HAL open science

Bruits en Électronique Propriétés et origines physiques

Damien Prêle

▶ **To cite this version:**

Damien Prêle. Bruits en Électronique Propriétés et origines physiques. École d'ingénieur. France. 2021. hal-03767378

HAL Id: hal-03767378

https://cel.hal.science/hal-03767378

Submitted on 1 Sep 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

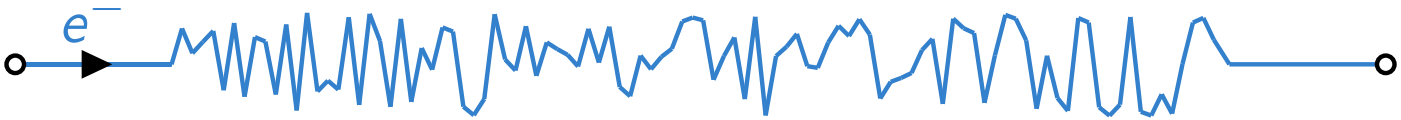
Bruits en Électronique

Propriétés et origines physiques

Damien PRÊLE

École d'Ingénieur Denis Diderot - 2e A - S2 - GP

26 janvier 2021



Plan

1. Introduction
   - Définition
   - Classification
2. Propriétés des bruits
   - Amplitude
   - Bande équivalent de bruit
   - Corrélation
3. Origines physiques des bruits
   - Thermique - *Johnson noise*
   - Grenaille - *shot noise*
   - Excès - *flicker noise* ...

Plan : Introduction

1. Introduction
   - Définition
   - Classification
2. Propriétés des bruits
   - Amplitude
   - Bande équivalent de bruit
   - Corrélation
3. Origines physiques des bruits
   - Thermique - *Johnson noise*
   - Grenaille - *shot noise*
   - Excès - *flicker noise* ...

Définition

Fluctuations aléatoires de tension ou de courant

- **bruit** en audio

Perturbations indésirables qui se superposent au signal

- n'apportent aucune information utile
- décrites que par leurs propriétés **statistiques**

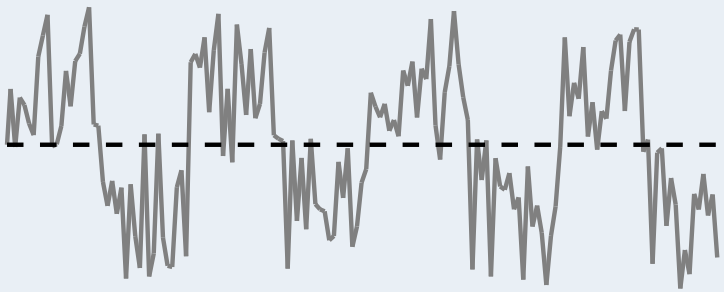
Ces perturbations ont tendance à masquer le contenu du signal utile

Bruit plancher *Noise floor*

- **Sources de signal éteintes, il reste un bruit en sortie d'un circuit électronique**

Importance du bruit

Limite



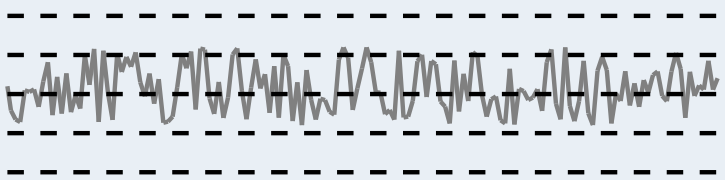
Le bruit fixe la **limite inférieure** du niveau des signaux que peut traiter un composant.

exemple: seuil de détection - *trigger*

Connaissance

L'**optimisation** du rapport signal à bruit passe par la connaissance physique des différentes **sources de bruit**.

Dans certains cas, le bruit est utilisé pour améliorer la résolution d'ADC (oscillateur stochastique)



Fluctuations d'origines **externes** au circuit électronique : *parasites*

- "naturel" ϟ: perturbations atmosphériques, ☼ solaires, 〰 cosmiques . . .

- "artificiel" 🏭: les décharges électriques de haute tension, les moteurs électriques, les systèmes d'allumage des moteurs à explosion, les circuits de commutation, les communications radiofréquences 📶, les tubes fluorescents d'éclairage . . .

spectre ± prévisible (périodique ≋) → **filtrage possible**
externe → **blindage possible (CEM)**

Bruit d'origine **interne** au circuit électronique

- Mouvements aléatoires et nature discrète des porteurs de charges

On distingue différents types de bruit en fonction de leurs origines physiques et de leurs caractéristiques :

Thermique

Johnson Nyquist noise
agitation thermique et aléatoire des porteurs

Grenaille

shot noise franchissement d'une barrière de potentiel

Excès

flicker noise
1/f (défauts)

burst noise
créneaux (implant d'ions)

...

Johnson
(1887-1970)
Bell Lab.

Nyquist
(1889-1976)
Bell Lab.

Schottky
(1886-1976)
Siemens

Plan : Propriétés des bruits

1 Introduction
- Définition
- Classification

2 Propriétés des bruits
- Amplitude
- Bande équivalent de bruit
- Corrélation

3 Origines physiques des bruits
- Thermique - *Johnson noise*
- Grenaille - *shot noise*
- Excès - *flicker noise* ...

Paramètres

1. **Amplitude :**
   moyenne, quadratique moyenne, DSP, crête
2. **Spèctre :**
   blanc, rose - 1/f, (périodique - exemple : 50 Hz)
3. **Corrélation :**
   évolution temporelle similaire à un facteur d'amplitude et de phase près (sources de bruit communes)

Bruit ergodique et stationnaire

L'amplitude instantané d'un bruit n'est pas prévisible.
On peut cependant définir des paramètres statistiques associés à ce bruit.
On suppose les paramètres statistiques représentatif d'un bruit s'il est ergodique et stationnaire

Ergodicité

La mesure simultanée (sur une longue période) des paramètres statistiques de **plusieurs systèmes identiques** donne le même résultat

Stationnaire

La mesure à **différent instants** (sur une longue période) des paramètres statistiques d'un système donne le même résultat

Plan : Propriétés des bruits - **Amplitude**

1 Introduction
- Définition
- Classification

2 Propriétés des bruits
- Amplitude
- Bande équivalent de bruit
- Corrélation

3 Origines physiques des bruits
- Thermique - *Johnson noise*
- Grenaille - *shot noise*
- Excès - *flicker noise* ...

Valeur moyenne $\overline{v}$

Moyenne arithmétique discrète et continue

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\overline{f(x)}\Big|_{x_1}^{x_n} = \frac{1}{x_n - x_1}\int_{x_1}^{x_n} f(x)\mathrm{d}x$$

Une mesure expérimentale ne donne jamais le même résultat; ce n'est que la moyenne qui est reproductible

Valeur **moyenne** *ou espérance* d'une tension de bruit

$$\overline{v} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T} v(t)\mathrm{d}t$$

Valeur quadratique moyenne $\overline{v^2}$

Moyenne quadratique discrète et continue

$$\overline{x^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\overline{f(x)^2}\Big|_{x_1}^{x_n} = \frac{1}{x_n - x_1}\int_{x_1}^{x_n} f(x)^2 \mathrm{d}x$$

La valeur quadratique est le moment d'ordre 2 d'un signal.

Valeur **quadratique moyenne** *ou variance* d'une tension en l'absence de DC

$$\overline{v^2} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{T} v(t)^2 \mathrm{d}t$$

Valeur efficace ou RMS V_{RMS}

Sans DC $\Rightarrow$ écart type (*standard deviation* en anglais) = racine carrée de la variance

Root Mean Square pour "racine de la moyenne du carré"

Tension RMS

$$V_{RMS} = \sqrt{\overline{v^2}} = \lim_{T\to\infty} \sqrt{\frac{1}{T}\int_T v(t)^2 \mathrm{d}t}$$

La **valeur efficace** V_{RMS} *d'un signal* $v(t)$ *correspond à la tension* **DC** *à appliquer à* R *pour produire le* **même échauffement** *(puissance moyenne) que celui que produirait la fluctuation* $v(t)$*:*

Puissance dissipée dans R

$$\frac{V_{RMS}^2}{R} = \frac{\overline{v(t)^2}}{R}$$

La valeur efficace est toujours supérieure ou égale à la valeur absolue de la valeur moyenne

Synthèse des paramètres de bruit *vs* statistiques

Statistique		*Physique*/Temporelle	
Valeur	Expression	Valeur	Expression
Moment d'ordre n	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x)\mathrm{d}x$	Moyenne d'ordre n	$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T v(t)^n \mathrm{d}t$
Moyenne - μ	$\int_{-\infty}^{+\infty} x\ p(x)\mathrm{d}x$	DC - $\overline{v}$	$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T v(t)\mathrm{d}t$
Quadratique moy	$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x$	**P moy totale** - $\overline{v^2}$	$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T v(t)^2 \mathrm{d}t$
Variance - σ^2	$\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x)\mathrm{d}x$	P fluctuations - $\overline{(v-\overline{v})^2}$	$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T (v-\overline{v})^2\ \mathrm{d}t$
Ecart type - σ	$\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 p(x)\mathrm{d}x}$	Efficace/RMS sans le DC	$\sqrt{\overline{(v-\overline{v})^2}}$

Amplitude d'un bruit

L'amplitude d'un bruit dépend de ses propriétés statistiques

Loi de probabilité $\Longrightarrow$ **répartition en amplitude** :

ensemble des valeurs et leur probabilité d'occurrence

Loi gaussienne *ou normal*: processus à valeurs continues et/ou causes nombreuses

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

espérance $= \mu$ *(valeur moy.* $= \overline{x}$*); variance* $= \sigma^2$ *(valeur eff.* ^{2} *sans DC* $= \overline{x^2}$*)*

Loi poissonienne: processus à valeurs discrètes et rares

$$p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$$

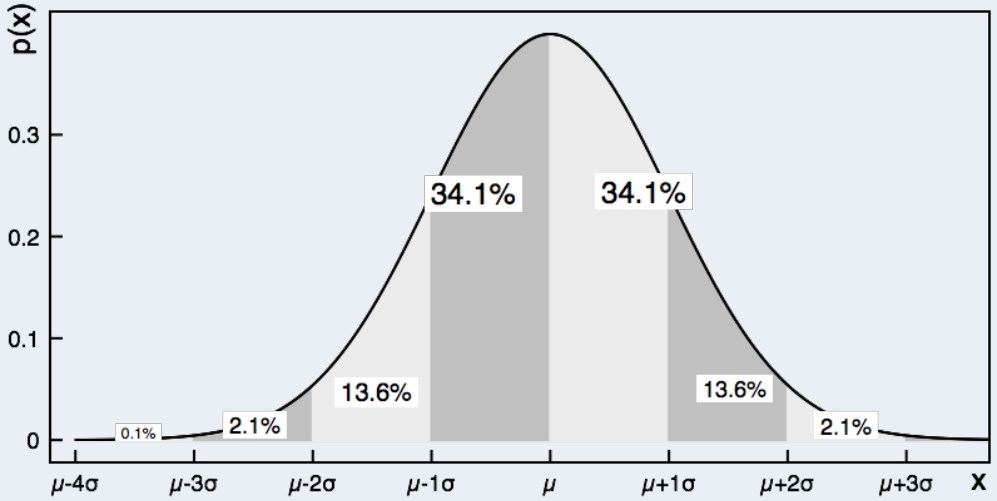
espérance $= \lambda$*; variance* $= \lambda$

Bruit gaussien

- Courbe de Gauss en e^{-x^2} : probabilités associées à des variables aléatoires possédant un très grand nombre de paramètres : $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Loi normale

Chaque bande a la largeur d'un écart type.



