



**HAL**  
open science

## Physique Mécanique ESIR (Cycle Prépa CUPGE 1A)

Bruno Bêche

► **To cite this version:**

Bruno Bêche. Physique Mécanique ESIR (Cycle Prépa CUPGE 1A). Licence. ESIR cupge Univ Rennes 1, France. 2022, pp.132. hal-03462446

**HAL Id: hal-03462446**

**<https://cel.hal.science/hal-03462446v1>**

Submitted on 1 Dec 2021

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Physique MECANIQUE

(Transparents et Eléments relatif au Cours traité en amphithéâtre)

## ESIR (Cycle Prépa - CUPGE 1A-S1)



— UnivRennes1 —  
[univ-rennes1.fr](http://univ-rennes1.fr)

B. BÊCHE Pr., IETR CNRS - ESIR UR1

[bruno.beche@univ-rennes1.fr](mailto:bruno.beche@univ-rennes1.fr)

<https://www.ietr.fr/bruno-beche>

# PLAN DU COURS

♦ **INTRODUCTION** : Définitions, statistique, cinématique, dynamique, place de la mécanique classique de Newton, postulats associés sur la notion d'espace et de temps, la/les masse(s), ordres de grandeurs (distance et durée), unités et S.I. (MKS).

## ♦ **CHAPITRE I) CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL**

Référentiels (Galiléens ou d'inertie), repères et systèmes de coordonnées (2D, 3D) cartésiens, polaires, cylindriques, sphériques, notions de trajectoire, position, vitesse, accélération, expressions et mouvements, vers les référentiels non Galiléens et la relativité des mouvements, lois de composition des vitesses et des accélérations.

## ♦ **CHAPITRE II) FONDEMENTS ET POSTULATS DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE : PRINCIPES, INTERACTIONS ET FORCES**

Principe d'inertie, quantité de mouvement, principe fondamental de la dynamique (PFD) et lien Chapitre I), principe des actions réciproques (action/réaction), interactions en physique, notion de forces et exemples (forces de frottement solide puis visqueux, loi et force de l'attraction gravitationnelle, notion de masse gravitationnelle, poids, forces en électrostatique et électromagnétisme, ...), applications du PFD, la chute.

Lois de conservation de la quantité de mouvement, physique des collisions et chocs.



### ◆ CHAPITRE III) FORMULATION INTEGRALE OU APPROCHES ENERGETIQUES : TRAVAIL, PUISSANCE, ENERGIE, POTENTIEL

Travail le long d'une trajectoire, puissance, les énergies, énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique, énergie potentielle et notion de forces à circulation conservative (champ de forces conservatif), propriétés, notions de champs et de potentiels, énergie mécanique totale et loi de conservation, le théorème du viriel, notions et conditions d'équilibre et de stabilité, petits mouvements autour de la position d'équilibre, vers l'oscillateur harmonique en mécanique, notions de barrières et de puits de potentiel en physique.

### ◆ CHAPITRE IV) LES OSCILLATEURS MECANIQUES : MOUVEMENTS VIBRATOIRES ET OSCILLANTS

L'oscillateur harmonique à un degré de liberté en physique mécanique. Oscillateur harmonique simple (libre et conservatif), analogie électrique. Oscillateur harmonique libre amorti (ou dissipatif), mécanique et analogie électrique, régimes apériodique, critique, pseudo-périodique; facteur de qualité. Oscillateur harmonique forcé, régime permanent. Notion de résonance et facteur de qualité.

## ♦ CHAPITRE V) MOMENT CINÉTIQUE ET ROTATIONS

Moment d'une force, moment cinétique et moment d'inertie, Théorème de transport (ou des axes parallèles, ou théorème de Huygens-Steiner), théorème du moment cinétique, conservation et importance du moment cinétique en physique, loi des aires, énergies associées, puissance, mouvements à force centrale newtonienne et énergie potentielle effective, nature des trajectoires (états liés ou de diffusion), théorème de Bertrand.

+ LES PERSPECTIVES: « *Vers la Mécanique des Solides, mouvements combinés de rotations et de translations...* »





## Remarques :

Lorsque le symbole  apparaîtra, une démonstration plus conséquente sera nécessaire au tableau et sur votre cahier / feuilles en terme de prise de notes.

Le symbole  mérite une attention particulière.

## Quelques ouvrages et livres de références :

### → Pour le cours :

- ‘Physique Générale : Tome I, Mécanique et Thermodynamique’, M. Alonso, E. J. Finn, Ed. InterEditions ou dernièrement Ed. Dunod.
- ‘Introduction à la Mécanique’, M. Le Bellac, Ed. Belin collection DIA.
- ‘Mécanique’, C. Cappe, Ed. Dunod (avec exercices).
- ‘Mécanique : fondements et applications’, J. Ph. Pérez, Ed. Dunod (avec exercices).
- ‘Introduction to Classical Mechanics’, D. Morin, Ed. Cambridge, (with problems and solutions).

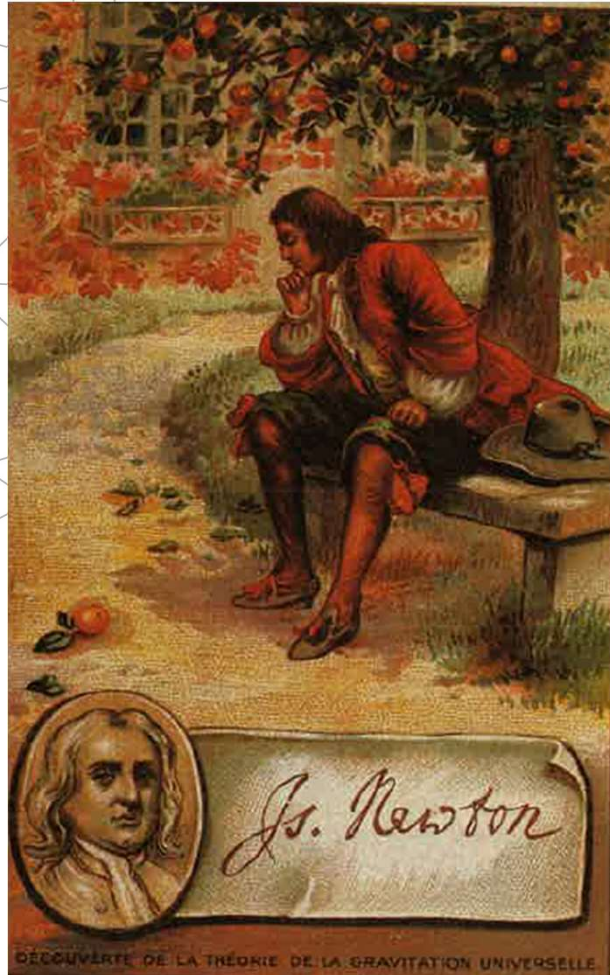
### + ‘Les classiques’

- ‘Mécanique : Cours de Physique de Berkeley’, C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, vol. 1, Ed. Armand Colin.
- ‘Mécanique 1&2 : Le cours de physique de Feynman’, R. Feynman, Ed. Dunod.

### → Pour les exercices et les problèmes :

- Tous les livres possibles et imaginables (du SDC - BU Sciences Campus Beaulieu, voir SUPERNOVA) relatifs à la première année du supérieure (CPGE MPSI, PCSI, PC...) aux chapitres de ‘Mécanique’.

SUPERNOVA

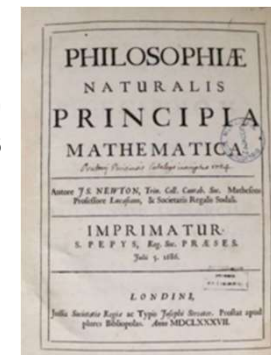


DECOUVERTE DE LA THÉORIE DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE

L'existence d'Isaac Newton apparaît extraordinaire de part son apport phénoménal et ses idées fécondes à la compréhension et à l'analyse des phénomènes fondamentaux de la Nature en mécanique, optique théorie et instrumentation, hydrodynamique et mathématiques...

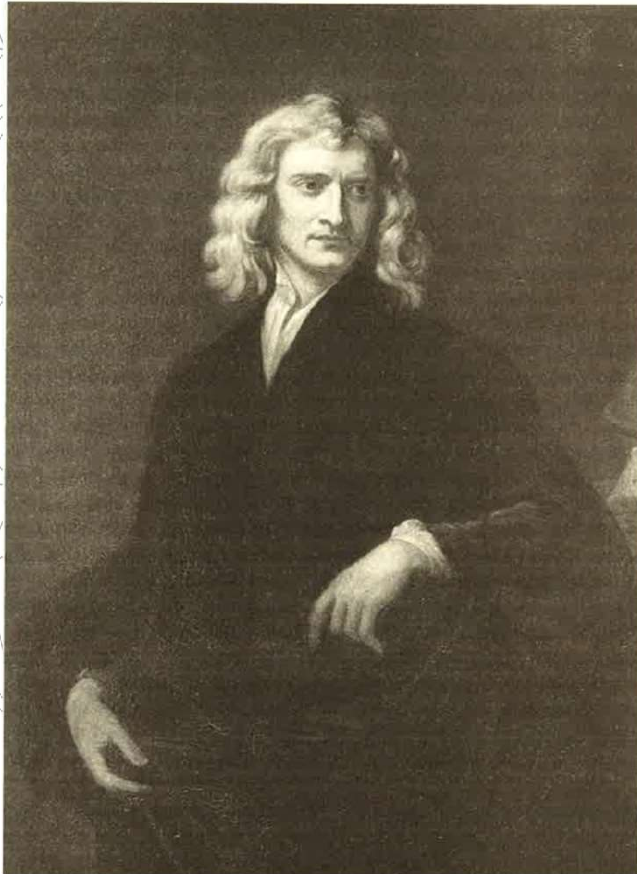
Naissance en 1642 (année du décès de Galilée), apparaissant ainsi comme une forme de continuité de l'immense travail portant sur l'élaboration des lois physiques régissant l'Univers. Il fit ses études au Trinity Collège de Cambridge et fut reçu en 1665 '*bachelier es arts*' (Bachelor). La peste noire ravageant l'Angleterre de l'époque, l'Université ferma ses portes et Newton passa deux années qualifiées d'admirables et fructueuses au sein de son village natale de Woolsthorpe (by-Colsterworth). Il rédigea l'ensemble de ses traités mathématiques, énoncera la globalité de ses principes universels. En 1684, l'astronome Halley le convaincra de publier ses travaux concernant la *Gravitation Universelle* en un troisième livre intitulé '*Philosophiae naturalis principia mathematica*'. Il unifie les mouvements de la mécanique 'céleste' (de Kepler) avec ceux terrestres (de Galilée).

Président de la 'Royal Society of Sciences', il décède en 1727, reconnu par ses pairs comme un incomparable génie.



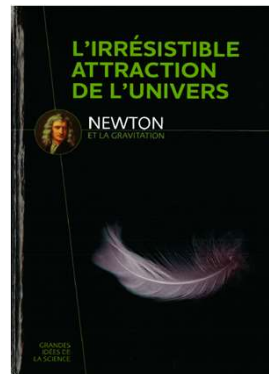
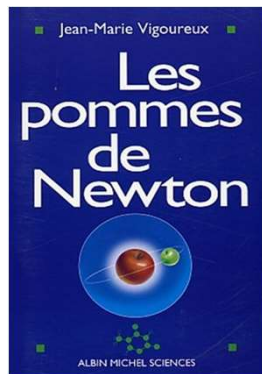


# Isaac Newton [1642-1727]



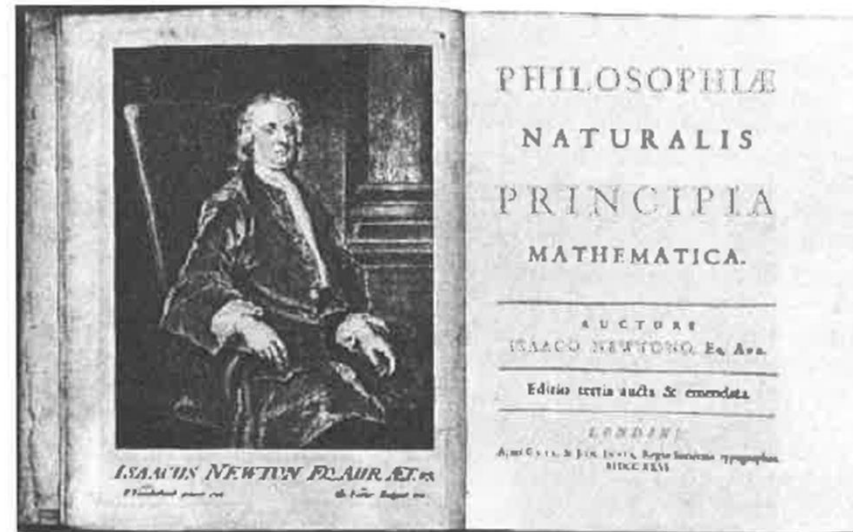
Premier de la célèbre série de portraits d'Isaac Newton exécutée par le peintre Godfrey Kneller. Sur celui-ci, le professeur lucasien avait quarante-six ans. Il avait publié les *Principes* deux ans plus tôt seulement.

- 1642** Naissance à Woolsthorpe, Lincolnshire, le 25 décembre (4 janvier 1643 d'après le calendrier grégorien), du fils posthume d'Isaac et Hannah Newton, née Ayscough. Celle-ci le laissera après son remariage aux soins de sa grand-mère maternelle, à l'âge de trois ans.
- 1653** Après la mort de son beau-père, Barnabas Smith, Newton retourne vivre avec sa mère. Il va à l'école à Grantham.
- 1661** Newton entre au Trinity College de l'université de Cambridge.
- 1665** Après qu'il a obtenu sa licence, une épidémie de peste oblige Newton à retourner à Woolsthorpe, où il reste deux ans. Pendant cette période, mais particulièrement en 1666, connue comme l'*annus mirabilis* newtonienne, il développe nombre de ses idées fondamentales dans le domaine mathématique, l'optique, la mécanique et l'astronomie.
- 1669** Newton est nommé professeur lucasien de mathématiques au Trinity College en remplacement d'Isaac Barrow. Il écrit *De analysi*.
- 1672** Newton entre à la Royal Society, où il présente un article majeur sur l'optique, qui le conduira par la suite à un affrontement avec un autre membre de la société, Robert Hooke.
- 1679** À la mort de sa mère, Newton devient encore plus introspectif.
- 1684** L'astronome Edmund Halley consulte Newton sur les causes du mouvement planétaire. Cette visite sera le déclencheur des *Principes*
- 1687** Newton publie les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*. Cet ouvrage monumental réunit une bonne part de ses idées sur la mécanique céleste et la gravitation universelle, et offre en outre une explication physique cohérente des marées, de la précession des équinoxes et d'autres phénomènes naturels.
- 1696** Newton est nommé directeur de la Royal Mint (Monnaie royale).
- 1703** Newton est nommé président de la Royal Society. Un an plus tard, il publie *Opticks*, sur la lumière et ses propriétés.
- 1714** La Royal Society tranche en faveur de Newton la dispute sur l'antériorité dans l'invention du calcul infinitésimal qui l'opposait à Leibniz depuis 1684.
- 1727** Newton meurt riche et célèbre, le 31 mars. Il est enterré en grande pompe à l'abbaye de Westminster.





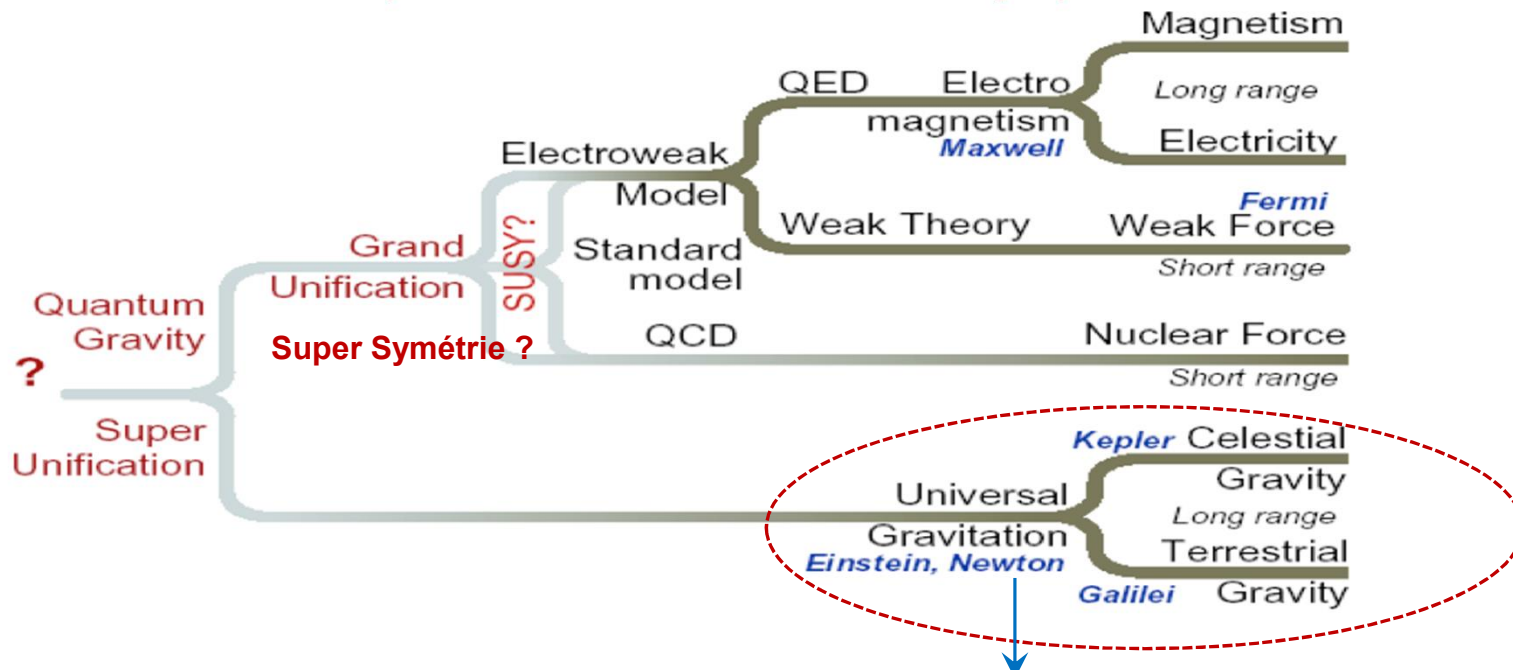
Statue de Newton, par Roubiliac. Cette statue se dresse au Trinity College, université de Cambridge, où exerça Newton. L'inscription en latin gravée sur le socle dit : « NEWTON, dont le génie a surpassé le genre humain ».



Les Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica (en abrégé Principia ou Principes), parus en 1687, constituent une œuvre monumentale. Ils s'ouvrent par une série de définitions et par les célèbres lois du mouvement (loi d'inertie, loi de la dynamique, loi de l'égalité de l'action et de la réaction), se poursuivent par deux livres consacrés au mouvement des corps et se concluent par un troisième livre traitant du « Système du monde ». Les Principes marquèrent une date dans l'histoire des sciences et assurèrent définitivement la gloire à Newton.

# L'unification des interactions et forces

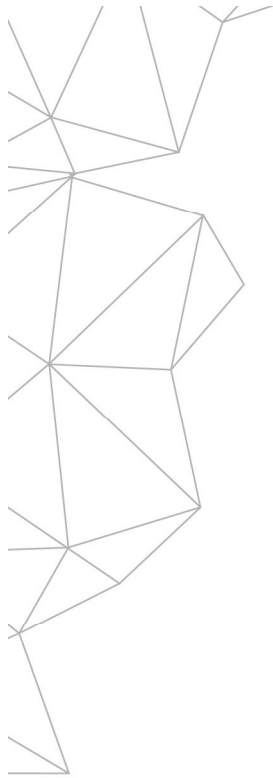
## (Positionnement de la Mécanique)



La loi de la gravitation universelle a unifié dans une même théorie les forces de gravité qui s'exercent entre les objets célestes et celles qui s'exercent entre la matière et la terre. **C'est Isaac Newton qui le premier unifia la mécanique céleste (Kepler) avec la mécanique terrestre (Galilée).** A. Einstein en 1917 (avec la théorie dite de la relativité générale) décrit une théorie de la gravitation plus générale à base de géométrie riemannienne pouvant représenter la courbure de « l'espace-temps ».

J.C. Maxwell a unifié la force magnétique et la force électrique dans la théorie classique de l'électromagnétisme (1864), ensuite Fermi puis Glashow (1961), puis Weinberg et Salam (vers les années 1967) ont contribué à l'unification des interactions faible et électromagnétique en une théorie dite électrofaible unique.

+ Suggestion lecture, voir sous Moodle [Interlude Les interactions en Physique\\_1 puis \\_2.pdf](#)



# Pré-COURS

(A lire sous site Moodle, voir .pdf)



« Pré-requis minimal du vectoriel au lycée pour préparer le début du supérieur : quelques notions sur le vectoriel et ses notations, ses calculs, sa géométrie »

....vers l'entrée du Supérieur.

⇒ Notions basiques à lire après son baccalauréat avant l'entrée du 1<sup>er</sup> cours de Mécanique au 1<sup>er</sup> semestre (.pdf de 15 pages)

# INTRODUCTION

## INTRODUCTION

①

- La statique: c'est l'étude des corps matériels en équilibre. (analyse vectorielle)
- La cinématique: c'est l'étude des mvts des corps matériels sans prendre en compte les causes des mvts. Seules les trajectoires (positions  $\vec{r}(t)$ ), vitesses  $\vec{v}(t)$ , accélérations  $\vec{a}(t)$  sont étudiées.
- La dynamique: c'est l'étude des mvts des corps en tenant compte des causes de ces mvts (échelle macro- ou microscopique). Existence d'interactions décrites par des forces
- Système International (SI)  $\Rightarrow$  MKS

longueur	L	unité	m
temps	T	unité	s

ex: pour la cinématique:  
 trajectoire: position: L  
 vitesse:  $L \cdot T^{-1}$   
 accélération:  $L \cdot T^{-2}$

②

- Quelques longueurs (en mètre(s); m)  
(ordre de grandeurs)

molécule	$10^{-8}$ (m)
$\lambda$ lumière	$10^{-6}$
gram de sable	$10^{-3}$
Étudiant(e)	$10^0 = 1$
Terre (diamètre)	$10^7$
distance (Terre-Lune)	$10^8$
distance (Terre-Soleil)	$10^{11}$
Étoile(s) (+ proche)	$10^{17}$
distance entre galaxies	$10^{22}$

- Remarques:

- Une année-lumière  $\approx 10^{16}$  m = distance parcourue par la lumière (célérité  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s) en une année.
- $1 \text{ \AA} = 10^{-10}$  m

• Quelques durées (en secondes); s <sup>(3)</sup>

Vibration atomique	$10^{-15}$ (A)
Rotation molécule	$10^{-12}$
Tps lumière pour parcourir 1m	$10^{-9}$
Période T onde radio	$10^{-6}$
Période T onde sonore	$10^{-3}$
un jour	$10^5$
Vie humaine	$10^8$
âge système solaire	$10^{17}$

• Place de la mécanique classique

$(1/v_0) c$		$c$
0	→	vitesse
Mécanique classique Newton (1642-1727)	Mécanique classique relativiste Einstein (en 1905)	
Physique Mécanique Quantique (1925: De Broglie, Bohr, Schrödinger, Heisenberg)	Physique Mécanique Quantique relativiste Dirac (1902-1984), Klein et Gordon	

• Postulats de la mécanique Classique <sup>(4)</sup>

- Le temps est absolu et donc dissocié de l'espace (il est le même dans tout l'espace, c'est un paramètre  $t$ , pas une dimension)
- L'espace physique est isotrope, il est Euclidien.

• Remarques: (relativité restreinte, 1905)

- dès l'année prochaine, nous montrerons que la référence absolue n'existe pas. (Einstein). La notion de trajectoire sera relative, tout comme celle de la longueur, de la durée, de la vitesse. Ces "réalités" (trajectoire, etc...) seront des réalités relatives de perspectives, perspectives dynamiques.
- On introduira alors la notion: "d'espace-temps".



# CHAPITRE I) CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL

- **Référentiels (Galiléens ou d'inertie), repères et systèmes de coordonnées (2D, 3D) cartésiens, polaires, cylindriques, sphériques**
- **Notions de trajectoire, position, vitesse, accélération, expressions et mouvements**
- **Vers les référentiels non Galiléens et la relativité des mouvements**
- **Lois de composition des vitesses et des accélérations.**

## I.1) Les différents repères : repérage d'un point M

- **L'Espace est caractérisé par un référentiel (S)** ; le référentiel (S) est défini comme un solide (ou ensemble de solides) constituant une figure stable au cours du temps, son origine O et son étalon de longueur.
- Ceci permet alors de définir **la position**, à chaque *instant t*,  $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$  (et donc **la trajectoire** globale au final) d'un objet, mobile ou point M au cours du **temps t** dans un **référentiel (S) = {repère spatial + temps t}**

La position  $\vec{r}$  étant un vecteur, le repérage sera fera donc par 3 nombres paramètres appelés coordonnées (notre Espace étant défini par 3 dimensions spatiales à notre échelle). Il existe différents repères (cartésien, polaire, cylindrique, sphérique, torique...) et coordonnées associées.

La distance  $OM = d(OM) = \|\overrightarrow{OM}\|$  se nomme la *norme* du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

- **Historique sur la notion de temps** : Pour I. Newton, le temps apparait comme une quantité particulière indépendante qui 'flue\*' ou 'coule' uniformément' et qui est 'corrélative' aux autres quantités dites 'relatives' étudiées. Dans les Principes mathématiques de la philosophie naturelle de Newton : « *Le temps absolu, vrai et mathématique, en soi par sa nature sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément et s'appelle aussi durée...* ».

+ Suggestion lecture, voir sous Moodle [Article\\_Etienne-Klein\\_LeTemps.pdf](#)



I. Newton (1642-1727).  
[Phot. Giraudon.]

\* Voir récapitulatif d'Histoire des Sciences (infra, .../...) sur la méthode dite des 'fluxions' de I. Newton



## La méthode des 'fluxions' de Sir Isaac Newton (Histoire des Sciences)

Newton développa en particulier la conception de quantité infinitésimale (accroissement noté 'o') par sa méthode dite des **fluxions** (développée pendant l'hiver 1670-1671, mais qui fut publiée qu'en 1734). Newton considérait alors l'ensemble des quantités mathématiques comme *engendré par une augmentation continue...* à la manière de l'espace que décrit par exemple un mobile en mouvement. L'approche de Newton est celle de la mécanique. Il imagine alors les '*vitesse*s' des mouvements qui les engendrent qui seront appelées '*fluxions*' et les quantités mathématiques qui évoluent seront qualifiées de '*fluente*s' (pour analogie, si  $x$  est une quantité fluente, sa fluxion serait noté  $\dot{x}$  ; la fluxion de la fluxion serait la notion de dérivé seconde actuelle...). A titre d'exemple, si  $x$  est une grandeur ou quantité, son accroissement infiniment petit sera noté par l'addition  $+ \dot{x}o$ . Ainsi le calcul de l'accroissement de la quantité  $x$  à  $x+\dot{x}o$  se faisait par des développements en série sur différents ordres en 'o' (la formule du binôme étant déjà connue), la différence de ces deux quantités, puis le rapport relatif de ces dernières formant les premières notions de taux de variations et nombre dérivé. Newton définit ce 'o' comme un accroissement léger durant un intervalle de temps infiniment petit,

En 1676, il développa la méthode des premières et dernières raisons (publié en 1704, avec les notions de suites et séries existant de l'époque) qui est ni plus ni moins la notion moderne de limite et qui permet ainsi de calculer le quotient de ces infinitésimaux en grandeurs instantanées comme limites de taux de variations d'une **quantité fluente** (la notion de dérivée apparaît presque sous sa forme moderne). Lorsque les ordres d'accroissements notés 'o' disparaissent en formant le quotient, Newton les qualifient de variations '*évanouissantes*'...

Plus tard, concernant le rôle du temps dans l'origine des équations différentielles, Newton a interprété toutes les variables espace (par ex. en cartésien  $x, y, z$ ), mais aussi leur dérivées  $v$ , et autres *fonctions* aussi comme des quantités fluentes s'écoulant en ayant des '*vitesse*s de changements'. Ces quantités proposées et étudiées augmentent ou diminuent par fluxion uniforme à laquelle quantité il rapporte comme si c'était le temps ! '*Methodus fluxionum et serierum infinitarum*' qui fut traduit en '*La méthodes des fluxions et des suites infinies*', I. Newton, 1671.

Les termes de '*fluente*' et de '*fluxion*' correspondent en quelque sorte à ceux de l'intégration-dérivation modernes.



- **Principe de causalité :**

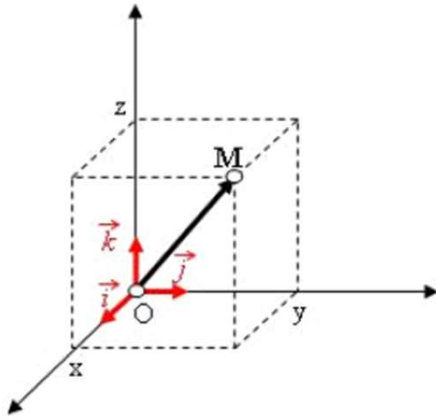
La cause est pour tous les observateurs , antérieure à l'effet produit (ordre temporel). De plus, de manière plus générale, la chronologie de deux évènements *reliés causalement* est toujours la même quelque soit l'observateur.

Plus précisément, il existe en physique (relativité restreinte) une vitesse limite, et tout effet a une cause ; cette cause précède l'effet dans tout référentiel galiléen d'un délai au moins égal à la durée nécessaire pour aller du lieu de la cause au lieu de l'effet à la vitesse limite indépassable.

La 'course' du temps produit la **durée**  $\Delta t = t_2 - t_1$ , 'éloignement' dans le temps de deux évènements de dates  $t_1$  et  $t_2$ .

Le principe de causalité semble être une des contraintes 'réalistes' imposées à toute théorie mathématiquement cohérente afin qu'elle soit physiquement admissible... Cette causalité a une antériorité logique qualifiée d'implication en logique.

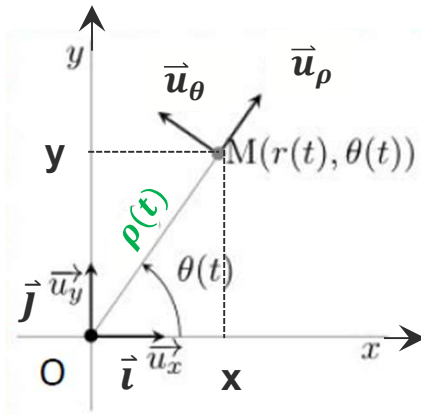
### I.1.1) Le repère cartésien (3D) - Repère $\mathcal{R}_{cart}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ trièdre direct (fixe)



- Vecteurs unitaires du repère (ou base) cartésien ( $\vec{i} = \vec{u}_x, \vec{j} = \vec{u}_y, \vec{k} = \vec{u}_z$ ) et propriétés...
- Ecriture de la position  $\vec{r}$  en fonction des coordonnées :

$$\vec{r}(t) = \overline{OM}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (I-1)$$

### I.1.2) Le repère polaire (2D) - base normée $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ ⚠ (non fixe, se déplace)



- Vecteurs de la base polaire et propriétés...
- $\theta(t)$  est un angle  $(\overline{Ox}, \overline{OM})$  et  $\rho$  une distance ( $O \rightarrow M$ )
- Lien coordonnées (ou formule chgt de repères)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (I-2)$$

- Ecriture de la position :  $\vec{r}(t) = \overline{OM}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho$



Savoir tracer le schéma complet



La coordonnée  $\theta$  n'intervient pas dans l'écriture de la position  $\vec{r}$  ! Expliquez pourquoi ?

