



# Représentation des systèmes dynamiques : Notes de cours

Thierry Miquel

## ► To cite this version:

Thierry Miquel. Représentation des systèmes dynamiques : Notes de cours. École d'ingénieur. Représentation des systèmes dynamiques, ENAC, France. 2022. hal-03822159

**HAL Id: hal-03822159**

**<https://cel.hal.science/hal-03822159>**

Submitted on 20 Oct 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - ShareAlike 4.0 International License

# Représentation des systèmes dynamiques

Notes de cours

Thierry Miquel  
`thierry.miquel@enac.fr`

October 17, 2022



# Introduction générale

C'est Henri Poincaré (1854 - 1912) qui est très vraisemblablement à l'origine de la théorie des systèmes dynamiques grâce à ses travaux sur le traitement du problème des trois corps en 1889. Rappelons que ce problème consiste à déterminer les trajectoires de trois corps mutuellement soumis à l'attraction gravitationnelle et qu'il n'est pas possible de le résoudre analytiquement en général, seules des solutions approchées peuvent être calculées.

De manière très générale un système dynamique est un système qui évolue avec le temps et la théorie des systèmes dynamiques propose des techniques permettant de prévoir le comportement dans le temps d'un système à partir des lois d'évolution infinitésimale.

Nous reprenons ci-après la définition donnée par Wikipédia :

*Un système dynamique est un système qui évolue au cours du temps de façon à la fois causale (c'est-à-dire que son avenir ne dépend que de phénomènes du passé ou du présent) et déterministe (c'est-à-dire qu'à une condition initiale donnée à l'instant présent va correspondre à chaque instant ultérieur un et un seul état futur possible).*

Ce cours est divisé en cinq chapitres. Le premier chapitre est consacré à la présentation de la notion de vecteur d'état qui est à la base de l'automatique moderne. Après avoir montré qu'une équation différentielle non linéaire peut être approchée au voisinage d'un point d'équilibre par une équation différentielle linéaire à coefficients constants nous introduisons la représentation d'état des systèmes linéaires et invariants dans le temps.

Le second chapitre est une introduction à la mécanique analytique qui permet d'obtenir relativement aisément une représentation d'état d'un système dynamique.

Le troisième chapitre traite de la résolution de l'équation d'état pour les systèmes linéaires et invariants dans le temps. Il s'agit essentiellement dans ce troisième chapitre de présenter les différentes techniques permettant de calculer l'exponentielle d'une matrice constante multipliée par la valeur  $t$  du temps.

Le quatrième chapitre aborde le problème de la réalisation des systèmes où il s'agit de trouver une représentation d'état à partir d'une matrice de transfert ou d'un système d'équations différentielles couplées.

Enfin le cinquième chapitre traite des techniques de réduction de modèles qui permettent à l'ingénieur de manipuler des modèles d'ordre moins élevé, et donc plus simples, tout en fournissant une bonne approximation de la dynamique du système sur les échelles de temps adéquates.

L'appendice traite du problème de l'identification des systèmes, c'est à dire

de la manière d'obtenir une représentation d'état d'un système à partir de la mesure des signaux sur ses entrées et ses sorties.

Ces notes de cours n'aborderont pas les systèmes bruités qui sont intrinsèquement stochastiques et qui relèvent de la théorie des probabilités.

# Bibliographie

- [DUM08] Dumas, Rondepierre, *An hybrid system approach to nonlinear optimal control problems*, 2008
- [PET09] Petit, Rouchon, *Dynamique et contrôle des systèmes*, 2009
- [VIA01] Vial, *Le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra*, 2001
- [BRI09] Bricmont, *Introduction à la dynamique non linéaire*, 2009
- [POT96] Roy Pota, *MIMO Systems: Transfer Function To State Space*, 1996
- [ALA] Alazard, *Représentation et analyse des systèmes multi-variables*, SupAero
- [RAC97] Rachid, Mehdi, *Réalisation, réduction et commande des systèmes linéaires*, 1997
- [KUN78] Kung, *A New Identification and Model Reduction Algorithm via Singular Value Decompositions*, 1978
- [BRA13] Ben Rhouma, *Autour de la décomposition de Dunford réelle ou complexe: Théorie spectrale et méthodes effectives*, 2013
- [VEL10] Velay, *Modélisation d'un accéléromètre MEMS*, 2010
- [OST06] Ostertag, *Commande et estimation multivariables : Méthodes linéaires et optimisation quadratique*, 2006
- [LAB07] Labourie, *Introduction aux systèmes dynamiques*, 2007
- [BHA07] Pradeep Bhatta, *Nonlinear Gliding Stability and Control for Vehicles with Hydrodynamic Forcing*, 2007



# Table des matières

|          |                                                                        |           |
|----------|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Représentation d'état</b>                                           | <b>11</b> |
| 1.1      | Introduction . . . . .                                                 | 11        |
| 1.2      | Vecteur d'état, représentation d'état et forme de Brunovsky . . . .    | 11        |
| 1.3      | Caractérisation des systèmes dynamiques . . . . .                      | 14        |
| 1.4      | Non-unicité de la représentation d'état . . . . .                      | 16        |
| 1.5      | Exemples . . . . .                                                     | 17        |
| 1.5.1    | Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra . . . . .                     | 17        |
| 1.5.2    | Mouvement et transfert de chaleur d'un fluide imaginaire . . . . .     | 17        |
| 1.5.3    | Modèle simplifié des marchés financiers . . . . .                      | 18        |
| 1.5.4    | Tricycle simplifié . . . . .                                           | 18        |
| 1.5.5    | Modèle d'un moteur électrique à courant continu . . . . .              | 19        |
| 1.6      | Points d'équilibre, linéarisation . . . . .                            | 21        |
| 1.7      | Représentation d'état d'un système linéaire et invariant . . . . .     | 24        |
| <b>2</b> | <b>Introduction à la mécanique analytique</b>                          | <b>27</b> |
| 2.1      | Introduction . . . . .                                                 | 27        |
| 2.2      | Rappel de mécanique classique . . . . .                                | 27        |
| 2.2.1    | Théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique . . . . . | 27        |
| 2.2.2    | Relations cinématiques . . . . .                                       | 28        |
| 2.2.3    | Équations de Newton-Euler . . . . .                                    | 30        |
| 2.3      | Équations de Euler-Lagrange . . . . .                                  | 30        |
| 2.4      | Équations canoniques de Hamilton . . . . .                             | 36        |
| 2.5      | Bras simple de robot . . . . .                                         | 36        |
| 2.5.1    | Description du système . . . . .                                       | 36        |
| 2.5.2    | Équations de Euler-Lagrange . . . . .                                  | 37        |
| 2.5.3    | Équations canoniques de Hamilton . . . . .                             | 38        |
| 2.5.4    | Mécanique classique . . . . .                                          | 39        |
| 2.6      | Équations de Euler-Lagrange et contraintes holonomes . . . . .         | 40        |
| 2.7      | Robot RP . . . . .                                                     | 45        |
| 2.8      | Application au gyropode . . . . .                                      | 47        |
| 2.9      | Dynamique du mouvement longitudinal d'un avion . . . . .               | 52        |
| 2.9.1    | Expression des forces et des moments . . . . .                         | 52        |
| 2.9.2    | Équations de Euler-Lagrange . . . . .                                  | 54        |
| 2.9.3    | Représentation d'état dans le référentiel aérodynamique . . . . .      | 55        |



|          |                                                                                                                |            |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>3</b> | <b>Résolution de l'équation d'état</b>                                                                         | <b>59</b>  |
| 3.1      | Introduction . . . . .                                                                                         | 59         |
| 3.2      | Problème de Cauchy . . . . .                                                                                   | 59         |
| 3.2.1    | Normes de vecteurs, normes de matrices . . . . .                                                               | 59         |
| 3.2.2    | Théorème de Cauchy-Lipschitz . . . . .                                                                         | 62         |
| 3.2.3    | Flot, trajectoire, orbite, portait de phase . . . . .                                                          | 64         |
| 3.3      | Trajectoire des systèmes linéaires et invariants . . . . .                                                     | 69         |
| 3.3.1    | Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants du premier ordre . . . . . | 69         |
| 3.3.2    | Expression du vecteur d'état . . . . .                                                                         | 70         |
| 3.3.3    | Expression du vecteur de sortie . . . . .                                                                      | 71         |
| 3.3.4    | Systèmes linéaires variant dans le temps . . . . .                                                             | 72         |
| 3.4      | Calcul de l'exponentielle d'une matrice . . . . .                                                              | 74         |
| 3.4.1    | Définition de l'exponentielle d'une matrice . . . . .                                                          | 75         |
| 3.4.2    | Polynôme minimal d'une matrice . . . . .                                                                       | 75         |
| 3.4.3    | Cas d'une matrice nilpotente . . . . .                                                                         | 76         |
| 3.4.4    | Décomposition modale - diagonalisation . . . . .                                                               | 77         |
| 3.4.5    | Utilisation du théorème de Cayley-Hamilton . . . . .                                                           | 79         |
| 3.4.6    | Jordanisation . . . . .                                                                                        | 85         |
| 3.4.7    | Décomposition de Dunford (ou de Jordan-Chevalley) . . . . .                                                    | 89         |
| 3.4.8    | Utilisation de la transformée de Laplace . . . . .                                                             | 91         |
| 3.5      | Calcul d'une fonction de matrice diagonalisable . . . . .                                                      | 99         |
| <b>4</b> | <b>Réalisation des systèmes</b>                                                                                | <b>101</b> |
| 4.1      | Introduction . . . . .                                                                                         | 101        |
| 4.2      | Matrice de transfert . . . . .                                                                                 | 102        |
| 4.2.1    | Obtention à partir de la représentation d'état . . . . .                                                       | 102        |
| 4.2.2    | Non-unicité de la réalisation . . . . .                                                                        | 104        |
| 4.2.3    | Zéros de transmission . . . . .                                                                                | 104        |
| 4.2.4    | Interprétation de la décomposition modale . . . . .                                                            | 108        |
| 4.3      | Réalisation des systèmes SISO . . . . .                                                                        | 111        |
| 4.3.1    | Forme compagne de commande . . . . .                                                                           | 111        |
| 4.3.2    | Pôles et zéros de la fonction de transfert . . . . .                                                           | 115        |
| 4.3.3    | Forme modale . . . . .                                                                                         | 116        |
| 4.4      | Réalisation des systèmes SIMO . . . . .                                                                        | 124        |
| 4.4.1    | Procédure générique . . . . .                                                                                  | 125        |
| 4.4.2    | Forme compagne de commande . . . . .                                                                           | 126        |
| 4.5      | Réalisation des systèmes MIMO . . . . .                                                                        | 129        |
| 4.5.1    | Procédure générique . . . . .                                                                                  | 130        |
| 4.5.2    | Forme compagne de commande . . . . .                                                                           | 133        |
| 4.5.3    | Forme modale . . . . .                                                                                         | 136        |
| 4.5.4    | Méthode de Gilbert . . . . .                                                                                   | 140        |
| 4.6      | Réalisation minimale . . . . .                                                                                 | 142        |
| 4.6.1    | Définition . . . . .                                                                                           | 142        |
| 4.6.2    | Mineurs d'une matrice, Plus Petit Dénominateur Commun (PPDC) . . . . .                                         | 143        |
| 4.6.3    | Dimension d'un système . . . . .                                                                               | 143        |

