h_i} \tau_{i-1/2}\right) u_i^{n+1} - \frac{k}{h_i} \tau_{i+1/2} u_{i+1}^{n+1} - \frac{k}{h_i} \tau_{i-1/2} u_{i-1}^{n+1} = u_i^n + k f_i^n,$$

d'où (en tenant compte des conditions de périodicité (21)),  $B = (k f_i^n)_{i=0, \dots, L-1}$  (vu comme vecteur colonne) et  $A$  est la matrice tridiagonale

$$A = \text{tridiag} \left( -\frac{k}{h_i} \tau_{i-1/2}, 1 + \frac{k}{h_i} \tau_{i+1/2} + \frac{k}{h_i} \tau_{i-1/2}, -\frac{k}{h_i} \tau_{i+1/2} \right).$$

## 5.3 Exercice 3

Pour  $i \in \{0, \dots, L-1\}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$u_i^0 = \frac{1}{h_i} \int_{K_1} u_0(x) dx \leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)},$$

et

$$k f_i^p = \int_{t_p}^{t_{p+1}} \frac{1}{h_i} \int_{K_i} f(x, t) dx dt \leq \int_{t_p}^{t_{p+1}} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt.$$

On déduit de (28), pour  $n \leq N$ ,

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq L-1} u_i^n &\leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} + \sum_{p=0}^{n-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt \\ &= \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} + \int_0^{t_n} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt \\ &\leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} + \int_0^{t_N} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt. \end{aligned}$$

De même pour le min, ce qui donne

$$\|u_{h,k}\|_{L^\infty([0,1] \times [0,t_N])} \leq \|u_0\|_{L^\infty(0,1)} + \int_0^{t_N} \|f\|_{L^\infty(0,1)}(t) dt.$$

## 5.4 Exercice 4

En multipliant l'équation

$$e_t - (ae_x)_x = \varepsilon + z_x,$$

par  $e$ , en intégrant sur  $(0, 1) \times (0, t)$ , on obtient (après intégration par parties dans le terme en  $(ae_x)_x e$  puis utilisation de (7)) l'inégalité (dite inégalité d'énergie)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \alpha \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds \leq \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, 0) dx \\ + \int_0^t \int_0^1 (\varepsilon e - ze_x) dx ds, \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . Par l'inégalité de Young (40) avec  $a = e$ ,  $b = \varepsilon$ ,  $\mu = 1$ , on a

$$\int_0^1 \varepsilon e dx \leq \int_0^1 e^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \varepsilon^2 dx.$$

L'hypothèse  $\|\varepsilon\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} \leq Ch$  donne alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \alpha \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds \leq Ch^2 \\ + \int_0^t \int_0^1 (|e|^2 - ze_x) dx ds, \end{aligned}$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . En utilisant de nouveau (40) ci dessous avec  $a = e_x$ ,  $b = z$ ,  $\mu = \frac{\alpha}{2}$ , on obtient

$$\int_0^1 \varepsilon z e_x dx \leq \frac{\alpha}{2} \int_0^1 |e_x|^2 dx + \frac{1}{2\alpha} \int_0^1 |z|^2 dx.$$

L'hypothèse  $\|z\|_{L^2((0,1) \times (0,T))} \leq Ch$  donne alors

$$\frac{1}{2} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds \leq Ch^2 + \int_0^t \int_0^1 |e|^2 dx ds, \quad (43)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . On a en particulier

$$\int_0^1 |e|^2(x, t) dx \leq Ch^2 + \int_0^t \int_0^1 |e|^2 dx ds, \quad (44)$$

pour tout  $t \in [0, T]$ . On en déduit par le Lemme de Gronvall que

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx \leq Ch^2,$$

où la constante  $C$  dépend de  $T$ . En reportant dans (43), on a finalement

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_0^1 |e|^2(x, t) dx \text{ et } \int_0^T \int_0^1 |e_x|^2(x, s) dx ds \leq Ch^2.$$

### 5.5 Exercice 5

On calcule

$$a(a-b) - \frac{1}{2}(a^2 - b^2) = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{2} = \frac{(a-b)^2}{2} \geq 0.$$

### 5.6 Exercice 6

Dans le cas  $\mu = \frac{1}{2}$ , (40), soit

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2, \quad (45)$$

se déduit de  $(a-b)^2 \geq 0$ , en développant le carré. On obtient le cas général en remplaçant  $a$  par  $2\mu a$  et  $b$  par  $\frac{1}{2\mu}b$  dans (45).

### 5.7 Exercice 7

Posons

$$\mathcal{E}_p = c + d \sum_{n=0}^{p-1} kE^n,$$

avec la convention  $\mathcal{E}_0 = c$ . On a alors

$$\mathcal{E}_{p+1} - \mathcal{E}_p = dkE^p \leq dk\mathcal{E}_p,$$

soit  $\mathcal{E}_{p+1} \leq (1 + dk)\mathcal{E}_p$ . Avec  $1 + dk \leq e^{dk}$  et une récurrence, on obtient

$$\mathcal{E}_p \leq ce^{dkp},$$

d'où le résultat.

## References

- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, *Finite volume methods*, Handbook of numerical analysis, Vol. VII, Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 713–1020.