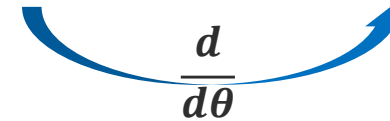
• Interlude mathématique des vecteurs ‘tournants’  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  :

+ voir sous Moodle *Notion de différentielle d'un vecteur.pdf*  
*Interlude Mathématique Calcul Diff fonction.pdf*

D'après schéma polaire (par projection):  $\vec{u}_\rho \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{cart.}}$  et  $\vec{u}_\theta \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{cart.}}$

Soit :  $\frac{d}{d\theta} \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta$  Rotation  $\pi/2$  ⚠ à savoir

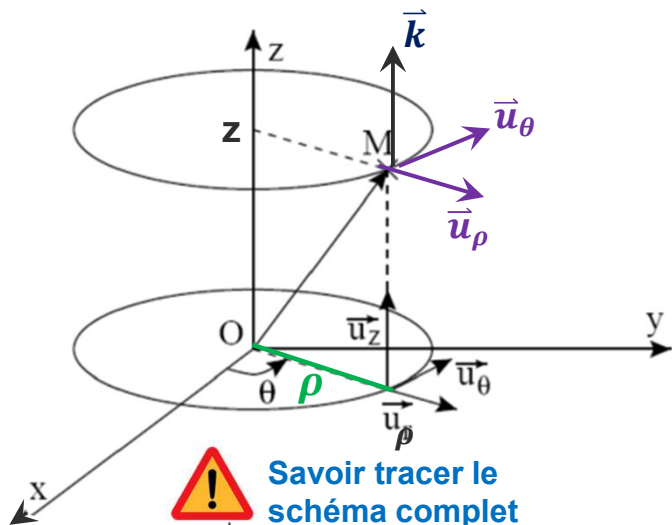
La dérivée d'un vecteur unitaire par rapport à l'angle qui définit sa direction, est le vecteur unitaire qui lui est perpendiculaire



De même :  $\frac{d}{d\theta} \vec{u}_\theta = \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = -\vec{u}_\rho = \frac{d}{d\theta} \frac{d}{d\theta} \vec{u}_\rho = \frac{d^2}{d\theta^2} \vec{u}_\rho$

Quelles sont les coordonnées des vecteurs unitaires  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  dans  $\mathcal{R}_{polaire}$  cette fois-ci ?

### I.1.3) Le repère cylindrique (3D) - Repère $\mathcal{R}_{cyl.} (O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k} = \vec{u}_z)$ (trièdre non fixe) Pol. Cart.

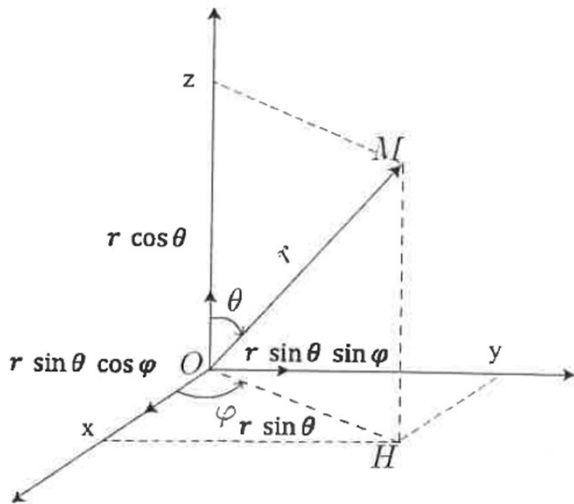
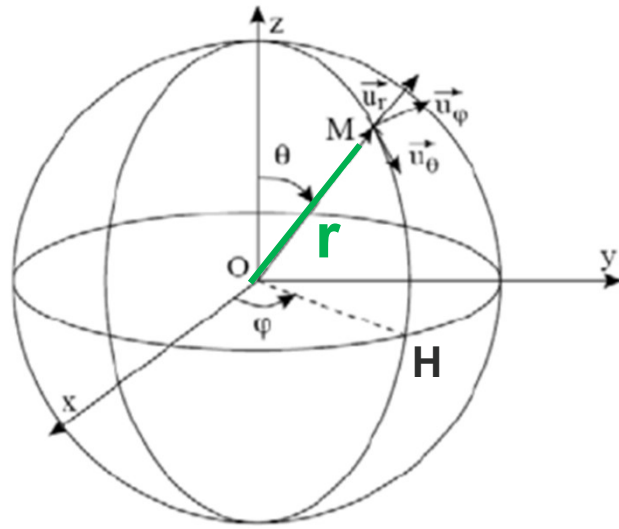


• Lien coordonnées (ou formule chgt de repères)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \\ z = z \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \quad (I-3)$$

• Ecriture de la position :  $\vec{r}(t) = \overline{OM}(t) = \rho(t)\vec{u}_\rho + z(t)\vec{u}_z$

## I.1.4) Le repère sphérique (3D)



Repère  $\mathcal{R}_{sphér.} (O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  (trièdre direct non fixe)

- Vecteurs du repère sphérique et propriétés...
- $r$ , une distance ( $O \rightarrow M$ ),  
 $\theta(t)$  est un angle  $(\vec{Oz}, \vec{OM}) \in [0 \pi]$ , colatitude  
 $\varphi(t)$  est un angle  $(\vec{Ox}, \vec{OH}) \in [0 2\pi]$ , azimut ou longitude
- Lien coordonnées (ou formule chgt de repères)

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases} \iff \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ \cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{cases}$$

(I-4)

- Ecriture de la position :  $\vec{r}(t) = \vec{OM}(t) = r(t)\vec{u}_r$



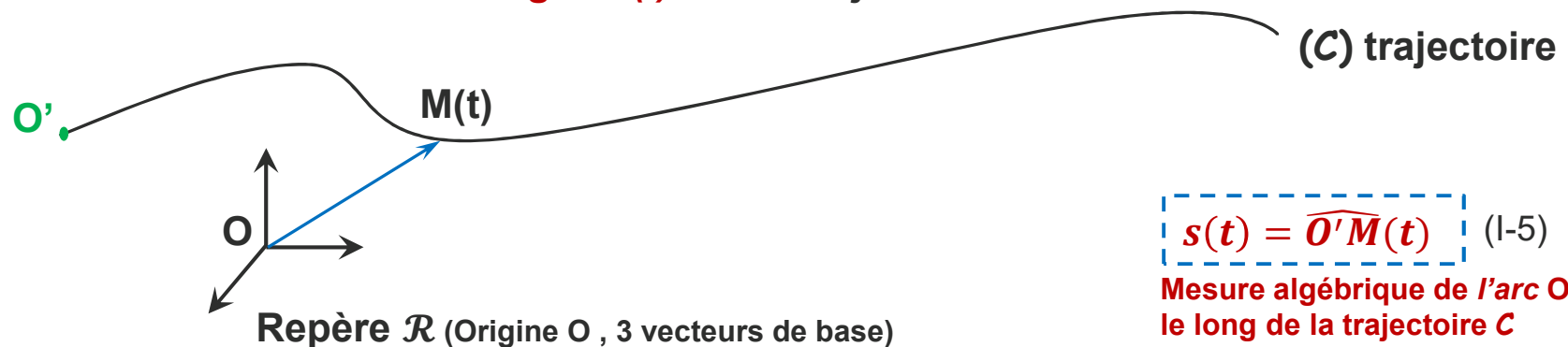
Les coordonnées  $\theta$  et  $\varphi$  n'interviennent pas dans l'écriture de la position  $\vec{r}$ .

## I.2) Cinématique du point M mobile : Position, Vitesse, Accélération

- La cinématique étudie le mouvement des objets/mobiles indépendamment des causes qui lui donnent naissance ; elle repose sur une description de géométrie euclidienne de l'espace et d'un temps newtonnien absolu.

### I.2.1) La trajectoire

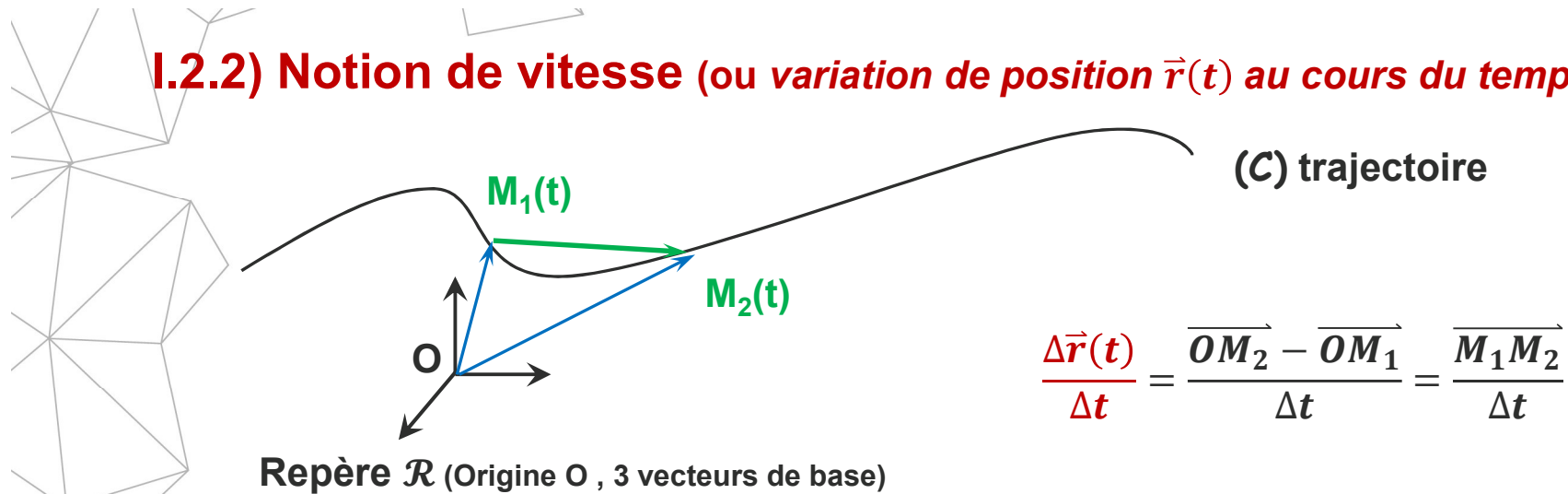
- C'est l'ensemble des points occupés par le mobile M au cours du temps t ou une courbe 3D :  $\vec{r}(t) = \overline{OM}(t)$ . => soit une **relation entre les coordonnées** : par ex.  $\{y(x), z(x)\}$ , ou bien  $\{r(\varphi), \theta(\varphi)\}$ ...soit les relations paramétriques des coordonnées en fonction du *paramètre temps t* (ou **équations horaires**) comme  $\{x(t), y(t), z(t)\}$  ou bien  $\{\rho(t), \theta(t), z(t)\}$  ou encore  $\{r(t), \theta(t), \varphi(t)\}$  ...
- Notion d'**abscisse curviligne s(t)** d'une trajectoire



Ecrire les trois équations horaires  $x(t)$ ,  $y(t)$  d'un mouvement circulaire en fonction du rayon  $R$  et de  $\theta(t)$ . Faire un schéma.

Comment s'écrirait l'équation ou l'abscisse curviligne d'un tel mouvement avec l'arc  $s(t) = ?$

## I.2.2) Notion de vitesse (ou variation de position $\vec{r}(t)$ au cours du temps)



- Le vecteur vitesse instantané d'un point (M) dans un référentiel  $\mathcal{R}$  sera alors défini comme la limite (au sens de Cauchy) de la 'vitesse moyenne'  $\frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t}$  :

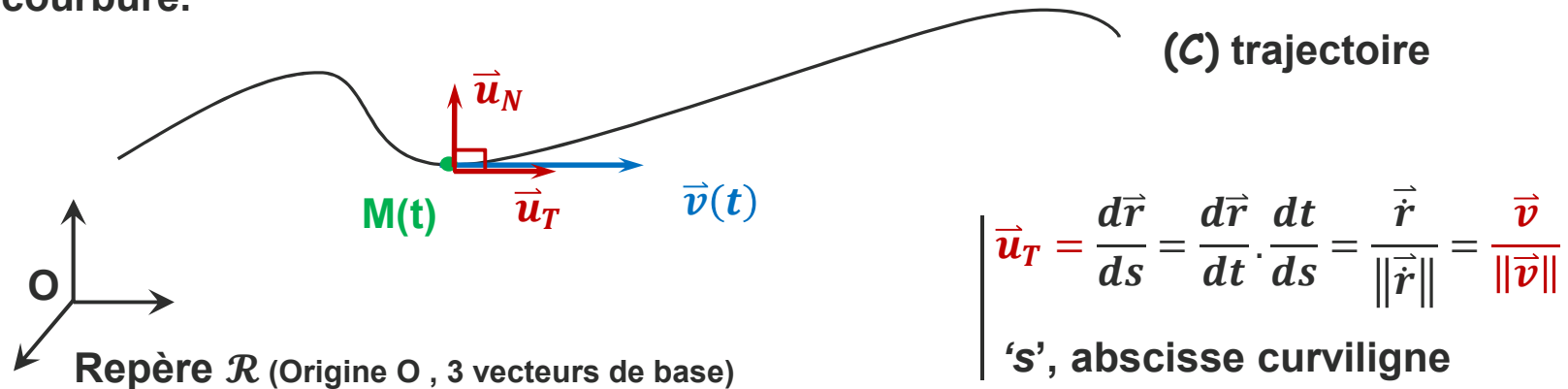
$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (I-6) \quad \triangle$$

- Le vecteur vitesse est donc la *dérivée du vecteur position*, il en résulte qu'il sera **tangent à la trajectoire (et de sens celui du mouvement)**. Dans le S.I. (MKS), de dimension  $L.T^{-1}$ , sa norme se mesurera alors en **unité  $m.s^{-1}$** .
- Par la suite, deux quantités importantes seront définies à partir du vecteur vitesse puis de sa norme en mécanique ( $m$ , étant la *masse* du mobile se déplaçant dans l'espace et le temps) : la **quantité de mouvement**  $m \cdot \vec{v} = \vec{p}$ , puis la fonction **énergie cinétique**  $E_c(m, v) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$ .  $\triangle$

Considérons un mouvement circulaire ou le module du vecteur  $\vec{r}(t)$  est constant  $\forall t$ , soit  $|\vec{r}(t)| = \text{constante}$  en mètres (faire un schéma). Montrer que la dérivée  $(\frac{d}{dt})$  du vecteur  $\vec{r}(t)$  est perpendiculaire à  $\vec{r}(t)$  (on calculera d'abord le produit scalaire de  $\vec{r}(t)$  par lui-même, puis on appliquera l'opérateur différentiel  $\frac{d}{dt}$  pour conclure...)

• **Remarque {hors programme Semestre 1} : Le repère de Frenet de base  $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$**

• En cinématique, le repère de Frenet (ou de Serret-Frenet) est un outil d'étude du comportement local des courbes. Il s'agit d'un *repère local* associé à un point M, décrivant une courbe (C). Il permet d'ailleurs de mener des calculs de courbure.



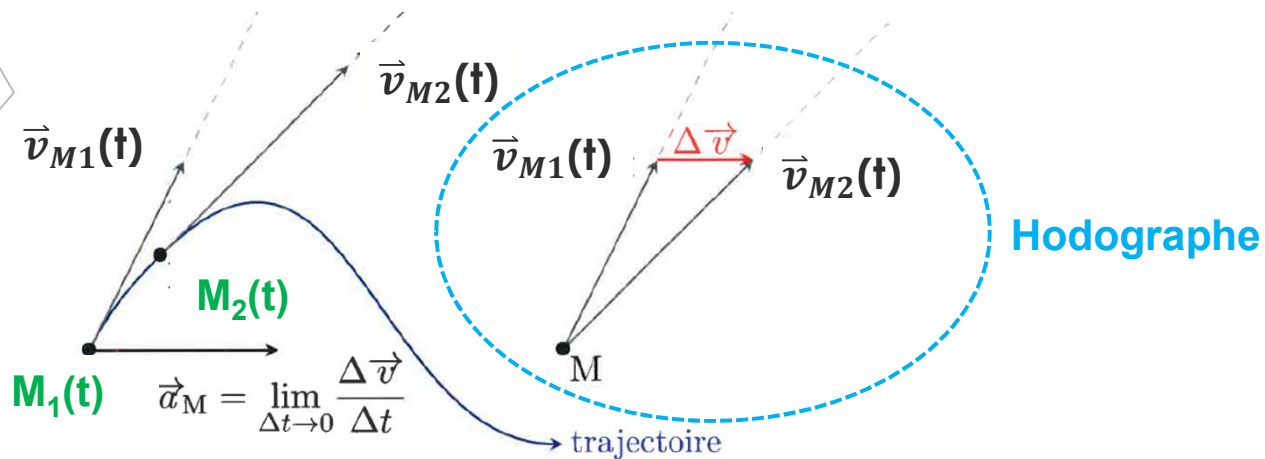
• La courbure  $\kappa$  sera alors définie comme le module ('norme') de la variation du vecteur  $\vec{u}_T$  par rapport à l'abscisse curviligne 's' :

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\vec{u}_T}{ds} \right\| = \frac{\|\dot{\vec{u}}_T\|}{\|\vec{v}\|} = \kappa(t)$$

+ {Hors programme Semestre 1 :  
voir sous Moodle *Notion de Courbure.pdf* }



### I.2.3) Notion d'accélération (ou *variation de vitesse* $\vec{v}(t)$ au cours du temps)



$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} \quad (I-7)$$



- Le vecteur accélération s'obtient en dérivant le vecteur vitesse (par rapport au temps  $t$ ), l'unité de l'accélération (de sa norme) sera le (m/s)/s soit :  $m \cdot s^{-2}$
- Le **mouvement rectiligne uniforme** se caractérise par *un vecteur accélération vecteur nul* ; ainsi le vecteur accélération peut-être vu comme 'une mesure' d'un écart au mouvement rectiligne uniforme.

Sous champ gravitationnel terrestre de combien augmente notre vitesse en chute libre chaque seconde ?

## I.2.4) Expressions de la vitesse et de l'accélération (différents repères)

### I.2.4-1) Repère cartésien $\mathcal{R}_{cart}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\begin{aligned}
 (I-1) \longrightarrow (I-6) \quad & \vec{v}(t) = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{cart}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} \\
 (I-7) \longrightarrow & \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} = \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{cart}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}
 \end{aligned} \tag{I-8}$$

### I.2.4-2) Repère polaire $\mathcal{R}_{pol}(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

$$\begin{aligned}
 (I-2) \longrightarrow (I-6) \quad & \vec{v}(t) = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} = \dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \dot{\rho}(t) \\ \rho(t)\dot{\theta}(t) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{pol}(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)} \\
 (I-7) \longrightarrow & \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = [\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)]\vec{u}_\rho + [\rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t)]\vec{u}_\theta \\
 & = \begin{pmatrix} \ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t) \\ \rho(t)\ddot{\theta}(t) + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) \end{pmatrix}_{\mathcal{R}_{pol}(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)}
 \end{aligned} \tag{I-9}$$

Dimension de l'accélération:  
termes constitués avec  $\ddot{\rho}$  ou  $\ddot{\theta}$



Bien comprendre la démonstration, bien la connaître. Maîtriser le calcul des dérivés relatif aux vecteurs 'tournants', ils 'produisent' des projections sur les vecteurs de la base des autres directions

- Remarque: une autre manière de calculer  $\vec{v}(t)$  (slide 15, schéma polaire) serait d'écrire le déplacement élémentaire  $d\vec{r} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta$  puis de diviser par  $dt$ .

### I.2.4-3) Repère cylindrique $\mathcal{R}_{cyl}(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z = \vec{k})$

« Cylindrique = concaténation du résultat 2D du Polaire || résultat 3<sup>ème</sup> coordonnée cartésienne »

$$\begin{aligned}
 \text{(I-3)} \quad \text{(I-6)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{v}(t)} &= \frac{d\overline{OM}(t)}{dt} = \underbrace{\dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z}_{\text{Polaire}} \parallel \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\rho}(t) \\ \rho(t)\dot{\theta}(t) \\ \dot{z} \end{pmatrix}}_{\text{Cart.}} \mathcal{R}_{cyl}(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_k) \\
 \text{(I-7)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\vec{a}(t)} &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \underbrace{[\ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t)]\vec{u}_\rho + [\rho(t)\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t)]\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z}_{\text{Polaire}} \parallel \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{\rho}(t) - \rho(t)\dot{\theta}^2(t) \\ \rho(t)\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}(t)\dot{\theta}(t) \\ \ddot{z} \end{pmatrix}}_{\text{Cart.}} \mathcal{R}_{cyl}(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_k) \quad \text{(I-10)}
 \end{aligned}$$

Dimension de l'accélération: termes constitués avec  $\ddot{\quad}$  ou  $\dot{\quad} \times \dot{\quad}$

- Application au mouvement circulaire uniforme (vitesse de rotation  $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$  fixée)

Faire un schéma, appliquer les relations (I-10) pour déterminer les expressions des vecteurs vitesse et accélération.

Vérifier par le calcul que pour le mouvement circulaire uniforme :  $\vec{\omega} \wedge \overline{OM} = \vec{v}$ , puis que  $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overline{OM}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overline{OM} = \vec{a}$

**I.2.4-4) Repère sphérique**  $\mathcal{R}_{sphérique}(O, \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  {hors programme S1}

$$\begin{aligned} (I-4) \longrightarrow & \boxed{\vec{v}(t) =} \frac{d\vec{OM}(t)}{dt} = \boxed{v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_\varphi \vec{u}_\varphi} \\ (I-6) \end{aligned} \tag{I-12}$$

avec,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{vitesse radiale } v_r = \dot{r} \\ \text{vitesse méridienne } v_\theta = r\dot{\theta} \\ \text{vitesse transverse } v_\varphi = r \sin \theta \dot{\varphi} \end{array} \right.$

- **Remarque:** une autre manière de calculer  $\vec{v}(t)$  (slide 17, schéma sphérique) serait d'écrire le déplacement élémentaire  $d\vec{l} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin \theta d\varphi$  puis de diviser par  $dt$ .
- **Exercice:** écrire l'expression de la fonction énergie cinétique  $E_c$  en coordonnées sphériques.

$$(I-7) \longrightarrow \boxed{\vec{a}(t) =} \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \boxed{a_r \vec{u}_r + a_\theta \vec{u}_\theta + a_\varphi \vec{u}_\varphi} \tag{I-13}$$

avec,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{accélération radiale } a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \\ \text{accélération méridienne } a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 \\ \text{accélération transverse } a_\varphi = r \sin \theta \ddot{\varphi} + 2 \sin \theta \dot{r}\dot{\varphi} + 2r \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} \end{array} \right.$

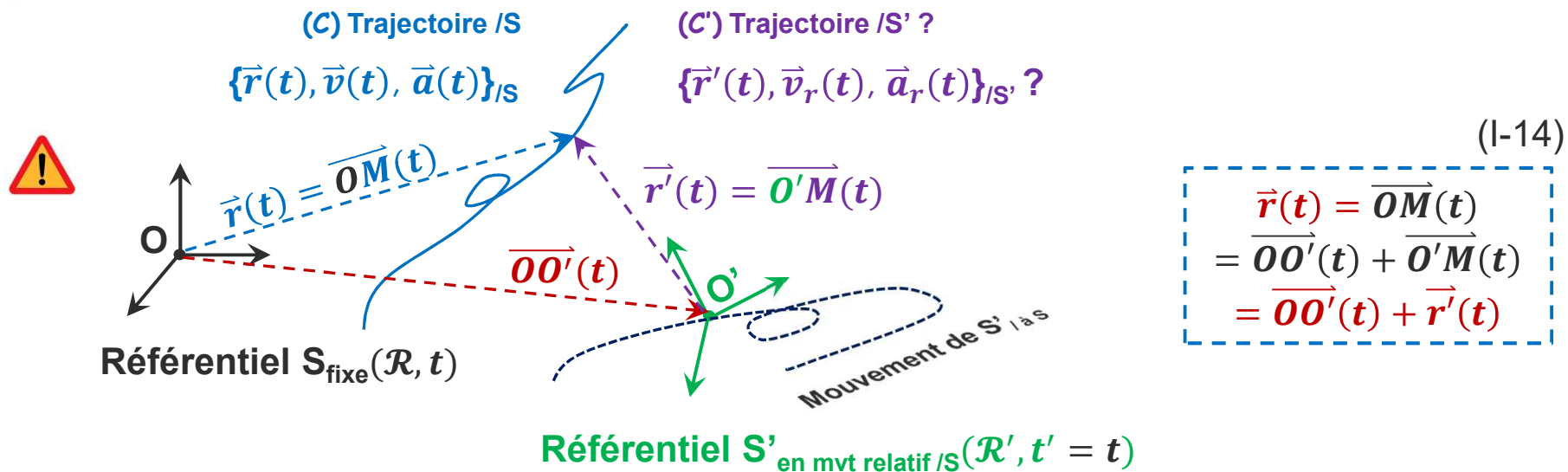
### I.3) Lois de composition des mouvements, changement de référentiel, relativité (de Galilée)

- Etablir une méthodologie pour les formules de changement de référentiels est nécessaire de manière à exprimer l'ensemble de la cinématique (position, vitesse, accélération) lorsqu'elle est étudiée d'un certain 'point de vue d'observation' ou 'depuis' un autre référentiel. Ceci permettra d'ailleurs de souligner l'aspect 'relatif' des mouvements et de leurs caractéristiques suivant le référentiel d'étude choisi.

(Exemple : chute d'un objet le long d'un mât de bateau en mouvement (/bateau puis /plage considérée ici 'fixe')

#### I.3.1) Définition et position du problème

- Idée : Considérer deux référentiels S et S' en mouvement relatif le plus général l'un par rapport à l'autre. Par exemple, S<sub>fixe</sub> et S'<sub>mvt relatif /S</sub> pouvant subir par à S<sub>fixe</sub> de nombreuses translations et/ou rotations accélérées ou non...



• **Méthodologie** : de manière à accéder aux lois de compositions respectivement des vitesses (lien  $\vec{v}(t)$ ,  $\vec{v}_r(t)$ ) puis des accélérations (lien  $\vec{a}(t)$ ,  $\vec{a}_r(t)$ ), il est nécessaire de différencier par **l'opérateur total exact**  $\frac{d}{dt}$  (ou dériver par rapport au temps) la relation (I-14) une première fois, puis une seconde fois. Le calcul sera mené avec S et S' en coordonnées cartésiennes car les lois (formules) de compositions obtenues sont générales et identiques quelque soit le système de coordonnées utilisées pour ce calcul de relativité du mouvement !

### I.3.2) Loi de composition des vitesses

$$\begin{cases}
 (S): \vec{r}(t) = \overline{OM}(t)_{\mathcal{R}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \\
 (S'): \vec{r}'(t) = \overline{O'M'}(t)_{\mathcal{R}'(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')} = x'(t)\vec{i}' + y'(t)\vec{j}' + z'(t)\vec{k}'
 \end{cases}$$
 avec (I-14)

$\downarrow \frac{d}{dt}$

Vitesse 'd'entraînement' (S' / à S)

$\vec{v}_{(S)} = \vec{v}_{e(S'/S)} + \vec{v}_{r(S')}$

Vitesse 'absolue' dans (S)                      Vitesse 'relative' dans (S')

avec,

(translation S' / à S)

(rotation S' / à S)

$$\vec{v}_{e(S'/S)} = \frac{d\overline{OO'}}{dt} + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$\vec{v}_{r(S')} = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' \quad (\text{par définition aussi !})$$

(I-15)

▪ Cas S' en *translation pure* / à S, conclusion.

▪ Cas S' en *Rotation pure* / à S, étude et conclusion.

On considère  $O=O'$ , puis un *axe de rotation*  $[Oz) = [O'z')$  pour la rotation particulière considérée ici de S' / à S (c'est-à-dire  $\vec{k} = \vec{k}'$  et  $\frac{d\vec{k}'}{dt} = 0$ ), mais le résultat sera généralisable aux autres axes susceptibles d'être en rotations.

Dans **ce cas** le *vecteur de rotation* (d'entraînement) s'écrit  $\vec{\omega}_e = \omega_e \vec{k}$ , avec  $\omega_e = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  (en rad/s).

Faire un schéma, calculer  $\vec{v}_{e(S'/S)}$  de (I-15) dans ce cas (calculs de  $\frac{d\vec{i}'}{dt}$  et  $\frac{d\vec{j}'}{dt}$  nécessaires). Conclure que pour la rotation pure  $\vec{v}_{e(S'/S)} = \vec{\omega}_e \wedge \vec{r}'$ .

▪ En conclusion finale, la **loi (I-15) de composition des vitesses** se simplifiera en :

$$\vec{v}_{(S)} = \frac{d\vec{OO}'}{dt} + (\vec{\omega}_e \wedge \vec{r}') + \vec{v}_{r(S')} \quad (I-16)$$



Formule à connaître  
et à savoir utiliser

## I.3.2) Loi de composition des accélérations

- Appliquer l'opérateur  $\frac{d}{dt}$  directement sur l'expression (I-15) des lois de compositions des vitesses:

(I-17)

$$\vec{a}_{(S)} = \vec{a}_{e(S'/S)} + \vec{a}_c + \vec{a}_{r(S')}$$

avec,

Accélération 'd'entraînement' (S' / à S)  $\rightarrow$   $\vec{a}_{e(S'/S)}$   
 Accélération 'absolue' dans (S)  $\rightarrow$   $\vec{a}_{(S)}$   
 Accélération de Coriolis  $\rightarrow$   $\vec{a}_c$   
 Accélération 'relative' dans (S')  $\rightarrow$   $\vec{a}_{r(S')}$

$$\vec{a}_{e(S'/S)} = \frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} + \overset{\text{(translation S' / à S)}}{x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2}} + \overset{\text{(rotation S' / à S)}}{2 \cdot \left( \dot{x}' \frac{d\vec{i}'}{dt} + \dot{y}' \frac{d\vec{j}'}{dt} + \dot{z}' \frac{d\vec{k}'}{dt} \right)}$$

$$\vec{a}_{r(S')} = \ddot{x}' \vec{i}' + \ddot{y}' \vec{j}' + \ddot{z}' \vec{k}' \quad (\text{par définition aussi !})$$



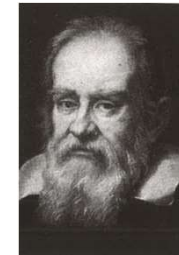
G-G de Coriolis est un mathématicien et ingénieur français (1792-1843). Il a donné son nom à l'accélération de Coriolis, de laquelle découle la force de Coriolis, laquelle affecte le mouvement des corps dans un référentiel en rotation. L'origine du terme d'accélération de Coriolis est clairement apparu par les calculs historiques de relativité entre deux référentiels différents et 'points de vues'.



▪ Cas S' en *translation pure* / à S, conclusion  $\vec{a}_{(S)} = \vec{a}_e(S'/S) + \vec{a}_{r(S')}$

▪ Cas S' en *translation 'uniforme'* / à S (réf. Galiléens)  $\vec{a}_{(S)} = \vec{a}_{r(S')}$

Galilée (Galileo Galilei), mathématicien,  
géomètre, physicien [1564-1642]



▪ Cas S' en *Rotation pure* / à S, étude et conclusion.

On considère  $O=O'$ , puis un *axe de rotation*  $[Oz) = [O'z')$  pour la rotation particulière considérée ici de S' / à S (c'est-à-dire  $\vec{k} = \vec{k}'$  et  $\frac{d\vec{k}'}{dt} = \frac{d^2\vec{k}'}{dt^2} = 0$ ), mais le résultat sera généralisable aux autres axes susceptibles d'être en accélérations de rotations {rappel le *vecteur de rotation* (d'entraînement) s'écrit  $\vec{\omega}_e = \omega_e \vec{k}$ , avec  $\omega_e = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$  (en rad/s), l'accélération de la rotation  $\vec{\omega}_e$  sera sa dérivé / au temps t}.

▪ Faire un schéma, calculer  $\vec{a}_e(S'/S)$  de (I-17) dans ce cas (calculs de  $\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}$  et  $\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}$  nécessaires). Conclure que pour la rotation pure  $\vec{a}_e(S'/S) = \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega}_e \wedge (\vec{\omega}_e \wedge \vec{r}')$ .

