



**HAL**  
open science

**Approche numérique à l'usage du physicien pour résoudre les équations différentielles ordinaires. IV. Intégration numérique de la trajectoire d'une particule dans un potentiel central attractif, et dans un potentiel de type Hénon-Heiles. Trajectoires régulières et chaotiques.**

Hubert Baty

► **To cite this version:**

Hubert Baty. Approche numérique à l'usage du physicien pour résoudre les équations différentielles ordinaires. IV. Intégration numérique de la trajectoire d'une particule dans un potentiel central attractif, et dans un potentiel de type Hénon-Heiles. Trajectoires régulières et chaotiques.. Master. France. 2015. hal-02395340

**HAL Id: hal-02395340**

**<https://cel.hal.science/hal-02395340>**

Submitted on 5 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approche numérique à l'usage du physicien pour résoudre  
les équations différentielles ordinaires.

IV. Intégration numérique de la trajectoire d'une particule  
dans un potentiel central attractif, et dans un potentiel de  
type Hénon-Heiles. Trajectoires régulières et chaotiques.

Hubert Baty

December 5, 2019

#### Abstract

Dans ce chapitre, nous explorons les trajectoires d'une particule dans un potentiel général bi-dimensionnel. On considère d'abord des potentiels attractifs centraux de type  $U(r)$ . Les cas Képlérien ( $U(r) = -k/r$ , avec  $k > 0$ ) et harmonique ( $U(r) = kr^2$ , avec  $k > 0$ ) sont des cas particuliers déjà été vus au chapitre précédent. Puis, on explore le fameux potentiel (non central) de Hénon-Heiles, connu pour donner des trajectoires chaotiques. La méthode numérique utilisée est le schéma le plus performant rencontré dans les chapitres précédents, la méthode symplectique d'ordre 4.

## 1 Trajectoires dans un potentiel central attractif de type $U(r) = -1/r^\alpha$ , avec $\alpha > 0$

La conservation du moment cinétique sera évidemment assurée par le schéma (voir chapitre précédent).

Nous pouvons ainsi explorer des potentiels correspondants à différentes valeurs du paramètre réel  $\alpha$ , généralisant ainsi le cas particulier Képlérien  $\alpha = 1$  issu de la force de gravitation universelle établie par Newton. Pour ce faire, nous utiliserons la méthode la plus performante (SY4) à notre disposition et pourrons utiliser les diagnostics évoqués précédemment (sur l'énergie totale, le moment cinétique, et la section de Poincaré). Les composantes cartésiennes de la force seront donc obtenues à partir de  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) = -(\alpha/r^{(\alpha+1)})\vec{u}_r$ . Ainsi,  $\vec{F} = -(\alpha/r^{(\alpha+2)})\vec{r}$  conduit à  $F_x = -\alpha x/r^{(\alpha+2)}$ , et  $F_y = -\alpha y/r^{(\alpha+2)}$ .

### 1.1 Cas $0 < \alpha < 1$

Prenons donc un cas avec une valeur  $\alpha$  situé à mi-chemin entre 0 et le cas Képlérien  $\alpha = 1$ . Le calcul de la trajectoire obtenue avec la condition initiale ( $x = 1, y = 0, v_x = 0, v_y = 1$ ) est visible sur la figure 1, pour une dizaine d'orbites autour du centre de force (gauche) et pour plus de tours (droite). Ce jeu de conditions initiales correspond aux conditions pour obtenir l'orbite circulaire du cas Képlérien. La figure montre que les trajectoires ne se referment pas et de plus ont un mouvement de précession en sens inverse (sens direct des aiguilles d'une montre) du mouvement

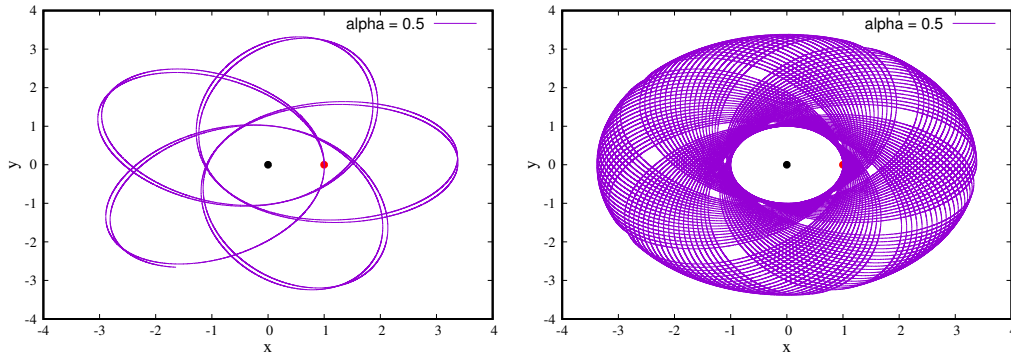


Figure 1: Trajectoire obtenue pour un potentiel central attractif avec  $\alpha = 0.5$  (centre de force représenté par le cercle noir), en partant des condition initiales (voir texte) indiquées par le cercle rouge. La figure de gauche est obtenue pour une dizaine de tours et la figure de droite pour une centaine.

orbital de la trajectoire (sens inverse des aiguilles d'une montre). De plus, la trajectoire remplit avec le temps la surface comprise entre un cercle interne de rayon  $r_m = 1$  et un cercle externe de rayon  $r_M > 1$ .

