



**HAL**  
open science

## Vibrations des structures : notes de cours

Jean-Mathieu Mencik

► **To cite this version:**

Jean-Mathieu Mencik. Vibrations des structures : notes de cours. Master. France. 2019. hal-03675093

**HAL Id: hal-03675093**

**<https://cel.hal.science/hal-03675093v1>**

Submitted on 22 May 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# **Vibrations des structures : notes de cours**

JEAN-MATHIEU MENCIK  
jean-mathieu.mencik@insa-cvl.fr

Janvier 2019

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Systèmes à un degré de liberté</b>	<b>5</b>
2.1	Introduction . . . . .	5
2.2	Vibrations libres . . . . .	5
2.2.1	Cas des systèmes non amortis (systèmes conservatifs) . . . . .	5
2.2.2	Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs) . . . . .	7
2.3	Réponse forcée harmonique . . . . .	10
2.3.1	Introduction . . . . .	10
2.3.2	Excitation par force imposée . . . . .	10
2.3.3	Excitation par mouvement du support . . . . .	14
2.3.4	Digression sur la notion d'excitations périodiques . . . . .	17
2.4	Réponse transitoire . . . . .	19
2.4.1	Introduction . . . . .	19
2.4.2	Excitation par force imposée . . . . .	19
2.4.3	Excitation par mouvement du support . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Systèmes à plusieurs degrés de liberté</b>	<b>22</b>
3.1	Introduction . . . . .	22
3.2	Systèmes à deux degrés de liberté . . . . .	22
3.2.1	Vibrations libres et modes de vibrations . . . . .	22
3.2.2	Réponse forcée harmonique . . . . .	25
3.3	Systèmes à $n$ degrés de liberté . . . . .	28
3.3.1	Introduction . . . . .	28
3.3.2	Modes de vibration . . . . .	28
3.3.3	Principe de décomposition modale . . . . .	30
3.3.4	Cas des systèmes dissipatifs . . . . .	31
3.3.5	Digression sur la notion d'excitation par mouvement des supports . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Systèmes élastiques continus</b>	<b>34</b>
4.1	Introduction . . . . .	34
4.2	Vibrations longitudinales des barres . . . . .	35
4.2.1	Vibrations libres et modes de vibrations . . . . .	35
4.2.2	Réponse forcée harmonique . . . . .	38
4.2.3	Principe de décomposition modale . . . . .	40
4.2.4	Digression sur d'autres problèmes de vibrations . . . . .	43
4.3	Vibrations transversales des poutres . . . . .	43
4.3.1	Vibrations libres et modes de vibrations . . . . .	43
4.3.2	Réponse forcée harmonique . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Conclusions</b>	<b>48</b>

## Propos liminaires

### Conventions de notations

Dans le cadre de ce document, les notations suivantes seront adoptées :

#### Dérivées :

Les dérivées partielles d'une fonction  $g = g(t, x)$  dépendante du temps  $t$  et de l'abscisse  $x$  seront notées :

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} \quad , \quad g' = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

De même, les dérivées d'ordres supérieurs seront notées :

$$\ddot{g} = \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} \quad , \quad g'' = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2},$$
$$g''' = \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \quad , \quad g'''' = \frac{\partial^4 g}{\partial x^4}.$$

#### Vecteurs et matrices :

Un vecteur composé de  $n$  composantes  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sera noté :

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}.$$

De même, une matrice composée de  $n \times n$  composantes  $A_{ij}$  sera notée :

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

Les dérivées temporelles d'un vecteur  $\{X\}$  seront finalement notées  $\{\dot{X}\}, \{\ddot{X}\}, \dots$

## Références

- S. Timoshenko and D. H. Young and W. Weaver (1990), *Vibration Problem in Engineering*, John Wiley and Sons, Inc.
- K.G. Graff (1991), *Wave Motion in Elastic Solids*, London, Oxford University Press.
- M. Géradin and D. Rixen (1994), *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*, Paris, Wiley.

# 1 Introduction générale

Le problème de vibrations renvoie à la notion d'**oscillations** d'un système élastique autour d'une position d'équilibre statique considérée comme *configuration de référence*. Il est fréquemment rencontré dans l'industrie et recouvre de nombreux domaines : automobile (confort vibratoire et acoustique), aéronautique et aérospatiale (lanceurs au décollage excités par couche limite turbulente), génie civil (stabilité des ponts sous excitations aérodynamiques), . . . La gamme de fréquences rencontrée peut elle aussi être variée, du domaine dit de *basses fréquences (BF)* où une structure ne présente que quelques "mouvements simples" de vibrations (modes), au domaines dit de *moyennes ou hautes fréquences (MF/HF)* où les champs vibratoires peuvent s'avérer relativement complexes. Il est important à ce stade de ne pas faire la confusion entre une valeur de fréquence "élevée" (en apparence) et le cadre BF ou MF/HF des vibrations. La complexité du champ vibratoire dépend bien entendu de la fréquence utilisée, mais essentiellement des caractéristiques matérielles et géométriques du système étudié ainsi que des conditions aux limites qui lui sont appliquées. Pour fixer les idées, pour une même fréquence de  $10\text{ Hz}$ , les comportements dynamiques d'une automobile et d'un bloc de métal risquent d'être bien différents !

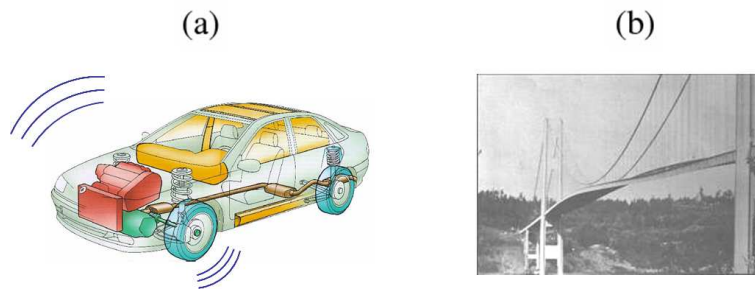


FIGURE 1 – Exemples de problématiques industrielles : (a) vibrations d'une automobile générant du bruit ; (b) résonance du pont de Tacoma (avant destruction!).

## Remarque importante.

Le cadre des *petites perturbations* sera admis tout au long de ce cours, dans ce sens que les hypothèses suivantes, appelées **hypothèses de petites perturbations (HPP)**, seront admises :

- Les systèmes étudiés sont linéaires, sous entendu que les déplacements engendrés par différentes sources d'excitation sont cumulables.
- Les champs mécaniques et cinématiques des systèmes déformés sont étudiés par rapport à leurs **configurations de référence** (positions d'équilibre statique), sous entendu qu'il n'y a pas de distinction entre variables eulériennes et lagrangiennes ; cela signifie que les déplacements sont petits par rapport aux dimensions des systèmes étudiés.

## 2 Systèmes à un degré de liberté

### 2.1 Introduction

L'étude des systèmes à un degré de liberté (1 DDL) permet d'appréhender de manière simple et relativement exhaustive le problème de vibrations des structures. Ce type de systèmes se retrouve dans de nombreux exemples : mouvement oscillant en torsion d'un disque massif rattaché à un arbre élastique de faible masse, oscillation d'un pendule, mode de vibration d'un système continu (plaque), ... (cf. Figure 2). A ce stade, il est important de bien comprendre que le mouvement de vibrations se caractérise par un échange d'énergie entre phénomènes élastiques (énergie potentielle via les déformations) et inertiels (énergie cinétique via les masses). En d'autres termes, il ne peut pas y avoir de vibrations dans un système dépourvu de masse !

Bien que la liste des systèmes à 1 DDL soit assez exhaustive, leur comportement dynamique peut être déduit de celui de l'**oscillateur linéaire masse-ressort**  $(m, k)$  : l'analogie s'obtient en attribuant des valeurs adaptées à  $m$  et  $k$  (à titre d'exemple, dans le cas d'un disque massif rattaché à un arbre élastique de faible masse, l'analogie s'obtient en adoptant les substitutions  $m \rightarrow J$  et  $k \rightarrow k_t$ , avec  $J$  le moment quadratique polaire du disque et  $k_t$  la raideur de torsion de l'arbre). La suite de ce chapitre sera donc consacrée à l'étude de l'oscillateur linéaire  $(m, k)$ .

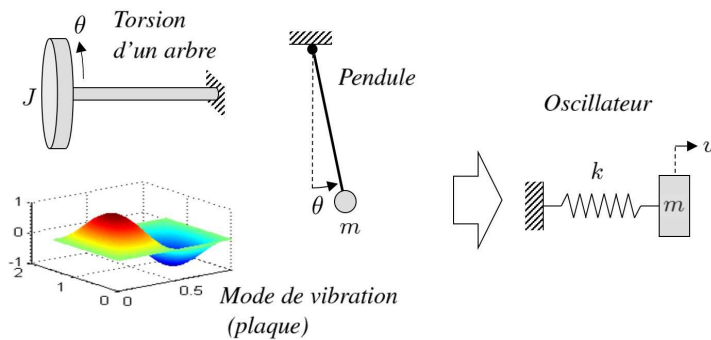


FIGURE 2 – Exemples de systèmes à 1 DDL et oscillateur linéaire  $(m, k)$  équivalent.

### 2.2 Vibrations libres

#### 2.2.1 Cas des systèmes non amortis (systèmes conservatifs)

On considère le mouvement d'une masse  $m$  connectée à un ressort de raideur  $k$ , dont l'autre extrémité est fixée à un *support rigide sans mouvement*.

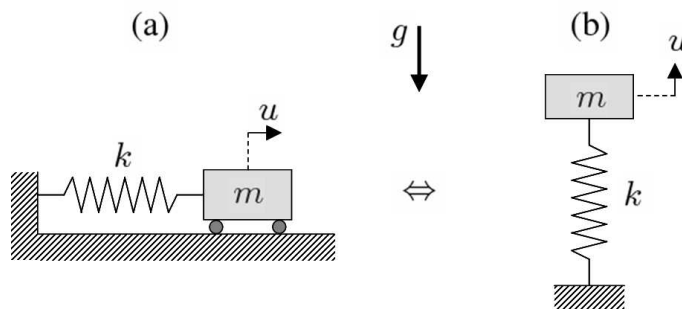


FIGURE 3 – Système masse-ressort : (a) gravité non prise en compte ; (b) gravité prise en compte.

Notons que l'étude de l'oscillateur  $(m, k)$  peut être appréhendée selon deux configurations : (i) l'une horizontale (Figure 3(a)) pour laquelle les effets de la gravité n'interviennent pas ; (ii) l'autre verticale (Figure 3(b)) pour laquelle les effets de la gravité "compriment" le ressort. Ces deux configurations sont en fait rigoureusement équivalentes du point de vue de l'**équation du mouvement** de la masse  $m$ , cette dernière s'écrivant :

$$\boxed{m\ddot{u} + ku = 0} \quad (1)$$

où  $u$  représente le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre statique, notée  $u_g^{\text{st}}$  et telle que  $u_g^{\text{st}} = 0$  en configuration horizontale et  $u_g^{\text{st}} = -mg/k$  en configuration verticale.

*Preuve.*

En résumé, il s'agit d'étudier les oscillations de la masse par rapport à sa position d'équilibre statique que l'on suppose connue. La solution générale de l'équation du mouvement (1) s'exprime alors

$$u = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t), \quad (2)$$

où  $\omega_0$  représente la **pulsation propre** du système, définie par

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (3)$$

En outre, la **fréquence propre** et la **période propre** s'expriment par

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad \text{et} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (4)$$

Le déplacement  $u$  de la masse s'obtient à partir de l'équation (2), en déterminant les inconnues  $A$  et  $B$ . Celles-ci sont déterminées par analyse des **conditions initiales**, pour le déplacement et la vitesse, c'est-à-dire :

$$u|_{t=0} = u_0 \quad , \quad \dot{u}|_{t=0} = \dot{u}_0. \quad (5)$$

Il en résulte l'expression suivante pour le déplacement de la masse :

$$\boxed{u = u_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)} \quad (6)$$

Un exemple de réponse vibratoire d'un système  $(m, k)$ , n'étant soumis à *aucune source d'excitation*, est illustré sur la Figure 4 en considérant des conditions initiales arbitraires  $u|_{t=0} = u_0$  et  $\dot{u}|_{t=0} = \dot{u}_0$ . Cette réponse représente la variation du déplacement  $u$  en fonction du temps  $t$  : on utilisera dès lors le terme de **réponse temporelle**. Le mouvement observé est celui d'une oscillation harmonique de période  $T_0$  et d'amplitude  $|u|$  constante dans le temps, exprimée par :

$$|u| = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\right)^2}. \quad (7)$$

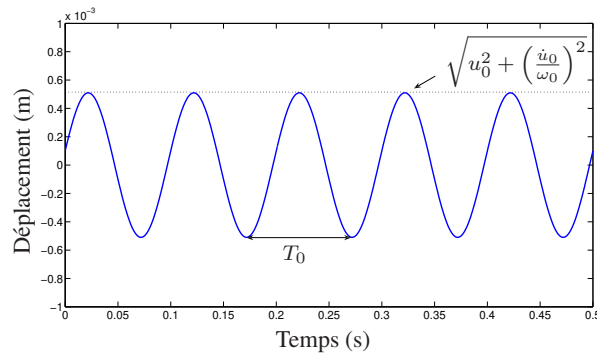
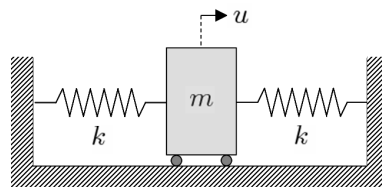


FIGURE 4 – Vibrations libres d’un oscillateur  $(m, k)$  soumis aux conditions initiales  $u|_{t=0} = u_0$  et  $\dot{u}|_{t=0} = \dot{u}_0$ .

*Exercice.*

Exprimer l’équation du mouvement du système masse-ressorts illustré ci-dessous ; donner la pulsation propre.



**2.2.2 Cas des systèmes amortis (systèmes dissipatifs)**

Le phénomène d’oscillations libres pour lesquelles les niveaux vibratoires sont constants dans le temps n’est physiquement pas réalisable, dans le sens où il y a toujours dissipation d’énergie. Les effets de cette dernière peuvent largement varier cependant. Les mécanismes de dissipation peuvent être de natures diverses : viscosité, frottement sec, couplage avec fluide, hystérésis, . . . Nous nous restreindrons ici à l’étude de l’**amortissement visqueux**. Ce type d’amortissement est couramment utilisé dans l’étude du comportement vibratoire des systèmes mécaniques, de part sa simplicité de modélisation mais également sa capacité à pouvoir être utilisé dans la description de mécanismes d’amortissements plus complexes.

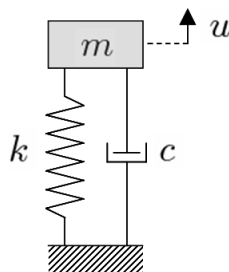


FIGURE 5 – Système masse-ressort avec amortisseur visqueux.

Un système masse-ressort avec amortisseur visqueux est illustré sur la Figure 5. Pour ce type d’amortis-



sement, la force  $F_c$  induite sur la masse est telle qu'elle s'oppose à sa vitesse, c'est-à-dire :

$$F_c = -c\dot{u}, \quad (8)$$

où  $c$  représente la **constante d'amortissement**. L'équation du mouvement de la masse  $m$  s'écrit alors :

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0} \quad (9)$$

où  $u$  représente le déplacement de la masse par rapport à sa position d'équilibre statique (cf. sous-chapitre 2.2.1).

*Preuve.*

Dans un souci de simplicité dans l'écriture des équations, il est préférable d'exprimer le déplacement de la masse sur la base du **taux d'amortissement**  $\zeta$ , défini par :

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}. \quad (10)$$

Il apparaît alors que la solution générale de l'équation du mouvement (9) revêt plusieurs formes selon que  $\zeta < 1$ ,  $\zeta = 1$  ou  $\zeta > 1$  :

- Mouvement sous-amorti :  $\zeta < 1 \Rightarrow u = e^{-\zeta\omega_0 t} [A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)]$ ,  
où  $\omega_d$  représente la pulsation propre apparente du système (cf. Eq. (12)). Dans ce cas, le mouvement est périodique et l'amplitude des oscillations suit une décroissance exponentielle.
- Mouvement critique :  $\zeta = 1 \Rightarrow u = e^{-\omega_0 t} [A + Bt]$ .  
Dans ce cas, le mouvement est apériodique : il n'y a pas de vibrations.
- Mouvement sur-amorti :  $\zeta > 1 \Rightarrow u = e^{-\zeta\omega_0 t} [Ae^{-(\sqrt{\zeta^2-1})\omega_0 t} + Be^{(\sqrt{\zeta^2-1})\omega_0 t}]$ .  
Dans ce cas, le mouvement est apériodique : il n'y a pas de vibrations.