|          |                                                                        |            |
|----------|------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.6.4    | Pôles et zéros de transmission . . . . .                               | 145        |
| 4.6.5    | Schéma bloc de la forme modale et minimalité . . . . .                 | 147        |
| 4.7      | Décomposition polynomiale matricielle . . . . .                        | 148        |
| 4.7.1    | PGCD de deux polynômes . . . . .                                       | 148        |
| 4.7.2    | Forme de Smith d'une matrice polynomiale . . . . .                     | 149        |
| 4.7.3    | Forme de Smith-McMillan d'une matrice de transfert . . . . .           | 155        |
| 4.7.4    | Dimension, poles et zéros . . . . .                                    | 158        |
| 4.7.5    | Réalisation de la matrice de transfert . . . . .                       | 160        |
| 4.7.6    | Décomposition polynomiale matricielle (P-MFD) . . . . .                | 163        |
| 4.7.7    | Applications de la forme d'Hermite . . . . .                           | 167        |
| 4.7.8    | Degré de McMillan, dimension, poles et zéros de transmission . . . . . | 174        |
| <b>5</b> | <b>Réduction de modèle</b>                                             | <b>181</b> |
| 5.1      | Introduction . . . . .                                                 | 181        |
| 5.2      | Méthode de Padé . . . . .                                              | 182        |
| 5.3      | Méthodes des perturbations singulières . . . . .                       | 185        |
| 5.3.1    | Perturbations régulières . . . . .                                     | 185        |
| 5.3.2    | Perturbations singulières: exemple introductif . . . . .               | 186        |
| 5.3.3    | Forme standard -Théorème de Tikhonov . . . . .                         | 189        |
| 5.4      | Cas des systèmes linéaires . . . . .                                   | 191        |
| 5.4.1    | Représentation d'état singulièrement perturbée . . . . .               | 191        |
| 5.4.2    | Modèle à temps lent . . . . .                                          | 198        |
| 5.4.3    | Modèle à temps rapide . . . . .                                        | 200        |
| 5.4.4    | Stabilité du modèle singulièrement perturbé . . . . .                  | 201        |
|          | <b>Appendices</b>                                                      | <b>205</b> |
| <b>A</b> | <b>Identification des systèmes</b>                                     | <b>207</b> |
| A.1      | Introduction . . . . .                                                 | 207        |
| A.2      | Identification par les méthodes de Broïda et de Strejc . . . . .       | 207        |
| A.2.1    | Réponse apériodique . . . . .                                          | 207        |
| A.2.2    | Réponse oscillante . . . . .                                           | 209        |
| A.3      | Identification paramétrique . . . . .                                  | 210        |
| A.3.1    | Méthode des moindres carrés . . . . .                                  | 210        |
| A.3.2    | Méthode des variables instrumentales . . . . .                         | 211        |
| A.3.3    | Cas des systèmes à temps continu . . . . .                             | 212        |
| A.4      | Paramètres de Markov . . . . .                                         | 213        |
| A.5      | Matrice de Hankel - Dimension d'un système . . . . .                   | 215        |
| A.6      | Algorithme de Ho-Kalman (ou ERA) . . . . .                             | 216        |
| A.7      | Exemples . . . . .                                                     | 218        |
| A.8      | Discrétisation de l'équation d'état . . . . .                          | 223        |
| A.8.1    | Systèmes linéaires et invariants . . . . .                             | 223        |
| A.8.2    | Discrétisation par les séries d'Adomian . . . . .                      | 225        |
| A.9      | Approximation de la trajectoire de l'équation d'état . . . . .         | 232        |
| A.9.1    | Transformation bilinéaire (ou de Tustin) . . . . .                     | 232        |
| A.9.2    | Systèmes non-linéaires - Méthode de Runge-Kutta . . . . .              | 234        |

|                                                                                                                     |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| A.10 Réponse d'un système à temps discret à une entrée quelconque<br>pour des conditions initiales nulles . . . . . | 236 |
| A.11 Paramètres de Markov d'un système à temps discret . . . . .                                                    | 237 |
| A.12 Modèle ARMA d'un système à temps discret . . . . .                                                             | 239 |
| A.13 Identification d'un système à temps discret . . . . .                                                          | 240 |
| A.14 Modèle ARMARKOV d'un système à temps discret . . . . .                                                         | 242 |
| A.15 Identification d'un système à temps discret . . . . .                                                          | 244 |
| A.15.1 Méthode basée sur la réponse à un échelon unité . . . . .                                                    | 244 |
| A.15.2 Méthode basée sur la réponse à une entrée quelconque . . . . .                                               | 246 |
| A.16 Séquence binaire pseudo-aléatoire . . . . .                                                                    | 250 |

# Chapitre 1

## Représentation d'état

### 1.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter la notion de vecteur d'état et de représentation d'état des systèmes, qu'ils soient linéaires ou non. Il débute par la présentation des systèmes différentiels et des définitions qui leurs sont associées. Puis des exemples sont présentés afin d'illustrer ces différentes notions. Le chapitre s'achève sur les notions de points d'équilibre et de linéarisation qui permettront de simplifier la dynamique d'un système non linéaire stationnaire sous la forme d'un système dynamique linéaire et invariant.

La notion de vecteur d'état a d'abord été développée en Union Soviétique où les automaticiens préféraient manipuler les équations différentielles plutôt que leurs transformées de Laplace et les fonctions de transfert résultantes (approche anglo-saxonne). La diffusion vers l'occident des connaissances liées au vecteur d'état a débuté après le premier congrès de l'*IFAC* (International Federation of Automatic Control) qui s'est tenu à Moscou en 1960.

Dans ce chapitre nous présentons la notion de vecteur d'état et de représentation d'état ainsi que la forme de Brunovsky pour les systèmes mono-entrée mono-sortie (SISO). Puis, après avoir caractérisé les différents types de systèmes dynamiques, nous insistons sur la non-unicité de la représentation d'état d'un système dynamique. Plusieurs exemples de systèmes dynamiques sont ensuite présentés ainsi que leur représentation d'état. Les notions importantes de points d'équilibre et de linéarisation d'un système non-linéaire autour d'un point d'équilibre sont ensuite abordées. Nous concluons ce chapitre sur la représentation d'état d'un système linéaire et invariant.

### 1.2 Vecteur d'état, représentation d'état et forme de Brunovsky

Soit un système mono-entrée mono-sortie (SISO) dont la dynamique est régie par l'équation différentielle scalaire d'ordre  $n$  suivante, où  $y(t)$  est la sortie du

système est  $u(t)$  sa commande:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = g\left(y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}, u(t)\right) \quad (1.1)$$

Un vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  représente un ensemble minimum de variables telles que leur connaissance à l'instant initial  $t_0$ ,  $\underline{x}(t_0)$ , et du vecteur de commande (ou entrée)  $\underline{u}(t) \forall t \geq t_0$  permettent de déterminer de manière univoque l'évolution d'un système dynamique  $\forall t \geq t_0$ . Pour un système mécanique cela peut être des positions et/ou des vitesses, pour un réseau électrique cela peut être des courants et/ou des tensions. Le choix des variables d'état n'est pas univoque: le même système peut être décrit par des ensembles différents de variables d'état.

La représentation d'état est constituée par un couple d'équations:

- l'équation d'état et le vecteur d'état associé permettent de représenter le comportement d'un système dynamique sous la forme de  $n$  équations différentielles du premier ordre;
- l'équation d'observation (ou de sortie) qui décrit les dépendances du vecteur de sortie  $\underline{y}(t)$  avec le vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  du système.

Pour passer de l'équation différentielle (1.1) scalaire d'ordre  $n$  à une équation différentielle vectorielle du premier ordre, c'est à dire à la représentation d'état, il suffit *par exemple* de définir le vecteur d'état  $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  suivant:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) \\ x_n(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} \\ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle scalaire d'ordre  $n$  (1.1) devient une équation différentielle vectorielle du premier ordre:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ g(x_1, \dots, x_{n-1}, u(t)) \end{bmatrix} := f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (1.3)$$

La représentation d'état où chaque composante du vecteur d'état s'obtient par la relation  $\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) \forall i < n$  s'appelle forme de Brunovsky.

Une équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants d'ordre  $n$  peut ainsi être représentée par un système de  $n$  équations différentielles linéaires du premier ordre formant une équation différentielle vectorielle du premier ordre. Les composantes temporelles de ce système d'équations différentielles forment le vecteur d'état.

L'équation d'observation (ou de sortie) exprime la sortie  $y(t)$  en fonction du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$ . Ici:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) := h(\underline{x}(t)) \quad (1.4)$$

Cette démarche s'applique non seulement aux systèmes à une seule entrée et une seule sortie mais aussi aux systèmes à plusieurs entrées et plusieurs sorties, qu'ils soient ou non linéaires et invariants.