▪ Calculer  $\vec{a}_c$  de (I-17) dans ce cas (calculs de  $\frac{d^2\vec{i}'}{dt^2}$  et  $\frac{d^2\vec{j}'}{dt^2}$  nécessaires). Conclure que pour la rotation pure  $\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_{r(S')})$ . Discutez le *sens physique* de ce terme de '*mélange*' ou de 'Coriolis'. Discuter de certaines situations avec existences ou non de ce terme.

En conclusion, cette relativité des mouvements en spatial, va impacter une loi de composition des accélérations sous la forme

$$\vec{a}_{(S)} = \vec{a}_{e(S'/S)} + \vec{a}_c + \vec{a}_{r(S')} \quad \text{avec,} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{a}_{e(S'/S)} = \frac{d^2 \overline{OO'}}{dt^2} + \frac{d\vec{\omega}_e}{dt} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega}_e \wedge (\vec{\omega}_e \wedge \vec{r}') \\ \vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_{r(S')}) \end{array} \right. \quad (I-18)$$



Formule à connaître  
et à savoir utiliser

{ Hors Semestre 1: le passage à la relativité restreinte d'Einstein (1905) sera fera par deux aspects à ajouter :

- l'existence d'une célérité limite (noté  $c$  ou célérité maximale des informations, ou champs) et donc l'impossibilité d'atteindre des vitesses infinies (le domaine de définition des vitesses est borné ainsi)
- le concept d'un temps  $t'$  de  $S'$  différent de  $t$  de  $S$  (voir schéma du transparent 27) pour des vitesses dites relativistes et donc proches de  $c$ .
- les transformations mathématiques de H. A. Lorentz (1853-1928) permettront alors de décrire la 'relativité restreinte' d'A. Einstein }

# • Pour aller plus loin « La 'relativité restreinte' d'A. Einstein »

Par le Pr. Jean-Marie Vigoureux, Institut CNRS UTINAM (voir livre 'L'Univers en Perspective' et lien Conférence invité)

La base étant tout d'abord l'idée d'Albert Einstein postulant que la célérité de la lumière  $c$  est la même quelque soit le référentiel et donc constante : « La vitesse de la lumière dans le vide est indépendante du mouvement de sa source » (voir expérience historique d'interférométrie de Michelson). De plus, elle sera ensuite la célérité limite de toute information et signal en science.

Conférence à : <https://www.youtube.com/watch?v=rnfWkZz0174>

**Les Conférences**  
de l'Institut de Physique de Rennes

**Jean-Marie VIGOUREUX**  
Professeur de physique et chercheur à l'université de Franche-Comté / Institut UTINAM

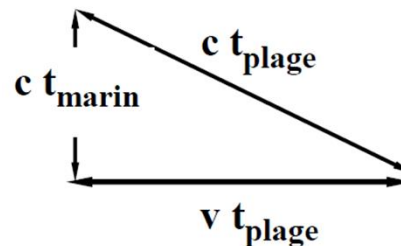
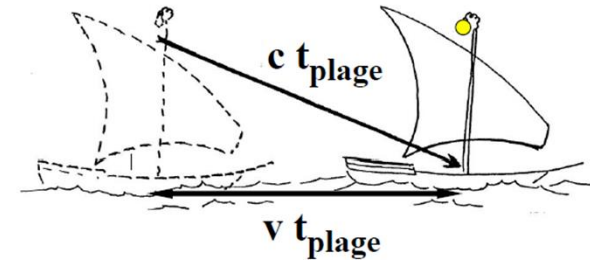
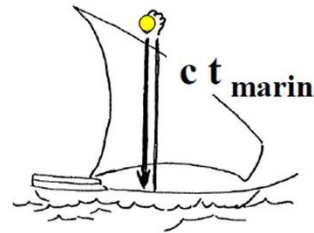
**L'UNIVERS EN PERSPECTIVE**

Mardi  
26 septembre 2017  
12h15 - Le Diapason

**L'univers en perspective**

www.ipr.univ-rennes1.fr

UNIVERSITÉ DE RENNES 1 | CNRS | SP | le diapason



$$t_{\text{plage}} = \frac{t_{\text{marin}}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

La notion de durée n'est donc pas absolue !

# Physique MECANIQUE

(Transparents et Eléments relatif au Cours traité en amphithéâtre)

## ESIR (Cycle Prépa - CUPGE 1A-S1)



— UnivRennes1 —  
[univ-rennes1.fr](http://univ-rennes1.fr)

B. BÊCHE Pr., IETR CNRS - ESIR UR1

[bruno.beche@univ-rennes1.fr](mailto:bruno.beche@univ-rennes1.fr)

<https://www.ietr.fr/bruno-beche>



## Remarques :

Lorsque le symbole  apparaîtra, une démonstration plus conséquente sera nécessaire au tableau et sur votre cahier / feuilles en terme de prise de notes.

Le symbole  mérite une attention particulière.



# CHAPITRE II)

## FONDEMENTS ET POSTULATS DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE : PRINCIPES, INTERACTIONS ET FORCES

- Principe d'inertie, quantité de mouvement, principe fondamental de la dynamique (PFD) et lien Chapitre I), principe des actions réciproques (action/réaction)
- Interactions fondamentales en physique, notion de forces et exemples (forces de frottement solide puis visqueux, loi et force de l'attraction gravitationnelle, notion de masse gravitationnelle, poids, forces en électrostatique et électromagnétisme, ...)
- Applications du PFD (réf. Galiléen), la chute, PFD (référentiel non Galiléen), 'pseudo'-forces d'inertie
- Lois de conservation de la quantité de mouvement, physique des collisions et chocs

## II.1) Le principe d'inertie: 1<sup>ère</sup> Loi de Newton

• **Le Principe d'Inertie (ou 1<sup>ère</sup> loi de Newton)** peut s'énoncer de différentes façons. Un énoncé possible : « *Il existe des référentiels dits galiléens, dans lesquels le mouvement d'un mobile (ou point isolé) soumis à aucune interaction, est rectiligne et uniforme* ». Postuler le principe d'inertie revient à postuler l'existence d'un référentiel d'inertie ou galiléen. Il sera valable dans tous les référentiels galiléens.

$$\text{Mouvement de TRU : } \vec{v}(t) = \overline{cst} \text{ \{en direction, sens, norme\}} \quad (\text{II-1})$$

Ainsi, l'état de repos est un cas particulier ( $\vec{v}(t) = \overline{cst} = \vec{0}$ ).

De plus en considérant deux référentiels galiléens S et S' (avec (II-1),  $\vec{v}_{e(S'/S)} = \overline{cst}$ ), alors la relation de composition (I-15)  $\vec{v}_{(S)} = \vec{v}_{e(S'/S)} + \vec{v}_{r(S')}$ , se différencie  $\frac{d}{dt}$ , en une propriété propre à cette classe de référentiels (dits galiléens), à savoir :  $\vec{a}_{(S)} = \vec{a}_{r(S')}$ .

+ Suggestion lecture, voir sous Moodle *Complément Principe d'Inertie - 1ère loi de Newton\_chap 2.pdf*

• **Définition** : On appelle *quantité de mouvement* d'un mobile (ou point) de masse *inertielle* associée  $m$  se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}(t)_{/réf. S}$  le vecteur :

$$\vec{p}(t) = m \cdot \vec{v}(t) \quad (\text{II-2})$$

## II.2) Le Principe Fondamental de la Dynamique: 2<sup>d</sup> Loi de Newton

- **Enoncé** : Dans un référentiel galiléen le *mouvement* d'un objet (mobile, point M) de masse  $m$  soumis à un ensemble de forces de résultante  $\vec{F}$  est caractérisé par une *accélération* (Chapitre I) :

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (II-3)$$

**Autre énoncé possible** : La dérivée par rapport au temps  $t$  de la quantité de mouvement  $\vec{p}(t)$  d'un point matériel est égale à la résultante des forces  $\vec{F}$  qu'il subit :

$$\begin{array}{l} (II-2) \\ (II-3) \end{array} \xrightarrow{(m \text{ cste})} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{F} = (m\vec{a}) \quad (II-3 \text{ bis})$$

(toujours vraie en relativité)

Concernant la dimension des forces, dans le S.I. (MKS),  $[F] = M.L.T^{-2}$ . Son **unité  $kg.m.s^{-2}$**  est aussi appelé le **Newton**.

Connaissant la nature et cinématique du mouvement (Chapitre I), ce principe permet de déterminer une force ! A partir de la connaissance des lois de J. Kepler relatives au mouvement des planètes autour du soleil, Newton établit la loi de la gravitation universelle.




Johannes Kepler, astronome [1571-1630]



- Le PFD (II.3) vectoriel s'écrira en fonction des coordonnées cartésiennes *naturellement et simplement* avec (I.8) en système :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}$$

Dans ce cas aux composantes  $\begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix}$  correspond simplement  $\begin{matrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{matrix}$ .

 Attention cependant, concernant son écriture en autres systèmes de coordonnées comme polaire, cylindrique, sphérique... alors le mélange des coordonnées interviendra ! Voir les relations (I.9), (I.10) et (I.13),

- Remarque : écriture du PFD (II.3) en coordonnées sphériques (I.13)**

A l'écriture  $\begin{pmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_r \\ F_\theta \\ F_\varphi \end{pmatrix}$  correspond cette fois le système :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ r\ddot{\theta} \\ r\dot{\theta}\dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{F_r}{m} + r\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 \\ \frac{F_\theta}{m} - 2\dot{r}\dot{\theta} + r\sin\theta\cos\theta\dot{\varphi}^2 \\ \frac{F_\varphi}{m} - 2\sin\theta\dot{r}\dot{\varphi} - 2r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\varphi} \end{pmatrix} \text{ à discuter.}$$

### Remarques sur le PFD:

- Syst. Isolé  $\Rightarrow \vec{F} = \vec{0} = \vec{a} \Rightarrow \vec{v} = \overline{cste} \Rightarrow$  mouvement TRU. Le principe d'inertie est inclus dans le PFD, ce dernier étant plus général.
- Si mobile à l'équilibre,  $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$  aussi.
- Relation linéaire entre  $\vec{F}$  et  $\vec{a}$ ; la masse  $m$  apparait comme un 'coefficient' macroscopique *d'inertie* qui *gêne la mise en mouvement*.
- Dans ce PFD (II-3<sub>bis</sub>),  $m$  est constant et ne varie donc pas au cours du temps  $t$ ; pas de perte de masse  $m$  (aspect restrictif du PFD dans ce cadre).
- Cas de deux masses  $m_1$  et  $m_2$  différentes soumise à même résultante de forces  $\vec{F}$ , lien entre les accélérations associées...

## II.3) Le principe d'Action / Réaction: 3<sup>ème</sup> Loi de Newton



- Ce principe repose sur la notion d'*interactions mutuelles*. Lorsque deux objets sont en *interactions*, la force exercée par le 1<sup>er</sup> sur le 2<sup>d</sup> est opposée à la force exercée par le 2<sup>d</sup> sur le 1<sup>er</sup>, mais de même module (forces coaxiales). L'action est donc toujours égale à la réaction en intensité (mais de sens contraires).



Sur le schéma les deux attributs physique s'attirent, ainsi ce pourrait être deux masses (positives) ou bien deux charges de signes opposés.

- Quelques exemples : faire un schéma pour la 'réaction' du support / poids ; puis pour la force de rappel d'un ressort, la tension d'un fil avec masse pesante...

## II.4) Les Interactions fondamentales en Physique - Exemples de Forces

### II.4.1) Les quatre Interactions fondamentales de l'Univers connues

Interactions	Portée	Intensité relative	Boson vecteur	Particules concernées
Forte	$\sim 10^{-15}$ m	1 (référence)	Gluon	Quarks
Électromagnétique	Infinie	$10^{-2}$	Photon	Particules chargées électriquement
Faible	$\sim 10^{-18}$ m	$10^{-5}$	Bosons $Z^0$ et $W^\pm$	Fermions (électrons, neutrinos, quarks...)
Gravitationnelle	Infinie	$10^{-40}$	Graviton (hypothétique)	Particules massiques

*Remarque :* Il existe six sortes de quarks : le quark up ( $u$ ), le quark down ( $d$ ), le quark étrange ( $s$ ), le quark charme ( $c$ ), le quark bottom ( $b$ ) et le quark top ( $t$ ). Par exemple, le proton est formé de deux quarks up et d'un quark down, alors que c'est l'inverse pour le neutron

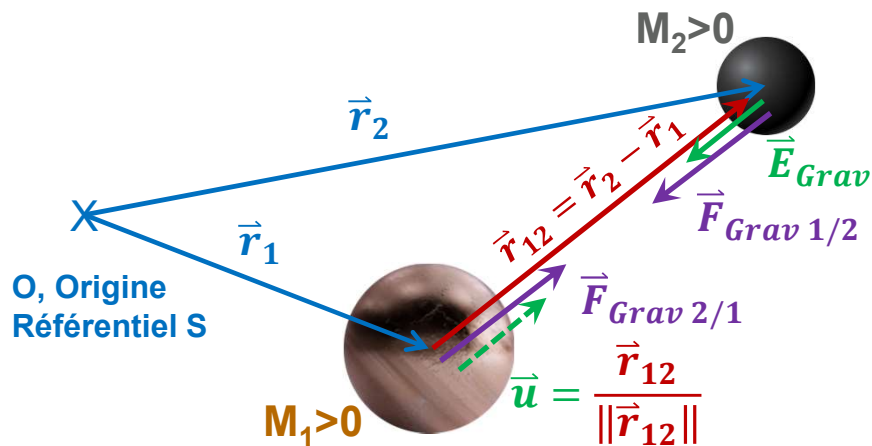
+ Voir sous Moodle(Chapitre I) *Interlude Les interactions en Physique\_1 puis \_2.pdf*

• Les interactions nucléaires forte (assurant la cohésion du noyau atomique, théorie unificatrice dite 'modèle standard') puis faible, agissent toutes les deux sur des distances ultra-courtes contrairement aux deux autres interactions (gravitationnelle et électromagnétique). Elles n'interviendront donc pas dans ce cours de Mécanique Classique. L'interaction nucléaire faible explicite la radioactivité  $\beta$  (proton  $\leftrightarrow$  neutron avec émission d'un électron par un noyau atomique) ; matière 'friable' ou désintégration d'un neutron du noyau en un proton (qui reste au sein du noyau), un électron et un anti-neutrino qui sortent.

- Dans ce cours, les deux interactions et la description de leurs actions gravitationnelles et électromagnétiques sera modélisée par une *grandeur vectorielle* appelée *Force*. Ces forces seront en fait souvent un résultat macroscopique de multiples interactions microscopiques. [Voir sous Moodle, pré-cours sur le vectoriel.pdf](#)

### II.4.1.1) L'interaction gravitationnelle (modules de la force et du champ associés en $1/r^2$ )

- Cruciale en *physique mécanique*, explique la mécanique terrestre et céleste, notion de masse gravitationnelle, étude de la chute des corps ou lancement de projectiles, l'aviation et le vol de fusée, le mouvement des planètes au sein d'un système solaire, et de très nombreuses autres manifestations et explications à notre échelle planétaire puis humaine (mouvement des masses d'air, météorologie planétaire, cyclones, fluides et océans, taille des montagnes, usure de pièces en mouvement (rails), mécanique des solides, de tous types d'objets en translations/rotations, contact...), l'ingénierie Mécanique... => [Voir retour sur Terre des lanceurs de Space X](#)



• L'attribut masse  $M_1$  positionnée en  $\vec{r}_1$  (à l'origine et référentiel  $S$ ) crée un champ gravitationnel (ou gravifique)  $\vec{E}_{Grav}$  dans tout l'Univers ( $\mathcal{E}$ space).

$$\vec{E}_{Grav} = -G \frac{M_1}{(r_{12})^2} \vec{u} \quad (II-4) \quad \text{!} \quad \text{(voir schéma correspondant)}$$

avec,  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$  ou  $\text{m}^3.\text{s}^{-2}.\text{kg}^{-1}$ , constante dite de Gravitation Universelle.

$$\|\vec{r}_{12}\| = r_{12} = d(M_1, M_2)$$

▫ L'attribut de même 'nature' (masse)  $M_2$ , va 'baigner dans ce champ (de portée infinie) générant une *Force*.

$$\vec{F}_{Grav\ 1/2} = M_2 \cdot \vec{E}_{Grav} = -G \frac{M_1 M_2}{(r_{12})^2} \vec{u} \quad (II-4_{bis})$$

(créée par 1 ressentie par (sur) 2)

▫ La 3<sup>ème</sup> loi de Newton 'Action/Réaction' (ou Inter-actions) engendrera que  $\vec{F}_{Grav\ 1/2} = -\vec{F}_{Grav\ 2/1}$  (on pourra vérifier d'ailleurs sur le schéma que les deux masses s'attirent).

▫ Le champ de pesanteur terrestre  $\vec{g}$  (ou de tout autre planète) est issu de cette loi universelle. En effet en calculant le champ gravifique avec (II-4) à la surface de la Terre, la masse de la planète Terre  $M_T = 5,98 \times 10^{24} kg$  ainsi que son rayon  $R_T = 6,37 \times 10^3 m$  nous fixe une force d'interaction avec une autre masse  $m$  dénommé, Poids  $\vec{P}$  :

$$\vec{P} = \vec{F}_{Grav\ M/m} = m \cdot \vec{g} = -G \frac{Mm}{(R_T)^2} \vec{u} \quad (II-5) \quad \longrightarrow \quad \|\vec{g}\|_{Terre} = 9,81 m/s^2$$

(accélération que l'on subit 'baignant' dans ce champ de pesanteur terrestre)

## II.4.1.2) L'interaction électromagnétique (modules de la force et du champ associés en $1/r^2$ )



▫ **Electrostatique (seul)** : De la 'même' manière, faire un schéma des interactions entre deux attributs charges. La constante qui intervient s'écrira  $\kappa = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  avec  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} F/m$  (ou  $C^2.m^{-2}.N^{-1}$ ). Ecrire la loi de Coulomb pour le champ et la force électrostatique...

• **Electromagnétisme** : cette interaction est gérée par un système d'équations établi par J.C. Maxwell (1831-1879), physicien, mathématicien écossais (attention, l'origine du magnétisme est quantique, notion dite de 'spin').



Ces équations sont généralement exprimées au nombre quatre en deuxième année de supérieure, mais des changements de variables existent pour diminuer leurs nombres. Cette interaction électromagnétique est à l'origine de la cohésion des atomes/molécules, des solides, interaction qui intervient dans les réactions chimiques, qui est aussi à l'origine des forces de frottement au niveau microscopique (même si au niveau macroscopique, nous les décrirons dans ce cours de mécanique)...

## II.4.2) Exemple de Forces parmi certaines Interactions (liste non exhaustive)

• **La force de Lorentz (en interaction électromagnétique)** : cette dernière s'exprime sous la forme  $\vec{F}_{Lorentz} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ , avec  $q$  ( $>0$  ou  $<0$ ) la charge de la particule,  $\vec{E}$  le champ électrique (V/m, voir électrostatique précédent),  $\vec{v}$  la vitesse de la particule (voir Chapitre I cinématique) et  $\vec{B} \propto \vec{H}$  l'induction magnétique en Tesla (T ou A/m) ;  $\vec{H}$  étant le champ magnétique.

+ Voir sous Moodle( les propriétés du produit vectoriel) partie [pré-cours.pdf](#)

A noter que cette force ne dépend pas que de la propriété de l'*Espace* (voir Chapitre III et notion de forces à 'circulation non conservative').

· La poussée d'Archimède :

**Théorème:** Tout solide immergé et en *équilibre*, par rapport au fluide au repos (relativement à un référentiel galiléen S) subit de la part du fluide une force  $\vec{\Pi}$  appelée poussée d'Archimède [années -287 -212 avant JC] ; Cette dernière est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé ; cette poussée sera appliquée au 'centre de poussée' (à priori différent du centre de gravité du solide!).

$$\vec{\Pi} = -m_{\text{fluide déplacé}} \cdot \vec{g} = -\rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{solide immergé}} \cdot \vec{g} \quad \text{(II-6)}$$


*ou fluide déplacé* 

+ interprétation avec résultante de la pression autour de l'objet immergé

· La force de traînée (solide immergé mais en *mouvement*  $\vec{v}$ ) :

Son module se calcule par la formule  $F_t = \frac{1}{2} C_{géo} \cdot \rho_{\text{fluide}} \cdot S \cdot v^2$  avec le coefficient de traînée  $C_{géo}$  représentant le caractère aérodynamique (la forme) de l'objet. Lorsque les vitesses sont faibles (ou nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho \cdot v \cdot \text{Taille}_{\text{objet}}}{\eta}$ , en fluidique, faible  $Re < 1$ ), alors  $C_{géo}$  est inversement proportionnel à la vitesse et ainsi après simplification  $\vec{F}_t = -\alpha \vec{v}$ , avec  $\alpha$  un coefficient dit de frottement exprimé en kg/s). Dans le cas particulier de géométrie sphérique du corps (rayon  $r$ ) la traînée se dénomme force de Stokes,  $\eta$  viscosité du fluide (unité Pa.s):

$$\vec{F}_t(\text{Stokes}) = -6\pi\eta r \cdot \vec{v} \quad \text{(II-7)}$$



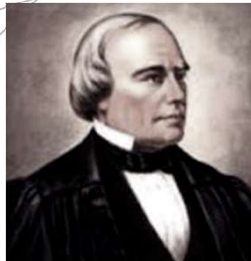
Cette force de 'frottement' fixe ainsi la notion de vitesse 'limite' de l'objet se déplaçant dans le fluide.

Lorsque vitesses élevées et grand nombre  $Re > 10^3$ ,  $C_{géo}$  dévient constant et la force de trainée proportionnelle à  $v^2$  (dépendance quadratique), module  $F_t = -\beta \cdot v^2$ .

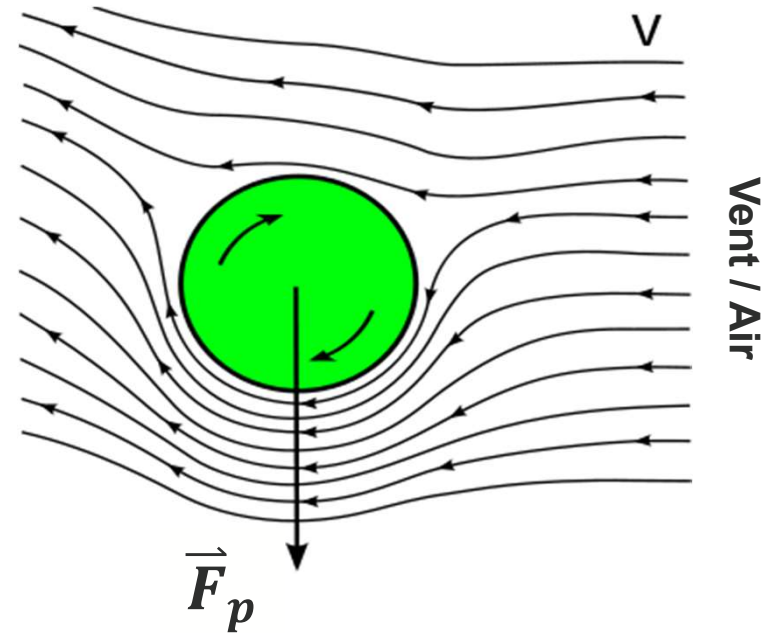
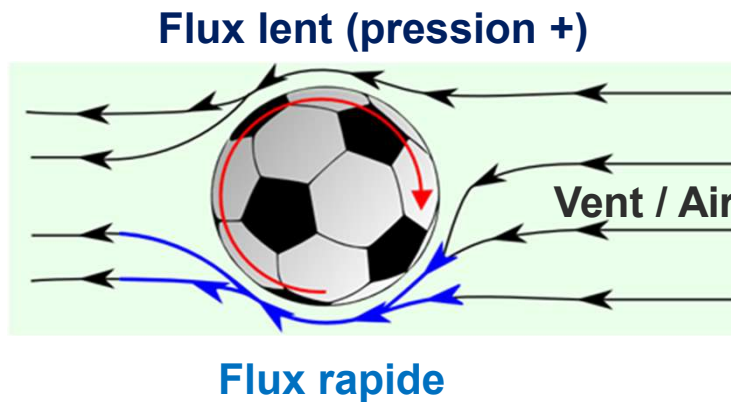
- Remarque : *Effet Robins-Magnus* en jeux de balles (tennis, football, etc). Lorsque qu'une balle est 'liftée', coupée ou brossée, en plus du poids et de la trainée, une force dite de 'portance'  $\vec{F}_p$  apparait sous l'effet de la rotation de la balle!



Heinrich Gustav Magnus (1802-1870)



Benjamin Robins (1707-1751)





• **Les forces et actions exercées sur un support solide:**

• Il existe la notion de vitesse de glissement entre deux solides (il faut alors définir un point de contact entre les deux solides (qui appartient aux deux) puis écrire sa différence de vitesse par rapport à un même référentiel extérieur fixe.

• **Lois du frottement solide** (présentation macroscopique en mécanique, *réaction  $\vec{R}$  au support*, composantes normale et tangentielle) :

• Faire un schéma, objet (poids  $\vec{P}$ ) à l'équilibre posé sur support (table...) ; principe Newton,  $\vec{R}_N$ . Conclure : en l'absence de frottement solide  $\vec{R} = \vec{R}_N$ .

• Existence force d'appel appliquée, avant la mise en déplacement de l'objet ( $\mu_s$ , *coeff. de frottement statique*) ou pendant ( $\mu_d$ , *coeff. de frottement dynamique*), schéma, frottement  $\vec{f} = \vec{R}_{Tgt}$  ( $\|\vec{R}_{Tgt}\| \neq \|\vec{R}_N\|$ ), conclure :  $\|\vec{R}_{Tgt}\| = \mu_d \|\vec{R}_N\|$  et

$$\mu_s = \operatorname{tg} \theta_s = \frac{\|\vec{R}_{Tgt}\|}{\|\vec{R}_N\|}.$$

$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_{Tgt} \quad (11-8)$$

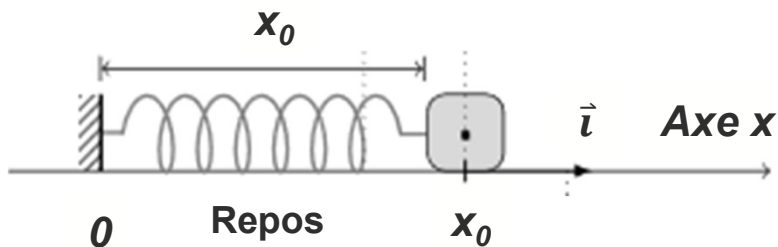
$$\|\vec{R}_{Tgt}\| = \mu_s \|\vec{R}_N\| \quad \text{et} \quad \mu_s = \operatorname{tg} \theta_s \quad \triangle!$$

• Question : décrire une expérience simple sur plan incliné, à un 'certain moment' pour déterminer la valeur de  $\mu_s$  entre deux matériaux?

**Remarque:** Frottement et glissement sont deux notions 'indépendantes' au sens où un mouvement peut-être avec les deux attributs présents, ou seulement un seul (l'un ou l'autre).

• La force de rappel  $\vec{F}_R$  d'un ressort

• A partir de la position au repos (et équilibre) d'un ressort de longueur  $x_0$  en position horizontale, faire un schéma du dispositif ayant subi une force 'd'appel' soit de traction, soit de compression. Puis en vertu du 3<sup>ème</sup> principe d' « Interactions » de Newton ou 'Action/Réaction' représenter la force de rappel  $\vec{F}_R$ .



$k$  coeff. de proportionnalité ou *raideur du ressort* (forme de coeff. de rigidité selon une dimension), unité :  $kg/s^2$ .

Expérimentalement mouvement selon axe  $[Ox)$ , à chaque instant  $t \rightarrow x(t)$ , linéarité et proportionnalité :

$$\vec{F}_R = -k \cdot \underbrace{(x(t) - x_0)}_{\Delta x} \vec{i} \quad \text{!}$$

Avec changement origine (ou variable)

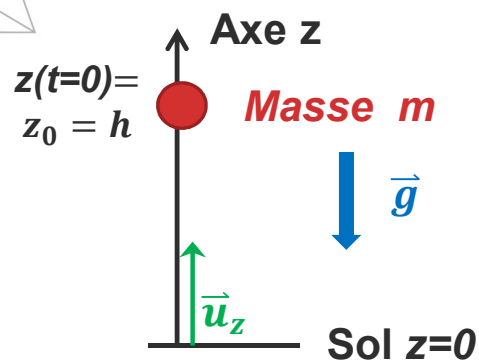
$$\vec{F}_R = -k \cdot x(t) \vec{i} \quad (II-9)$$

- La force de tension  $\vec{T}$  d'un fil (tendu et 'idéal'), fil souple, non élastique, de masse nulle
- Faire un schéma d'un pendule au repos avec masse, représenter son poids puis la tension  $\vec{T}$ . De quel principe de Newton émerge t'elle ?

## II.5) Applications du PFD (Galiléens et non) - Méthode

### II.5.1) Application du PFD (référentiel supposé Galiléen)

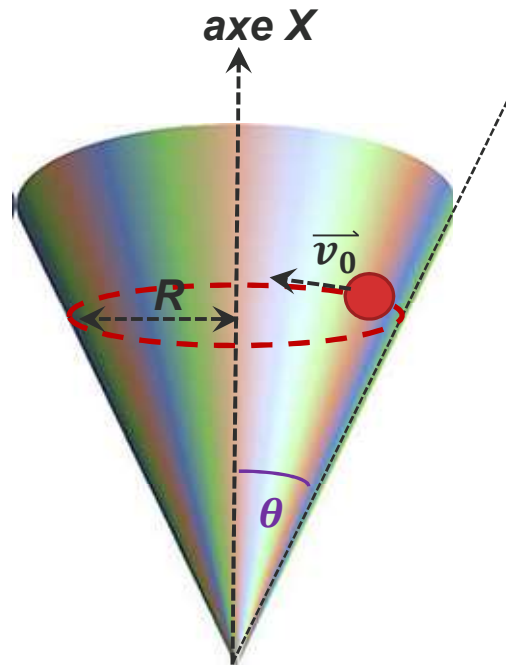
- La chute sous champ gravitationnel ( ou sous pesanteur) - méthode
- La méthode consistera à établir un bilan de forces du système (représentation sur schéma et écriture de leurs composantes dans le repère choisi), puis d'appliquer le PFD (Chapitre II) donnant l'accélération  $\vec{a}(t)$  (du chapitre I), et d'obtenir par intégrations successives  $\vec{v}(t)$  et  $\vec{r}(t)$  à savoir la cinématique complète ('passé et futur') du système sous dynamique de champs de forces.



• A  $t=0$ , la masse  $m$  est lâchée sans vitesse initiale. Ecrire les conditions initiales puis appliquer la méthode de résolution au système pour déterminer les équations horaires complètes. En déduire que le temps de chute sera de  $t_{chute} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  puis que la vitesse d'impact au sol sera  $v_{sol} = \sqrt{2gh}$ . La vitesse de chute est indépendante de la masse d'un corps dans ce cas sans frottement d'air considéré...

- Montrer qu'avec une condition de vitesse initiale  $v_0$ , on obtient  $v_{sol} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ .

• **Application** : Une bille roule sans frottement sur un cône d'axe vertical dont les génératrices forment un angle  $\theta$  avec la verticale (voir schéma).



La trajectoire est un cercle horizontal de rayon  $R$  parcouru à une vitesse de norme constante  $\|\vec{v}_0\|$ .

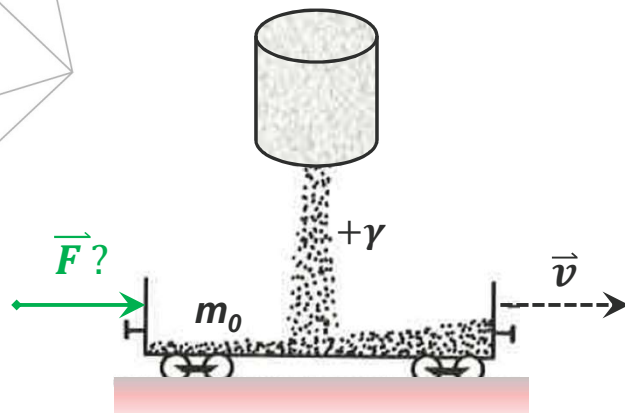
Exprimer une relation entre le rayon  $R$ , l'angle  $\theta$ , la norme de la vitesse  $v_0$  et  $g$ .