Seul le cas  $\zeta < 1$  sera considéré dans la suite de ce document, dans ce sens qu'il est associé à un mouvement oscillant (donc de vibration) de la masse ; le cas faiblement amorti  $\zeta \ll 1$  sera notamment supposé. Le déplacement de la masse s'exprime alors :

$$\boxed{u = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[ u_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right]} \quad (11)$$

où  $u_0$  et  $\dot{u}_0$  représentent les conditions initiales ; en outre,  $\omega_d$  représente la **pulsation propre apparente** définie par :

$$\boxed{\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (12)$$

*Preuve.*

Un exemple de réponse temporelle  $t \mapsto u(t)$  d'un système  $(m, k, c)$  faiblement amorti est illustré sur la Figure 6. Le mouvement observé est celui d'une oscillation harmonique de période  $T_d = 2\pi/\omega_d$  et d'amplitude  $|u|$  décroissante dans le temps, exprimée par :

$$|u| = e^{-\zeta\omega_0 t} \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d}\right)^2}. \quad (13)$$

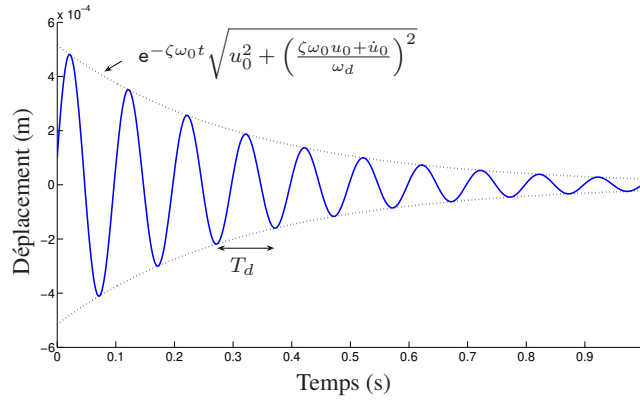


FIGURE 6 – Vibrations libres d'un oscillateur  $(m, k, c)$  faiblement amorti ( $\zeta = 0.05$ ), soumis à des conditions initiales arbitraires  $u|_{t=0} = u_0$  et  $\dot{u}|_{t=0} = \dot{u}_0$ .

#### **Méthode du décrétement logarithmique.**

La méthode du décrétement logarithmique permet de déterminer le taux d'amortissement  $\zeta$  d'un système mécanique sur la base de la mesure de son amplitude de vibrations en deux instants. Inversement, la méthode permet de déterminer la variation d'amplitude de vibrations du système si l'on connaît son taux d'amortissement. La méthode s'appuie sur la démarche suivante :

La variation d'amplitude de vibrations entre deux instants  $t$  et  $t + nT_d$ , séparés par  $n$  périodes  $T_d$ , s'exprime par

$$\frac{|u|_{t+nT_d}}{|u|_t} = e^{-\zeta\omega_0 nT_d}. \quad (14)$$

Connaissant cette variation d'amplitude, le taux d'amortissement  $\zeta$  peut alors être estimé de la manière suivante :

$$\zeta = \frac{1}{\omega_0 n T_d} \text{Ln} \left\{ \frac{|u|_t}{|u|_{t+nT_d}} \right\}. \quad (15)$$

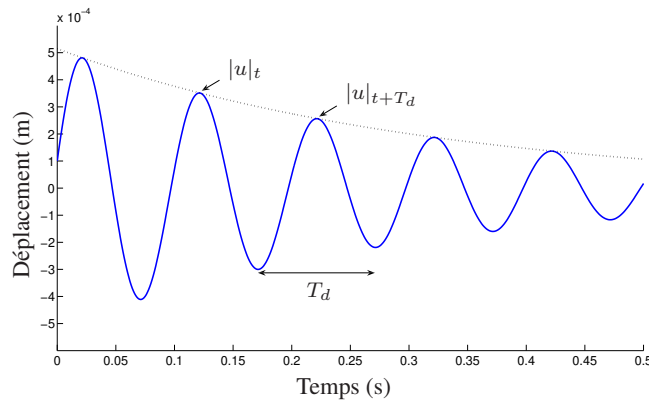
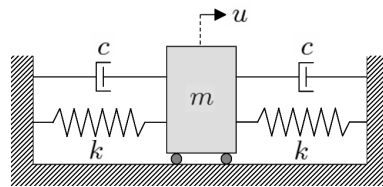


FIGURE 7 – Variation d'amplitude de vibrations entre deux instants  $t$  et  $t + T_d$ , séparés d'une période  $T_d$ .

Exercice.

Exprimer l'équation du mouvement du système masse-ressorts illustré ci-dessous; donner la pulsation propre et la pulsation propre apparente.



## 2.3 Réponse forcée harmonique

### 2.3.1 Introduction

Le cadre de la réponse forcée harmonique est maintenant abordé. Il s'agit d'étudier le mouvement d'oscillations d'un système masse-ressort-amortisseur  $(m, k, c)$  soumis à une excitation de la forme  $A \cos(\omega t)$ , avec  $A$  l'amplitude de l'excitation et  $\omega$  la **pulsation d'excitation** (on notera de même  $f = \omega/2\pi$  la **fréquence d'excitation**). Notons que l'étude proposée est parfaitement adaptée aux problèmes impliquant des systèmes non amortis  $(m, k)$ , en posant simplement  $c = 0$ .

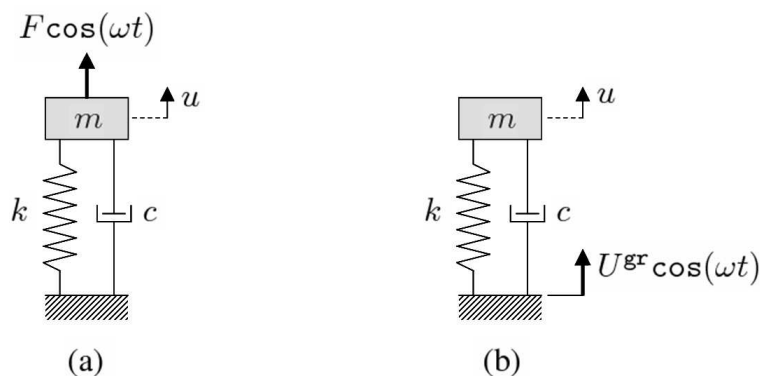


FIGURE 8 – Système masse-ressort-amortisseur sous-excitation harmonique forcée : (a) excitation par force imposée à la masse ; (b) excitation par mouvement du support.

Deux cas s'imposent selon que l'excitation représente une force appliquée à la masse (cf. Figure 8(a)) ou un mouvement imposé au support (cf. Figure 8(b)). A titre d'exemple, une excitation par force illustre le comportement dynamique d'un moteur en fonctionnement sur supports élastiques, une excitation par mouvement du support illustre le comportement dynamique d'un bâtiment soumis à un séisme (excitation par le sol). Remarquons qu'une excitation par force imposée est bien différente d'une excitation par mouvement imposé (on pourra pour s'en convaincre réfléchir au problème d'une force imposée à la base d'un oscillateur : le mouvement obtenu sera bien différent de celui obtenu par déplacement imposé!). Ces deux modes d'excitation (par force et mouvement imposés) sont présentés ci-dessous.

### 2.3.2 Excitation par force imposée

Considérons le mouvement d'une masse  $m$  excitée par une force d'intensité  $f = F \cos(\omega t)$ , connectée à un ressort  $k$  et à un amortisseur  $c$  pour lesquels le support est supposé rigide et sans mouvement (cf.

Figure 8(a)). On suppose par ailleurs le système faiblement amorti (i.e.  $\zeta \ll 1$ ). En observant l'équilibre dynamique de la masse, l'équation du mouvement s'exprime alors par

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f} \quad (16)$$

La solution générale de l'équation (16) représente *la somme de la solution générale de l'équation sans second membre, c'est-à-dire de l'équation (9), et d'une solution particulière*. La solution générale de l'équation sans second membre est donnée par l'équation (11) : elle représente un mouvement oscillant d'amplitude décroissante dans le temps (valable lorsque  $c \neq 0$ ), devenant négligeable à long terme ; on parlera dans cette condition de **régime stationnaire**. Reste alors à évaluer la **solution stationnaire** de l'équation (16), c'est-à-dire la solution particulière. Une première tentative consisterait à chercher cette solution sous la forme  $u = U \cos(\omega t)$ , en accord avec l'excitation imposée. Cette tentative, quoi que bien adaptée pour les systèmes sans amortissement, s'avère cependant délicate lorsque  $c \neq 0$  dans le sens où une simplification par  $\cos(\omega t)$  n'est pas possible si l'on considère la dérivée  $\dot{u}$  qui induit un terme  $\sin(\omega t)$  dans l'équation (16). La stratégie à adopter consiste alors à raisonner dans le plan complexe, en adoptant les substitutions  $u \rightarrow \text{Re}\{u\} + i\text{Im}\{u\}$  et  $f \rightarrow Fe^{i\omega t}$ . Dans ce cadre, l'équation du mouvement s'écrit alors par

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = Fe^{i\omega t}. \quad (17)$$

La solution particulière de cette équation peut alors être recherchée sous la forme suivante :

$$u = Ue^{i\omega t}, \quad (18)$$

où  $U$  représente l'**amplitude complexe** du mouvement. En insérant cette forme de solution dans l'équation (17) et en simplifiant par  $e^{i\omega t}$ , on obtient alors :

$$\boxed{U = \frac{F/k}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2i\zeta\omega/\omega_0}} \quad (19)$$

*Preuve.*

En notation abrégée, l'amplitude complexe peut également s'écrire de la manière suivante :

$$U = A_\omega U_F^{\text{st}} \quad \text{où} \quad A_\omega = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2i\zeta\omega/\omega_0}, \quad U_F^{\text{st}} = \frac{F}{k}. \quad (20)$$

où  $U_F^{\text{st}}$  représente la réponse statique du système, obtenue lorsque  $\omega = 0$ , alors que  $A_\omega$  représente l'amplification dynamique du signal. Le module et l'argument de  $A_\omega$ , notés  $\beta$  et  $\varphi$  et tels que  $A_\omega = \beta e^{-i\varphi}$ , représentent respectivement le **coefficient d'amplification dynamique** et le **déphasage** (entre l'excitation et la réponse) du signal. Ils sont exprimés par :

$$\boxed{\beta = \frac{1}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}, \quad \tan(\varphi) = \frac{2\zeta\omega/\omega_0}{1 - (\omega/\omega_0)^2}} \quad (21)$$

Les variations en fréquences du coefficient d'amplification dynamique  $\beta$  et du déphasage  $\varphi$  sont tracées sur les Figures (9) et (10) pour différentes valeurs du taux d'amortissement  $\zeta$ , en fonction de la fréquence adimensionnée  $f/f_0 = \omega/\omega_0$ . Les résultats observés peuvent être résumés de la manière suivante :

- L'amplitude du déplacement de la masse est décrite à partir du coefficient d'amplification dynamique. Ce dernier révèle un maximum au voisinage de la fréquence propre  $f_0$  : c'est le **phénomène de résonance**. Plus l'amortissement est faible et plus l'amplitude de ce maximum est forte. L'amplitude devient infinie pour  $\zeta = 0$  lorsque  $f = f_0$  (*note* : ce cas ne se produit jamais en réalité du fait des mécanismes de dissipation d'énergie). Lorsque  $f/f_0 \rightarrow 0$ , l'amplitude du déplacement approche la réponse statique  $|U| \rightarrow U_F^{st}$  ; lorsque  $f/f_0 \rightarrow \infty$ , l'amplitude du déplacement tend vers zéro  $|U| \rightarrow 0$ .
- Le déphasage entre l'excitation et la réponse de la masse varie de 0 (cas où la réponse et l'excitation sont en phase) à  $\pi$  (cas où la réponse et l'excitation sont en opposition de phase). Cette variation est d'autant plus brusque que le taux d'amortissement est faible. A la fréquence propre  $f = f_0$ , les signaux sont en quadrature de phase.

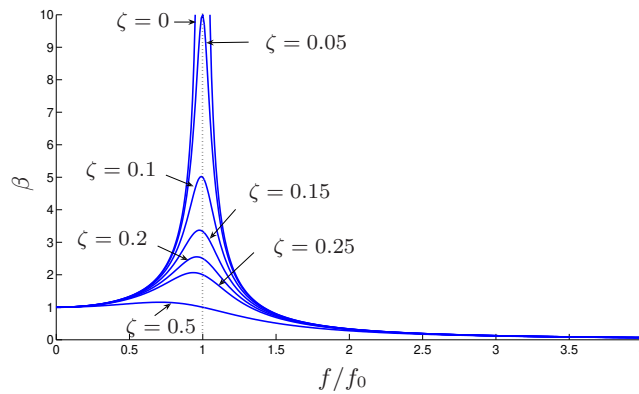


FIGURE 9 – Variation fréquentielle du coefficient d'amplification dynamique : cas d'une excitation par force imposée.

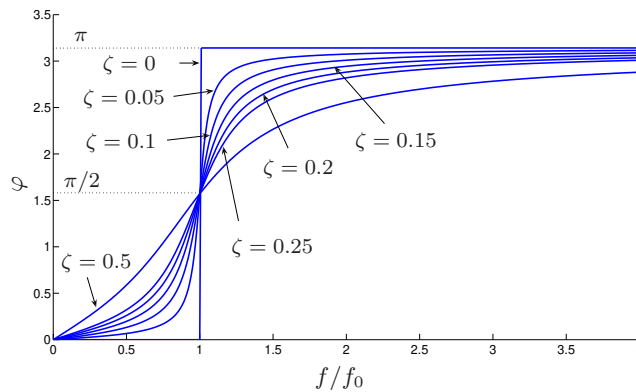


FIGURE 10 – Variation fréquentielle du déphasage.

On définit la **fréquence de résonance**  $f_0^{re}$  comme la fréquence d'excitation qui correspond à la valeur maximale de l'amplitude  $|U|$ , c'est-à-dire à la valeur maximale du coefficient d'amplification dynamique  $\beta$ . Lorsque  $\zeta \neq 0$ , la fréquence de résonance ne correspond pas exactement à la fréquence propre  $f_0$ , c'est-à-dire :

$$f_0^{re} = f_0 \sqrt{1 - 2\zeta^2}. \quad (22)$$

La valeur maximale du coefficient d'amplification dynamique, obtenue lorsque  $f = f_0^{re}$ , est alors donnée

par

$$\max\{\beta\} = \beta|_{f=f_0^{re}} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \underset{\zeta \ll 1}{\cong} \frac{1}{2\zeta} = \beta|_{f=f_0}. \quad (23)$$

*Preuve.*

Le maximum s'obtient lorsque  $\omega \mapsto [(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2]$  atteint un minimum. En effectuant le changement de variable  $X = (\omega/\omega_0)^2$ , cela revient à résoudre  $\min_X [(1 - X)^2 + 4\zeta^2 X]$ , soit

$$\frac{\partial}{\partial X} [(1 - X)^2 + 4\zeta^2 X] = 0 \Rightarrow X^{re} = 1 - 2\zeta^2.$$

On obtient alors

$$\max\{\beta\} = \frac{1}{\sqrt{(1 - X^{re})^2 + 4\zeta^2 X^{re}}} = \frac{1}{\sqrt{(2\zeta^2)^2 + 4\zeta^2(1 - 2\zeta^2)}} = \frac{1}{\sqrt{4\zeta^2 - 4\zeta^4}}.$$

□

### Méthode de la largeur de bande à $-3dB$ .

La mesure de la largeur de bande du signal à  $-3dB$  consiste à relever les valeurs de fréquences correspondantes à  $\beta = \max\{\beta\}/\sqrt{2}$  : il y en a deux (cf. Figure 11). L'écart entre ces deux fréquences, noté  $\Delta f$  ( $\Delta f = f^+ - f^-$  où  $\beta|_{f=f^+} = \beta|_{f=f^-} = \max\{\beta\}/\sqrt{2}$ ), permet alors d'estimer le taux d'amortissement  $\zeta$  de la manière suivante :

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_0}. \quad (24)$$

Cette méthode est connue sous le nom de "largeur de bande à  $-3dB$ " (en effet,  $20\log_{10}\{1/\sqrt{2}\} \approx -3dB$ , signifiant que l'on estime les fréquences pour lesquelles l'amplitude du signal se situe à  $-3dB$  de son maximum).

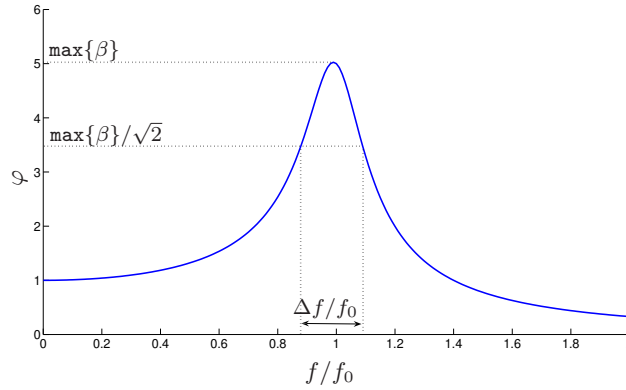


FIGURE 11 – Illustration de la largeur de bande à  $\max\{\beta\}/\sqrt{2}$ .