Les rayons de ces deux cercles sont entièrement déterminés par le couple de valeurs ( $E$  et  $\sigma$ ) qui sont des constantes du mouvement (voir Annexes). Les sections de Poincaré pour la trajectoire précédente est obtenue sur la figure 2. Elle montre que les points se disposent sur une courbe bien définie comme prévu pour ce type de problème. On y voit aussi, une seconde trajectoire avec un point unique, qui représente une trajectoire circulaire fermée intégrée avec un jeu de conditions initiales ( $x = 2^{2/3}$ ,  $y = 0$ ,  $v_y = 2^{-2/3}$ ,  $v_x = 0$ ) en accord avec ce que prévoit la théorie (voir Annexe). Les seules trajectoires fermées sont donc circulaires, et pour  $\sigma$  donné il n'existe qu'une seule (correspondante à la bonne valeur de l'énergie). Pour dire les choses autrement, ces orbites circulaires n'ont que peu de chance d'être réalisées, nous amenant à la conclusion que les trajectoires piégées ne se referment jamais sur elle mêmes pour ce potentiel.

Il existe aussi des trajectoires non piégées avec des orbites de corps qui s'échappent (tendent vers l'infini). Pour les obtenir, il suffit de choisir un jeu de conditions initiales avec une énergie totale positive.

Nous pouvons aussi visualiser l'ensemble des trajectoires dans les sections de Poincaré suivantes, chacune étant obtenue pour une énergie totale donnée. En effet, de cette façon (voir Figure 3 pour  $E = -0.5$ , et  $E = -0.25$ ), les courbes obtenues pour chaque trajectoire sont toutes imbriquées les unes dans les autres. Elles sont aussi centrées sur la trajectoire circulaire fermée pour cette énergie, c'est à dire pour un rayon de  $r = 2.25$  et  $r = 9$  pour les deux sections. Nous pouvons aussi de cette façon, visualiser l'amplitude maximale de variation des trajectoires (entre  $r = 0$  et  $r = 4 - 16$ ). La trajectoire qui s'approcherait asymptotiquement de  $r = 0$  serait la courbe dite échappement car elle correspondrait à une trajectoire non piégée. Pour  $E > 0$ , on peut aussi vérifier que toutes les trajectoires s'échappent. Enfin, nous avons considéré des trajectoires traversant le plan  $y = 0$  avec  $dy/dt > 0$  pour le demi-plan  $x > 0$ . Il existe aussi des trajectoires symétriques pour le demi-plan  $x < 0$  donnant une disposition symétrique par rapport à l'axe  $x = 0$  sur la section de Poincaré (pas montré ici), et qui seraient obtenues en considérant aussi les intersections de ces mêmes trajectoires avec le plan  $y = 0$  mais avec  $dy/dt < 0$  ou alors en considérant les intersections de trajectoires en sens inverse avec  $dy/dt > 0$ . On notera aussi

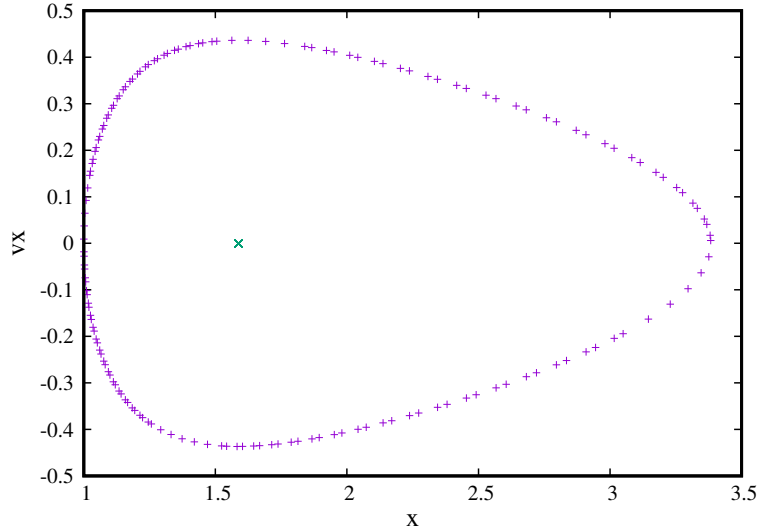


Figure 2: Sections de Poincaré obtenues pour deux trajectoires: une première qui est non fermée (voir texte) qui donne ainsi des points se positionnant sur une courbe dans ce plan  $(x, v_x)$ , et une seconde qui est une trajectoire circulaire fermée dans l'espace réel donnant ici un point fixe (croix verte en  $x = 2^{2/3}$ ). On ne considère que les trajectoires ayant  $dy/dt > 0$  et traversant le plan  $y = 0$  pour le demi-plan  $x > 0$ .

(voir Figure 3), que plus l'énergie totale est élevée, plus la région explorée par la particule est étendue.

## 1.2 Cas $\alpha = 1$

Le cas  $\alpha = 1$  correspond au cas dit Képlérien avec une force attractive en  $1/r^2$ , déjà exploré au chapitre précédent (voir aussi en Annexe). Toutes les trajectoires piégées pour ce cas sont fermées, et donc les sections de Poincaré correspondantes seront constituées de points isolés.

## 1.3 Cas $1 < \alpha < 2$

Prenons maintenant une valeur  $\alpha = 1.5$ . Nous pouvons ainsi partir du jeu de conditions initiales correspondant aux conditions pour obtenir l'orbite circulaire du cas Képlérien ( $x = 1, y = 0, v_x = 0, v_y = 1$ ), comme nous l'avons fait pour  $\alpha = 0.5$  (voir plus haut). Les résultats sont visibles sur la figure 4. La trajectoire ne se ferme pas et cette fois-ci, la précession se fait dans le sens de la trajectoire (sens inverse des aiguilles d'une montre). La trajectoire remplit au cours du temps tout l'espace compris entre deux rayons comme pour le cas  $\alpha = 0.5$ , mais cette fois-ci la condition de départ définit le rayon externe ( $r = 1$ ).

Nous pouvons aussi explorer les sections de Poincaré pour des familles de trajectoires de différentes énergies. Par exemple, comme pour  $\alpha = 0.5$ , nous avons reporté les résultats obtenus sur la figure 5 pour les deux énergies ( $E = -0.5$ , et  $E = -0.25$ ). Les conclusions que nous avons établies auparavant restent vraies pour ce cas.

