



HAL
open science

Kit de survie - Calculabilité

François Schwarzentruher

► **To cite this version:**

| François Schwarzentruher. Kit de survie - Calculabilité. Master. France. 2018. cel-01947220

HAL Id: cel-01947220

<https://cel.hal.science/cel-01947220>

Submitted on 6 Dec 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Kit de survie - Calculabilité

François SCHWARZENTRUBER

Préparation à l'option informatique de l'agrégation de mathématiques
ÉNS Rennes

Ces notes de cours survolent le programme en calculabilité et théorie de la complexité de l'option informatique de l'agrégation de mathématiques. Ce document a été débuté en 2016 à l'aide des élèves agrégatifs à l'ÉNS Rennes que je remercie. Elles sont volontairement laconiques mais illustrées.

Table des matières

1	Machines de Turing	5
1.1	Problèmes de décision	5
1.2	Codage	5
1.3	Thèse de Church-Turing	6
1.4	Définition des machines de Turing	6
1.5	Equivalence entre machines de Turing	7
1.5.1	Plusieurs rubans	7
1.5.2	Déterministe vs non-déterministe	8
1.5.3	Autres variantes	10
1.6	Notes bibliographiques	10
2	Indécidabilité	11
2.1	Classes R et RE	11
2.2	Énumérateurs	11
2.3	Problème de l'arrêt	12
2.3.1	... est récursivement énumérable	12
2.3.2	... est indécidable	12
2.4	Montrer l'indécidabilité par réduction	13
2.4.1	Réduction	13
2.4.2	Exemple : acceptation par une machine de Turing	13
2.5	Problèmes de correspondance de Post	14
2.5.1	Définitions	14
2.5.2	Démonstrations d'indécidabilité	15
2.6	Théorème de Rice	18
2.6.1	Énoncé	18
2.6.2	Exemples d'application	18
2.7	Bilan	19
2.8	Notes bibliographiques	19
3	NP-complétude	21
3.1	Classe P	21
3.2	Classe NP	21
3.2.1	Définition	21
3.2.2	Définition alternative : vérificateur par certificat	22
3.2.3	Réductions polynomiales	22
3.2.4	NP-dureté	22
3.3	Théorème de Cook	23
3.3.1	Dans NP	23
3.3.2	NP-dur	23
3.4	Réductions polynomiales pour montrer la NP-dureté	26
3.4.1	3-SAT	26
3.4.2	3-coloration	27
3.5	Panoramas de problèmes	28
3.5.1	Problèmes dans NP conjecturés ni dans P, ni NP-complets	29
3.5.2	Démonstration de l'appartenance à P récente	29
3.6	NP-complétude en pratique	29
3.6.1	Branch and bound	29
3.6.2	Algorithmes d'approximation	29
3.6.3	Réduction à SAT ou à la programmation linéaire entière	29

4	Classes de complexité	31
4.1	Définition des classes de complexité	31
4.1.1	Classes non stables par modèle de calcul	31
4.1.2	Classes stables par modèle de calcul	31
4.2	Théorème de Savitch	32
4.3	PSPACE	33
4.3.1	Rappel : SAT et VALIDE	33
4.3.2	QBF : formules booléennes quantifiées	33
4.3.3	Jeux à deux joueurs	35
4.4	Universalité d'un langage rationnel	37
4.5	LOGSPACE et NLOGSPACE	39
4.5.1	Définitions	39
4.5.2	Accessibilité	39
4.5.3	NL-complétude	39
4.5.4	$NL \subseteq P$	40
4.5.5	Théorème de Immerman-Szelepcsenyi : $NL = co-NL$	41
4.5.6	2SAT	42
4.5.7	Problèmes P -complets	43
5	Théorie des fonctions récursives	45
5.1	Fonctions primitives récursives	45
5.1.1	Schémas primitifs	45
5.1.2	Syntaxe d'un langage de programmation fonctionnelle	45
5.1.3	Sémantique	46
5.2	Exemples de fonctions récursives primitives	47
5.2.1	Prédicats	47
5.2.2	Minimisation bornée	47
5.3	Codage par un entier	48
5.3.1	Bijection de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N}	48
5.3.2	Application 1 : suites définies par récurrence	49
5.3.3	Application 2 : structure de données (exemple des listes)	49
5.4	(*) Langage de programmation impératif jouet vers fonctions primitives récursives	50
5.5	Limite des fonctions récursives primitives	50
5.5.1	Preuve via un argument diagonal	50
5.5.2	Fonction d'Ackermann-Péter	51
5.6	Fonctions μ -récursives partielles	51
5.6.1	Minimisation non bornée	51
5.6.2	Syntaxe	52
5.6.3	Sémantique	52
5.7	Fonctions μ -récursives totales	52
5.8	(*) Langage de programmation impératif avec while vers fonctions μ -récursives partielles	53
5.9	Équivalence avec les machines de Turing	53
5.9.1	Des fonctions μ -récursives aux machines de Turing	53
5.9.2	Des machines de Turing aux fonctions μ -récursives	55
5.10	Bilan	56
5.11	Notes bibliographiques	56
A	PRIMES est dans NP	59

Chapitre 1

Machines de Turing

Points du programme de l'agrégation

Définitions des machines de Turing. Équivalence entre classes de machines (exemples : nombre de rubans, alphabet).

1.1 Problèmes de décision

Définition 1 (problème de décision)

Un **problème de décision** est une fonction qui à une entrée associe oui ou non.

Exemple 2 **Connexe**

entrée : un graphe fini non orienté G ;

sortie : oui si G est connexe ; non, sinon.

Définition 3 (instance)

Une entrée d'un problème de décision s'appelle une **instance**.

Définition 4 (instance positive, instance négative)

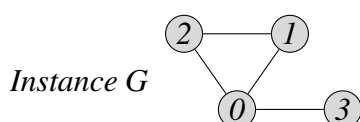
- Une instance est **positive** si sa sortie est oui.
- Une instance est **négative** si sa sortie est non.

Exemple 5

- Un graphe fini non orienté G est une **instance** de **Connexe**.
- Un graphe fini non orienté G connexe est une **instance positive** de **Connexe**.
- Un graphe fini non orienté G non connexe est une **instance négative** de **Connexe**.

1.2 Codage

Exemple 6 ([Sipser, 2006], p. 186)

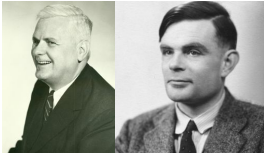


Codage par le mot $\langle G \rangle = 100\#0-1\#0-10\#0-11\#1-10$

Problème de décision **Connexe**

Langage $L = \{\langle G \rangle \mid G \text{ est un graphe non orienté connexe}\}$.

1.3 Thèse de Church-Turing



Une machine de Turing
modélise
un algorithme.

1.4 Définition des machines de Turing

http://people.irisa.fr/Francois.Schwarzentruber/turing_machine_simulator/

Définition 7 (machine de Turing non déterministe ([Sipser, 2006], p. 168))

Une **machine de Turing non-déterministe** est un tuple $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc})$ où :

- Q est un ensemble fini non vide d'états ;
- Σ est l'alphabet fini des mots d'entrée tel que $\sqcup \notin \Sigma$;
- Γ est l'alphabet fini du ruban avec $\Sigma \subseteq \Gamma$ et $\sqcup \in \Gamma$;
- $\delta \subseteq (Q \times \Gamma) \times (Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow, \bullet\})$;
- $q_0 \in Q$ est l'**état initial** ;
- $q_{acc} \in Q$ est l'**état d'acceptation** ;
- $q_{rej} \in Q$ est l'**état de rejet** avec $q_{acc} \neq q_{rej}$.

Définition 8 (machine de Turing déterministe)

Une machine de Turing $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc})$ est **déterministe** si δ est une fonction partielle

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{\leftarrow, \rightarrow, \bullet\}.$$

Définition 9 (configuration)

Une **configuration** est un mot uqv où $u \in \Gamma^*$, $v \in \Gamma^\omega$ et $q \in Q$.

Définition 10 (configuration initiale)

Une **configuration initiale** est un mot $q_0 w \sqcup \dots$ où q_0 est l'état initial et $w \in \Sigma^*$.

Définition 11 (configuration acceptante)

Une configuration est **acceptante** si l'état de la configuration est q_{acc} .

Définition 12 (un pas de calcul)

Pour tout $a, b, c \in \Gamma$, $u \in \Gamma^*$, $v \in \Gamma^\omega$,

- Si $(q, a, q', b, \leftarrow) \in \delta$ alors $ucqav$ devient $uq'cbv$;
- Si $(q, a, q', b, \bullet) \in \delta$, alors $uqav$ devient $uq'bv$;
- Si $(q, a, q', b, \rightarrow) \in \delta$, alors $uqav$ devient $ubq'v$;

Définition 13 (exécution)

Une **exécution** est une suite maximale de configurations C_1, \dots, C_k telle que C_i devient C_{i+1} .

Définition 14 (exécution acceptante)

Une exécution est C_1, \dots, C_k **acceptante** si C_k est une configuration acceptante.

Définition 15 (acceptation d'un mot)

Une machine M **accepte** un mot w s'il existe une exécution acceptante C_1, \dots, C_k

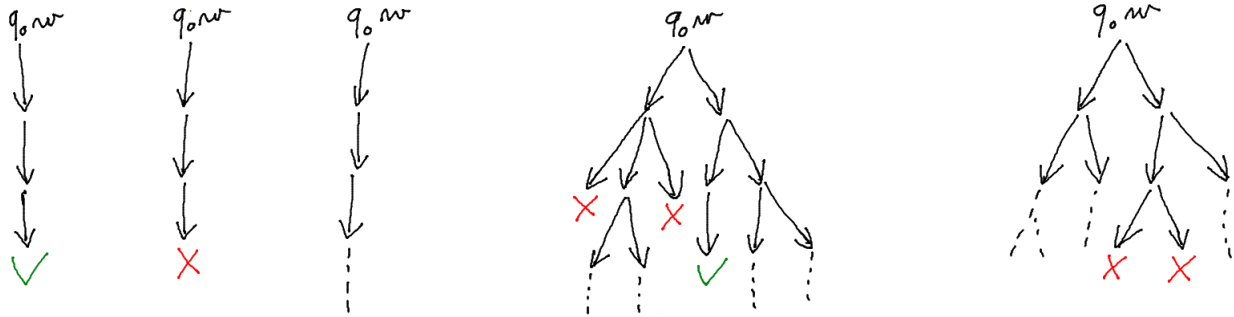
où C_1 est la configuration initiale $q_0 w \sqcup \dots$.

Définition 16 (arbre de calcul)

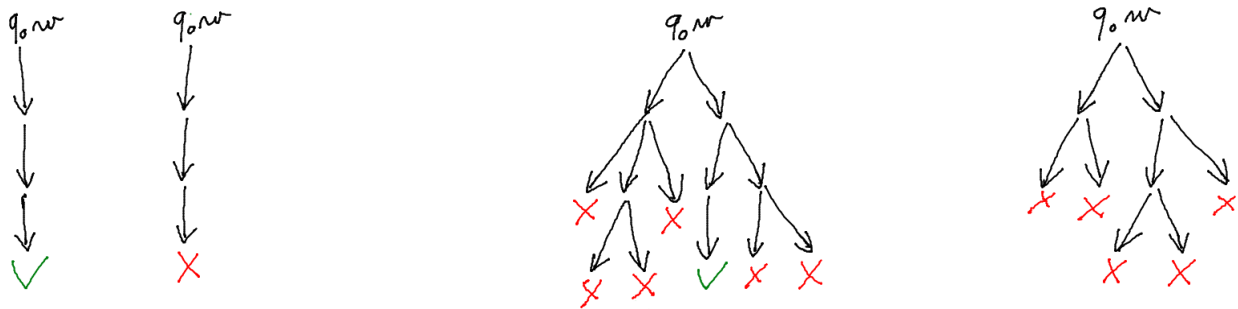
L'**arbre de calcul** depuis $q_0 w \sqcup \dots$ est l'arbre de racine $q_0 w \sqcup \dots$ et t.q. les fils de tout nœud C sont les configurations C' où C devient C' .

Définition 17 (langage accepté)

Le langage accepté par M , noté $L(M)$, est l'ensemble des mots w acceptés par M .

**Définition 18 (décideur, langage décidé)**

([Sipser, 2006], p. 170, p. 180) Une machine de Turing M qui s'arrête depuis $q_0 w$ pour tout mot w est appelé **decideur**. On dit que le langage accepté par M est **décidé** par M .

**Définition 19 (M décide L en temps f)**

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. M décide L en temps f si

- M décide L ;
- pour tout w , la hauteur de l'arbre de calcul depuis $q_0 w$ est $\leq f(|w|)$.

1.5 Equivalence entre machines de Turing

1.5.1 Plusieurs rubans

Définition 20 (machine de Turing déterministe à k rubans)

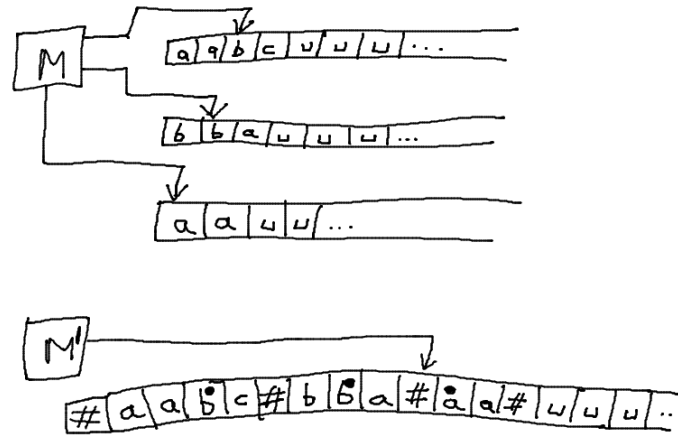
Une machine de Turing $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{acc})$ est déterministe si δ est une fonction partielle

$$\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{\leftarrow, \rightarrow, \bullet\}^k.$$

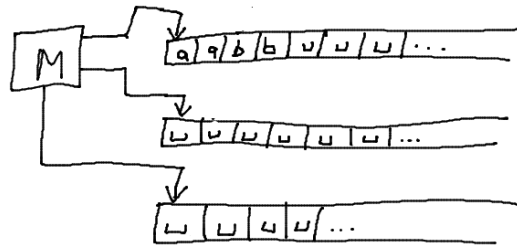
Théorème 21 ([Sipser, 2006], p. 177) Une machine de Turing déterministe à k rubans est équivalente à une machine de Turing déterministe à un ruban.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

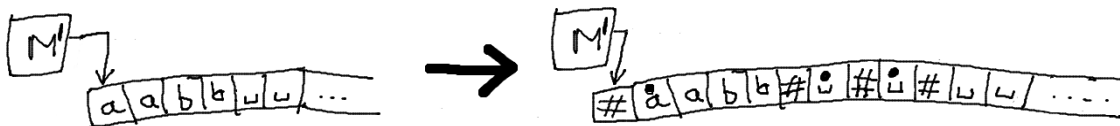
Soit M une machine de Turing déterministe à k rubans. On construit M' à un ruban qui simule M . L'idée est de concaténer les k rubans en les séparant par $\#$ et en marquant les cases sous le curseur avec \bullet .



La configuration initiale de M est :



Ainsi, la machine M' met d'abord son ruban dans le format qui représente les k rubans :



Corollaire 22 *Un langage est accepté par une machine de Turing déterministe à k rubans ssi il est accepté par une machine de Turing déterministe à un ruban.*

Corollaire 23 *Un langage est décidé par une machine de Turing (décideuse) déterministe à k rubans ssi il est décidé par une machine de Turing déterministe (décideuse) à un ruban.*

1.5.2 Déterministe vs non-déterministe

Théorème 24 ([Sipser, 2006], p. 179) *Une machine de Turing non-déterministe est équivalente à une machine de Turing déterministe.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Soit M une machine de Turing non-déterministe. On construit une machine déterministe D qui simule un **parcours en largeur** de l'arbre de calcul de M à trois rubans (quitte à la transformer en une machine à un ruban avec le théorème 21).

1.5.3 Autres variantes

- Ruban infini dans les deux sens ([Wolper, 2006], p. 110);
- Éliminer le surplace \bullet ;
- Machines de Turing à deux états seulement;
- Machine où les actions du curseurs sont 'se déplacer d'une case vers la droite' ou 'retourner tout au début du ruban, tout à gauche' [Sipser, 2006];
- Uniquement 2 lettres (en plus de \sqcup);
- Automate à file
- 2-tag

1.6 Notes bibliographiques

Dans [Papadimitriou, 2003], il utilise un caractère spécial \triangleright comme butoir pour le côté gauche du ruban. Les configurations sont des triplets (u, q, v) où $u, v \in \Sigma^*$ et $q \in Q$. Il confond alphabet d'entrée et alphabet de sortie.

Dans [Sipser, 2006], l'explication sur le ruban infini à droite est légère : on confond uqv et $uqv\sqcup$.

Dans [Perifel, 2014], il donne directement la définition des machines à k rubans.

Chapitre 2

Indécidabilité

Points du programme de l'agrégation

Universalité, décidabilité, Indécidabilité. Théorème de l'arrêt. Théorème de Rice. Réduction de Turing. Définitions et caractérisations des ensembles récursifs, récursivement énumérables.

2.1 Classes R et RE

Définition 28 (décidable/récursif)

Un problème de décision **A** est **décidable/récursif** s'il existe une machine de Turing (décideuse) qui décide **A**.

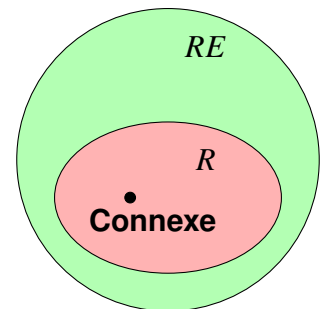
On note R la classe des problèmes de décision décidables.

Exemple 29 Connexe est décidable, i.e. **Connexe** $\in R$.

Définition 30 (récursivement énumérable)

Un problème de décision **A** est **récursivement énumérable** s'il existe une machine de Turing qui accepte **A**.

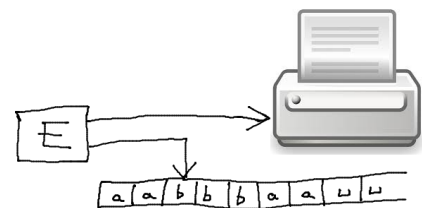
On note RE la classe des problèmes de décision récursivement énumérables.



2.2 Enumérateurs

Définition 31 (énumérateur)

([Sipser, 2006], p. 18-181) Un **énumérateur** est une machine de Turing qui imprime/énumère des mots.