*Preuve.*

En effectuant le changement de variable  $X = (\omega/\omega_0)^2$ , cela revient à chercher les deux valeurs de  $X$  telles que :

$$(1 - X)^2 + 4\zeta^2 X = 2[(1 - X^{re})^2 + 4\zeta^2 X^{re}] = 8\zeta^2(1 - \zeta^2).$$

Cette équation s'écrit encore :

$$X^2 + (4\zeta^2 - 2)X + 1 - 8\zeta^2(1 - \zeta^2) = 0,$$

dont les racines sont :

$$X = (1 - 2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}.$$

En supposant  $\zeta \ll 1$ , on obtient alors :

$$X \approx 1 \pm 2\zeta \Rightarrow \sqrt{X} \approx 1 \pm \zeta \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx 2\zeta.$$

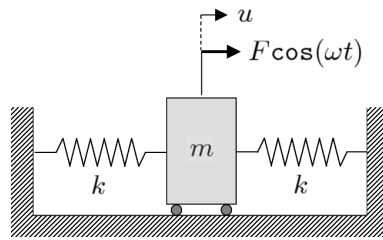
□

*Remarque.*

Une fois la solution stationnaire exprimée dans le plan complexe, il convient d'exprimer sa *partie réelle* et sa *partie imaginaire*, selon que l'excitation soit de la forme  $F\cos(\omega t)$  ou  $F\sin(\omega t)$ .

*Exercice.*

Exprimer l'équation du mouvement du système masse-ressorts illustré ci-dessous, excité par une force harmonique  $F\cos(\omega t)$ ; donner la solution générale; résoudre à partir des conditions initiales  $u|_{t=0} = u_0$  et  $\dot{u}|_{t=0} = 0$ .



### 2.3.3 Excitation par mouvement du support

On considère le mouvement d'une masse  $m$  connectée à un ressort  $k$  et à un amortisseur  $c$  pour lesquels le support impose un déplacement de la forme  $u^{\text{gr}} = U^{\text{gr}}\cos(\omega t)$  (cf. Figure 8(b)). On suppose que le système est faiblement amorti (i.e.  $\zeta \ll 1$ ). En observant l'équilibre dynamique de la masse, l'équation du mouvement de la masse s'exprime alors par

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = c\dot{u}^{\text{gr}} + ku^{\text{gr}}. \quad (25)$$

*Preuve.*

La technique de résolution proposée consiste à décrire le mouvement de la masse dans le *référentiel du support en mouvement*. Dans ce cadre, l'équation du mouvement est exprimée en fonction du **déplacement**

**relatif**  $u^* = u - u^{\text{gr}}$  de la masse par rapport au support, c'est-à-dire :

$$\boxed{m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = -m\ddot{u}^{\text{gr}}} \quad (26)$$

En résumé, une excitation par mouvement imposé au support revient à considérer un système  $(m, k, c)$  avec base fixe, pour lequel la masse subie une force "d'inertie" induite par l'accélération  $\ddot{u}^{\text{gr}}$ . L'équation du mouvement (26) peut être résolue d'une manière analogue à celle dérivant d'une excitation par force imposée (cf. sous-chapitre 2.3.2). La **solution stationnaire** s'obtient en raisonnant dans le plan complexe (à savoir en adoptant les substitutions  $u^* \rightarrow \text{Re}\{u^*\} + i\text{Im}\{u^*\}$  et  $u^{\text{gr}} = U^{\text{gr}}e^{i\omega t}$ ). L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = \omega^2 m U^{\text{gr}} e^{i\omega t}. \quad (27)$$

La solution stationnaire peut être simplement choisie de la forme :

$$u^* = U^* e^{i\omega t}, \quad (28)$$

où  $U^*$  représente l'**amplitude complexe** du déplacement relatif, tel que :

$$\boxed{U^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2 U^{\text{gr}}}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2i\zeta\omega/\omega_0}} \quad (29)$$

En notation abrégée, l'amplitude complexe peut également s'écrire de la manière suivante :

$$U^* = A_\omega^* U^{\text{gr}} \quad \text{où} \quad A_\omega^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2i\zeta\omega/\omega_0}. \quad (30)$$

Le **déphasage** qui en résulte, noté  $\varphi^*$ , apparaît être identique à celui obtenu dans le cas d'une excitation par force imposée (cf. sous-chapitre 2.3.2), i.e.  $\varphi^* = \varphi$ . Le **coefficient d'amplification dynamique**, noté  $\beta^*$ , représente le module de  $A_\omega^*$ . Il n'est cependant pas identique à celui associé à la force imposée :

$$\boxed{\beta^* = \frac{(\omega/\omega_0)^2}{\sqrt{(1 - (\omega/\omega_0)^2)^2 + 4\zeta^2(\omega/\omega_0)^2}}, \quad \varphi^* = \varphi} \quad (31)$$

La variation en fréquences du coefficient d'amplification dynamique  $\beta^*$  est tracée sur la Figure (12) pour différentes valeurs du taux d'amortissement  $\zeta$ , en fonction de la fréquence adimensionnée  $f/f_0 = \omega/\omega_0$ .

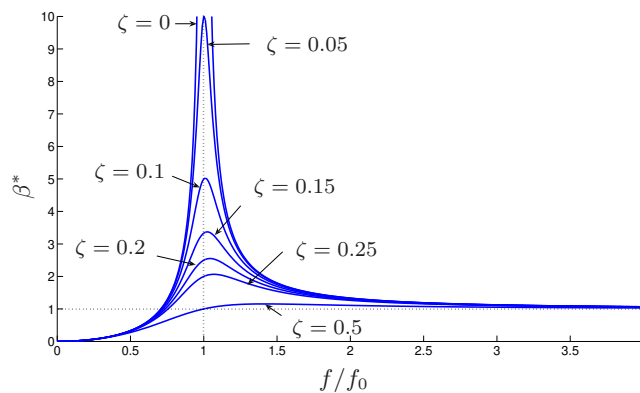


FIGURE 12 – Variation fréquentielle du coefficient d'amplification dynamique : cas d'une excitation par déplacement imposé.



L'amplitude de la réponse dynamique révèle un maximum au voisinage de la fréquence propre  $f_0$ . Lorsque  $f/f_0 \rightarrow 0$ , l'amplitude du déplacement relatif tend vers zéro  $|U^*| \rightarrow 0$  signifiant que la masse subit le déplacement du support; lorsque  $f/f_0 \rightarrow \infty$ ,  $|U^*| \rightarrow 1$  signifiant que dans le référentiel du support en mouvement, la masse oscille avec une amplitude égale à celle du support, soit  $|U^*| \rightarrow |U^{gr}|$ .

*Remarques.*

- La valeur maximale du coefficient d'amplification dynamique  $\beta^*$  correspond à la fréquence de résonance suivante :

$$f_0^{re} = \frac{f_0}{\sqrt{1 - 2\zeta^2}} \quad (32)$$

- De manière analogue au cas de l'excitation par force imposée (cf. sous-chapitre 2.3.2), la mesure de la largeur de bande du signal à  $-3dB$ , c'est-à-dire lorsque  $\beta = \max\{\beta\}/\sqrt{2}$ , permet d'estimer le taux d'amortissement  $\zeta$  du système, c'est-à-dire :

$$\zeta = \frac{1}{2} \frac{\Delta f}{f_0} \quad (33)$$

**Excitation par accélération imposée**  $\gamma^{gr} = \Gamma^{gr} \cos(\omega t)$ .

Nous venons d'aborder la réponse dynamique d'un système  $(m, k, c)$  dont le support est soumis à un déplacement imposé  $u^{gr}$ , dont l'amplitude est constante en fréquences. D'autres problèmes peuvent être cependant abordés du point de vue d'une accélération imposée  $\gamma^{gr}$ , constante en fréquences (ce qui sous-entend que l'amplitude du déplacement ne l'est pas). Dans ce cas, l'équation du mouvement de la masse s'exprime par :

$$m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = -m\gamma^{gr}. \quad (34)$$

En raisonnant dans le plan complexe (en posant que  $\gamma^{gr} = \Gamma^{gr} e^{i\omega t}$ ), l'amplitude complexe  $U^*$  de la solution stationnaire s'exprime par

$$U^* = \frac{-\Gamma^{gr}/\omega_0^2}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2i\zeta\omega/\omega_0} \quad (35)$$

soit en notation abrégée :

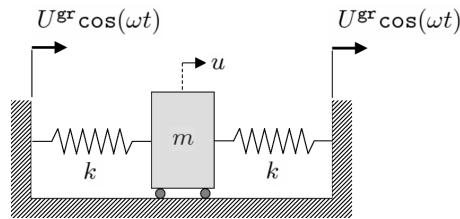
$$U^* = A_\omega \frac{-\Gamma^{gr}}{\omega_0^2} \quad \text{où} \quad A_\omega = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_0)^2 + 2i\zeta\omega/\omega_0}. \quad (36)$$

L'amplification dynamique  $A_\omega$  apparaît analogue à celle obtenue lorsque l'excitation représente une force imposée à la masse. Le coefficient d'amplification dynamique  $\beta^*$  et le déphasage  $\varphi^*$  qui en résultent sont également en accord avec le mode d'excitation par force imposée (cf. équation (21)) :

$$\beta^* = \beta \quad , \quad \varphi^* = \varphi \quad (37)$$

Exercice.

Exprimer l'équation du mouvement du système masse-ressorts illustré ci-dessous, excité par déplacement imposé ; en donner la solution générale et donner la valeur du déplacement  $u$  en fonction des conditions initiales  $u|_{t=0} = u_0$  et  $\dot{u}|_{t=0} = 0$



### 2.3.4 Digression sur la notion d'excitations périodiques

Nous nous sommes précédemment intéressés aux oscillations d'un oscillateur  $(m, k, c)$  sous excitations harmoniques pures, dont les intensités sont de la forme  $\cos(\omega t)$ . D'autres types d'excitations périodiques peuvent cependant être considérés qui ne sont pas forcément harmoniques : à titre d'exemple, un signal de type "triangle" de période  $T$  (cf. Figure 13) illustre une excitation périodique non harmonique.

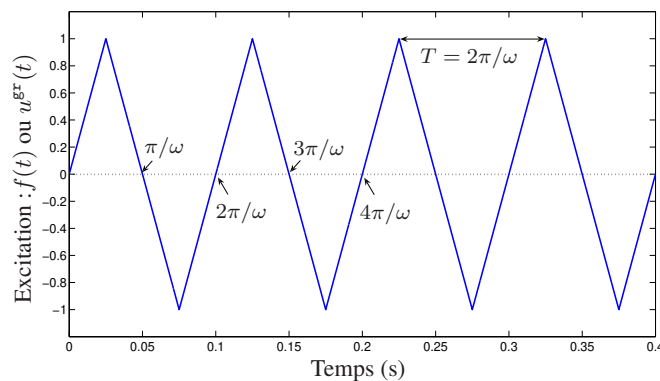


FIGURE 13 – Illustration d'une excitation périodique non harmonique.

La stratégie de résolution du problème de réponse forcée associé à une excitation non harmonique  $f(t)$  consiste à décrire cette dernière sur la base d'une **Série de Fourier**, puis à considérer plusieurs "sous-problèmes harmoniques". Ainsi, en exprimant  $f(t)$  sur la base d'une série de Fourier, on a

$$f(t) = F_0 + \sum_{r \geq 1} [F_r \cos(r\omega t) + F'_r \sin(r\omega t)] \quad (38)$$

où  $\omega = 2\pi/T$  désigne la pulsation d'excitation. Le problème consiste à identifier les constantes  $F_0$ ,  $F_r$  et  $F'_r$  (pour  $r = 1, 2, 3, \dots$ ). A cette fin, il s'agit d'observer les propriétés d'orthogonalités des fonctions  $\cos$  et  $\sin$ , c'est-à-dire :

$$\int_0^T \cos(s\omega t) \cos(r\omega t) dt = 0 \quad \text{lorsque } s \neq r, \quad (39)$$

$$\int_0^T \sin(s\omega t) \sin(r\omega t) dt = 0 \quad \text{lorsque } s \neq r, \quad (40)$$

$$\int_0^T \cos(s\omega t) \sin(r\omega t) dt = 0 \quad \text{lorsque } s \neq r, \quad (41)$$

ainsi que les intégrales suivantes :

$$\int_0^T \cos(r\omega t) dt = \int_0^T \sin(r\omega t) dt = 0, \quad (42)$$

$$\int_0^T \cos^2(r\omega t) dt = \int_0^T \sin^2(r\omega t) dt = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}. \quad (43)$$

On obtient alors :

$$\boxed{F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad F_r = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(r\omega t) dt, \quad F'_r = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(r\omega t) dt \quad \forall r \geq 1} \quad (44)$$

La **solution stationnaire** du mouvement, notée  $u$ , s'obtient sur la base du **principe de superposition** :

$$\boxed{u = U_0 + \sum_{r \geq 1} (\operatorname{Re}\{U_r e^{ri\omega t}\} + \operatorname{Im}\{U'_r e^{ri\omega t}\})} \quad (45)$$

où  $U_0$  représente une solution particulière de l'équation suivante :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F_0; \quad (46)$$

Les termes  $U_r e^{ri\omega t}$  et  $U'_r e^{ri\omega t}$  représentent des solutions particulières pour les sous-problèmes harmoniques suivants :

$$\begin{aligned} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku &= F_r e^{ri\omega t} & \forall r \geq 1, \\ m\ddot{u}' + c\dot{u}' + ku' &= F'_r e^{ri\omega t} & \forall r \geq 1. \end{aligned} \quad (47)$$

L'obtention de ces solutions particulières ne pose pas de problèmes (cf. sous-chapitres précédentes), c'est-à-dire :

$$\boxed{\begin{aligned} U_0 &= F_0/k, \\ U_r &= \frac{F_r/k}{1-(r\omega/\omega_0)^2+2i\zeta r\omega/\omega_0} \Leftrightarrow U_r = A_{r\omega} U_r^{\text{st}} & \forall r \geq 1, \\ U'_r &= \frac{F'_r/k}{1-(r\omega/\omega_0)^2+2i\zeta r\omega/\omega_0} \Leftrightarrow U'_r = A_{r\omega} U_r^{\prime\text{st}} & \forall r \geq 1, \end{aligned}} \quad (48)$$

où  $U_{F_r}^{\text{st}} = F_r/k$  et  $U_{F'_r}^{\text{st}} = F'_r/k$  renvoient aux déplacements statiques du système, de même que  $A_{r\omega}$  renvoie aux amplifications dynamiques du système (cf. sous-chapitre 2.3.2) évaluées à chaque pulsation d'excitation  $r\omega$ .

*Remarque 1.*

Pour une excitation périodique non harmonique, plusieurs phénomènes de résonances apparaissent, chacun étant induit lorsque l'une des harmoniques  $r\omega$  approche la pulsation propre  $\omega_0$ .

*Remarque 2.*

La réponse dynamique d'un système excité par mouvement du support (cas d'un déplacement ou d'une accélération imposés), de la forme (38), s'obtient de manière analogue à l'équation (48) en observant les substitutions suivantes :  $A_{r\omega} \rightarrow A_{r\omega}^* \forall r$  (où  $A^*$  est donnée par l'équation (30));  $U_r^{\text{st}} \rightarrow U_r^{\text{gr}}$  et  $U_r^{\prime\text{st}} \rightarrow U_r^{\prime\text{gr}} \forall r$ ;  $U_0 \rightarrow U_0^{\text{gr}}$ .

*Exercice.*

Donner la représentation en série de Fourier du signal périodique illustré sur la Figure 13.

## 2.4 Réponse transitoire

### 2.4.1 Introduction

La réponse d'un oscillateur  $(m, k, c)$  sous excitations périodiques non forcément harmoniques a été précédemment traitée. Les précédentes méthodes de résolution de l'équation du mouvement ne conviennent cependant pas lorsque le signal d'excitation n'est pas périodique (cf. Figure 14). Cela nécessite de considérer une intégrale de l'équation du mouvement.