• **Réponse** : Bilan des forces, schéma  $\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$  ; mouvement circulaire ( $\Rightarrow \vec{a}_r$ )  
Projections axes X (schéma) et  $Y \perp X$ .

$$\begin{cases} P = mg = R_N \sin \theta \\ ma_r = R_N \cos \theta \end{cases} \quad \text{avec } a_r = \frac{v_0^2}{R}. \quad \text{Soit : } \operatorname{tg} \theta = \frac{gR}{v_0^2}$$

**- Application : Force et masse variable**

Du sable est déversé dans un wagon de masse initiale  $m_0$  se déplaçant à une vitesse initiale  $\vec{v}$ . La quantité de sable qui tombe dans le wagon par unité de temps se note  $\gamma = \frac{dm}{dt}$ .



Le poids du wagon augmentant au cours du temps, quelle force  $\vec{F}$  faut-il appliquer au wagon pour maintenir sa vitesse constante ? (les frottement seront négligés)

Réponse :  $\vec{F} = \gamma \cdot \vec{v} = \frac{dm}{dt} \cdot \vec{v}$  (kg.m.s<sup>-2</sup> ou Newton)

## II.5.2) Application du PFD (référentiel non Galiléen) - Forces d'inertie

• Obtention du PFD en référentiel non galiléen – définition des forces d'inerties (ou 'pseudo'-forces ou forces 'fictives' en référentiels accélérés...)


• A partir de la loi de composition des accélérations (I-18), issue de l'aspect relatif du mouvement perçu de deux référentiels S et S', en déduire l'expression du PFD (dans le référentiel non galiléen S') et la définition des *pseudo-forces* dites *d'inertie*.

$$m\vec{a}_r = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \quad (\text{II-10})$$

PFD dans S' (non galiléen) →

→ Forces d'interactions en physique (PFD dans S)

Pseudo Forces d'inertie



avec,  $\begin{cases} \vec{F}_e = -m\vec{a}_e \\ \vec{F}_c = -m\vec{a}_c \end{cases}$  *pseudo forces d'inertie* 'd'entraînement' puis de Coriolis

(pour les accélérations  $\vec{a}_e$  et  $\vec{a}_c$  voir expressions (I.18) du chapitre I)



- **Exemples et analyses de mouvements dans  $S'$  avec existences de forces d'inertie**

Dans l'ensemble de ces cas, des schéma seront nécessaires de manière à représenter ces forces d'inertie et conclure sur leur direction, sens...

- **Cas référentiel  $S'$  en translation uniformément accélérée**

- **Cas référentiel  $S'$  en rotation uniformément accélérée**

- Mobile (ou objet) immobile dans  $S'$

- Mobile (ou objet) en mouvement, se déplaçant dans  $S'$

- **Cas Terrestre (Terre en rotation) Forces d'inertie à la surface de la Terre**

- **ex. 1: effet de l'entraînement d'un 'fil à plomb'**

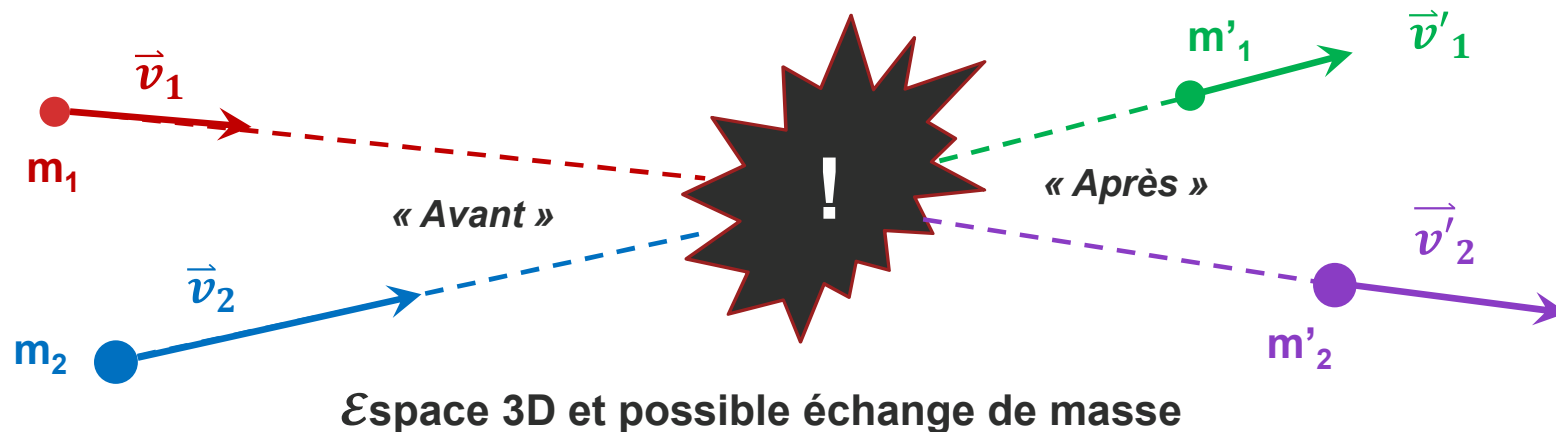
- **ex. 2: effet de la force de Coriolis sur la chute libre ou 'déviations vers l'Est'**

Quelques manifestations : rotation des masses d'air (cyclones), courant marins, lancement des fusées, rails de train...

## II.6) Physique des collisions et chocs, lois de conservation de la quantité de mouvement, énergie cinétique.

### II.6.1) Physique des collisions, position du problème avec deux particules ou objets macroscopiques - vision générale 3D

• **Hypothèse et simplification:** on considérera que les objets n'interagissent pas entre eux avant et après le choc, l'interaction se produira selon une courte durée et portée durant le choc, mais elle sera négligeable « avant » et « après » la collision. Contrairement à l'usage 'courant du terme' une collision n'implique pas forcément qu'il y a impact en physique théorique ! Les vitesses seront uniformes.



• Malgré la connaissance partiel du problème précédent, il est possible d'obtenir les informations « après » connaissant celles d' « avant » grâce *aux lois de conservations et notions de symétries...* A noter cependant que en 3D, le système présente quatre équations trop d'inconnues, il sera donc nécessaire de connaître la déviation (les angles) entre les particules pour la résolution complète...



- Les lois de conservations portent sur la quantité de mouvement (théorème du centre d'inertie sur tout le Système S impliquant ceci sans force extérieure,  $\frac{d\vec{p}_S}{dt} = \vec{0}$  ou système isolé)  $\vec{p}_S^{av} = \vec{p}_S^{ap}$ , puis sur l'énergie totale du système S (voir chapitre III).

## II.6.2) Collisions élastiques (simplification, cas unidimensionnel)

- Il y a collision élastique si : le nombre de particules restent constant (avant/ après) et que l'énergie dite 'interne' de chaque particule reste inchangée. En d'autres termes, les particules et objet ne changent pas de 'nature' (et donc de masse) et ne se déforment pas. Les lois de conservations s'écriront ( $i=1,2$ ) :

$$m_i = m'_i, \quad \vec{p}_S^{av} = \vec{p}_S^{ap}, \quad E_c^{av} = E_c^{ap} \quad (II-11)$$

- Faire un schéma concernant l'étude d'une collision élastique unidimensionnelle. Ecrire le système de deux des relations de conservations (II-11) sur la quantité de mouvement et l'énergie cinétique du système S. Les grandeurs  $m_1, m_2, (v_1, v_2$  algébriques) connues fixeront :

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \\ v'_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (II-12)$$

(Symétrie des solutions  $1 \leftrightarrow 2$ )

- Le cas d'une 'cible'  $m_2$  immobile en amont ( $v_2=0$ ) puis plus lourde  $m_2 > m_1$  que le projectile  $m_1$  donnera :

$$\begin{cases} v'_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} v_1 < 0 \\ v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases}$$

Le projectile rebondit en changeant de sens

→ L'énergie cinétique perdue par le projectile est fonction des masses et vaut alors :

$$E'_{c1} - E_{c1} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{c1} \quad (II-13)$$

**Applications Spectroscopie de rétrodiffusion Rutherford** : ainsi en bombardant une surface de matériau par des projectiles (particules protons en général) le processus de perte d'énergie cinétique de ceux-ci donnera une indication sur les masses et donc composition du dit matériau.

### II.6.3) Collisions inélastiques

- Une *collision est inélastique* lorsqu'une partie de l'énergie cinétique initiale du système est transformée en autres formes d'énergies. Ainsi de part *l'équivalence masse/énergie*, il peut avoir une variation d'énergie interne et modification du nombre de particules créées.



**Remarques** : la réaction chimique élémentaire bi-moléculaire  $A + B \rightarrow C + D$  est un choc inélastique et les particules sont différentes ! Les réactions nucléaires (désintégration, fusion et fission) sont également des processus inélastiques. En mécanique classique une balle de pâte à modeler tombant sans rebondir convertit l'énergie cinétique que l'impact en une autre *énergie Q* (comme l'échauffement et/ou la déformation du matériau).

## II.6.4) Collisions inélastiques, choc 'mou' (simplification, cas unidimensionnel, hypothèse masse $m_2$ immobile)

• Faire un schéma concernant l'étude d'une collision inélastique unidimensionnelle avec  $m_1$  de vitesse  $\vec{v}$  en collision avec  $m_2$  immobile, l'ensemble  $(m_1+m_2)$  se déplaçant ensuite à  $\vec{v}'$  colinéaire à  $\vec{v}$ . Ecrire le système des deux relations de conservations sur la quantité de mouvement et l'énergie totale du système S. Les grandeurs connues fixeront :

$$\begin{cases} m_1 \vec{v} = (m_1 + m_2) \vec{v}' \\ \frac{1}{2} m_1 v^2 + Q = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v'^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v \\ Q = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v^2 \end{cases} \quad (II-14)$$

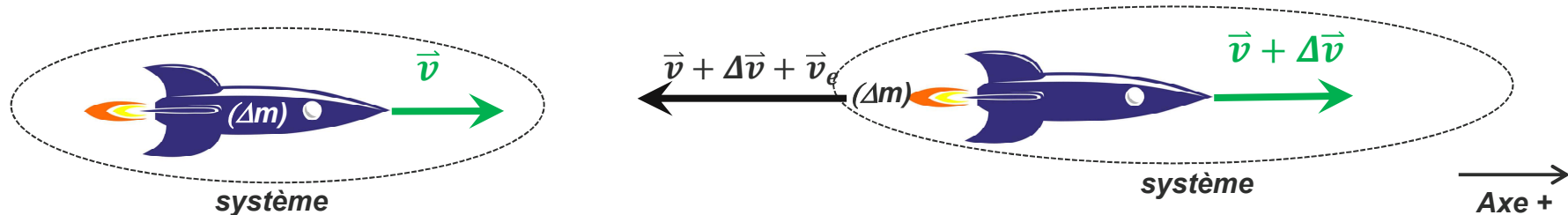
**Remarques :** L'énergie dissipée  $Q$  en 'théorie du problème à deux corps' est l'opposée de l'énergie cinétique 'barycentrique'  $\frac{1}{2} \mu (v_{1/2})^2$  avec  $\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}$  la masse réduite\*. La proportion d'énergie dissipée dans cette étude vaut  $\frac{|Q|}{E_c(\text{avant})} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}$ , et si  $m_2 \gg m_1$  (rapport  $\rightarrow 1$ ) alors toute l'énergie du projectile  $m_1$  est dissipée.

\* Dans un problème à deux corps, le mouvement de deux particules (1 & 2) isolées se décompose en mouvement du centre de masse et d'une particule 'fictive' de masse 'réduite'  $\mu$  soumise à une force  $\vec{F}_{1,2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ .

Dans ce paragraphe *quantité de mouvement*, il ne faut surtout point oublier le PFD qui par définition explicite que lors d'un choc où un objet/système voit sa quantité de mouvement  $\vec{p}$  se modifier, le milieu qui subit le choc est soumis à une force égale à  $\frac{d\vec{p}}{dt}$ .

### II.6.4) Mouvements avec *masse variable* et quantité de mouvement

• *La fusée - calcul de la variation de quantité de mouvement* : considérons un système 'fusée avec carburant', dont l'éjection des gaz vers l'arrière permet la propulsion. Soit  $\vec{v}_e$  la vitesse d'éjection de ces gaz dans le référentiel 'fusée'.  
 Considérons un intervalle de temps  $\Delta t$  ou la quantité  $\Delta m$  de masse est éjectée ; ainsi la fusée possède une vitesse  $\vec{v}$  à l'instant  $t$  puis une vitesse  $\vec{v} + \Delta\vec{v}$  à l'instant  $t + \Delta t$ . La masse éjectée  $\Delta m$  aura quant à elle une vitesse  $(\vec{v} + \Delta\vec{v} + \vec{v}_e)$  par rapport à la fusée (voir schéma).



La variation  $\Delta\vec{P}$  de la quantité de mouvement sur l'intervalle  $\Delta t$  s'écrit :

$$\underline{\vec{P}_{ap}} - \underline{\vec{P}_{av}} = \{(m - \Delta m)(\vec{v} + \Delta\vec{v}) + \Delta m(\vec{v} + \Delta\vec{v} + \vec{v}_e)\} - m\vec{v} = \underline{m \cdot \Delta\vec{v} + \Delta m \cdot \vec{v}_e} \quad (\text{II-15})$$

Cas général

• Cas où la fusée n'est soumise à aucune force extérieure (PFD),  $\Delta \vec{P} = \vec{0}$  :

En projetant selon l'axe, avec notation infinitésimal  $\Delta \Rightarrow d$ , on obtient alors la loi :

$$\int dv = -v_e \int \frac{dm}{m} \Rightarrow \underbrace{v}_{v_0} - \underbrace{v_0}_{v_0} = -v_e \cdot \underbrace{\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)}_{> 0} > 0 \quad (II-16)$$

La variation de la vitesse ou accélération ne dépend que du rapport  $(m/m_0)$  mais non de la façon varie  $m$ .

• Cas où la fusée est soumise à une force extérieure (PFD)  $\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$  :

La relation (II.15) conduit à une loi :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}_e \frac{dm}{dt} = \vec{F}_{ext} \quad (II-17)$$

Un cas intéressant est lorsque que cette fusée décolle à la verticale sous force extérieure gravitationnelle, car plus le nouveau terme  $(dm/dt)$  est grand et donc la masse de la fusée diminue vite alors plus la variation de vitesse (accélération) est grande. En conclusion, il est donc fortement conseillé de consommer / brûler le carburant le plus rapidement possible !

# Physique MECANIQUE

(Transparents et Eléments relatif au Cours traité en amphithéâtre)

## ESIR (Cycle Prépa - CUPGE 1A-S1)



— UnivRennes1 —  
[univ-rennes1.fr](http://univ-rennes1.fr)

B. BÊCHE Pr., IETR CNRS - ESIR UR1

[bruno.beche@univ-rennes1.fr](mailto:bruno.beche@univ-rennes1.fr)

<https://www.ietr.fr/bruno-beche>



## Remarques :

Lorsque le symbole  apparaîtra, une démonstration plus conséquente sera nécessaire au tableau et sur votre cahier / feuilles en terme de prise de notes.

Le symbole  mérite une attention particulière.



# CHAPITRE III)

## FORMULATION INTEGRALE OU APPROCHES ENERGETIQUES : TRAVAIL, PUISSANCE, ENERGIE, POTENTIEL

- Travail le long d'une trajectoire, puissance, les énergies, énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique
- Energie potentielle et notion de forces à circulation conservative (champ de forces conservatif), propriétés, notions de champs et de potentiels, énergie mécanique totale et loi de conservation, notions de barrières et de puits de potentiel en physique, diagramme d'énergie, le théorème du viriel
- Notions et conditions d'équilibre et de stabilité, petits mouvements autour de la position d'équilibre, vers l'oscillateur harmonique en mécanique



### III.1) Travail le long d'une trajectoire, puissance, les énergies, énergie cinétique et théorème de l'énergie cinétique

#### III.1.1) Cas d'une trajectoire rectiligne: travail d'une force le long d'une trajectoire (notion de déplacement), théorème et définition

- Les principes ou formulations intégrales énergétiques (scalaire), ou théorèmes de l'énergie sont 'cachés' / inclus dans la 2d loi de Newton (PFD, vectoriel).

Trajectoire rectiligne => Résultante force  $\vec{F}$  colinéaire à  $\vec{v}(t=0)$ .



$$\text{C.I.} \begin{cases} x(t=0) = x_0 \\ v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_0 \end{cases}$$

PFD :  $a = \ddot{x} = \frac{F}{m}$

$$\begin{cases} t = (v - v_0) \frac{m}{F} \\ x = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2 + v_0 t + x_0 \end{cases}$$



$$W = (x - x_0)F = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = E_c(x) - E_c(x_0) = \Delta E_c \quad (\text{III-1})$$

Concernant les dimensions et unités :  $[W] = [F].[L] = M.L^2.T^{-2} = [E]$ . Son unité  $kg.m^2.s^{-2} = J$ , le **Joule**. Remarque conversion :  $1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$  (très faible) et  $1 \text{ calorie} = 4.18 \text{ J}$ .

**Question:** Dans un référentiel terrestre 'considéré galiléen', quelle est l'altitude maximale atteinte par un tir de projectile à la verticale à la vitesse initiale de 100 m/s?

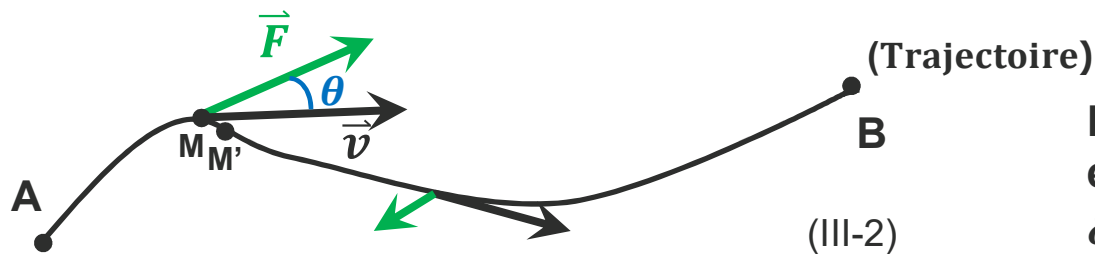
**Réponse :**  $h = (v^2/2g) = 510 \text{ m}$

**Question:** Avec cette formule, estimer la hauteur que peut franchir un perchiste si il court à une vitesse de 10 m/s.

• **La Puissance** sera définie par :  $P_{moy.} = \frac{W}{\Delta t}$  ,  $P_{inst.} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ . **L'unité** sera le **Watt (W)**.

Remarques: Le minimum de perception de l'œil humain se situe vers  $10^{-15}$  W, le plein soleil sur une surface de  $1m^2$  représente  $10^2$  W, une centrale d'électricité (nucléaire, énergie provenant de la fission d'atomes 'lourds') produit des tranches de  $10^{10}$  W.


### III.1.2) Cas d'une trajectoire quelconque ( $\vec{F}$ non colinéaire à $\vec{v}$ ): travail et circulation d'une force, théorème de l'énergie cinétique



Le travail élémentaire sur un élément  $d\vec{r}$  (de M à M') sera :  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r}$  (projection  $F dr \cos \theta$ )

Son intégration sur l'arc  $\widehat{AB}$  donne  $W = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$  ; il s'agit d'une **intégrale** curviligne **de circulation** de la grandeur vectorielle  $\vec{F}$  le long de la trajectoire  $\widehat{AB}$ .

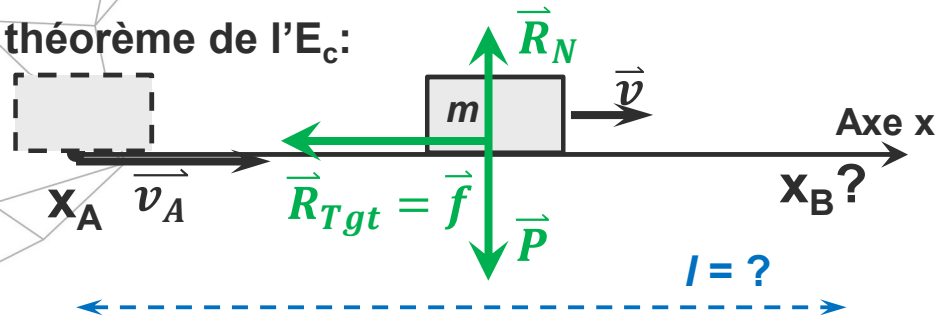
Décrire une situation et force ne travaillant pas.

 PFD :  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \xrightarrow{\cdot d\vec{r} \text{ et } \int} W = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot \vec{v} \cdot dt = \int_{\widehat{AB}} m d\vec{v} \cdot \vec{v} = \int_{\widehat{AB}} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \Delta E_c$  (III-1bis)

• **Théorème de l'Energie Cinétique** : Relativement à un référentiel galiléen, *la somme (algébrique) des travaux ( $W$ ) des forces (résultante  $\vec{F}$ ) qui s'exercent sur un point matériel (mobile, objet...) entre deux instants est égale à la variation de son énergie cinétique entre ces deux instants.*



• **Application**: Calcul du travail d'une force de frottement  $W_{\vec{f}}$  et utilisation du théorème de l'E<sub>c</sub>:



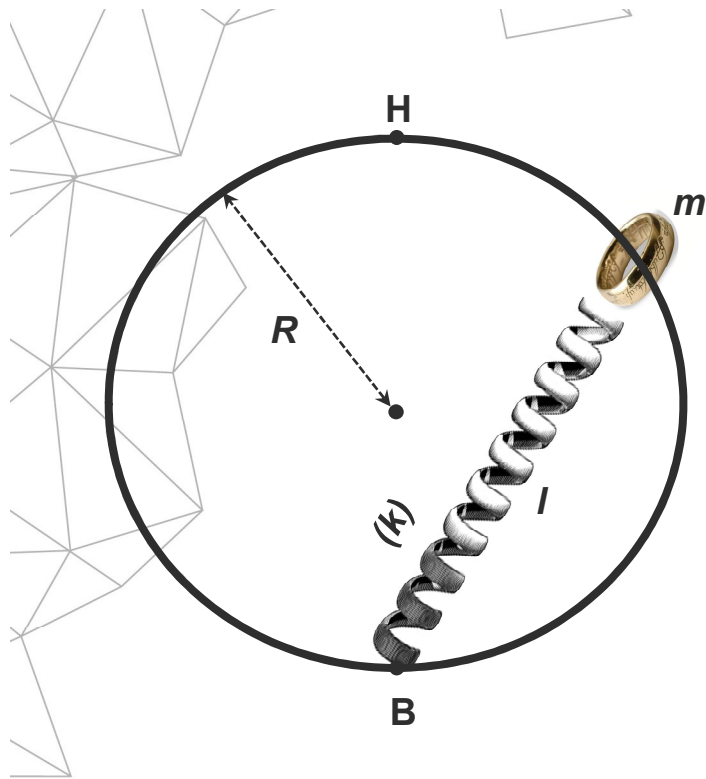
C.I. à t=0  $\begin{cases} x(t=0) = x_A \\ v(t=0) = \dot{x}(t=0) = v_A \end{cases}$

**Question** : Au bout de quelle distance  $l = (x_B - x_A)$  le mobile de masse  $m$  s'arrête t'il ?

**Réponse** :  $l = (x_B - x_A) = \frac{v_A^2}{2\mu_d g}$

• **Application**: Calcul des travaux de forces poids puis tension de ressort ( $W_{\vec{P}}, W_{\vec{F}_r}$ ) et utilisation du théorème de l'E<sub>c</sub>:

Un système mécanique (voir schéma infra) est constitué d'un anneau (de masse  $m$ ) coulissant sur une armature circulaire (ou cercle) de rayon  $R$ . Cet anneau est relié à un ressort de raideur  $k$  (de longueur  $l$  variant, voir dessin), lui-même attaché au point B ou bas du cercle. L'anneau est ainsi soumis respectivement à son poids puis à la traction du ressort (de norme  $\|\vec{F}_r\| = k.l$  sur la position du dessin). L'anneau est positionné au point H ou haut du cercle sans vitesse initiale ( $v_H = 0$ ), puis lâché.



Comprendre le schéma ; calculer l'expression de la vitesse  $v_B$  au point B de l'anneau (on considérera que le ressort se rétracte jusqu'au point B)

$$\text{Réponse : } v_B = 2 \cdot \sqrt{gR + \frac{k \cdot R^2}{m}}$$

Ce résultat pourra aussi se déduire plus loin par un transfert complet de l'énergie potentielle de l'anneau en énergie cinétique...

## III.2) Forces (ou champs de force) à circulation conservative, énergie potentielle

### III.2.1) Mathématique et gradient d'une fonction scalaire, propriétés des champs de force conservatifs

+ Lecture, voir sous Moodle *Opérateur Gradient d'une fonction scalaire\_chap 3.pdf*

• Théorème mathématique :  $\int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\vec{r} = \int_{\widehat{AB}} df = f_B - f_A \equiv \Delta f$  (III-3)

- Si un objet se déplaçant dans l'Espace est soumis à un champ de force  $\vec{F}(\vec{r})$  dont l'intensité et la direction ne dépendent que de la position  $\vec{r}$  de l'objet, alors cet objet se déplace dans un champ de force conservatif (ou à circulation conservative).

+ Discussions sur les champs de force électrostatique, gravitationnel, la force de Lorentz, les forces de frottement... conservatifs ou non ?

- **Définition** : Un champ de force  $\vec{F}(\vec{r})$  est conservatif (ou à circulation conservative) si 'il dérive' d'un potentiel, c'est-à-dire si il existe une fonction scalaire énergie potentielle 'd'interaction'  $E_p(\vec{r})$  telle que :  $\vec{F}(\vec{r}) = -\overrightarrow{grad} E_p(\vec{r}) = -\vec{\nabla} E_p(\vec{r})$  (III-4)



↓ Vecteur Nabla

- **Autres propriétés** (équivalence à démontrer):

Un champ de force  $\vec{F}(\vec{r})$  est conservatif, alors :



- $\Delta E_p = -W$  (le travail équivaut à une perte d'énergie potentielle) (III-5)

Ainsi le travail  $W$ , d'une force conservative  $F$  le long d'un trajet (lacet, chemin...)  $\widehat{AB}$ , est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle entre A et B:

$$\boxed{W_F} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{\widehat{AB}} \overrightarrow{grad} E_p \cdot d\vec{r} = - \int_A^B dE_p \equiv \boxed{-\Delta E_p} \quad (III-5)$$

Le travail dépendait a priori du chemin suivi, mais dans le cas des forces conservatives, le voilà indépendant avec la possibilité de le calculer avec la borne finale et initiale de la dite intégrale.

- Il y a commutativité des dérivées partielles secondes sur l'énergie potentielle (relations nécessaires et suffisantes / théorème de H. Schwarz, W. H. Young et A. Clairaut), en coord. Cartésiennes avec  $E_p(x, y, z)$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial y \partial z} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \end{array} \right. \quad (\text{III-6})$$

- Le champ de force  $\vec{F}(\vec{r})$  est dit 'irrotationnel' c'est-à-dire  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}(\vec{r}) = \vec{0} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}(\vec{r})$  (III-7)  
(Théorème mathématique :  $\overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f = \vec{0}$ )



### III.2.2) Un exemple de champ de force conservatif : la gravitation

- $\vec{F}(r, \theta, \varphi) = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{u}_r$ , champ de force conservatif à symétrie central (schéma)  
→  $E_p(r, \theta, \varphi) = -G \frac{Mm}{r} + cste_{/r, \theta \text{ et } \varphi}$
- Pesanteur à la surface de la Terre : schéma,  $\vec{P} = mg\vec{k} \rightarrow E_p(x, y, z) = mgz + cste$

• **Application** : exprimer l'énergie potentielle élastique  $E_p$  (d'un ressort) connaissant sa force de rappel élastique (et conservative) décrite par  $\vec{F}_r = -kx.\vec{u}_x$ .

**Réponse**: on prendra un déplacement élémentaire  $d\vec{l} = dx.\vec{u}_x$  et l'on calculera le travail...

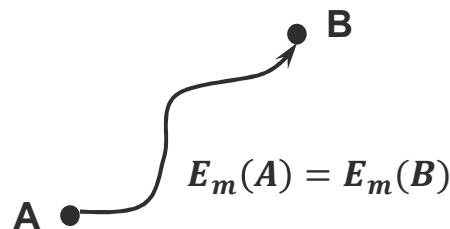
### III.3) Energie mécanique totale $E_m$ , loi de conservation, notion de potentiel et diagramme d'énergie

#### III.3.1) Cas des champs de forces conservatifs

• Dans ce cadre, deux résultats s'appliquent (le *théorème de l' $E_c$*  valable pour l'ensemble des forces puis la relation travail  $\Leftrightarrow$  énergie potentielle valable pour les forces conservatives) :

$$\left. \begin{array}{l} \delta W = dE_c \\ \delta W = -dE_p \end{array} \right\} \Rightarrow dE_c + dE_p = d(\underbrace{E_c + E_p}_{= E_m}) = 0 \quad (\text{III-8})$$

• **Le principe de conservation de l'énergie mécanique totale** signifie alors qu'au cours du temps l'énergie mécanique totale ne varie point, il y a donc possibilité de *transfert d'énergie entre la partie cinétique et potentielle de l'énergie*, la somme restant constante:



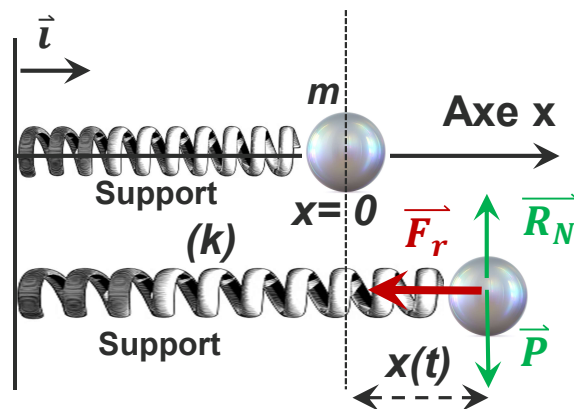
$$\frac{d(E_m)}{dt} = 0 \Leftrightarrow E_m = cste \quad (\text{III-8 bis})$$

Intégrale première du mouvement

- Application de la formulation énergétique et conservation de l'énergie mécanique totale : « vers l'oscillateur harmonique en mécanique »

Calcul du travail  $W_{\vec{F}_r}$  d'une force de rappel d'un ressort (force conservative), déduction de l'énergie potentielle associée et utilisation du principe de conservation de l'énergie mécanique totale.

Un système mécanique (voir schéma infra) constitué d'un ressort oscillant (de raideur  $k$ ) 'idéalement' à l'horizontale selon l'axe  $x$  sur un support et sans aucun frottement.



- Bilan des forces
- Calcul des travaux des forces (III.2) ou de l'énergie potentielle (III.4)
- Ecriture de la fonction scalaire à deux variables  $E_m(x, \dot{x})$  et application du principe de conservation (III.8 bis), savoir différencier  $d/dt$  une fonction à deux variables  $x$  et  $\dot{x}$  ...

- Réponse :

L'équation de l'oscillateur harmonique (2<sup>d</sup> ordre):

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0 \quad (\text{III-9})$$



La conservation de l'énergie mécanique totale a des conséquences sur les mouvements et leurs 'limites'. Considérons un mouvement à un degré de liberté, c'est-à-dire selon une seule dimension spatiale selon  $x$  pour simplifier (1D).

• **Remarque** : La relation (III-8 et bis) fixe  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x) = cste$ . Le calcul de la vitesse  $v^2 = \dot{x}^2 = \frac{2}{m}[E_m - E_p(x)]$  n'aura de sens (toujours positive) ou le mouvement dynamique existera et apparaîtra avec la condition  $[E_m - E_p(x)] > 0$ .