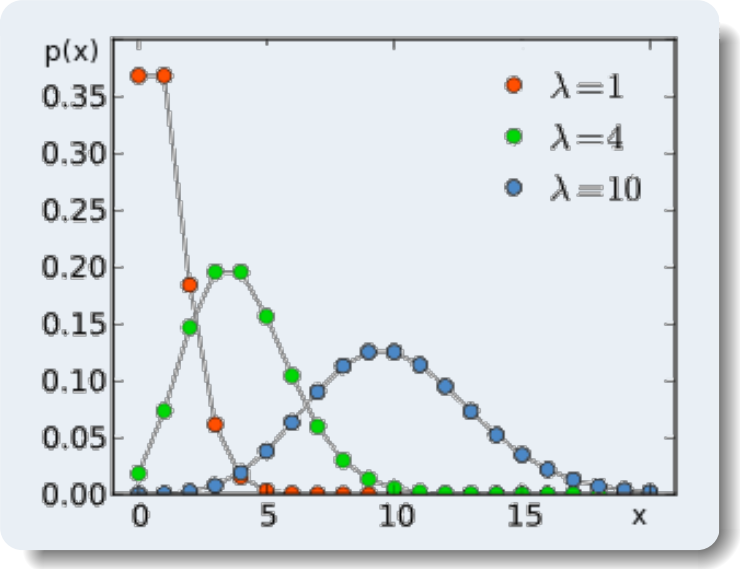
Espérance

Pourcentage d'occurrence dans un intervalle [en σ].

Probabilité	Intervalle
50 %	$\pm$ 0,67 σ
68,3 %	$\pm$ **1** σ
87 %	$\pm$ 1,5 σ
90 %	$\pm$ 0,64 σ
95 %	$\pm$ 1,96 σ
95,4 %	$\pm$ **2** σ
98,7 %	$\pm$ 2,5 σ
99 %	$\pm$ 2,58 σ
99,7 %	$\pm$ **3** σ

Bruit poissonnien

- Loi de poisson : Par exemple, x le nombre d'électrons à franchir une jonction par intervalle de temps: $p(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$

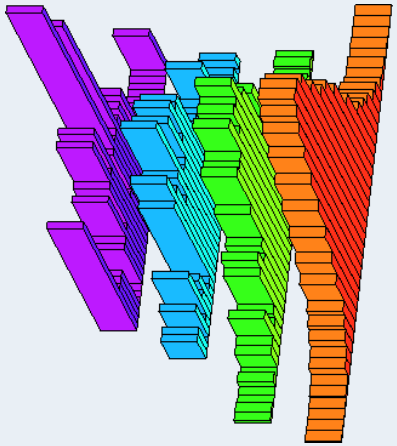


théorème de la limite centrale

Un ensemble de variables aléatoires indépendantes **convergent vers une distribution gaussienne** à mesure que la **valeur moyenne augmente** (par exemple, le courant de polarisation)

limite centrale

Théorème de la limite centrale



Toute somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées tend vers une variable aléatoire gaussienne

La loi normale est une loi limite lorsque $nb \to \infty$

En pratique, on considère generalement le bruit comme **gaussien**

Valeur crête-à-crête v_{cc} ou *peak-to-peak* v_{pp}

Amplitude maximum

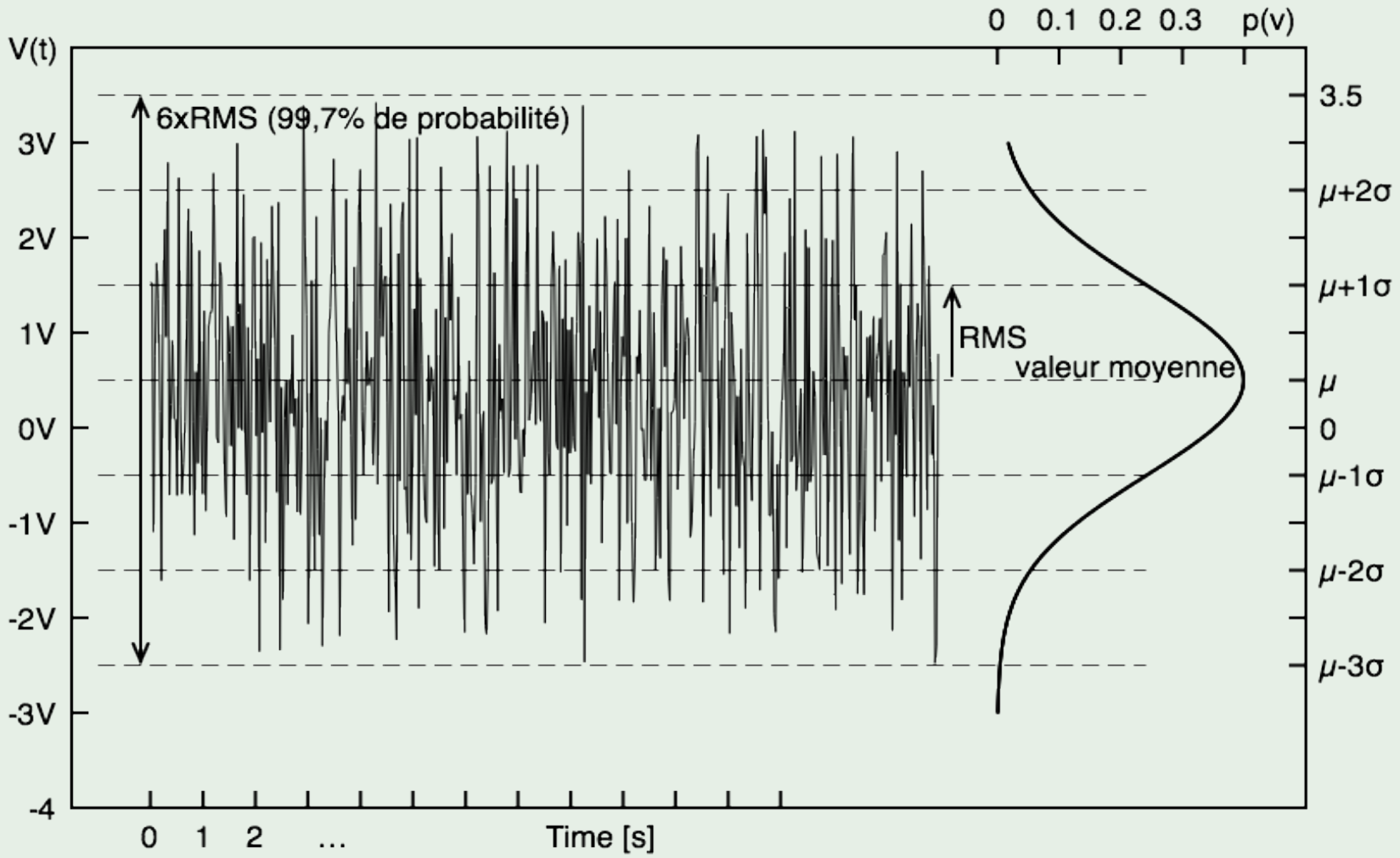
$$v_{cc} = v_{max} - v_{min}$$

Il est important d'avoir une idée de l'amplitude maximale du signal instantané pour ne pas saturer une électronique de lecture:

- *Distorsion analogique: écrétage et modification du contenu spectral*
- *Pb de quantification dans un CAN: sous estimation de l'amplitude et augmentation du bruit de quantification*

Amplitude et Histogramme d'un bruit gaussien

Probabilité gaussienne ☞ $V_{cc} \approx 6\ \sigma \Big|_{99,7\%}$



Valeur crête-à-crête v_{cc} d'un bruit gaussien

mesure à l'oscilloscope

On peut estimer l'amplitude d'un bruit blanc gaussien en relevant à l'oscilloscope l'amplitude maximale V_{cc}.

L'amplitude efficace correspond à peu près à 1/6 de la valeur crête-à-crête mesurée.

Gamme d'amplitude	% de bruit omis
$2\ \sigma$	32 %
$3\ \sigma$	13 %
$4\ \sigma$	4,6 %
$5\ \sigma$	1,2 %
$6\ \sigma \approx \mathbf{V_{cc}}$	**0,27** %
$6,6\ \sigma$	0,1 %
$7\ \sigma$	0,046 %
$8\ \sigma$	0.006 %

Puissance de bruit

"Puissance" de bruit en termes de tension et de courant

$e_n^2 = \overline{v^2}$ et $i_n^2 = \overline{i^2}$ $\longrightarrow$ "puissance" avec $R = 1\,\Omega$

Densité Spectrale de Puissance S : La densité spectrale permet une analyse harmonique d'un bruit (domaine fréquentiel)

En pratique, on réalise la mesure de la "puissance" sur un intervalle élémentaire Δf au voisinage d'une fréquence f :

$e_n^2 = \int_{\Delta f} S_v(f)\mathrm{d}f \ [V^2]$ avec $S_v \ [V^2/Hz]$ la DSP en tension

$i_n^2 = \int_{\Delta f} S_i(f)\mathrm{d}f \ [A^2]$ avec $S_i \ [A^2/Hz]$ la DSP en courant

On parlera en fait de **Densité Spectrale d'Amplitude**

Puissance : $P = \frac{U^2}{R} = RI^2 = \int_{\Delta f} \frac{S_v}{R}\mathrm{d}f = \int_{\Delta f} RS_i\mathrm{d}f$

Densité Spectrale d'Amplitude

Densité Spectrale moyenne écart-type moyen sur 1 Hz - utilisé pour le bruit blanc

$$\overline{S_v} = \frac{e_n^2}{\Delta f} \quad [V^2/Hz]$$
$$\overline{S_i} = \frac{i_n^2}{\Delta f} \quad [A^2/Hz]$$

☞ Utilisation abusive (mais courante) du terme DSP

Les sources de tension et de courant de bruit sont souvent données en $[V/\sqrt{Hz}]$ ou $[A/\sqrt{Hz}]$ (normalisées par bande de 1 Hz) si bien que la valeur quadratique moyenne du bruit en termes de DSP n'est parfois rien d'autre que la DSA elle-même:

$$S_v(f) \equiv e_n^2 \; [V^2/Hz]$$

$$S_i(f) \equiv i_n^2 \; [A^2/Hz]$$

Rapport Signal à Bruit *SNR* (*Signal to Noise Ratio*)

SNR

Rapport entre l'amplitude du signal utile et celle de bruit qui l'affecte (Parfois on considère la valeur moyenne comme le seul signal utile : $SNR = \frac{\mu}{\sigma}$).

$$SNR\Big|_P = \frac{P_{signal}}{P_{bruit}} \quad \text{ou} \quad SNR\Big|_{v\ ou\ i} = \frac{Signal_{RMS}}{Bruit_{RMS}}$$

A mesure que le temps d'intégration augmente (moyennage), les bruits blancs additifs ergodiques et stationnaires tendent vers leur valeur moyenne (=0!)* , tandis que pour le signal (très basse fréquence) la moyenne est égale à l'amplitude. **Ainsi, si on intègre sur une longue durée un signal bruité, on améliore le SNR** comme la racine (en tension) du temps d'intégration ou du nombre d'éléments moyennés (jusqu'à la "fréquence de Allan" ...)