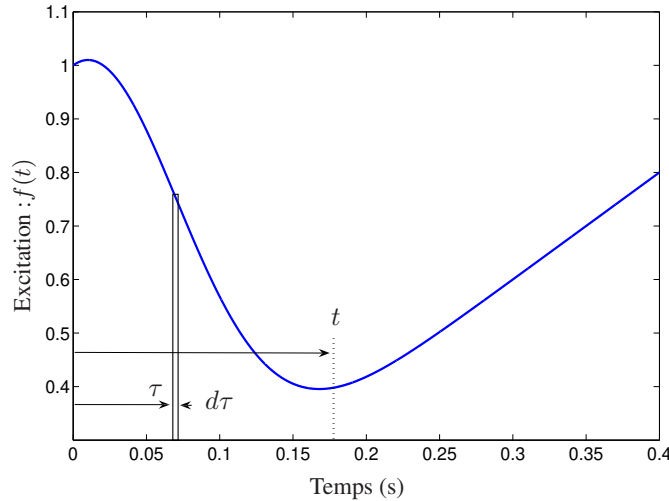


FIGURE 14 – Illustration d'une excitation temporelle arbitraire.

### 2.4.2 Excitation par force imposée

Considérons la réponse d'un l'oscillateur  $(m, k, c)$  soumis au niveau de la masse à une force d'intensité  $f(t)$  dont la variation au cours du temps est supposée arbitraire. Le support est supposé immobile. L'équation du mouvement de la masse a été développée dans le sous-chapitre 2.3.2. Elle s'exprime par :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t). \quad (49)$$

La stratégie de résolution de cette équation consiste à évaluer la **réponse impulsionnelle**  $du(t)$  à une excitation  $f(\tau)d\tau\delta(t' - \tau)$  localisée au temps  $t' = \tau$ , c'est-à-dire :

$$du(t) = e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \frac{f(\tau)}{m\omega_d} d\tau \sin[\omega_d(t - \tau)]. \quad (50)$$

*Preuve.*

Il s'agit tout d'abord de considérer la *réponse indicielle* du système, c'est-à-dire lorsque l'excitation est de la forme  $f(t) = f(\tau)\mathcal{H}(t - \tau)$  avec  $\mathcal{H}(t - \tau)$  la fonction d'Heaviside, telle que  $\mathcal{H}(t - \tau) = 1$  lorsque  $t > \tau$  et  $\mathcal{H}(t - \tau) = 0$  lorsque  $t < \tau$ . Les conditions initiales associées sont  $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ , lorsque  $t = \tau$ . Pour  $t > \tau$ , la réponse indicielle s'exprime alors par

$$u^{\text{ind}}(t) = e^{-\zeta\omega_0[t-\tau]} [A\cos(\omega_d[t-\tau]) + B\sin(\omega_d[t-\tau])] + \frac{f(\tau)}{k},$$

où  $f(\tau)/k$  représente une solution particulière. L'identification des constantes  $A$  et  $B$  à partir des conditions initiales donne  $A = -f(\tau)/k$  et  $B = -\zeta\omega_0/\omega_d(f(\tau)/k)$ . Cela donne

$$u^{\text{ind}}(t) = -\frac{f(\tau)}{k} e^{-\zeta\omega_0[t-\tau]} \left[ \cos(\omega_d[t-\tau]) + \frac{\zeta\omega_0}{\omega_d} \sin(\omega_d[t-\tau]) \right] + \frac{f(\tau)}{k}.$$

La *réponse impulsionnelle* s'obtient alors de la manière suivante :

$$du(t) = \dot{u}^{\text{ind}} d\tau.$$

Après simplification, on obtient l'équation (50).

□

En intégrant sur le temps (i.e. en considérant les contributions d'un ensemble de réponses impulsionnelles induites lorsque  $\tau$  varie de 0 à  $t$ ), on obtient une **intégrale de Duhamel** :

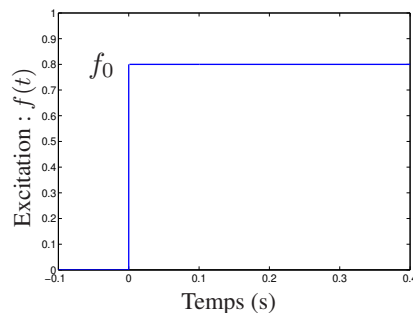
$$u(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_0 t}}{m\omega_d} \int_0^t e^{\zeta\omega_0 \tau} f(\tau) \sin[\omega_d(t - \tau)] d\tau. \quad (51)$$

Cette équation décrit le déplacement  $u$ , évalué à un temps  $t$ , provoqué par une force  $f$  agissant sur l'intervalle de temps  $[0, t]$ . Notons que cette équation est implicitement basée sur le fait que les conditions initiales en déplacement et vitesse sont nulles, c'est-à-dire  $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ . Dans le cas général où ces conditions sont non nulles, la réponse  $u(t)$  s'écrit plutôt de la manière suivante :

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[ u_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) + \frac{1}{m\omega_d} \int_0^t e^{\zeta\omega_0 \tau} f(\tau) \sin[\omega_d(t - \tau)] d\tau \right] \quad (52)$$

*Exercice.*

Exprimer la réponse temporelle d'un système  $(m, k, c)$  dont la masse est soumise à une force  $f(t) = f_0 \mathcal{H}(t)$ , en considérant les conditions initiales suivantes  $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ .



### 2.4.3 Excitation par mouvement du support

Exprimons la réponse d'un oscillateur  $(m, k, c)$  soumis à un mouvement imposé au support. On se restreindra au cas d'une *accélération imposée*  $\gamma^{\text{ex}}(t)$ , le cas d'un déplacement imposé n'induisant pas de difficultés additionnelles cependant. Dans le référentiel du support en mouvement, l'équation du mouvement de la masse s'exprime (cf. sous-chapitre 2.3.3) :

$$m\ddot{u}^* + c\dot{u}^* + ku^* = -m\gamma^{\text{ex}}(t). \quad (53)$$

En utilisant la stratégie employée précédemment, la réponse impulsionnelle du système à une excitation  $-m\gamma^{\text{ex}}(\tau)d\tau\delta(t' - \tau)$ , c'est-à-dire localisée dans le temps à  $t' = \tau$ , s'obtient de la manière suivante :

$$du^*(t) = -e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \frac{\gamma^{\text{ex}}(\tau)}{\omega_d} \text{sin}[\omega_d(t - \tau)]d\tau. \quad (54)$$

La réponse du système dans le référentiel du support en mouvement s'établit alors de la manière suivante, en considérant les contributions d'un ensemble de réponses impulsionnelles induites lorsque  $\tau$  varie de 0 à  $t$  :

$$u^*(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[ u_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_0 u_0 + \dot{u}_0}{\omega_d} \text{sin}(\omega_d t) - \frac{1}{\omega_d} \int_0^t e^{\zeta\omega_0 \tau} \gamma^{\text{ex}}(\tau) \text{sin}[\omega_d(t - \tau)]d\tau \right] \quad (55)$$

où  $u_0$  et  $\dot{u}_0$  désignent les conditions initiales en déplacement et en vitesse.

### 3 Systèmes à plusieurs degrés de liberté

#### 3.1 Introduction

Les systèmes mécaniques industriels peuvent être approchés, sous approximation plus ou moins grossière, par des systèmes discrets à plusieurs degrés de liberté. La *Méthode des Eléments Finis* est notamment bien adaptée pour décrire le comportement dynamique de systèmes élastiques continus, sur la base d'une discrétisation spatiale d'un système en plusieurs degrés de liberté (DDLs) et de l'interpolation des champs cinématiques à partir de ces DDLs. Une représentation à partir de systèmes masses-ressorts-amortisseurs ( $m_i, k_i, c_i$ ), couplés entre eux de manière plus ou moins simples, peut sous certaines conditions être envisagée pour approcher les problèmes de vibrations. A titre d'exemple, à une échelle grossière, les vibrations d'une automobile peuvent être appréhendées sur la base de systèmes masses-ressorts-amortisseurs couplés via les phénomènes de rotation (cf. Figure 15).

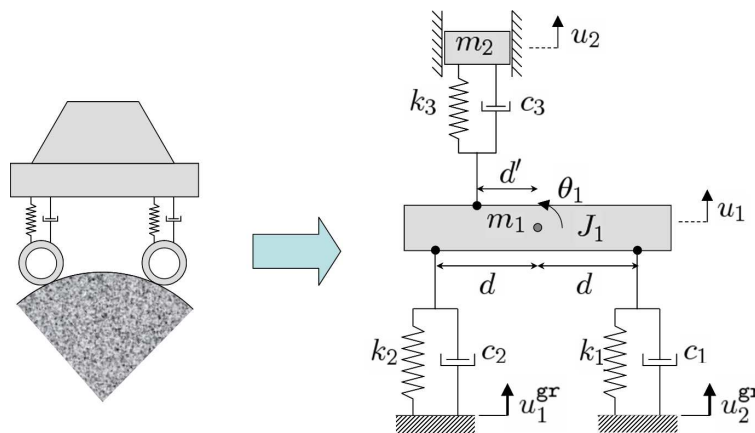


FIGURE 15 – Exemple de système à 3 DDLs et modélisation équivalente.

#### 3.2 Systèmes à deux degrés de liberté

##### 3.2.1 Vibrations libres et modes de vibrations

*Exemple : cas d'un système 2 masses - 2 ressorts.*

Considérons à titre d'exemple le problème de vibrations libres du système conservatif 2 masses - 2 ressorts ( $m_1, k_1$ ) et ( $m_2, k_2$ ) illustré sur la Figure 16.

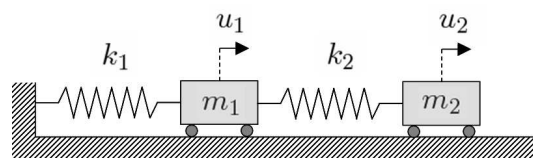


FIGURE 16 – Exemple d'un système masses-ressorts à 2 DDLs.

En notant  $u_1$  et  $u_2$  les déplacements respectifs des masses  $m_1$  et  $m_2$ , l'équilibre dynamique du système se formule par :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{u}_1 + (k_1 + k_2)u_1 - k_2 u_2 = 0 \\ m_2 \ddot{u}_2 + k_2 u_2 - k_2 u_1 = 0 \end{cases} \quad (56)$$

*Preuve.*

Sous forme matricielle, ce système d'équations s'exprime encore par :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{M}]} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (57)$$

où  $[\mathbf{M}]$  et  $[\mathbf{K}]$  sont appelées, respectivement, **matrice de masse** et **matrice de rigidité** (ou de raideur) du système.

*Remarque importante.*

Les matrices  $[\mathbf{M}]$  et  $[\mathbf{K}]$  sont symétriques (ce sera valable pour l'ensemble des problèmes de vibrations rencontrés dans ce cours). Ce résultat important nous permettra par la suite de mettre en évidence certaines propriétés intéressantes des *modes de vibrations*.

En s'appuyant sur l'étude des systèmes à 1 DDL (cf. chapitre précédent), on postule que la solution  $(u_1, u_2)$  du système d'équations (57) est de la forme :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{X} \cos(\omega t - \varphi), \quad (58)$$

où  $\mathbf{X}$  représente un vecteur  $2 \times 1$  traduisant l'*amplitude* des oscillations, pour les deux masses, alors que le terme  $\omega$  traduit la *pulsation* de ces oscillations. En injectant cette forme de solution dans l'équation (57), on obtient :

$$[\mathbf{K}]\mathbf{X} = \omega^2[\mathbf{M}]\mathbf{X}. \quad (59)$$

Cette équation matricielle possède comme solution triviale  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , ce qui n'apporte aucune information quant au caractère oscillant du système. D'autres solutions, non triviales, peuvent être envisagées lorsque les deux équations du mouvement (pour  $u_1$  et  $u_2$ ) sont redondantes. Mathématiquement parlant, cela signifie que le rang du système matriciel est inférieur à 2, c'est-à-dire que le déterminant de  $[\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]$  est nul. En d'autres termes, ces solutions dérivent d'un *problème aux valeurs propres* (dit généralisé), écrit de la manière suivante :

$$\det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) = 0 \quad , \quad [\mathbf{K}]\mathbf{X} = \omega^2[\mathbf{M}]\mathbf{X}, \quad (60)$$

où  $\omega^2$  et  $\mathbf{X}$  renvoient, respectivement, aux notions de **valeurs propres** et de **vecteurs propres**. Notons également que le déterminant  $\det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}])$  s'exprime par

$$\det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) = \det \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - \omega^2 m_2 \end{bmatrix}. \quad (61)$$



En résolvant  $\det([\mathbf{K}] - \omega^2[\mathbf{M}]) = 0$ , on obtient alors deux valeurs propres  $\omega_1^2$  et  $\omega_2^2$  :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{[m_1 k_2 + m_2(k_1 + k_2)] \mp \sqrt{[m_1 k_2 + m_2(k_1 + k_2)]^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2}. \quad (62)$$

En outre, on obtient deux vecteurs propres  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{X}_2$  :

$$\mathbf{X}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 - \omega_{1,2}^2 m_2 / k_2 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (63)$$

*Remarque.*

Les vecteurs propres sont définis à une constante près.

*Définition.*

On appelle **modes de vibrations** les doublets  $(\omega_1, \mathbf{X}_1)$  et  $(\omega_2, \mathbf{X}_2)$ , solutions du problème aux valeurs propres (60). Pour chaque mode  $j$  (ici,  $j = 1, 2$ ),  $\omega_j$  et  $\mathbf{X}_j$  sont respectivement appelées **pulsation propre** et **forme propre** (ou *vecteur propre*).

*Exercice.*

Exprimer les modes de vibrations du système illustré sur la Figure 16, lorsque  $m_1 = m_2 = m$  et  $k_1 = k_2 = k$ .

**Généralisation : cas des systèmes à 2 DDLs arbitraires.**

Nous venons de décrire les vibrations libres du système 2 masses - 2 ressorts illustré sur la Figure 16. D'une manière générale, d'autres types de systèmes à 2 DDLs peuvent être décrits sur le même principe. Le système à 2 DDLs illustré sur la Figure 17 est un exemple différent de celui abordé ci-dessus (car comportant un ressort supplémentaire), mais pouvant être traité d'une manière similaire. Il en est de même pour le système illustré sur la Figure 18, comportant 2 disques rigides massifs couplés par 3 arbres de torsion sans masses.

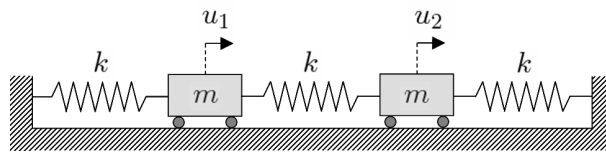


FIGURE 17 – Autre exemple de système masses-ressorts à 2 DDLs.

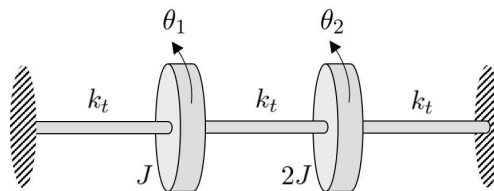


FIGURE 18 – Autre exemple de système 2 DDLs, composé de disques rigides massifs et d'arbres de torsion sans masses.

Pour aborder les vibrations libres de ces systèmes, le point de départ consiste toujours à formuler les *équations d'équilibre dynamique*. D'un point de vue matriciel, celles-ci s'expriment d'une manière analogue à celles abordées ci-dessus, à partir d'une *matrice de masse*  $[\mathbf{M}]$  et d'une *matrice de raideur*  $[\mathbf{K}]$

toutes deux symétriques :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{M}]} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (64)$$

Le calcul des modes de vibrations  $(\omega_1, \mathbf{X}_1)$  et  $(\omega_2, \mathbf{X}_2)$  donne alors :

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(M_{11}K_{22} + M_{22}K_{11}) \mp \sqrt{(M_{11}K_{22} + M_{22}K_{11})^2 - 4M_{11}M_{22}(K_{11}K_{22} - K_{12}^2)}}{2M_{11}M_{22}}, \quad (65)$$

$$\mathbf{X}_{1,2} = \begin{bmatrix} (K_{22} - \omega_{1,2}^2 M_{22}) / (-K_{12}) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (66)$$

*Exercice.*

Exprimer les modes de vibrations du système 2 masses - 3 ressorts illustré sur la Figure 17.

### 3.2.2 Réponse forcée harmonique

Considérons le problème d'un système à 2 DDLs arbitraire, avec amortissements visqueux, excité par forces harmoniques (cf. Figure 19 par exemple).

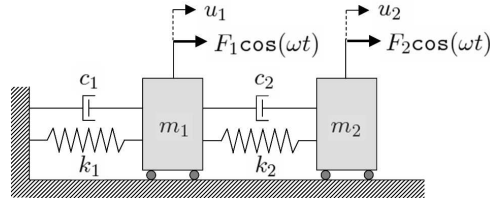


FIGURE 19 – Système masses-ressorts-amortisseurs à 2 DDLs excité par forces harmoniques.