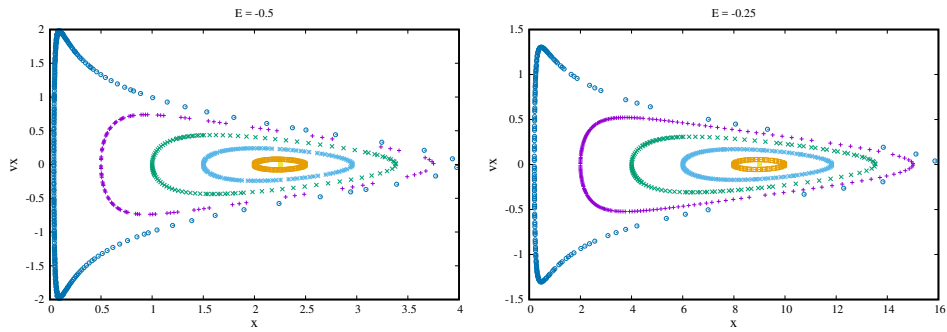


Figure 3: Sections de Poincaré obtenues pour deux familles de trajectoires. A gauche: six trajectoires correspondant à une énergie totale  $E = -0.5$  et différants par leur moment cinétique. A droite, six autres trajectoires correspondant à une énergie totale  $E = -0.5$ . Il faut aussi noter que pour chaque famille, les courbes entourent une trajectoire circulaire fermée. On ne considère que les trajectoires ayant  $dy/dt > 0$  et traversant le plan  $y = 0$ , ce qui est obtenu pour le demi-plan  $x > 0$ . A noter aussi que les trajectoires périodiques sont obtenues en correspondance avec les points fixes.

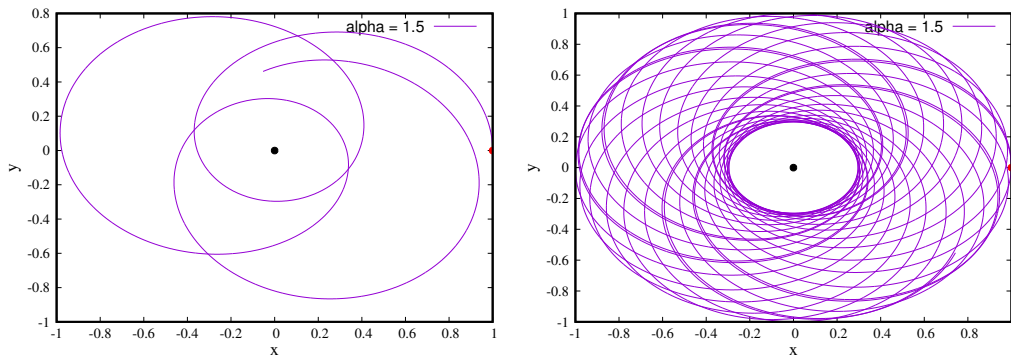


Figure 4: Trajectoire obtenue pour un potentiel central attractif avec  $\alpha = 1.5$  (centre de force représenté par le cercle noir), en partant des condition initiales (voir texte) indiquées par le cercle rouge. La figure de gauche est obtenue pour quelques tours et la figure de droite pour une centaine.

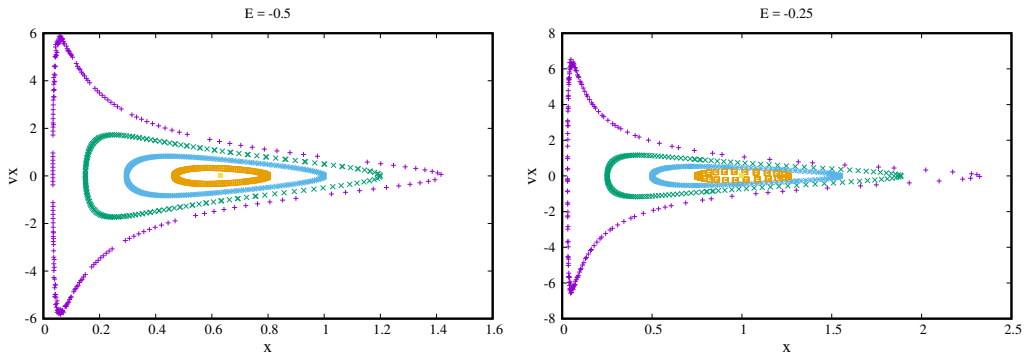


Figure 5: Sections de Poincaré obtenues pour deux familles de trajectoires pour  $\alpha = 1.5$ . A gauche: cinq trajectoires correspondant à une énergie totale  $E = -0.5$  et différants par leur moment cinétique. A droite, cinq autres trajectoires correspondant à une énergie totale  $E = -0.5$ . Il faut aussi noter que pour chaque famille, les courbes entourent une trajectoire circulaire fermée. On ne considère que les trajectoires ayant  $dy/dt > 0$  et traversant le plan  $y = 0$ , ce qui est obtenu pour le demi-plan  $x > 0$ .