* c'est la valeur RMS qui tend vers la moyenne

Plan : Propriétés des bruits - Bande équivalent de bruit

1 Introduction
- Définition
- Classification

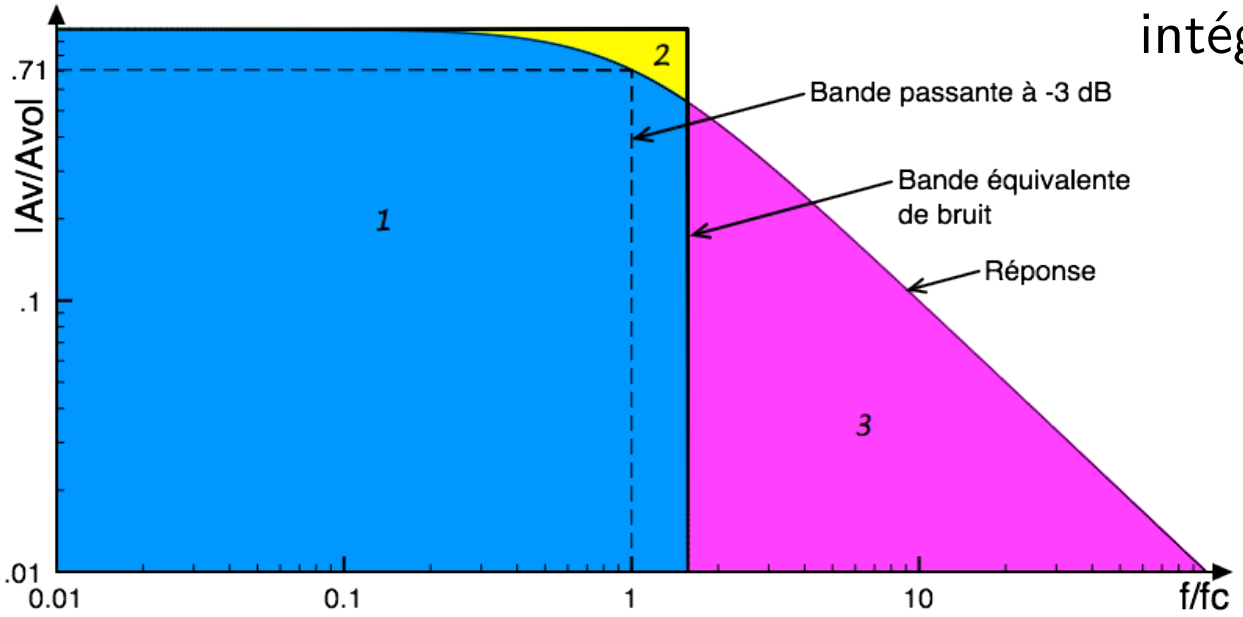
2 Propriétés des bruits
- Amplitude
- Bande équivalent de bruit
- Corrélation

3 Origines physiques des bruits
- Thermique - *Johnson noise*
- Grenaille - *shot noise*
- Excès - *flicker noise* ...

Bande équivalente de bruit - *Equivalent Noise Bandwidth*

La bande équivalente de bruit n'est pas définie comme la bande passante d'un signal

- Bande passante : $-3\,dB$ = atténuation de $1/\sqrt{2}$ en tension (ou de 50 % en puissance)
- Bande équivalente de bruit : fenêtre fréquentielle rectangulaire (idéal) équivalente en puissance au bruit intégré de 0 Hz à l'∞



aire 2 = aire 3 en puissance

et en linéaire

Bande équivalente de bruit Δf

$$\Delta f = \frac{1}{H_0^2}\int_0^\infty |H(f)|^2 \mathrm{d}f$$

Filtrage à 1 pôle - passe bas du **premier ordre**

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

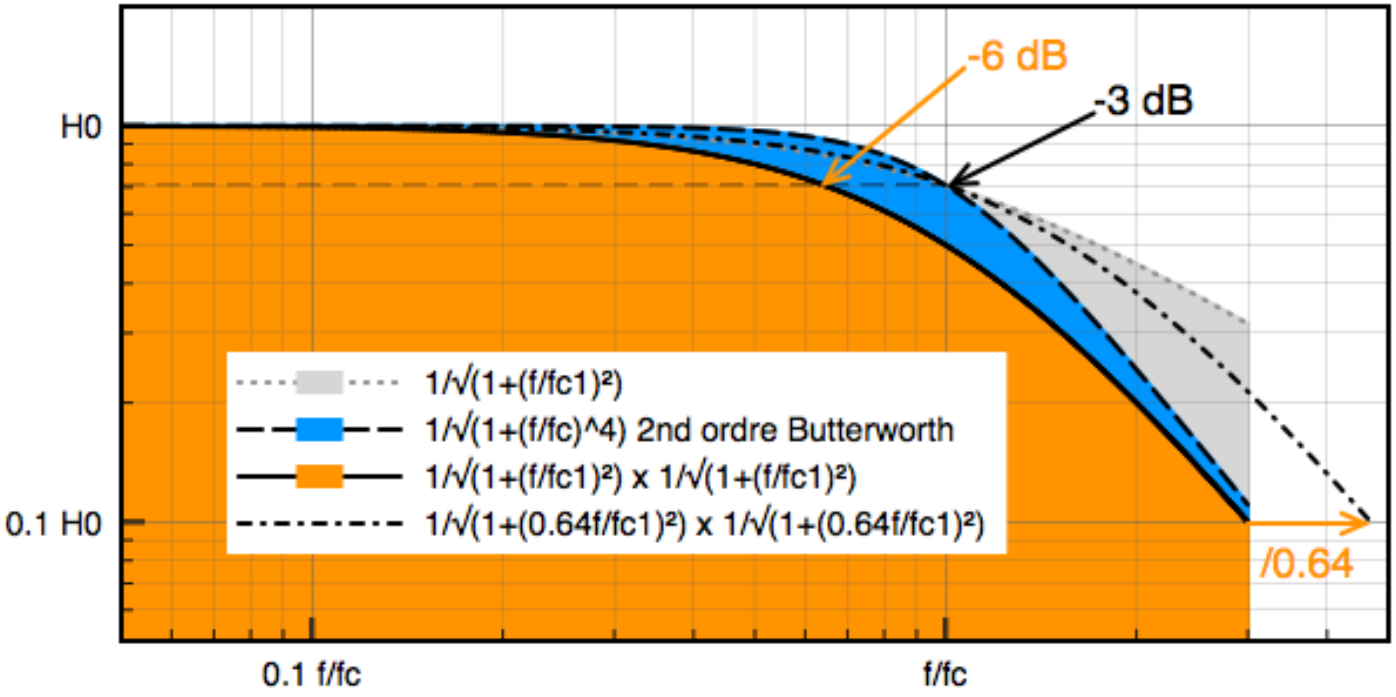
$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{{f_c}^2}}} \longrightarrow H_0 = 1$$

$$\Delta f = \int_0^\infty \frac{1}{1 + \frac{f^2}{{f_c}^2}} \mathrm{d}f = f_c \arctan\left(\frac{f}{f_c}\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} f_c = \frac{1}{4\tau}$$

$\arctan' u = \frac{u'}{1+u^2}$

Bande équivalente de bruit et filtre du second ordre

- 2 filtres du premier ordre de fréquence de coupure (-3 dB). fc1 → coupure a -6 dB. ⇒ **Bande équivalente < fc1**
- 1 filtre de Butterworth du 2nd ordre avec $Q = 1/\sqrt{2}$ coupe -3 dB à fc. ⇒ **Bande équivalente > fc1**



Bande équivalente de bruit Δf

Facteur de conversion $f_c \longrightarrow \Delta f$ en fonction de l'ordre du filtre

Ordre	Pente	Brickwall -3 dB $\Delta f/f_c$	-3n dB $\Delta f/f_{c1}$	Butterworth $\Delta f/f_c$
1	20 dB/dec	$\pi/2 \approx 1,57$	$\pi/2$	$\pi/2$
2	40 dB/dec	1,22	$\pi/4$	1,11
3	60 dB/dec	1,15	$\pi/8$	1,05

- Filtres de premiers ordre fc (à -3 dB) $\rightarrow$ *brickwall filter*
- Filtres de premiers ordre fc1 $\rightarrow \Delta f/f_c1 = \pi/2^n$
- Filtre de Butterworth $\rightarrow \Delta f/f_c = \pi/(2n\,sin(\pi/2n))$

f_c est la fréquence de coupure à - 3 dB de l'ensemble ;

f_{c1} est la fréquence de coupure à - 3 dB d'un 1er ordre, -6 dB pour un 2nd ...

Bande équivalente de bruit Δf

Passe bande

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)}$$

$$Q = \frac{f_0}{B_{-3dB}}$$

$$\Delta f = \frac{\pi}{2}\frac{f_0}{Q} = \frac{\pi}{2}B_{-3dB}$$

Filtre de Butterworth d'ordre n

$$\Delta f = \frac{\frac{\pi}{2n}}{\sin(\frac{\pi}{2n})} f_0$$

Jusqu'à quelle fréquence intégrer la puissance de bruit ?

Estimation du bruit intégré à 10% près (1er ordre)

$$90\% \ \Delta f = \frac{0.9\pi}{2} f_c = \int_0^{f_{90\%}} \frac{1}{1+\frac{f^2}{f_c^2}} \mathrm{d}f = f_c \arctan \frac{f_{90\%}}{f_c}$$

☞ $f_{90\%} = f_c \times \tan \frac{0.9\pi}{2} = 6.3 f_c$

Il faut intégrer au moins jusqu'à 6,3 fois la fréquence de coupure pour estimer à 10% près un bruit blanc filtré.

Bande d'intégration	*Erreur sur l'estimation du bruit*
$64 \times f_c$	*1 %*
6,3 $\times f_c$	**10 %**
$2 \times f_c$	*30 %*
f_c	*50 %*

Plan : Propriétés des bruits - **Corrélation**

1 Introduction
- Définition
- Classification

2 Propriétés des bruits
- Amplitude
- Bande équivalent de bruit
- Corrélation

3 Origines physiques des bruits
- Thermique - *Johnson noise*
- Grenaille - *shot noise*
- Excès - *flicker noise* ...

Corrélation

Somme quadratique de 2 signaux aléatoires $v_1(t)$ et $v_2(t)$

$$\overline{v^2(t)} = \overline{[v_1(t) + v_2(t)]^2} = \overline{v_1^2(t)} + \overline{v_2^2(t)} + 2\overline{v_1(t)v_2(t)}$$

Terme de corrélation pour $\tau = 0$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T v_1(t)v_2^*(t-\tau)\mathrm{d}t|_{\tau=0} = 2\overline{v_1(t)v_2(t)}$$

$v_1(t)$ et $v_2(t)$ sources de bruit indépendantes $\longrightarrow$ non corrélé

Somme quadratique de 2 bruits indépendants

$$\overline{v^2(t)} = \overline{v_1^2(t)} + \overline{v_2^2(t)} + \underbrace{2\overline{v_1(t)v_2(t)}}_{=0}$$

Somme de sources indépendantes

On additionne les "Puissances", pas les courants ni les tensions de bruit

$$V_{RMS_{total}} = \sqrt{V_{RMS_1}^2 + V_{RMS_2}^2 + V_{RMS_3}^2 \cdots + V_{RMS_n}^2}$$

Quand il s'agit de bruit blanc, on peut additionner les *DSA*

$$\overline{v_{blanc_{total}}^2(t)} = \overline{v_{blanc_1}^2(t)} + \overline{v_{blanc_2}^2(t)} + \overline{v_{blanc_3}^2(t)} \cdots + \overline{v_{blanc_n}^2(t)}$$

Ordres de grandeurs

Somme de 2 bruits d'égale amplitude $1\,V_{RMS}$

$$V_{RMS_{total}} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.41\,V_{RMS}$$

Le bruit n'est pas double (+ 6 dB), mais $\sqrt{2}$ fois plus grand (+ 3 dB).