Théorème 32 $L \in RE$ ssi il existe un énumérateur qui énumère des mots.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

\Leftarrow Soit E un énumérateur de L .
Voici une machine M qui accepte L :

```

procédure  $M(w)$ 
  Boucle infinie
  Continuer l'exécution  $E$ 
  Soit  $u$  le mot imprimé par  $E$ 
  si ( $u = w$ ) accepter
  
```

\Rightarrow Soit M une machine qui accepte L .
On construit E qui énumère les mots de L :

```

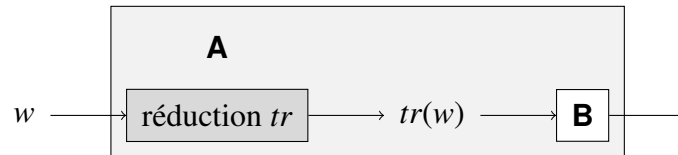
procédure  $E()$ 
  pour  $n := 0, 1, 2, \dots$ 
    pour tout mot  $w$  de longueur  $\leq n$ 
      Exécuter  $n$  étapes de calcul de  $M(w)$ 
      si config atteinte est acceptante alors
         imprimer  $w$ 
  
```


2.4 Montrer l'indécidabilité par réduction

2.4.1 Réduction

Définition 36 (Réduction)

Une **réduction** d'un problème **A** à un problème **B** est une fonction tr calculable telle que pour toute instance w de **A**, w est instance positive de **A** ssi $tr(w)$ est instance positive de **B**.



On dit que **A se réduit à B** s'il existe une réduction de **A** à **B**.

Théorème 37 Si **A se réduit à B** alors :

- **B** décidable implique **A** décidable.
- **A** indécidable implique **B** indécidable.

(le schéma donne un algorithme pour **A**)

(contraposée)

2.4.2 Exemple : acceptation par une machine de Turing

On s'intéresse au **problème de l'acceptation d'un mot** par une machine de Turing :

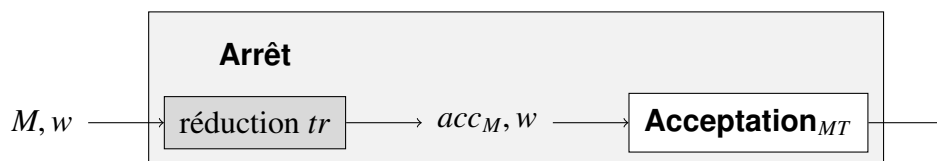
Acceptation_{MT}

entrée : une machine de Turing M , un mot w ;
sortie : oui si M accepte w ; non, sinon.

Théorème 38 **Acceptation_{MT}** est indécidable.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

On réduit **Arrêt** dans **Acceptation_{MT}**.



On pose $tr(M, w) = (acc_M, w)$ où acc_M est la machine suivante :

```

procédure  $acc_M(w)$ 
|
|  $M(w)$ 
|
| accepter

```

tr est une réduction de **Arrêt** dans **Acceptation_{MT}**. En effet :

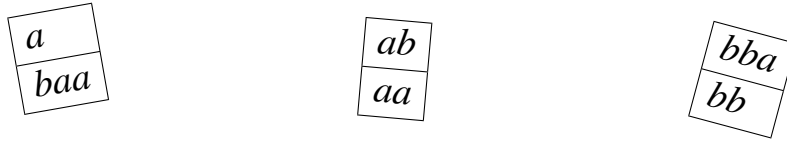
- tr est calculable (acc_M est construite effectivement à partir de M) ;
- $(M, w) \in \mathbf{Arrêt}$ ssi $M(w)$ s'arrête ssi acc_M accepte w ssi $tr(M, w) \in \mathbf{Acceptation}_{MT}$.

Comme **Arrêt** est indécidable, **Acceptation_{MT}** est indécidable. ■

2.5 Problèmes de correspondance de Post

2.5.1 Définitions

Le problème de correspondance de Post prend en entrée un système de tuiles comme



et répond oui ssi on peut mettre bout à bout des tuiles du système (on peut réutiliser plusieurs fois la même tuile) pour que les mots du haut et du bas soient identiques.

<i>bba</i>	<i>ab</i>	<i>bba</i>	<i>a</i>	<i>ab</i>	<i>bba</i>	<i>a</i>
<i>bb</i>	<i>aa</i>	<i>bb</i>	<i>ba</i>	<i>aa</i>	<i>bb</i>	<i>baa</i>

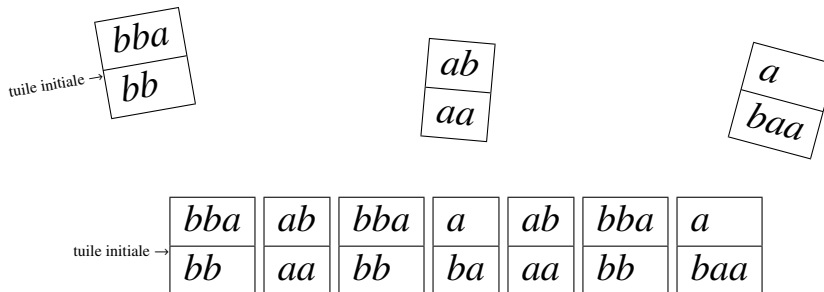
Définition 39 (Problème de correspondance de Post)

Post

entrée : un alphabet fini Σ , une famille finie de couples de mots $((h_i, b_i))_{i=1..n}$ sur Σ ;

sortie : oui s'il existe $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ tels que $p \geq 1$ et $h_{i_1} \dots h_{i_p} = b_{i_1} \dots b_{i_p}$; non, sinon.

Le problème de Post marqué est similaire mais impose de commencer une tuile initiale.



<i>bba</i>	<i>ab</i>	<i>bba</i>	<i>a</i>	<i>ab</i>	<i>bba</i>	<i>a</i>
<i>bb</i>	<i>aa</i>	<i>bb</i>	<i>ba</i>	<i>aa</i>	<i>bb</i>	<i>baa</i>

Définition 40 (Problème de correspondance de Post marqué)

Post_{marqué}

entrée : un alphabet fini Σ , une famille finie de couples de mots non vides $((h_i, b_i))_{i=1..n}$ sur Σ ;

sortie : oui s'il existe $i_2, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\}$ tels que $p \geq 1$ et $h_1 h_{i_2} \dots h_{i_p} = b_1 b_{i_2} \dots b_{i_p}$; non, sinon.

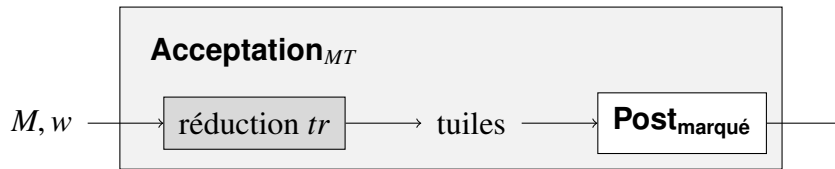
2.5.2 Démonstrations d'indécidabilité

Théorème 41 $Post_{marqué}$ est indécidable.

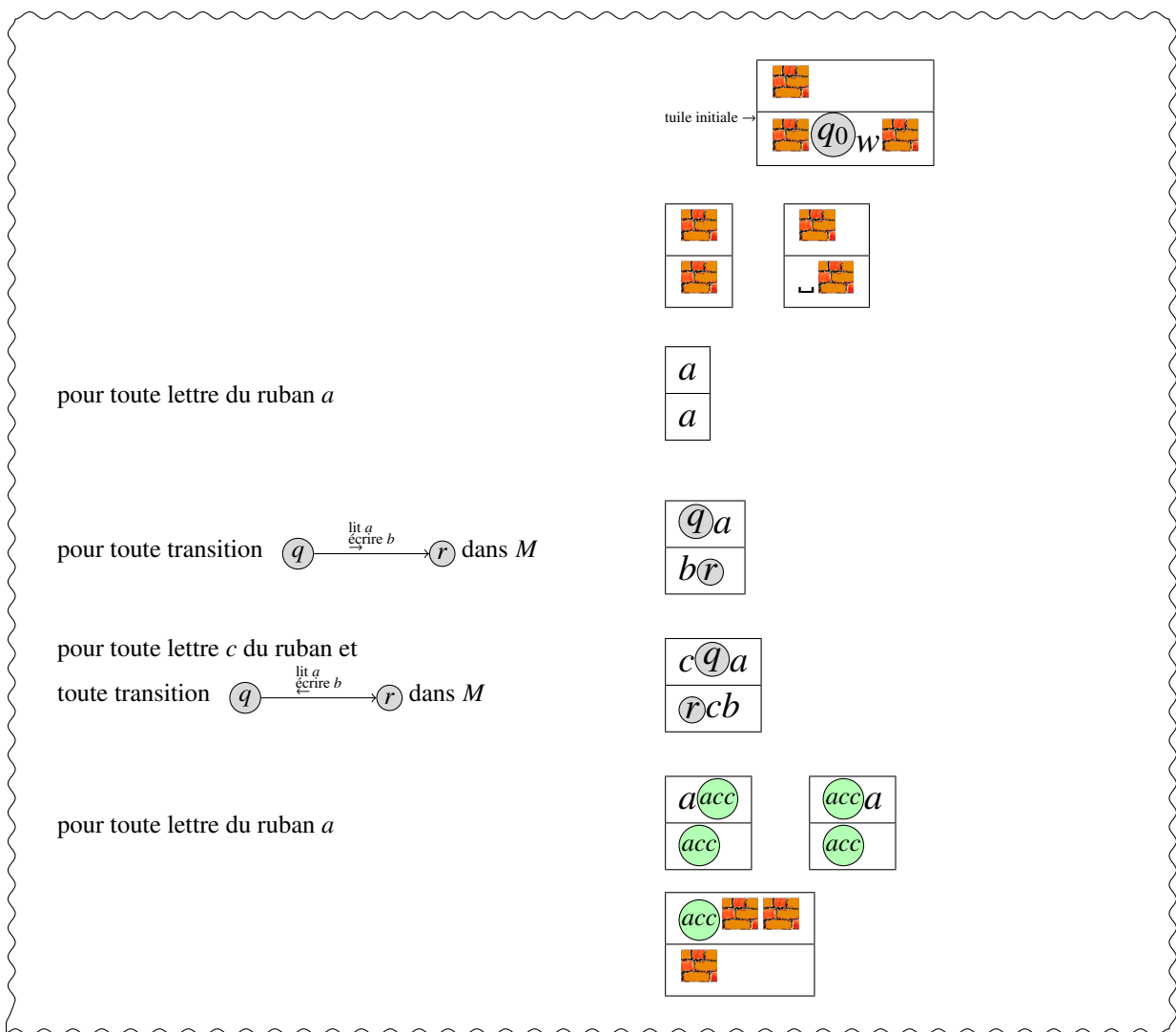
IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

[Sipser, 2006]

Définissons une réduction tr de $Acceptation_{MT}$ dans $Post_{marqué}$.



$tr(M, w)$ est le système de tuiles ci-dessous :

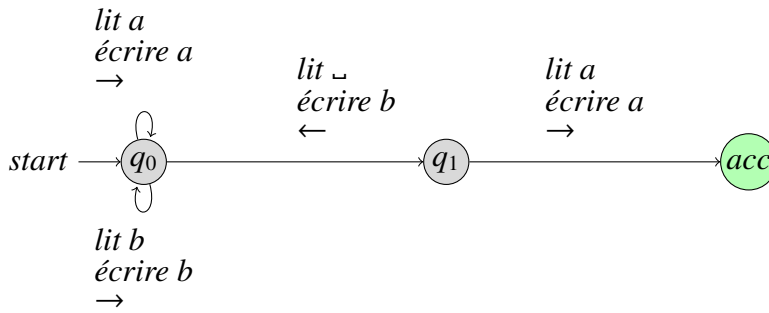


1. tr est une fonction calculable ;
2. M accepte w ssi $tr(M, w)$ est une instance positive de $Post_{marqué}$.

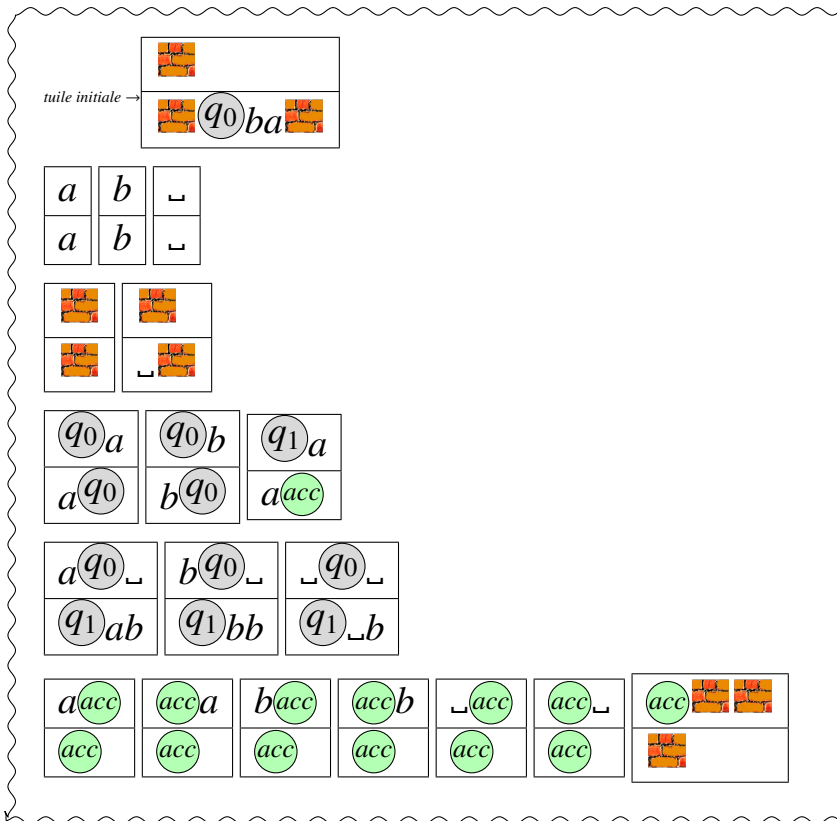
Comme $Acceptation_{MT}$ est indécidable, $Post_{marqué}$ est indécidable.



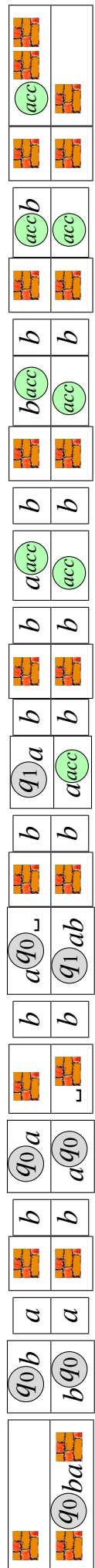
Exemple 42 Considérons la machine de Turing M suivante qui accepte les mots qui finissent par un a :



et le mot $w = ba$.



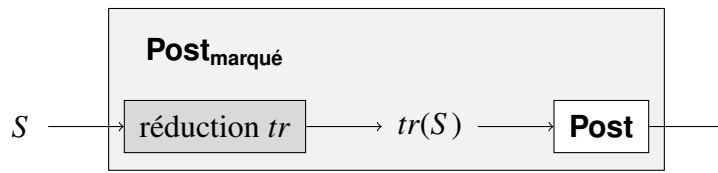
L'exécution acceptante de M sur aba est représentée par la suite de tuiles sur le bord droit de la page.



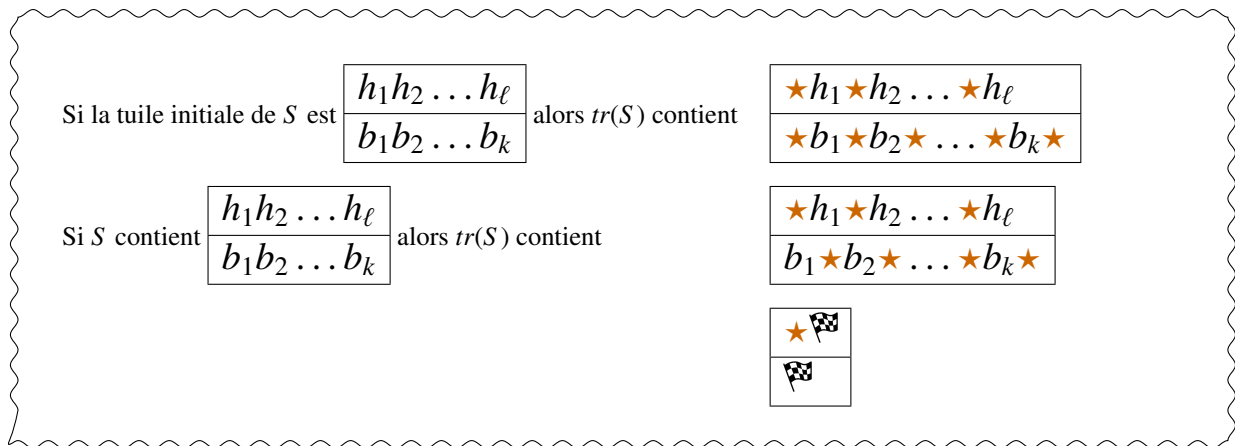
Théorème 43 *Post* est indécidable.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

[Sipser, 2006] Définissons une réduction de **Post**_{marqué} dans **Post**.



Pour tout système de tuiles S , $tr(S)$ est définie comme :



1. tr est une fonction calculable ;
2. S instance positive de **Post**_{marqué} ssi $tr(S)$ instance positive de **Post**.

Comme **Post**_{marqué} est indécidable, **Post** est indécidable. ■

Exemple 44 L'instance de **Post**_{marqué}



est transformée en l'instance de **Post** suivante :



2.6 Théorème de Rice

2.6.1 Enoncé

Théorème 45 (de Rice) [Wolper, 2006] Soit \mathcal{P} telle $\emptyset \subsetneq \mathcal{P} \subsetneq RE$.

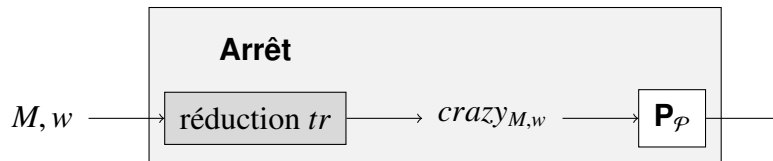
Le problème $\mathbf{P}_{\mathcal{P}}$ suivant est indécidable :

$\mathbf{P}_{\mathcal{P}}$

entrée : une machine de Turing M ;
sortie : oui si $L(M) \in \mathcal{P}$; non, sinon.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Sans perte de généralité, on suppose que $\emptyset \notin \mathcal{P}$. Réduisons **Arrêt** à $\mathbf{P}_{\mathcal{P}}$.



Soit $\mathbf{G} \in \mathcal{P}$. Comme $\mathbf{G} \in RE$, il existe une machine G qui accepte \mathbf{G} . La réduction tr est définie par

$$tr(M, w) = crazy_{M,w}$$

où $crazy_{M,w}$ est la machine décrite à droite.

```

procédure  $crazy_{M,w}(x)$ 
|  $M(w)$ 
| si  $G$  accepte  $x$ 
| | accepter
| sinon
| | rejeter
    
```

1. tr est une fonction calculable : on construit effectivement $crazy_{M,w}$ à partir de M et w ;

2. M, w instance positive de **Arrêt**

$$\begin{array}{l}
 \text{ssi} \\
 M \text{ s'arrête sur } w \\
 \text{ssi} \\
 L(crazy_{M,w}) \in \mathcal{P} \\
 \text{ssi}
 \end{array}
 \quad L(crazy_{M,w}) = \begin{cases} \mathbf{G} & \text{si } M \text{ s'arrête sur } w \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

$tr(M, w) = crazy_{M,w}$ instance positive de $\mathbf{P}_{\mathcal{P}}$.