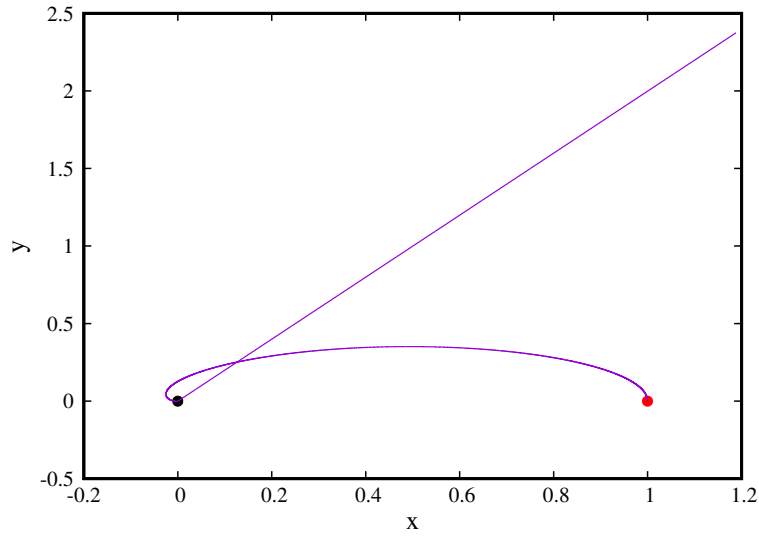


Figure 6: Exemple de trajectoire instable obtenue pour  $\alpha = 2$ .

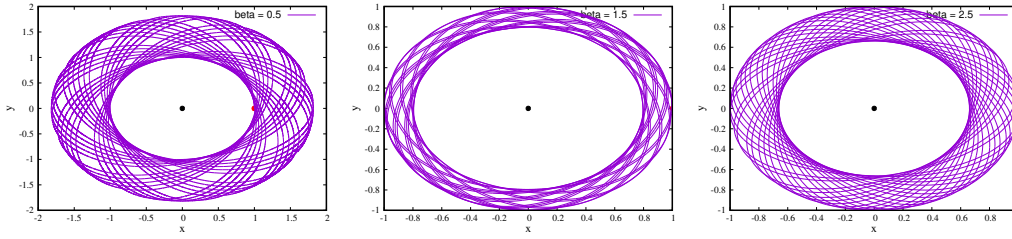


Figure 7: Trajectoires obtenue pour trois potentiels centraux attractifs avec  $\beta = 0.5$  (figure de gauche),  $\beta = 1.5$  (figure centrale), et  $\beta = 2.5$  (figure de droite). Les conditions initiales sont les mêmes (voir texte). Le centre de force est représenté par le cercle noir.

#### 1.4 Cas de potentiels avec $\alpha = 2$ et $\alpha > 2$

Il est montré en Annexe que les trajectoires deviennent instables pour  $\alpha$  supérieur ou égal à 2. Ceci est visible sur la Figure 6, avec un exemple de trajectoire spirant vers le centre de force pour ensuite donner une éjection violente car la force tend vers l'infini pour  $r$  tendant vers zéro. Ceci nous permet de nous rendre compte que nous avons beaucoup de chance de nous trouver dans un monde ayant la bonne loi de gravitation favorisant non seulement des orbites stables mais de plus fermées. Autrement dit, nous ne serions probablement pas présents pour faire cette constatation si la loi de la gravitation universelle était différente (c'est à dire  $\alpha$  différent de 1)!

## 2 Trajectoires dans un potentiel central attractif de type $U(r) = r^\beta$ , avec $\beta > 0$

Les composantes cartésiennes de la force seront donc obtenues à partir de  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r) = -\beta r^{(\beta-1)}\vec{u}_r$ . Ainsi  $\vec{F} = -\beta r^{(\beta-2)}\vec{r}$ , puis  $F_x = -\beta x r^{(\beta-2)}$  et  $F_y = -\beta y r^{(\beta-2)}$ .

A l'image des potentiels précédents, nous pouvons étudier les trajectoires dans cette nouvelle famille de potentiels, dont le cas  $\beta = 2$  constitue l'oscillateur harmonique bidimensionnel (voir chapitre précédent). De plus, toutes les trajectoires sont maintenant piégées car le potentiel tend vers l'infini quand  $r$  tend vers l'infini (voir Annexe). Il existe aussi une orbite circulaire stable pour un moment cinétique donné.

Pour vérifier ceci, nous avons exploré plusieurs valeurs de  $\beta$ . Tout d'abord, les résultats obtenus pour  $\beta = 0.5, 1.5$ , et  $2.5$  sont visibles sur la figure 7, pour une trajectoire démarant avec le jeu de conditions initiales  $x = 1, y = 0, v_x = 0, v_y = 1$ . On voit que comme pour les potentiels vus avant, les trajectoires ne se referment pas hormis si  $\beta = 2$  (pas montré) et sont comprises dans une région annulaire située entre deux cercles.

L'obtention des sections de Poincaré pour deux valeurs de  $\beta$  ( $\beta = 0.5$  et  $2.5$ ) est visible sur la figure 8. Tout d'abord, nous avons considéré l'ensemble du plan  $(x, v_x)$  et non seulement le demi-plan avec  $x > 0$ , conduisant ainsi comme attendu à des figures symétriques. Les courbes sont (comme vu auparavant) imbriquées les unes dans les autres et centrées sur un point fixe, représentant l'orbite circulaire fermée pour cette valeur d'énergie. Enfin, on remarquera que pour ce second type de potentiel central ( $U(r) = r^\beta$ ), les trajectoires explorant les faibles valeurs de  $r$  conduisent à une meilleure précision que pour les potentiels de type  $U(r) = -1/r^\alpha$ , car la force tend alors vers zéro au lieu de l'infini. Cela est particulièrement visible en comparant les figures 5 et 8, pour les courbes s'approchant au plus près de  $x = 0$ .