**Exemple 1.1.** *En guise d'exemple introductif, nous rappelons ci-après l'équation différentielle à laquelle obéit un modèle élémentaire du deuxième ordre :*

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (1.5)$$

*La fonction de transfert de ce système est donnée par l'expression suivante où  $s$  représente la variable de Laplace:*

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2m\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (1.6)$$

*Ce modèle élémentaire du deuxième ordre peut être interprété comme un système composé de deux réservoirs d'énergie. L'évolution temporelle de la variable de sortie  $y(t)$  s'explique par une conversion périodique entre deux formes d'énergie, par exemple énergie cinétique  $\leftrightarrow$  potentielle ou mécanique  $\leftrightarrow$  électrique, avec perte d'énergie lors de l'échange. Ainsi pour un système mécanique, l'énergie potentielle, fonction de la position, se transforme en énergie cinétique, fonction de la vitesse, et réciproquement.*

*Ce point de vue physique conduit à choisir pour variables d'état la position et la vitesse et à raisonner à partir des deux équations différentielles du premier ordre déduites de celle du second ordre (qui accordait un rôle prépondérant à la position). Introduisons par exemple les variables  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  suivantes :*

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{dy(t)}{dt} \end{cases} \quad (1.7)$$

*Grâce aux deux composantes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , l'équation différentielle du second ordre (1.5) devient :*

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{dx_2(t)}{dt} + \frac{2m}{\omega_0} x_2(t) + x_1(t) = Ku(t) \quad (1.8)$$

*La seconde équation de (1.7) et l'équation (1.8) constituent un système de deux équations différentielles du premier ordre, équivalent à l'équation différentielle (1.5) du second ordre :*

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = -\omega_0^2 x_1(t) - 2m\omega_0 x_2(t) + K\omega_0^2 u(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

*Les deux composantes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  s'appellent les variables d'état et l'équation (1.9) l'équation d'état.*

L'introduction du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  de composantes  $(x_1(t)$  et  $x_2(t))$  permet d'écrire les deux équations différentielles du premier ordre de (1.9) sous la forme vectorielle suivante:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2m\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K\omega_0^2 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.10)$$

Le système est alors décrit sous une forme vectorielle appelée équation d'état :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}u(t) := f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (1.11)$$

Cette formulation fait jouer un rôle semblable aux deux composantes du vecteur d'état : la position  $x_1(t)$  et la vitesse  $x_2(t)$ . La position  $x_1(t)$  perd l'importance que lui attribuait l'équation différentielle du second ordre (1.5). Lorsque l'évolution de cette grandeur doit être suivie, elle est exprimée par l'équation d'observation (ou de sortie) qui est ici issue de la première équation de (1.7):

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow y(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) := h(\underline{x}(t)) \quad (1.12)$$

■

### 1.3 Caractérisation des systèmes dynamiques

L'évolution des systèmes dynamiques causaux et déterministes se modélise de façon naturelle par un nombre fini d'équations différentielles ordinaires. Ces équations différentielles sont en général non linéaires et non stationnaires et peuvent s'écrire comme un système d'équations différentielles du premier ordre couplées d'un vecteur d'état  $\underline{x}(t)$ :

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), t) \quad (1.13)$$

Lorsqu'il existe une (ou plusieurs) entrées (ou commandes), notées  $\underline{u}(t)$ , pouvant influencer le comportement du système, l'équation (1.13) prend la forme suivante:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t) \quad (1.14)$$

Nous rappelons que vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  représente l'ensemble minimum de variables tel que la connaissance de ses composantes à l'instant initial  $t_0$ ,  $\underline{x}(t_0)$ , et du vecteur de commande (ou entrée)  $\underline{u}(t) \forall t \geq t_0$  permettent de déterminer de manière univoque l'évolution du système dynamique  $\forall t \geq t_0$ .

Nous dirons que le système est:

- *Stationnaire* ou *autonome* ou *invariant dans le temps* lorsque le temps n'apparaît pas de manière explicite dans l'équation différentielle:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (1.15)$$

- *Homogène* lorsque qu'aucune commande  $\underline{u}(t)$  (variable externe ou exogène) n'apparaît dans l'équation différentielle:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), t) \quad (1.16)$$

- *Affine en la commande* lorsque la commande  $\underline{u}(t)$  apparaît linéairement dans l'équation différentielle:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), t) + g(\underline{x}(t), t) \underline{u}(t) \quad (1.17)$$

- *Linéaire* lorsque l'état  $\underline{x}(t)$  et la commande  $\underline{u}(t)$  apparaissent linéairement dans l'équation différentielle:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}(t) + \mathbf{B}(t)\underline{u}(t) \quad (1.18)$$

Nous rappelons que toute équation différentielle *linéaire* satisfait au principe de superposition: si  $\underline{x}_1(t)$  est la réponse d'un système décrit par une équation différentielle *linéaire* à l'entrée  $\underline{u}_1(t)$ , et  $\underline{x}_2(t)$  la réponse à l'entrée  $\underline{u}_2(t)$ , alors la réponse de ce système *linéaire* à la combinaison linéaire  $c_1 \underline{u}_1(t) + c_2 \underline{u}_2(t)$ , où  $c_1$  et  $c_2$  sont des constantes, sera  $c_1 \underline{x}_1(t) + c_2 \underline{x}_2(t)$ . En effet:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{\underline{x}}_1(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}_1(t) + \mathbf{B}(t)\underline{u}_1(t) \\ \dot{\underline{x}}_2(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}_2(t) + \mathbf{B}(t)\underline{u}_2(t) \end{cases} \\ & \Rightarrow c_1 \dot{\underline{x}}_1(t) + c_2 \dot{\underline{x}}_2(t) = \mathbf{A}(t)(c_1 \underline{x}_1(t) + c_2 \underline{x}_2(t)) \\ & \quad + \mathbf{B}(t)(c_1 \underline{u}_1(t) + c_2 \underline{u}_2(t)) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Notons qu'il est aisé de passer d'un système stationnaire défini par l'équation  $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$  à un système stationnaire affine en la commande; il suffit en effet de rajouter  $x_{n+1}(t) = u(t)$  au vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  et de prendre  $\dot{\underline{u}}(t) = \underline{v}(t)$  comme nouvelle commande:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \\ x_{n+1}(t) = u(t) \\ \dot{\underline{u}}(t) = \underline{v}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{\underline{u}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{v}(t) \quad (1.20)$$

Cette équation différentielle vectorielle est bien une équation différentielle de la forme  $\dot{\underline{x}}_e(t) = f(\underline{x}_e(t)) + g(\underline{x}_e(t)) \underline{v}(t)$  avec  $\underline{x}_e(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{u}(t) \end{bmatrix}$ ; nous obtenons ainsi une équation différentielle stationnaire et affine en la nouvelle commande  $\underline{v}(t)$ .

Notons aussi que l'ajout de l'état  $x_{n+1}(t) = t$  permet de passer formellement d'un système non-stationnaire de la forme  $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t)$  à un système stationnaire de la forme  $\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \dot{x}_{n+1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\underline{x}(t), x_{n+1}(t), \underline{u}(t)) \\ 1 \end{bmatrix}$ , qui est bien de la forme  $\dot{\underline{x}}_e(t) = F(\underline{x}_e(t), \underline{u}(t))$  où  $\underline{x}_e(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ t \end{bmatrix}$ .

**Exemple 1.2.** Considérons le système non-stationnaire suivant:

$$\ddot{y} = g(y, \dot{y}) + \varphi(t) \quad (1.21)$$

En posant:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ t \end{bmatrix} \quad (1.22)$$



Nous obtenons:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g(x_1, x_2) + \varphi(x_3) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Nous avons ainsi transformé le système non-stationnaire d'ordre 2 sur  $\mathbb{R}$  en un système stationnaire du premier ordre sur  $\mathbb{R}^3$ . ■

En pratique, l'ingénieur s'intéresse à un certain nombre de grandeurs appelées sorties ou mesures et notées  $\underline{y}(t)$ . Le vecteur des grandeurs de sorties  $\underline{y}(t)$  est relié au vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  et au vecteur de commande  $\underline{u}(t)$  par l'équation d'observation (ou de sortie) suivante:

$$\underline{y}(t) = h(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (1.24)$$

## 1.4 Non-unicité de la représentation d'état

La représentation d'état, ou de manière équivalente le choix du vecteur d'état, n'est pas unique. Dans le cas d'un système non-linéaire, c'est un difféomorphisme (i.e. une bijection différentiable), noté  $\Phi(\underline{x}^*)$ , qui permet de passer d'une représentation d'état à une autre:

$$\underline{x}(t) = \Phi(\underline{x}^*(t)) \Leftrightarrow \underline{x}^*(t) = \Phi^{-1}(\underline{x}(t)) \quad (1.25)$$

En utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées, le difféomorphisme  $\Phi^{-1}(\underline{x})$  transforme l'équation d'état stationnaire  $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$  en l'équation d'état suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}^*(t) &= \frac{d}{dt} \Phi^{-1}(\underline{x}) \\ &= \frac{\partial \Phi^{-1}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \Big|_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} \\ &= \frac{\partial \Phi^{-1}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \Big|_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} f(\underline{x}, \underline{u}) \Big|_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} \end{aligned} \quad (1.26)$$

De même l'équation d'observation (ou de sortie) devient:

$$\underline{y}(t) = h(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \Big|_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} \quad (1.27)$$

Dans la suite de ce cours, nous nous intéresserons essentiellement à des systèmes dynamiques linéaires et stationnaires, c'est à dire à des systèmes pour lesquels l'état  $\underline{x}(t)$  apparaît linéairement dans l'équation différentielle et où le temps n'apparaît pas de manière explicite dans l'équation différentielle:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t) \quad (1.28)$$

En ce qui concerne l'équation d'observation, nous aurons également une dépendance linéaire entre le vecteur de sortie  $\underline{y}(t)$  et les vecteurs d'état  $\underline{x}(t)$  et de commande  $\underline{u}(t)$ :

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) + \mathbf{D}\underline{u}(t) \quad (1.29)$$

## 1.5 Exemples

### 1.5.1 Modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Le modèle proie-prédateur proposé par Lotka (*Alfred James Lotka, 1880 - 1949, est un mathématicien et statisticien - américain, théoricien de la dynamique des populations*) et Volterra (*Vito Volterra, 1860 - 1940, est un mathématicien et physicien italien connu pour ses travaux sur les équations intégrales, la dislocation des cristaux et la dynamique des populations*) est le suivant :

- En l'absence de prédateurs, le nombre  $y(t)$  de proies croît avec un taux constant, noté  $a$  ( $a > 0$ ):

$$\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = a \quad (1.30)$$

- En l'absence de proies, le nombre  $z(t)$  de prédateurs décroît avec un taux constant, noté  $-c$  ( $-c < 0$ ):

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = -c \quad (1.31)$$

- Lorsque les proies et les prédateurs interagissent, le taux de croissance des proies devient proportionnel au nombre  $z$  de prédateurs, et le taux de décroissance des prédateurs devient de même proportionnel au nombre  $y(t)$  de proies:

$$\begin{cases} \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = a - bz(t) \\ \frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = -c + dy(t) \end{cases} \quad (1.32)$$

Nous obtenons ainsi le système suivant de deux équations différentielles:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) (a - bz(t)) \\ \dot{z}(t) = z(t) (-c + dy(t)) \end{cases} \quad (1.33)$$

Soit:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t)) \quad (1.34)$$

Où:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \\ f(\underline{x}(t)) = \begin{bmatrix} y(t) (a - bz(t)) \\ z(t) (-c + dy(t)) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.35)$$

### 1.5.2 Mouvement et transfert de chaleur d'un fluide imaginaire

Les équations de Lorenz (*Edward Norton Lorenz, 1917 - 2008, est un scientifique américain*) décrivent d'une façon très simplifiée le mouvement et le transfert de chaleur d'un fluide imaginaire. Nous désignerons par  $x_1$  une grandeur proportionnelle à l'intensité du mouvement de convection du fluide, par  $x_2$  une grandeur proportionnelle à la différence de température entre les courants ascendants et descendants et par  $x_3$  la distorsion du profil du

gradient de température par rapport à la linéarité (une valeur nulle indique un gradient linéaire). Les équations de Lorenz sont les suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \sigma(x_1(t) - x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ \dot{x}_3(t) = x_1x_2 - bx_3 \end{cases} \quad (1.36)$$

Des valeurs classiques pour les paramètres sont:  $\sigma = 10$ ,  $r = 28$  et  $b = \frac{8}{3}$ . Nous obtenons à nouveau un système de la forme:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t)) \quad (1.37)$$

Lorentz a découvert en 1963 alors qu'il travaillait comme météorologue au Massachusetts Institute of Technology que ce système d'équations différentielles avait un comportement chaotique, c'est à dire que ses solutions se caractérisent par une extrême sensibilité aux conditions initiales : une petite variation des conditions initiales est en effet susceptible de créer de grandes différences dans les trajectoires résultantes. Cette propriété est aussi connue sous le nom d'effet papillon.