■

2.6.2 Exemples d'application

Les problèmes de décision suivants sont indécidables :

Exemple 46 Avec $\mathcal{P} = \{\emptyset\}$:

Langagevide

entrée : une machine de Turing M
sortie : oui si $L(M) = \emptyset$; non, sinon.

Exemple 47 $\mathcal{P} = \{L \mid \{\langle G \rangle \mid G \text{ est un graphe connexe}\} \subseteq L\}$:

TestSiGraphesConnexesAcceptes

entrée : une machine de Turing M
sortie : oui si $\{\langle G \rangle \mid G \text{ est un graphe connexe}\} \subseteq L(M)$; non, sinon.

2.7 Bilan

Définition 48 (problème dual)

Soit \mathbf{A} un problème de décision. Le **problème dual** de \mathbf{A} est :

$\overline{\mathbf{A}}$

entrée : une instance w ;

sortie : oui si $w \notin \mathbf{A}$; non sinon.

Définition 49 (*co-RE*)

$co-RE = \{\mathbf{A} \mid \overline{\mathbf{A}} \in RE\}$.

Théorème 50 $RE \cap co-RE = R$

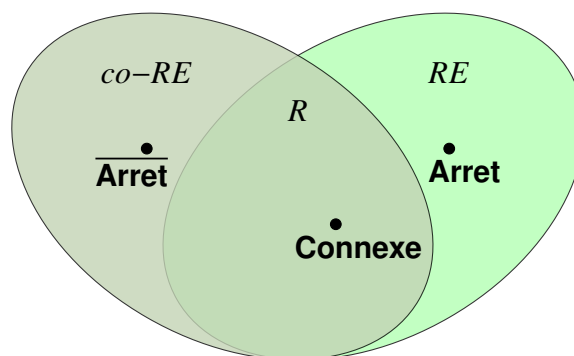
IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Supposons $\mathbf{A} \in RE$ et $\overline{\mathbf{A}} \in RE$. Soit A et \overline{A} des semi-algorithmes respectifs pour \mathbf{A} et $\overline{\mathbf{A}}$. L'algorithme A' défini ci-dessous décide \mathbf{A} :

procédure $A'(w)$

Lancer en parallèle $A(w)$ et $\overline{A}(w)$ et s'arrêter dès lors qu'un des processus a accepté w
accepter si A a accepté w ; **rejeter** si \overline{A} a accepté w .

■



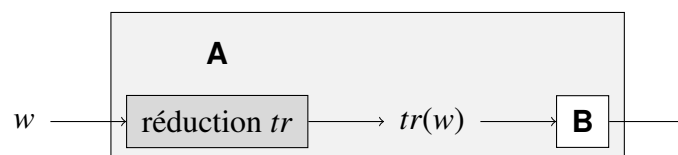
2.8 Notes bibliographiques

Problème de l'arrêt

Dans [Wolper, 2006], il introduit le langage LU , etc. La présentation est longue mais intéressante avant d'arriver... au problème de l'arrêt. J'ai préféré ici une présentation plus directe. Dans [Sipser, 2006], le problème présenté dans la section "problème de l'arrêt" du livre est en fait le problème de l'acceptation. Le véritable problème de l'arrêt est présenté plus tard dans le livre.

Réduction

Je me suis inspiré de [Dasgupta et al., 2006] pour les schémas de réductions :



Chapitre 3

NP-complétude

Points du programme de l'agrégation

Complexité en temps et en espace : classe P. Machines de Turing non déterministes : classe NP. Acceptation par certificat. Réduction polynomiale. NP-complétude. Théorème de Cook.

3.1 Classe P

Définition 51 (classe P)

La classe **P** est la classe des problèmes de décision **A** tels qu'il existe une machine de Turing déterministe M et un polynôme f tels que M décide **A** en temps f .

Thèse Cobham–Edmonds [Arora and Barak, 2009] : **P** = classe des problèmes faciles

3.2 Classe NP

3.2.1 Définition

Définition 52 (classe NP)

La classe **NP** est la classe des problèmes de décision **A** tels qu'il existe une machine de Turing non-déterministe M et un polynôme f telle que M décide **A** en temps f .




3-COLORATION

entrée : Un graphe non orienté $G = (S, A)$;

sortie : oui si G est 3-coloriable; non sinon.

Proposition 53 **3-COLORATION** \in NP.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

```
procédure 3-coloration( $G$ )
  pour  $s \in S$ 
    choisir  $c[s]$  dans {, , };
  si  $c$  est une 3-coloriation alors
    accepter(gagné)
  sinon
    rejeter(perdu)
```

3.2.2 Définition alternative : vérifieur par certificat

Définition 54 (vérifieur)

([Sipser, 2006], p. 243) Un **vérifieur** pour un problème de décision **A** est une machine de Turing déterministe V tel que w est une instance positive de **A** ssi il existe c tel que V accepte (w, c) .

Définition 55 (certificat)

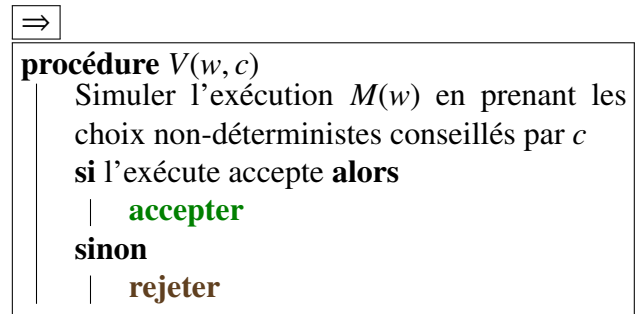
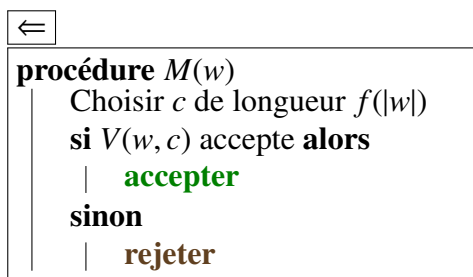
Un tel c s'appelle **certificat** de l'appartenance de w à **A**

ex : une 3-coloration

Proposition 56 ([Sipser, 2006], p. 244)

$A \in NP$ ssi il existe un vérifieur V pour **A** et un polynôme f tels que pour toute instance w , pour tout c , la longueur de l'exécution $V(w, c)$ est $\leq f(|w|)$.

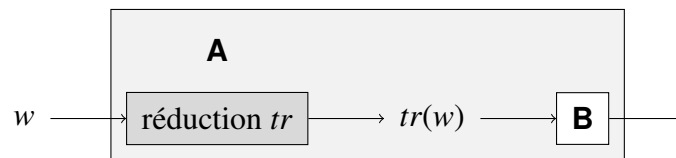
IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.



3.2.3 Réductions polynomiales

Définition 57 (Réduction)

Une **réduction polynomiale** d'un problème **A** à un problème **B** est une fonction $tr : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ calculable en temps polynomial telle que pour tout $w \in \Sigma^*$ de **A**, $w \in A$ ssi $tr(w) \in B$.



On dit que **A** se réduit en temps polynomial à **B** s'il existe une réduction polynomiale de **A** à **B** (intuitivement, **A** est plus facile que **B**).

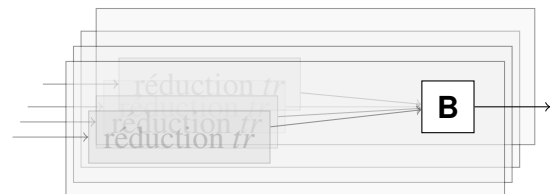
Théorème 58 Si **A** se réduit en temps polynomial **B**, alors :

1. $B \in P$ implique $A \in P$;
2. $B \in NP$ implique $A \in NP$.

3.2.4 NP-dureté

Définition 59 (NP-dur)

Un problème est **NP-dur** si tout problème de **NP** s'y réduit en temps polynomial.



Définition 60 (NP-complet)

Un problème est **NP-complet** s'il est dans **NP** et **NP-dur**.

Proposition 61 Si un problème **NP-dur** est dans **P** alors $P = NP$.

3.3 Théorème de Cook

SAT

entrée : Une formule φ de la logique propositionnelle ;

sortie : oui si φ est satisfiable, c'est à dire il existe une valuation ν telle que $\nu \models \varphi$; non sinon.

CNF-SAT

entrée : Une formule φ de la logique propositionnelle en forme normale conjonctive ;

sortie : oui si φ est satisfiable ; non sinon.

Théorème 62 (de Cook) *SAT et CNF-SAT sont NP-complets.*

3.3.1 Dans NP

Théorème 63 *SAT est dans NP.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Voici un algorithme non-déterministe qui décide **SAT** en temps polynomial.

```

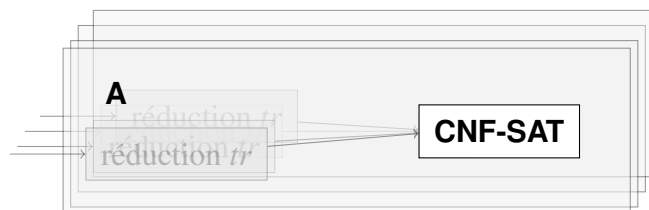
procédure sat( $\varphi$ )
  pour toute proposition atomique  $p$  dans  $\varphi$ 
  | choisir  $\nu[p]$  dans {faux, vrai};
  si  $\nu \models \varphi$  alors
  | accepter (gagné)
  sinon
  | rejeter (perdu)
  
```

3.3.2 NP-dur

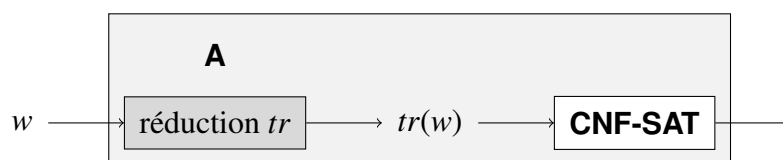
Théorème 64 *CNF-SAT est NP-dur.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

On montre que tout problème dans **NP** s'y réduit en temps polynomial. Soit $\mathbf{A} \in \mathbf{NP}$.



On va définir une réduction polynomiale tr tel que $w \in \mathbf{A}$ ssi $tr(w)$ est une formule satisfiable.



Soit $M = (\Sigma, \Gamma, Q, \delta, q_0, q_{acc})$ une machine de Turing non-déterministe qui décide \mathbf{A} en temps polynomial. Il existe un polynôme f tel que, pour toute entrée w , toutes les exécutions de M soient de longueur au plus $f(|w|)$. On modifie M pour que l'état final acceptant acc est un état sur lequel on boucle.

La formule $tr(w)$ exprime

“il existe une exécution acceptante de M sur le mot w en temps $f(|w|)$ ”.

Définition de $tr(w)$. Soit $C = \{0, \dots, f(|w|)\}$. On introduit les propositions atomiques :

au temps t ,
l'état est q

au temps t ,
la position du curseur est i

au temps t ,
la case n° i contient a

au temps t , on tire
la transition τ

où $t, i \in C, q \in Q, a \in \Gamma$ et $\tau \in \delta$.

Seules les $f(|w|)$ cases du ruban sont pertinentes car la tête de lecture ne va jamais au-delà.

Définissons $tr(w)$ comme la conjonction des formules 1-17 suivantes.

Unicité et existence des valeurs.

1. $\bigwedge_{t \in C} \bigvee_{q \in Q}$ au temps t , l'état est q La machine est dans un état à tout instant t
2. $\bigwedge_{t \in C} \bigwedge_{q, q' \in Q | q \neq q'} \left(\neg \text{au temps } t, \text{ l'état est } q \vee \neg \text{au temps } t, \text{ l'état est } q' \right)$ La machine n'est jamais dans deux états à la fois
3. $\bigwedge_{t \in C} \bigvee_{i \in C}$ au temps t , la position du curseur est i Le curseur est positionné quelque part à tout instant t
4. $\bigwedge_{t \in C} \bigwedge_{i, i' \in C | i \neq i'} \left(\neg \text{au temps } t, \text{ la position du curseur est } i \vee \neg \text{au temps } t, \text{ la position du curseur est } i' \right)$ Le curseur n'a jamais deux positions différentes
5. $\bigwedge_{t \in C} \bigwedge_{i \in C} \bigvee_{a \in \Sigma}$ au temps t , la case n° i contient a À tout instant, toute case du ruban contient une lettre
6. $\bigwedge_{t \in C} \bigwedge_{a, b \in \Sigma | a \neq b} \left(\neg \text{au temps } t, \text{ la case n° } i \text{ contient } a \vee \neg \text{au temps } t, \text{ la case n° } i \text{ contient } b \right)$ Une case ne contient au plus qu'une lettre
7. $\bigwedge_{t \in C} \bigvee_{\tau \in \delta}$ au temps t , on tire la transition τ À tout instant t , on tire une transition pour aller vers l'instant $t + 1$
8. $\bigwedge_{\tau, \tau' \in \delta | \tau \neq \tau'} \left(\neg \text{au temps } t, \text{ on tire la transition } \tau \vee \neg \text{au temps } t, \text{ on tire la transition } \tau' \right)$ On ne tire jamais plus d'une transition

Configuration initiale

9. $\text{au temps } 0, \text{ la case n° } 0 \text{ contient } \sqcup \wedge \text{au temps } 0, \text{ la case n° } 1 \text{ contient } x_1 \wedge \dots \wedge \text{au temps } 0, \text{ la case n° } n \text{ contient } x_n \wedge \text{au temps } 0, \text{ la case n° } n+1 \text{ contient } \sqcup \wedge \dots \wedge \text{au temps } 0, \text{ la case n° } f(|w|) \text{ contient } \sqcup$ À l'instant 0, le ruban contient $\sqcup x_1 \dots x_n \sqcup \dots \sqcup$
10. $\text{au temps } 0, \text{ l'état est } q_0 \wedge \text{au temps } 0, \text{ la position du curseur est } 1$ À l'instant 0, la machine est dans l'état initial q_0 à l'instant 0 et le curseur est à la position 1.

Exécution acceptante

11. au temps $f(|w|)$, l'état est q_{acc} La machine atteint l'état d'acceptation q_{acc}

Exécution des transitions

12. $\bigwedge_{t \in C} \bigwedge_{i \in C} \bigwedge_{a \in \Sigma} \left(\left(\begin{array}{|l} \text{au temps } t, \\ \text{la position} \\ \text{du curseur est } i \end{array} \wedge \begin{array}{|l} \text{au temps } t, \\ \text{la case n}^\circ i \\ \text{contient } a \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|l} \text{au temps } t + 1, \\ \text{la case n}^\circ i \\ \text{contient } a \end{array} \right)$ on ne change pas le contenu du ruban si le curseur n'y est pas
13. $\bigwedge_{t \in C \setminus \{f(|w|)\}} \bigwedge_{(q,a,q',b,d) \in \delta} \left(\begin{array}{|l} \text{au temps } t, \text{ on tire} \\ \text{la transition } (q, a, q', b, d) \end{array} \rightarrow \begin{array}{|l} \text{au temps } t, \\ \text{l'état est } q \end{array} \right)$
14. $\bigwedge_{t \in C \setminus \{f(|w|)\}} \bigwedge_{(q,a,q',b,d) \in \delta} \bigwedge_{i \in C} \left(\left(\begin{array}{|l} \text{au temps } t, \text{ on tire} \\ \text{la transition } (q, a, q', b, d) \end{array} \wedge \begin{array}{|l} \text{au temps } t, \\ \text{la position} \\ \text{du curseur est } i \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|l} \text{au temps } t, \\ \text{la case n}^\circ i \\ \text{contient } a \end{array} \right)$
15. $\bigwedge_{t \in C \setminus \{f(|w|)\}} \bigwedge_{(q,a,q',b,d) \in \delta} \left(\begin{array}{|l} \text{au temps } t, \text{ on tire} \\ \text{la transition } (q, a, q', b, d) \end{array} \rightarrow \begin{array}{|l} \text{au temps } t + 1, \\ \text{l'état est } q' \end{array} \right)$
16. $\bigwedge_{t \in C \setminus \{f(|w|)\}} \bigwedge_{(q,a,q',b,d) \in \delta} \bigwedge_{i \in C} \left(\left(\begin{array}{|l} \text{au temps } t, \\ \text{on tire} \\ \text{la transition} \\ (q, a, q', b, d) \end{array} \wedge \begin{array}{|l} \text{au temps } t, \\ \text{la position} \\ \text{du curseur est } i \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|l} \text{au temps } t + 1, \\ \text{la case n}^\circ i \\ \text{contient } b \end{array} \right)$
17. $\bigwedge_{t \in C \setminus \{f(|w|)\}} \bigwedge_{(q,a,q',b,d) \in \delta} \bigwedge_{i \in C | i+d \in C} \left(\begin{array}{|l} \text{au temps } t, \\ \text{on tire} \\ \text{la transition} \\ (q, a, q', b, d) \end{array} \wedge \begin{array}{|l} \text{au temps } t, \\ \text{la position} \\ \text{du curseur est } i \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{|l} \text{au temps } t + 1, \\ \text{la position} \\ \text{du curseur est } i + d \end{array}$

La formule $tr(w)$ est bien en forme normale conjonctive.

1. $tr(w)$ est calculable en temps polynomial en $|w|$ à partir de w ;
2. $w \in \mathbf{A}$ ssi $tr(w)$ est une formule satisfiable.

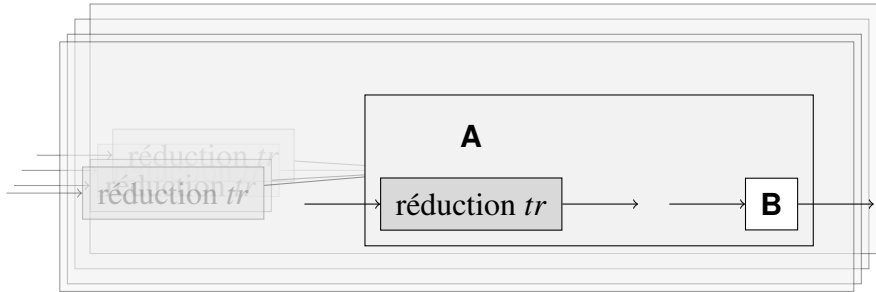
\Rightarrow Soit $w \in \mathbf{A}$. Alors il existe une exécution de M acceptante sur le mot w en temps $f(|w|)$ et sur une longueur de ruban de $f(|w|)$. On construit une valuation qui satisfait $tr(w)$.