(III-10)

• **Remarque** : A partir de  $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E_m - E_p(x)]}$ , il est possible par séparation des variables ( $x$ , et  $t$ ), d'obtenir l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre du mouvement par ce principe en énergie :

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t dt = \int_{x_0}^x \sqrt{\frac{m}{2[E_m - E_p(x)]}} \cdot dx \quad \text{(III-10bis)}$$

avec,  $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + E_p(x)$

Cette équation différentielle générique du mouvement donne le temps  $t$  comme fonction de  $x$ , il suffira donc de considérer ensuite la fonction inverse  $x(t)$ .

(le PFD, voir Chapitre II, est quant à lui une équation du second ordre avec l'accélération  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ )

• **Application** : Utiliser la formulation intégrale (III.10) pour résoudre le problème du mouvement rectiligne (1D) d'une force constante ( $dE_p = -F \cdot dx$  ou force dite conservative).

Soit  $E_p = -F \cdot x$  en prenant une constante d'intégration nulle, en fixant de plus pour simplifier l'origine des instants (temps)  $t_0=0$  et spatial  $x_0=0$ , (III.10bis) s'intégrera en :

$$\left[ \frac{2}{F} \cdot \sqrt{E_m - F \cdot x} \right]_0^x = \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot t \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2} \left( \frac{F}{m} \right) t^2 + \left( \frac{2E_m}{m} \right)^{\frac{1}{2}} t$$

$\underbrace{\left( \frac{F}{m} \right)}_{=a}$ 
 $\underbrace{\left( \frac{2E_m}{m} \right)^{\frac{1}{2}}}_{=v_0}$

Car  $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + F \cdot x$ , vaut en ( $x=0$  et  $t=0$ ) :

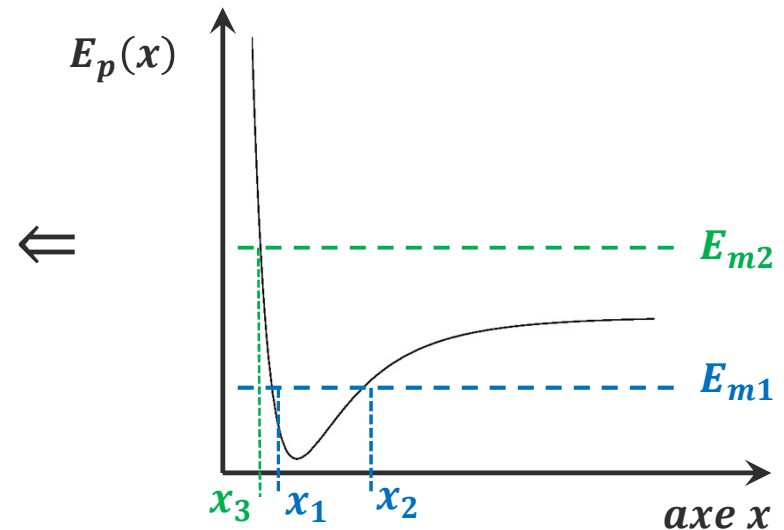
$$E_m(t = 0, x = 0) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

Soit l'équation  $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$  (avec  $x_0 = 0$ ) l'équation caractéristique d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré ( $a \propto F$ )

### III.3.2) Notions de barrières et de puits de potentiel (1D), diagramme d'énergie et dynamique du mouvement qualitative associée

- *Discussion* : les potentiels en physique (gravitationnel, mais aussi moléculaire, en physique quantique concernant les particules, application en physique des semi-conducteurs et composants...)

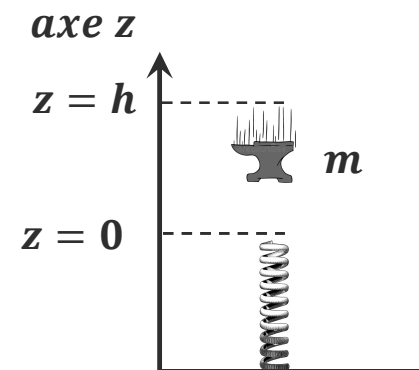
- *Discussion* sur la dynamique associée au diagramme, le mouvement, la notion d'états liés, niveaux d'énergie, quantification, notion d'états libres, notion d'équilibre...



- *Application* : Enfoncement d'un ressort et diagramme d'énergie potentielle d'un ressort.

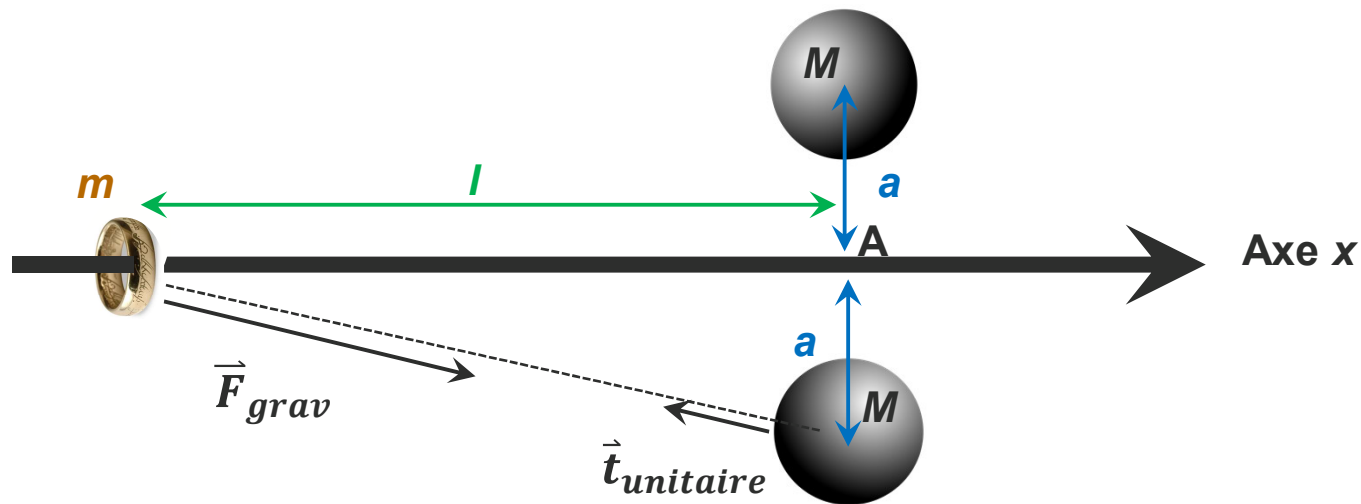
Un objet de masse  $m$  est lâché d'une hauteur  $h$  sur un ressort de raideur  $k$ .

Tracer le diagramme d'énergie potentielle  $E_p(z)$  du ressort. De combien s'enfonce le ressort ?



**Réponse :**  $E_p(z) = mgz$  ( $z \geq 0$ ) ;  $E_p(z) = mgz + \frac{1}{2}kz^2$  ( $z < 0$ ). **A tracer.** Le ressort s'enfonce de  $u$  tel que  $mgh = mgu + \frac{1}{2}ku^2 \Rightarrow$  discriminant  $> 0$ ,  $u < 0$  et  $|u| = \frac{1}{k} [mg + \sqrt{mg \cdot (mg + 2kh)}]$ .

• **Application :** Attraction gravitationnel d'un anneau de masse  $m$  ('coulissant selon un axe  $x$  sans frottement') par deux masses  $M$  situées symétriquement à une distance  $a$ , de part et d'autre de l'axe  $x$  (voir schéma).



L'anneau est lâché sans vitesse initiale à une distance  $l$  du point O. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la vitesse  $v_A$  de l'anneau au point A suite à l'attraction gravitationnelle du dispositif ?

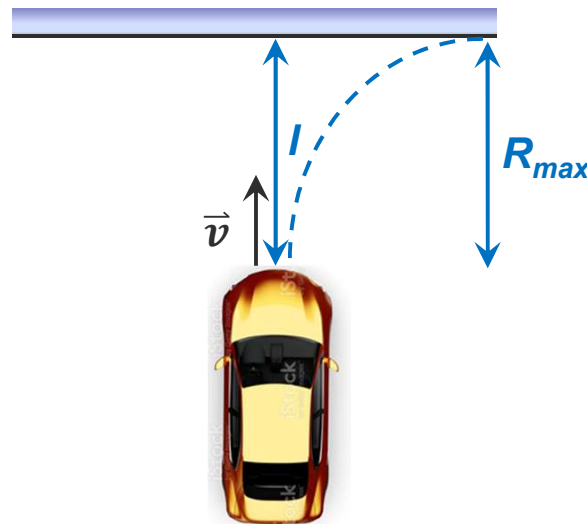
**Réponse :**  $\Delta E_C = W_{grav}$  ; l'anneau de masse  $m$  est à une distance de  $u = \sqrt{a^2 + l^2}$  d'une masse  $M$  au début puis à une distance  $u=a$  à la fin au point O. Il y a de plus 2 masses  $M$ . Donc  $W_{grav} = 2 \int_{u=\sqrt{a^2+l^2}}^{u=a} F_{grav} du$

$$\vec{F}_{grav} = -G \frac{Mm}{u^2} \vec{t} \quad \int \rightarrow \quad G \frac{Mm}{u}$$

$$\text{Soit : } v_A^2 = 4GM \cdot \left[ \frac{1}{a} - \frac{1}{\sqrt{a^2 + l^2}} \right]$$



• **Application :** Une voiture arrive avec une vitesse  $\vec{v}$  à une distance  $l$  du mur (voir schéma). Le conducteur ne dérape pas.



En utilisant un théorème de l'énergie, pensez-vous qu'il sera plus facile de freiner en ligne droite ou bien d'effectuer un virage de rayon  $R_{max}$  pour éviter de percuter le mur ?

**Réponse :** Voir schéma,  $R_{max} = l$ . Nous pouvons comparer les forces nécessaires à déployer pour les deux situations.

Concernant l'option freinage, on considérera  $v_{finale}$  nulle (conducteur stoppe) avec  $\Delta E_C = W = F \cdot l$ , soit  $F = \frac{1}{2} m \frac{v^2}{l}$ .

Concernant l'option de tourner, la force centrifuge se quantifie en  $F = m a_r = m \frac{v^2}{R_{max}} = m \frac{v^2}{l}$ , soit deux fois plus.

### III.3.3) Notions sur l'équilibre et la condition de stabilité

(forces conservatives et vision 1D)

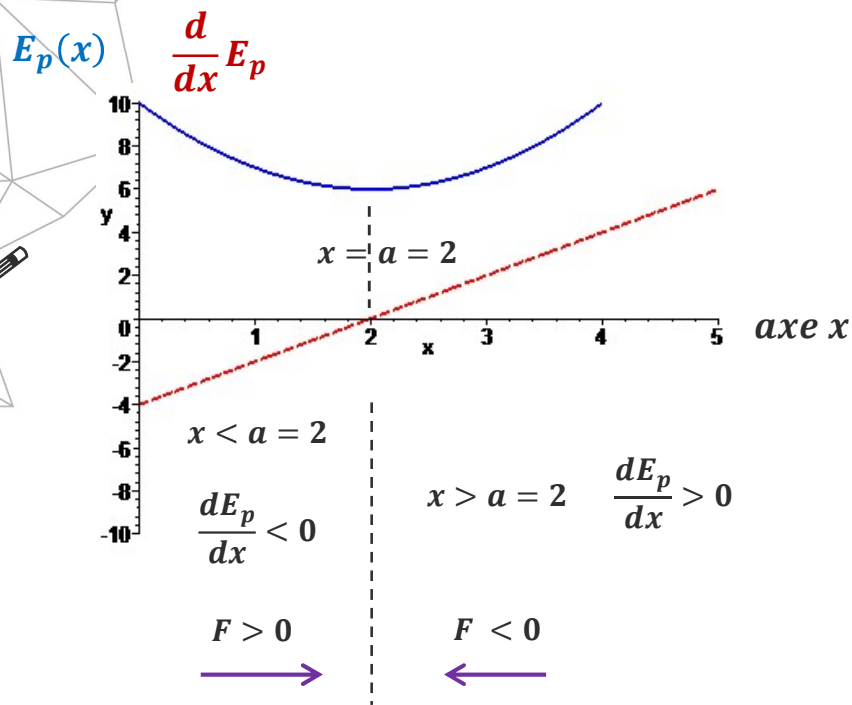
En dimension une ou un degré de liberté selon  $x$ , nous avons  $F(x) = -\frac{d}{dx} E_p$ . Ainsi, les positions d'équilibre sont naturellement données par  $F(x_{fixés}) = 0$  (à savoir pas de force) et donc sur la recherche d'extremum de la fonction énergie potentielle:

$$\left( \frac{d}{dx} E_p(x) \right)_{x_i \text{ fixés}} = 0 \quad (\text{III-11})$$

La dérivée seconde  $\frac{d^2}{dx^2} E_p$  donnera les informations sur l'aspect convexe/concave

$$\left( \frac{d}{dx} E_p(x) \right)_{x=a} = 0$$

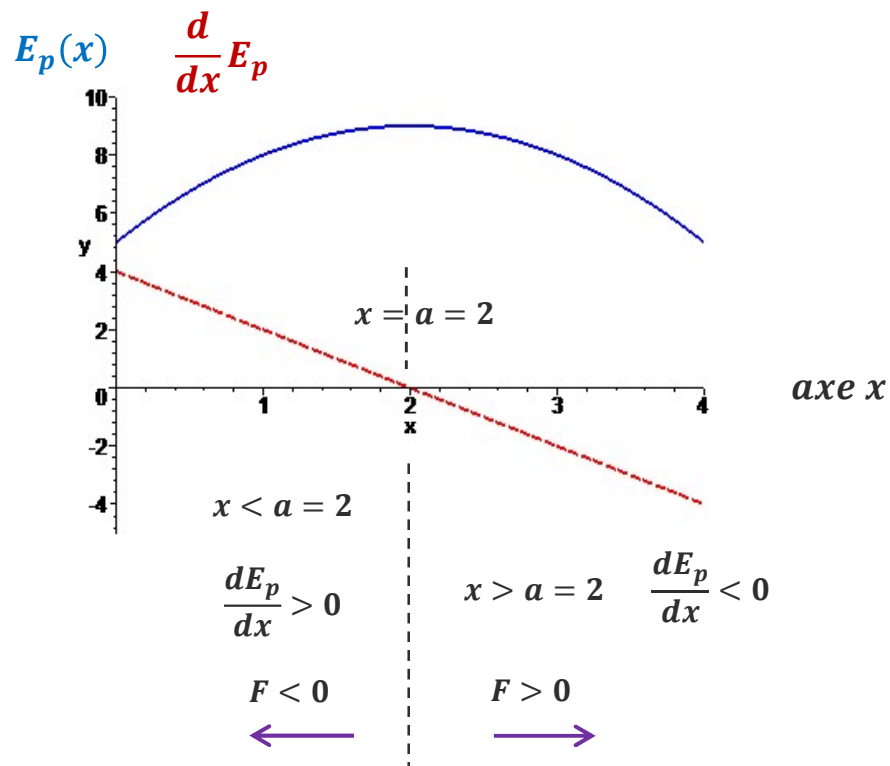
Cuvette de potentiel ou minimum



La force 'localisera' la particule vers  $a=2$  minimum

+  
Equilibre stable car  $\frac{d^2}{dx^2} E_p > 0$  (convexe)

Montagne de potentiel ou maximum



La force éloignera la particule hors  $a=2$  maximum

+  
Equilibre instable car  $\frac{d^2}{dx^2} E_p < 0$  (concave)

## III.4) Ouverture vers d'autres aspects : moyenne et théorème du viriel pour une particule, énergie et forces non conservatives

### III.4.1) Théorème du viriel

Ce théorème est utile pour obtenir certains résultats pratiques sur un moyenne temporelle. Il ne se substitue pas aux importants principes de conservation (de l'énergie précédemment ou du moment cinétique du chapitre V).

- En introduisant la grandeur scalaire  $A = m\vec{v} \cdot \vec{r}$  relative à la dynamique d'une masse constante  $m$  qui se déplace ( $\vec{r}$  et  $\vec{v}$ ) sous l'action une force résultante  $\vec{F}$ , il est possible de définir la relation par opérateur temporel  $d/dt$  puis <moyenne> :

$$\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle_{moy} = \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle_{moy} + 2\langle E_c \rangle_{moy} \quad (\text{III-12})$$

Si sur la <moyenne> dans le temps de quantité variationnelle  $\frac{dA}{dt}$ , le temps d'intégration  $\tau$  est très grand,  $\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle_{moy} = \frac{A(\tau) - A(t=0)}{\tau}$ , en fixant donc un encadrement

borné des valeurs  $\vec{r}$  et  $\vec{v}$  associées à la particule, alors  $\left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle_{moy} = 0$ , soit :

$$\langle E_c \rangle_{moy} = -\frac{1}{2} \langle \vec{F} \cdot \vec{r} \rangle_{moy} \quad (\text{III-13})$$

(quantité dénommé le viriel de la particule)



Le théorème de viriel adopte une forme spéciale quand les forces sont **centrales** et dérivent d'un potentiel à savoir  $\vec{F} = - \left( \frac{\partial E_p}{\partial r} \right) \vec{u}_r$ , soit:

$$\langle E_c \rangle_{moy} = \frac{1}{2} \left\langle r \frac{dE_p}{dr} \right\rangle_{moy} \quad (III-14)$$

Ce résultat traduit une relation entre les moyennes temporelles des énergies cinétiques et potentielle de la dite particule.

### III.4.2) Energie et forces non conservatives

La *loi de conservation de l'énergie mécanique totale*, très pratique pour l'étude des mouvements (approche formulation intégrale et scalaire pour déterminer les équations différentielles régissant le mouvement) n'est cependant valable que pour des objets, particules, points matériels et systèmes soumis à des forces conservatives.

Ainsi, concernant les forces non conservatives (de frottements, forces de Stokes, force de Lorentz toutes proportionnelles à une fonction de la vitesse), il existera *d'autres énergies* en jeu comme la dissipation de la chaleur et thermique, la thermodynamique, la physique des rayonnements (électromagnétiques, particulaires...). On utilisera donc au sein de ces disciplines physiques concernées, les dites expressions de telles énergies de manière à étendre la *conservation de l'énergie globale* de différentes origines.

+ Lecture, voir sous Moodle [Les développements de Taylor DL\\_chap 3.pdf](#)

# Physique MECANIQUE

(Transparents et Eléments relatif au Cours traité en amphithéâtre)

## ESIR (Cycle Prépa - CUPGE 1A-S1)



— UnivRennes1 —  
[univ-rennes1.fr](http://univ-rennes1.fr)

B. BÊCHE Pr., IETR CNRS - ESIR UR1

[bruno.beche@univ-rennes1.fr](mailto:bruno.beche@univ-rennes1.fr)

<https://www.ietr.fr/bruno-beche>



## Remarques :

Lorsque le symbole  apparaîtra, une démonstration plus conséquente sera nécessaire au tableau et sur votre cahier / feuilles en terme de prise de notes.

Le symbole  mérite une attention particulière.



# CHAPITRE IV)

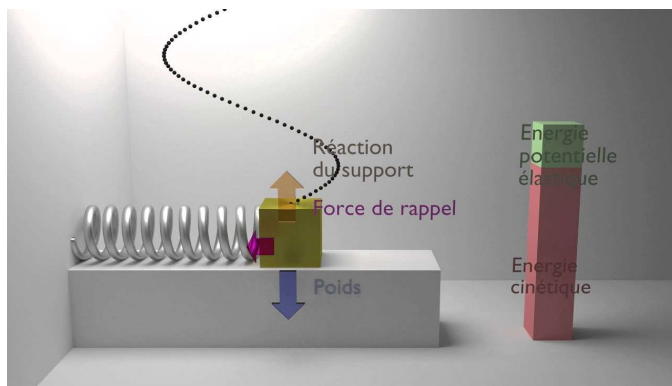
## LES OSCILLATEURS MECANIQUES : MOUVEMENTS VIBRATOIRES ET OSCILLANTS

- L'oscillateur harmonique à un degré de liberté en physique mécanique. Oscillateur harmonique simple (libre et conservatif), analogie électrique.
- Oscillateur harmonique libre amorti (ou dissipatif) (mécanique et analogie électrique) ; régimes apériodique, critique, pseudo-périodique, facteur de qualité.
- Oscillateur harmonique forcé, régime permanent. Notion de résonance mécanique et de facteur de qualité.

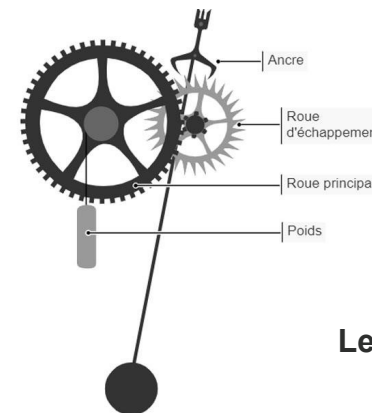
## IV.1) Introduction

Un des mouvements crucial rencontré dans la 'nature' est incontestablement le mouvement oscillatoire ou vibratoire. Le mouvement d'un pendule et d'un ressort avec masse est de nature oscillatoire naturellement siège d'oscillations. Une particule oscille si elle se déplace périodiquement autour d'une position d'équilibre. Les atomes constituant les molécules puis les solides vibrent les uns par rapport aux autres. Les électrons oscillent rapidement dans les dispositifs de type antenne (émetteur et récepteur) ; les systèmes mécaniques de type amortisseurs sont des oscillateurs... la liste des exemples applications est longue et *une analogie complète peut-être menée pour les système électriques, électroniques, optoélectroniques...* Parmi tous les mouvements oscillatoires, nous nous intéresserons en 1<sup>ère</sup> année de supérieur au mouvement sinusoïdal étant le plus simple à décrire mathématiquement.

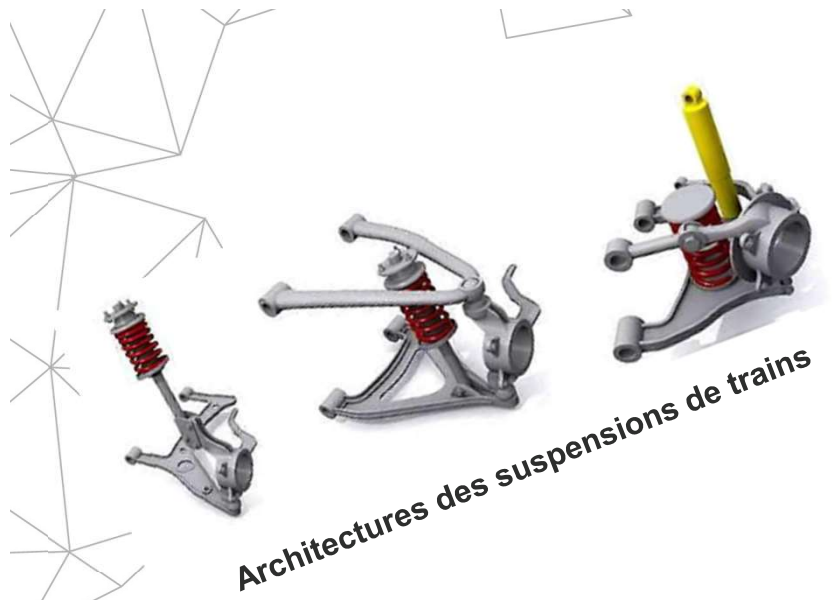
### IV.1.1) Quelques exemples en images



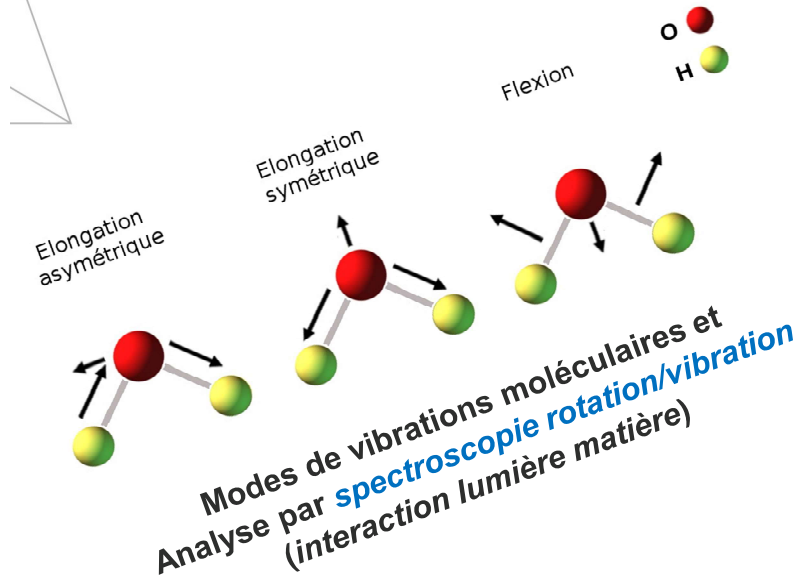
Le ressort



Le pendule



## Suspensions



Circuits électriques résonants, pour les filtres, les mélangeurs de fréquences et les radio-applications (transmissions sans fil)

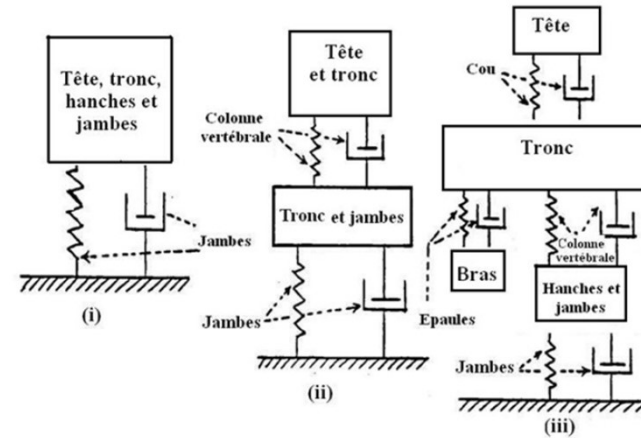
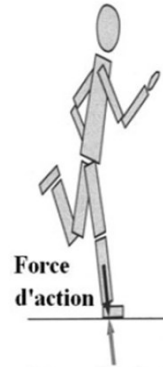


# Autres exemples de systèmes (oscillations / amortissements...)

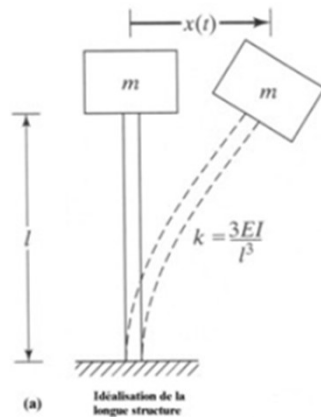
## Balancier spirale



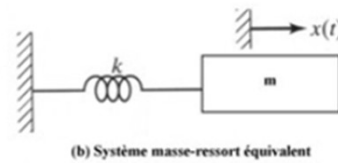
## Biomécanique du corps humain



## Longue structure 'Space Needle' (célèbre tour de 184 mètres située au Seattle Center)

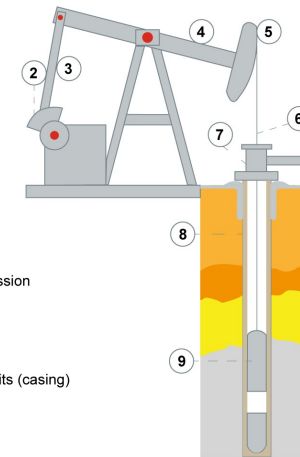


Modélisation d'une longue structure comme un système masse ressort



## Oscillation / pompage

Le schéma de principe d'une pompe à balancier



1. Moteur
2. Contrepoids
3. Arbre de transmission
4. Bras principal
5. Tête
6. Câble
7. Tête de puits
8. Enveloppe du puits (casing)
9. Pompes

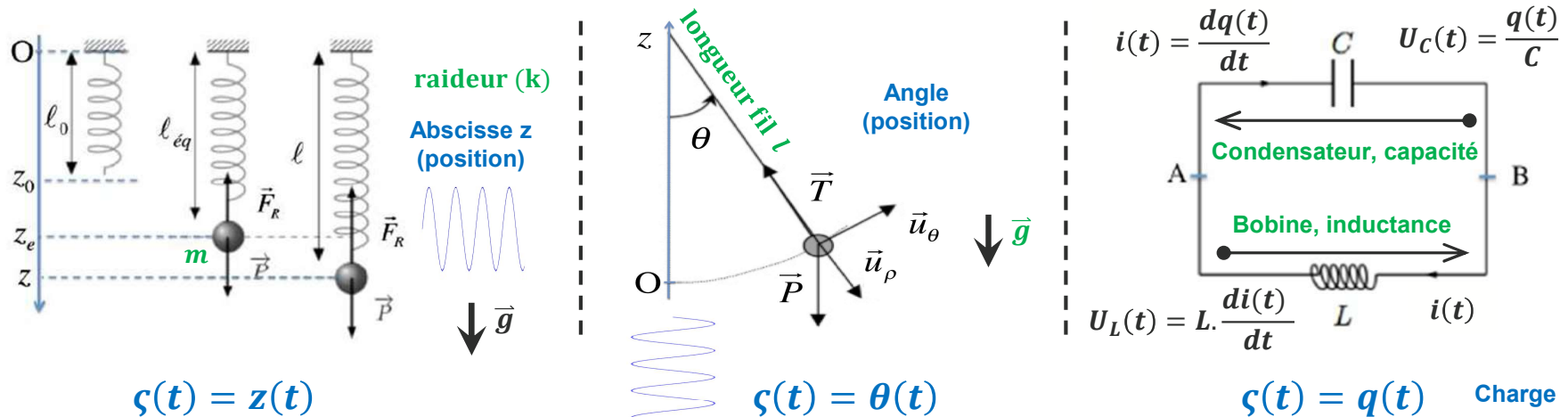
## IV.2) L'oscillateur harmonique simple (libre et conservatif)

Précédemment, nous avons rencontré et remarqué que l'oscillateur harmonique simple émerge aussi bien de la formulation vectoriel PDF (chapitre II, voir ressort (II.9)) que de la formulation énergétique (voir chapitre III et application en (III.9)). Comme nous l'avons démontré au chapitre III puis en TD ensuite, son équation dynamique est une équation différentielle du 2<sup>d</sup> ordre à coefficients constants (ces coefficients sont d'ailleurs formés des 'ingrédients' de la physique du système et de l'environnement...

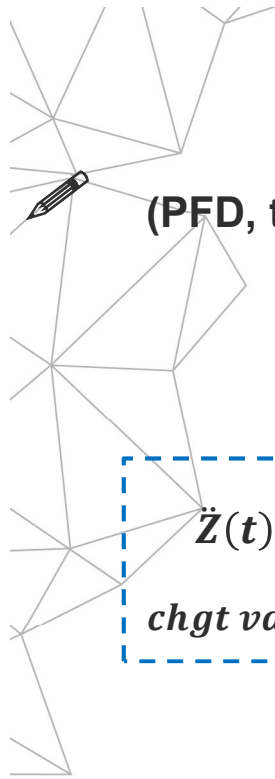
$$\ddot{\zeta}(t) + \omega_0^2 \zeta(t) = 0 \quad (\text{IV-1})$$

avec,  $\zeta(t)$  la fonction solution recherchée décrivant le mouvement et  $\omega_0$  la pulsation propre du système physique étudiée ( $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ),  $\nu_0$  et  $T_0$  respectivement la fréquence et période propre associée.

• Exemples de 3 systèmes de base (ressort / pendule / circuit électrique oscillant LC) :







## Physique

Mécanique  
(PFD, théorème énergie)

Mécanique  
(PFD, théorème énergie)

Electrocinétique  
(Lois des mailles et des nœuds tensions / courants)

Résolution

### Equations des oscillateurs harmoniques

$$\ddot{Z}(t) + \frac{k}{m}Z(t) = 0$$

chgt var.  $Z(t) = z(t) - z_e$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l}\theta(t) = 0$$

$$\ddot{q}(t) + \frac{1}{LC}q(t) = 0 \quad (IV-2)$$

### Pulsation propre $\omega_0$ des systèmes oscillants par analogie (IV.1)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (IV-3)$$

- **Discussions et sens physique** : pulsation propre  $\omega_0$  fonction de grandeurs et paramètres physiques du système et environnement (ne dépend pas de C.I.) ; discussion celles de mécanique par rapport aux valeurs de  $k$ ,  $m$ ,  $g$  et  $l$  ; remarque pendule  $\omega_0$  indépendant de la masse  $m$  {simplification  $m_{grav.}$  (du poids) avec  $m_{inertie}$  (cinématique du PFD ou accélération)}.