Les équations d'équilibre associées à un tel système – constitué par exemple de deux masses  $m_1$  et  $m_2$  excitées par forces harmoniques  $F_1 \cos(\omega t)$  et  $F_2 \cos(\omega t)$ , et connectées à des ressorts  $(k_1, k_2)$  et des amortisseurs  $(c_1, c_2)$  – s'expriment alors sous *forme matricielle* de la manière suivante (en raisonnant dans le plan complexe) :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} M_{11} & 0 \\ 0 & M_{22} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{M}]} \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{C}]} \begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{12} & K_{22} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{K}]} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}, \quad (67)$$

où  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{C}]$  et  $[\mathbf{K}]$  représentent respectivement les **matrices de masse, d'amortissement et de raideur**. La **solution stationnaire** de cette équation du mouvement peut être recherchée sous la forme suivante (cf. chapitre 2.3.2) :

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} e^{i\omega t}, \quad (68)$$

où  $U_1$  et  $U_2$  désignent les amplitudes complexes des déplacements, pour les 2 masses. En injectant cette forme de solution dans l'équation (67), on obtient alors :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\omega^2 M_{11} + i\omega C_{11} + K_{11} & i\omega C_{12} + K_{12} \\ i\omega C_{21} + K_{21} & -\omega^2 M_{22} + i\omega C_{22} + K_{22} \end{bmatrix}}_{[\mathbf{D}]} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}, \quad (69)$$

où  $[\mathbf{D}]$  représente la **matrice de rigidité dynamique** du système, dépendante de la fréquence. Elle est définie par  $[\mathbf{D}] = -\omega^2[\mathbf{M}] + i\omega[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}]$ . Le système matriciel (69) s'écrit encore :

$$\begin{cases} (-\omega^2 M_{11} + i\omega C_{11} + K_{11})U_1 + (i\omega C_{12} + K_{12})U_2 = F_1 \\ (i\omega C_{21} + K_{21})U_1 + (-\omega^2 M_{22} + i\omega C_{22} + K_{22})U_2 = F_2 \end{cases} \quad (70)$$

Pour trouver les amplitudes complexes  $U_1$  et  $U_2$  des déplacements des deux masses, il "suffit" donc de résoudre ce système de deux équations à deux inconnues...

*Application 1 : cas d'une excitation par accélération imposée au support.*

On considère le système conservatif 2 masses - 2 ressorts  $(m_1, k_1)$  et  $(m_2, k_2)$  illustré sur la Figure 20, pour lequel  $m_1 = 2m_2 = 2m$  et  $k_1 = k_2 = k$ . L'ensemble est connecté à un support rigide soumis à une accélération harmonique  $\Gamma^{\text{gr}} \cos(\omega t)$ . Il s'agit de déterminer les réponses harmoniques  $u_1 = U_1 \cos(\omega t)$  et  $u_2 = U_2 \cos(\omega t)$  des deux masses.

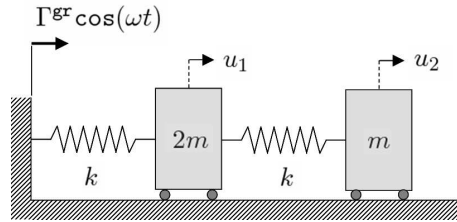


FIGURE 20 – Système masses-ressorts excité par accélération imposée.

Les matrices de masse et de raideur s'expriment par

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}.$$

Dans le référentiel du support en mouvement, l'équilibre dynamique du système se traduit par

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\omega^2(2m) + 2k & -k \\ -k & -\omega^2 m + k \end{bmatrix}}_{[\mathbf{D}]} \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} = - \underbrace{\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{[\mathbf{M}]} \begin{bmatrix} \Gamma^{\text{gr}} \\ \Gamma^{\text{gr}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2m\Gamma^{\text{gr}} \\ -m\Gamma^{\text{gr}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}}.$$

Les équations à résoudre s'expriment alors de la manière suivante :

$$\begin{cases} (-2\omega^2 m + 2k)U_1^* - kU_2^* = -2m\Gamma^{\text{gr}} \\ -kU_1^* + (-\omega^2 m + k)U_2^* = -m\Gamma^{\text{gr}} \end{cases} \quad (71)$$

Après résolution, les amplitudes des déplacements sont finalement exprimées de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} = -\frac{m\Gamma^{\text{gr}}}{2(-\omega^2 m + k)^2 - k^2} \begin{bmatrix} -\omega^2(2m) + 3k \\ -\omega^2(2m) + 4k \end{bmatrix} = -\frac{\Gamma^{\text{gr}}/\omega_0^2}{2[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 - 1} \begin{bmatrix} 3 - 2(\omega/\omega_0)^2 \\ 4 - 2(\omega/\omega_0)^2 \end{bmatrix},$$

où  $\omega_0^2 = k/m$ .

*Application 2 : absorbeur dynamique de vibration.*

On considère le mouvement d'un système masse-ressort ( $m_1, k_1$ ) (système principal) auquel on couple un système auxiliaire ( $m_2, k_2, c_2$ ) ne comportant pas d'excitation, c'est-à-dire que  $F_2 = 0$ . Ce type de système s'appelle un absorbeur dynamique de vibrations. Il a pour but de diminuer les niveaux vibratoires de la masse  $m_1$ . Le système couplé est illustré sur la Figure 21.

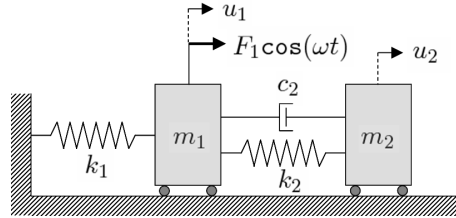


FIGURE 21 – Système masse-ressort ( $m_1, k_1$ ) couplé à un absorbeur dynamique de vibration.

Pour cet exemple, les matrices de masse, de raideur et d'amortissement s'écrivent :

$$[\mathbf{M}] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}. \quad (72)$$

En résolvant le système matriciel  $(-\omega^2[\mathbf{M}] + i\omega[\mathbf{C}] + [\mathbf{K}])\mathbf{U} = \mathbf{F}$ , on trouve les amplitudes complexes  $U_1$  et  $U_2$ . En particulier, le module de  $U_1$  (déplacement de la masse  $m_1$ ) s'exprime par

$$|U_1|^2 = \frac{4\zeta^2\gamma^2 + (\gamma^2 - \delta^2)^2}{4\zeta^2\gamma^2(\gamma^2 - 1 + \kappa\gamma^2)^2 + [\kappa\delta^2\gamma^2 - (\gamma^2 - 1)(\gamma^2 - \delta^2)]^2}, \quad (73)$$

où :

- $\omega_0 = \sqrt{k_1/m_1}$  : pulsation du système principal
- $\omega_a = \sqrt{k_2/m_2}$  : pulsation du système annexe (absorbeur)
- $\kappa = m_2/m_1$  : ratio masse absorbeur / masse du système principal
- $\delta = \omega_a/\omega_0$  : ratio pulsation absorbeur / pulsation du système principal
- $\gamma = \omega/\omega_0$  : ratio pulsation d'excitation / pulsation du système principal

En jouant sur les valeurs de ces paramètres, il devient possible de modifier l'amplitude du déplacement de la masse  $m_1$ .

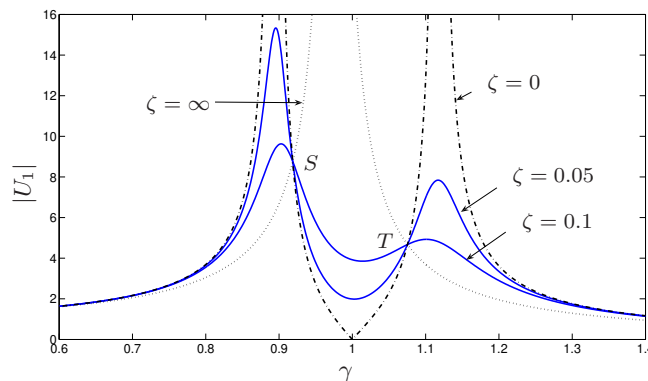


FIGURE 22 – Evolution fréquentielle du déplacement (amplitude) de la masse  $m_1$ , lorsque  $\kappa = 1/20$  et  $\delta = 1$ .

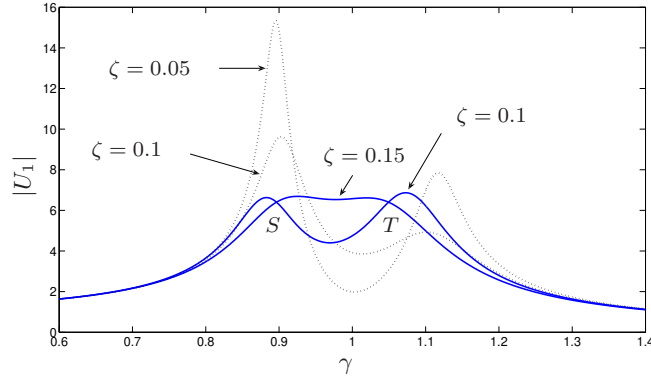


FIGURE 23 – Evolution fréquentielle du déplacement (amplitude) de la masse  $m_1$ , lorsque  $\kappa = 1/20$  et  $\delta = 1$  (trait en pointillés) et lorsque  $\kappa = 1/20$  et  $\delta = 1/(1 + \kappa)$  (trait continu).

### 3.3 Systèmes à $n$ degrés de liberté

#### 3.3.1 Introduction

La résolution directe des équations du mouvement peut s'avérer extrêmement délicate et fastidieuse lorsque le nombre de degrés de liberté (DDLs) augmente ( $n > 2$ ). Les difficultés principales renvoient aux calculs des réponses forcées, concernant l'inversion des systèmes matriciels et l'intégration temporelle lorsque des excitations complexes sont considérées. La projection de ces équations sur des *bases de modes de vibrations* permet de s'affranchir de ces difficultés, dans le sens qu'elle ramène l'étude d'un problème à plusieurs DDLs à celle d'un ensemble de sous-problèmes à 1 DDL, découplés entre eux. La stratégie de résolution de ces sous-systèmes peut alors être appréhendée sur la base des techniques précédemment évoquées dans le chapitre 2.

#### 3.3.2 Modes de vibration

D'une manière générale, les *vibrations libres d'un système conservatif* à  $n$  DDLs peuvent être appréhendées à partir du système matriciel suivant :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (74)$$

où  $[\mathbf{M}]$  et  $[\mathbf{K}]$  sont des matrices de masse et de raideur de taille  $n \times n$ ;  $\mathbf{u}$  est un vecteur de taille  $n \times 1$  exprimant les déplacements des DDLs du système. Le problème aux valeurs propres permettant de calculer les solutions de ce système – supposées de la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{X}\cos(\omega t - \varphi)$  – s'exprime alors (cf. sous-chapitre 3.2.1) :

$$\det([\mathbf{K}] - \omega_j^2[\mathbf{M}]) = 0 \quad , \quad [\mathbf{K}]\mathbf{X}_j = \omega_j^2[\mathbf{M}]\mathbf{X}_j. \quad (75)$$

Les solutions obtenues  $(\omega_j, \mathbf{X}_j)$  représentent alors les **modes de vibration** du système.

#### **Orthogonalité des modes de vibration.**

Deux modes donnés  $(\omega_r, \mathbf{X}_r)$  et  $(\omega_s, \mathbf{X}_s)$ , pour lesquels  $\omega_r \neq \omega_s$ , vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\mathbf{X}_r^T[\mathbf{M}]\mathbf{X}_s = 0 \quad , \quad \mathbf{X}_r^T[\mathbf{K}]\mathbf{X}_s = 0. \quad (76)$$

Lorsque toutes les pulsations propres  $\omega_j$  sont distinctes, ces propriétés d'orthogonalité se résument alors à :

$$\boxed{\mathbf{X}_r^T [\mathbf{M}] \mathbf{X}_s = 0 \quad , \quad \mathbf{X}_r^T [\mathbf{K}] \mathbf{X}_s = 0 \quad \text{lorsque } r \neq s.} \quad (77)$$

*Preuve.*

*Définition 1.*

On appelle **masses modales** et **raideurs modales** les *quantités scalaires*  $m_j$  et  $k_j$  définies par :

$$\boxed{m_j = \mathbf{X}_j^T [\mathbf{M}] \mathbf{X}_j \quad , \quad k_j = \mathbf{X}_j^T [\mathbf{K}] \mathbf{X}_j} \quad (78)$$

Par ailleurs, les **pulsations propres** sont définies par

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}}. \quad (79)$$

*Définition 2.*

On appelle **modes de corps rigide** les solutions particulières du problème (75) telles que  $[\mathbf{K}] \mathbf{X} = \mathbf{0}$ , c'est-à-dire qu'elles sont associées à des valeurs propres nulles  $\omega_j^2 = 0$ . Le nombre maximum de modes de corps rigides est de 6 (3 associés aux mouvements de translations – selon les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  – et 3 associés aux mouvements de rotations).

**Normalisation des modes de vibrations.**

On rappelle que les vecteurs propres  $\mathbf{X}_j$  sont définis à une constante près. Il est parfois souhaitable de les normaliser par rapport à la matrice de masse, dans un souci de simplification des équations mais aussi de conditionnement des opérateurs matriciels mis en jeu. Cette normalisation s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{X}_j \rightarrow \frac{\mathbf{X}_j}{\left(\mathbf{X}_j^T [\mathbf{M}] \mathbf{X}_j\right)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad m_j = 1. \quad (80)$$

En d'autres termes, cela sous-entend que chaque forme propre  $\mathbf{X}_j$  doit être divisée par la racine carrée de sa masse modale, c'est-à-dire  $\sqrt{m_j}$ . En considérant les "nouvelles" formes propres normalisées, les "nouvelles" masses modales sont égales à l'unité, i.e.  $m_j = 1 \forall j$ . Dans ces conditions, l'expression des pulsations propres devient alors  $\omega_j = \sqrt{k_j} \forall j$ .

### 3.3.3 Principe de décomposition modale

*Proposition.*

La famille des formes propres  $\{\mathbf{X}_j\}_{j=1,\dots,n}$  forme une base de dimension  $n$  permettant de représenter le comportement dynamique du système. Cela sous-entend que le vecteur des déplacements  $\mathbf{u}$  peut être exprimé sur la base des modes de vibrations. Dans le cas où il n'existe pas de modes de corps rigide, la décomposition modale s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \alpha_j, \quad (81)$$

où  $\alpha_j$  représentent les **amplitudes modales**, également appelées coordonnées généralisées.

*Preuve.* Les vecteurs propres  $\{\mathbf{X}_j\}_{j=1,\dots,n}$  sont orthogonaux vis à vis de la matrice  $[\mathbf{M}]$  qui est définie positive (d'un point de vue mathématique, cela signifie que  $\mathbf{X}_j^T [\mathbf{M}] \mathbf{X}_j \alpha_j = 0 \Rightarrow \alpha_j = 0$ ). Il en résulte que les vecteurs propres sont linéairement indépendants. En d'autres termes, la famille  $\{\mathbf{X}_j\}_{j=1,\dots,n}$  représente une base de vecteurs de dimension  $n$  égale au nombre de DDLs du système.

□

En utilisant le principe de décomposition modale et les propriétés d'orthogonalité des modes, il est alors possible de reformuler un problème matriciel de dimension  $n$  sur la base de  $n$  sous-problèmes à 1 DDL, découplés entre eux. Les techniques de résolution de chacun de ces sous-problèmes apparaissent alors identiques à celles développées dans le chapitre 2. Cette approche sera abordée dans la suite de ce chapitre. Dans ce cadre, nous supposons que les modes sont normalisés de sorte que les masses modales sont égales à l'unité :  $m_j = 1 \forall j$  (voir plus haut).

#### *Application au calcul des vibrations libres sans amortissement.*

D'une manière générale, les vibrations libres d'un système à  $n$  DDLs sans amortissement s'expriment sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{cases} [\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (82)$$

où  $\mathbf{u}_0$  et  $\dot{\mathbf{u}}_0$  représentent des vecteurs de taille  $n \times 1$  exprimant les conditions initiales du système. En appliquant le principe de décomposition modale et les propriétés d'orthogonalité des modes, on montre alors que ce problème de dimension  $n$  est équivalent aux  $n$  sous-problèmes suivants, indépendants entre eux et formulés en termes d'amplitudes modales  $\alpha_j$  :

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_j + \omega_j^2 \alpha_j = 0 & j = 1, \dots, n \\ \alpha_j|_{t=0} = \underbrace{\mathbf{X}_j^T [\mathbf{M}] \mathbf{u}_0}_{\alpha_{j0}} \quad , \quad \dot{\alpha}_j|_{t=0} = \underbrace{\mathbf{X}_j^T [\mathbf{M}] \dot{\mathbf{u}}_0}_{\dot{\alpha}_{j0}} \end{cases} \quad (83)$$

*Preuve.*

Notons que les amplitudes  $\alpha_j$  dépendent du temps  $t$  et s'expriment d'une manière analogue aux solutions  $u$  évoquées dans le chapitre 2, c'est-à-dire dans ce cas :

$$\boxed{\alpha_j = \alpha_{j0} \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\alpha}_{j0}}{\omega_j} \sin(\omega_j t)} \quad (84)$$

Connaissant les formes propres  $\mathbf{X}_j$ , le déplacement du système s'exprime alors par  $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \alpha_j$ .