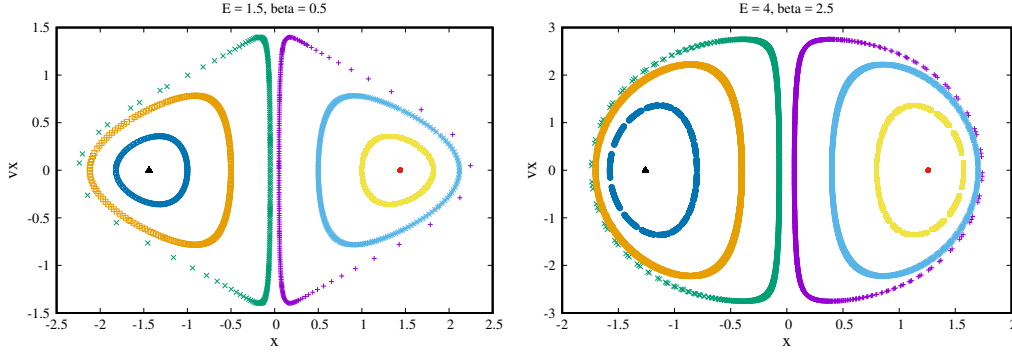


Figure 8: Sections de Poincaré obtenues pour quatre trajectoires dans un potentiel attractif avec  $\beta = 0.5$  ayant une énergie totale  $E = 1.5$  (figure de gauche), et dans un potentiel avec  $\beta = 2.5$  ayant une énergie totale  $E = 4$  (figure de gauche). On considère toutes les trajectoires traversant le plan  $y = 0$ .

### 3 Potentiel de Hénon-Heiles et trajectoires chaotiques

Ce potentiel a été introduit en 1964 par Michel Hénon et Carl Heiles comme un potentiel simplifié pour étudier la dynamique d'une étoile test subissant l'effet gravitationnel de toutes les autres étoiles à chaque instant. A l'époque, ils ont utilisé un ordinateur IBM7090 à 32 koctets de RAM (eh oui il ne s'agit pas d'une erreur de frappe, c'est bien 32 koctets ... une sacrée performance comparée aux performances des ordinateurs actuels).

Le potentiel en question est,

$$U(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)}{2} + \lambda(x^2y - \frac{y^3}{3}), \quad (1)$$

avec  $\lambda$  un paramètre souvent fixé égal à l'unité. Ainsi les équations (normalisées) du mouvement dans ce potentiel deviennent pour  $\lambda = 1$ ,

$$\ddot{x} = -x - 2xy, \quad (2)$$

et

$$\ddot{y} = -y - x^2 - y^2. \quad (3)$$

Nous pouvons remarquer que ce potentiel tend vers le potentiel bi-harmonique lorsque  $x$  et  $y$  tendent vers 0, car le terme multiplié par  $\lambda$  est un terme d'ordre 3 qui devient négligeable devant les termes d'ordre 2. Les iso-contours du potentiel (voir Figure 9) montrent aussi une symétrie de type  $2\pi/3$  (invariance par rotation d'un angle de  $\pm 2\pi/3$ ). Les iso-contours  $U = 1/6$  (lignes droites sur la figure) joueront un rôle particulier car ils séparent le puits de potentiel (contenant des orbites piégées) du domaine extérieur contenant les orbites qui s'échappent (à l'infini). Les deux lignes s'intersectent aux trois points de coordonnées  $(x = 0, y = 1)$ ,  $(x = \sqrt{3}/2, y = -1/2)$ , et  $x = -\sqrt{3}/2, y = -1/2)$ . Contrairement aux potentiels centraux, la force n'est plus radiale et donc le moment cinétique n'est plus une constante du mouvement. Ce qui conduit à une dynamique plus riche comme nous pouvons le voir plus loin.



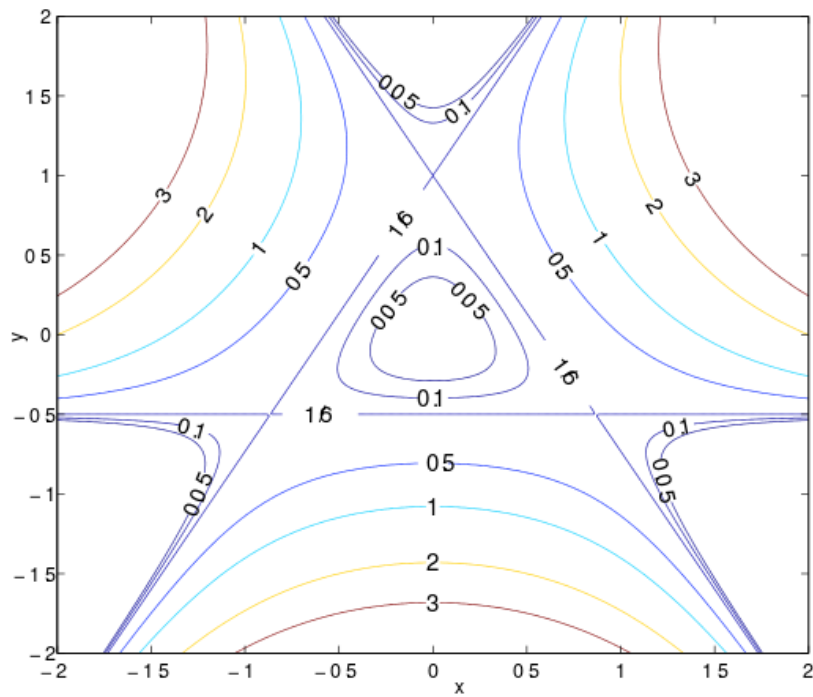


Figure 9: Iso-contours du Potentiel de Hénon-Heiles (source Wikipédia).