• **Solutions  $\zeta(t)$  de l'oscillateur harmonique simple**  $\ddot{\zeta}(t) + \omega_0^2 \zeta(t) = 0$  { (IV.1) ou (IV.2) } : méthodes de résolution et expressions des solutions

• **1<sup>er</sup> type de méthode (lycée)**: la solution générale de l'équation peut s'écrire comme une sinusoïde (sinus ou bien cosinus) car en dérivant deux fois l'on retrouve la dite fonction solution (à savoir sinus ou bien cosinus).

**Démonstration:** (IV-4)

(dites d'intégration et à déterminer avec deux C.I.)

  $\zeta(t) = C \cdot \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases}(\omega_0 t + \varphi)$ , avec **C (amplitude)** et  **$\varphi$  (phase) deux constantes** (IV-5)

Soit  $\dot{\zeta}(t) = \mp \omega_0 \cdot C \cdot \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases}(\omega_0 t + \varphi)$  puis  $\ddot{\zeta}(t) = -\omega_0^2 \cdot C \cdot \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases}(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 \cdot \zeta(t)$

Ainsi (IV.5) n'est autre que (IV.1) l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique simple ! Prendre comme solution une sinusoïde (IV.4) impose une dynamique de l'oscillateur harmonique simple et vice-versa.

• **2<sup>d</sup> type de méthode (supérieur)**: On forme l'équation dite caractéristique associée à l'équation différentielle du 2<sup>d</sup> ordre à coeff. csts. Puis suivant le signe du discriminant on conclut avec les théorèmes généraux sur la forme de la solution.



+ Lecture, voir sous Moodle [Complément Mathématique Solutions Eq. diff 2d ordre à coeff cst\\_chap 4.pdf](#)

Dans ce cas: (IV.1)  $\Rightarrow$  son éq. caract ;  $\Delta < 0$  ; et même plus directement  $r_{1,2} = \pm j\omega_0$  deux racines complexes conjuguées ; soit  $\alpha = 0$  et  $\beta = \omega_0$ . Avec le théorème l'on conclut effectivement sur (IV.4).

• Détermination des constantes d'intégration  $C$  et  $\varphi$  de la solution générale (IV.4)

$\zeta(t) = C \cdot \begin{vmatrix} \cos \\ \sin \end{vmatrix}(\omega_0 t + \varphi)$  : méthode et C.I.

On utilise les C.I. sur la position, la vitesse à des instants précis comme par exemple initial à l'instant  $t=0$ , soit *par exemple*:  $\zeta(t=0) = \zeta_0$  et  $\dot{\zeta}(t=0) = v_0 = 0$ .

Si  $\zeta(t) = C \cdot \begin{vmatrix} \cos \\ \sin \end{vmatrix}(\omega_0 t + \varphi)$  les deux C.I. conduisent à  $\begin{cases} C \cdot \begin{vmatrix} \cos \\ \sin \end{vmatrix}(\varphi) = \zeta_0 \\ \mp \omega_0 \cdot C \cdot \begin{vmatrix} \sin \\ \cos \end{vmatrix}(\varphi) = 0 \end{cases}$ . La 2<sup>d</sup> éq.

donne  $\varphi = \begin{vmatrix} 0 \text{ modulo } [\pi] \\ \frac{\pi}{2} \text{ modulo } [\pi] \end{vmatrix}$  ceci injecté dans la 1<sup>ère</sup> fixe  $C = \begin{vmatrix} \zeta_0 \\ \zeta_0 \end{vmatrix}$  c-a-d la même chose.

L'on peut donc conclure que la *forme générale de la solution*  $\zeta(t)$  avec ces C.I. particulières sera la même (ceci quelque soit le choix  $\begin{vmatrix} \cos \\ \sin \end{vmatrix}$  au début), soit :

$$\boxed{\zeta(t)} = \zeta_0 \cdot \begin{vmatrix} \cos \\ \sin \end{vmatrix} \left( \omega_0 t + \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} \right) = \boxed{\zeta_0 \cdot \cos(\omega_0 t)}$$

## Energie totale des systemes

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} k Z^2$$

$$E_m = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m g l \theta^2$$

$$E_{elec} = \frac{1}{2} L \dot{q}^2 + \frac{1}{2C} k q^2 \quad (IV-6)$$

- Energie : montrons que ces systèmes libres (IV.1) sont conservatifs ?

Ces systèmes sont représentés par une équation différentielle de type (voir IV.1):

$$\ddot{\zeta}(t) + \omega_0^2 \zeta(t) = 0$$

$$\ddot{\zeta}(t) = \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \frac{d\dot{\zeta}}{dt} = \frac{d\dot{\zeta}}{d\zeta} \cdot \dot{\zeta}$$

Ainsi la dynamique et équation différentielle s'écrira :

$$\dot{\zeta}(t) d\dot{\zeta}(t) + \omega_0^2 \zeta(t) d\zeta = 0$$

Pour le 1<sup>er</sup> système étudié (ressort  $\zeta(t) = Z(t)$  et  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ), en déduire par intégration la conservation de l'énergie mécanique totale par:

$$E_c + E_p = E_m = \text{cste}$$

Là encore, nous redémontrons l'équivalence entre la formulation de l'équation différentielle pouvant venir du PFD et la formulation énergétique.

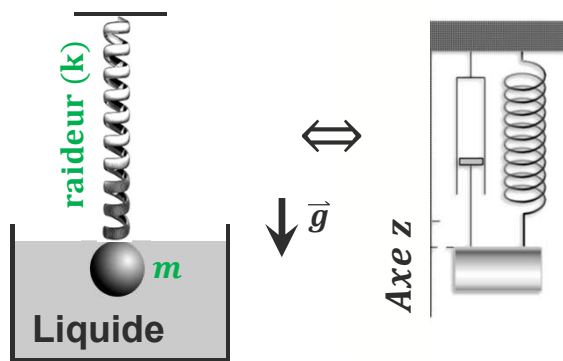
### IV.3) L'oscillateur harmonique libre amorti (ou dissipatif)

En pratique un mouvement oscillatoire *non entretenu* ne dure pas indéfiniment ! Il s'arrête à cause des frottements (visqueux, solide/solide...) pour la mécanique. L'équation dynamique de l'oscillateur harmonique amorti est une équation différentielle du 2<sup>d</sup> ordre à coefficients constants présentant cette fois un terme supplémentaire en  $\dot{\zeta}(t)$  (liée à la vitesse en mécanique :

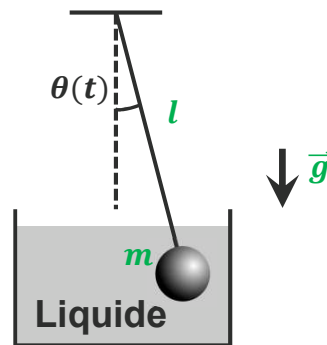
$$\ddot{\zeta}(t) + 2\lambda\dot{\zeta}(t) + \omega_0^2\zeta(t) = 0 \quad (\text{IV-7})$$

avec,  $\zeta(t)$  la fonction solution recherchée décrivant le mouvement et  $\omega_0$  la pulsation propre du système physique étudiée ( $\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ ),  $\nu_0$  et  $T_0$  respectivement la fréquence et période propre associée ; pour la mécanique  $\lambda$  représentant le degré ou importance de l'amortissement associé au système étudié ; il est donc lié en mécanique au coefficient de frottement  $\alpha$ , (voir (II.7)  $\vec{F}_t = -\alpha\vec{v}$ ) et les forces de traînée/frottement visqueux du Chapitre II.

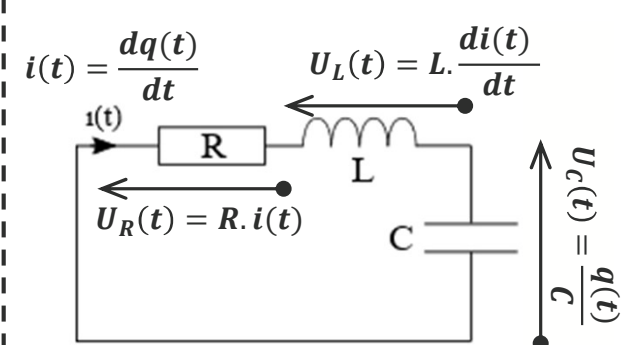
- Exemples de 3 systèmes de base (ressort / pendule / circuit électrique RLC) :



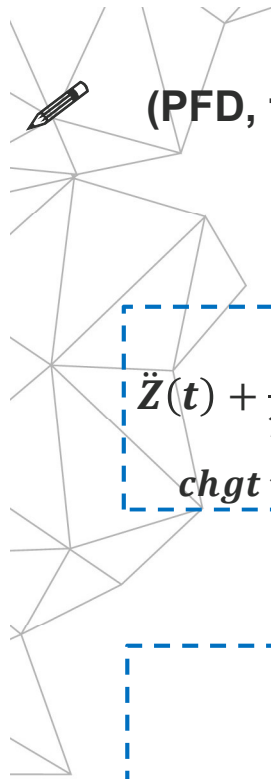
$$\zeta(t) = Z(t)$$



$$\zeta(t) = \theta(t)$$



$$\zeta(t) = q(t) \quad \text{Charge}$$



Mécanique  
(PFD, théorème énergie)

Mécanique  
(PFD, théorème énergie)

Electrocinétique  
(Lois des mailles et des nœuds tensions / courants)

Résolution

### Equations des oscillateurs harmoniques

(IV-8)

$$\ddot{Z}(t) + \frac{\alpha}{m} \dot{Z}(t) + \frac{k}{m} Z(t) = 0$$

chgt var.  $Z(t) = z(t) - z_e$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{\alpha}{m} \dot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0$$

$$\ddot{q}(t) + \frac{1}{LC} q(t) + \frac{1}{LC} q(t) = 0$$

### Pulsation propre $\omega_0$ et Paramètre d'amortissement $\lambda$

par analogie (IV.7)

(IV-9)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \text{ et } 2\lambda = \frac{R}{L}$$

$$2\lambda = \frac{\alpha}{m}$$

• **Discussions et sens physique** : à noter que le coefficient relatif à l'amortissement  $\lambda$  est le même pour les deux systèmes mécaniques car issu de la même force de traînée ou frottement dans le PFD. Toutes les pulsations propres  $\omega_0$  sont les mêmes que (IV.3) car les termes dans les équations différentielles sont les mêmes (et dans (IV.7) les termes en  $\zeta(t)$  et  $\dot{\zeta}(t)$  ne sont pas 'couplés'. Enfin en mécanique pour l'expression de  $\lambda$ , la masse (inertielle du PFD) subsiste, car il n'y a pas la masse  $m$  dans l'expression de la force de traînée ou frottement utilisée.

• **Solutions  $\zeta(t)$  de l'oscillateur harmonique amorti  $\ddot{\zeta}(t) + 2\lambda\dot{\zeta}(t) + \omega_0^2\zeta(t) = 0$ , voir (IV.7) : méthodes de résolution et expressions des solutions**

• **Méthode :** On forme l'équation dite caractéristique associée à l'équation différentielle du 2<sup>d</sup> ordre à coeff. csts. Puis suivant le signe du discriminant on conclut avec les théorèmes généraux sur la forme de la solution.

• **Origine de l'équation caractéristique :** Les solutions les plus générales  $\zeta(t)$  d'une équation différentielle du 2<sup>d</sup> ordre, sans second membre (=0 dans (IV.1) et (IV,7)), et à coefficients constants (ici 1,  $2\lambda$  et  $\omega_0^2$ ) seront de la forme générique ondulatoire d'une somme (combinaison linéaire) de  $\zeta(t) = A \cdot e^{rt}$  avec des valeurs de  $r$  pouvant être complexes. A titre d'exemple, une partie imaginaire traduira un déphasage de la grandeur  $\zeta(t)$  et une partie réelle en  $r$  par exemple un amortissement exponentiel de l'amplitude  $A$  au cours du temps. Nous sommes sur la construction et la recherche d'une onde  $\zeta(t)$  (ondes de vibration en mécanique, ondes de tension/courant en théorie des lignes électriques qui se déplacent). L'insertion de  $\zeta(t) = A \cdot e^{rt}$  au sein de l'équation de l'oscillateur harmonique amorti la plus générale (IV.7) conduit directement à son équation caractéristique associée :  $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$  (remarque: avec cette forme spécifique  $ar^2 + 2br + c = 0$ , il est possible d'utiliser un discriminant  $\Delta = b^2 - ac$  et donc  $r = \frac{-b \pm (i) \cdot \sqrt{\Delta}}{a}$ , le  $i$  apparaissant uniquement lorsque on substituera un  $\Delta < 0$  en  $\{i^2 \cdot (-\Delta)\}$  pour prendre la  $\sqrt{\quad}$ ; on rappelle que  $i^2 = -1$ ).

Suivant le  $\text{sgn}(\Delta = \lambda^2 - \omega_0^2)$  trois types de solutions  $\zeta(t)$  différentes émergeront et représenteront un mouvement dynamique particulier de l'oscillateur.

- **Définition** : on peut définir dans ce cadre la quantité  $\chi$  appelé **taux d'amortissement** ou **coeff. d'amortissement relatif** comme  $\chi = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\sqrt{k.m}}$  en mécanique, puis  $\chi = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  en électrique.

- **Remarque** : Le cas évidemment où  $\chi = 0$  traduit le cas  $\lambda = 0$  à savoir le cas période de l'oscillateur harmonique simple étudié précédemment en IV.2)

### IV.3.1) Amortissement fort régime aperiodique (appelé aussi régime sur-amorti ou sur-critique)

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda > \omega_0 \Leftrightarrow \chi = \frac{\lambda}{\omega_0} > 1$$

- Dans ce cas deux racines réelles (négatives ici) :

$$r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda \pm \omega_0 \sqrt{\chi^2 - 1} = -\lambda \pm \omega_1 \quad (IV-10)$$

(avec, chgt var.  $\omega_1$  une pseudo pulsation)

Elles induiront ainsi comme solution générale la combinaison linéaire (A et B cstes à déterminer par C.I.) :

$$\zeta(t) = A.e^{r_1 t} + B.e^{r_2 t} = A.e^{(-\lambda + \omega_1)t} + B.e^{(-\lambda - \omega_1)t} = e^{-\lambda t} \cdot [A.e^{\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t} + B.e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} t}] \quad (IV-11)$$

*Des fonctions exponentielles réelles et donc pas d'oscillations...*

A partir de (IV.11) les calculs de respectivement  $\zeta(t)$  et  $\zeta'(t)$  sont évidemment possible... puis en fixant des C.I. spécifiques, la détermination des cstes A et B.



## IV.3.2) Amortissement critique (transition entre deux régimes)

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \lambda = \omega_0 \Leftrightarrow \chi = \frac{\lambda}{\omega_0} = 1 \text{ et } \omega_1 = (\omega_0 \sqrt{\chi^2 - 1}) = 0$$

Dans ce cas il s'agit d'une racine double  $r_0$ :

$$r_0 = (r_1 = r_2) = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} = -\lambda \pm \omega_0 \sqrt{\chi^2 - 1} = -\lambda \quad (\text{IV-12})$$

Elle induira ainsi comme solution générale une forme (A et B cstes à déterminer par C.I.) :

$$\zeta(t) = (A + B.t).e^{r_0 t} = (A + B.t).e^{-\lambda t} \quad (\text{IV-13})$$

*Une fonction exponentielle réelle puis linéaire, et donc pas d'oscillations...*

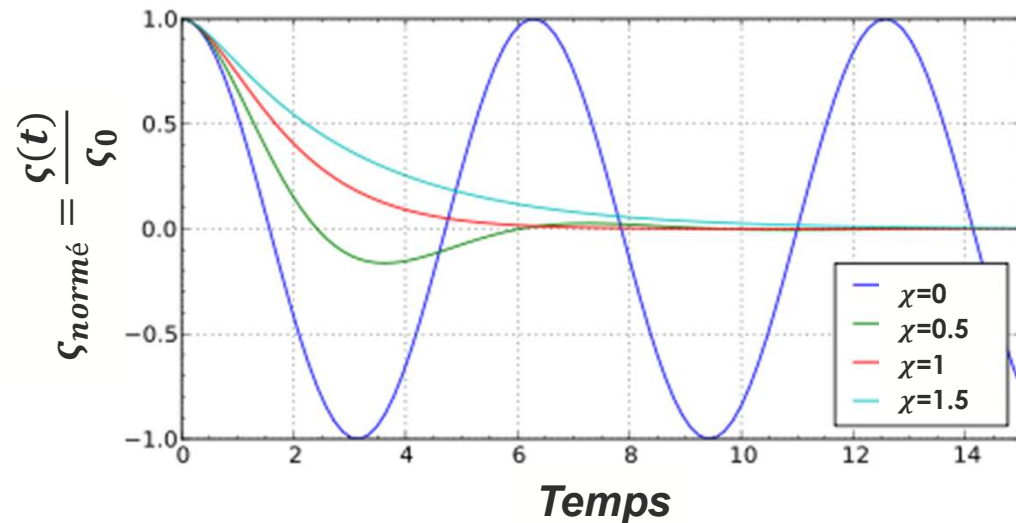
A partir de (IV.13) les calculs de respectivement  $\zeta(t)$  et  $\zeta''(t)$  sont évidemment possible... puis en fixant des C.I. spécifiques, la détermination des cstes A et B.

### Graphes de $\zeta(t) \Leftrightarrow$

En **turquoise** ( $\chi > 1$ ) cas IV.3.1)  
(oscillateur amorti régime sur-amorti ou sur-critique)

En **rouge** ( $\chi = 1$ ) cas IV.3.2)  
(oscillateur amorti, régime critique)

En **violet** ( $\chi = 0$ ) cas IV.2)  
(oscillateur simple (non amorti))



### IV.3.3) Amortissement faible, sous-critique (ou pseudo-périodique)

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \lambda < \omega_0 \Leftrightarrow \chi = \frac{\lambda}{\omega_0} < 1 \text{ et } \omega_1 = (\omega_0 \sqrt{1 - \chi^2})$$

• C'est le cas le plus 'intéressant' au sens où les oscillations existeront tout en étant amorties au sein d'une enveloppe exponentielle décroissante.  $\Delta < 0$  implique deux racines complexes conjuguées (avec,  $i^2 = -1$ ) :

$$\boxed{r_{1,2}} \underset{\in \mathbb{C}}{=} -\lambda \pm i \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm i \cdot \omega_0 \sqrt{\chi^2 - 1} = \boxed{-\lambda \pm i \cdot \omega_1} \quad (\text{IV-14})$$

$\equiv \alpha \pm i\beta$

*Des fonctions exponentielles complexes et donc des oscillations...*

Elles induiront ainsi comme solution générale une forme (avec deux cstes à déterminer par C.I.) :

$$\boxed{\zeta(t)} = e^{\alpha t} \cdot [A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)] = \boxed{e^{-\lambda t} \cdot [A \cos(\omega_1 t) + B \sin(\omega_1 t)]} \quad (\text{IV-15})$$

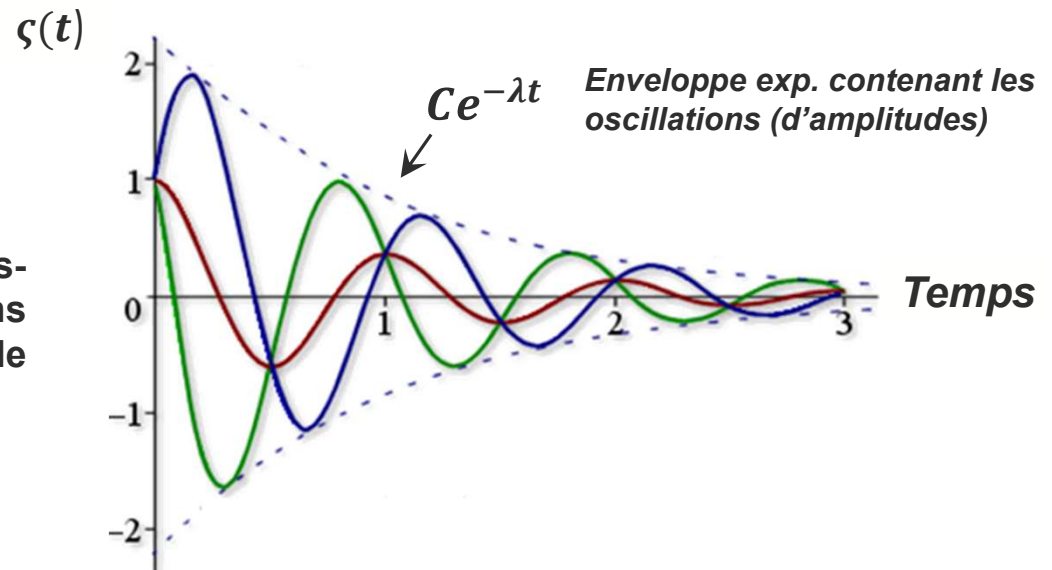
$$= C e^{\alpha t} \cdot \left| \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right. (\beta t + \varphi) = \boxed{C e^{-\lambda t} \cdot \left| \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right. (\omega_1 t + \varphi)} \quad (\text{IV-15bis})$$

✎ A partir de (IV.15 et bis) les calculs de respectivement  $\zeta(t)$  et  $\zeta(\ddot{t})$  sont évidemment possible... puis en fixant des C.I. spécifiques, la détermination des cstes (A et B) ou (C et  $\varphi$ ).

## Graphe de $\zeta(t)$

Régime sous-critique ou amortissement faible  $\Leftrightarrow$

Que des exemples  $\zeta(t)$  de régime sous-critique, à savoir les oscillations (amorties/dissipatif) au sein de l'enveloppe exponentielle. (avec C.I. différentes).



▪ Remarque : Comme dans ce régime nous avons des oscillations puis  $\omega_1 = (\omega_0 \sqrt{1 - \chi^2})$ , il est alors possible de définir la pseudo-période du graphe précédent en :

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \chi^2}} > T_0 \quad (\text{IV-16})$$

Lors de son mouvement, le système le système à cause des effets d'amortissements perd de l'énergie, l'empêchant de terminer son 'cycle', d'où le nom 'pseudo-période'. A ce titre, il est possible de définir le *décroissement logarithmique*  $\delta$  qui représente la décroissance de l'amplitude après une pseudo-période du système (avec IV.15bis, puis  $\chi = \lambda/\omega_0$ ) :



$$\delta = \frac{\zeta(t)}{\zeta(t + T)} = \lambda \cdot T_1 = \frac{2\pi\chi}{\sqrt{1 - \chi^2}} \quad (\text{IV-17})$$

• **Le facteur de qualité  $Q$  :**

De part la forme des solutions  $\zeta(t)$  (et graphe précédent) si l'amplitude est fonction de  $e^{-\lambda t}$  alors l'énergie sera en  $e^{-2\lambda t}$ . Ainsi cette énergie va décroître avec une constante de temps  $\tau = \frac{1}{2\lambda}$  (l'exponentielle étant sans dimension).

On peut définir un facteur de qualité quantifiant dans ce cas l'amortissement ; plus le facteur de qualité sera grand plus l'amortissement sera faible et moins il dissipera d'énergie. Mais attention au terme, on peut demander à un système (de suspension par ex.) d'être efficace et d'avoir justement un fort amortissement et donc un facteur de qualité faible... de manière à ce que l'oscillation ne perde point !

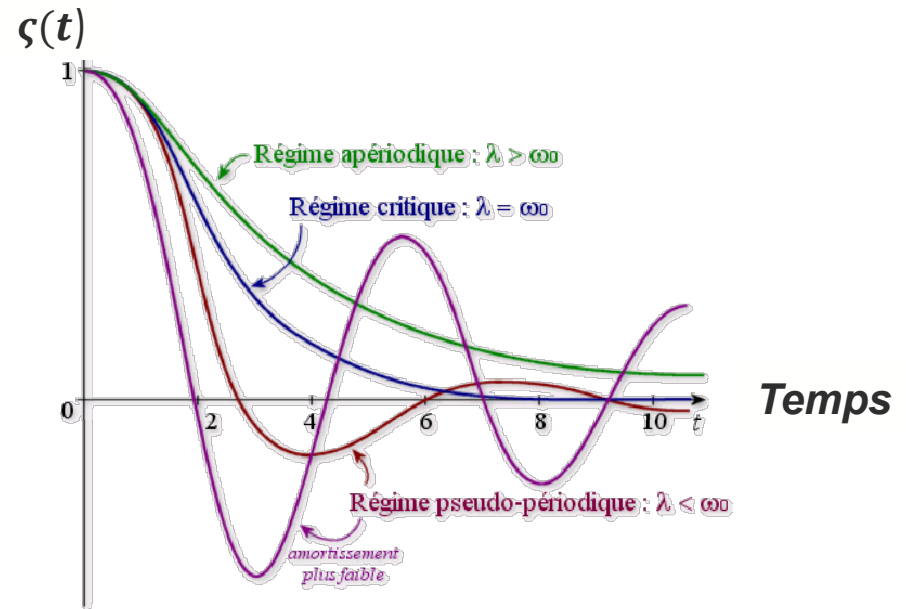
Une des expressions (définition) la plus générale du facteur de qualité est :

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energie totale du système}}{\text{Energie perdue (dissipée) sur une période}} \quad (\text{IV-18})$$

Le calcul pour l'oscillateur harmonique amorti (faible amortissement à partir de (IV.15bis)) donne  $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \omega_0 \tau$ . (IV-19)

## Conclusion : Oscillateurs libres amortis ⇔

Représentation des trois régimes dissipatif (ou amortis) solutions de la dynamique des oscillateurs.



- Energie : montrons que ces systèmes libres (IV.7) sont dissipatifs (ou non conservatifs) ?

$$\ddot{\zeta}(t) + 2\lambda\dot{\zeta}(t) + \omega_0^2\zeta(t) = 0 \text{ en faisant, } \left\{ \times \dot{\zeta}(t) \text{ puis } \dot{\zeta}(t) = \frac{d\zeta(t)}{dt} \text{ et } \zeta(t) = \frac{d\zeta}{dt} \right\} :$$

$$\Leftrightarrow \dot{\zeta}(t) \cdot d\dot{\zeta}(t) + \omega_0^2\zeta(t) \cdot d\zeta(t) = -2\lambda\dot{\zeta}^2(t) \cdot dt$$

Pour le 1<sup>er</sup> système étudié (ressort  $\zeta(t) = Z(t)$ , voir (IV.9)  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  et  $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$ ), en déduire la non conservation de  $E_m$  et donc la dissipation d'énergie :

$$d \left[ \frac{1}{2} m \dot{Z}^2 + \frac{1}{2} k Z^2 \right] = dE_m = \underline{-\alpha \dot{Z}^2 \cdot dt} \neq 0$$

$$= -\delta W_{F_{\text{trainée ou frottement}}} = -\alpha \dot{Z} \cdot dZ$$



• **Application** : On considère un oscillateur libre amorti de type ressort avec corps oscillant. Les paramètres et données relative au problème sont :  $m = 150$  g la masse du corps,  $k = 3.8$  N/m,  $\alpha = 0.6$  kg/s et deux conditions initiales  $x(t=0) = 0$  et  $v(t=0) = v_0 = 25$  cm/s.

Ecrire l'équation du mouvement  $x(t)$  amorti (à savoir l'équation différentielle). Calculer la pulsation et période propre du système. Ecrire l'équation caractéristique associée puis discuter ; calculer la pseudo-pulsation et période.

Ecrire la solution générale du système  $x(t)$ . En appliquant les C.I., donner l'expression de  $x(t)$ .

En déduire la vitesse  $v(t)=\dot{x}(t)$  ; calculer la durée (temps  $t_m$ ) pour l'obtention de la première amplitude (c'est-à-dire le 1<sup>er</sup> maximum de l'oscillation en étant parti de la C.I.  $x_0=0$  ).

+ **Lien Internet pour compléter**

[https://fr.wikiversity.org/wiki/Signaux\\_physiques\\_\(PCSI\)/Oscillateurs\\_amortis:\\_circuit\\_R\\_L\\_C\\_s%C3%A9rie\\_et\\_oscillateur\\_m%C3%A9canique\\_amorti\\_par\\_frottement\\_visqueux](https://fr.wikiversity.org/wiki/Signaux_physiques_(PCSI)/Oscillateurs_amortis:_circuit_R_L_C_s%C3%A9rie_et_oscillateur_m%C3%A9canique_amorti_par_frottement_visqueux)

## IV.4) L'oscillateur harmonique forcé (en régime *permanent*)

L'équation différentielle propre aux *oscillateurs harmoniques forcés*, et donc non libres) présentera un second membre ; ce dernier ne sera pas nul comme en (IV.7). Dans les faits, une force appliquée  $F_{ext} = F_0 \cdot \cos(\Omega t)$  au système fournira un travail moteur et donc de l'énergie pour l'entretenir... La *solution complète de l'équation différentielle sera la somme de la solution générale sans second membre* (étudiée précédemment en régime transitoire) *plus une solution particulière qui sera de la forme du second membre*. Ainsi, le second membre vient imprimer/marker son effet sur la dynamique de tels oscillateurs dits 'forcés'.

$$\ddot{\zeta}(t) + 2\lambda\dot{\zeta}(t) + \omega_0^2\zeta(t) = \frac{F_{ext}}{m} \quad (IV-20)$$

Dans le cas global association *régimes 'transitoire+permanent'* la solution recherchée adopterait une forme  $\zeta(t) = Ce^{-\lambda t} \cdot \left| \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right. (\omega_1 t + \varphi) + A \cdot \left| \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right. (\Omega t + \theta)$  qui n'est certes pas harmonique simple. Au bout d'un temps caractéristique le régime de transition se stoppe et le régime permanent prend le dessus. La force extérieure impose sa pulsation  $\Omega$  à la réponse de l'oscillateur  $\zeta(t)$  en  $A \cdot \cos(\Omega t + \theta)$ , c'est-à-dire déphasé (de  $\theta$  par rapport à l'excitation force, *causalité* oblige).


Nous étudierons ici le *régime permanent* du comportement une fois le régime forcé atteint et installé pour lequel *un régime harmonique sinusoïdal est établi*.

En terme de méthodologie et résolution de (IV.20), l'on cherchera une solution complexe  $\zeta(t) = \tilde{A} \cdot e^{i\Omega t} = A \cdot e^{i(\Omega t + \theta)}$  de l'équation différentielle (IV.20) *en complexe* :  
(IV-21)

$$\ddot{\zeta}(t) + 2\lambda\dot{\zeta}(t) + \omega_0^2\zeta(t) = \frac{F_0}{m} \cdot e^{i\Omega t} \quad \text{(IV-22), équation complexe associée à (IV.20)}$$

Une des méthodes de résolution peut consister à l'insertion de la solution recherchée complexe (IV.21) dans (IV.22). L'utilisation des complexes trouve aussi son efficacité pour éliminer le temps de l'équation et passer en raisonnement 'spectral' (fréquences/pulsations/longueurs d'onde), espace réciproque du domaine temporel. Vos futures méthodes de résolution au-delà de la 1<sup>ère</sup> année du supérieure seront ensuite basées sur l'utilisation de transformées (dites de Fourier, de Laplace, en Z) de l'équation différentielle...

La résolution (IV.21) dans (IV.22) mène alors à :



$$\tilde{A} = A(\Omega) \cdot e^{i\theta} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + i2\lambda\Omega} = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2) - i2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} \quad \text{(IV-23)}$$

L'expression finale permet de bien visualiser dans la fonction de transfert (IV.23) en pulsation la partie réelle et imaginaire soit  $\tilde{A} = \mathcal{Re}(\tilde{A}) + i \mathcal{Im}(\tilde{A})$ . On en déduit ainsi en réponse de l'oscillateur forcé étudié, respectivement son module ou réponse en amplitude  $A(\Omega) = \sqrt{[\mathcal{Re}(\tilde{A})]^2 + [\mathcal{Im}(\tilde{A})]^2}$  puis sa phase (ou déphasage / à l'excitation  $F_{ext}$  :  $tg \theta(\Omega) = \frac{\mathcal{Im}(\tilde{A})}{\mathcal{Re}(\tilde{A})}$ .