### 3.3.4 Cas des systèmes dissipatifs

La stratégie de résolution des problèmes vibratoires par décomposition modale peut également être envisagée en présence d'amortissement, lorsque la matrice d'amortissement est proportionnelle à la matrice de masse et de rigidité (cas d'un amortissement de Rayleigh), c'est-à-dire :

$$[\mathbf{C}] = a[\mathbf{M}] + b[\mathbf{K}]. \quad (85)$$

Dans ce cas précis, l'orthogonalité des formes propres  $\mathbf{X}_j$  est également vérifiée vis-à-vis de la matrice d'amortissement  $[\mathbf{C}]$ .

#### *Application au calcul des vibrations libres.*

D'une manière générale, les oscillations libres d'un système à  $n$  DDLs avec amortissement visqueux peuvent être décrites à partir de l'équation matricielle suivante :

$$\begin{cases} [\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0 \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}|_{t=0} = \dot{\mathbf{u}}_0 \end{cases} \quad (86)$$

En appliquant le principe de décomposition modale et les propriétés d'orthogonalité des modes, on montre alors que ce problème de dimension  $n$  est équivalent aux  $n$  sous-problèmes suivants, indépendants entre eux et formulés en termes d'amplitudes modales  $\alpha_j$  :

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{\alpha}_j + 2\zeta_j \omega_j \dot{\alpha}_j + \omega_j^2 \alpha_j = 0 & j = 1, \dots, n \\ \alpha_j|_{t=0} = \underbrace{\mathbf{X}_j^T [\mathbf{M}] \mathbf{u}_0}_{\alpha_{j0}} \quad , \quad \dot{\alpha}_j|_{t=0} = \underbrace{\mathbf{X}_j^T [\mathbf{M}] \dot{\mathbf{u}}_0}_{\dot{\alpha}_{j0}} \end{cases}} \quad (87)$$

où  $\zeta_j$  représentent les **taux d'amortissements modaux**, définis tels que :

$$\zeta_j = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\omega_j} + b\omega_j \right). \quad (88)$$

*Preuve.*

Les solutions  $\alpha_j$  s'expriment alors d'une manière analogue à celle évoquée dans le cadre du chapitre 2,



c'est-à-dire :

$$\alpha_j = e^{-\zeta_j \omega_j t} \left[ \alpha_{j0} \cos(\omega_{jd} t) + \frac{\zeta_j \omega_{jd} \alpha_{j0} + \dot{\alpha}_{j0}}{\omega_{jd}} \sin(\omega_{jd} t) \right] \quad (89)$$

où

$$\omega_{jd} = \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2}. \quad (90)$$

Connaissant les modes  $\mathbf{X}_j$ , le vecteur des déplacements du système s'exprime alors par  $\mathbf{u} = \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \alpha_j$ .

### **Application au calcul des réponses forcées harmoniques.**

D'une manière générale, les oscillations forcées d'un système à  $n$  DDLs avec amortissements visqueux, soumis à des forces harmoniques, peuvent être exprimées sous la forme matricielle suivante :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = \mathbf{F}e^{i\omega t}. \quad (91)$$

La solution stationnaire de ce problème peut être recherchée sous la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{i\omega t}$ , en accord avec l'analyse présentée dans le chapitre 2. Le problème consiste alors à identifier le vecteur des amplitudes complexes  $\mathbf{U}$ . En suivant le principe de décomposition modale, à savoir  $\mathbf{U} = \sum_j \mathbf{X}_j \alpha_j$  (notons que les amplitudes modales  $\alpha_j$  sont ici sous-entendues comme fonctions de la pulsation d'excitation  $\omega$ ), on obtient :

$$\alpha_j = \frac{F_j/k_j}{1 - (\omega/\omega_j)^2 + 2i\zeta_j\omega/\omega_j} \quad \text{où} \quad F_j = \mathbf{X}_j^T \mathbf{F} \quad j = 1, \dots, n \quad (92)$$

où les termes  $F_j$  sont appelés **forces modales**.

*Preuve.*

### **3.3.5 Digression sur la notion d'excitation par mouvement des supports**

Il s'agit de déterminer les vibrations d'un système pour lequel certains DDLs (appelés DDLs de frontières et au nombre de  $n_F$ ) sont soumis à des mouvements imposés traduits à partir d'un vecteur  $\mathbf{u}^{\text{gr}}$ , de taille  $n_F \times 1$  et de composantes *non forcément égales*. En présence de ces mouvements imposés au niveau des DDLs de frontières (aussi appelés DDLs des supports), l'équilibre dynamique du système s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}} + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}} + [\mathbf{K}]\mathbf{u} = -[\mathbf{C}_{\text{IF}}]\dot{\mathbf{u}}^{\text{gr}} - [\mathbf{K}_{\text{IF}}]\mathbf{u}^{\text{gr}}, \quad (93)$$

où  $[\mathbf{K}_{\text{IF}}]$  et  $[\mathbf{C}_{\text{IF}}]$  représentent des matrices de raideur et d'amortissement, de taille  $n \times n_F$  (où  $n$  représente le nombre de DDLs internes, ne comprenant pas les DDLs de frontières), "couplant" les DDLs internes à ceux de frontières. Notons que pour établir l'expression (93), on a supposé que la matrice de masse n'induit pas de termes de couplage.

*Preuve.*

*Définition.*

On note  $\mathbf{u}^{\text{st}}$  le vecteur des **déplacements statiques** défini par

$$\mathbf{u}^{\text{st}} = -[\mathbf{K}]^{-1}[\mathbf{K}_{\text{IF}}]\mathbf{u}^{\text{gr}}. \quad (94)$$

En d'autres termes,  $\mathbf{u}^{\text{st}}$  est un vecteur, de taille  $n \times 1$ , traduisant la réponse statique du système au déplacement de l'interface. D'une manière analogue à celle évoquée dans le cadre du chapitre 2 (cas des systèmes à 1 DDL), le problème peut être traité en termes de **déplacement relatif**. Dans le cas présent, il s'agit de considérer un vecteur  $\mathbf{u}^*$ , tel que :

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\text{st}}. \quad (95)$$

*Proposition 1.*

Lorsque la matrice d'amortissement  $[\mathbf{C}]$  est proportionnelle à la matrice de raideur  $[\mathbf{K}]$  – c'est-à-dire lorsque  $[\mathbf{C}] = b[\mathbf{K}]$  – le vecteur  $\mathbf{u}^*$  s'obtient par résolution du problème matriciel suivant :

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}}^* + [\mathbf{C}]\dot{\mathbf{u}}^* + [\mathbf{K}]\mathbf{u}^* = -[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{u}}^{\text{st}}. \quad (96)$$

*Preuve.*

*Proposition 2.*

Le vecteur  $\mathbf{u}^*$  représente la réponse vibratoire du système dans le *référentiel des supports fixes*. Il admet la décomposition modale suivante :

$$\mathbf{u}^* = \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \alpha_j, \quad (97)$$

où  $\mathbf{X}_j$  désigne les formes propres du système avec supports fixes, solutions du problème aux valeurs propres (75) (notons que dans le cadre de ce problème aux valeurs propres, les matrices de masse  $[\mathbf{M}]$  et de raideur  $[\mathbf{K}]$  renvoient précisément au système avec supports fixes).

***Application au calcul des réponses forcées harmoniques.***

En accord avec l'analyse présentée dans le chapitre 2, la solution stationnaire du mouvement induit par des déplacements harmoniques  $\mathbf{u}^{\text{st}} = \mathbf{U}^{\text{st}}e^{i\omega t}$ , imposés aux supports, peut être recherchée sous la forme  $\mathbf{u}^* = \mathbf{U}^*e^{i\omega t}$ . En appliquant le principe de décomposition modale pour décrire le vecteur des amplitudes complexes  $\mathbf{U}^*$ , on obtient alors :

$$\alpha_j = \frac{(\omega/\omega_j)^2 U_j^{\text{st}}}{1 - (\omega/\omega_j)^2 + 2i\zeta_j \omega/\omega_j} \quad \text{où} \quad U_j^{\text{st}} = \mathbf{X}_j^T [\mathbf{M}] \mathbf{U}^{\text{st}} \quad j = 1, \dots, n \quad (98)$$

## 4 Systèmes élastiques continus

### 4.1 Introduction

Un grand nombre de systèmes mécaniques industriels peuvent être décrits sur la base d'un assemblage de différentes sous-structures possédant des caractéristiques inertielles (masses) et élastiques (raideurs) propres. Cette approche est connue sous le nom de sous-structuration dynamique. Dans le cadre d'hypothèses appropriées dites “*basses fréquences*”, une approche simplifiée à partir de sous-structures simples de types inerties ponctuelles (par ex : masses en translation, disques massifs en rotation) et raideurs sans masses (par ex : ressorts, arbres en torsion) est envisageable. Cette représentation – axée sur l'étude de systèmes masses-ressorts-amortisseurs – a été abordée lors des précédents chapitres. Elle devient cependant peu pertinente à fréquences élevées, dès lors que les longueurs d'ondes deviennent du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques des sous-structures étudiées. Dans ce sens, chaque sous-structure doit être considérée comme un système continu exhibant un comportement dynamique propre “multi-DDLs”, contribuant de manière plus ou moins forte à la réponse dynamique du système global. En d'autres termes, la modélisation de type 1 DDL ( $m, k, c$ ) ne peut plus être envisagée. La description de chaque sous-structure requiert de prendre en compte, à l'échelle locale, ses propriétés inertielles et élastiques.

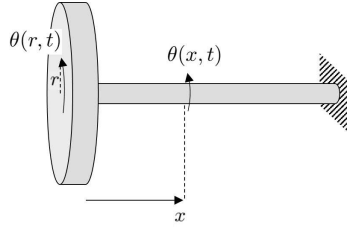


FIGURE 24 – Vibration d'un disque élastique couplé à un arbre élastique : lorsque la fréquence est suffisamment élevée, chaque sous-structure (disque et arbre) exhibe un comportement vibratoire (e.g. rotation  $\alpha$ ) non uniforme en espace.

Cette approche locale renvoie à la description des milieux continus. Un milieu continu élastique occupant un domaine  $\Omega$  ouvert de frontière  $\partial\Omega$  est illustré sur la Figure 25. La frontière  $\partial\Omega$  est supposée telle que  $\partial\Omega = S_t \cup S_u$  où  $S_t$  et  $S_u$  représentent respectivement les parties de  $\partial\Omega$  où sont imposées des forces surfaciques  $\vec{t}$  et des déplacements  $\vec{u}^{\text{gr}}$ .

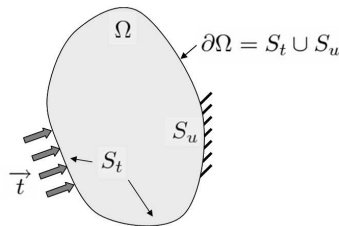


FIGURE 25 – Illustration d'un domaine élastique  $\Omega$  de frontière  $\partial\Omega = S_t \cup S_u$ .

Dans le cadre des petites perturbations (HPP), le **problème aux limites** permettant de décrire le comportement vibratoire du système s'exprime :

$$-\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho \ddot{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (99)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i \quad \text{sur } S_t \quad (100)$$

$$u_i = u_i^{\text{gr}} \quad \text{sur } S_u \quad (101)$$

Les équations (99) et (100-101) traduisent respectivement les équations d'équilibre local du système, dans les trois directions de l'espace ( $i = 1, 2, 3$ ), et les conditions aux limites. La résolution de ce problème est notamment appréhendée par approches numériques (éléments finis entre autres), en observant la *forme variationnelle* équivalente suivante (basée sur le *principe des travaux virtuels*) :

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \delta u_i \ddot{u}_i dV = \int_{S_t} \delta u_i t_i ds \quad \forall \delta u_i : \delta u_i = 0 \text{ sur } S_u. \quad (102)$$

Pour certains systèmes simples de type barres/poutres 1D, une résolution analytique est néanmoins envisageable dans le cadre d'hypothèses cinématiques appropriées, à savoir :

- **Hypothèse de Navier** : les sections restent planes ;
- **Hypothèse de Bernoulli** : les sections restent perpendiculaires à la fibre neutre ;
- **Principe de St Venant** : la répartition des contraintes sur une section quelconque est indépendante de la façon dont sont appliquées les conditions aux limites, à la condition que les résultantes en forces et moments demeurent inchangées.

Notons que dans le cadre de ces hypothèses, le mouvement de ces systèmes 1D (barres/poutres) peut être appréhendé par celui de leurs **fibres neutres** (i.e. le lieu des *centroïdes* de la section, le long de ces systèmes).

## 4.2 Vibrations longitudinales des barres

### 4.2.1 Vibrations libres et modes de vibrations

On considère le problème de vibrations libres d'une barre prismatique droite, homogène et *non amortie*, dont les caractéristiques matérielles et géométriques sont : la densité  $\rho [kg.m^{-3}]$ , le module d'Young  $E [Pa]$ , la section  $S [m^2]$  et la longueur  $L [m]$ . On désigne par  $x$  ( $x \in [0, L]$ ) l'abscisse permettant de repérer un point (ou une section) le long de la barre. A la position  $x$ , l'équation du mouvement du système s'exprime alors par :

$$\boxed{u'' - \frac{\rho}{E} \ddot{u} = 0 \quad x \in ]0, L[} \quad (103)$$

où  $u = u(x, t)$  représente le *déplacement longitudinal de la section*. Notons que pour établir cette équation, on a pris en compte que la contrainte axiale s'exprime par  $\sigma = Eu'$ .

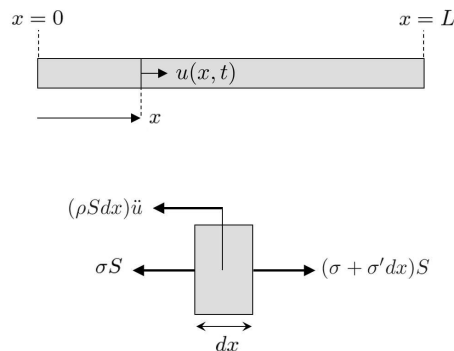


FIGURE 26 – Illustration d'une barre en traction-compression et équilibre dynamique d'un tronçon de longueur élémentaire  $dx$ .

*Preuve.*

En s'appuyant sur l'étude des systèmes à 1 DDL (cf. chapitre 2), on postule que la solution de l'équation (103) est de la forme  $u(x, t) = X(x)\cos(\omega t - \varphi)$ . L'équation à résoudre est alors :

$$X'' + \beta^2 X = 0 \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \quad (104)$$

Le paramètre  $\beta$  est appelé **nombre d'onde**. La solution générale de l'équation (104) s'exprime alors :

$$X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) \quad x \in ]0, L[, \quad (105)$$

où les valeurs des constantes  $A$  et  $B$ , de même que les valeurs du nombre d'onde  $\beta$ , sont à déterminer à partir des conditions aux limites du système :

- **Barre libre-libre :**

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$X'|_{x=0} = 0 \quad , \quad X'|_{x=L} = 0. \quad (106)$$

Les solutions de l'équation (104) (il y en a plusieurs !) s'écrivent alors :

$$X_j = A\cos(\beta_j x) \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta_j = \frac{j\pi}{L} \quad j \geq 0. \quad (107)$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\omega_j = \frac{j\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad j \geq 0. \quad (108)$$

Notons que dans ce cas, la solution obtenue lorsque  $j = 0$  – c'est-à-dire pour  $\omega_0 = 0$  et  $X_0 = A$  – correspond au *mode de corps rigide* (translation selon  $x$ ) du système.

- **Barre encastrée-libre :**

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$X|_{x=0} = 0 \quad , \quad X'|_{x=L} = 0. \quad (109)$$

Les solutions de l'équation (104) s'écrivent alors :

$$X_j = B\sin(\beta_j x) \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta_j = \frac{(2j-1)\pi}{2L} \quad j \geq 1. \quad (110)$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\omega_j = \frac{(2j-1)\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad j \geq 1. \quad (111)$$

- **Barre encastrée-encastrée :**

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$X|_{x=0} = 0 \quad , \quad X|_{x=L} = 0. \quad (112)$$

Les solutions de l'équation (104) s'écrivent alors :

$$X_j = B \sin(\beta_j x) \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta_j = \frac{j\pi}{L} \quad j \geq 1. \quad (113)$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\omega_j = \frac{j\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad j \geq 1. \quad (114)$$

*Preuve.*

### Définition

Les doublets  $(\omega_j, X_j)$  sont appelés **modes de vibrations**. Dans le cadre des vibrations longitudinales, on parlera de *modes de traction-compression*. Notons que leur nature dépend du type de conditions aux limites envisagé. Chaque mode  $j$  est caractérisé par une **pulsation propre**  $\omega_j$  et une **forme propre**  $X_j = X_j(x)$ , fonction de la position sur l'axe de la barre. Notons finalement que les formes propres sont définies à une constante près.