Somme de 2 bruits d'amplitude différentes (ratio 3)

$$V_{RMS_{total}} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \approx 3.16\,V_{RMS}$$

Le bruit d'une source 3 fois plus faible ne contribue qu'à hauteur de 5 %.

Somme de 2 bruits d'amplitude différentes (ratio 10)

$$V_{RMS_{total}} = \sqrt{10^2 + 1^2} = \sqrt{101} \approx 10.05\,V_{RMS}$$

Le bruit d'une source 10 fois plus faible est complètement négligeable.

Théorème de Wiener–Khinchin–Einstein

On peut calculer la DSP d'un bruit stationnaire à partir de la TF de sa fonction d'auto-corrélation statistique:

Auto-corrélation

$$R_{vv}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T v(t)v(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$R_{vv}(0) = \overline{v^2}$$

DSP

$$S_v(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{vv}(\tau)e^{-j\omega\tau}\mathrm{d}\tau$$

Bruit blanc (Fonction d'autocorrélation $\longrightarrow$ impulsion de Dirac.)

La transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac est constante quelle que soit la fréquence.

Plan : Origines physiques des bruits

1. Introduction
   - Définition
   - Classification
2. Propriétés des bruits
   - Amplitude
   - Bande équivalent de bruit
   - Corrélation
3. Origines physiques des bruits
   - Thermique - *Johnson noise*
   - Grenaille - *shot noise*
   - Excès - *flicker noise* ...

Plan : Origines physiques des bruits - **Thermique** - *Johnson noise*

1. Introduction
   - Définition
   - Classification
2. Propriétés des bruits
   - Amplitude
   - Bande équivalent de bruit
   - Corrélation
3. Origines physiques des bruits
   - Thermique - *Johnson noise*
   - Grenaille - *shot noise*
   - Excès - *flicker noise* ...

Bruit Thermique Identifié par John Bertrand Johnson en 1926

50 *NATURE* [JANUARY 8, 1927

Thermal Agitation of Electricity in Conductors.

ORDINARY electric conductors are sources of spontaneous fluctuations of voltage which can be measured with sufficiently sensitive instruments. This property of conductors appears to be the result of thermal agitation of the electric charges in the material of the conductor.

The effect has been observed and measured for various conductors, in the form of resistance units, by means of a vacuum tube amplifier terminated in a thermocouple. It manifests itself as a part of the phenomenon which is commonly called 'tube noise.' The part of the effect originating in the resistance gives rise to a mean square voltage fluctuation V^2 which is proportional to the value R of that resistance. The ratio V^2/R is independent of the nature or shape of the conductor, being the same for resistances of metal wire, graphite, thin metallic films, films of drawing ink, and strong or weak electrolytes. It does, however, depend on temperature and is proportional to the absolute temperature of the resistance. This dependence on temperature demonstrates that the component of the noise which is proportional to R comes from the conductor and not from the vacuum tube.

A similar phenomenon appears to have been observed and correctly interpreted in connexion with a *current sensitive* instrument, the string galvanometer (W. Einthoven, W. F. Einthoven, W. van der Horst, and H. Hirschfeld, *Physica*, 5, 358-360, No. 11/12, 1925). What is being measured in these cases is the effect upon the measuring device of continual shock excitation resulting from the random interchange of thermal energy and energy of electric potential or current in the conductor. Since the effect is the same for different conductors, it is evidently not dependent on the specific mechanism of conduction.

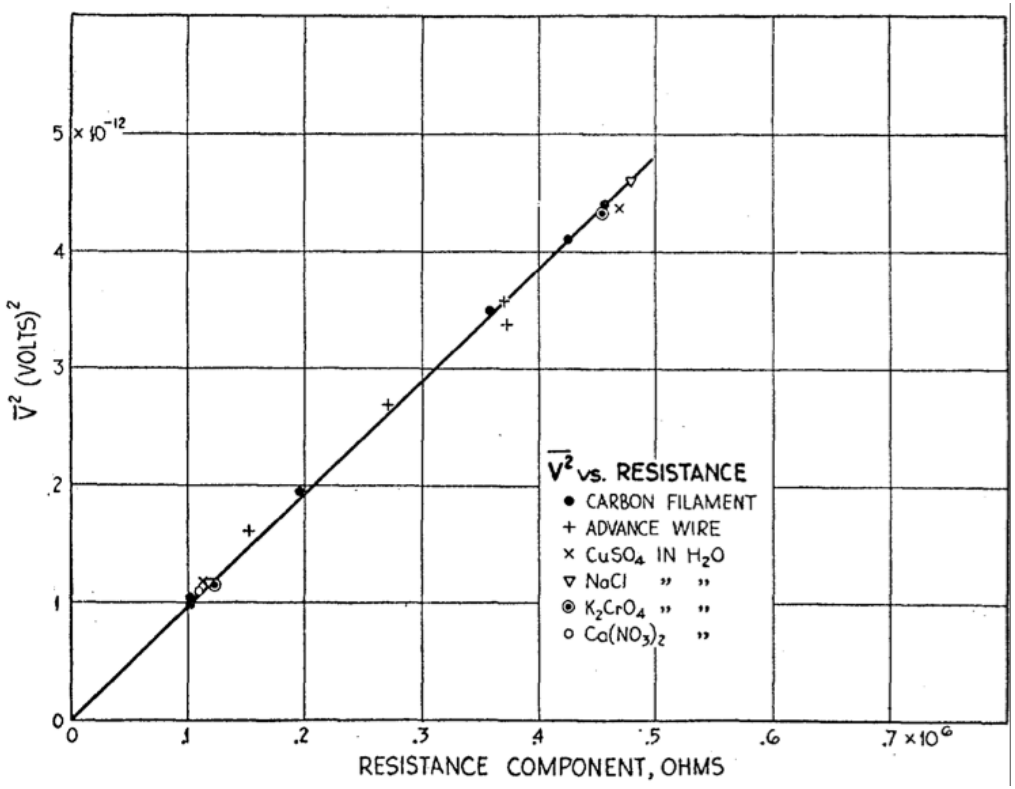
The amount and character of the observed noise depend upon the frequency-characteristic of the amplifier, as would be expected from experience with the small-shot effect. The apparent input power originating in the resistance is of the order 10^{-18} watt at room temperature. The corresponding output power is proportional to the area under the graph of *power amplification—frequency*, at least in the range of audio frequencies. The magnitude of the 'initial noise,' when the quietest tubes are used without input resistance, is about the same as that produced by a resistance of 5000 ohms at room temperature in the input circuit. For the technique of amplification, therefore, the effect means that the limit to the smallness of voltage which can be usefully amplified is often set, not by the vacuum tube, but by the very matter of which electrical circuits are built.

J. B. JOHNSON.
Bell Telephone Laboratories, Inc.,
New York, N.Y., Nov. 17.

No. 2984, VOL. 119]

Bruit Thermique Mesuré par John B. Johnson en 1926

Tension de bruit proportionnelle à R
Indépendant de la nature des résistances

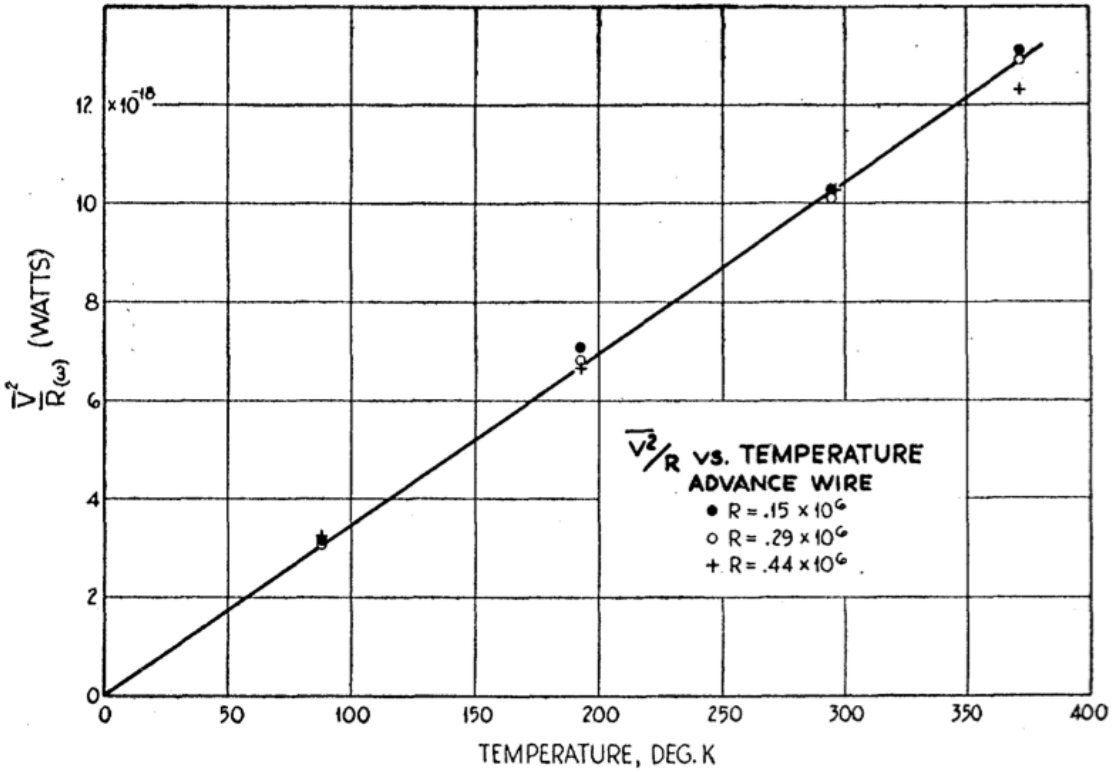


John Bertrand Johnson
(1887-1970)

Thermal Agitation of Electricity J. B. Johnson, PHYSICAL REVIEW, July, 1928

Bruit Thermique Mesuré par John B. Johnson en 1926

Puissance de bruit proportionnelle à T
Indépendant de la valeur des R



John Bertrand Johnson
(1887-1970)

Thermal Agitation of Electricity J. B. Johnson, PHYSICAL REVIEW, July, 1928

Bruit Thermique

Interprété par Harry Nyquist en 1928 (explication des mesures de Johnson)

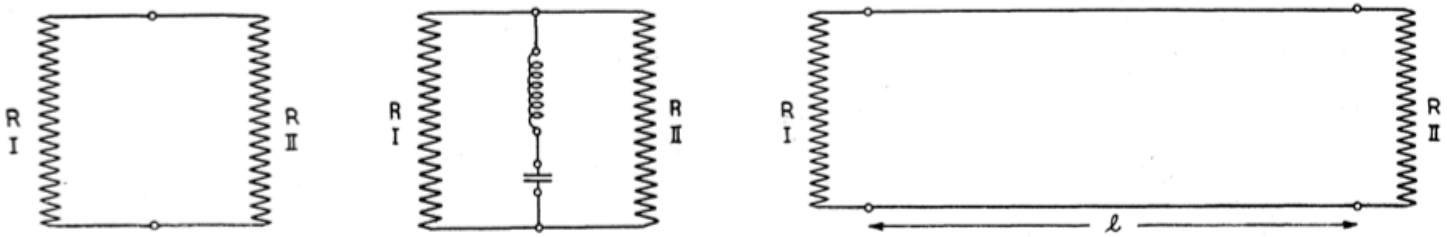
JULY, 1928 *PHYSICAL REVIEW* *VOLUME 32*

THERMAL AGITATION OF ELECTRIC CHARGE IN CONDUCTORS*

By H. Nyquist

Abstract

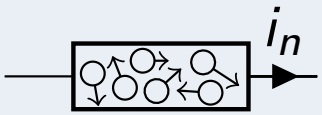
The electromotive force due to thermal agitation in conductors is calculated by means of principles in thermodynamics and statistical mechanics.