Les calculs conduisent à :

$$\begin{cases} A(\Omega) = \frac{F_0}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} \\ \theta(\Omega) = \text{arctg} \left( \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \right) \end{cases} \quad (\text{IV-24})$$

• Etude de la fonction  $A(\Omega)$  :

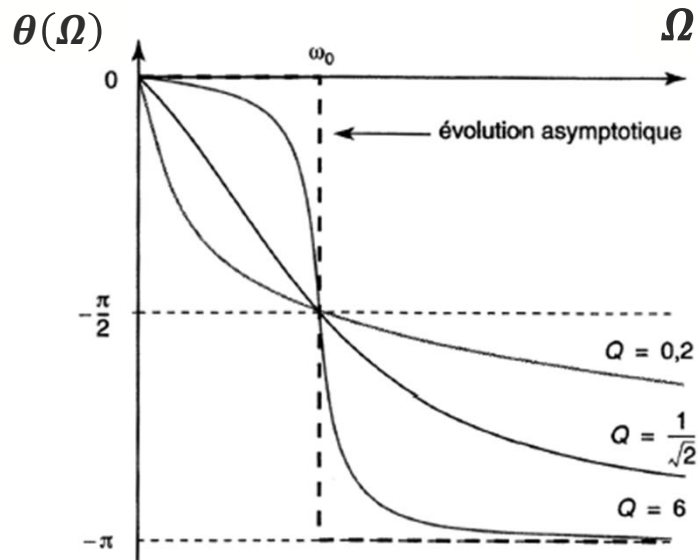
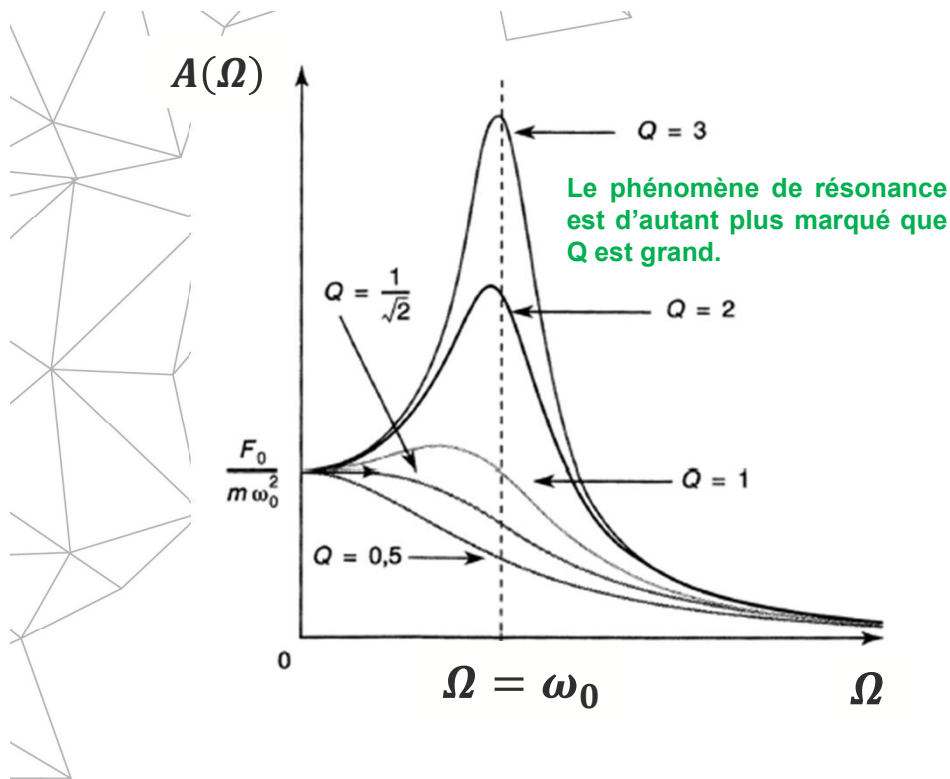
Tout d'abord  $\lim_{\Omega \rightarrow 0} A(\Omega) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$  et  $\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} A(\Omega) = 0$ .

Enfin la recherche du maximum de la courbe  $A(\Omega)$  se fait sur la recherche du minimum du dénominateur soit :  $\frac{d}{d\Omega} [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2]_{|\Omega=\Omega_{res}} = 0$  ; ce qui conduit à :  $\Omega_{res} = (\omega_0^2 - 2\lambda^2)^{1/2}$ . (IV-25)

*Ainsi, plus  $\lambda$  est petit (et plus  $Q$  est grand) plus le pic de résonance est proche de  $\Omega_{res} = \omega_0$ .*

**Il y aura résonance si  $\Omega_{res} > 0$  soit  $\lambda < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ , ce qui se traduit avec (IV.19) ou  $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$  par :  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$**

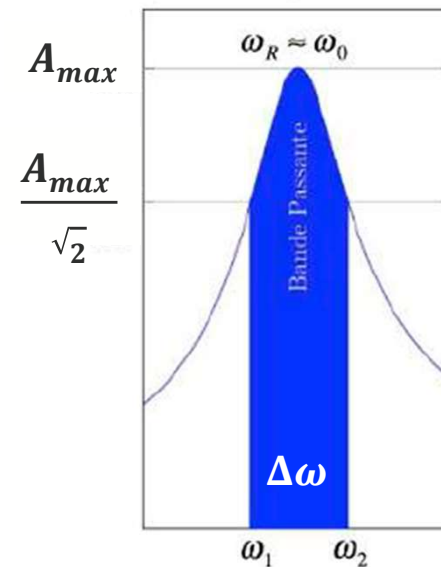
• De même une étude de la fonction  $\theta(\Omega)$  permet de tracer le système (IV.24) complet ci-après.



• Notion de **bande passante**  $B.P. = \Delta\omega$

Elle se calcule à  $-3dB$ , c'est-à-dire à  $\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}$

Remarque :  $-3dB = 10 \cdot \log\left(\frac{A_{max}}{\frac{A_{max}}{\sqrt{2}}}\right)^2 = 20 \cdot \log(\sqrt{2})$



• **Conclusion** : La résonance est un phénomène pouvant ainsi affecter de très nombreux systèmes : mécaniques, électriques, acoustiques, optiques... Tout système pouvant accumuler de l'énergie est donc potentiellement un système résonant. C'est d'ailleurs le cas d'un simple proton (en imagerie résonante 'IRM'), d'une corde (instrument de musique), d'un circuit électrique (émetteur radio), de bâtiments, de ponts... Le phénomène de résonance est ainsi d'une importance en physique des ondes, par exemple pour créer des résonances ou pics de quantification dans le spectre ('peignes de fréquences'), en vue d'une transmission multiplexée...

Cependant en mécanique, ce phénomène représente un réel danger très destructeur pour le système en terme de vibrations et doit être ainsi évité. A titre d'exemples non exhaustifs : une pièce de machine ne devra jamais vibrer à une fréquence proche de sa résonance, de manière à empêcher sa rupture ; de même une machine (son arbre) en rotation mal équilibrée peut fonctionner comme un excitateur. Dans l'histoire, plusieurs ponts se sont d'ailleurs effondrés par résonance de la structure complète.

Voir vidéo pont Tacoma (année 1940, E.U.)

[https://www.youtube.com/watch?v=uhWQ5zr5\\_xc](https://www.youtube.com/watch?v=uhWQ5zr5_xc)

Un autre effet oscillatoire longitudinal instable existe en mécanique des structures avec réservoir et fluide : l'*effet pogo* (jeu bâton sauteur) ; il peut se produire dans les étages à ergols liquides d'un lanceur de fusée, générant des chocs pouvant détruire l'ensemble. Trop de fluctuations de poussée du moteur peuvent engendrer des vibrations de structure et de colonnes du carburant liquide, qui à leur tour percutent l'alimentation du moteur et autres pièces.



# Physique MECANIQUE

(Transparents et Eléments relatif au Cours traité en amphithéâtre)

## ESIR (Cycle Prépa - CUPGE 1A-S1)



— UnivRennes1 —  
[univ-rennes1.fr](http://univ-rennes1.fr)

B. BÊCHE Pr., IETR CNRS - ESIR UR1

[bruno.beche@univ-rennes1.fr](mailto:bruno.beche@univ-rennes1.fr)

<https://www.ietr.fr/bruno-beche>



## Remarques :

Lorsque le symbole  apparaîtra, une démonstration plus conséquente sera nécessaire au tableau et sur votre cahier / feuilles en terme de prise de notes.

Le symbole  mérite une attention particulière.



## CHAPITRE V) MOMENT CINÉTIQUE ET ROTATIONS

- **Moment d'une force, moment cinétique et moment d'inertie, Théorème de transport (ou des axes parallèles, ou théorème de Huygens-Steiner), théorème du moment cinétique, conservation et importance du moment cinétique en physique, loi des aires, énergies associées, puissance.**
- **Mouvements à force centrale newtonienne, nature des trajectoires (états liés ou de diffusion), théorème de Bertrand.**

## V.1) Moment d'une force, couple de forces, moment cinétique, théorème du moment cinétique, conservation et importance du moment cinétique en physique, loi des aires

Nous nous intéresserons dans ce chapitre aux *systèmes en rotation*, et nous verrons qu'une grandeur fondamentale appelé *moment cinétique* jouera un rôle crucial. Un théorème fondamental dit du moment cinétique permettra (tout comme le PFD, avec la même information) d'expliciter la *dynamique de système en rotation* ; en particulier, il permet de faire émerger rapidement une intégrale première du mouvement de systèmes avec forces centrales.

### V.1.1) Moment $\vec{\mathcal{M}}_x(\vec{F})$ d'une force $\vec{F}$ , couple $\vec{\Gamma}_{(\vec{F})}$ de forces

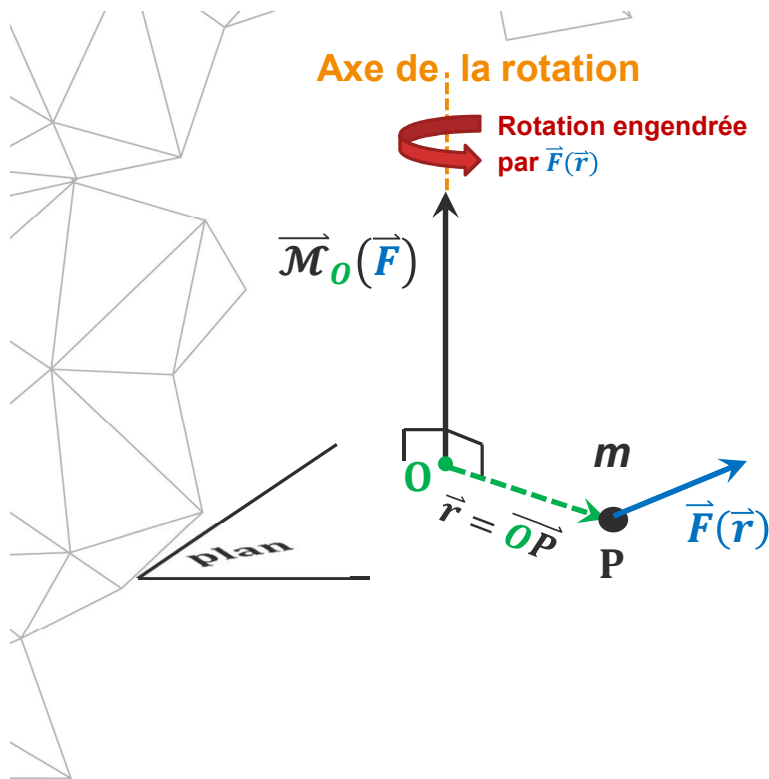
Le concept de moment d'une force *par rapport à un point*, se distinguant de la force appliquée en un point, remonte dans sa formulation à l'étude des leviers par Archimède. Par exemple en mécanique statique, c'est l'étude des moments qui permet de prévoir l'équilibre (ou pas) des bras d'une balance ou l'effet levier d'une articulation. En dynamique, c'est leurs déséquilibres qui va mettre en rotation le corps.

• **Définition** : Soit une particule ou une masse ponctuelle  $m$  soumise à une force  $\vec{F}(\vec{r})$ . Le **moment**  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  **par rapport au point O (référence quelconque)**, de la force  $\vec{F}(\vec{r} = \vec{OP})$  appliquée au point  $P$  sera par définition la grandeur ou pseudo-vecteur :



$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{OP} \wedge \vec{F} \quad (V-1)$$

Unité: la norme du moment s'exprime en N.m.



Ce vecteur  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  à la fois orthogonal à  $\vec{F}(\vec{r})$  et au bipoint / vecteur  $\vec{r} = \vec{OP}$ , est perpendiculaire au plan dans lequel a lieu la rotation que peut provoquer la force ; il est ainsi colinéaire à l'axe de la rotation. Le moment d'une force est donc relié à un sens de rotation, il tend à donner un mouvement de rotation à la particule autour de l'origine  $O$ . La distance  $OP$  peut être appelé 'bras de levier'. Ainsi plus on se place loin de l'axe en exerçant la force (convenablement dirigée), alors plus le moment est grand et plus c'est efficace (ressentir l'ouverture d'une porte proche ou loin des gonds ou encore efficacité pour (dé)-serrer un boulon!).



- **Translation du pivot (formule de P. Varignon, 1654-1722)** : Le moment d'une force dépend du point (avant  $O$ ), par rapport il est calculé. De par la propriété du produit vectoriel par rapport à l'addition, le moment de la force  $\vec{F}(\vec{r})$  calculé à un autre point  $O'$ , s'écrira :

$$\vec{\mathcal{M}}_{O'}(\vec{F}) = \vec{O'P} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) + \vec{O'O} \wedge \vec{F} \quad (V-2)$$

- **Remarque** : Le moment d'une force (toujours appliquée à un point  $P$ ) mais par rapport à un autre axe  $(\Delta)$  orienté différemment, sera la projection simple du moment  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$  sur l'axe  $(\Delta)$ , soit :  $\vec{\mathcal{M}}_{(\Delta)}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_{(\Delta)}$

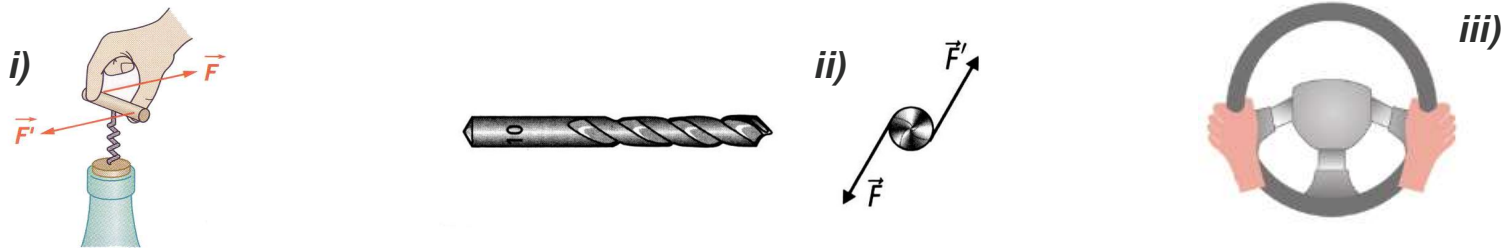


• **Couple  $\vec{\Gamma}_{(\vec{F})}$  de forces :**

Un couple de forces est un ensemble de forces dont la résultante est nulle mais dont *le moment résultant est non nul* (voir (V.1)).

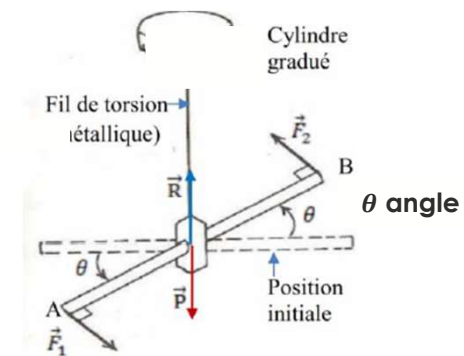
L'action d'un couple de forces tend à mettre en *rotation* le système considéré.

Quelques exemples (application directe de (V.1)) :



i) Pour enfoncer un tire-bouchon on exerce un couple de forces. La valeur commune des forces est  $F = 10 \text{ N}$ . La distance entre les droites d'action est  $d = 6 \text{ cm}$ . calculer le moment du couple. ii) Le couple transmis par l'arbre moteur à un foret a pour moment  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = 10 \text{ N.m}$  ; le diamètre du foret est  $D = 10 \text{ mm}$  . En déduire les forces (de coupe) et exercée par les deux lèvres du foret. iii) Représenter les deux forces du couple sur le schéma de manière à obtenir une rotation du volant.

Dans certains dispositifs, on pourra mentionner le terme de *couple de torsion*  $\vec{\Gamma}_{(\vec{F})} = C. \theta$ , avec  $C$  constante de torsion du fil en  $\text{N.m}$ .



## V.1.2) Moment cinétique $\vec{L}$ et théorème fondamental, loi des aires

Tout d'abord il est possible que vous rencontriez le terme *moment angulaire* dans certains ouvrages pour le *moment cinétique* ; en effet en anglais le terme 'angular momentum' est utilisé, ce qui marque bien que cette grandeur est intimement liée aux propriétés de transformations angulaires. (Nous utiliserons la lettre  $L$  mais  $J$  peut se rencontrer dans certains livres).

• **Définition** : On appelle *moment cinétique*  $\vec{L}_O$  du point matériel  $M$  de masse  $m$  et possédant une quantité de mouvement  $\vec{p}$ , par rapport à un point quelconque  $O$ , la grandeur produit vectorielle suivante (unité  $J.s$  ou  $kg.m^2.s^{-1}$ ) :



$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = \vec{r} \wedge \vec{p} \quad (V-3)$$

De part la propriété de distributivité (comme utiliser en (V.2)), le moment cinétique (V.3) dépend du point par rapport auquel il est calculé et l'on a :

$$\vec{L}_{O'} = \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{p} = \vec{L}_O + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p} \quad (V-4)$$

• **Application** : Le moment cinétique orbital de la particule électron autour d'un atome.

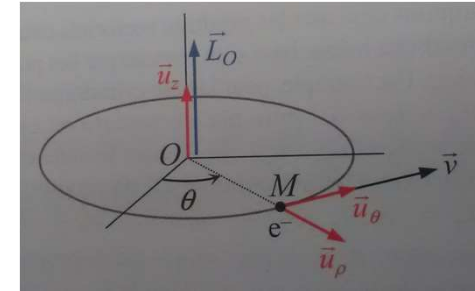
Modèle de N. Bohr, 1885-1962 concernant l'atome d'hydrogène : un électron de charge  $-e = -1.6 \times 10^{-19} C$  et de masse  $m_{e^-} = 9.1 \times 10^{-31} kg$  'tourne' dans son état fondamental sur une orbite circulaire de rayon  $R = 53 pm$  centrée en un point  $O$  où se situe le proton  $p^+$  (de charge  $+e$  et de masse  $m_{p^+} = 1836 \times m_{e^-}$ ).



Exprimer dans un repère cylindrique (voir schéma), l'expression du moment cinétique orbital  $\vec{L}_O$  de l'électron position en  $M$ .

Quelle est son orientation ?

Comment procéderiez-vous pour calculer  $\|\vec{L}_O\|$  une application numérique ? Méthode.



• Réponse : Ecrire la position  $\vec{r}$  et la vitesse  $\vec{v}$  dans le repère cylindrique ;  $\vec{L}_O = m_{e^-} \cdot R^2 \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$  ( $\equiv J_{Oz} \dot{\theta} \cdot \vec{u}_z$ ). (V-5)

Son orientation selon ( $\vec{u}_z$ ) est toujours perpendiculaire au plan du mouvement car la force (de Coulomb) est *centrale* pour ce système  $\vec{F}_{Coulomb}(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-e^2}{R^2} \vec{u}_\rho$ .

L'application numérique de  $\|\vec{L}_O\|$  passe par l'estimation de  $\dot{\theta}$  ; L'utilisation de la 2<sup>d</sup> loi de Newton (PFD) avec  $\vec{F}_{Coulomb}$  et l'expression de l'accélération en cylindrique, (voir (I.7) où  $\dot{\theta}$  est non nulle et constant, avec  $\rho = R$  constant et  $\ddot{\theta}$  nulle) permet de conclure... Numériquement de l'ordre de  $10^{-34} J \cdot s$  (en quantique noté  $1\hbar$ ).

*Remarque* : Tout d'abord en électromagnétisme, à noter que ce seront les déplacements des charges électriques (comme cet électron) qui créeront les champs magnétiques (à savoir leur origine). Pour les particules sub-atomiques, la mécanique (ou physique) quantique permettra de quantifier ceci de manière rigoureuse avec d'autres conceptions. En particulier une notion purement quantique apparaîtra comme le 'spin' de l'électron en plus du moment cinétique orbital.

• *Remarque* : Tout comme le moment d'une force, le moment cinétique qui est aussi un produit vectoriel, son expression par rapport à un autre axe ( $\Delta$ ) orienté différemment, sera aussi la projection simple du moment  $\vec{L}_O$  sur l'axe ( $\Delta$ ), soit :

$$\vec{L}_{(\Delta)} = \vec{L}_O(\vec{F}) \cdot \vec{u}_{(\Delta)}$$

• **Définition :** Le *moment d'inertie* (noté  $I$  ou  $J$  suivant les livres),  $J = \sum_i m_i r_i^2$  est une grandeur physique qui caractérise la géométrie des masses (différentes parties  $m_i$ ) constituant le solide, c'est-à-dire la répartition de la matière en son sein. Il quantifie également la *résistance* à une mise en rotation de ce solide (ou plus généralement à une accélération angulaire), et a pour *dimension*  $M.L^2$  le produit d'une masse et du carré d'une longueur, qui s'exprime en *unité*  $kg.m^2$ .

[C'est l'analogie pour un solide de la masse inertielle qui, elle, mesure la 'résistance' d'un corps soumis à une accélération linéaire].

Dans le cas d'une simple rotation d'une masse autour d'un axe fixe, le moment d'inertie  $J$  (ou  $I$ ) par rapport à cet axe est une grandeur *scalaire* qui apparaît dans les expressions du moment cinétique (V.5) puis de *l'énergie cinétique de rotation* de ce corps :

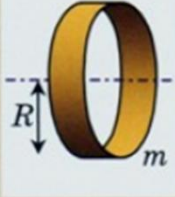
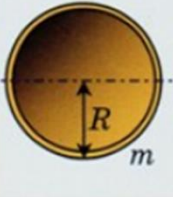
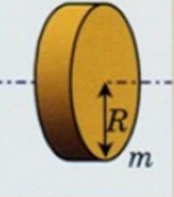
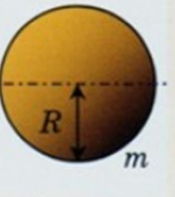
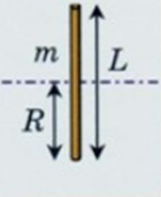
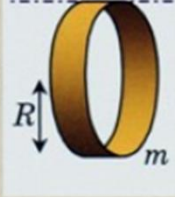

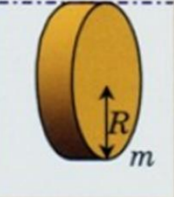
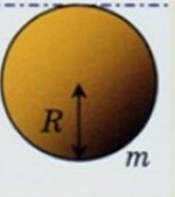
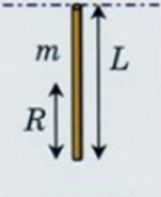
$$\text{!} \quad E_c = \frac{1}{2} J_{Oz} \omega^2 \equiv \frac{L_{Oz}^2}{2J_{Oz}} \quad (V-6)$$

avec,  $\omega = \dot{\theta}$  vitesse angulaire (rotation, *unité en rad/s*)

*Remarque :* Dans l'expression du moment cinétique (V.5) en coordonnées cylindriques, le terme  $J_{Oz}$  correspondait au moment d'inertie par rapport à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  : pour un solide  $L_{Oz} = \sum_i L_{Ozi} = (\sum_i m_i \rho^2) \cdot \dot{\theta} = \sum_i J_{Ozi} \cdot \dot{\theta}$

+ analogie expression  $E_c$  en mouvement translation  $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ .

Exemples : moments d'inertie ( ici noté  $I \equiv J$  ) de quelques solides / à  $\Delta$  (\*)

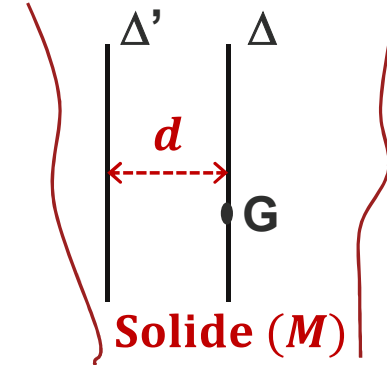
	anneau	coquille	cylindre plein (disque)	sphère pleine	tige mince
$\Delta$	 $I_{CM} = mR^2$	 $I_{CM} = \frac{2}{3} mR^2$	 $I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2$	 $I_{CM} = \frac{2}{5} mR^2$	 $I_{CM} = \frac{1}{3} mR^2$ $= \frac{1}{12} mL^2$
$\Delta'$	 $I = 2mR^2$	 $I = \frac{5}{3} mR^2$	 $I = \frac{3}{2} mR^2$	 $I = \frac{7}{5} mR^2$	 $I = \frac{4}{3} mR^2$ $= \frac{1}{3} mL^2$

Voir Théorème de transport, ou théorème des axes parallèles, ou théorème de Huygens-Steiner suivant...

• **Théorème de transport, ou théorème des axes parallèles, ou théorème de Huygens-Steiner :**

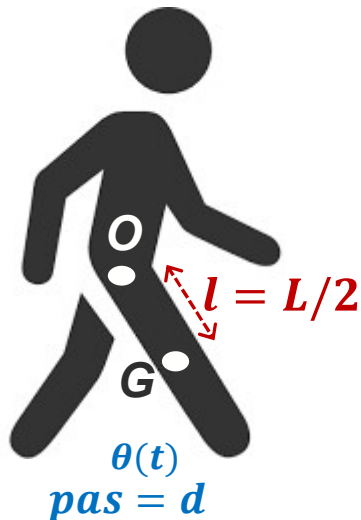
Pour un solide de masse  $M$ , il existe une relation entre les moments d'inertie  $J_{\Delta}$  et  $J_{\Delta'}$  par rapport à deux axes  $\Delta$  et  $\Delta'$  parallèles distants de  $d$ , dont l'un ( $\Delta$ ) passe par le centre de masse  $G$  :

$$J_{\Delta'} = J_{\Delta} + Md^2 \quad (V-7)$$



• **Application :** moment d'inertie et vitesse de marche (humain)

La jambe d'un humain est assimilable à une 'simple' tige 'pendulaire' (voir moment d'inertie  $I$ ) et oscillante depuis le point  $O$  de longueur  $L = 0,90 \text{ m}$  (et de masse  $m$ , barycentre  $G$  à  $L/2$  de  $O$ ).



Son mouvement d'oscillateur harmonique simple est géré par l'équation différentielle suivante :  $\ddot{\theta}(t) + \frac{mgl}{J_{Oz}} \theta(t) = 0$  ( $l = L/2$ ).

Evaluer la vitesse d'un marcheur en considérant que le balancement naturel d'une jambe, à chaque pas, est la demi-période de ce 'pendule' ?

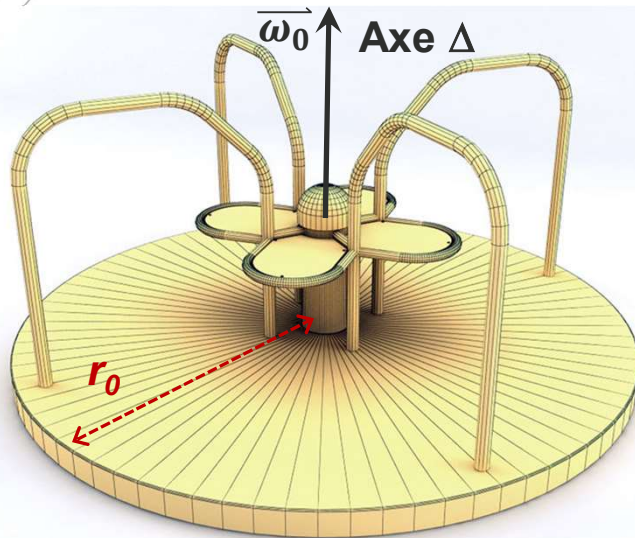
Réponse : La période d'un pas d'une jambe est la demi-période pendulaire de la jambe associée à une 'tige' ( $J$  ou  $I = \frac{1}{3}mL^2$ ) soit

$$\frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0} \text{ avec } \omega_0^2 \text{ dans équation différentielle. Puis } v = \frac{d}{\left(\frac{T_0}{2}\right)} = \dots$$

(estimer  $d$ )...  $\Rightarrow$  A.N. : quelques km/h.

• **Application** : moment d'inertie et énergie cinétique de rotation

Une personne de masse  $m$  est localisé au bord d'une plateforme manège (ou disque) de rayon  $r_0$  et de moment d'inertie  $J_{/\Delta}$  (ou  $I$ , que l'on ne cherchera pas à calculer ici) qui tourne sans frottement autour de son axe vertical  $\Delta$  avec la vitesse angulaire  $\overline{\omega}_0$ . Le **moment cinétique** ('angulaire') du système 'personne + manège' sera conservé.



La personne marche vers l'axe  $\Delta$  et se positionne (s'arrête) à une distance  $r_1 (< r_0)$ . Quelle est la **vitesse angulaire**  $\|\overline{\omega}_1\|$  de l'ensemble manège ?

En déduire la **variation d'énergie cinétique** (de rotation) de l'ensemble 'personne + manège' ? D'où provient cette variation ?

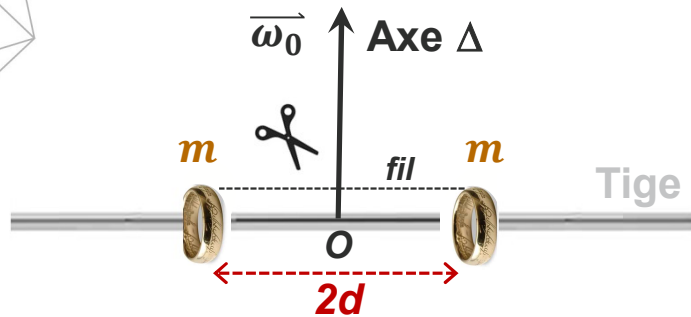
• **Réponse** : les moments d'inerties se notent  $(J_{/\Delta} + mr_0^2)$  suivant les deux positions  $r_0$  et  $r_1$ . De plus le moment cinétique  $L \equiv J\omega = (J_{/\Delta} + mr_1^2)\omega_1$  se conservera soit :

$$\omega_1 = \frac{(J_{/\Delta} + mr_0^2)}{(J_{/\Delta} + mr_1^2)} \omega_0 > \omega_0. \text{ Avec } E_c = \frac{1}{2}J\omega^2, \text{ alors :} \quad (\text{avec l'expression de } \omega_1)$$

$\Delta E_c = E_{c1} - E_{c0} = \frac{1}{2} \{ (J_{/\Delta} + mr_1^2)\omega_1^2 - (J_{/\Delta} + mr_0^2)\omega_0^2 \} = E_{c0} \cdot \frac{m(r_0^2 - r_1^2)}{J_{/\Delta} + mr_1^2}$  ; Cette différence provient, d'après le théorème de l' $E_c$ , au travail  $W$  d'une force, ici la force radiale  $F_r = -m\omega^2 r$  à laquelle est soumise la personne.

• **Application** : moment d'inertie, énergie cinétique totale (de rotation et translation)

Une tige horizontale homogène de moment d'inertie  $J_{/\Delta}$  (ou  $I$ , que l'on ne cherchera pas à calculer ici) tourne sans frottement autour de son axe vertical  $\Delta$  passant par son milieu  $O$  et avec la vitesse angulaire *initialement* de  $\vec{\omega}_0$ . Sur cette tige peuvent coulisser sans frottement deux anneaux de masses  $m$  (et de dimensions négligeables) *initialement* reliés par un fil et qui se positionne à une distance  $d$  de l'axe (ou de  $O$ ). Le *moment cinétique* du système 'tige + anneaux' sera *conservé*.