A titre d'exemple, les formes propres  $\{X_j\}_{j=1,2,3,4}$  associées aux 4 premiers modes de traction-compression d'une barre encastree-libre sont illustrées sur la Figure 27.

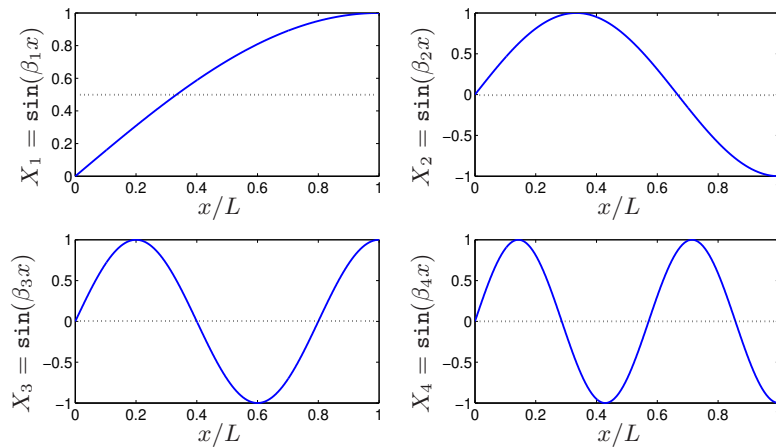


FIGURE 27 – Evolution spatiale des formes propres  $\{X_j\}_{j=1,2,3,4}$  pour une barre encastree-libre.

### Orthogonalité des modes de vibrations.

Deux modes donnés  $(\omega_r, X_r)$  et  $(\omega_s, X_s)$ , pour lesquels  $\omega_r \neq \omega_s$ , vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^L X_r X_s dx = 0 \quad , \quad \int_0^L X_r' X_s' dx = 0 \quad \text{lorsque} \quad r \neq s. \quad (115)$$

*Preuve.*

*Définition.*

On appelle **masses modales** et **raideurs modales** les quantités scalaires  $m_j$  et  $k_j$  définies par

$$m_j = \rho S \int_0^L X_j^2 dx \quad , \quad k_j = ES \int_0^L (X_j')^2 dx \quad \forall j \geq 1 \quad (116)$$

Les **pulsations propres** sont alors définies par

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}} \quad \forall j \geq 1. \quad (117)$$

**Normalisation des modes de vibrations.**

On rappelle que les formes propres  $X_j$  sont définies à une constante près. Il est parfois souhaitable de les normaliser par rapport aux masses modales. Cette normalisation s'exprime de la manière suivante :

$$X_j \rightarrow \frac{X_j}{\left(\rho S \int_0^L X_j^2 dx\right)^{1/2}} \quad \Rightarrow \quad m_j = 1 \quad \forall j \geq 1. \quad (118)$$

En d'autres termes, cela sous-entend que chaque forme propre  $X_j$  doit être divisée par la racine carrée de sa masse modale, c'est-à-dire  $\sqrt{m_j}$ . En considérant les "nouvelles" formes propres normalisées, les "nouvelles" masses modales sont égales à l'unité, i.e.  $m_j = 1 \forall j$ . Dans ce sens, les pulsations propres sont alors exprimées par  $\omega_j = \sqrt{k_j}$ .

#### 4.2.2 Réponse forcée harmonique

On considère le problème de vibrations d'une barre sollicitée ponctuellement, sur l'une de ses extrémités, par force ou déplacement imposés. Les excitations sont supposés harmoniques de pulsation  $\omega$  (cf. Figure 28), s'appliquant selon la direction longitudinale  $x$ .

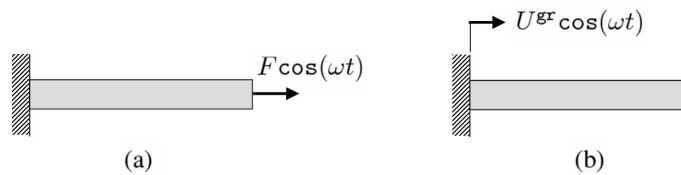


FIGURE 28 – Vibrations forcées harmoniques d'une barre (traction-compression) : (a) excitation par force imposée ; (b) excitation par déplacement imposé.

La **réponse stationnaire** s'obtient par considération d'une solution particulière  $u = Ue^{i\omega t}$  de l'équation (103), où  $U = U(x, \omega)$  représente l'amplitude complexe. On obtient alors l'équation suivante :

$$U'' + \omega^2 \frac{\rho}{E^*} U = 0 \quad x \in ]0, L[. \quad (119)$$

Ici, la barre est suppose amortie, les phénomènes de dissipation étant pris en compte à partir d'un **facteur de perte**  $\eta$ , "permettant" de relier la contrainte  $\sigma$  à la déformation axiale  $\varepsilon$  de la manière suivante :  $\sigma = E(1 + i\eta)\varepsilon$ . Cela revient donc à prendre en compte un module d'Young complexe  $E^* = E(1 + i\eta)$ . L'amplitude complexe  $U$  s'exprime alors par

$$U = Ae^{-i\beta^*x} + Be^{i\beta^*x} \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta^* = \omega \sqrt{\frac{\rho}{E^*}} \quad (120)$$

où  $\beta^*$  est le **nombre d'onde complexe**.

*Preuve.*

Notons que la solution stationnaire s'exprime à partir de deux constantes  $A$  et  $B$ . Celles-ci s'obtiennent par considération des **conditions aux limites** :

- Barre encastrée en  $x = 0$  et excitée par force en  $x = L$  :  
Les conditions aux limites s'écrivent :

$$U|_{x=0} = 0 \quad , \quad S\sigma|_{x=L} = E^* S U'|_{x=L} = F. \quad (121)$$

L'amplitude complexe  $U$  s'écrit alors :

$$U = \frac{F}{i\beta^* E^* S} \left( \frac{-e^{-i\beta^*x} + e^{i\beta^*x}}{e^{-i\beta^*L} + e^{i\beta^*L}} \right) \quad x \in ]0, L[. \quad (122)$$

- Barre excitée par déplacement imposé en  $x = 0$  et libre en  $x = L$  :  
Les conditions aux limites s'écrivent :

$$U|_{x=0} = U^{\text{gr}} \quad , \quad S\sigma|_{x=L} = 0 \quad \Rightarrow \quad U'|_{x=L} = 0. \quad (123)$$

L'amplitude complexe  $U$  s'écrit alors :

$$U = U^{\text{gr}} \left( \frac{e^{-i\beta^*(x-L)} + e^{i\beta^*(x-L)}}{e^{-i\beta^*L} + e^{i\beta^*L}} \right) \quad x \in ]0, L[. \quad (124)$$

*Application.*

La réponse en fréquences  $\omega \mapsto |U|$  d'une barre encastrée en  $x = 0$  et excitée par force harmonique



$F \cos(\omega t)$  en  $x = L$  (cf. Figure 28(a)) est illustrée sur la Figure 29. Les caractéristiques de la barre sont : la longueur  $L = 1 \text{ m}$ , la section  $S = 10^{-2} \times 10^{-2} \text{ m}^2$ , la densité  $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ , le module d'Young  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$  et le facteur de perte  $\eta = 0.01$ . La courbe représente l'amplitude du déplacement (tracée en échelle logarithmique) au point d'excitation. La courbe présente plusieurs "pics", significatifs du phénomène de résonance.

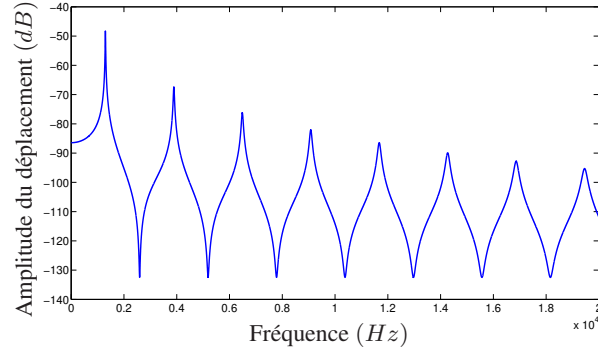


FIGURE 29 – Evolution fréquentielle du déplacement longitudinal (amplitude) d'une barre encastrée en  $x = 0$  et excitée par force harmonique en  $x = L$  : réponse au point d'excitation.

### 4.2.3 Principe de décomposition modale

*Proposition.*

Les formes propres  $\{X_j\}_{j \geq 0}$  constituent une base de représentation pour décrire le comportement dynamique du système. Dans le cas où il n'existe pas de mode de corps rigide, la décomposition modale se traduit par

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} X_j \alpha_j, \quad (125)$$

où  $\alpha_j = \alpha_j(t)$  représentent les **amplitudes modales**.

*Remarque.*

En pratique, seuls  $n$  modes  $\{X_j\}_{j=1, \dots, n}$  sont retenus pour décrire la décomposition modale. C'est le **principe de troncature modale**. La décomposition s'écrit alors :

$$\boxed{u \approx \sum_{j=1}^n X_j \alpha_j} \quad (126)$$

Connaissant les formes propres  $X_j$ , le problème consiste donc à déterminer les amplitudes modales  $\alpha_j$  pour déterminer le déplacement du système (c'est-à-dire à partir de l'équation (126)). L'obtention de ces amplitudes s'opère par considération des propriétés d'orthogonalité des modes, en résolvant un *ensemble de problèmes 1D indépendants*. La stratégie consiste à considérer la forme variationnelle associée au

problème de barre en vibrations :

$$ES \int_0^L \delta u' u' dx + \rho S \int_0^L (\delta u) \ddot{u} dx = (t_0 S) \delta u|_{x=0} + (t_L S) \delta u|_{x=L}, \quad (127)$$

où  $t_0$  et  $t_L$  représentent les forces surfaciques appliquées au système en  $x = 0$  et  $x = L$  (les forces appliquées s'expriment alors  $t_0 S$  et  $t_L S$ ). En s'appuyant sur la décomposition (126) – c'est-à-dire  $u = \sum_k X_k \alpha_k$  –, en choisissant un déplacement virtuel tel que  $\delta u = X_j$  puis en observant les propriétés d'orthogonalité (115), on obtient alors :

$$k_j \alpha_j + m_j \ddot{\alpha}_j = (t_0 S) X_j|_{x=0} + (t_L S) X_j|_{x=L} \quad \forall j \geq 1. \quad (128)$$

*Preuve.*

*Application.*

Reprenons le calcul de la réponse en fréquences de la barre encastree en  $x = 0$  et excitée par force  $F \cos(\omega t)$  en  $x = L$  (cf. Figure 29 et sous-chapitre précédent). La décomposition modale s'écrit  $U = \sum_j X_j \alpha_j$  où  $U = U(x, \omega)$  représente l'amplitude du déplacement,  $X_j$  représentent les formes propres associées aux modes de la barre encastree-libre (cf. Eq. (110)) et  $\alpha_j$  représentent les amplitudes modales qui sont ici à considérer comme fonctions de la pulsation d'excitation  $\omega$ . En observant que  $X_j|_{x=0} = 0 \forall j$ , l'équation (128) devient :

$$k_j(1 + i\eta)\alpha_j - \omega^2 m_j \alpha_j = \underbrace{F}_{t_L S} X_j|_{x=L} \quad \forall j \geq 1. \quad (129)$$

Dans cette équation, des phénomènes de dissipation ont été introduits à partir d'un facteur de perte  $\eta$  (voir sous-chapitre précédent). Ainsi, on obtient

$$\alpha_j = \frac{(F/k_j) \sin[(2j-1)\pi/2]}{(1+i\eta) - (\omega/\omega_j)^2} \quad \forall j \geq 1. \quad (130)$$

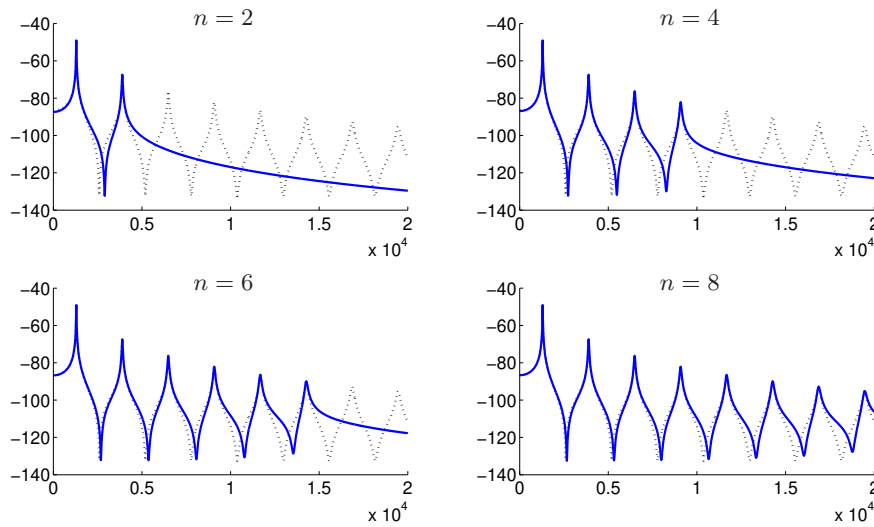


FIGURE 30 – Evolution fréquentielle du déplacement d'une barre encastree en  $x = 0$  et excitée par force harmonique en  $x = L$  : réponse au point d'excitation obtenue par approche modale.

La réponse du système en  $x = L$ , obtenue en utilisant la décomposition modale (126) avec différentes valeurs de  $n$ , a été tracée sur la Figure 30 et comparée à la solution exacte décrite sur la Figure 29. Notons que la convergence de l'approche modale, sur une bande de fréquences donnée, dépend du nombre de modes retenus dans cette bande de fréquences.

### **Cas des vibrations libres non amorties.**

En s'appuyant sur le principe de décomposition modale, le problème de vibrations libres d'une barre non amortie se traduit sous la forme modale suivante :

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_j + \omega_j^2 \alpha_j = 0 & \forall j \geq 1 \\ \alpha_j|_{t=0} = \alpha_{j0} = \frac{\rho S}{m_j} \int_0^L X_j u_0 dx & , \quad \dot{\alpha}_j|_{t=0} = \dot{\alpha}_{j0} = \frac{\rho S}{m_j} \int_0^L X_j \dot{u}_0 dx \end{cases} \quad (131)$$

où  $u_0 = u_0(x)$  et  $\dot{u}_0 = \dot{u}_0(x)$  représentent les conditions initiales en déplacement et en vitesse du système (non nécessairement uniformes en espace). En s'appuyant sur l'analyse des systèmes à 1 DDL vue dans le chapitre 2, les amplitudes modales  $\alpha_j$  s'obtiennent alors par :

$$\alpha_j = \alpha_{j0} \cos(\omega_j t) + \frac{\dot{\alpha}_{j0}}{\omega_j} \sin(\omega_j t) \quad \forall j \geq 1. \quad (132)$$

### **Excitation par mouvement d'un support.**

Considérons le problème d'une barre soumise sur l'une de ses extrémités (par exemple, en  $x = 0$ ) à un déplacement imposé  $u^{\text{gr}}$  (cf. Figure 28). L'autre extrémité est supposée libre. *Dans le référentiel du support en mouvement*, l'équation du mouvement de la barre se traduit sous la forme variationnelle suivante :

$$ES \int_0^L (\delta u^*)' (u^*)' dx + \rho S \int_0^L (\delta u^*) \ddot{u}^* dx = -\rho S \int_0^L \delta u^* \ddot{u}^{\text{gr}} dx, \quad (133)$$

où  $u^* = u - u^{\text{gr}}$  et  $\delta u^*|_{x=0} = 0$ . En choisissant comme déplacements virtuels les modes de vibrations  $X_j$  du système encasté-libre, on obtient pour la réponse harmonique :

$$k_j(1 + i\eta)\alpha_j - \omega^2 m_j \alpha_j = \omega^2 m_j U^{\text{gr}} \int_0^L X_j dx \quad \forall j \geq 1. \quad (134)$$

Les amplitudes modales  $\alpha_j$ , considérées comme fonctions de la pulsation d'excitation  $\omega$  et définies telles que  $U^* = \sum_j X_j \alpha_j$  (où  $U^*$  représente l'amplitude complexe du déplacement  $u^*$ ), s'écrivent alors (cf. chapitre 2) :

$$\alpha_j = \frac{(\omega/\omega_j)^2 U^{\text{gr}} \int_0^L \sin(\beta_j x) dx}{(1 + i\eta) - (\omega/\omega_j)^2} \quad \forall j \geq 1. \quad (135)$$

#### 4.2.4 Digression sur d'autres problèmes de vibrations

L'analyse des vibrations longitudinales d'une barre permet d'appréhender d'autres types de problèmes, tels que celui d'un arbre cylindrique en torsion ou celui d'une corde tendue oscillant transversalement (cf. Figure 31).