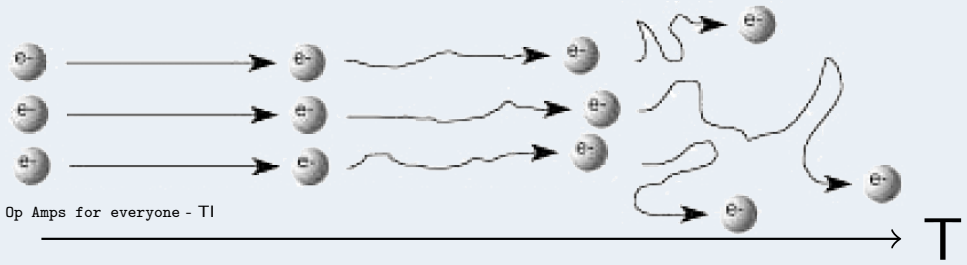


$$E_\nu^2 d\nu = 4R_\nu kT d\nu \qquad E_\nu^2 d\nu = 4R_\nu h d\nu/(e^{h\nu/kT}-1)$$

Bruit thermique

Agitation des porteurs de charge dans un milieu conducteur





- Bruit blanc gaussien "universel" dans tout conducteur : indépendant de la nature du conducteur.
- Indépendant de la polarisation : existe en présence comme en l'absence de courant de polarisation.

Vitesse moyenne des e^- sous l'effet d'un champ E est négligeable / vitesse instantanée.

- La puissance de bruit disponible par bande de 1 Hz **ne dépend que de T**: $S = k_B T$ [W/Hz] Homogène à une énergie (26 meV @ 300 K).

$k_B \approx 1,38\ 10^{-23}$ [J/K] est la constante de Boltzmann

Limitation quantique (à très haute f et/ou très basse T)

Généralisation incluant une approche quantique (analogue au rayonnement de corps noir) :

Energie électrique $\longrightarrow$ multiple de hf

DSP de bruit thermique :

$$S = \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1}$$

$$= \frac{hf}{\frac{hf}{k_B T} + \frac{1}{2!}\left(\frac{hf}{k_B T}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{hf}{k_B T}\right)^3 + \dots}$$

$$\approx k_B T \qquad si\ k_B T >> hf$$

☞ @ 300 K bruit thermique blanc jusqu'au THz !

$h \approx 6,63\ 10^{-34}$ [J.s] est la constante de Planck

Puissance de bruit thermique disponible

Formule de Johnson Nyquist :

La **puissance maximale de bruit thermique fournie** par un conducteur à la température T (en Kelvin) et dans une bande (carré) de fréquence Δf est :

$$P = k_B T \Delta f \text{ [W]}$$

L'agitation thermique entraine un niveau de bruit incontournable dans tout conducteur

Refroidir est parfois le seul moyen d'améliorer le SNR

Bruit thermique exprimé en dBm

Décibels et référence de puissance : Le bruit est parfois exprimé en dBm qui utilise comme référence 1 mW :

$$P[dBm] = 10 \log \frac{P[W]}{1mW}$$

Formule de Johnson Nyquist :

$$P = 10 \log \frac{k_B T \Delta f}{1mW} \; [dBm]$$

$$\approx -174 dBm + 10 \log \Delta f \text{ @ 300 K}$$

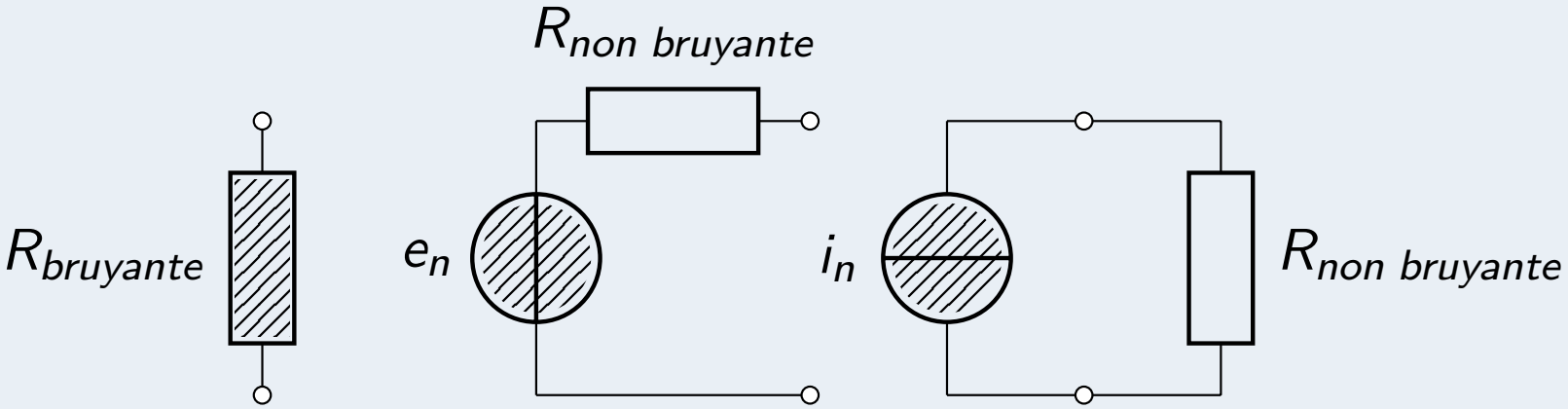
Puissance de bruit pour différente bande de bruit @ 300K

Bande de bruit	Bruit thermique
1 Hz	-174 dBm
10 Hz	-164 dBm
100 Hz	-154 dBm
1 kHz	-144 dBm
1 MHz	-114 dBm

Modélisation d'une source de bruit thermique

Schémas équivalents d'une résistance bruyante

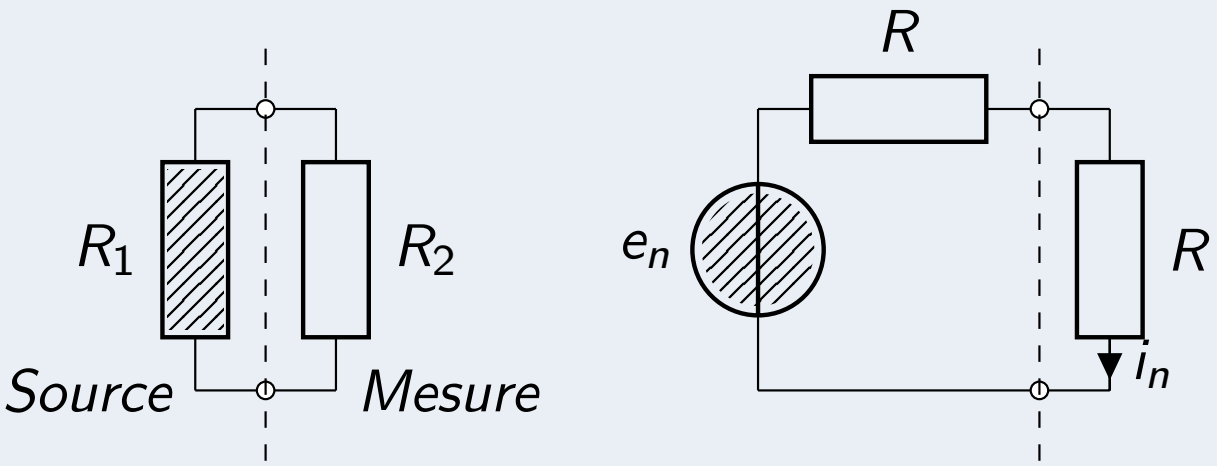
- Thévenin : R non bruyante en série avec une source de tension (DSP) de bruit $e_n \equiv \sqrt{S_v}$
- Norton : R non bruyante en // avec une source de courant (DSP) de bruit $i_n \equiv \sqrt{S_i}$



"Mesure" de la puissance disponible de bruit thermique

$k_B T \Delta f \longrightarrow$ Puissance maximale disponible

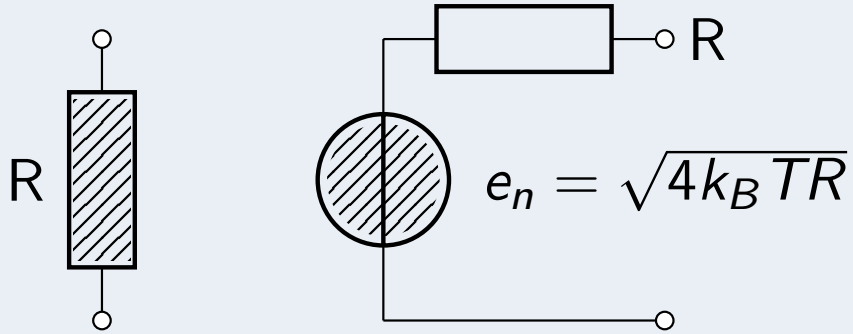
La mesure de l'effet de $P = k_B T \Delta f$ nécessite une adaptation d'impédance ($R_1 = R_2 = R$) pour un transfert de puissance optimum.