### 1.5.3 Modèle simplifié des marchés financiers

Le modèle des marchés financiers utilisé par Wei-Ching Chen (chercheur taïwanais) est composé des trois équations différentielles du premier ordre, où  $x_1(t)$  représente le taux d'intérêt,  $x_2(t)$  la demande d'investissement et  $x_3(t)$  l'indice des prix. Dans un repère approprié et en utilisant des variables normalisées, le modèle simplifié des marchés financiers utilisé par Wei-Ching Chen est le suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) + (x_2(t) - a)x_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = 1 - bx_2(t) - x_1^2 \\ \dot{x}_3(t) = -x_1(t) - cx_3(t) \end{cases} \quad (1.38)$$

Où  $a$  représente le montant de l'épargne,  $b$  le cout de l'investissement et  $c$  l'élasticité de la demande: ce sont des constantes non négatives.

Nous obtenons à nouveau un système de la forme:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t)) \quad (1.39)$$

Les simulations réalisées avec  $a = 3$ ,  $b = 0.1$  et  $c = 1$  et  $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (2, 3, 2)$  montre que ce système dynamique est chaotique.

### 1.5.4 Tricycle simplifié

Considérons la Figure 1.1 où l'utilisateur peut régler à la fois la vitesse  $u_1$  du tricycle ainsi que la vitesse de braquage  $\dot{\theta}_2 := u_2$  de la roue avant:

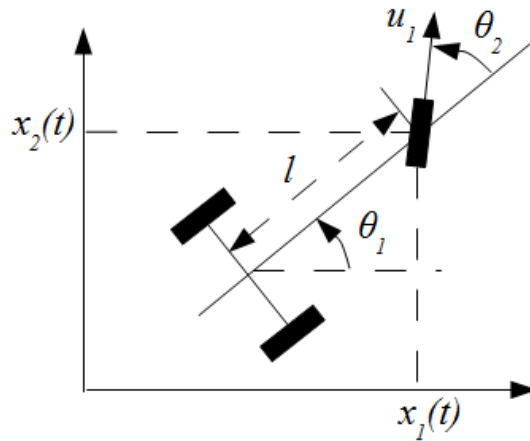


Figure 1.1: Tricycle simplifié

Les équations cinématiques du mouvement conduisent aux équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \cos(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) = u_1(t) \sin(\theta_1(t) + \theta_2(t)) \\ \dot{\theta}_1(t) = \frac{u_1(t)}{l} \sin(\theta_2(t)) \\ \dot{\theta}_2(t) = u_2(t) \end{cases} \quad (1.40)$$

Soit:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (1.41)$$

Où:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} \\ \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \\ f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) = \begin{bmatrix} u_1 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ u_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \frac{u_1}{l} \sin(\theta_2) \\ u_2(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.42)$$

### 1.5.5 Modèle d'un moteur électrique à courant continu

Un moteur électrique à courant continu est constitué de deux éléments:

- Un stator, aussi appelé inducteur, où circule un flux magnétique créé soit par des bobinages soit par des aimants permanents
- Un rotor bobiné, aussi appelé induit, parcouru par un courant. Les spires du rotor sont placées dans le flux magnétique du stator et sont donc soumises à la force de Laplace, ce qui crée un couple moteur.

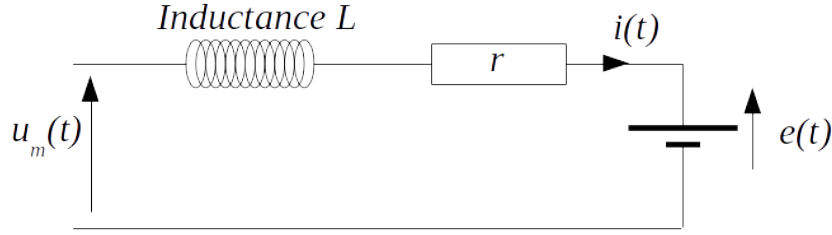


Figure 1.2: Modèle électrique d'un moteur à courant continu

Un collecteur permet de transmettre le courant électrique au rotor. Pour entretenir la rotation du moteur, le collecteur inverse le sens du courant dans les spires au moins une fois par demi tour de façon à créer un flux magnétique en quadrature avec le flux statorique.

Le signal d'entrée est la tension  $u_m(t)$  appliquée à l'induit ; le signal de sortie est la vitesse de rotation  $\omega(t)$  de l'arbre du moteur. Quatre équations sont nécessaires pour caractériser le fonctionnement du moteur :

- Équation relative aux grandeurs électriques: comme indiqué sur la Figure 1.2 nous noterons  $L$  l'inductance de l'induit,  $r$  la résistance de l'induit,  $i(t)$  le courant circulant dans l'induit et  $e(t)$  la force contre-électromotrice (*fcem*, cf. la loi de Lenz-Faraday). L'application des lois de Kirchoff donne:

$$u_m(t) = L \frac{di(t)}{dt} + r i(t) + e(t) \quad (1.43)$$

- Équation relative aux grandeurs mécaniques: en notant  $I_r$  le moment d'inertie du rotor,  $\omega(t)$  la vitesse de rotation de l'arbre du moteur,  $C_m(t)$  le moment du couple moteur et  $k_f$  le coefficient de frottement visqueux, l'application du théorème du moment cinétique donne la relation suivante:

$$I_r \frac{d\omega(t)}{dt} = C_m(t) - k_f \omega(t) \quad (1.44)$$

- Équation de couplage électromagnétique: en désignant par  $k_1$  et  $k_2$  des constantes de couplage qui dépendent du flux magnétique créé par l'inducteur, nous avons:

$$\begin{cases} e(t) = k_1 \omega(t) \\ C_m(t) = k_2 i(t) \end{cases} \quad (1.45)$$

En utilisant (1.45) dans (1.44) il vient par conséquent:

$$I_r \frac{d\omega(t)}{dt} = k_2 i(t) - k_f \omega(t) \quad (1.46)$$

En combinant les équations (1.43), (1.45) et (1.46) nous obtenons un système dynamique linéaire et stationnaire décrit par les équations suivantes:

$$\begin{cases} \dot{i}(t) = \frac{1}{L}u_m(t) - \frac{r}{L}i(t) - \frac{1}{L}e(t) = \frac{1}{L}u_m(t) - \frac{r}{L}i(t) - \frac{k_1}{L}\omega(t) \\ \dot{\omega}(t) = \frac{k_2}{I_r}i(t) - \frac{k_f}{I_r}\omega(t) \end{cases} \quad (1.47)$$

Soit:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t) \quad (1.48)$$

Où:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} \\ \underline{u}(t) := u_m(t) \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{L} & -\frac{k_1}{L} \\ \frac{k_2}{I_r} & -\frac{k_f}{I_r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (1.49)$$

En supposant que la puissance électrique consommée par la *fcm* est entièrement convertie en puissance mécanique, il vient :

$$e(t) i(t) = C_m(t) \omega(t) \quad (1.50)$$

Soit, en tenant compte des équations relatives aux grandeurs mécaniques et au couplage électromagnétique:

$$k_1 \omega(t) i(t) = k_2 i(t) \omega(t) \Rightarrow k_1 = k_2 := k \quad (1.51)$$

## 1.6 Points d'équilibre, linéarisation

Le comportement dynamique de la plupart des systèmes physiques peut être décrit d'un point de vue entrée/sortie (i.e. point de vue externe) par une équation différentielle ordinaire (par opposition à équation différentielle aux dérivées partielles) non linéaire. Dans ce cours, nous nous attacherons aux systèmes dont le comportement est décrit par une équation différentielle ordinaire, linéaire et à coefficients constants. Ce cadre peut sembler limitatif, mais l'utilisation d'un développement en série de Taylor d'une fonction non linéaire de classe  $\mathcal{C}^1$  permet, au voisinage d'un point d'équilibre, de se ramener au cas d'un système linéaire et invariant.

De manière plus concrète, considérons un système dynamique décrit par l'équation différentielle non-linéaire stationnaire suivante, où  $\underline{x}(t)$  est le vecteur d'état et  $\underline{u}(t)$  le vecteur d'entrée (ou de commande) :

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (1.52)$$

Un point d'équilibre est un couple  $(\underline{x}_e, \underline{u}_e)$  de vecteurs constants qui satisfait à la relation:

$$f(\underline{x}_e, \underline{u}_e) = \underline{0} \quad (1.53)$$

Notons que pour un système non linéaire, il existe en général plusieurs points d'équilibre.

Lorsque  $f()$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , le développement de Taylor de  $f()$  autour du point d'équilibre  $(\underline{x}_e, \underline{u}_e)$  donne la relation suivante où l'on tient compte du fait qu'au point d'équilibre  $f(\underline{x}_e, \underline{u}_e) = \underline{0}$ :

$$f(\underline{x}_e + \delta \underline{x}, \underline{u}_e + \delta \underline{u}) = \mathbf{A} \delta \underline{x} + \mathbf{B} \delta \underline{u} + \sqrt{\delta \underline{x}^T \delta \underline{x} + \delta \underline{u}^T \delta \underline{u}} \epsilon(\delta \underline{x}, \delta \underline{u}) \quad (1.54)$$

Le vecteur  $\epsilon(\delta \underline{x}, \delta \underline{u})$  est une fonction qui tend vers  $\underline{0}$  lorsque  $\delta \underline{x}$  et  $\delta \underline{u}$  tendent vers zéro et où les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont définies par:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{u}=\underline{u}_e, \underline{x}=\underline{x}_e} \\ \mathbf{B} = \left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{u}=\underline{u}_e, \underline{x}=\underline{x}_e} \end{cases} \quad (1.55)$$

Ainsi, connaissant un point d'équilibre  $(\underline{x}_e, \underline{u}_e)$  d'un système dynamique *non-linéaire* stationnaire  $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$ , un modèle *linéaire* et stationnaire autour de ce point d'équilibre est obtenu par l'équation suivante:

$$\delta \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A} \delta \underline{x}(t) + \mathbf{B} \delta \underline{u}(t) \quad (1.56)$$

Où:

$$\begin{cases} \delta \underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}_e \\ \delta \underline{u}(t) = \underline{u}(t) - \underline{u}_e \end{cases} \quad (1.57)$$

Le point d'équilibre  $\underline{x}_e$  est dit *hyperbolique* si les valeurs propres du linéarisé, c'est à dire de la matrice jacobienne  $\mathbf{A} = \left. \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\underline{x}_e}$ , sont à parties réelles *non nulles*.