\Leftarrow Si $tr(w)$ est satisfiable. Soit ν une valuation qui satisfait $tr(w)$. On construit à partir de ν une exécution de M acceptante sur le mot w . Donc le mot w est une instance positive de \mathbf{A} . ■

3.4 Réductions polynomiales pour montrer la NP-dureté

Proposition 65 Si **A** se réduit polynomialement à **B** et que **A** est NP-dur alors **B** est NP-dur.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.



3.4.1 3-SAT

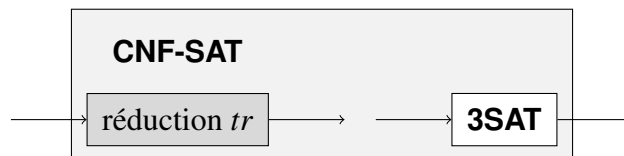
3-SAT

entrée : Une formule φ de la logique propositionnelle en 3-forme normale conjonctive ;
sortie : oui si φ est satisfiable ; non sinon.

Proposition 66 **3-SAT** est NP-dur.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Nous allons réduire polynomialement **CNF-SAT** à **3SAT**.



Si φ est une forme normale conjonctive, $tr(\varphi)$ est obtenue à partir de φ en remplaçant chaque clause par un ensemble de 3-clauses en introduisant des variables supplémentaires.

Exemple 67 $(a \vee b \vee c \vee d \vee e) \rightsquigarrow (a \vee b \vee \alpha) \wedge (\neg \alpha \vee c \vee \beta) \wedge (\neg \beta \vee d \vee e).$

Montrons que φ est satisfiable ssi $tr(\varphi)$ satisfiable.

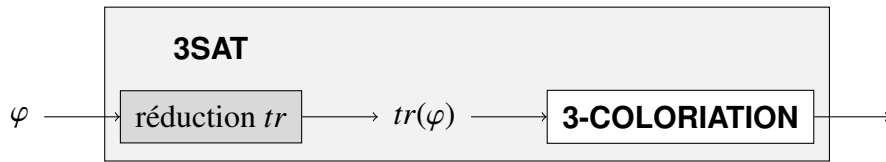
\Leftarrow Supposons que φ est vraie pour une certaine valuation. En particulier, chaque clause $(a \vee b \vee c \vee d \vee e)$ est vraie. Montrons que l'on peut donner des valeurs aux variables intermédiaires de sorte que $(a \vee b \vee \alpha) \wedge (\neg \alpha \vee c \vee \beta) \wedge (\neg \beta \vee d \vee e)$ soit vraies. L'une des variables a, b, c, d, e est à vraie. Par exemple, c est à vraie. Il suffit de mettre les premières variables intermédiaires à vraies jusqu'à être dans la 3-clause où apparaît c . Ici : α à vraie. Puis on met les variables intermédiaires suivantes à faux.

\Rightarrow Supposons que $tr(\varphi)$ soit satisfiable pour une certaine valuation. En particulier, chaque sous-conjonction de clauses $(a \vee b \vee \alpha) \wedge (\neg \alpha \vee c \vee \beta) \wedge (\neg \beta \vee d \vee e)$, obtenu à partir d'une clause de l'instance de SAT est vraie. Montrons que l'une des variables a, b, c, d, e est mise à vraie. Par l'absurde, supposons que toutes les variables a, b, c, d, e sont à faux. On a alors $\alpha, \beta, \neg \beta$ à vraie. Contradiction.

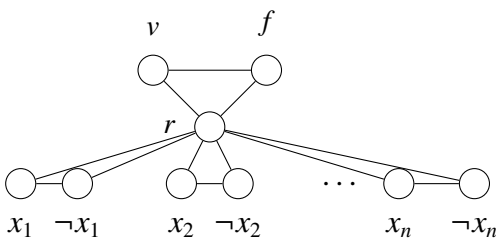
3.4.2 3-coloration

Théorème 68 3-COLORIATION est NP-dur.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.



On définit une réduction tr en temps polynomial qui à toute **3SAT**-instance φ associe une **3-COLORIATION**-instance $tr(\varphi)$. $tr(\varphi)$ est un graphe basé sur le **gadget** suivant :



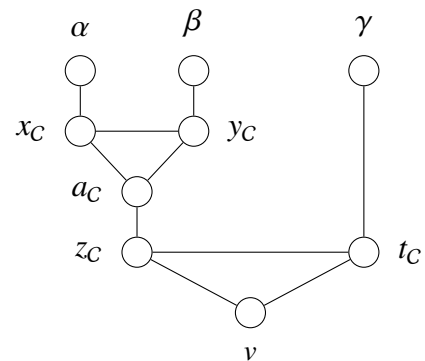
où x_1, x_2, \dots, x_n sont les propositions atomiques qui apparaissent dans φ . On code le fait qu'un littéral est vrai par le fait qu'il a la couleur du sommet v et faux s'il a la couleur du sommet f . La couleur de $\neg x$ est toujours différente de celle de x .

Ensuite, pour chaque 3-clause C de la forme $(\alpha \vee \beta \vee \gamma)$ de φ , on ajoute le gadget ci-dessous. Pour coder une 2-clause C de la forme $(\alpha \vee \beta)$, on prend le même gadget mais avec f à la place de γ . La fonction tr est calculable en temps polynomial.

Lemme 69 Dans toute coloration, l'un des sommets α, β, γ a la couleur de v .

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Par l'absurde, supposons qu'ils ont tous la couleur de f (on rappelle qu'ils ne peuvent pas avoir la couleur de r car la structure initiale ne le permet pas). Dans ce cas, comme γ est de la couleur de f , pour sûr t_C est de la couleur de r donc z_C est de la couleur de f . D'autre part, comme α et β sont de la couleur de f , pour sûr, x_C et y_C ne sont pas de couleur de f donc a_C est de couleur de f . Contradiction. ■



Lemme 70 On peut compléter toute coloriation où les sommets α, β, γ sont de la couleur de f ou v et l'un d'eux est de la couleur de v .

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Faire tous les cas. ■

Lemme 71 φ satisfiable ssi $tr(\varphi)$ est 3-coloriable.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

⇒ Supposons que φ est satisfiable et soit v une valuation telle que $v \models \varphi$. On colorie les noeuds de la façon suivante :

- $c[r] = \text{jaune}$; $c[v] = \text{vert}$; $c[f] = \text{rouge}$;
- $c[p] = \text{vert}$ si $v[p] = 1$; rouge sinon.
- $c[\neg p] = \text{rouge}$ si $v[p] = 1$; vert sinon.

Par le lemme 70, on complète la coloriation pour tous les gadgets. Donc $tr(\varphi)$ est 3-coloriable.

⇐ Supposons que $tr(\varphi)$ est 3-coloriable. On construit la valuation v :

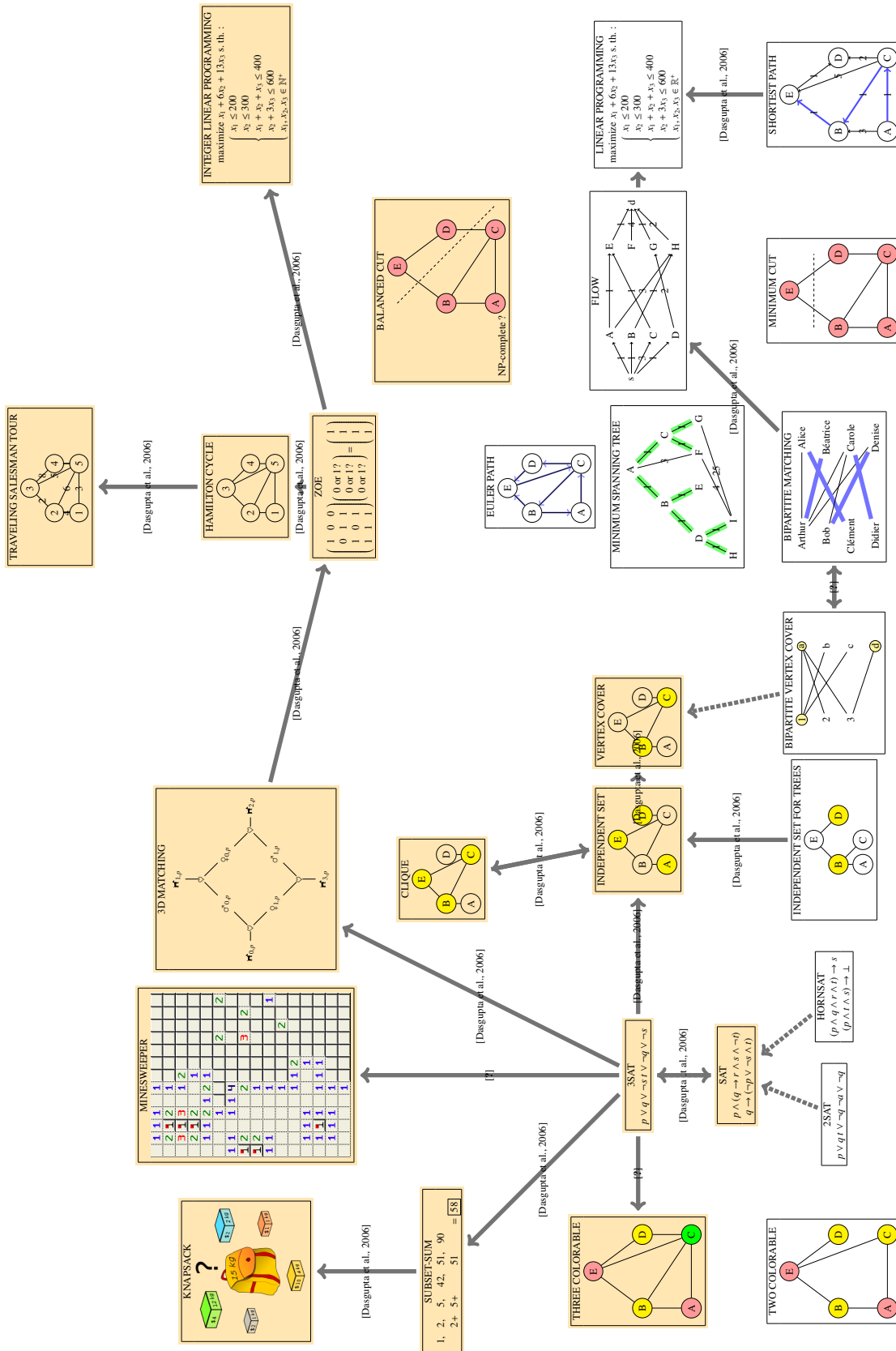
- $v[p_i] = 1$ si p_i est colorié avec la couleur de v : 0 sinon.

Par le lemme 69, $v \models \varphi$. ■

3.5 Panoramas de problèmes

21 problèmes de Karp : [Karp, 1972], [Dasgupta et al., 2006]

Autre référence : [Garey and Johnson, 1979]



3.5.1 Problèmes dans NP conjecturés ni dans P, ni NP-complets

ISOMORPHISME DE GRAPHERS

entrée : Deux graphes G_1, G_2


sortie : oui si G_1 et G_2 sont isomorphes; non, sinon.

FACTORISATION D'ENTRIERS

entrée : un entier n , un entier $1 < m < n$

sortie : oui s'il existe un facteur $d \in \{1, \dots, m\}$ de n ; non, sinon.

3.5.2 Démonstration de l'appartenance à P récente

 Contrairement à ce qui est dit dans [Garey and Johnson, 1979][p. 154], la primalité [Agrawal et al., 2004] et la programmation linéaire ([Khachiyan, 1980], [Wright, 2005]) ont été montrés dans P.

3.6 NP-complétude en pratique

3.6.1 Branch and bound

Exemple du voyageur de commerce : lire [Dasgupta et al., 2006].

3.6.2 Algorithmes d'approximation

Lire le chapitre correspondant dans [Dasgupta et al., 2006] ou la référence [Vazirani, 2013]. On a des fois des schémas d'approximation en temps polynomial. Par exemple, pour le voyageur de commerce, il existe un algorithme *vdapprox* tel que *vdapprox*(G, ϵ) retourne un voyage de longueur $\geq \ell_{opt} + \epsilon$ où ℓ_{opt} est la longueur optimale, en temps polynomial en G et ϵ .

3.6.3 Réduction à SAT ou à la programmation linéaire entière

- Compétitions SAT : <http://www.satcompetition.org/>
- Outil pédagogique pour l'algorithme DPLL :
http://people.irisa.fr/Francois.Schwarzentruer/dpll_demo/
- Outil pour la programmation linéaire entière : <https://www.gnu.org/software/glpk/>

Chapitre 4

Classes de complexité

4.1 Définition des classes de complexité

4.1.1 Classes non stables par modèle de calcul

Définition 72 ($TIME(f)$, $NTIME(f)$)

[Sipser, 2006, p. 229] Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

- $TIME(f) = \{L \mid L \text{ est décidé par une MT dét en temps } O(f(n))\}$;
- $NTIME(f) = \{L \mid L \text{ est décidé par une MT non dét en temps } O(f(n))\}$.

Définition 73 (décidé en espace f)

M décide L en espace f si M décide L et pour tout w , au plus $f(|w|)$ premières cases du ruban ont été utilisés dans les configurations de l'arbre de calcul depuis q_0w .

Définition 74 ($SPACE(f)$, $NSPACE(f)$)

[Sipser, 2006, p. 308] Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que $f(n) \geq n$.

- $SPACE(f) = \{L \mid L \text{ est décidé par une MT dét en espace } O(f(n))\}$;
- $NSPACE(f) = \{L \mid L \text{ est décidé par une MT non dét en espace } O(f(n))\}$.

4.1.2 Classes stables par modèle de calcul

Définition 75 (P , NP , $EXPTIME$, $NEXPTIME$, $PSPACE$, etc.)

- $P = \bigcup_k TIME(n \mapsto n^k)$
- $NP = \bigcup_k NTIME(n \mapsto n^k)$
- $EXPTIME = \bigcup_k TIME(n \mapsto 2^{n^k})$
- $NEXPTIME = \bigcup_k NTIME(n \mapsto 2^{n^k})$
- $PSPACE = \bigcup_k SPACE(n \mapsto n^k)$
- $NPSPACE = \bigcup_k NSPACE(n \mapsto n^k)$
- $EXPSPACE = \bigcup_k SPACE(n \mapsto 2^{n^k})$
- $NEXPSPACE = \bigcup_k NSPACE(n \mapsto 2^{n^k})$

Définition 76 (co- \mathcal{C})

$\text{co-}\mathcal{C} = \{L \subseteq \Sigma^* \mid \bar{L} \in \mathcal{C}\}$.

Définition 77 (\mathcal{C} -dur)

L est \mathcal{C} -dur ssi tout problème dans \mathcal{C} se réduit à L en temps polynomial.

Définition 78 (\mathcal{C} -complet)

L est \mathcal{C} -complet ssi L est dans \mathcal{C} et est \mathcal{C} -dur.

4.2 Théorème de Savitch

Théorème 79 (de Savitch) [Sipser, 2006, p. 310] Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(n) \geq n^1$ et $f(n)$ calculable en espace $O(f(n))$. $NSPACE(f) \subseteq SPACE(f^2)$.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Soit L un langage dans $NSPACE(f)$. Il existe une machine de Turing M non déterministe qui décide L avec un espace $f(n)$, quitte à multiplier f par une constante. Sans perte de généralité, on suppose que M efface son ruban et place le curseur à gauche avant d'accepter son entrée : on note c_{accept} cette configuration acceptante. Voici un algorithme déterministe qui décide L :

```

procédure deciderL( $w$ )
  si  $q_0w \rightarrow^* c_{accept}$  dans le graphe des configurations de  $M$ 
  | accepter
  sinon
  | rejeter

```

Lemme 80 Il existe $d \in \mathbb{N}$ t.q. le nombre de config. accessibles depuis q_0w est majoré par $2^{df(|w|)}$.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Le nombre de configurations accessibles depuis q_0w est majoré par $|Q| \times |\Sigma|^{f(|w|)} \times f(|w|)$. ■

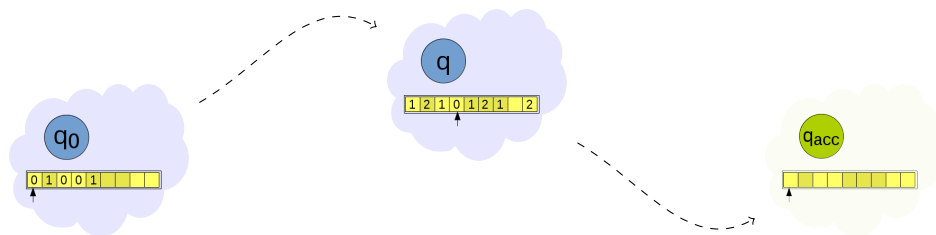
Lemme 81 $q_0w \rightarrow^* c_{accept}$ ssi $q_0w \rightarrow^{\leq 2^{df(|w|)}} c_{accept}$

On implémente le test $q_0w \rightarrow^* c_{accept}$ avec `chemin?($q_0w, c_{accept}, 2^{df(|w|)}$)` où `chemin?` est :

```

fonction chemin?( $c_1, c_2, t$ )
  si  $t = 1$ 
  | retourner ( $c_1 \rightarrow^{\leq 1} c_2$ )
  sinon
  | pour toute config.  $c$  de  $M$  de taille de ruban au plus  $f(|w|)$ 
  | | si chemin?( $c_1, c, \frac{t}{2}$ ) et chemin?( $c, c_2, \frac{t}{2}$ ) alors
  | | | retourner vrai
  | retourner faux

```



La fonction `chemin?` suit **diviser pour régner**. La complexité spatiale de `chemin?(c_1, c_2, t)` est $C(t) = O(f(|w|)) + C(\frac{t}{2})$, c'est à dire $C(t) = O(f(|w|)\log_2 t)$. D'où une complexité spatiale pour `deciderL(w)` de

$$\underbrace{O(f(|w|))}_{\text{calcul de } f(|w|)} + \underbrace{C(2^{df(|w|)})}_{O(f(|w|)^2)} = O(f|w|^2).$$

Corollaire 82 $PSPACE = NSPACE$.

1. $f(n) \geq n$ car on doit comptabiliser au moins la taille de l'entrée. Le théorème fonctionne aussi pour $f(n) \geq \log n$ mais il faut alors utiliser des machines de Turing à plusieurs rubans. ■

4.3 PSPACE

4.3.1 Rappel : SAT et VALIDE

Une formule propositionnelle φ est **satisfiable** ssi **il existe** une valuation ν telle que $\nu \models \varphi$.

SAT

entrée : une formule propositionnelle φ
sortie : oui si φ est satisfiable ; non sinon.

est **NP**-complet.

Une formule propositionnelle φ est **valide** ssi **pour toute** valuation ν , $\nu \models \varphi$.

VALIDE

entrée : une formule propositionnelle φ
sortie : oui si φ est valide ; non sinon.

est **co-NP**-complet.