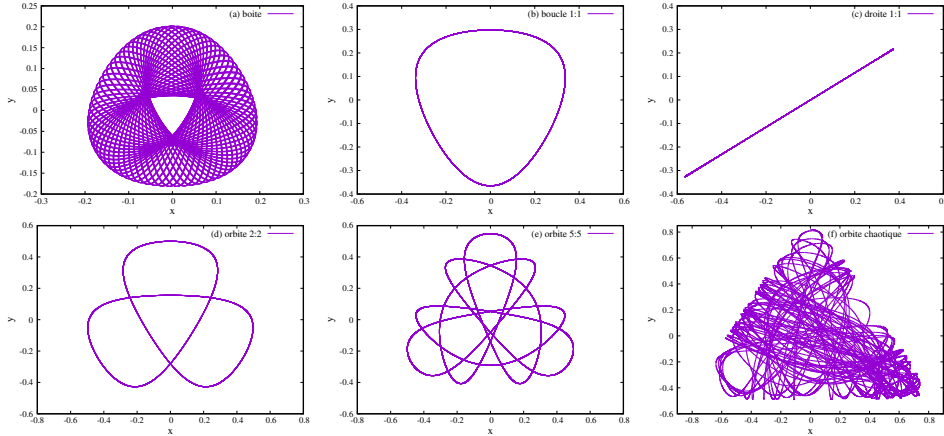


Figure 10: Exemples de différents types de trajectoires piégées obtenues par intégration du mouvement dans le potentiel de Hénon-Heiles. (a) Orbite de type boîte qui ne se referme jamais (non fermée). (b) Orbite fermée de type boucle (avec résonance 1 : 1). (c) Orbite fermée de type ligne droite (avec résonance 1 : 1). (d) Orbite fermée de type résonance 2 : 2. (e) Orbite fermée de type résonance 5 : 5. (f) Orbite non fermée de type chaotique.

### 3.1 Aperçu de plusieurs trajectoires particulières dans l'espace réel

La classification des différents types de trajectoires piégées a été obtenue dans la littérature. Six exemples sont tracés sur la figure 10, partant tous de la condition initiale commune  $x = 0$ . Le temps d'intégration final est suffisant pour effectuer quelques centaines d'allers-retours dans le potentiel. Une trajectoire de type boîte (qui ne se ferme jamais) est visible sur la figure (a), et obtenue en partant de  $E = 0.02$ ,  $y = -0.082$ , et  $v_y = 0$  (la condition initiale sur  $v_x$  se déduisant des autres conditions). Deux autres trajectoires (figures b et c) sont obtenues qui correspondent à une orbite fermée de type boucle et une autre fermée de type droite. Les conditions initiales sont ( $E = 0.12$ ,  $y = 0.29754452$ , et  $v_y = 0$ ) pour le cas (b), et ( $E = 0.12$ ,  $y = 0$ , et  $v_y = 0.24494897$ ) pour le cas (c). Ces orbites sont dites de résonance 1 : 1, car la période du mouvement suivant  $x$  coïncide avec celle du mouvement suivant  $y$ . Ensuite, deux autres trajectoires qui correspondent à des résonance 2 : 2 (figure d, partant de  $E = 0.16$ ,  $y = 0.50003040$ , et  $v_y = 0$ ), et résonance 5 : 5 (figure e, partant de  $E = 0.12$ ,  $y = 0.54846395$ , et  $v_y = 0$ ). Enfin, une dernière trajectoire est visible sur la figure f, qui correspond à une trajectoire non fermée (comme pour la première) mais non régulière ou encore dite chaotique. Nous pouvons conclure que la dynamique est clairement plus riche que pour un potentiel central.

La figure 11 montrant la variation temporelle des coordonnées au cours du temps, permet de vérifier la résonance 2 : 2 sur la figure de gauche (signaux périodiques pour  $x$  et  $y$ ), ainsi que le comportement apériodique pour l'orbite chaotique sur la figure de droite.

### 3.2 Sections de Poincaré dans un plan $x = 0$

Comme expliqué auparavant, nous pouvons utiliser les sections de Poincaré afin de gagner de la compréhension sur le comportement du système. Comme de coutume pour ce potentiel, nous allons considérer une section dans un plan  $x = 0$ , et donc visualiser l'intersection des trajectoires avec le plan  $x = 0$  maintenant (ce choix est la représentation traditionnelle dans la littérature).

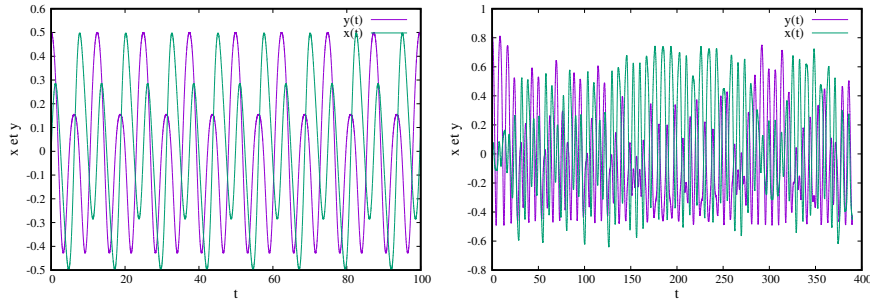


Figure 11: Coordonnées  $(x(t), y(t))$  obtenues au cours du temps pour deux trajectoires de la figure 10, cas de l'orbite de résonance 2 : 2 (figure de gauche), et cas de l'orbite chaotique (figure de droite).

Nous allons d'abord examiner les trajectoires ayant une énergie faible, de telle façon que les trajectoires piégées ne pourront explorer qu'une partie centrale restreinte du potentiel autour du centre de force. Ceci est fait pour  $E = 0.05$  et huit conditions initiales différentes, visibles sur la section de Poincaré (plan  $x = 0$ ) de la figure 12. Les centres des îlots avec  $y = 0$  correspondent à des orbites fermées de type ligne droite (résonance 1 : 1), alors que les centres des îlots avec  $dy/dt = 0$  correspondent à des orbites fermées de type boucle (résonance 1 : 1). Les autres courbes correspondent à des orbites qui ne se referment jamais (ou boîtes). La courbe la plus externe est remarquable, car elle entoure à la fois les zones de tous les îlots. Cette courbe est appelée courbe séparatrice et sépare les orbites piégées des orbites qui s'échappent. Toutes les orbites ainsi obtenues sur cette figure sont dites régulières ou non chaotiques.