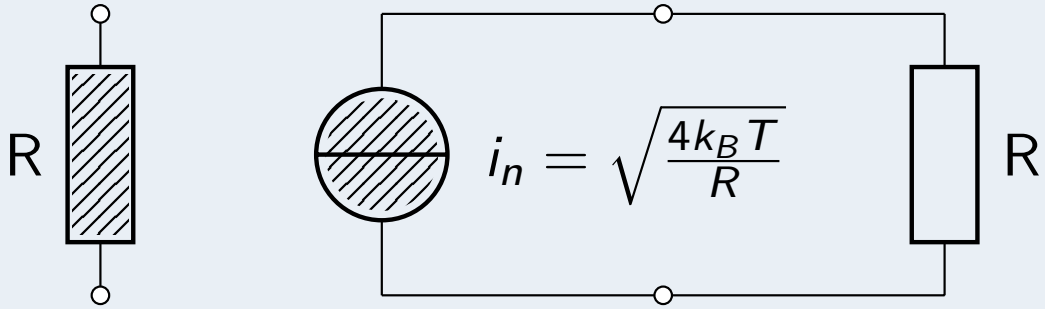
$$k_B T \Delta f = R i_n^2 = R \left(\frac{e_n}{2R}\right)^2 = \frac{e_n^2}{4R} \longrightarrow e_n^2 = 4 k_B T R|_{\Delta f = 1Hz}$$

Tension et courant de bruit thermique en terme de DSP

$e_n = \sqrt{4k_BTR}$ [V/$\sqrt{Hz}$]

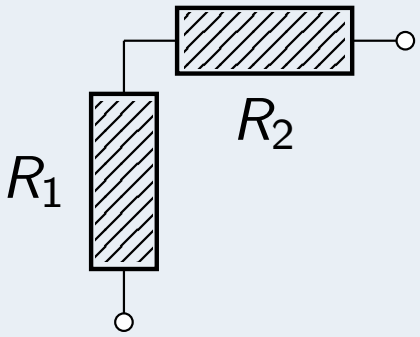


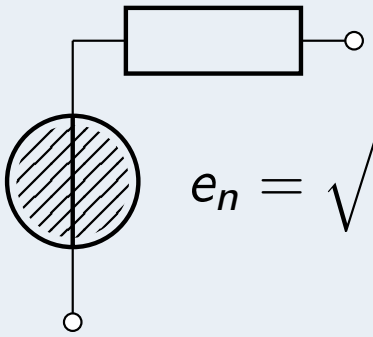
$i_n = \sqrt{\frac{4k_BT}{R}}$ [A/$\sqrt{Hz}$]



Association de résistances

R_1 et R_2 en série :

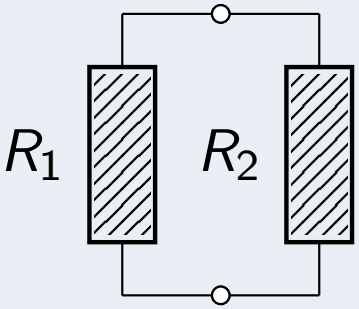


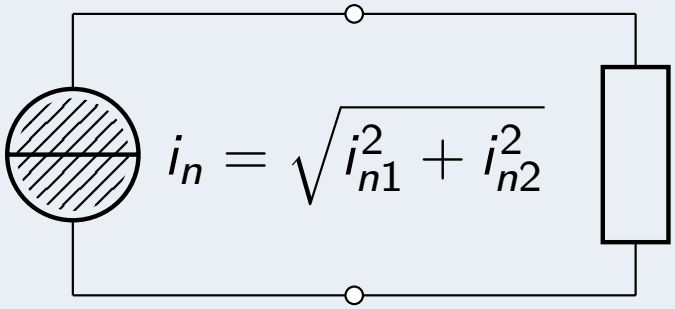


$R_1 + R_2$

$$e_n = \sqrt{e_{n1}^2 + e_{n2}^2}$$

R_1 et R_2 en parallèle :





$$i_n = \sqrt{i_{n1}^2 + i_{n2}^2}$$

$R_1//R_2$

Résistance et Température équivalente de bruit

Soit une source de bruit blanc de DSP S_v et S_i et d'impédance de sortie R_s que l'on cherche à modéliser comme une :

- Résistance équivalente de bruit : résistance qui génèrerait la même densité spectrale de bruit que la source de bruit blanc (à 300K ou à la température de la source - à préciser).

$$R_{eq} = \frac{S_v + R_s^2 S_i}{4 k_B T_0}$$

- Température équivalente de bruit : température à laquelle la résistance caractéristique du système (souvent $R_0 = R_S = 50\Omega$) génèrerait la même densité spectrale de bruit que la source de bruit blanc.

$$T_{eq} = \frac{S_v + R_s^2 S_i}{4 k_B R_0}$$

Bruit thermique dans les composants

Bruit thermique = "Vraies" resistances

✔ Bruit thermique toujours associé à la présence d'une résistance "réelle".

✘ Parties imaginaires des impédances (L ou C) et impédances dynamiques ou charges actives (h_{11}, $1/g_m$, R_{DS} ...) $\rightarrow$ pas de bruit thermique (sauf le courant de bruit en $\frac{2}{3}4k_BTg_m$ des MOS en forte inversion où la résistance du canal est bien réel*.)

☞ mais il arrive que l'on parle abusivement de ...

- "Bruit d'une capacité" en $\frac{k_BT}{C}$
- "Bruit thermique d'un transistor bipolaire" en $\frac{4k_BT}{2g_m}$

Cf. cours *bruit dans les composants*

Plan : Origines physiques des bruits - **Grenaille** - *shot noise*

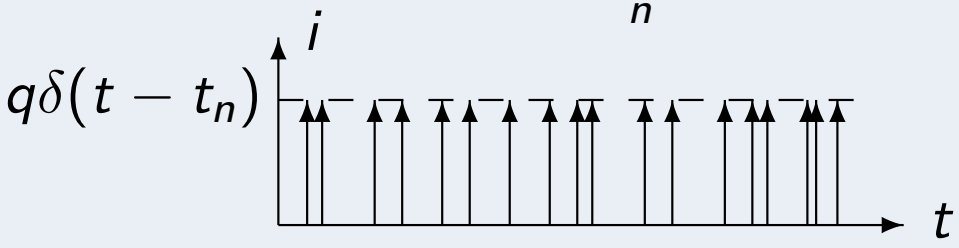
1. Introduction
   - Définition
   - Classification
2. Propriétés des bruits
   - Amplitude
   - Bande équivalent de bruit
   - Corrélation
3. Origines physiques des bruits
   - Thermique - *Johnson noise*
   - Grenaille - *shot noise*
   - Excès - *flicker noise* ...

Transit aléatoire des e^- au franchissement d'une barrière de potentiel (statistique de Poisson)

"Shot !" au changement de sens de la force exercée par la jonction

Courant électrique = transfert non continu de charges élémentaires q aux instant aléatoires t_n

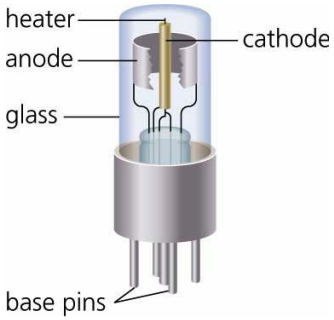
$$i(t) = q \sum_n \delta(t - t_n)$$



Bruit de Grenaille dans les barrières de potentiel

- Bruit de grenaille → composants où il y a peu de collisions et où les charges circulent à grande vitesse (barrières de potentielles: Cathode-Anode, Jonction PN ...).
- Corrélation entre l'émission et la réception des porteurs (de part et d'autre de la barrière) si
  - ➠ nb de collisions négligeables: grand temps de relaxation (temps moyen entre deux collisions) τ_r

durant le transit inter-électrodes τ_t:



$$\tau_t \ll \tau_r$$

shot noise découvert dans les tubes à vide par Walter Schottky en 1918

"Relation de Schottky"

Densité spectrale de courant de bruit de grenaille $[A^2/Hz]$

$$S_i = 2qI$$

où I est le courant traversant la barrière de potentiel.

indépendant de T et de f $\longrightarrow$ bruit blanc

Courant efficace de bruit de grenaille sur une bande de 1 Hz

$$i_{eff}\big|_{\Delta f=1Hz} = \sqrt{S_i} = \sqrt{2qI}$$

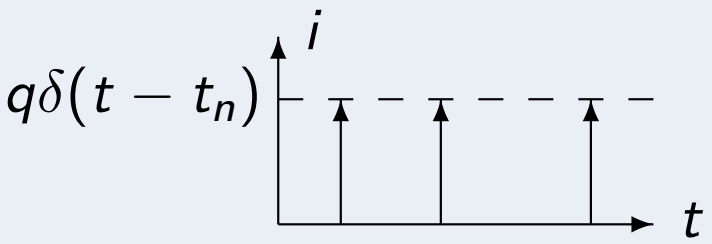
A.N.: Diode polarisée en direct par un courant I = 1 mA :

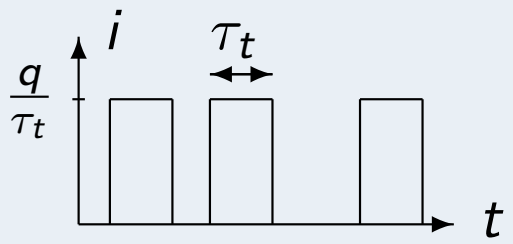
$$\sqrt{S_i} = \sqrt{2 \times 1.6\ 10^{-19} \times 10^{-3}} = 18\ pA/\sqrt{Hz}$$

$q \approx 1,6 \times 10^{-19}$ [C] ou [A.s] est la valeur absolue de la charge de l'e^-

Bruit de Grenaille à très haute fréquence

Temps de transit des e^- dans la barrière de potentiel τ_t

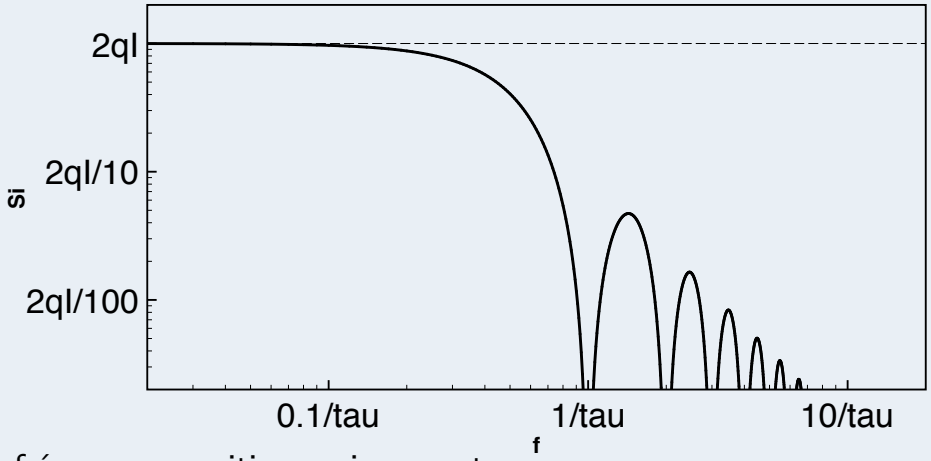




Densité spectrale de courant de bruit de grenaille en HF

$$S_i = 2ql\left[\frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}\right]^2$$

A.N. $\tau_t = 10ps$:
$\frac{1}{\tau} = 100GHz$!



Rq : **2ql** → en électronique on raisonne en fréquences positives uniquement ...

disparition du bruit de grenaille sous l'effet des collisions

Probabilité de franchissement d'une barrière de potentiel sans collision

Probabilité de transit sans choc : $P = e^{-\frac{\tau_t}{\tau_r}}$

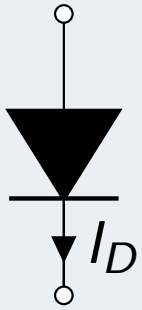
$\longrightarrow S_i \approx 2qIe^{-\frac{\tau_t}{\tau_r}} = 2qI|_{\tau_t \ll \tau_r}$

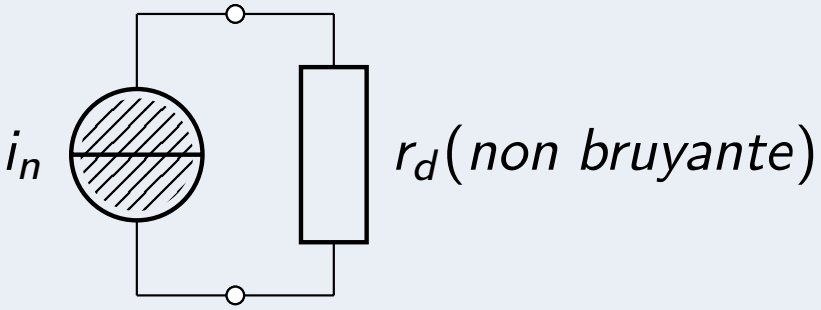
$\tau_t \gg \tau_r$

si $\tau_t \gg \tau_r$ le bruit de grenaille tend à disparaitre au profit du bruit thermique lié aux collisions

Bruit de grenaille dans les jonctions

Schéma équivalent petit signal d'une diode bruyante





$$r_d = \frac{k_B T}{q I_D}$$

$$S_i = 2 q I_D$$

$$I_{n_{eff}} = \sqrt{2 q I_D \Delta f}$$

Plan : Origines physiques des bruits - **Excès** - *flicker noise* ...