4.3.2 QBF : formules booléennes quantifiées

But : définir un problème PSPACE-complet, **TQBF**, qui généralise **SAT** et **VALIDE**

Syntaxe

Définition 83 (formule booléenne quantifiée)

Une **formule booléenne quantifiée** (sous forme préfixe) est une formule de la forme

$$Q_1 p_1 \dots Q_n p_n \chi$$

où $Q_k \in \{\exists, \forall\}$ et χ est une formule de la logique propositionnelle. Une formule booléenne quantifiée est **close** si toutes les variables sont sous la portée d'un quantificateur.

Sémantique

Définition 84 (conditions de vérité)

- $\nu \models \chi$ comme en logique propositionnelle si χ est propositionnelle ;
- $\nu \models \exists p \varphi$ ssi $\nu[p := 0] \models \varphi$ ou $\nu[p := 1] \models \varphi$;
- $\nu \models \forall p \varphi$ ssi $\nu[p := 0] \models \varphi$ et $\nu[p := 1] \models \varphi$.

Si φ est close, $\nu \models \varphi$ ne dépend pas de ν et on dit que φ est **vraie** s'il existe ν t.q. $\nu \models \varphi$.

Problème de décision

TQBF

entrée : une formule booléenne quantifiée close φ
sortie : oui si φ est vraie ; non sinon.

Théorème 85 [Sipser, 2006](p. 285-287) **TQBF** est dans PSPACE.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Voici un algorithme qui vérifie que $\nu \models \varphi$ en espace polynomial en $|\nu|$ et $|\varphi|$:

```

fonction tqbf( $\nu, \varphi$ )
  match  $\varphi$ 
  |  $\exists p \psi$  : tqbf( $\nu[p := 0], \psi$ ) ou tqbf( $\nu[p := 1], \psi$ )
  |  $\forall p \psi$  : tqbf( $\nu[p := 0], \psi$ ) et tqbf( $\nu[p := 1], \psi$ )
  |  $\psi$  propositionnelle : oui si  $\nu \models \psi$  ; non sinon.
  
```

Théorème 86 *TQBF est NPSPACE-dur.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Soit L un problème NPSPACE. On réduit L à **TQBF** en temps polynomial.

on reprend la démonstration du théorème de Savitch...

Pour toute instance w de L , on crée une formule booléenne quantifiée $tr(w)$ qui exprime

‘il existe un chemin de q_0w à c_{accept} de longueur au plus $2^{df(|w|)}$ ’

$$tr(w) := (\vec{c}_{ini} = \text{config initiale avec } w) \wedge (\vec{c}_{acc} = \text{config acceptante}) \wedge ch?(\vec{c}_{ini}, \vec{c}_{acc}, 2^{df(|w|)}).$$

où $ch?(\vec{c}_1, \vec{c}_2, 2^k)$ exprime ‘chemin $?(c_1, c_2, 2^k)$ renvoie vrai’, où \vec{c}_1, \vec{c}_2 sont des collections de propositions atomiques qui représentent respectivement les configurations c_1 et c_2 .

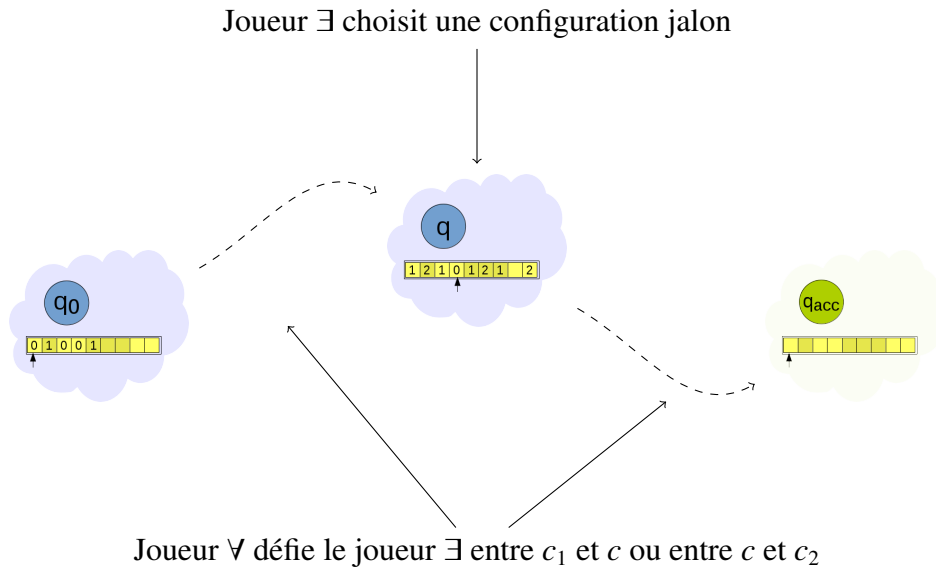
$ch?(\vec{c}_1, \vec{c}_2, 2^k)$ est définie par induction sur k :

$$— ch?(\vec{c}_1, \vec{c}_2, 2^0) = (\vec{c}_1 = \vec{c}_2) \vee succ(\vec{c}_1, \vec{c}_2);$$

— Si $k > 0$,

$$ch?(\vec{c}_1, \vec{c}_2, 2^k) = \exists \vec{c}, estConfig(\vec{c}) \wedge ch?(\vec{c}_1, \vec{c}, 2^{k-1}) \wedge ch?(\vec{c}, \vec{c}_2, 2^{k-1})$$

$$= \exists \vec{c}, estConfig(\vec{c}) \wedge (\forall (\vec{d}, \vec{d}') \in \{(\vec{c}_1, \vec{c}), (\vec{c}, \vec{c}_2)\} ch?(d, d', 2^{k-1})).$$



Par construction, $w \in L$ ssi $tr(w)$ est QBF-vraie. On peut écrire un algorithme qui calcule $tr(w)$ en temps polynomial en $|w|$. ■

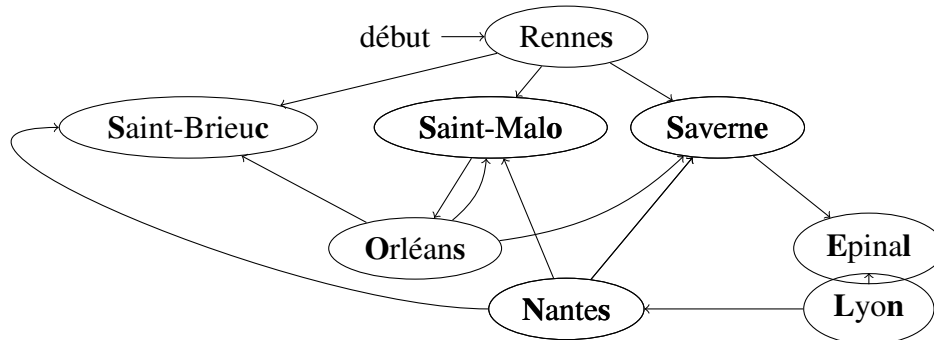
4.3.3 Jeux à deux joueurs

On utilise **TQBF** pour montrer la PSPACE-dureté de problèmes :

- model checking de la logique du premier ordre ;
- Jeu de géographie généralisé, etc., puis le Go ;
- Reversi, Hex, etc.

À l'inverse, on modélise des jeux à deux joueurs (exemple : les échecs) avec **TQBF** ([Kroening and Strichman, 2008], chap. 9, p. 209).

Jeu de géographie généralisé



On considère le jeu à deux joueurs suivant. Soit G un graphe fini et s un sommet de départ. Un jeton est placé dans s . Tour à tour, chaque joueur supprime le sommet où il y a le jeton puis déplace le jeton dans l'un des successeurs. Un joueur perd lorsque le jeton est dans un sommet sans successeur.

On considère le problème de décision ([Sipser, 2006], p. 289) :

GEOGRAPHIE

entrée : un graphe G , un sommet s de G ;

sortie : oui si le joueur 1 a une stratégie gagnante à partir de G, s ; non, sinon.

Proposition 87 ***GEOGRAPHIE** est dans PSPACE.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

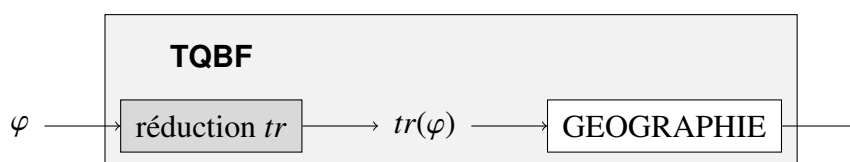
```

fonction joueurgagne( $G, s$ )
  pour  $t$  successeur de  $s$  dans  $G$ 
    si joueurgagne( $G \setminus \{t\}, t$ ) = faux
      retourner vrai
  retourner faux
  
```

■

Proposition 88 ***GEOGRAPHIE** est PSPACE-dur.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.



Soit φ une formule booléenne quantifiée close. On suppose qu'elle est de la forme

$$\exists p_1 \forall q_1 \dots \exists p_k \forall q_k \psi$$

où ψ est une forme normale conjonctive, c'est à dire

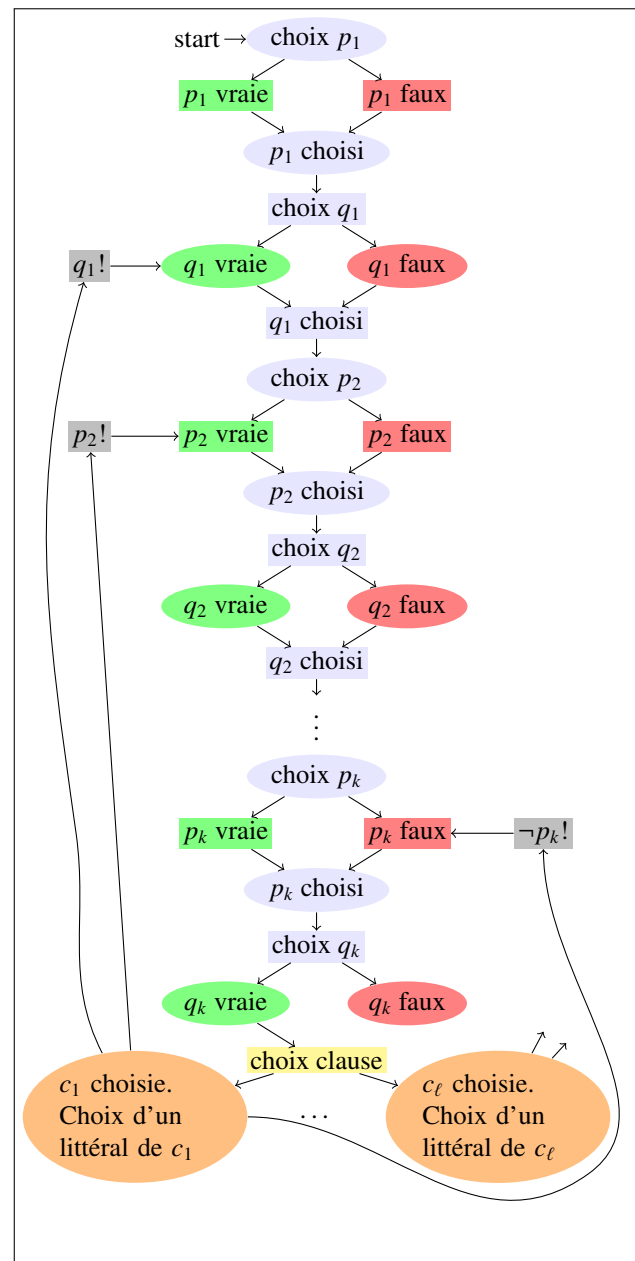
$$\psi = (c_1 \wedge \dots \wedge c_\ell)$$

où c_i est une clause.

$tr(\varphi)$ est donné par le graphe dessiné sur la droite où le sommet initial est 'choix p_1 '. Sur le dessin, on a pris l'exemple

$$c_1 = (q_1 \vee p_2 \vee \neg p_k).$$

- $tr(\varphi)$ est calculable en temps polynomial en $|\varphi|$.
- φ est QBF-vraie ssi le joueur 1 a une stratégie gagnante au jeu de géographie avec le graphe pointé $tr(\varphi)$.



4.4 Universalité d'un langage rationnel

Réf : [Aho and Hopcroft, 1974][p. 395, section 10.6]

UNIVERSALITE

entrée : Une expression régulière e ;
sortie : oui si $L(e) = \Sigma^*$; non, sinon.

Théorème 89 *UNIVERSALITE est dans PSPACE.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Voici une machine qui décide **UNIVERSALITE** en espace polynomial :

procédure nonuniverselle $?(e : \text{expression rationnelle})$

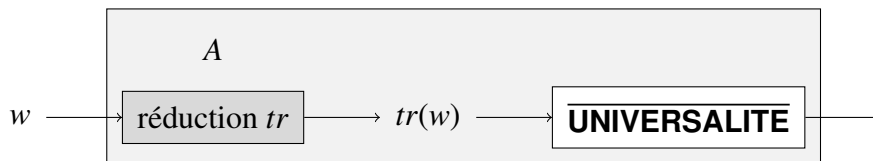
- $\mathcal{A} :=$ construire un automate non-déterministe tel que $L(\mathcal{A}) = L(e)$;
- $S :=$ clotûre de {état initial de \mathcal{A} }
- tant que** S contient un état final
 - choisir** lettre a
 - $S :=$ cloture des a -successeurs des états dans S

accepter

Théorème 90 *UNIVERSALITE est PSPACE-dur.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Soit $A \in \text{PSPACE}$. On réduit A à **UNIVERSALITE** en temps polynomial.



Soit M qui décide A en espace polynomial. Soit f un tel polynôme. Idée :

$$L(tr(w)) = \{\text{mots ne représentant pas une exécution acceptante de } M(w)\}$$

1. tr calculable en temps polynomial ;
2. $w \in A$ ssi $L(tr(w)) \neq \Omega^*$ où Ω est un alphabet défini plus bas.

Représentation des exécutions acceptantes. Un mot de la forme

$$\# C_1 \# C_2 \# \dots \# C_k \#$$



représente une exécution de M , avec $k \geq 1$, les C_i sont des mots de longueur $N = f(|w|)$ représentant les configurations, et $\#$ est un symbole frais séparant les mots C_i .

Exemple 91 $\# \begin{bmatrix} a \\ q_0 \end{bmatrix} bc \# \begin{bmatrix} b \\ q \end{bmatrix} c \# ba \begin{bmatrix} c \\ q' \end{bmatrix} \# \dots \# \begin{bmatrix} a \\ q_{acc} \end{bmatrix} aad \#$

Notations.

- Γ = alphabet du ruban
- C = alphabet des couples $\left[\begin{array}{l} \text{lettre du ruban} \\ \text{état} \end{array} \right]$
- A = alphabet des couples $\left[\begin{array}{l} \text{lettre du ruban} \\ q_{acc} \end{array} \right]$
- Δ = $\Gamma \cup C$
- Ω = $\Delta \cup \{ \text{curseur} \}$

Définition de $tr(w)$. L'expression rationnelle $tr(w)$ est l'union des expressions suivantes, chacune spécifiant une malformation dans un mot censé représenter une exécution acceptante :

$\Delta\Omega^*$ $\Omega^*\Delta$ $\Omega^* \text{curseur} \Gamma^* \text{curseur} \Omega^*$ $\Omega^* \text{curseur} \Delta^* C \Delta^* C \Delta^* \text{curseur} \Omega^*$ $\Omega^* \text{curseur} \text{curseur} \Omega^*$ $\Omega^* \text{curseur} \Delta \text{curseur} \Omega^*$ $\Omega^* \text{curseur} \Delta \Delta \text{curseur} \Omega^*$ \vdots $\Omega^* \text{curseur} \Delta^{N-1} \text{curseur} \Omega^*$ $\Omega^* \text{curseur} \Delta^{N+1} \Delta^* \text{curseur} \Omega^*$	Ne commence pas avec  Ne termine pas avec  Configuration sans curseur Configuration avec au moins 2 curseurs Configuration avec un ruban de longueur 0 Configuration avec un ruban de longueur 1 Configuration avec un ruban de longueur 2 \vdots Configuration avec un ruban de longueur $N - 1$ Configuration avec un ruban de longueur $\geq N + 1$
$\text{curseur} (\Delta \setminus \left\{ \begin{array}{l} w_1 \\ q_0 \end{array} \right\}) \Delta^* \text{curseur} \Omega^*$ $\text{curseur} (\Delta^{i-1} (\Delta \setminus \{w_i\}) \Delta^* \text{curseur} \Omega^*$ où $w_i = _$ si $i > w $	1 ^{ère} case du ruban non conforme à la configuration initiale i^e case du ruban non conforme à la configuration initiale
$(\Omega \setminus A)^*$	Pas d'états acceptants
$\Omega^* \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \Omega^{N-1} (\Omega \setminus f(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)) \Omega^*$	Transition non conforme

où f sont des fonctions qui correspondent aux transitions :

$$\frac{\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \alpha_3}{\mid f(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \mid}$$

Exemple 92

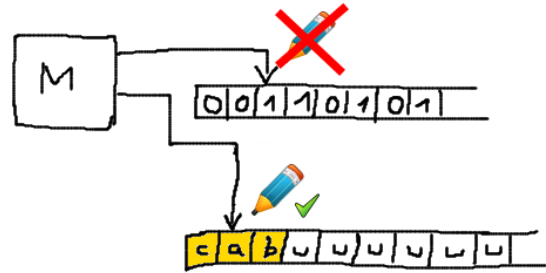
- $f(\text{curseur}, \left[\begin{array}{l} a \\ q_0 \end{array} \right], b) = c$ si la transition depuis l'état q_0 en lisant a écrit c ;
- $f(\left[\begin{array}{l} a \\ q_0 \end{array} \right], b, d) = \left[\begin{array}{l} b \\ q \end{array} \right]$ si la transition depuis q_0 en lisant a déplace le curseur à droite et va dans q ;
- $f(b, c, d) = c$.



4.5 LOGSPACE et NLOGSPACE

4.5.1 Définitions

On utilise le modèle de machine de Turing à deux rubans : le ruban d'entrée en lecture seule, et un ruban de travail dont on comptabilise la mémoire utilisée.



Définition 93 (L et NL)

- $L = SPACE(\log n)$
- $NL = NSPACE(\log n)$

4.5.2 Accessibilité

ACCESSIBILITE

entrée : un graphe orienté G , deux sommets s et t ;
sortie : oui, s'il existe un chemin de s vers t dans G ; non, sinon.

Proposition 94 ([Papadimitriou, 2003], exemple 2.10 p. 48-49) **ACCESSIBILITE** est dans NL .