Nous allons ensuite examiner les trajectoires ayant une énergie un peu plus grande, avec  $E = 0.085$ . Les résultats sont visibles sur la figure 13. Les remarques faites pour une énergie faible restent vraies. Cependant, la courbe dite séparatrice montre maintenant un certain épaississement au niveau des trois structures en point- $X$ . La figure suivante (figure 14) montre plusieurs trajectoires avoisinant la séparatrice ainsi que la séparatrice. Le zoom notamment permet d'observer que des courbes de par et d'autre de la séparatrice sont formées de chaînes d'îlots, et que la séparatrice quant à elle n'est pas régulière. Nous avons bien sûr vérifié que la précision numérique n'influe pas sur les résultats.

En augmentant encore plus l'énergie totale, les trajectoires obtenues montrent un comportement encore plus complexe. Ceci est visible sur la figure 15 pour  $E = 0.1$ . Tout d'abord la séparatrice est plus épaisse avec des trous. Mais, des orbites situées à l'intérieur des îlots sont maintenant formées de nouvelles chaînes d'îlots secondaires. En effet, des chaînes ayant une périodicité 5 et 8 sont visibles. Les centres de ces îlots correspondent à des trajectoires périodiques fermées d'ordre élevé (résonance 5 : 5 et 8 : 8) déjà évoquées avant.

Enfin, nous avons exploré les trajectoires pour  $E = 1/8$  et  $E = 1/6$ . Les résultats des sections de Poincaré sont visibles sur la Figure 16. Comme attendu, la région contenant les orbites chaotiques s'est fortement étendue

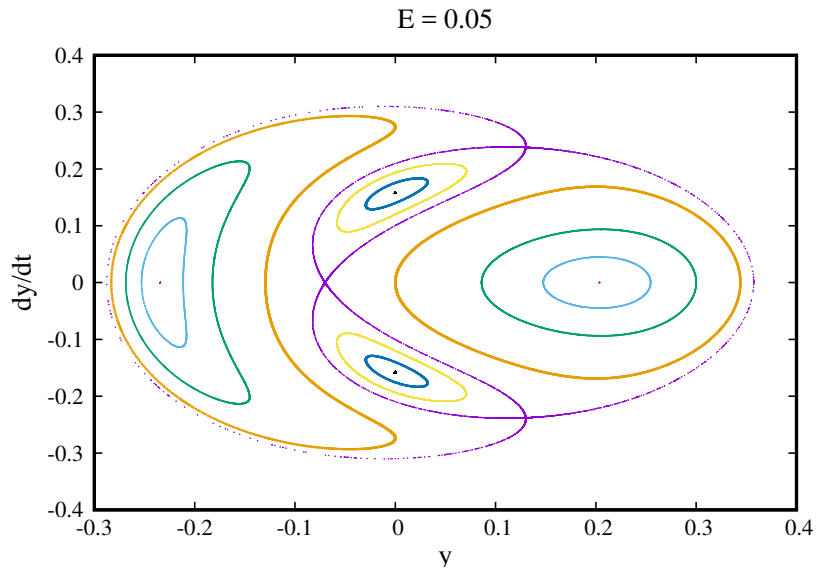


Figure 12: Sections de Poincaré obtenues pour huit trajectoires dans le potentiel de Hénon-Heiles correspondant à une énergie totale relativement faible  $E = 0.05$ . On considère toutes les trajectoires traversant le plan  $x = 0$ .

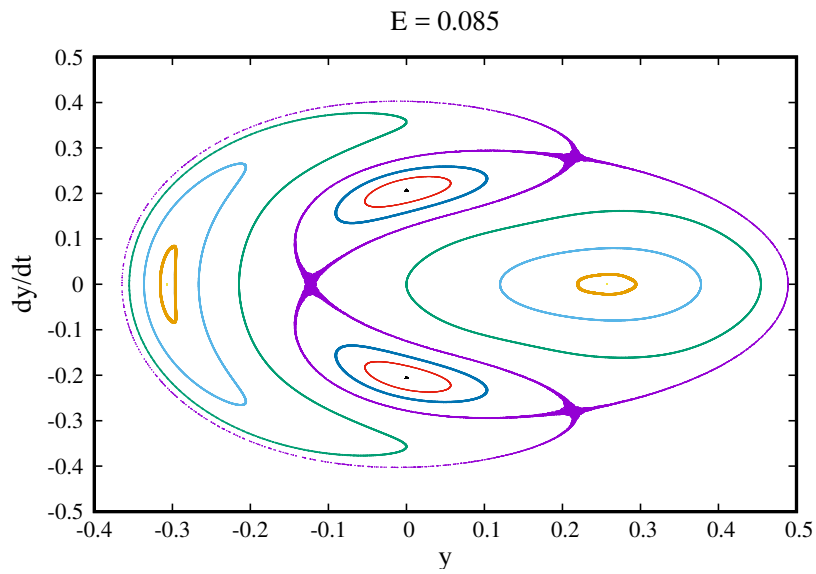


Figure 13: Sections de Poincaré obtenues pour huit trajectoires dans le potentiel de Hénon-Heiles correspondant à une énergie totale  $E = 0.085$ . On considère toutes les trajectoires traversant le plan  $x = 0$ .