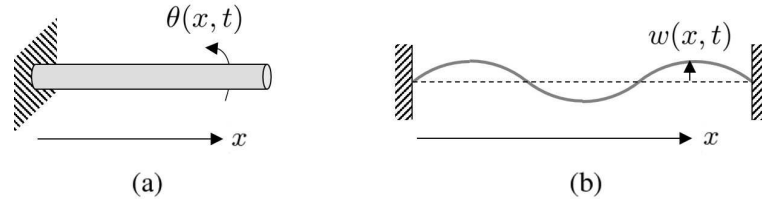


FIGURE 31 – Problèmes de vibrations analogues à celui d'une barre : (a) torsion d'un arbre cylindrique ; (b) corde tendue.

A titre d'exemple, pour ces deux problèmes, les équations du mouvement s'écrivent :

- Arbre cylindrique :

$$\theta'' - \frac{\rho}{G}\ddot{\theta} = 0 \quad x \in ]0, L[, \quad (136)$$

où  $\theta = \theta(x, t)$  représente la rotation d'une section de l'arbre positionnée à l'abscisse  $x$ ,  $G$  représente le module de cisaillement [ $Pa$ ], et où l'on a pris en compte que le couple de torsion s'exprime  $GJ\theta'$  ( $J$  représente le moment quadratique polaire [ $m^4$ ]).

- Corde tendue :

$$w'' - \frac{m}{T}\ddot{w} = 0 \quad x \in ]0, L[, \quad (137)$$

où  $w = w(x, t)$  représente le déplacement transversal d'un point de la corde positionné à l'abscisse  $x$ ;  $m$  et  $T$  représentent respectivement la masse par unité de longueur [ $kg.m^{-1}$ ] et la tension de la corde [ $N$ ].

Ces équations du mouvement sont analogues à celle décrite par l'équation (103) : il suffit de remplacer quelques données du problème (par ex, les substitutions  $u \rightarrow \theta$  et  $E \rightarrow G$  permettent de transposer un problème de barre en traction-compression en celui d'un arbre en torsion). La stratégie de résolution de ces problèmes vibratoires apparaît donc identique à celle abordée dans le cadre de la barre en traction-compression (cf. sous-chapitres précédents).

### 4.3 Vibrations transversales des poutres

#### 4.3.1 Vibrations libres et modes de vibrations

On considère le problème de vibrations d'une poutre prismatique droite, homogène et *non amortie*, dont les caractéristiques matérielles et géométriques sont : la densité  $\rho$  [ $kg.m^{-3}$ ], le module d'Young  $E$  [ $Pa$ ], la section  $S$  [ $m^2$ ], le moment quadratique de section  $I$  [ $m^4$ ] et la longueur  $L$  [ $m$ ]. On désigne par  $x$  ( $x \in [0, L]$ ) l'abscisse permettant de repérer un point le long de la  **fibre neutre**  du système. A la position  $x$ , l'équation du mouvement du système s'exprime alors par

$$\boxed{w'''' + \frac{\rho S}{EI}\ddot{w} = 0 \quad x \in ]0, L[} \quad (138)$$

où  $w = w(x, t)$  représente le *déplacement transversal de la fibre neutre*. Notons que pour établir cette équation, on a pris en compte que le moment fléchissant s'exprime par  $M = EIw''$  et que l'effort tranchant s'exprime per  $V = -M'$ .

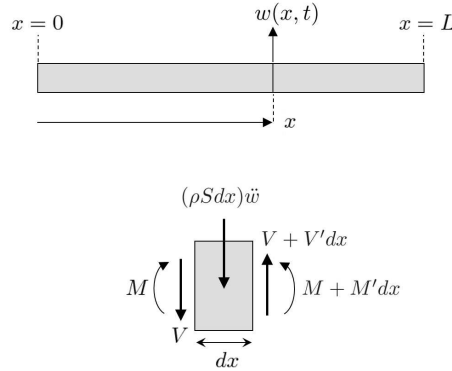


FIGURE 32 – Illustration d'une poutre en flexion et équilibre dynamique d'un tronçon de longueur élémentaire  $dx$ .

*Preuve.*

En s'appuyant sur l'étude des systèmes à 1 DDL (cf. chapitre 2), on postule que la solution de l'équation (138) est de la forme  $w(x, t) = X(x)\cos(\omega t - \varphi)$ . L'équation à résoudre est alors :

$$X'''' - \beta^4 X = 0 \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta = \left( \frac{\omega^2 \rho S}{EI} \right)^{1/4}. \quad (139)$$

Le paramètre  $\beta$  est appelé **nombre d'onde**. La solution générale de cette équation s'exprime alors par

$$X = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x) + C\text{ch}(\beta x) + D\text{sh}(\beta x) \quad x \in ]0, L[, \quad (140)$$

où les valeurs des constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , de même que les valeurs du nombre d'onde  $\beta$ , sont à déterminer à partir des **conditions aux limites** du système. A titre d'exemple, le cas de la poutre en appuis simples est analysé ci-après :

- Poutre en appuis simples :

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$X|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad X|_{x=L} = 0 \quad , \quad X''|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad X''|_{x=L} = 0. \quad (141)$$

Les solutions de l'équation (139) s'écrivent alors :

$$X_j = B\sin(\beta_j x) \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta_j = \frac{j\pi}{L} \quad j \geq 0. \quad (142)$$

Les pulsations associées à ces solutions sont exprimées par

$$\omega_j = \left( \frac{j\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \quad j \geq 1. \quad (143)$$

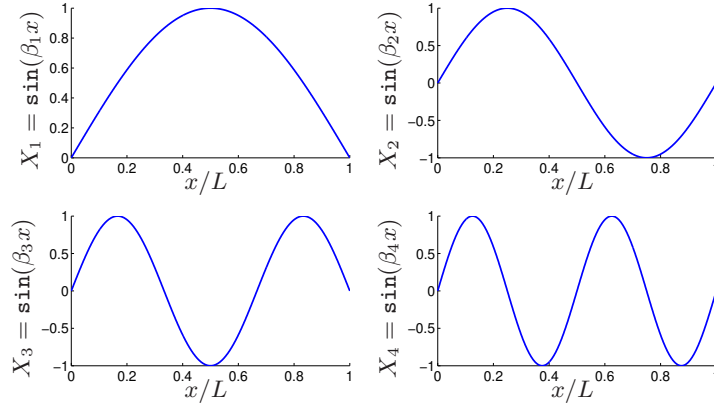


FIGURE 33 – Evolution spatiale des formes propres  $\{X_j\}_{j=1,2,3,4}$  pour une poutre en appuis simples.

*Définition.*

Les doublets  $(\omega_j, X_j)$  sont appelés **modes de vibrations** du système. Dans le cadre des vibrations transversales, on parlera de *modes de flexion*. Notons à nouveau que leurs nature dépend du type de conditions aux limites envisagé. Chaque mode  $j$  est caractérisé par une **pulsation propre**  $\omega_j$  et une **forme propre**  $X_j = X_j(x)$ , fonction de la position le long de la fibre neutre du système. Notons à nouveau que les formes propres sont définies à une constante près.

**Orthogonalité des modes de vibration.**

Deux modes donnés  $(\omega_r, X_r)$  et  $(\omega_s, X_s)$ , pour lesquels  $\omega_r \neq \omega_s$ , vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\int_0^L X_r X_s dx = 0 \quad , \quad \int_0^L X_r'' X_s'' dx = 0 \quad \text{lorsque } r \neq s. \quad (144)$$

*Preuve.*

*Définition.*

On appelle **masses modales** et **raideurs modales** les quantités scalaires  $m_j$  et  $k_j$  définies par :

$$\boxed{m_j = \rho S \int_0^L X_j^2 dx \quad , \quad k_j = EI \int_0^L (X_j'')^2 dx \quad \forall j \geq 1} \quad (145)$$

Les **pulsations propres** sont alors définies par

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}} \quad \forall j \geq 1. \quad (146)$$

Notons à nouveau que les formes propres  $X_j$  peuvent être normalisées de sorte que  $m_j = 1 \forall j$  (cf. cas de la barre en traction-compression). Dans ce cadre, les pulsations propres s'écrivent alors  $\omega_j = \sqrt{k_j} \forall j$ .

### 4.3.2 Réponse forcée harmonique

On considère le problème de réponse forcée harmonique d'une poutre amortie, les phénomènes d'amortissement étant pris en compte à partir d'un **facteur de perte**  $\eta$  (ce type d'amortissement a été précédemment évoqué pour le cas de la barre en traction-compression). Les excitations envisagées peuvent être de natures assez diverses : forces transversales, moments, déplacements transversaux ou rotations (la Figure 34 illustre quelque-unes de ces excitations).

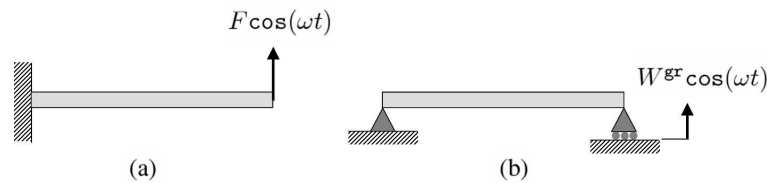


FIGURE 34 – Vibrations forcée harmonique d'une poutre excitée à l'une de ses extrémités : (a) force imposée ; (b) déplacement imposé.

La réponse stationnaire s'obtient par considération d'une solution particulière  $w = W e^{i\omega t}$  de l'équation (138), où  $W = W(x, \omega)$  représente l'amplitude complexe. On obtient alors l'équation suivante :

$$W'''' - \omega^2 \frac{\rho S}{E^* I} W = 0 \quad x \in ]0, L[, \tag{147}$$

où  $E^* = E(1 + i\eta)$  désigne le module d'Young complexe. La solution de l'équation (147) s'exprime alors de la manière suivante :

$$W = A e^{-i\beta^* x} + B e^{i\beta^* x} + C e^{-\beta^* x} + D e^{\beta^* x} \quad x \in ]0, L[ \quad \text{où} \quad \beta^* = \left( \frac{\omega^2 \rho S}{E^* I} \right)^{1/4} \tag{148}$$

où le paramètre  $\beta^*$  représente le **nombre d'onde complexe**.

*Preuve.*

Notons que la solution stationnaire s'exprime à partir de quatre constantes  $A, B, C$  et  $D$  qui sont déterminées en considérant les **conditions aux limites** :

- Poutre encastree en  $x = 0$  et excitée par force transversale en  $x = L$  :  
Les conditions aux limites s'écrivent :

$$W|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad W'|_{x=0} = 0 \quad , \quad E^* I W''|_{x=L} = 0 \quad \text{et} \quad -E^* I W'''|_{x=L} = F. \tag{149}$$

Les constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  s'obtiennent alors par résolution numérique du système matriciel suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -i\beta^* & i\beta^* & -\beta^* & \beta^* \\ -\beta^{*2}e^{-i\beta^*L} & -\beta^{*2}e^{i\beta^*L} & \beta^{*2}e^{-\beta^*L} & \beta^{*2}e^{\beta^*L} \\ i\beta^{*3}e^{-i\beta^*L} & -i\beta^{*3}e^{i\beta^*L} & -\beta^{*3}e^{-\beta^*L} & \beta^{*3}e^{\beta^*L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F/(E^*I) \end{bmatrix}. \quad (150)$$

*Application.*

La réponse en fréquences  $\omega \mapsto |W|$  d'une poutre encastree en  $x = 0$  et excitée par force transversale en  $x = L$  (cf. Figure 34(a)) est illustrée sur la Figure 35. Les caractéristiques de la poutre sont : la longueur  $L = 1 \text{ m}$ , la section  $S = 10^{-2} \times 10^{-2} \text{ m}^2$ , le moment d'inertie  $I = 10^{-8}/12 \text{ m}^4$ , la densité  $\rho = 7800 \text{ kg.m}^{-3}$ , le module d'Young  $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$  et le facteur de perte  $\eta = 0.01$ . La courbe représente l'amplitude du déplacement  $|W|$  (tracée en échelle logarithmique) au point d'excitation.

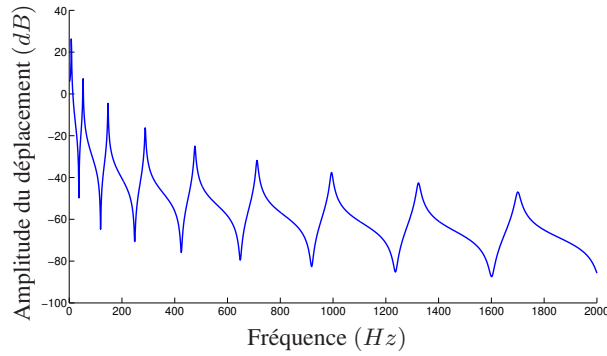


FIGURE 35 – Evolution fréquentielle du déplacement transversal (amplitude) d'une poutre encastree en  $x = 0$  et excitée par force harmonique en  $x = L$  : réponse au point d'excitation.

La réponse spatiale de cette même poutre a également été tracée à différentes fréquences ( $f = 100 \text{ Hz}$ ,  $f = 500 \text{ Hz}$ ,  $f = 1000 \text{ Hz}$  et  $f = 1500 \text{ Hz}$ ) sur la Figure 36.

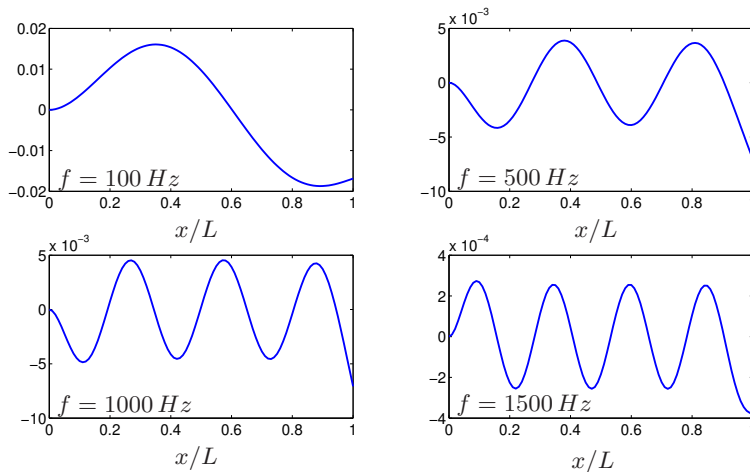


FIGURE 36 – Evolution spatiale du déplacement (partie réelle) d'une poutre encastree en  $x = 0$  et excitée par force en  $x = L$ .



## 5 Conclusions

Ce document a balayé dans les grandes lignes les notions de base de vibrations des structures. Les systèmes linéaires de types masses-ressorts-amortisseurs, à un et plusieurs degrés de libertés (DDLs), ont été étudiés du point de vue des vibrations libres et forcées. Des systèmes continus simples de types barres en traction-compression et poutres d'Euler en flexion ont également été traités. Pour l'ensemble des problèmes multi-DDLs évoqués, les techniques de résolution visant à décrire le comportement vibratoire ont été abordées soit par approche directe (c'est-à-dire par inversion de la matrice de rigidité dynamique ou résolution d'une équation différentielle en espace), soit par décomposition modale en invoquant les propriétés d'orthogonalité des modes de vibrations. L'utilité d'une telle décomposition modale est qu'elle permet de décrire les vibrations d'un système en ne retenant qu'un nombre réduit de DDLs, ce qui suggère des temps de calculs extrêmement réduits. Cette approche est fréquemment rencontrée dans le cadre des éléments finis pour décrire un ensemble de sous-structures, connectées entre elles, sur la base d'un nombre réduit de modes de vibrations (on citera à titre d'exemple le domaine aéronautique en ce qui concerne la prédiction numérique du comportement vibratoire des avions, les sous-structures associées étant par exemple les ailes, le fuselage, ...).

Les challenges actuels dans le domaine des vibrations des structures sont nombreux avec une volonté de prédire de manière fine, par le biais d'outils numériques notamment, le comportement dynamique des structures. De récentes approches portant sur l'*enrichissement des éléments finis* (c'est-à-dire en rajoutant aux fonctions d'interpolations polynomiales classiques des fonctions hautement oscillantes en espace, plus réalistes physiquement) témoignent de cette volonté. Cette possibilité de prédire finement le comportement vibratoire des structures est rendue possible grâce aux performances des processeurs actuels. Les techniques d'identifications des modèles numériques ont également été améliorées, du point de vue des approches déterministes mais également probabilistes (prédiction des variances par exemples). La corrélation entre approches numériques et mesures expérimentales est devenue forte, en témoignent de récents travaux : *snapshots*, *subspace fitting*, ...