Le théorème d'Hartman-Grobman indique que dans le voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique d'un système autonome et invariant dans le temps les trajectoires des solutions de l'équation différentielle non-linéaire  $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t))$  ont la même *allure* que les trajectoires des solutions du système linéarisé. Un point d'équilibre  $\underline{x}_e$  est dit stable si toute trajectoire  $\underline{x}(t)$  qui commence à proximité de  $\underline{x}_e$  reste *proche* de  $\underline{x}_e$  lorsque le temps évolue. Le point est dit asymptotiquement stable si de plus  $\lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{x}_e$ .

Le modèle linéarisé n'est qu'une approximation de la réalité physique mais présente l'intérêt de se placer dans un cadre où de nombreux résultats relatifs à l'analyse de système et à la synthèse des lois de commande existent.

Dans la suite de ce cours nous allégerons les écritures en remplaçant  $\delta \underline{x}(t)$  par  $\underline{x}(t)$  et  $\delta \underline{u}(t)$  par  $\underline{u}(t)$ .

La notion de point d'équilibre peut être étendue à la notion de trajectoire de référence. Soit en effet une trajectoire  $\underline{x}_r(t)$  et une commande  $\underline{u}_r(t)$ , appelées respectivement trajectoire de référence et commande de référence, vérifiant l'équation:

$$\dot{\underline{x}}_r(t) = f(\underline{x}_r(t), \underline{u}_r(t)) \quad (1.58)$$

Le développement de Taylor de  $f()$  autour de la référence  $(\underline{x}_r(t), \underline{u}_r(t))$  permet d'obtenir un modèle linéaire. Toutefois, contrairement à la

linéarisation autour d'un point d'équilibre, le modèle linéaire obtenu ici n'est pas stationnaire; en effet les matrices  $\mathbf{A}(t)$  et  $\mathbf{B}(t)$  dépendent du temps:

$$\delta \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\delta \underline{x}(t) + \mathbf{B}(t)\delta \underline{u}(t) \quad (1.59)$$

Où:

$$\begin{cases} \delta \underline{x}(t) = \underline{x}(t) - \underline{x}_r(t) \\ \delta \underline{u}(t) = \underline{u}(t) - \underline{u}_r(t) \end{cases} \quad (1.60)$$

Et

$$\begin{cases} \mathbf{A}(t) = \left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{u}=\underline{u}_r(t), \underline{x}=\underline{x}_r(t)} \\ \mathbf{B}(t) = \left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{u}=\underline{u}_r(t), \underline{x}=\underline{x}_r(t)} \end{cases} \quad (1.61)$$

**Exemple 1.3.** Considérons l'équation d'état suivante, où  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = e^{ax_1(t)} - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \sin(bx_1(t)) + c \cos(x_2(t))u(t) \end{cases} \quad (1.62)$$

Il est clair que le point  $(x_{1e}, x_{2e}, u_e) = (0, 1, 0)$  est un point d'équilibre (mais ce n'est pas le seul!). La linéarisation de l'équation d'état autour de ce point d'équilibre donne:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{u}=\underline{u}_e, \underline{x}=\underline{x}_e} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial e^{ax_1-x_2}}{\partial x_1} & \frac{\partial e^{ax_1-x_2}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \sin(bx_1)+c \cos(x_2)u}{\partial x_1} & \frac{\partial \sin(bx_1)+c \cos(x_2)u}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x_1, x_2, u)=(0, 1, 0)} \\ &= \begin{bmatrix} ae^{ax_1} & -1 \\ b \cos(bx_1) & -c \sin(x_2)u \end{bmatrix}_{(x_1, x_2, u)=(0, 1, 0)} \\ &= \begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.63)$$

Et:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \left. \frac{\partial f(\underline{x}, \underline{u})}{\partial \underline{u}} \right|_{\underline{u}=\underline{u}_e, \underline{x}=\underline{x}_e} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial e^{ax_1-x_2}}{\partial u} \\ \frac{\partial \sin(bx_1)+c \cos(x_2)u}{\partial u} \end{bmatrix}_{(x_1, x_2, u)=(0, 1, 0)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ c \cos(x_2) \end{bmatrix}_{(x_1, x_2, u)=(0, 1, 0)} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ c \cos(1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.64)$$

Ainsi la dynamique du système peut être approchée autour du point d'équilibre  $(x_{1e}, x_{2e}, u_e) = (0, 1, 0)$  par:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -1 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1(t) \\ \delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \cos(1) \end{bmatrix} \delta u(t) \quad (1.65)$$

■



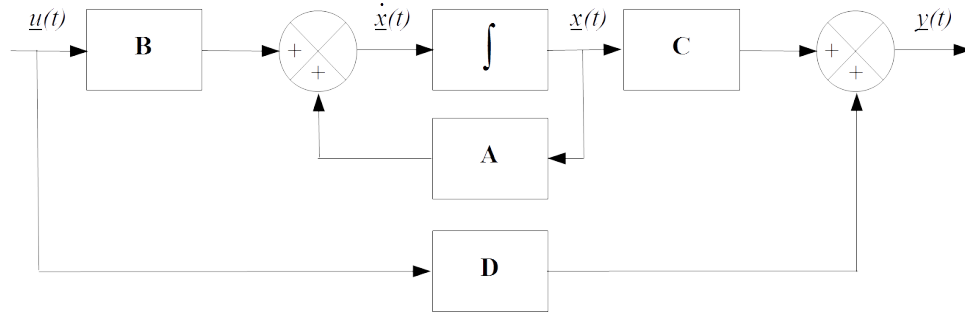


Figure 1.3: Schéma bloc associé à la représentation d'état

## 1.7 Représentation d'état d'un système linéaire et invariant

La représentation d'état d'un système linéaire et invariant est un système d'équations différentielles vectorielles du premier ordre de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) + \mathbf{D}\underline{u}(t) \end{cases} \quad (1.66)$$

Ou:

- $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état;
- $\underline{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  est le vecteur de commande;
- $\underline{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur de sortie;
- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice d'état;
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  est la matrice de commande;
- $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  est la matrice de sortie (ou d'observation);
- $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$  est la matrice de transfert direct.

L'équation  $\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t)$  s'appelle l'équation d'état et l'équation  $\underline{y}(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) + \mathbf{D}\underline{u}(t)$  s'appelle l'équation de sortie (ou d'observation).

Le schéma bloc associé à la représentation d'état (1.66) est représenté sur la Figure 1.3:

La représentation d'état est notée de manière conventionnelle comme suit:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{u}(t) \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

Nous rappelons que la représentation d'état n'est pas unique. En effet, soit  $\mathbf{P}$  une matrice inversible et soit  $\underline{x}^*(t)$  le vecteur défini à partir du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  comme suit :

$$\underline{x}(t) = \mathbf{P}\underline{x}^*(t) \quad (1.68)$$

En utilisant le relation (1.26) où  $\Phi^{-1}(\underline{x}) = \mathbf{P}^{-1}\underline{x}$ , la représentation d'état (1.66) est transformée en la représentation d'état équivalente suivante:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}^*(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}\underline{x}^*(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u(t) \\ \underline{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}\underline{x}^*(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases} \quad (1.69)$$

**Exemple 1.4.** Afin d'illustrer le fait que le choix du vecteur d'état n'est pas unique, revenons à l'équation différentielle (1.5) utilisée au début de ce chapitre. Plutôt que de prendre le vecteur d'état  $(x_1(t), x_2(t))$  défini en (1.7), nous choisissons comme variables d'état les deux fonctions  $(x_1^*(t), x_2^*(t))$  suivantes:

$$\begin{cases} x_1^*(t) = \frac{dx_2^*(t)}{dt} + 2m\omega_0 x_2^*(t) \\ x_2^*(t) = y(t) \end{cases} \quad (1.70)$$

Il vient:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx_2^*(t)}{dt} = x_1^*(t) - 2m\omega_0 x_2^*(t) \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{dx_1^*(t)}{dt} - 2m\omega_0 \frac{dx_2^*(t)}{dt} = \frac{dx_1^*(t)}{dt} - 2m\omega_0 (x_1^*(t) - 2m\omega_0 x_2^*(t)) \end{cases} \quad (1.71)$$

Grâce à ce nouveau vecteur d'état l'équation différentielle du second ordre (1.5) devient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{2m}{\omega_0} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\omega_0^2} \frac{dx_1^*(t)}{dt} - \frac{2m}{\omega_0} (x_1^*(t) - 2m\omega_0 x_2^*(t)) + \frac{2m}{\omega_0} (x_1^*(t) - 2m\omega_0 x_2^*(t)) + x_2^*(t) = Ku(t) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{\omega_0^2} \frac{dx_1^*(t)}{dt} + x_2^*(t) = Ku(t) \\ \Leftrightarrow & \frac{dx_1^*(t)}{dt} = -\omega_0^2 x_2^*(t) + K\omega_0^2 u(t) \end{aligned} \quad (1.72)$$

Le vecteur d'état  $(x_1^*(t), x_2^*(t))$  permet ainsi d'écrire l'équation différentielle du second ordre (1.5) sous la forme vectorielle suivante:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_0^2 \\ 1 & -2m\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K\omega_0^2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (1.73)$$

Le système est à nouveau décrit par une équation différentielle vectorielle du premier ordre. La nouvelle équation d'état est la suivante :

$$\dot{\underline{x}}^*(t) = \mathbf{A}^* \underline{x}^*(t) + \mathbf{B}^* u(t) \quad (1.74)$$

L'équation d'observation (ou de sortie) est donnée par:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow y = \mathbf{C}^* \underline{x}^*(t) \quad (1.75)$$

Les vecteurs d'état  $(x_1(t), x_2(t))$  et  $(x_1^*(t), x_2^*(t))$  sont liés par la relation suivante:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y(t) = x_1(t) = x_2^*(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = x_2(t) = x_1^*(t) - 2m\omega_0 x_2^*(t) \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2m\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} := \mathbf{P} \begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.76)$$

■



## Chapitre 2

# Introduction à la mécanique analytique

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est dédié à une brève introduction à la mécanique analytique qui fournit un moyen élégant d'obtenir la représentation d'état (le plus souvent non-linéaire) d'un système dynamique mécanique.