1 Introduction
- Définition
- Classification

2 Propriétés des bruits
- Amplitude
- Bande équivalent de bruit
- Corrélation

3 Origines physiques des bruits
- Thermique - *Johnson noise*
- Grenaille - *shot noise*
- Excès - *flicker noise* ...

Bruit en excès

Bruits non-fondamentaux ($\neq$ Thermique & Grenaille)

Bruits difficilement prévisibles et peu connus dont les interprétations prêtent à controverse

on intègre parfois le bruit de grenaille dans les bruit en excès car il n'existe qu'en présence d'un courant, comme l'ensemble des bruits en excès

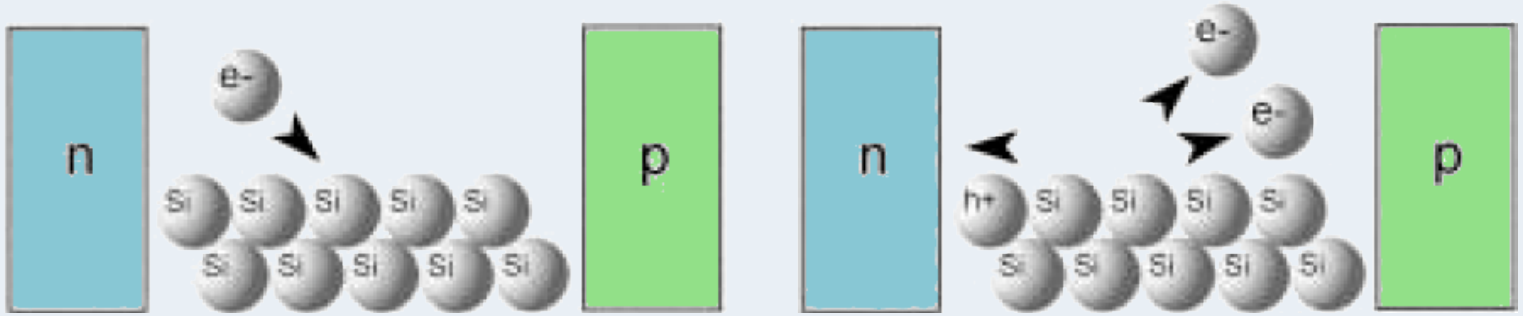
- Avalanche
- Génération - recombinaison (GR ou *burst noise*)
  - Eclatement (Popcorn ou Télégraphique)
  - 1/f (Scintillement ou "Flicker noise")

Bruit d'avalanche ($\Delta V > 14V \rightarrow$ avalanche; $\Delta V < 4V \rightarrow$ Zener *tunnel*)

Diode polarisée en inverse proche de sa tension de claquage

Accélération des porteurs sous fort champ E $\rightarrow$ collision avec les noeuds du réseau dans la ZCE:

multiplication par M du nombre de porteurs. ($1 < M_{typ.} < 10$)



Op Amps for everyone - TI

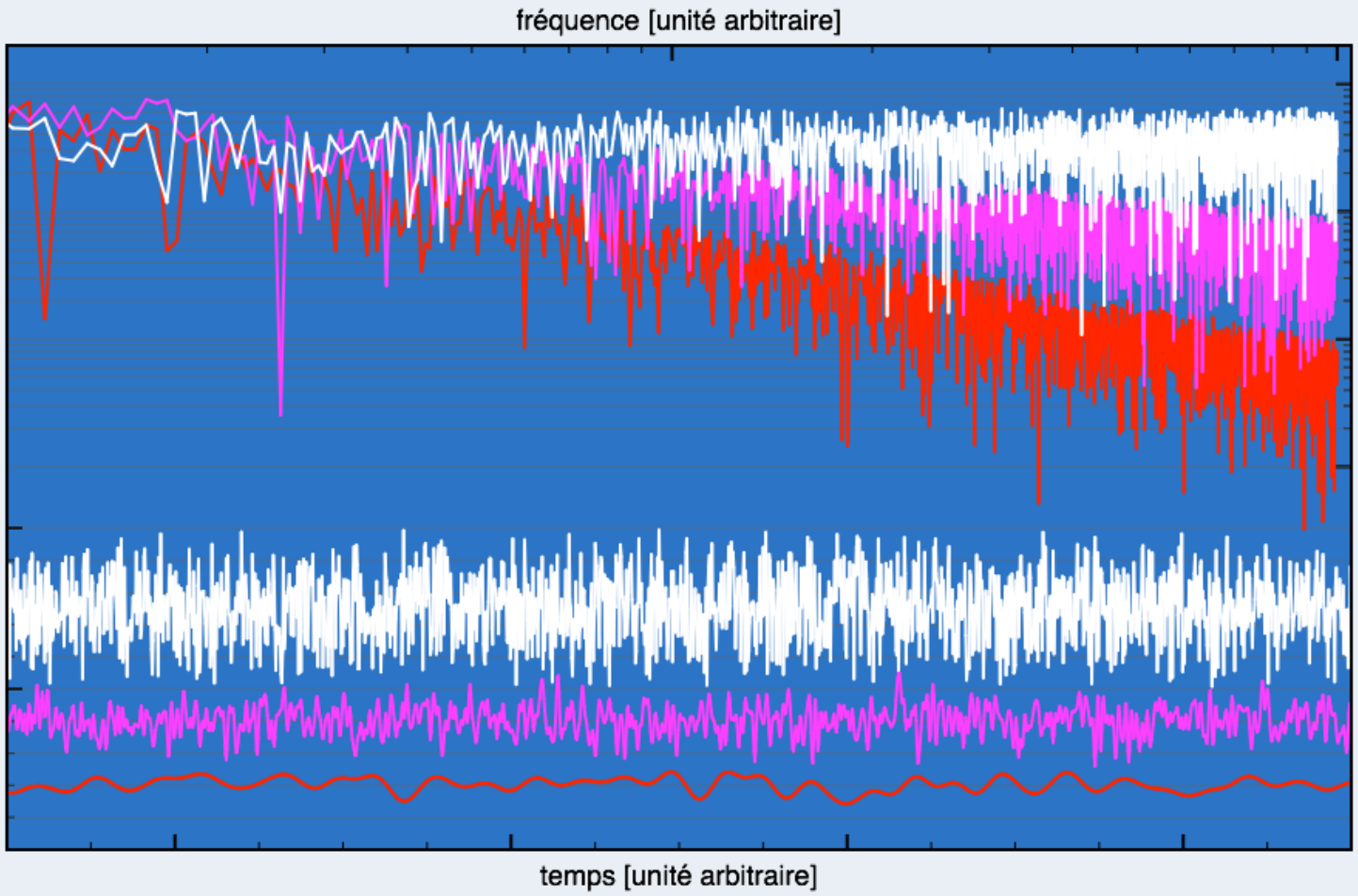
Le bruit de grenaille est ainsi multiplié par M (en courant)

DSP du bruit d'avalanche: $S_i = 2qIM^2$

Les diodes Zener sont utilisées comme source de bruit blanc

Bruits *colorés*

$S_{blanc} = cst \ \ \forall f$; $S_{rose} \propto \frac{1}{f}$; $S_{rouge} \propto \frac{1}{f^2}$



Bruit en excès $\longrightarrow$ pièges

Le bruit en excès est souvent associé à la présence de **défauts** et de **pièges**.

Génération et recombinaison

Variation aléatoire du nombre de porteurs due aux:

- $\nearrow$ générations :
  - e^- piège $\longrightarrow$ bande de conduction
  - *trou* piège $\longrightarrow$ bande de valence
- $\searrow$ recombinaisons :
  - e^- bande de conduction $\longrightarrow$ piège
  - *trou* bande de valence $\longrightarrow$ piège

Générations - recombinaisons - *GR noise*

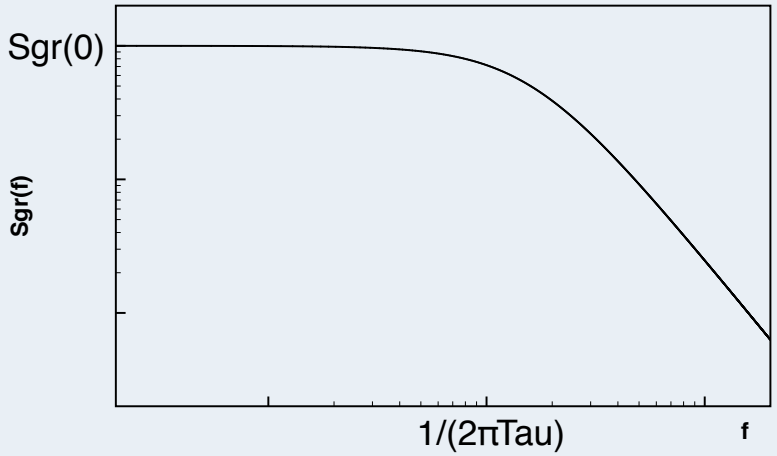
Fluctuation du courant de dérive

Taux aléatoire de générations et de recombinaisons des pièges (défauts, implants, état de surface)

Relaxations des pièges (vie des porteurs) $\tau_r \ll \tau_t$

$$S_{GR} \propto \frac{I^2 \tau_r}{1+(2\pi f \tau_r)^2}$$

spectre Lorentzien $\leftarrow$ $TF(I^2 e^{-t/\tau})$



Générations-recombinaisons $\rightarrow$ 1 processus de G-R majoritaire
τ_r caractéristique d'une "relaxation" exponentielle

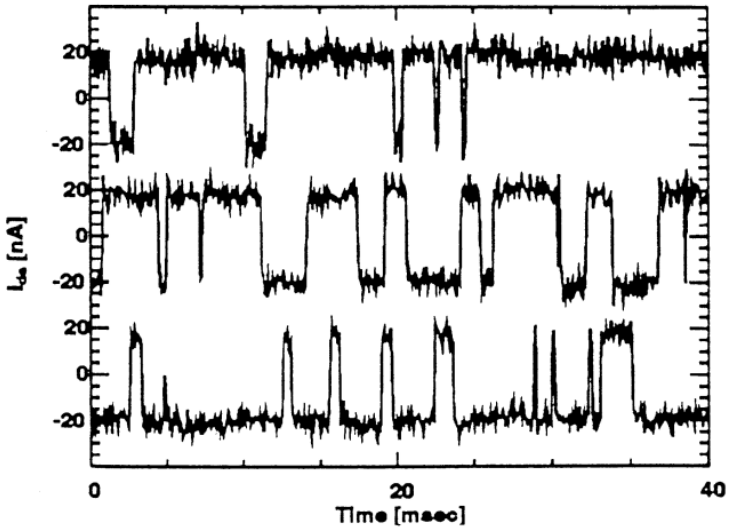
Superposition de processus de "relaxation"

Processus de générations et recombinaison multiples

Bruit d'éclatement - *Burst - Telegraphic - Popcorn noise*

Système à "2 niveaux" ou plus: plusieurs constantes de temps τ_r

$$S_{2niveaux} \propto \frac{4(\Delta I)^2}{(\tau_1+\tau_2)\left[\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right)^2+(2\pi f)^2\right]}$$