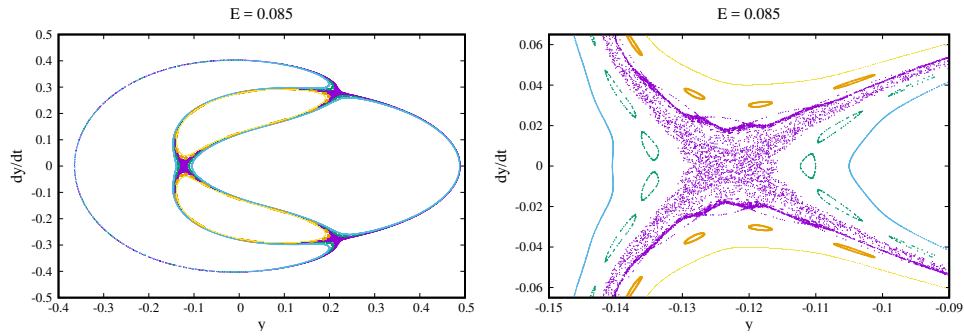


Figure 14: Sections de Poincaré obtenues pour plusieurs trajectoires voisines de la séparatrice dans le potentiel de Hénon-Heiles correspondantes a une énergie totale  $E = 0.085$  (figure de gauche), et zoom sur le point- $X$  central (figure de droite).

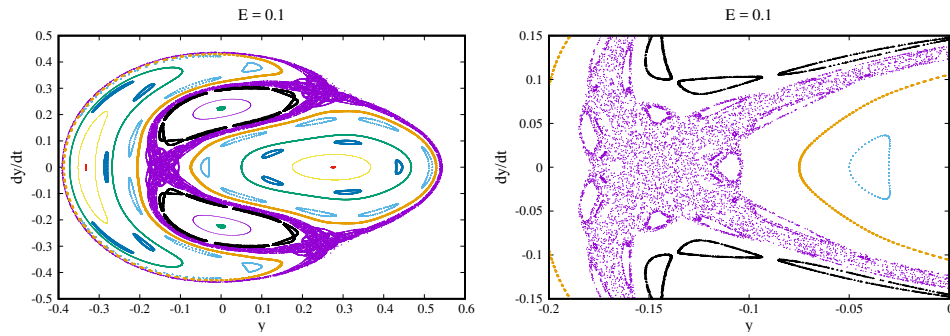


Figure 15: Sections de Poincaré obtenues pour une dizaine de trajectoires dans le potentiel de Hénon-Heiles correspondantes a une énergie totale  $E = 0.1$  (figure de gauche), et zoom sur le point- $X$  central (figure de droite).

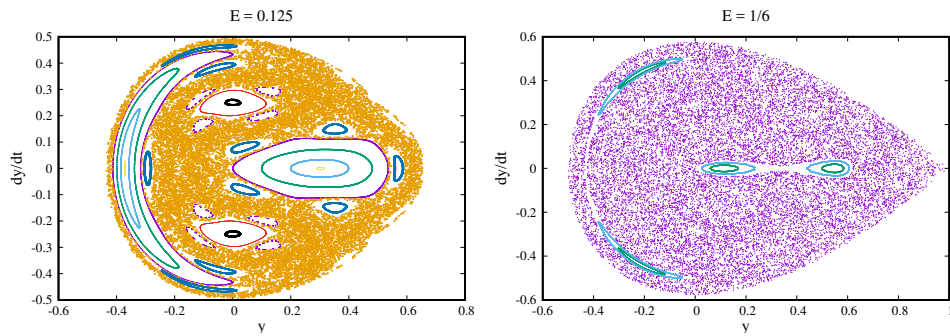


Figure 16: Sections de Poincaré obtenues pour une dizaine de trajectoires dans le potentiel de Hénon-Heiles correspondantes a une énergie totale  $E = 1/8$  (figure de gauche), et  $E = 1/6$  (figure de droite).

## A Quelques résultats analytiques généraux pour un potentiel central

Dans cette Annexe, nous rappelons quelques propriétés des mouvements d'une particule soumise à une force dite centrale et conservative. Une telle force pourra s'écrire:

$$\vec{F} = f(r)\vec{u}_r. \quad (4)$$

La force est centrale car la droite support de la force passe constamment par le point fixe  $O$  (origine du repère) et est donc orientée suivant le vecteur unitaire radial  $\vec{u}_r$ . La force est aussi conservative car elle dérive d'une fonction (définissant ainsi l'énergie potentielle  $U(r)$ ), par  $\vec{F} = -\vec{\nabla}U(r)$ . Par conséquent, le travail élémentaire ( $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l}$ ) le long d'un déplacement  $d\vec{l}$  est une forme différentielle totale exacte égale à la variation élémentaire de l'énergie potentielle, et donc  $dU = -f(r)dr$ . La conséquence ultime sera la conservation de l'énergie totale (cinétique ajoutée à l'énergie potentielle), d'après le théorème de l'énergie cinétique (le repère étant supposé Galiléen). Enfin, dans cet ouvrage nous nous limiterons à des forces de nature attractive, en correspondance avec  $f < 0$ .

Le théorème du moment cinétique implique que pour une force centrale, le moment cinétique  $\vec{\sigma}$  est une constante du mouvement (comme pour l'énergie totale). Ainsi,  $\vec{\sigma}(t)$  reste égal à sa valeur initiale  $\vec{\sigma}(t=0)$ . La première conséquence (la direction du moment cinétique est constante) est que le mouvement est confiné dans un plan défini par les deux vecteurs, position initiale  $\vec{r}(0)$  et vitesse initiale  $\vec{v}(0) = \dot{\vec{r}}(0)$ , car  $\vec{\sigma} = \vec{r} \times m\vec{v}$  pour une particule de masse  $m$ . Ce plan est donc perpendiculaire à la direction du moment cinétique. La seconde conséquence qui concerne la conservation de la norme du moment cinétique au cours du temps, se traduit par une propriété de régularité dans le mouvement.

## B Conservation du moment cinétique par une méthode numérique symplectique sur l'exemple de l'oscillateur 2D

Pour rendre les calculs le plus simple possible, nous allons utiliser la méthode symplectique d'ordre 1 (SY1 aussi appelée explicite-implicite car la vitesse est d'abord implémentée par Euler explicite puis la position par Euler implicite) au lieu de SY2. Cependant, le résultat reste valable aussi pour les schémas d'ordre plus élevés.