### 2.2 Rappel de mécanique classique

#### 2.2.1 Théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique

Les lois de Newton permettent de décrire le mouvement d'un solide. Elles s'obtiennent à partir des deux théorèmes suivantes:

- Le théorème de la quantité de mouvement (ou relation fondamentale de la dynamique), qui permet d'expliciter la dynamique du centre de masse du système. En désignant par  $\underline{p} = m\underline{v}^i$  la quantité de mouvement du système, où  $m$  est sa masse,  $\underline{v}^i$  la vitesse de son centre de masse exprimée dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}^i$  et  $\sum \underline{f}^i$  les forces qui lui sont appliquées et exprimées dans  $\mathcal{R}^i$ , alors:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{p} = \sum \underline{f}^i} \quad (2.1)$$

- Le théorème du moment cinétique, qui permet d'expliciter la dynamique du mouvement du système autour de son centre de masse. En désignant par  $\underline{\sigma}$  le moment cinétique du système et par  $\sum \underline{\tau}^i$  les moments qui lui sont appliqués et exprimés dans  $\mathcal{R}^i$ , alors:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\underline{\sigma} = \sum \underline{\tau}^i} \quad (2.2)$$

Pour un solide,  $\underline{\sigma} = \mathbf{I}\underline{\omega}$ , où  $\mathbf{I}$  est la matrice d'inertie et  $\underline{\omega}$  le vecteur vitesse de rotation du solide exprimé dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}^i$ .

### 2.2.2 Relations cinématiques

Lorsque le référentiel considéré n'est pas inertiel (ou galiléen), alors la dérivée temporelle  $d/dt$  est remplacée par la notion de dérivée totale  $D_t$ . En désignant par  $\underline{\omega}^b := \underline{\nu}$  le vecteur vitesse de rotation du solide exprimé par rapport aux axes du référentiel non-inertiel, nous avons:

$$\boxed{D_t = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{\nu} \times = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{\Omega}(\underline{\nu})} \quad (2.3)$$

La matrice  $\mathbf{\Omega}(\underline{\nu})$  est une matrice antisymétrique ( $\mathbf{\Omega}(\underline{\nu})^T = -\mathbf{\Omega}(\underline{\nu})$ ) décrivant la rotation du référentiel non-inertiel  $\mathcal{R}^b$  (exposant  $b$  pour *body*; il s'agit par exemple du référentiel lié à un avion) par rapport à un référentiel inertiel  $\mathcal{R}^i$  (le référentiel terrestre, supposé galiléen) et exprimée par rapport aux axes du référentiel non-inertiel. Cette matrice peut être remplacée de manière équivalente par  $\underline{\nu} \times$  où  $\times$  désigne le produit vectoriel.

Ainsi si  $\underline{\nu}$  a pour composantes  $(p, q, r)$ , alors la matrice antisymétrique  $\mathbf{\Omega}(\underline{\nu})$  a l'expression suivante:

$$\underline{\nu} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{\Omega}(\underline{\nu}) = -\mathbf{\Omega}(\underline{\nu})^T = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

La matrice de rotation  $\mathbf{R}_b^i(\underline{\eta})$  permettant le passage du référentiel non-inertiel au référentiel inertiel est liée à la matrice  $\mathbf{\Omega}(\underline{\nu})$  par la relation suivante qui permet d'établir l'expression de la dérivée des angles d'orientation  $\underline{\eta}$  en fonction des composantes  $(p, q, r)$  de  $\mathbf{\Omega}(\underline{\nu})$ :

$$\boxed{\mathbf{\Omega}(\underline{\nu}) = (\mathbf{R}_b^i(\underline{\eta}))^{-1} \dot{\mathbf{R}}_b^i(\underline{\eta})} \quad (2.5)$$

Soit  $\underline{w}$  un vecteur de coordonnées  $[a \ b \ c]^T$ . Du fait que  $\mathbf{\Omega}(\underline{\nu})$  soit une matrice antisymétrique, nous pouvons écrire la relation suivante:

$$\begin{aligned} \underline{\nu} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{\Omega}(\underline{\nu}) \underline{w} &= \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \\ &= -\mathbf{\Omega}(\underline{w}) \underline{\nu} \end{aligned} \quad (2.6)$$

En désignant par  $\underline{x}^i := \underline{\xi}$  la position du centre de masse du solide dans le référentiel inertiel, par  $\underline{x}^b$  la position du centre de masse du solide exprimée dans le référentiel non-inertiel et par  $\underline{v}^b$  sa vitesse dans ce référentiel non-inertiel nous avons:

$$\begin{cases} \underline{\xi} = \mathbf{R}_b^i(\underline{\eta}) \underline{x}^b \\ \underline{v}^b = D_t \underline{x}^b \end{cases} \quad (2.7)$$

**Exemple 2.1.** Soit  $\mathbf{R}_b^i(\psi)$  la matrice qui permet de faire tourner d'un angle  $\psi$  un référentiel non-inertiel  $\mathcal{R}^b$  pour se ramener dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}^i$ :

$$\mathbf{R}_b^i(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

En désignant par  $\underline{\xi}$  la position d'un point dans le référentiel inertiel et par  $\underline{x}^b$  la position de ce même point dans le référentiel non-inertiel, nous avons:

$$\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}^b = \mathbf{R}_b^i(\psi) \underline{x}^b \quad (2.9)$$

Après dérivation par rapport au temps dans le référentiel inertiel il vient:

$$\dot{\underline{\xi}} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dot{\underline{x}}^b + \dot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin(\psi) & -\cos(\psi) & 0 \\ \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}^b \quad (2.10)$$

Soit:

$$\dot{\underline{\xi}} = \mathbf{R}_b^i(\psi) \dot{\underline{x}}^b + \dot{\mathbf{R}}_b^i(\psi) \underline{x}^b \quad (2.11)$$

Avec:

$$\dot{\mathbf{R}}_b^i(\psi) = \dot{\psi} \begin{bmatrix} -\sin(\psi) & -\cos(\psi) & 0 \\ \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Nous passons à l'expression de la vitesse dans le référentiel non-inertiel en multipliant  $\dot{\underline{\xi}}$  par  $(\mathbf{R}_b^i(\psi))^{-1}$ :

$$\underline{v}^b = (\mathbf{R}_b^i(\psi))^{-1} \dot{\underline{\xi}} = \dot{\underline{x}}^b + (\mathbf{R}_b^i(\psi))^{-1} \dot{\mathbf{R}}_b^i(\psi) \underline{x}^b \quad (2.13)$$

Nous retrouvons l'expression:

$$\underline{v}^b = \dot{\underline{x}}^b + \boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) \underline{x}^b := D_t \underline{x}^b \quad (2.14)$$

Avec:

$$\boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) = (\mathbf{R}_b^i(\psi))^{-1} \dot{\mathbf{R}}_b^i(\psi) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\psi} & 0 \\ \dot{\psi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

En identifiant cette relation à  $\boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}$  nous obtenons  $p = 0$ ,  $q = 0$  et  $r = \dot{\psi}$ .

■

### 2.2.3 Équations de Newton-Euler

Les théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique se ré-écrivent sous la forme suivante dans le référentiel non-inertiel lorsque la masse  $m$  du système et sa matrice d'inertie  $\mathbf{I}$  sont constantes, et en désignant par  $\sum \underline{f}^b$  et  $\sum \underline{\tau}^b$  les forces et les moments exprimés dans le référentiel non-inertiel:

$$\begin{cases} D_t(m \underline{v}^b) = m \frac{\partial}{\partial t} \underline{v}^b + m \boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) \underline{v}^b = \sum \underline{f}^b \\ D_t(\mathbf{I} \underline{\nu}) = \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial t} \underline{\nu} + \boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) \mathbf{I} \underline{\nu} = \sum \underline{\tau}^b \end{cases} \quad (2.16)$$

Soit sous forme matricielle et en désignant par  $\mathbb{I}$  la matrice identité:

$$\begin{bmatrix} m\mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \underline{v}^b \\ \frac{\partial}{\partial t} \underline{\nu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}^b \\ \underline{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \underline{f}^b \\ \sum \underline{\tau}^b \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Ces équations sont souvent dénommées *équations de Newton-Euler* dans la littérature. Plus généralement lorsque ce n'est pas le centre de masse du solide qui est considéré mais un point du solide situé à  $(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z)$  du centre de masse et ayant une vitesse  $(u^b, v^b, w^b)$  dans le référentiel non inertiel (bien sûr ces composantes sont celles du vecteur  $\underline{v}^b$  lorsque c'est le centre de masse du solide qui est considéré, c'est à dire lorsque  $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ ) alors les équations de Newton-Euler s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} m\mathbb{I} & -\boldsymbol{\Delta} \\ \boldsymbol{\Delta} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \underline{v}^b \\ \frac{\partial}{\partial t} \underline{\nu} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m \boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) & -\boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) \boldsymbol{\Delta} \\ \boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) \boldsymbol{\Delta} & \boldsymbol{\Omega}(\underline{\nu}) \mathbf{I} - \mathbf{V} \boldsymbol{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}^b \\ \underline{\nu} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum \underline{f}^b \\ \sum \underline{\tau}^b \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Où:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} 0 & -m \Delta_z & m \Delta_y \\ m \Delta_z & 0 & -m \Delta_x \\ -m \Delta_y & m \Delta_x & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & -w^b & v^b \\ w^b & 0 & -u^b \\ -v^b & u^b & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.19)$$

## 2.3 Équations de Euler-Lagrange

Contrairement à la mécanique classique qui repose sur la notion de force, la mécanique analytique repose sur la notion d'énergie et les équations décrivant la dynamique d'un système sont obtenues à partir des équations suivantes, appelées équations de Euler-Lagrange :

$$\boxed{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i} \quad (2.20)$$

où:

- $q_i$  désigne les *coordonnées généralisées* du système. Les coordonnées généralisées sont composées par l'ensemble de *taille minimale* des variables permettant de déterminer de manière univoque la configuration du système. Ce sont des angles ou des positions dont le nombre est égal au degré de liberté du système. Nous noterons par la suite  $\underline{q}$  le vecteur des *coordonnées généralisées*:

$$\underline{q} = [q_1, \dots, q_n]^T \quad (2.21)$$

- Le lagrangien  $\mathcal{L}$  désigne la différence entre l'énergie cinétique du système, notée  $T(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ , et l'énergie potentielle du système, notée  $V(\underline{q})$ . L'énergie cinétique  $T(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$  dépend des coordonnées généralisées  $\underline{q}$  et des vitesses généralisées  $\underline{\dot{q}}$ . L'énergie potentielle  $V(\underline{q})$  ne dépend que des coordonnées généralisées  $\underline{q}$ :

$$\boxed{\mathcal{L} = T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) - V(\underline{q})} \quad (2.22)$$