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

```

fonction path?( $G, s, t$ )
  tant que  $s \neq t$ 
    |  $s :=$  choisir un successeur de  $s$ 
  accepter
    
```

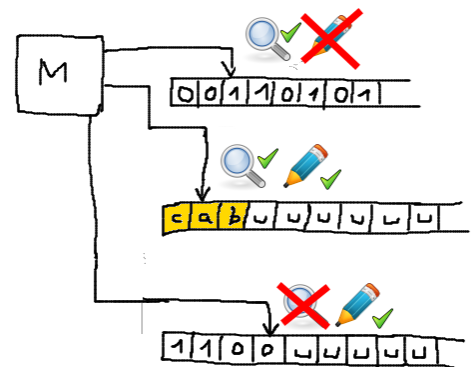
■

4.5.3 NL-complétude

Définition 95 (réduction en espace logarithmique)

Une **réduction en espace logarithmique** de A à B est une fonction $tr : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ telle que :

- $w \in A$ ssi $tr(w) \in B$.
- tr calculable en espace logarithmique, i.e. il existe une machine de Turing à trois rubans :
 - le ruban d'entrée en lecture seule contenant w ;
 - un ruban de travail en lecture/écriture qui contient au plus $O(\log |w|)$ symboles;
 - un ruban de sortie en écriture seule sur lequel est écrit $tr(w)$ à la fin de l'exécution.



Proposition 96 Une réduction en espace logarithmique est une réduction en temps polynomial.

Définition 97 (NL-complet)

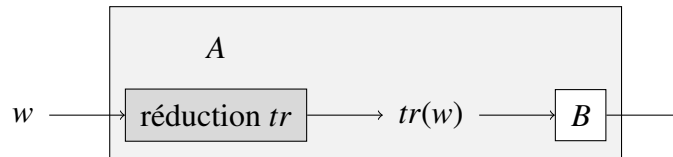
A est **NL-complet** ssi $A \in \mathbf{NL}$ et tout problème de **NL** se réduit en espace logarithmique à A .

Théorème 98

1. Si A se réduit à B en espace logarithmique et $B \in \mathbf{L}$ alors $A \in \mathbf{L}$;
2. Si A se réduit à B en espace logarithmique et $B \in \mathbf{NL}$ alors $A \in \mathbf{NL}$;
3. Si A se réduit à B en espace logarithmique et $B \in \mathbf{co-NL}$ alors $A \in \mathbf{co-NL}$.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

⚠ Le schéma suivant ne donne pas directement un algorithme pour A en espace $O(\log|w|)$:



En voici un : lancer l'algorithme pour B avec un ruban d'entrée $tr(w)$ virtuel : quand on a besoin du $i^{\text{ème}}$ symbole du mot $tr(w)$ on appelle la machine qui calcule tr . ■

Théorème 99 *S'il existe un problème **NL-complet** dans \mathbf{L} , alors $\mathbf{L} = \mathbf{NL}$.*

Théorème 100 ACCESSIBILITE est **NL-complet**.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Dans NL cf proposition 94.

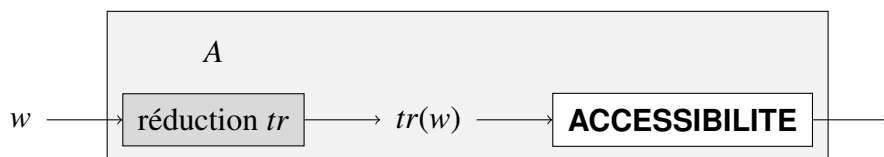
NL-dur Soit A un problème **NL**. Il existe une machine non-déterministe M (à deux rubans) qui décide A en espace $O(\log n)$. Sans perte de généralité, on suppose que M n'a qu'une seule configuration acceptante. On construit une réduction tr en espace logarithmique de A vers **ACCESSIBILITE** : $tr(w) := (G_w, s_w, t_w)$ où est le graphe des configurations de la machine M sur l'entrée w , s_w la configuration initiale de M avec w sur le ruban d'entrée, et t_w l'unique configuration finale acceptante de M . On a $w \in A$ ssi $tr(w) \in \mathbf{ACCESSIBILITE}$. ■

4.5.4 NL \subseteq P

Théorème 101 $\mathbf{NL} \subseteq \mathbf{P}$.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Soit A dans **NL**. Comme **ACCESSIBILITE** est **NL-dur**, A se réduit **ACCESSIBILITE** en espace logarithmique :



Comme **ACCESSIBILITE** dans **P** (parcours en profondeur par exemple), et que la réduction est aussi en temps polynomial, A est dans **P**. ■

4.5.5 Théorème de Immerman-Szelepcsényi : $NL = co-NL$

Théorème 102 $\overline{ACCESSIBILITE}$ est dans NL .

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Soit A_ℓ l'ensemble des sommets accessibles depuis s en au plus ℓ étapes.

Soit $A := A_{|G|}$ est l'ensemble des sommets accessibles depuis s .

procédure $\overline{path?}(G, s, t)$	
$i := 0$	i compte A
pour tout sommet $u \neq t$ de G	test si $u \in A$
choisir téméraire $\in \{0, 1\}$	tentons-nous le test $u \in A$?
si téméraire = 1	
$path?(G, s, u)$	peut échouer si trop téméraire
$i := i + 1$	$u \in A$ trouvé
si $i \neq \#(G, s)$ alors rejeter	si peu téméraire ou $t \in A$, rejet
accepter	$t \notin A$

où $\#$ est une fonction non-déterministe telle que :

- $\#(G, s)$ échoue ou retourne le nombre de sommets accessibles depuis s dans G ;
- il existe au moins une exécution de $\#(G, s)$ qui n'échoue pas.

Lemme 103 Pas de chemin de s à t dans G ssi $\overline{path?}$ accepte (G, s, t) .

fonction $\#(G, s)$	retourne $ A $
$n = 1$	$ A_0 = 1$
pour $\ell := 1$ à $ G $	calcul de $ A_\ell $ à partir de $ A_{\ell-1} $
$n := \#(G, s, \ell, n)$	
retourner n	$ A_{ G }$

fonction $\#(G, s, \ell, n)$	retourne $ A_\ell $ en sachant que $n = A_{\ell-1} $
$k := 0$	k compte A_ℓ
pour tout sommet v de G	test si $v \in A_\ell$
$j := 0$	j recompte $A_{\ell-1}$
preuve_que_v_dedans := <i>false</i>	booléen vraie si preuve de $v \in A_\ell$ trouvé
pour tout sommet u de G	test si $u \in A_{\ell-1}$
choisir téméraire $\in \{0, 1\}$	tentons-nous le test $u \in A_{\ell-1}$
si téméraire = 1	
$path?(G, s, u, \ell - 1)$	
$j := j + 1$	$u \in A_{\ell-1}$ trouvé
si $u \rightarrow^G v$	
preuve_que_v_dedans := <i>true</i>	
si $j \neq n$ alors rejeter	si peu téméraire sur le comptage de $A_{\ell-1}$ alors rejet
	ici : preuve que $v \in A_\ell$ ssi $v \in A_\ell$
si preuve_que_v_dedans alors $k := k + 1$	si $v \in A_\ell$ trouvé, on le compte
retourner k	$ A_\ell $

où $path?(G, s, u, \ell - 1)$ a une exécution qui n'échoue pas ssi $s \rightarrow^{\leq \ell-1} u$

Corollaire 104 $NL = co-NL$. [Sipser, 2006][p. 331]

4.5.6 2SAT

Proposition 105 $2SAT \in NL$.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Comme $co-NL = NL$, il suffit de montrer que $\overline{2SAT} \in NL$:

```

procédure  $\overline{2sat}(\varphi)$ 
  choisir une variable propositionnelle  $p$  dans  $\varphi$ 
   $\ell := p$ 
  tant que  $\ell \neq \neg p$ 
  | choisir une clause de la forme  $\ell \rightarrow \ell'$  dans  $\varphi$ 
  |  $\ell := \ell'$ 
  tant que  $\ell \neq p$ 
  | choisir une clause de la forme  $\ell \rightarrow \ell'$  dans  $\varphi$ 
  |  $\ell := \ell'$ 
accepter

```

■

Proposition 106 ([Papadimitriou, 2003], p. 398, Th. 16.3) $2SAT$ est NL -dur.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

ACCESSIBILITE_{acyclique}

entrée : Un graphe G **acyclique**, s, t

sortie : oui, s'il existe un chemin de s à t dans G ; non, sinon.

Lemme 107 $ACCESSIBILITE_{acyclique}$ est NL -complet.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

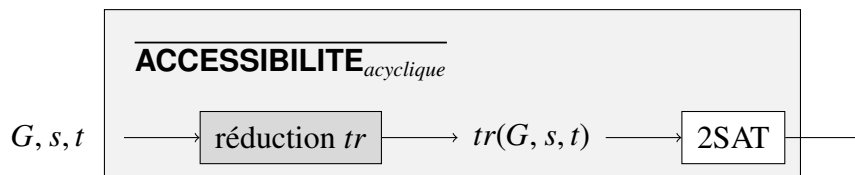
Dans NL cf proposition 94.

NL-dur Reprendre la démonstration du théorème 100 en supposons que la machine M ne boucle pas (G_x est acyclique).

■

Comme $NL = co-NL$, le problème $\overline{ACCESSIBILITE_{acyclique}}$ est aussi NL -dur.

On donne une réduction en espace logarithmique :



$$tr(G, s, t) = s \wedge \neg t \wedge \bigwedge_{\text{arc } (u,v) \text{ dans } G} (u \rightarrow v).$$

On a :

- tr est calculable en espace logarithmique ;
- $(G, s, t) \in \overline{ACCESSIBILITE_{acyclique}}$ iff $tr(G, s, t) \in 2SAT$.

■

4.5.7 Problèmes P-complets

Définition 108 (P-dur)

Un problème **A** est **P-dur** si tout problème **B** dans **P** se réduit en espace logarithmique à **A**.

Définition 109 (P-complet)

Un problème est **P-complet** s'il est dans **P** et est **P-dur**.

Proposition 110 *S'il existe un problème **A** qui est P-dur et dans NL, alors $P = NL$.*

Théorème 111 *Le problème suivant est P-complet ([Papadimitriou, 2003], p. 81 et 168) :*

CIRCUIT VALUE

entrée : Un circuit logique avec des portes logiques et, ou et non, avec des entrées mises à vrai, faux et avec une sortie

sortie : Oui, si la sortie est à vraie ; non, sinon.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

dans P L'algorithme évalue les sorties des portes une à une.

P-dur On code l'exécution de longueur polynomiale d'une machine comme un circuit.

■

Théorème 112 *HORN-SAT est P-complet.*

Proposition 113 **dans P** Algorithme glouton (cf. [Dasgupta et al., 2006]).

P-dur La réduction du théorème de Cook est en espace logarithmique et si M est déterministe alors la formule est une formule de Horn.

Chapitre 5

Théorie des fonctions récursives

Points du programme de l'agrégation

Définition des fonctions primitives récursives; schémas primitifs (minimisation bornée). Définition des fonctions récursives; fonction d'Ackerman. Équivalence avec les fonctions récursives.

5.1 Fonctions primitives récursives

5.1.1 Schémas primitifs

Fonction nulle

```
fonction  $\mathbb{O}()$ 
| retourner 0
```

Fonction successeur

```
fonction  $\sigma(x)$ 
| retourner  $x + 1$ 
```

Fonction projection

```
fonction  $\pi_i^n(x_1, \dots, x_n)$ 
| retourner  $x_i$ 
```

Composition de \mathbf{F} avec $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n$

```
fonction  $(\vec{x})$ 
| retourner  $\mathbf{F}(\mathbf{G}_1(\vec{x}), \dots, \mathbf{G}_n(\vec{x}))$ 
```

Récursivité avec \mathbf{F} et \mathbf{G}

```
fonction  $r(\vec{x}, k)$ 
| si  $k = 0$ 
| | retourner  $\mathbf{F}(\vec{x})$ 
| sinon
| | retourner  $\mathbf{G}(\vec{x}, k - 1, r(\vec{x}, k - 1))$ 
```

5.1.2 Syntaxe d'un langage de programmation fonctionnelle

Définition 114 (Langages des expressions des fonctions primitives récursives)

Le langage \mathcal{L}_{PR} des expressions des fonctions primitives récursives est défini par induction :

- \mathbb{O} est une expression d'arité 0;
- σ est une expression d'arité 1;
- π_i^n où $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ est d'arité n ;
- Si \mathbf{F} est une expression d'arité n et $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n$ sont des expressions d'arité ℓ alors :
 - $\circ(\mathbf{F}, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n)$ est une expression d'arité ℓ ;
- Si \mathbf{F} est une expression d'arité n et \mathbf{G} est une expression d'arité $n + 2$ alors
 - $\text{rec}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ est une expression d'arité $n + 1$.

5.1.3 Sémantique

Définition 115 (sémantique d'une expression)

On définit la fonction $\llbracket \cdot \rrbracket : \mathcal{L}_{PR} \rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ par induction structurelle :

$$\text{— } \llbracket \circ \rrbracket = \begin{array}{l} \mathbb{N}^0 \rightarrow \mathbb{N} \\ / \mapsto 0 \end{array} ;$$

$$\text{— } \llbracket \sigma \rrbracket = \begin{array}{l} \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x \mapsto x + 1 \end{array} ;$$

$$\text{— } \llbracket \pi_i^n \rrbracket = \begin{array}{l} \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \end{array} ;$$

— Si \mathbf{F} est une expression d'arité n et $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n$ sont des expressions d'arité ℓ alors

$$\llbracket \circ(\mathbf{F}, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n) \rrbracket = \begin{array}{l} \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N} \\ \vec{x} \mapsto \llbracket \mathbf{F} \rrbracket(\llbracket \mathbf{G}_1 \rrbracket(\vec{x}), \dots, \llbracket \mathbf{G}_n \rrbracket(\vec{x})) \end{array} ;$$

— Si \mathbf{F} est une expression d'arité n et \mathbf{G} est une expression d'arité $n + 2$ alors $\llbracket \text{rec}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \rrbracket = g$ où $g : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction définie par récurrence par :

$$g(\vec{x}, k) = \begin{cases} \llbracket \mathbf{F} \rrbracket(\vec{x}) & \text{si } k = 0 \\ \llbracket \mathbf{G} \rrbracket(\vec{x}, k - 1, g(\vec{x}, k - 1)) & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Exemple 116 $\llbracket \circ(\sigma, \pi_3^3) \rrbracket : \begin{array}{l} \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N} \\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto x_3 + 1. \end{array}$

Exemple 117 $\llbracket \text{rec}(\pi_1^1, \circ(\sigma, \pi_3^3)) \rrbracket = + : \begin{array}{l} \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) \mapsto x + y. \end{array}$ En effet :

$$x + k = \begin{cases} \llbracket \pi_1^1 \rrbracket(x) = x & \text{si } k = 0 \\ = \llbracket \circ(\sigma, \pi_3^3) \rrbracket(x, k-1, x + k-1) = (x + k-1) + 1 & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Remarque 118 On construit la fonction nulle d'arité 1 comme suit : $\circ^1 = \text{rec}(\circ, \pi_2^2)$. Puis celle d'arité $k \geq 2$: $\circ^k = \circ(\circ^1, \pi_1^k)$. Par simplicité, on les note toutes \circ quelque soit l'arité.

Définition 119 (fonction récursive primitive)

Une fonction $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ est **récursive primitive** si une expression de \mathcal{L}_{PR} la dénote. On note PR l'ensemble des fonctions récursives primitives.

Proposition 120 L'ensemble des fonctions récursives primitives est dénombrable.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Car le langage \mathcal{L}_{PR} est dénombrable. ■

5.2 Exemples de fonctions récursives primitives

Voir : http://people.irisa.fr/Francois.Schwarzentruber/recursive_functions/

$$a + b = a + \underbrace{1 + \dots + 1}_{b \text{ exemplaires}}$$

$$a^b = a \uparrow^1 b = \underbrace{a \times \dots \times a}_{b \text{ exemplaires}}$$

$$a \times b = \underbrace{a + \dots + a}_{b \text{ exemplaires}}$$

$$a \uparrow^2 b = \underbrace{a^{\dots^a}}_{b \text{ exemplaires}}$$

Définition 121 (flèche de Knuth)

- $a \uparrow^1 b = a^b$;
- Pour $n > 1$, $a \uparrow^n b = \begin{cases} 1 & \text{si } b = 0 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n (b - 1)) & \text{sinon.} \end{cases}$

Proposition 122 Pour tout n , la fonction \uparrow^n est récursive primitive.

5.2.1 Prédicats

Définition 123 (prédicat)

Une fonction est appelée **prédicat** si elle est à valeur dans $\{0, 1\}$.

< et
estpair non
= ≤

Proposition 124 Si **cond** est un prédicat, **F**, **G** sont des fonctions, tous-tes d'arité ℓ et $p.r.$

	fonction (\vec{x}) si cond (\vec{x}) alors retourner F (\vec{x}) sinon retourner G (\vec{x})	
alors		est primitive récursive.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

$\circ(\text{plus}, \circ(\text{mult}, \text{cond}, \text{F}), \circ(\text{mult}, \circ(\text{not}, \text{cond}), \text{G}))$. ■

5.2.2 Minimisation bornée

Définition 125 (minimisation bornée)

Soit f un prédicat d'arité $\ell + 1$. La fonction suivante s'appelle **minimisation bornée** de f :

	fonction (\vec{x}, n) pour $i := 0$ à n si $f(\vec{x}, i) \neq 0$ alors retourner i retourner $n + 1$	
		noté $\mu_{i \leq n}.f(\vec{x}, i)$

Proposition 126 La minimisation d'un prédicat $p.r.$ est aussi $p.r.$

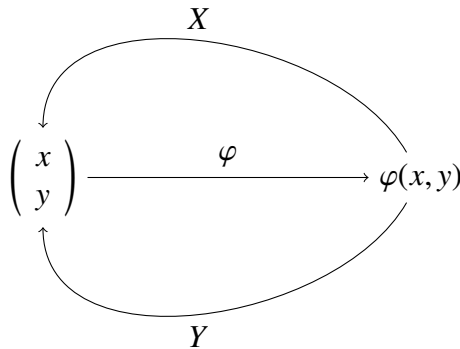
5.3 Codage par un entier

Définition 127 (fonction récursive primitive à valeurs dans \mathbb{N}^q)

On dit qu'une fonction $\mathbf{g} : \mathbb{N}^{\ell} \rightarrow \mathbb{N}^q$ est **récursive primitive**

si pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, \mathbf{g}_i est récursive primitive.

5.3.1 Bijection de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N}



Théorème 128 ([Dehornoy, 2000], p. 181) *Il existe une bijection φ de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} qui est primitive récursive et dont l'inverse est aussi primitive récursive.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Définition Soit $\varphi(x, y) = 2^x \times \underbrace{(2y + 1)}_{\psi(x,y)} - 1$.

φ est récursive primitive ... comme composition de fonctions qui le sont.

φ est une bijection La fonction ψ est bijection de \mathbb{N}^2 sur \mathbb{N}^* car tout nombre non nul se décompose de façon unique en le produit d'une puissance de deux et d'un nombre impair. On note la réciproque de ψ est $\psi^{-1}(n) = (X(n), Y(n))$. Ainsi, φ est une bijection de \mathbb{N}^2 dans \mathbb{N} .