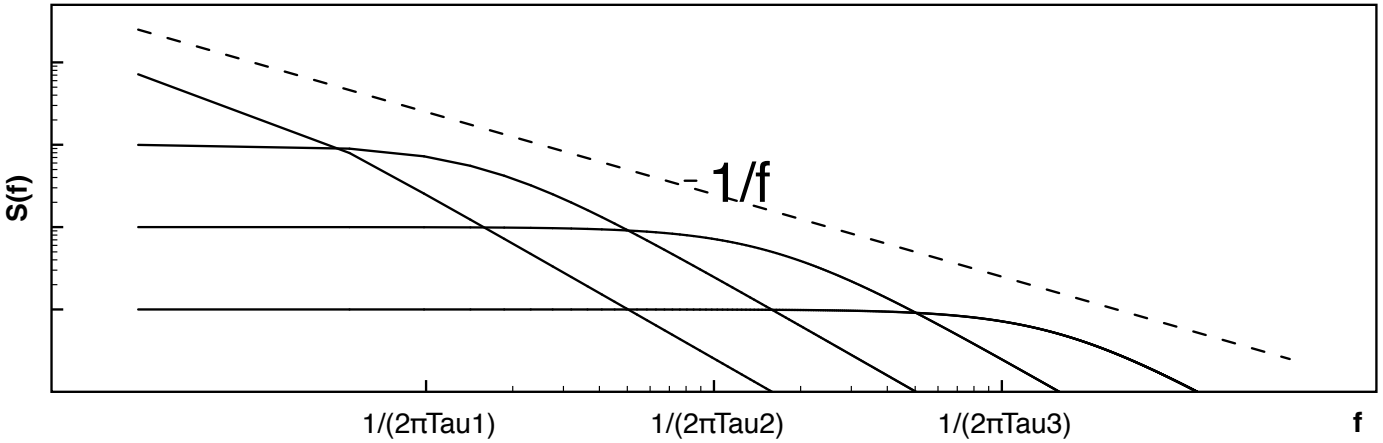


Bruit de scintillation ou 1/f - *flicker noise*

Grand nombre de processus de générations-recombinaisons
$\rightarrow$ grand nombre de constantes de temps τ_i

Bruit de scintillation - *flicker noise*

- Nombreux processus de G-R: fluctuation du nb d'e^-, de trou; implants, impuretés en volume, en surface (centre de recombinaison) $\rightarrow$ grand nb de spectres Lorentzien ($\neq f_c$)



$$S \propto I^2 \sum_i \frac{\tau_i}{1+(2\pi f \tau_i)^2} = I^2 \int_{\tau_{min}}^{\tau_{max}} \frac{\tau_i}{1+(2\pi f \tau_i)^2}$$

$$= \frac{I^2}{2\pi f}[\arctan(2\pi f \tau_{max}) - \arctan(2\pi f \tau_{min})] \approx \frac{I^2}{4f}$$

- Fluctuation de la mobilité des porteurs: "bruit en volume"

Valeur efficace du bruit en 1/f (DSP en 1/f: $S = \frac{cst}{f}$)

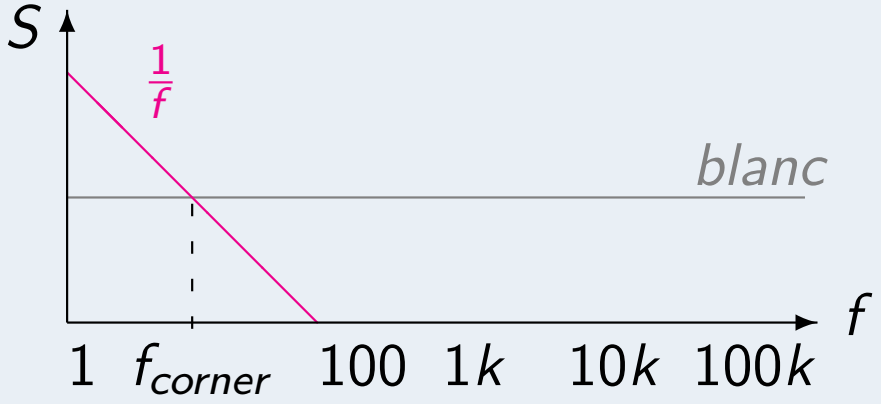
Constance du bruit intégré sur une décade ($\Delta f = 10$)

$$P = \int_{f_x}^{10f_x} \frac{cst}{f} \mathrm{d}f = cst(\ln 10f_x - \ln f_x) = cst \ln \frac{10f_x}{f_x} = cst \ln 10 \quad \forall f_x$$

$$\textit{invariance d'échelle: } \ldots = P\Big|_{0.01Hz}^{0.1Hz} = P\Big|_{0.1Hz}^{1Hz} = P\Big|_{1Hz}^{10Hz} = \ldots$$

1/f + bruit blanc ($f_{corner} \rightarrow$ recouvrement entre le bruit blanc et le bruit BF)

Passé $10f_c$ le bruit intégré est rapidement dominé par le bruit blanc (pour une intégration du bruit en 1/f de qq décades seulement)



$\ln 10 \approx 2.3$

Limite de la remontée basse fréquence du bruit en 1/f

Densité Spectrale de Puissance du bruit 1/f à basse fréquence

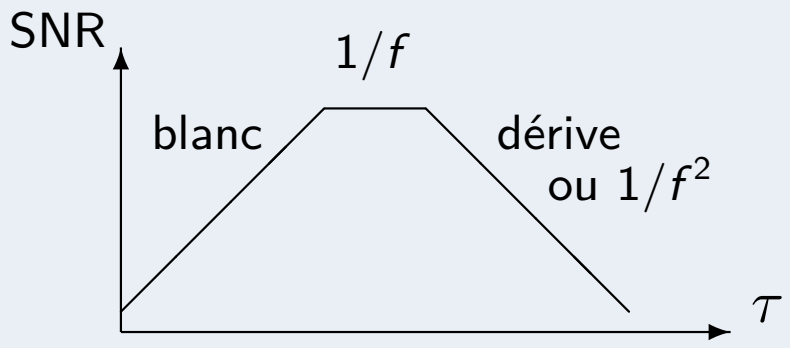
La durée de la mesure donne une limite basse fréquence ($f_{min} < \frac{1}{Durée\ de\ mesure}$) à l'intégration du bruit. Une mesure d'une heure donne une limite basse du bruit à 0,3 mHz.

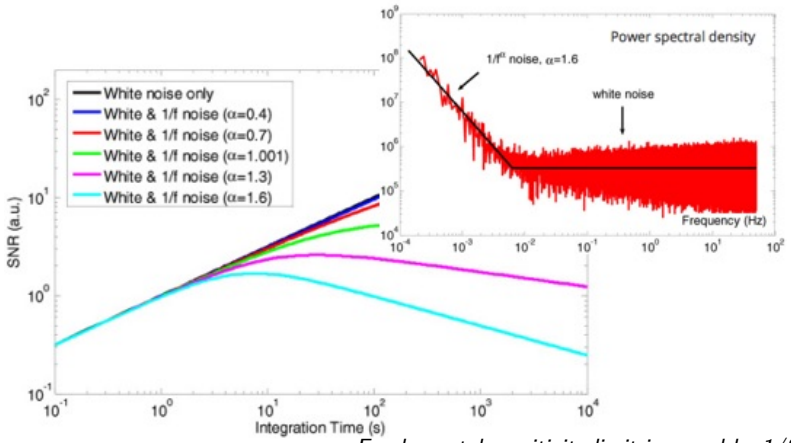
$f < 10^{-2} Hz \rightarrow$ Fluctuations de T

Le bruit en 1/f a été mesuré sur certains dispositifs jusqu'à $qq\ 10^{-5} Hz$ (Période de 1 jour). A ces fréquences d'autres perturbations apparaissent. En particulier, le bruit thermique n'est plus blanc pour la simple raison que T n'est plus une constante à cette échelle de fréquence.

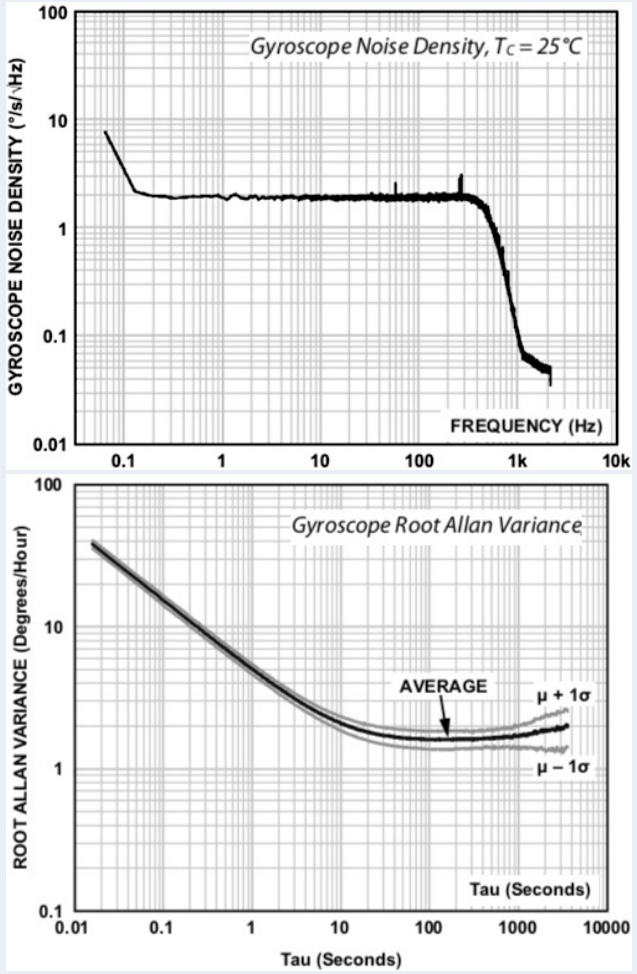
Limite d'integration / moyennage (Variance de Allan)

↗ temps d'intégration τ
$\neq$ ↗ rapport signal/bruit





Fundamental sensitivity limit imposed by 1/f noise



Exemple : Gyroscop ADIS16490

Modélisation empirique du bruit basse fréquence

dépendance en fréquence

$S_i \propto \frac{1}{f^\gamma}$ typiquement, on mesure : $0{,}8 < \gamma < 1{,}3$

dépendance en courant

$S_i \propto I^\alpha$ typiquement, on mesure : $0{,}5 < \alpha < 2$

dépendance en densité de courant pour $\alpha = 1$

$S_i \propto \frac{I^\alpha}{A}$ A = aire présentée au passage du courant I

Modélisation empirique avec facteur K

$$S_i = \frac{K}{A} \times \frac{I^\alpha}{f^\gamma}$$

Synthèse des types de bruits

Nom	Forme	DSA S_i	Source
Thermique - *Johnson*	Blanc	$4k_BT/R$	Résistance
Grenaille - *shot*	Blanc	$2qI$	Diode
Avalanche	Blanc	$2qIM^2$	Zener
Scintillation - *flicker*	$1/f^\gamma$	$\frac{K}{A} \times \frac{I^\alpha}{f^\gamma}$	Semiconducteur

Moyens d'action

- Thermique : Résistance, Température
- Grenaille : Courant
- 1/f : Densité de courant - dimension, technologie