- L'énergie cinétique  $T(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$  d'un solide indéformable est définie comme suit, où  $P$  désigne tout point du solide  $\mathcal{B}$ :

$$T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{B}} \underline{v}(P)^T \underline{v}(P) dm \quad (2.23)$$

Nous rappelons que le vecteur vitesse  $\underline{v}(P)$  d'un point  $P$  d'un solide indéformable peut être exprimé comme la somme entre le vecteur vitesse  $\underline{v}$  de son centre de masse et le produit vectoriel entre le vecteur vitesse angulaire  $\underline{\omega}$ , qui est indépendante de  $P$ , du solide indéformable relativement à son centre de masse et du vecteur position relative  $\underline{\tilde{x}}(P)$  de  $P$  relativement au centre de masse du solide:

$$\underline{v}(P) = \underline{v} + \underline{\omega} \times \underline{\tilde{x}}(P) \quad (2.24)$$

En utilisant l'expression de  $\underline{v}(P)$  dans l'expression de  $T(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$  et en développant, il vient:

$$\begin{aligned} T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{B}} (\underline{v} + \underline{\omega} \times \underline{\tilde{x}}(P))^T (\underline{v} + \underline{\omega} \times \underline{\tilde{x}}(P)) dm \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{B}} \underline{v}^T \underline{v} + (\underline{\omega} \times \underline{\tilde{x}}(P))^T (\underline{\omega} \times \underline{\tilde{x}}(P)) \\ &\quad + 2 \underline{v}^T (\underline{\omega} \times \underline{\tilde{x}}(P)) dm \end{aligned} \quad (2.25)$$

Notons que:

$$\frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{B}} \underline{v}^T \underline{v} dm = \frac{1}{2} \underline{v}^T \underline{v} \iiint_{\mathcal{B}} dm = \frac{1}{2} m \underline{v}^T \underline{v} \quad (2.26)$$

De plus, par définition du centre de masse, nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iiint_{\mathcal{B}} \underline{v}^T (\underline{\omega} \times \underline{\tilde{x}}(P)) dm &= \frac{1}{2} \underline{v}^T (\underline{\omega} \times \iiint_{\mathcal{B}} \underline{\tilde{x}}(P) dm) \\ &= \frac{1}{2} \underline{v}^T (\underline{\omega} \times \underline{0}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$



Enfin, la relation suivante sera utilisée:

$$(\underline{\omega} \times \tilde{\underline{x}}(P))^T (\underline{\omega} \times \tilde{\underline{x}}(P)) = ((\tilde{\underline{x}}(P)^T \tilde{\underline{x}}(P)) \underline{\omega} - (\tilde{\underline{x}}(P)^T \underline{\omega}) \tilde{\underline{x}}(P))^T \underline{\omega} \quad (2.28)$$

Nous obtenons finalement:

$$\begin{aligned} T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) &= \frac{1}{2} m \underline{v}^T \underline{v} + \frac{1}{2} \left( \iint_{\mathcal{B}} ((\tilde{\underline{x}}(P)^T \tilde{\underline{x}}(P)) \underline{\omega} - (\tilde{\underline{x}}(P)^T \underline{\omega}) \tilde{\underline{x}}(P))^T dm \right) \underline{\omega} \\ &= \frac{1}{2} m \underline{v}^T \underline{v} + \frac{1}{2} \left( \iint_{\mathcal{B}} ((\tilde{\underline{x}}(P)^T \tilde{\underline{x}}(P)) \underline{\omega} - (\tilde{\underline{x}}(P)^T \underline{\omega}) \tilde{\underline{x}}(P)) dm \right)^T \underline{\omega} \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de *König*:

$$T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} m \underline{v}^T \underline{v} + \frac{1}{2} \underline{H}^T \underline{\omega} \quad (2.30)$$

où  $\underline{H}$  est le moment cinétique du solide indéformable relativement à son centre de masse:

$$\begin{aligned} \underline{H} &:= \iint_{\mathcal{B}} ((\tilde{\underline{x}}(P)^T \tilde{\underline{x}}(P)) \underline{\omega} - (\tilde{\underline{x}}(P)^T \underline{\omega}) \tilde{\underline{x}}(P)) dm \\ &= \iint_{\mathcal{B}} (\tilde{\underline{x}}(P) \times \underline{\omega} \times \tilde{\underline{x}}(P)) dm \end{aligned} \quad (2.31)$$

Enfin, le moment cinétique  $\underline{H}$  du solide peut être exprimé comme le produit entre le vecteur vitesse angulaire  $\underline{\omega}$  et sa matrice d'inertie  $\mathbf{I} = \mathbf{I}^T$  relativement à son centre de masse:

$$\underline{H} = \mathbf{I} \underline{\omega} \quad (2.32)$$

Ainsi pour un solide indéformable de masse  $m$  et de matrice d'inertie  $\mathbf{I}$ , l'énergie cinétique  $T(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$  est la somme de l'énergie cinétique issue de la vitesse  $\underline{v}$  de son centre de masse et de la vitesse angulaire de rotation  $\underline{\omega}$  autour du centre de masse, ces vitesses étant exprimées dans un référentiel inertiel:

$$\boxed{T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} m \underline{v}^T \underline{v} + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \mathbf{I} \underline{\omega}} \quad (2.33)$$

- La matrice d'inertie  $\mathbf{I}$  est une matrice symétrique définie positive. Elle est calculée en un point  $O$  correspondant à l'origine choisie pour le vecteur coordonnées généralisées  $\underline{q}$ . En désignant par  $x$ ,  $y$  et  $z$  les coordonnées d'un élément de masse  $dm$  du solide considéré par rapport au point  $O$ , la matrice d'inertie  $\mathbf{I}$  est obtenue comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & -\int x y dm & -\int x z dm \\ -\int x y dm & \int (x^2 + z^2) dm & -\int y z dm \\ -\int x z dm & -\int y z dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{I}^T > 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

- Le théorème de Huygens-Steiner permet d'obtenir la matrice d'inertie  $\mathbf{I}_P$  en un point  $P$  quelconque d'un solide de masse  $m$  à partir de sa matrice d'inertie  $\mathbf{I}$  définie en un point  $O$  :

$$\underline{OP} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{I}_P + m \begin{bmatrix} (y_P^2 + z_P^2) & -x_P y_P & -x_P z_P \\ -x_P y_P & (x_P^2 + z_P^2) & -y_P z_P \\ -x_P z_P & -y_P z_P & (x_P^2 + y_P^2) \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

- Remarquons que les énergies cinétique et potentielle doivent être calculées relativement à un référentiel inertiel. Les vitesses linéaires et angulaires devront donc être exprimées dans un référentiel inertiel si le référentiel utilisé ne l'est pas.
- Lorsqu'un référentiel non-inertiel est utilisé, soient  $\underline{v}^b$  la vitesse linéaire du solide exprimée dans le référentiel non-inertiel (référentiel *body*) et  $\underline{\nu}$  la vitesse angulaire du solide exprimée dans le référentiel non-inertiel. L'énergie cinétique  $T$  exprimée dans le référentiel non-inertiel a alors l'expression suivante:

$$T = \frac{1}{2} m (\underline{v}^b)^T \underline{v}^b + \frac{1}{2} \underline{\nu}^T \mathbf{I} \underline{\nu} \quad (2.36)$$

Soient  $\underline{\eta}$  le vecteur des angles qui permettent de positionner le référentiel non-inertiel vis-à-vis du référentiel inertiel (ce sont les angles d'*Euler* par exemple) et  $\mathbf{R}_b^i(\underline{\eta})$  la matrice de rotation du référentiel non-inertiel vers le référentiel inertiel. Nous avons alors:

$$\underline{v} = \mathbf{R}_b^i(\underline{\eta}) \underline{v}^b \quad (2.37)$$

De manière similaire, en notant  $\underline{\nu}$  la vitesse angulaire du solide exprimée dans le référentiel non-inertiel (référentiel *body*) et  $\underline{\omega}$  la vitesse angulaire du solide exprimée dans le référentiel inertiel, nous avons:

$$\underline{\nu} = \mathbf{W}(\underline{\eta}) \underline{\omega} \quad (2.38)$$

La relation entre  $\underline{\omega}$  et  $\underline{\nu}$ , c'est à dire la matrice  $\mathbf{W}(\underline{\eta})$ , est obtenue en explicitant l'équation matricielle suivante:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{R}_b^i(\underline{\eta}) = \mathbf{R}_b^i(\underline{\eta}) \mathbf{\Omega}(\underline{\nu}) \text{ où } \begin{cases} \underline{\omega} := \dot{\underline{\eta}} \\ \underline{\nu} := [p \ q \ r]^T \\ \mathbf{\Omega}(\underline{\nu}) = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.39)$$

En utilisant le fait qu'une matrice de rotation est orthogonale (c'est à dire que  $(\mathbf{R}_b^i(\underline{\eta}))^{-1} = (\mathbf{R}_b^i(\underline{\eta}))^T$ , l'énergie cinétique  $T$  exprimée dans le

référentiel inertiel a l'expression suivante:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2}m (\underline{v}^b)^T \underline{v} + \frac{1}{2} (\underline{\nu})^T \mathbf{I} \underline{\nu} \\
 &= \frac{1}{2}m \left( (\mathbf{R}_b^i(\underline{\eta}))^T \underline{v} \right)^T \left( (\mathbf{R}_b^i(\underline{\eta}))^T \underline{v} \right) + \frac{1}{2} (\mathbf{W}(\underline{\eta}) \underline{\omega})^T \mathbf{I} (\mathbf{W}(\underline{\eta}) \underline{\omega}) \\
 &= \frac{1}{2}m \underline{v}^T \underline{v} + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \mathbf{W}^T(\underline{\eta}) \mathbf{I} (\mathbf{W}(\underline{\eta}) \underline{\omega})
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Ainsi l'énergie cinétique  $T$  exprimée dans le référentiel inertiel s'exprime comme suit:

$$T = \frac{1}{2}m \underline{v}^T \underline{v} + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \mathbf{J}(\underline{\eta}) \underline{\omega} \tag{2.41}$$

où la matrice d'inertie  $\mathbf{J}(\underline{\eta})$  est définie comme suit:

$$\mathbf{J}(\underline{\eta}) = \mathbf{W}^T(\underline{\eta}) \mathbf{I} \mathbf{W}(\underline{\eta}) \tag{2.42}$$