φ^{-1} est récursive primitive

1. $X(n)$ est le nombre de divisions par 2 à partir de n jusqu'à obtenir un entier impair.

$$D(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On calcule n , puis $D(n)$, puis $D^2(n)$, etc. puis on s'arrête lorsque $D^k(n) = D^{k+1}(n)$.

$$interD(n, k) = \begin{cases} n & \text{si } k = 0 \\ D(interD(n, k - 1)) & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

$$X(n) = \sum_{i=0}^n 1_{<}(interD(n, i + 1), interD(n, i)).$$

2. En itérant trop (n fois par exemple), $interD(n, k)$ vaut $2Y(n) + 1$. Ainsi :

$$Y(n) = \lfloor \frac{interD(n, n)}{2} \rfloor.$$



5.3.2 Application 1 : suites définies par récurrence

Exemple 129 La fonction Fibonacci fib est définie par :

- $\text{fib}(0) = \text{fib}(1) = 1$;
- $\text{fib}(k + 2) = \text{fib}(k + 1) + \text{fib}(k)$.

Définition 130 (schéma de récurrence multiple)

Si $\mathbf{g} : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}^2$, $\mathbf{h} : \mathbb{N}^{\ell+2+1} \rightarrow \mathbb{N}^2$,

le schéma de récursivité multiple définit la fonction : $\mathbf{f} : \mathbb{N}^{\ell+1} \rightarrow \mathbb{N}^2$:

$$\mathbf{f}(\vec{x}, k) = \begin{cases} \mathbf{g}(\vec{x}) & \text{si } k = 0 \\ \mathbf{h}(\vec{x}, k - 1, \mathbf{f}(\vec{x}, k - 1)) & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

Exemple 131 On pose $\mathbf{f}(k) = (\text{fib}(k), \text{fib}(k + 1))$. On a alors :

$$\mathbf{f}(0) = \begin{cases} (1, 1) & \text{si } k = 0 \\ \mathbf{h}(k - 1, \mathbf{f}(k - 1)) & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

où $\mathbf{h}(k, \vec{x}) = (x_2, x_1 + x_2)$.

Proposition 132 La classe des fonctions primitives récursives est stable par schéma de récursivité multiple.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

On pose :

$$\tilde{f}(\vec{x}, k) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{g}(\vec{x})) & \text{si } k = 0 \\ \varphi(\mathbf{h}(\vec{x}, k - 1, \underbrace{X(\tilde{f}(\vec{x}, k - 1)), Y(\tilde{f}(\vec{x}, k - 1))}_{\mathbf{f}(\vec{x}, k - 1)})) & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

■

5.3.3 Application 2 : structure de données (exemple des listes)

Encodage

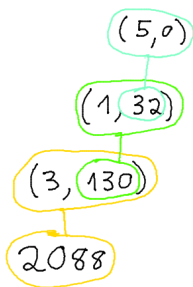
On encode une liste d'entiers par un entier :

- $c([]) = 0$
- $c(x :: L) = 1 + \varphi(x, c(L))$

Opérations

Si x est un entier et ℓ est un entier représentant une liste :

- $\text{listvide}() = 0$;
- $\text{cons}(x, \ell) = 1 + \varphi(x, \ell)$;
- $\text{tete}(\ell) = X(\ell - 1)$;
- $\text{queue}(\ell) = Y(\ell - 1)$.



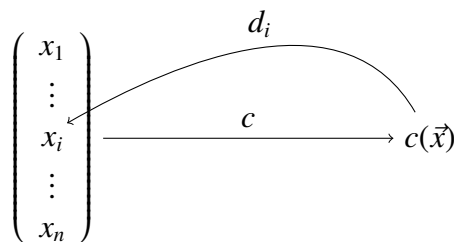
Codage de la liste $[3, 1, 5]$

5.4 (*) Langage de programmation impératif jouet vers fonctions primitives récurrentes

```

var  $x_1$  ; //entrée
var  $x_2 = 0$  ;
:
var  $x_n = 0$  ;
bloc du programme
sortie :  $x_1$ 

```



Bloc de programme P	Expression $tr(P)$
$x_i := F(\vec{x})$	$\circ(\mathbf{c}, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{i-1}, \circ(\mathbf{F}, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n), \mathbf{d}_{i+1}, \dots, \mathbf{d}_n)$
$bloc_1; bloc_2$	$\circ(tr(bloc2), tr(bloc1))$
si $x_i \neq 0$ alors $bloc$	$\text{ifthen}(\circ(\mathbf{notzero}, \mathbf{d}_i), tr(bloc), \pi_1^1)$ $\text{else}(\circ(\mathbf{notzero}, \mathbf{d}_i), tr(bloc), \pi_1^1)$
répéter x_i fois $bloc$	$\circ(\mathbf{rec}(\pi_1^1, \circ(tr(bloc), \pi_3^3)), \pi_1^1, \mathbf{d}_i)$

L'expression d'un programme constitué d'un bloc de programme $bloc$ est

$$\circ(\mathbf{d}_1, \circ(tr(bloc), \circ(\mathbf{c}, \pi_1^1, \mathbb{O}^1, \dots, \mathbb{O}^1)))$$

5.5 Limite des fonctions récurrentes primitives

5.5.1 Preuve via un argument diagonal

Théorème 133 *Il existe une fonction non p. r. mais calculable par une machine de Turing.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une **énumération effective** des expressions de \mathcal{L}_{PR} d'arité 1.

fonction $g(n)$
 Énumérer des expressions e_1, e_2, \dots jusqu'à obtenir e_n ;
 Interpréter l'expression e_n pour calculer $\llbracket e_n \rrbracket(n)$
retourner $\llbracket e_n \rrbracket(n) + 1$

La fonction g n'est pas p. r. Par l'absurde, si elle l'était, il existe k tel que $g = \llbracket e_k \rrbracket$.
 Ainsi, $g(k) = \llbracket e_k \rrbracket(k) = \llbracket e_k \rrbracket(k) + 1$. Contradiction.

■

5.5.2 Fonction d'Ackermann-Péter

Théorème 134 $f : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$
 $(a, b, n) \mapsto a \uparrow^n b$ n'est pas primitive réursive.

Pour simplifier, supprimons a comme argument :

Définition 135 (fonction Ackermann-Péter)

$A : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ définie par inductivement¹ :

- $A(0, m) = m + 1$
- $A(k + 1, 0) = A(k, 1)$
- $A(k + 1, m + 1) = A(k, A(k + 1, m))$

Proposition 136 $A(k, n) = 2 \uparrow^{k-2} (n + 3) - 3$.

Proposition 137 A est calculable.

Théorème 138 A n'est pas primitive réursive.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

[[Dehornoy, 2000], p. 192] Résumé de la démonstration :

1. On montre que les fonctions primitives réursives sont assez lentes (par induction structurale).
2. Par ailleurs, $n \mapsto A(n, n)$ n'est pas lente.

Par ' $f : \mathbb{N}^\ell \rightarrow \mathbb{N}$ est lente', on entend la propriété $P(f)$ suivante :

il existe un entier k tel que pour tout $(n_1, \dots, n_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$, on a

$$f(n_1, \dots, n_\ell) \leq A(k, \sum_{i=1}^{\ell} n_i).$$

■

5.6 Fonctions μ -réursives partielles

5.6.1 Minimisation non bornée

Définition 139 (minimisation non bornée)

Soit f un prédicat d'arité $\ell + 1$.

La fonction partielle suivante s'appelle **minimisation non bornée** de f :

fonction (\vec{x}) $i := 0;$ tant que $f(\vec{x}, i) = 0$ $\quad \quad i := i + 1$ retourner i	$\mu i. f(\vec{x}, i)$
---	------------------------

1. L'induction est ici sur l'ordre lexicographique sur \mathbb{N}^2 .

5.6.2 Syntaxe

Définition 140 (Langages des expressions des fonctions μ -récurives)

Le langage $\mathcal{L}_{\mu R}$ des **expressions des fonctions μ -récurives** est défini par induction :

- \circ est une expression d'arité 0 ;
- σ est une expression d'arité 1 ;
- π_i^n où $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{1, \dots, n\}$ est d'arité n ;
- Si \mathbf{F} est une expression d'arité n et $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n$ sont des expressions d'arité ℓ alors $\circ(\mathbf{F}, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n)$ est une expression d'arité ℓ ;
- Si \mathbf{F} est une expression d'arité n et \mathbf{G} est une expression d'arité $n + 2$ alors $\text{rec}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ est une expression d'arité $n + 1$;
- Si \mathbf{F} est d'arité $\ell + 1$ alors $\text{mu}(\mathbf{F})$ est une expression d'arité ℓ .

5.6.3 Sémantique

Définition 141 (sémantique)

On définit la fonction $\llbracket \cdot \rrbracket : \mathcal{L}_{\mu R} \rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_{\text{partielle}}(\mathbb{N}^k, \mathbb{N})$ par induction structurelle :

- $\llbracket \circ \rrbracket = \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^0 & \rightarrow & \mathbb{N} \\ / & \mapsto & 0 \end{array}$;
- $\llbracket \sigma \rrbracket = \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x + 1 \end{array}$;
- $\llbracket \pi_i^n \rrbracket = \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^n & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (x_1, \dots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$;
- Si \mathbf{F} est une expression d'arité n et $\mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n$ sont des expressions d'arité ℓ alors $\llbracket \circ(\mathbf{F}, \mathbf{G}_1, \dots, \mathbf{G}_n) \rrbracket = \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^\ell & \rightarrow & \mathbb{N} \\ \vec{x} & \mapsto & \llbracket \mathbf{F} \rrbracket(\llbracket \mathbf{G}_1 \rrbracket(\vec{x}), \dots, \llbracket \mathbf{G}_n \rrbracket(\vec{x})) \end{array}$;
- Si \mathbf{F} est une expression d'arité n et \mathbf{G} est une expression d'arité $n + 2$ alors $\llbracket \text{rec}(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \rrbracket = g$ où $g : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$ est la fonction définie par récurrence par :

$$g(\vec{x}, k) = \begin{cases} \llbracket \mathbf{F} \rrbracket(\vec{x}) & \text{si } k = 0 \\ \llbracket \mathbf{G} \rrbracket(\vec{x}, k - 1, g(\vec{x}, k - 1)) & \text{si } k > 0. \end{cases}$$

- Si \mathbf{F} est d'arité $\ell + 1$ alors

$$\llbracket \text{mu}(\mathbf{F}) \rrbracket = \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^\ell & \rightarrow & \mathbb{N} \\ \vec{x} & \mapsto & \mu i. \llbracket \mathbf{F} \rrbracket(\vec{x}, i) \end{array}$$

$$\text{où } \mu i. \llbracket \mathbf{F} \rrbracket(\vec{x}, i) = \begin{cases} \text{le plus petit } i \in \mathbb{N} \text{ tel que } \llbracket \mathbf{F} \rrbracket(\vec{x}, i) \neq 0 \text{ si un tel } i \text{ existe} \\ \text{non défini} & \text{si un tel } i \text{ n'existe pas.} \end{cases}$$

Définition 142 (μ -réursive partielle)

Une fonction partielle $\mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ est μ -réursive partielle si une expression de $\mathcal{L}_{\mu R}$ la dénote.

5.7 Fonctions μ -récurives totales

Définition 143 (μ -réursive totale)

Une fonction μ -**réursive totale** est une fonction totale de la forme $\llbracket e \rrbracket$ où $e \in \mathcal{L}_{\mu R}$.

Si on se restreint les minimisations non bornées aux fonctions **sûres**, le calcul effectif de $\llbracket F \rrbracket(\vec{x})$ termine et la fonction est totale.

Définition 144 (fonction sûre)

Une fonction $q : \mathbb{N}^{\ell+1} \rightarrow \mathbb{N}$ est **sûre**² si pour tout $\vec{x} \in \mathbb{N}^\ell$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $q(\vec{x}, i) \neq 0$.

2. [Wolper, 2006] introduit la notion de prédicat sûr.

5.8 (*) Langage de programmation impératif avec while vers fonctions μ -récursives partielles

On ajoute aux constructions données en sous-section 5.4 la boucle tant que :

Programme P	Expression $tr(P)$
tant que $x_i = 0$ $bloc$	$\circ(rep, \pi_1^1, \mathbf{mu}(\circ(\mathbf{d}_i, rep)))$ où $rep = \mathbf{rec}(\pi_1^1, \circ(tr(bloc), \pi_3^3))$ s'interprète comme la fonction qui prend en argument l'environnement e et un entier i et qui retourne l'environnement après i itérations de $bloc$.

5.9 Équivalence avec les machines de Turing

5.9.1 Des fonctions μ -récursives aux machines de Turing

$$(2, 1, 0) \in \mathbb{N}^3 \xleftrightarrow{\text{~~~~~}} \boxed{1 \mid 0 \mid \color{yellow}{,} \mid 1 \mid \color{yellow}{,} \mid 0 \mid \square \mid \square \mid \square \mid \square \mid \square \mid \dots}$$

Théorème 145 Toute fonction μ -récursive partielle est calculable par une machine de Turing.

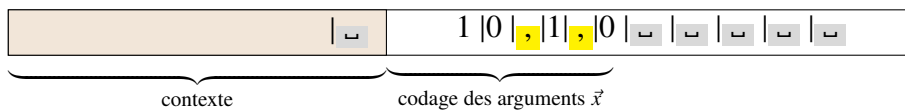
Soit e l'expression d'une fonction μ -récursive d'arité ℓ . Il existe une machine de Turing M_e déterministe tel que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{N}^\ell$,

- Si $\llbracket e \rrbracket(\vec{x})$ est définie, l'exécution depuis la configuration initiale avec le codage de \vec{x} sur le ruban termine avec le codage de $\llbracket e \rrbracket(\vec{x})$ sur le ruban ;
- Si $\llbracket e \rrbracket(\vec{x})$ n'est pas définie, l'exécution depuis la configuration initiale avec le codage de \vec{x} sur le ruban ne termine pas.

Idée de la démonstration.

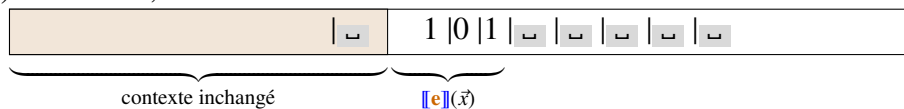
Pour tout expression $e \in \mathcal{L}_{\mu R}$, on définit la propriété $\mathcal{P}(e)$ suivante :

Si e est d'arité k , alors il existe une machine de Turing M_e à un ruban tel que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{N}^k$, depuis toute configuration initiale avec sur le ruban



où le contexte est soit le mot vide ou un mot sur $\{0, 1, |, \square, \color{yellow}{,}\}$ avec jamais deux espaces \square consécutifs et qui finit avec un symbole \square ,

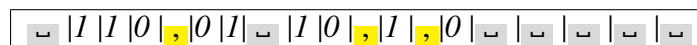
- si $\llbracket e \rrbracket(\vec{x})$ est définie, la machine s'arrête avec le ruban suivant :



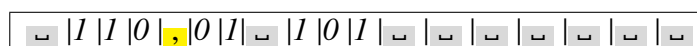
- si $\llbracket e \rrbracket(\vec{x})$ n'est pas définie, la machine boucle.

\square	symbole blanc aussi utilisé pour séparer les appels de fonctions
0 et 1	symboles utilisées pour coder les entiers en binaire
$\color{yellow}{,}$	symbole pour séparer les arguments.

Exemple 146 Si le ruban est comme suit :



et que $f(2, 1, 0) = 5$ alors après l'exécution de M_f , on a :



Fonction nulle. Voici M_{\circ} : remplacer les arguments par 0. d'où $\mathcal{P}(\circ)$.

Fonction successeur. Voici M_{σ} : incrémenter le dernier nombre écrit de 1. d'où $\mathcal{P}(\sigma)$.

$i^{\text{ème}}$ **projection à n arguments.** Voici $M_{\pi_i^n}$:

Ajouter un \square et réécrire le $i^{\text{ème}}$ nombre après
 Recopier le nombre à la fin au début de la zone des arguments
 Effacer toute la suite

d'où $\mathcal{P}(\pi_i^n)$.

Composition. Soit $g \in \mathcal{L}_{\mu R}$ d'arité ℓ et $h_1, \dots, h_\ell \in \mathcal{L}_{\mu R}$ à d'arité k telles que $\mathcal{P}(g)$ et $\mathcal{P}(h_1), \dots, \mathcal{P}(h_\ell)$ soient vraies. Voici la machine $M_{\circ(g, h_1, \dots, h_\ell)}$.

pour $i := 1$ à ℓ
 | Recopier \vec{x} (écrit $i - 1$ portions de ruban avant) tout à la fin, précédé d'un \square
 | Appeler M_{h_i} (il remplace le \vec{x} que l'on vient de recopier par $\llbracket h_i \rrbracket(\vec{x})$)
 Décaler les résultats $\llbracket h_1 \rrbracket(\vec{x}) \square \dots \square \llbracket h_\ell \rrbracket(\vec{x})$ sur les \vec{x} encore restants et efface la fin
 Remplacer les $\ell - 1$ \square par des \bullet
 Appeler M_g

d'où $\mathcal{P}(\circ(g, h_1, \dots, h_\ell))$.

Récursion. Soit $g \in \mathcal{L}_{\mu R}$ d'arité ℓ et $h \in \mathcal{L}_{\mu R}$ d'arité $\ell + 2$ telles que $\mathcal{P}(g)$ et $\mathcal{P}(h)$ soient vraies. Voici la machine $M_{\text{rec}(g, h)}$.

Ecrire \square ; Ecrire 0 (appelons cette portion i) ; Ecrire \square ; Recopier k ici ; Ecrire \square
 Recopier \vec{x}
 Appeler M_g
tant que $i < k$
 | Décaler $\llbracket \text{rec}(g, h) \rrbracket(\vec{x}, i)$ pour insérer \vec{x}, i, \bullet avant
 | Appeler M_h
 | Incrémenter i de 1
 Décaler le résultat $\llbracket \text{rec}(g, h) \rrbracket(\vec{x}, i)$ vers la gauche en effaçant \vec{x}, k, i

d'où $\mathcal{P}(\text{rec}(g, h))$.

Minimisation non bornée Soit $q \in \mathcal{L}_{PR}$ d'arité $\ell + 1$ tel que $\mathcal{P}(q)$.

Ecrire \square ; Ecrire 0 (appelons cette portion i) ; Ecrire \square
 Recopier $\vec{x}, 0$
 Appeler M_q
tant que le résultat de M_q est 0
 | Incrémenter i de 1
 | Recopier \vec{x}, i à la place du précédent résultat de M_q
 | Appeler M_q
 Supprimer le résultat de M_q
 Décaler i vers la gauche (et supprimer \vec{x})

d'où $\mathcal{P}(\text{mu}(q))$. ■

Corollaire 147 Toute fonction récursive totale est calculable par une machine de Turing (qui s'arrête sur toutes les entrées).

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Le calcul des minimisations non bornées termine. ■

5.9.2 Des machines de Turing aux fonctions μ -récursives

Codage des entiers



La représentation binaire est ambiguë, e.g. les mots 0^*1 représentent tous l'entier 1.