Le fil est coupé à un instant. Quelle est la *vitesse angulaire*  $\|\vec{\omega}_1\|$  de l'ensemble ?  
En déduire à cet instant la vitesse de glissement des anneaux sur la tige ?

• **Réponse** : les moments d'inerties se notent  $(J_{/\Delta} + 2md^2)$ . A l'instant suivant le fil coupé, la distance entre les deux anneaux sera  $2l$  ( $>2d$ ). De plus le moment cinétique

$L \equiv J\omega = \left( J_{/\Delta} + 2m \left( \frac{d}{l} \right)^2 \right) \omega_0$  se conservera soit :  $\omega_1 = \frac{J_0}{J_1} \omega_0 = \frac{(J_{/\Delta} + 2md^2)}{(J_{/\Delta} + 2ml^2)} \omega_0 > \omega_0$ . Avec

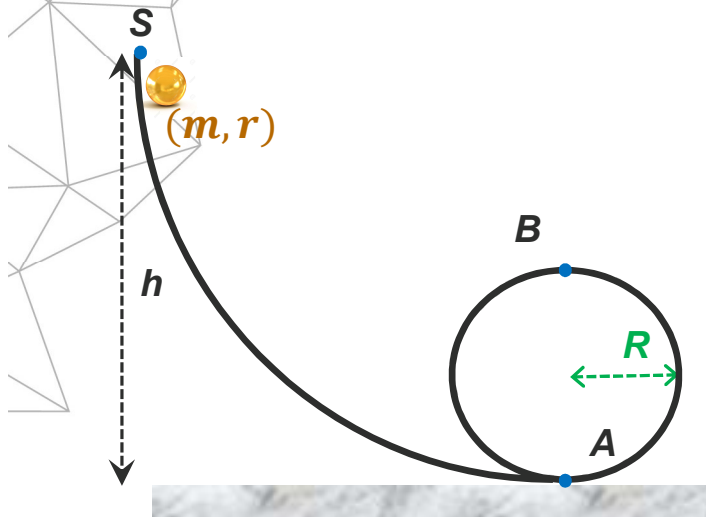
$E_{c\ total} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$ , alors la conservation de l'énergie donne (pas de  $E_p$  considéré que de  $E_c$ ) :  $E_{cf} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = E_{ci} = \frac{1}{2}J_0\omega_0^2$  ; soit en résolvant :

$$v^2 = J_0\omega_0^2 \cdot \frac{(l^2 - d^2)}{(1 + 2ml^2)}$$



• **Application** : moment d'inertie, énergie cinétique totale (de rotation et translation), énergie potentielle, énergie mécanique totale

On considère un dispositif de 'looping' ou boucle verticale de rayon  $R$ , associée à une rampe de lancement dont le sommet  $S$  est situé à une hauteur  $h$  du sol (voir schéma). Une bille, de masse  $m$  et de rayon  $r$ , est lâchée puis roule (sans glisser) depuis ce sommet et sans aucun frottement sur la rampe.



Exprimer la vitesse  $\|\vec{v}_A\|$  de la bille au point A au niveau du sol (et entrée de la boucle). Donner l'expression du *moment d'inertie*  $J$  (ou  $I$ ) de la bille (par rapport à son axe central) et recalculer  $\|\vec{v}_A\|$ .

A.N. :  $h = 45 \text{ cm}$ .

La bille rentre ensuite dans la partie boucle verticale pour un 'looping'. Déterminer l'expression de la vitesse  $\|\vec{v}_B\|$  de la bille arrivée au sommet  $B$  de la boucle. A.N. :  $R = 20 \text{ cm}$ .

Que se passera t'il si le rayon de la boucle est 'trop grand' ?

• **Réponse** : Conservation énergie mécanique totale car pas de frottement, soit  $mgh = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$  avec  $\omega = \frac{v_A}{r}$  (pas de glissement), soit après simplification :  $v_A^2 = \frac{2gh}{(1 + \frac{J}{mr^2})}$  ; puis en utilisant  $J = \frac{2}{5}mr^2$  ; ,  $v_A = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 2.51 \text{ m/s}$ . En appliquant encore

la conservation de  $E_{m\text{-totale}}$  (car pas de frottement)...  $v_B = \sqrt{\frac{10}{7}g(h - 2R)} = 1.87 \text{ m/s}$ .

## • Théorème du moment cinétique

• Ce théorème fondamental établit un lien entre les deux définitions moment d'une force (V.1) puis moment cinétique (V.3) ; la dérivée temporelle du moment cinétique du solide (par rapport à son axe de rotation) est égale à la somme des moments des forces extérieures exercées sur le solide :

$$\text{!} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) \quad (\equiv \sum_i \vec{r} \wedge \vec{F}_i) \quad (\text{V-8})$$

• *Démonstration* : Dériver (opérateur d/dt) la définition (V.3) de  $\vec{L}_O$ , détecter le PFD puis conclure avec (V.3).

• *Remarque* : Comme d'après (V.5)  $\vec{L}_O = J_{Ow}\dot{\theta} \cdot \vec{u}_w$  alors d'après (V.8) :  $J_{Ow}\ddot{\theta} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i)$ . Analogie fondamental avec PFD...

• *Propriété* : Si la résultante de tous les moments des forces est nulle dans (V.8), alors le moment cinétique se conserve !  $\vec{L}_O \text{ cst}$ . (V-9)

• *Propriété* Si la force (résultante) est centrale c'est-à-dire  $\vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \vec{u}_r$  dirigée selon  $\vec{r}$  (correspondant à une énergie potentielle fonction  $E_p(\vec{r})$ ), alors  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r} \wedge$

!  $F(r) \cdot \vec{u}_r = \vec{0}$  et inversement  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$  (la conservation du moment cinétique) sera une caractéristique de force centrale agissant sur le solide. (V-9bis)

• **Loi des aires (ou 2<sup>d</sup> loi de Kepler)**

• Cette loi a été découverte par J. Kepler dans la cadre des mouvements des planètes. Elle se déduit de la conservation du moment cinétique précédente (V.9 et bis).

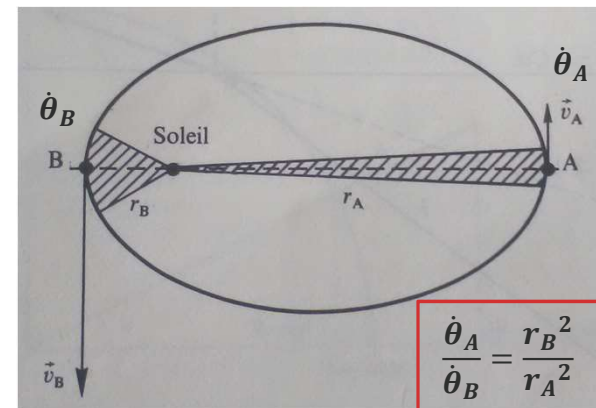
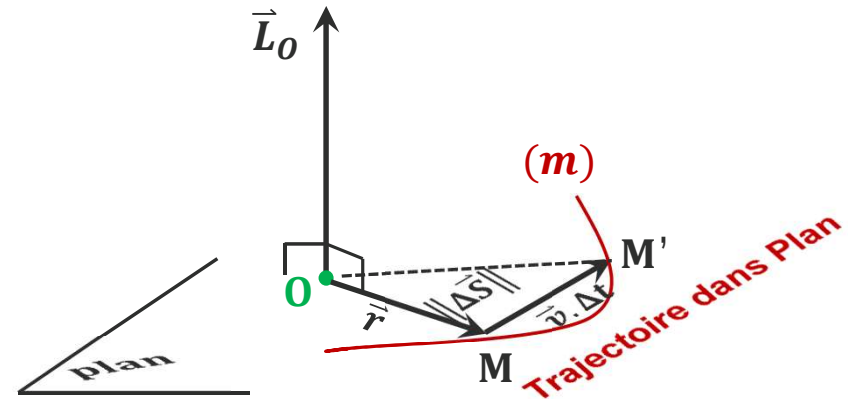
D'après le schéma, l'aire  $\Delta S$  du triangle [OMM'] se note  $\|\Delta\vec{S}\| = \frac{1}{2} \|\vec{r} \wedge \vec{v} \cdot \Delta t\|$ , à savoir la moitié du parallélogramme avec la propriété du produit vectoriel (avec  $\Delta\vec{S}$  notion de surface orientée).

• Avec  $\Delta t \rightarrow 0$ , alors l'expression de l'aire par unité de temps se note alors :

$$\text{Vitesse aéroilaire} \quad \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2m} \|\vec{r} \wedge m\vec{v}\| = \frac{\|\vec{L}\|}{2m} \quad (V-11)$$

Cette relation est générale, mais lorsque le moment cinétique est conservé (V.9 et bis) et constant, alors  $\frac{dS}{dt}$  est en faite indépendant du temps (ou loi des aires).

• **Application** au mouvement des planètes (Soleil en un foyer de la trajectoire elliptique). Les aires schéma et (V.10)  $\Rightarrow \frac{1}{2} r_A v_A \cdot \Delta t$  sont égales (durant même  $\Delta t$ ) ; ainsi il existe une différence entre les deux vitesses (différence légère si ellipse peu aplatie (=quasi-cercle) ; concernant la distance Terre-Soleil les deux extrêmes  $r_B$  et  $r_A$  sont respectivement 147.1 et 152.1 millions de km.



- **Remarque** : Ainsi, toute contraction du mouvement ( $r$  plus petit) s'accompagne d'une augmentation de la vitesse angulaire de rotation. Citer un autre exemple !

Dans ce cas, l'expression (V.12) ou *loi des aires* font que la quantité  $Cste = r^2 \dot{\theta} \equiv \frac{\|\vec{L}_0\|}{m}$  ( $m^2/s$ ) est une constante du mouvement dénommée constante des aires. Enfin l'aire balayée par unité de temps, voir (V.11)  $\frac{dS}{dt} = \frac{Cste}{2}$  est appelée *vitesse aréolaire*.

$$\frac{\dot{\theta}_A}{\dot{\theta}_B} = \frac{r_B^2}{r_A^2} \quad (V-12)$$

### V.1.3) Puissance et principes en énergie

Nous savons déjà qu'à l'intérieur d'un solide qui ne se 'déforme pas' la résultante des interactions intérieures et puissance intérieure associée est nulle.

#### • Puissance $\mathcal{P}$ des Forces extérieures (exercées sur le solide en rotation)

Cette puissance  $\mathcal{P}$  associée à une force extérieure  $\vec{F}_{ext}$ , exercée en un point du solide en rotation autour d'un axe  $[O, \vec{u}]$ , présentant une moment de force  $\vec{\mathcal{M}}_{[O, \vec{u}]}(\vec{F}_{ext})$ , s'exprime par :

$$\mathcal{P}(\vec{F}_{ext}) = \vec{\mathcal{M}}_{[O, \vec{u}]}(\vec{F}_{ext}) \cdot \dot{\theta} \quad (V-13)$$



- **Démonstration** (en cylindrique): Chapitre III,  $\mathcal{P} = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}$ , avec  $\|\vec{v}\| = \rho \cdot \dot{\theta}$ , et donc  $\mathcal{P} = \rho \cdot \dot{\theta} \cdot F_{ext}$  est bien une expression (V.12) avec (V.1) le moment d'une force ayant les dimensions d'une distance fois une force.

## · Principes en énergie

D'après (V.6), l'énergie cinétique se note  $E_c = \frac{1}{2}J\omega^2$ . Enfin, les théorèmes en énergie du chapitre III sont valables et se généralisent, comme le théorème de l'énergie cinétique (à savoir variation de celle-ci est égale à la somme des travaux des forces extérieures). Enfin la notion d'énergie potentielle effective émergera dans la paragraphe suivant très naturellement par l'étude des mouvements et l'utilisation de de la fonction énergie mécanique totale...

## V.2) Mouvements à force centrale newtonienne par principe énergétique, énergie potentielle effective, nature des trajectoires (états liés ou de diffusion), théorème de Bertrand.

Bien évidemment, comme nous l'avons déjà étudié aux Chapitres II et III, l'interaction gravitationnelle est une *force centrale conservative* avec toutes les propriétés mathématiques qui en découlent (Chapitre III). De plus, avec les notions de conservation du moment cinétique et ce Chapitre V, nous savons que dorénavant d'autres propriétés viennent se greffer, comme cette loi des aires (ou notion de vitesse aréolaire constante) ou encore la planéité du mouvement de la planète soumis à la force centrale gravifique et la direction du moment cinétique  $\vec{L}$  perpendiculaire au dit plan. J. Kepler en déduit d'ailleurs que de telles trajectoires sont des *ellipses* de grand axe noté  $2a$  (de la famille plus générale des *coniques*). L'ensemble représente globalement les lois de Kepler, dont la 3<sup>ème</sup> portant sur l'existence et la particularité du rapport constant  $\frac{T^2}{a^3}$  dans de tels mouvements.

## V.2.1) Mouvements à force centrale newtonienne par principe énergétique, énergie potentielle effective, nature des trajectoires (états liés ou de diffusion)

• Lors de l'étude du mouvement, nous allons introduire un concept un peu abstrait, **d'énergie potentielle effective**  $E_{p\text{ eff } \vec{L}}(\vec{r})$ , mais cependant fort utile pour les problèmes avec force centrale. L'étude de l'équation de la trajectoire se fait dans un plan (ainsi on peut prendre  $\theta=0$  en coordonnées sphériques et je garde  $\forall r \in [0 + \infty[$  et  $\varphi \in [0 2\pi[$ , ou encore plus simple en planaire je choisis tout simplement les coordonnées polaires  $\rho$  et  $\theta$ ).

• **Energie mécanique totale** : En coordonnées polaires, les expressions de la vitesse (I.9) puis du moment cinétique (V.5)  $L = m \cdot \rho^2 \dot{\theta}$  (lien  $\rho$  et  $\theta$ ), permet d'écrire l'énergie mécanique totale associée à ces problèmes de force centrale (et 'corps en rotation autour de') :

$$E_{m\text{ totale}} = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + E_{p\text{ eff } \vec{L}}(\rho) \quad (\text{V-14})$$

avec,  $E_{p\text{ eff } \vec{L}}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} + E_p(\rho)$

On sait déjà de plus que la force d'interaction gravitationnelle (Newton) *dérive d'une énergie potentielle* (III.4) proprement dite et de la forme  $E_p(\rho) = -\frac{GMm}{\rho} = -\frac{k}{\rho}$  (avec condition  $E_p(\rho \rightarrow +\infty) = 0$ ).

C'est en fait la contribution de la vitesse sur  $\vec{u}_\theta$  en  $\rho\dot{\theta}$  et donc la partie de l'énergie cinétique en  $\rho^2\dot{\theta}^2$  qui fait apparaître le terme nouveau  $\frac{L^2}{2m\rho^2}$  s'ajoutant et s'associant au final à l'énergie potentielle proprement dite car fonction de  $\rho$ . Le terme d'énergie potentielle effectif tient donc aussi compte de la rotation du corps (planètes, satellites...). On parle de *barrière centrifuge*  $\frac{L^2}{2m\rho^2}$ , dont la force centrifuge associée empêche le corps d'atteindre l'origine ou foyer de l'ellipse).

• **Diagramme en énergie, trajectoire et nature des mouvements :**

• Dans ce cas, la fonction potentielle globale a étudiée (puit de potentiel) est donc de la forme ( $k = G.M.m$ ):

$$E_{p\text{ eff\_}\bar{L}}(\rho) = \frac{L^2}{2m\rho^2} - \frac{k}{\rho} \quad (V-15)$$

Son tracé (ou étude) mène au graphe potentiel suivant :



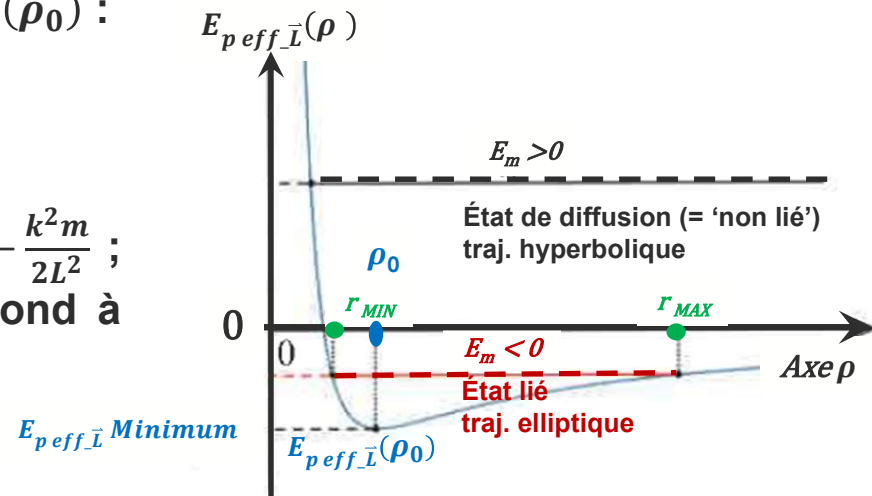
Calcul de  $\rho_0$  à partir de (V-15) puis de  $E_{p\text{ eff\_}\bar{L}}(\rho_0)$  :

$$\frac{dE_{p\text{ eff\_}\bar{L}}(\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = \dots \Rightarrow \rho_0 = \frac{L^2}{k.m}$$

Soit, un minimum d'énergie,  $E_{p\text{ eff\_}\bar{L}}(\rho_0) = -\frac{k^2 m}{2L^2}$  ; on peut montrer que ce minimum correspond à une trajectoire de type circulaire.

**Discussion diagramme**

(états diff., lié, limites du mouvement  $r_{MIN} < r < r_{MAX}$  ; remarque :  $E_m = 0$ , Etat de diffusion, traj. parabolique)



- **Méthode générale pour le calcul des trajectoires** : il est possible d'utiliser la formulation intégrale ou équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre (III.10) avec cette fois l'énergie potentielle effective globale (V.14) et même la programmer !

$$\dot{\rho}(t) = \frac{d\rho(t)}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} [E_m - E_{p\,eff\_L}(\rho)]} \quad (V-16)$$

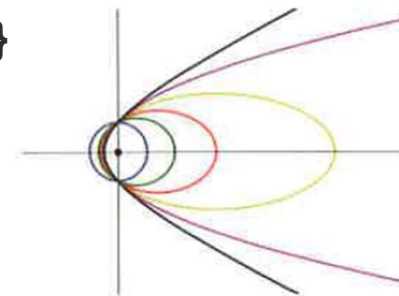
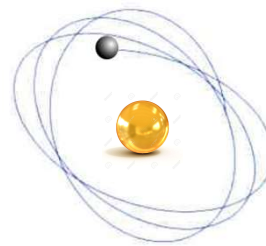
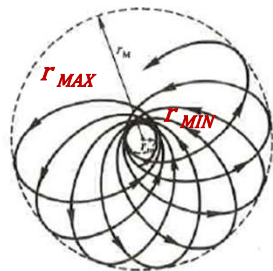
Une fois  $\rho(t)$  résolu par intégration, il reste à déterminer  $\theta(t)$  grâce à la relation (V.5)  $L = m \cdot \rho^2(t) \dot{\theta}(t)$  soit :  $\dot{\theta}(t) = \frac{L}{m\rho^2(t)}$ . L'équation de la trajectoire générale s'obtient en éliminant le temps dans les deux relations précédentes :

$$\boxed{\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta} = \frac{\rho^2}{L} \sqrt{2m [E_m - E_{p\,eff\_L}(\rho)]}} \quad (V-17)$$

L'intégration de (V.17) donnera les trajectoires  $\rho(\theta)$ .

Famille des coniques :

{ellipses (dont cercles excentricité = 0), paraboles, hyperboles}





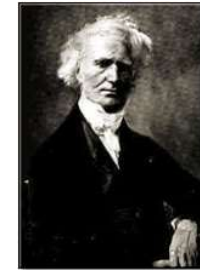


• Calcul analytique de la trajectoire :

• Tout d'abord dans la cadre de ces mouvements avec force centrale, la loi de aires fixe avec nos notations précédentes en polaire (V.5 et V.12) :  $Cste = \rho^2 \dot{\theta} \equiv \frac{L}{m}$

• Calcul des énergies :

Formule de J. P. M. Binet (1786-1856) et écriture de la vitesse dans ce cadre :  
L'expression de la vitesse en polaire (I.9) nécessite  $\dot{\rho}(t)\vec{u}_\rho + \rho(t)\dot{\theta}(t)\vec{u}_\theta$  et donc l'expression de  $\dot{\rho}$  en plus de la loi des aires précédentes liant  $\rho$  et  $\dot{\theta}$ .



Soit :  $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cdot \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{L}{m} \frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} = -\frac{L}{m} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho} \right)$  ce qui fixe pour la vitesse :

$$\vec{v} = \frac{L}{m} \left[ -\frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{\rho} \right) \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \vec{u}_\theta \right] \quad (V-18)$$

On utilise le *changement de variable*  $\frac{1}{\rho(\theta)} = \xi(\theta)$  de manière à obtenir l'équation polaire de la trajectoire : l'écriture de  $\vec{v}$  en  $\xi$  fixe ( $\vec{v} \cdot \vec{v}$ )  $\Rightarrow v^2 = \frac{L^2}{m^2} \left[ \left( \frac{d\xi}{d\theta} \right)^2 + \xi^2 \right]$ , ce qui permet d'écrire l' $E_c$  puis l'énergie mécanique totale  $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k}{\rho} =$  (avec V.18) :

$$E_m = \frac{L^2}{2m} \left[ \xi^2 + \left( \frac{d\xi}{d\theta} \right)^2 \right] - k\xi \quad (V-19)$$

• La dérivé de  $\frac{d}{d\theta}$  (V.19) par rapport à  $\theta$  nous fixe comme dynamique du système une équation différentielle du 2<sup>d</sup> ordre à coefficients constants et second membre :

$$\frac{L^2}{2m} \left[ 2\xi \frac{d\xi}{d\theta} + 2 \left( \frac{d\xi}{d\theta} \right) \left( \frac{d^2\xi}{d\theta^2} \right) \right] - k \frac{d\xi}{d\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{km}{L^2}} \quad (\text{V-20})$$

On montre que la solution générale  $\xi(\theta)$  de (V.20) qui s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène (sans second membre) + une solution particulière de la 'forme' du second membre :

$$\xi(\theta) = A \cdot \cos(\theta - \theta_0) + \frac{km}{L^2} \quad (\text{V-21})$$

Avec la C.I.  $\theta_0 = 0$ , on obtient par changement de variable inverse :

$$\boxed{\rho(\theta)} = \frac{1}{\xi(\theta)} = \frac{1}{A \cos\theta + \frac{km}{L^2}} = \boxed{\frac{\alpha}{1 + e \cos\theta}} \quad (\text{V-22})$$

$$\text{avec, l'excentricité } e = A\alpha \quad \text{et } \alpha = \frac{L^2}{km}$$

L'équation (V.22) est l'équation bien connue d'une conique en coordonnées polaires !

Suivant les valeurs de l'excentricité  $e$  (soit  $e=0$  ;  $0 < e < 1$  ;  $e=1$  et  $e > 1$ ) les trajectoires seront respectivement les équations d'un cercle, d'une ellipse, d'une parabole et d'une hyperbole.

+ Suggestion lecture, voir sous Moodle [Quelques mathématiques des coniques\\_chap5.pdf](#)

• Expression de l'énergie  $E_m$  en fonction des paramètres de la courbe ou trajectoire :

En reprenant l'expression de l'énergie mécanique totale (V.19) puis en insérant la solution  $\xi(\theta)$  inverse de (V.22),  $\xi(\theta) = \frac{1}{\rho(\theta)} = \frac{1+e \cos\theta}{\alpha}$ , avec de plus  $\frac{L^2}{2m} = \frac{k\alpha}{2}$ , les calculs de  $E_m$  fonction de  $\alpha$  et  $e$ , donnent alors :

$$E_m = \frac{k}{2\alpha} (e^2 - 1) \quad (\text{V-23})$$

avec,  $e$  excentricité de la conique et  $\frac{k}{2\alpha} = \frac{k^2 m}{2L^2} = -E_{p \text{ eff } \bar{L}}$  (*minimum* à  $\rho_0$ )



1 U.A. =  $\frac{1}{2}$  grand axe de l'orbite de la Terre  
 $\simeq 1,49 \times 10^{11}$  m. (U.A.=Unité Astronomique)

Planète	1/2 grand axe (U.A.)	Période (année)	Excentricité	masse/ $m_s$
Mercure	0,387	0,24	0,21	$1,7 \times 10^{-7}$
Vénus	0,723	0,61	0,007	$2,5 \times 10^{-6}$
Terre	1	1	0,017	$3 \times 10^{-6}$
Mars	1,52	1,87	0,09	$3,2 \times 10^{-7}$
Jupiter	5,2	11,7	0,05	$9,5 \times 10^{-4}$
Saturne	9,5	29,4	0,05	$2,9 \times 10^{-4}$

## V.2.2) Remarque : Théorème de Bertrand (1822-1900)

Enoncé : « Il n'y a que deux types de forces centrales conservatives pour lesquels les états liés sont fermés (périodiques) : la force centrale newtonienne  $f \equiv -k/r^2$  avec trajectoires elliptiques dont un foyer sera l'origine, puis une force élastique isotrope  $f \equiv -k.r$  avec des orbites toujours elliptiques mais centrées en origine  $O$  »





• **Application** : Expansion de l'Univers, énergie totale, potentielle et gravitation

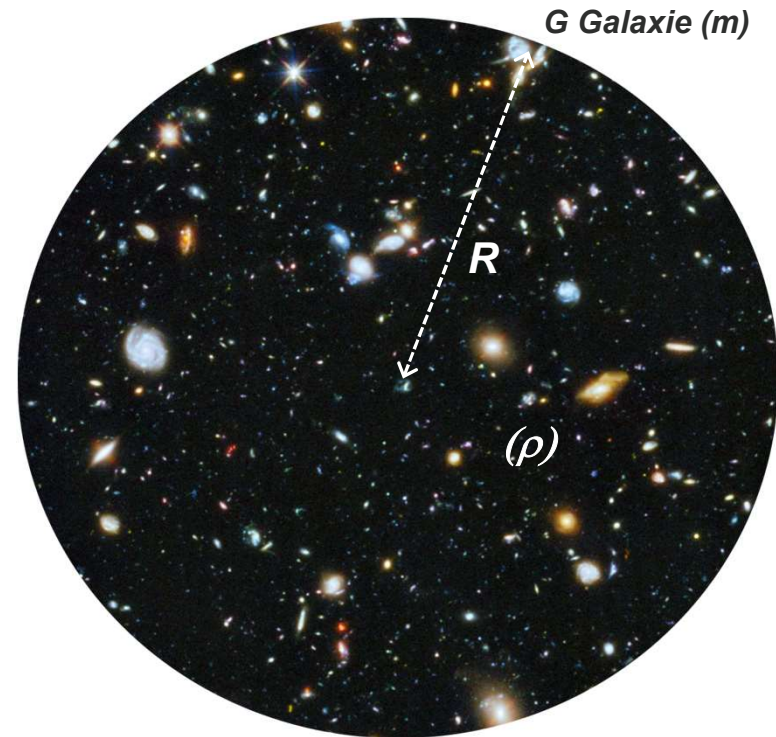
Nous savons que les galaxies s'éloignent les une des autres (ces dernières années cette expansion semble s'accélérer) avec une vitesse  $v = H.R$  proportionnelle à leur distance  $R$ , où  $H$  est la constante de Hubble (inverse d'un temps, voir [https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante\\_de\\_Hubble](https://fr.wikipedia.org/wiki/Constante_de_Hubble)). Supposons que les galaxies sont réparties quasi-uniformément dans ce modèle simplifié d'Univers. Considérons une sphère de rayon  $R$ , contenant la matière sous toutes ses formes et donc les galaxies aussi, soit  $\rho$  la masse volumique moyenne de l'Univers.

Considérons une galaxie  $G$  de masse  $m$  située en périphérie de la dite sphère. Son énergie potentielle  $E_p$  va dépendre uniquement de toute la masse  $M$  contenue à l'intérieur de la sphère.

Ecrire l'expression de cette énergie potentielle ainsi que l'énergie mécanique totale  $E_m$ .

Suivant si  $E_m > 0$  ou bien  $< 0$ , l'Univers sera en phase d'expansion ou bien de contraction.

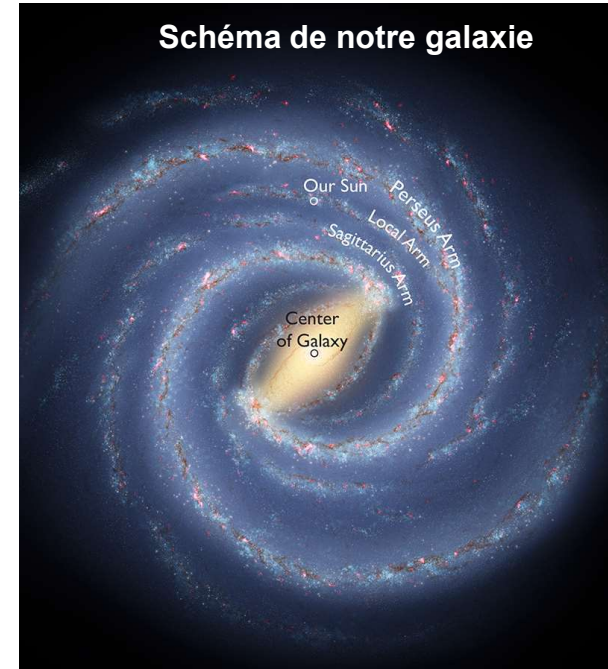
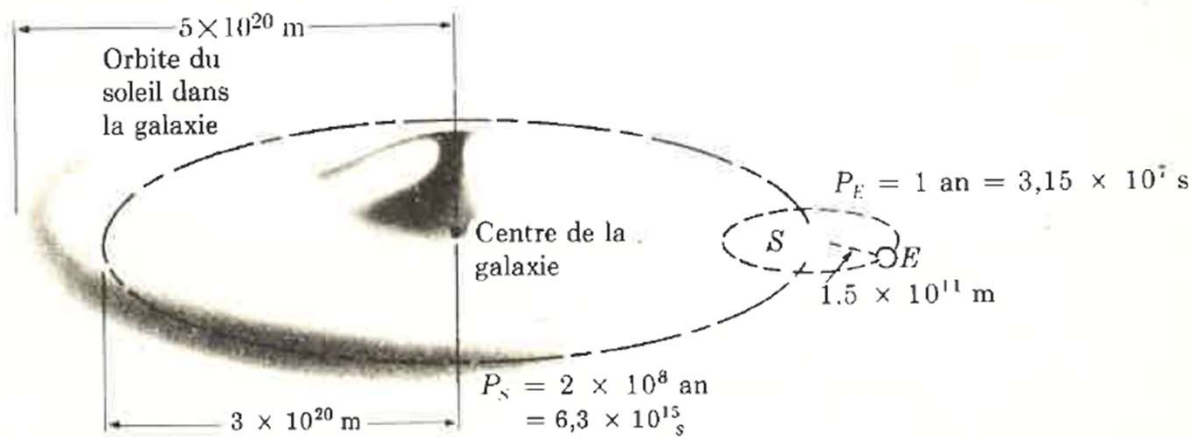
Exprimer la densité critique  $\rho_c$  qui correspond à la frontière de ces deux phases différentes.



• **Réponse** :  $E_p(r) = -G \frac{mM}{R} = -\frac{4\pi}{3} \rho R^2 m G$  ;  $E_m = E_c + E_p = mR^2 \left( \frac{1}{2} H^2 + \frac{4\pi}{3} \rho G \right)$  ;  $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$

• Remarque : vision générale

Schéma de notre galaxie



Le système (de coordonnées) lié à la Terre n'est évidemment pas un système d'inertie au vu de l'ensemble des dites rotations !