- Une solution [Wolper, 2006][p. 173] est de considérer que l'alphabet $\{1, 2\}$ et de travailler en base 3. Ainsi, $w = w_0, \dots, w_\ell \in \{1, 2\}^*$ est codé par le nombre $gd(w) = \sum_{i=0}^{\ell} 3^i w_i$.
- Une alternative est d'utiliser la structure de données Liste pour encoder un mot.

(sous-section 5.3.3)

Théorème 148

Toute fonction $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ calculable par machine de Turing déterministe avec éventuellement des exécutions infinies (où alors la fonction n'est pas définie) est μ -récursive partielle.

Toute fonction $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ calculable par machine de Turing (qui s'arrête sur toutes les entrées) est récursive totale.

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

On décrit le calcul d'une machine de Turing M avec le programme suivant (voir section 5.8) :

```
var w ;
c = configinit(w);
tant que configFinale?(c)
|   c = suivante(c)
sortie = getRuban(c)
```

où :

- `configinit` : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ associe la représentation d'un mot w à la représentation de la configuration initiale ;
- `getRuban` : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ associe à la représentation d'une configuration c la représentation du mot sur le ruban.
- `suiivante` : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ associe la représentation d'une configuration c à la représentation de la configuration suivante de c ;
- `configFinale?` : $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ un prédicat qui teste si une configuration c est finale.

[Wolper, 2006] définit une fonction (a priori partielle) qui utilise la minimisation non bornée pour simuler la boucle **tant que** en calculant le nombre d'itérations nécessaires :

$$\text{nbEtapes} : w \mapsto \mu i. \text{configFinale?}(\text{suiivante}^*(\text{configinit}(w), i))$$

où

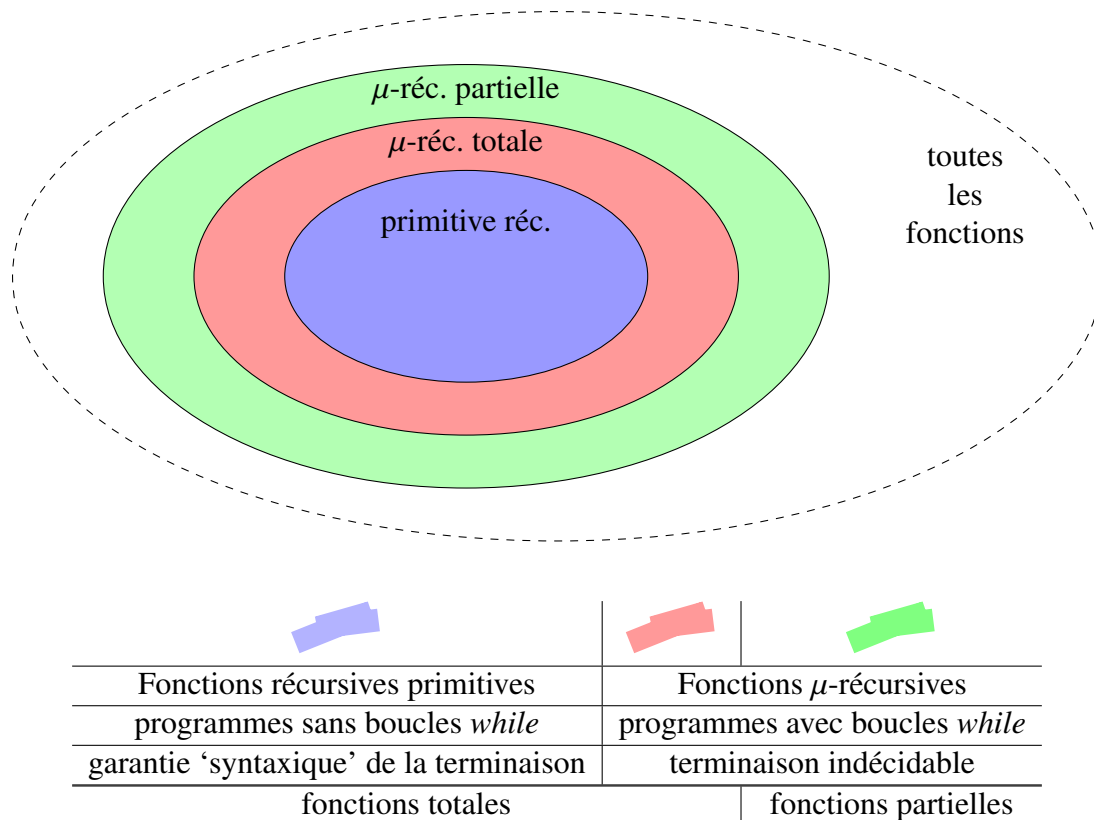
- `suiivante*` : $\mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ associe, à une configuration c et un entier n , la configuration après n étapes de calcul depuis c .

Voici alors la fonction calculée par la machine de Turing M :

$$f : w \mapsto \text{getRuban}(\text{suiivante}^*(\text{configinit}(w), \text{nbEtapes}(w))).$$

Le prédicat `configFinale?(suiivante*(configinit(w), i))` est sûr ssi la machine s'arrête sur toute entrée. ■

5.10 Bilan



5.11 Notes bibliographiques

Pas d'introduction d'une syntaxe

D'autres cours ([Wolper, 2006], p. 155 ; [Dehornoy, 2000], p. 171) ne donnent pas de syntaxe pour les fonctions primitives récursives ou les fonctions μ -récursives partielles. Du coup :

- Les justifications basées sur la syntaxe qui sont vagues (dans [Wolper, 2006], p. 129, "chaque fonction primitive récursive peut être décrite par une chaîne de caractères".)
- Difficulté d'écrire les traductions vues en sous-section 5.4 et 5.8 et la démonstration du théorème 145.

Prédicats

Dans son livre, Wolper [Wolper, 2006] introduit la notion de prédicat : c'est une fonction $\mathbb{N}^k \rightarrow \{0, 1\}$. Intuitivement, on interprète 0 comme faux et 1 comme vrai. Je n'aime pas car les définitions ne sont plus syntaxiques. La minimisation bornée et non bornée ne sont définies que pour les prédicats mais c'est une restriction sémantique.

Fonctions à valeurs dans \mathbb{N}^k

Ici, nos fonctions sont à valeurs dans \mathbb{N} et au besoin nous codons un tuple de \mathbb{N}^k avec la technique de la sous-section 5.3. Dans [Brookshear, 1989], les fonctions sont à valeurs dans \mathbb{N}^k et l'auteur introduit (p. 201) le schéma de **combinaison** : à partir de $f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^n$ et $g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^m$ on construit

$$f \times g : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}^{n+m}$$

$$\vec{x} \mapsto (f(\vec{x}), g(\vec{x}))$$

Fonctions partielles

Dans [Wolper, 2006], la définition de la minimisation non bornée ne donnent pas une fonctions partielles car lorsqu'un i n'existe pas, on définit $\mu_i.q(\vec{x}, i) = 0$. La fonction est donc totale alors que le "calcul" ne devrait pas terminer. C'est confus.

Langages de programmation jouets sans while

Bucle. Dans [Hofstadter et al., 1985], il y a la présentation d'un langage appelé Bucle, sans boucle **while**. Le voici :

- Les variables sont entières positives ;
- des affectations $x =$ quelque chose de primitif récursif ;
- les variables déclarées non initialisées sont à 0 ;
- L'incrément ;
- Déclaration de fonctions ;
- Appel par valeur SANS récursion ;
- Boucles for du type : répéter x fois le bloc B (où x n'est pas modifié dans le bloc B)
- Le retour de fonction **retourner** .

Théorème 149 *Une fonction f est r. p. ssi il existe une fonction de Bucle qui calcule f .*

Modèle FOR. Un langage équivalent est montré dans ([Olivier Ridoux, 2008], chap. 6) appelé le modèle FOR.

Langages de programmation jouets avec while

Mucle. Dans [Hofstadter et al., 1985], il y a la présentation d'un langage appelé Mucle, qui est une extension de Bucle avec une boucle MU.

Modèle WHILE. Un langage équivalent est montré dans [Calculateurs, calculs, calculabilité, Olivier Ridoux, Givès Lesventes, chap. 6] appelé le modèle WHILE.

Langage de programmation "Bare-bones". Langage de programmation "Bare-bones" [[Brookshear, 1989] (p. 227)]

- incr x
- decr x
- boucle while $x \neq 0$
- entiers positifs
- clear x : mettre x à 0 (peut-être réalisé avec while $x \neq 0$ { decr x })
- Pas de fonctions, pas d'appels.

Fonctions d'Ackermann

Dans la plupart des ouvrages, on parle de la fonction d'Ackermann. Il s'agit d'une simplification avec deux variables seulement dûe à Rózsa Péter.

Annexe A

PRIMES est dans NP

In this chapter, we sum up the work of Pratt [Pratt, 1975]. Note that we know since 2004 that PRIMES is in P [Agrawal et al., 2004].

Théorème 150 *PRIMES is in NP.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Lemme 151 *Let $n \geq 3$. n is prime iff there is a $g \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^* \setminus \{1\}$ such that $g^{n-1} = 1[n]$ and for all prime number p that divides $n - 1$, we have $g^{\frac{n-1}{p}} \neq 1$.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Integer n is prime iff $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}^*, \times)$ is a (cyclic) group
 iff there is $g \in \{2, \dots, n - 1\}$ such that $g^{n-1} = 1[n]$ and
 for all $k \in \{1, \dots, n - 2\}$, $g^k \neq 1[n]$
 iff there is a $g \in \{2, \dots, n - 1\}$ such that $g^{n-1} = 1[n]$ and
 for all prime numbers p that divide $n - 1$, we have $g^{\frac{n-1}{p}} \neq 1$.

The last iff from top to bottom is trivial. The last iff from bottom to top is proven as follows. As $g^{n-1} = 1[n]$, we consider the group generated by g and let k be the order of g . We prove that $k \leq n - 2$ leads to a contradiction. Assume, $k \leq n - 2$. Thus, there exists $\ell \geq 2$ such that $k = \frac{n-1}{\ell}$. Let p be a prime number such that $\ell = p\ell'$. We have $g^k = g^{\frac{n-1}{p\ell'}}$. As $g^{k\ell'} \neq 1$, $g^k \neq 1$. Contradiction with the fact that k is the order of g . ■

We design the following non-deterministic algorithm that takes an integer $n \geq 2$:

```
procédure prime( $n$ )
si  $n = 2$  alors -
sinon
  Guess  $g \in \{2, \dots, n - 1\}$ 
  si  $g^{n-1} \neq 1$  alors rejeter
  Guess numbers  $p_1, \dots, p_k \geq 2$  such that  $\sum_{i=1}^k \log p_i \leq \log(n - 1)$ 
  si  $n - 1 \neq \prod_{i=1}^k p_i$  alors rejeter
  pour  $i = 1$  to  $k$ 
    prime( $p_i$ )
    si  $g^{\frac{n-1}{p_i}} = 1$  alors rejeter
```

Lemme 152 *Procedure prime rejects exactly non-prime numbers $n \geq 2$.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

For all $n \geq 2$, let $\mathcal{P}(n)$: ‘prime(n) does not reject n iff n is prime’.

$\mathcal{P}(2)$ is true.

Let $n \geq 3$ such that $\mathcal{P}(\ell)$ holds for all $\ell < n$, and let us prove $\mathcal{P}(n)$.

(\Rightarrow) Let us consider an non-rejecting execution of prime(n). We exhibit executions of prime(p_i) for all $i \in \{1, \dots, k\}$ that are sub-executions of prime(n). By $\mathcal{P}(p_i)$, p_i is prime for all i . Lemma 151 implies n is prime.

(\Leftarrow) Suppose n is prime and consider an execution in which the guessed p_i are such $n-1 = \prod_{i=1}^k p_i$, p_i is prime, and subcalls prime(p_i) never reach **rejeter** (such executions of prime(p_i) exists by $\mathcal{P}(p_i)$). Then in that executions, Lemma 151 implies that we never reach **rejeter** in that call. ■

Now, we prove that prime is running in polynomial time in $\log n$.

Lemme 153 *Each computations (recursive calls excluded) in any subcall prime(..) from prime(n) is in $O(\log n^4)$.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Guessing g is in $O(\log n)$. The total number of bits to guess numbers p_1, \dots, p_k is $O(\log n)$ and $k \leq \log n$. In particular, the number of bits on a number p_i is $O(\log n)$. The recall that the multiplication of two numbers of $O(\log n)$ each is $O(\log^2 n)$. As $k = O(\log n)$, the computation of $\prod_{i=1}^k p_i$ is in $O(\log^3 n)$. Computing $\frac{n-1}{p_i}$ is in $O(\log^2 n)$. Computing $g^{\frac{n-1}{p_i}}$ is in $O(\log^3 n)$: indeed, computing $\frac{n-1}{p_i}$ is in $O(\log^2 n)$, each multiplication costs $O(\log^2 n)$ and there are $O(\log n)$ multiplications. As $g^{\frac{n-1}{p_i}}$ is computed for all $i \in \{1, \dots, k\}$, and $k = O(\log n)$, we get $O(\log^4 n)$. ■

Let $C(n)$ be the maximal number of calls prime(..) in an execution call prime(n).

Lemme 154 *For all $n \geq 2$, $C(n) = O(\log n)$.*

IDÉE DE LA DÉMONSTRATION.

Let us consider the following property :

$$\mathcal{P}(n) : C(n) \leq 2 \log n - 1$$

First :

$$C(2) = 1 \geq 2 \log 2 - 1 = 1$$

$$C(3) = 2 \geq 2 \log 3 - 1 \sim 2.16\dots$$

so $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$ hold.

Now, let $n \geq 4$ such that $\mathcal{P}(\ell)$ holds for all $\ell < n$, and let us prove $\mathcal{P}(n)$. Let p_1, \dots, p_k that corresponds to the maximal number of calls in prime(n). We have :

$$\begin{aligned} C(n) &\leq 1 + \sum_{i=1}^k C(p_i) \\ &\leq 1 + \sum_{i=1}^k (2 \log(p_i) - 1) \\ &\leq 1 + 2 \log \left(\prod_{i=1}^k p_i \right) - k \\ &\leq 2 \log n - 1 \end{aligned}$$

as $k \geq 2$ when $n \geq 4$. ■

By lemmas 153 and 154, we conclude that prime(n) is in time $O(\log^5 n)$. ■

Bibliographie

- [Agrawal et al., 2004] Agrawal, M., Kayal, N., and Saxena, N. (2004). Primes is in P . *Annals of mathematics*, pages 781–793.
- [Aho and Hopcroft, 1974] Aho, A. and Hopcroft, J. (1974). *Design & Analysis of Computer Algorithms*. Pearson Education India.
- [Arora and Barak, 2009] Arora, S. and Barak, B. (2009). *Computational complexity : a modern approach*. Cambridge University Press.
- [Brookshear, 1989] Brookshear, J. G. (1989). *Theory of computation : formal languages, automata, and complexity*. Benjamin-Cummings Publishing Co., Inc.
- [Dasgupta et al., 2006] Dasgupta, S., Papadimitriou, C. H., and Vazirani, U. V. (2006). Algorithms.
- [Dehornoy, 2000] Dehornoy, P. (2000). *Mathématiques de l’informatique : cours et exercices corrigés*. Dunod.
- [Garey and Johnson, 1979] Garey, M. R. and Johnson, D. S. (1979). Computers and intractability : a guide to NP -completeness.
- [Hofstadter et al., 1985] Hofstadter, D. R., Henry, J., and French, R. (1985). *Gödel, Escher, Bach : les brins d’une guirlande éternelle*. InterEditions.
- [Karp, 1972] Karp, R. M. (1972). *Reducibility among combinatorial problems*. Springer.
- [Khachiyan, 1980] Khachiyan, L. G. (1980). Polynomial algorithms in linear programming. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 20(1) :53–72.
- [Kroening and Strichman, 2008] Kroening, D. and Strichman, O. (2008). *Decision procedures : an algorithmic point of view*. Springer Science & Business Media.
- [Olivier Ridoux, 2008] Olivier Ridoux, G. L. (2008). *Calculateurs, calculs, calculabilité*. Dunod.
- [Papadimitriou, 2003] Papadimitriou, C. H. (2003). *Computational complexity*. John Wiley and Sons Ltd.
- [Perifel, 2014] Perifel, S. (2014). *Complexité algorithmique*. Ellipses.
- [Pratt, 1975] Pratt, V. R. (1975). Every prime has a succinct certificate. *SIAM J. Comput.*, 4(3) :214–220.
- [Sipser, 2006] Sipser, M. (2006). *Introduction to the Theory of Computation*, volume 27. Thomson Course Technology Boston, MA.
- [Vazirani, 2013] Vazirani, V. V. (2013). *Approximation algorithms*. Springer Science & Business Media.
- [Wolper, 2006] Wolper, P. (2006). *Introduction à la calculabilité*. Dunod.
- [Wright, 2005] Wright, M. (2005). The interior-point revolution in optimization : history, recent developments, and lasting consequences. *Bulletin of the American mathematical society*, 42(1) :39–56.

Index

- 2SAT, 42
- 3SAT, 26

- acceptante, 6
- acceptation d'un mot, 6
- accessibilité, 39
- arbre de calcul, 6

- certificat, 22
- classe de complexité, 31
- codage, 5
- coloration, 27
- configuration, 6
- configuration acceptante, 6
- configuration initiale, 6

- décidable, 11
- décideur, 7
- décidé en espace, 31
- décidé en temps, 7
- déterministe, 6

- énumérateur, 11
- état d'acceptation, 6
- état de rejet, 6
- état initial, 6
- exécution, 6
- exécution acceptante, 6

- flèche de Knuth, 47
- fonction μ -récursive, 52
- fonction μ -récursive totale, 52
- fonction d'Ackermann-Péter, 51
- fonction primitive récursive, 45
- formule booléenne quantifiée, 33

- gadget, 27
- géographie, 35

- indécidable, 12, 15, 18
- instance, 5
- instance négative, 5
- instance positive, 5

- L, 39

- langage accepté, 7
- langage décidé, 7
- langage rationnel, 37
- lemme de König, 9

- machine de Turing déterministe, 6
- machine de Turing non-déterministe, 6
- machine universelle, 12
- minimisation bornée, 47
- minimisation non bornée, 51

- NL, 39
- NP, 21
- NP-complet, 22
- NP-dur, 22

- P, 21
- plusieurs rubans, 7
- problème de correspondance de Post, 14
- problème de décision, 5
- problème de l'acceptation d'un mot, 13
- problème de l'arrêt, 12
- problème dual, 19
- prédicat, 47
- PSPACE, 33

- récuratif, 11
- récurivement énumérable, 11
- réduction, 13
- réduction en espace logarithmique, 39
- réduction polynomiale, 22, 27

- SAT, 23
- satisfiable, 23

- thèse de Church-Turing, 6
- théorème de Cook, 23
- théorème de Immerman-Szelepcsényi, 41
- théorème de Rice, 18
- théorème de Savitch, 32
- TQBF, 34

- universalité d'un langage rationnel, 37

- vérifieur, 22