Enfin, soient  $\mathbf{I}_P$  la matrice d'inertie du solide par rapport à un point  $P$ ,  $\underline{v}_P^b$  la vitesse linéaire de  $P$  exprimée dans le référentiel non-inertiel (référentiel *body*),  $\underline{\nu}_P$  la vitesse angulaire de  $P$  exprimée dans le référentiel non-inertiel et  $\underline{r}_{PG}$  le vecteur entre le centre de masse  $G$  du solide et le point  $P$ . Alors en notant  $\times$  le produit vectoriel entre deux vecteurs, l'énergie cinétique  $T$  de  $P$  exprimée dans le référentiel non-inertiel a l'expression suivante<sup>1</sup>:

$$T = \frac{1}{2}m (\underline{v}_P^b)^T \underline{v}_P^b + \frac{1}{2} (\underline{\nu}_P)^T \mathbf{I}_P \underline{\nu}_P + m (\underline{v}_P^b)^T (\underline{\nu}_P \times \underline{r}_{PG}) \tag{2.43}$$

- $Q_i$  désigne les *forces généralisées* (i.e. forces et moments *non-conservatives*, c'est à dire qui sont externes au système ou qui ne dérivent pas d'un potentiel. Ces forces généralisées provoquent un mouvement (translation pour une force, rotation pour un couple) selon la direction de la coordonnée généralisée  $q_i$ .
- En utilisant le théorème de dérivation des fonctions composées (règle de dérivation en chaîne), la relation suivante peut être établie:

$$\left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right) q_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left( \mathcal{L} - \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \tag{2.44}$$

En conséquence, lorsque le lagrangien  $\mathcal{L}$  ne dépend pas explicitement du temps ( $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ ) et qu'aucune force généralisée ne s'applique sur le système ( $Q_i = 0$ ), alors la quantité  $\mathcal{L} - \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  est une integrale première du système:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \\ Q_i = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{L} - \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{Constante} \tag{2.45}$$

---

<sup>1</sup>Complete dynamic model of the Twin Rotor MIMO System (TRMS) with experimental validation, Azamat Tastemirov, Andrea Lecchini-Visintini, Rafael M. Morales-Viviescas, Control Engineering Practice 66 (2017) 89–98

On montre que l'énergie cinétique peut être exprimée sous la forme suivante où  $\mathbf{M}(\underline{q})$  est une matrice symétrique définie positive:

$$T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}}^T \mathbf{M}(\underline{q}) \underline{\dot{q}} \quad \text{où} \quad \mathbf{M}(\underline{q}) = \mathbf{M}^T(\underline{q}) > 0 \quad (2.46)$$

En utilisant l'expression précédente pour l'énergie cinétique, il est possible de montrer la relation suivante

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(\underline{q}, \underline{\dot{q}})}{\partial \underline{\dot{q}}} \right) - \frac{\partial T(\underline{q}, \underline{\dot{q}})}{\partial \underline{q}} = \mathbf{M}(\underline{q}) \underline{\ddot{q}} + \mathbf{C}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \underline{\dot{q}} \quad (2.47)$$

Le terme  $\mathbf{C}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \underline{\dot{q}}$  est relatif aux forces centrifuges (termes impliquant les produits  $\dot{q}_i^2$ ) ou de Coriolis (termes impliquant les produits  $\dot{q}_i \dot{q}_j$ ,  $i \neq j$ ). Notons que la  $k^{\text{ième}}$  ligne de la matrice  $\mathbf{C}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ , que l'on notera  $\underline{c}_k^T(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$ , peut être obtenue par la relation suivante:

$$\begin{cases} \underline{c}_k^T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = \underline{\dot{q}}^T \mathbf{S}_k(\underline{q}) \\ \mathbf{S}_k(\underline{q}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{M}_k}{\partial \underline{q}} + \left( \frac{\partial \underline{M}_k}{\partial \underline{q}} \right)^T - \frac{\partial \mathbf{M}(\underline{q})}{\partial q_k} \right) \end{cases} \quad (2.48)$$

où  $q_k$  désigne la  $k^{\text{ième}}$  coordonnée du vecteur  $\underline{q}$  et  $\underline{M}_k$  la  $k^{\text{ième}}$  colonne de la matrice  $\mathbf{M}(\underline{q})$ . Les termes de la matrice  $\mathbf{C}(\underline{q}, \underline{\dot{q}})$  sont appelés symboles de Christoffel.

Une fois développées, les équations (2.20) peuvent alors s'écrire sous la forme suivante:

$$\mathbf{M}(\underline{q}) \underline{\ddot{q}} + \mathbf{C}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \underline{\dot{q}} + \underline{G}(\underline{q}) = \mathbf{D}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{u}) \quad (2.49)$$

- Le terme  $\underline{G}(\underline{q})$  est associé aux forces conservatives. D'une manière générale, les forces généralisées qui dépendent d'un potentiel (i.e. conservatives) s'expriment sous la forme  $\frac{\partial V(q_i)}{\partial q_i}$ . Elles entrent en compte dans l'expression du lagrangien  $\mathcal{L}$  mais pas dans celle des forces généralisées  $Q_i$ .
- Le terme  $\mathbf{D}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{u})$  correspond aux forces généralisées qui ne dérivent pas d'un potentiel, appelées aussi non-conservatives. C'est dans le terme  $\mathbf{D}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{u})$  qu'apparaît habituellement le vecteur de commande  $\underline{u}$  du système.
- Notons que les forces dissipatives sont prises en compte dans le terme  $\mathbf{D}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{u})$ . Elles sont de la forme  $-\frac{\partial \mathcal{F}(\underline{\dot{q}})}{\partial \underline{\dot{q}}}$  où  $\mathcal{F}(\underline{\dot{q}})$  est la fonction de dissipation de Rayleigh qui satisfait par définition la propriété suivante<sup>2</sup>:

$$\underline{\dot{q}}^T \frac{\partial \mathcal{F}(\underline{\dot{q}})}{\partial \underline{\dot{q}}} \geq 0 \quad (2.50)$$

Notons que les forces d'amortissement sont toujours dissipatives.

---

<sup>2</sup>Passivity-based Control of Euler-Lagrange Systems, Romeo Ortega, Antonio Loria, Per Johan Nicklasson and Hebertt Sira-Ramírez, Springer, 1998

- Le système sera dit passif dès lors que la relation suivante est satisfaite<sup>2</sup>:

$$\text{Passivité} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \mathbf{M}(\underline{q}) - 2 \mathbf{C}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \mathbf{P} \text{ où } \mathbf{P} = -\mathbf{P}^T \quad (2.51)$$

Le vecteur constitué des coordonnées généralisées  $\underline{q}(t)$  et de ses dérivées constitue un vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  du système:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \underline{q}(t) \\ \dot{\underline{q}}(t) \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

## 2.4 Équations canoniques de Hamilton

L'hamiltonien  $H(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$  est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle:

$$H(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) + V(\underline{q}) \quad (2.53)$$

En utilisant les moments conjugués définis par  $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  de telle sorte que  $T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} \sum_i \dot{q}_i p_i$ , l'approche hamiltonienne permet d'exprimer la dynamique du système mécanique par un système d'équations différentielles du premier ordre appelées équations canoniques de Hamilton. Pour un système stationnaire, elles s'expriment sous la forme suivante:

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \begin{cases} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = Q_i - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \end{cases} \quad (2.54)$$

Lorsque le système n'est pas stationnaire, l'équation suivante est rajoutée:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (2.55)$$

Lorsque le lagrangien  $\mathcal{L}$  est fonction des seules coordonnées généralisées alors  $-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} = 0$ . Par conséquent l'hamiltonien est constant sur toute la trajectoire et donc l'énergie totale est conservée: le système est dit conservatif.

## 2.5 Bras simple de robot

### 2.5.1 Description du système

Le système considéré est représenté sur la Figure 2.1: il s'agit d'un modèle de bras de robot commandé par un couple moteur noté  $u(t)$ .

Nous noterons par la suite:

- $l$  la distance entre l'axe de rotation du bras et son centre de masse, noté  $G$
- $m$  la valeur de la masse du bras
- $\mathbf{I}$  la matrice d'inertie du bras

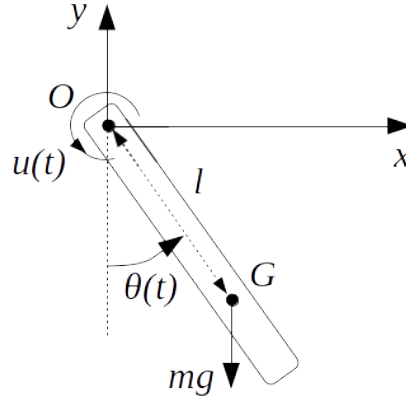


Figure 2.1: Modèle de bras de robot

- $\theta$  l'angle que fait le bras avec la verticale
- $g$  l'accélération de la pesanteur
- $k$  le coefficient de frottement visqueux au niveau de l'axe de rotation du bras

### 2.5.2 Équations de Euler-Lagrange

L'angle  $q(t) = \theta(t)$  est bien une coordonnée généralisée. En effet  $\theta(t)$  permet de déterminer de manière univoque la position du bras qui est un système à un degré de liberté.

Notons que les coordonnées  $(x_G(t), y_G(t))$  du centre de masse du bras forment un vecteur dont la dimension (ici 2) est supérieure au nombre de degré de liberté du bras. Comme ce vecteur n'est pas de *taille minimale* nous ne pouvons pas le choisir comme vecteur des coordonnées généralisées dans le cadre présenté. Nous verrons à la section 2.6 comment gérer cette contrainte dite *holonome*:  $x_G(t)^2 + y_G(t)^2 - l^2 = 0$

La position du centre de masse dans le référentiel inertiel est donnée par:

$$\underline{OG}(t) = \begin{bmatrix} x_G(t) \\ y_G(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin(\theta(t)) \\ -l \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Nous en déduisons les composantes de la vitesse et l'expression de son module:

$$\underline{v}(t) = \frac{d}{dt} \underline{OG}(t) = \begin{bmatrix} l\dot{\theta} \cos(\theta) \\ l\dot{\theta} \sin(\theta) \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{v}(t)^T \underline{v}(t) = l^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.57)$$

Les énergies cinétique  $T(q, \dot{q})$  et potentielle  $V(q)$  ont donc les expressions suivantes:

$$\begin{cases} T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \underline{v}(t)^T \underline{v}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{I} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I} \dot{\theta}^2 \\ V(q) = -mgl \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.58)$$

Le lagrangien  $\mathcal{L}$  vaut:

$$\mathcal{L} = T(q, \dot{q}) - V(q) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I} \dot{\theta}^2 + mgl \cos(\theta) \quad (2.59)$$

Et par conséquent:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (ml^2 + \mathbf{I})\dot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -mgl \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.60)$$

Les forces généralisées (i.e. forces et moments) qui sont externes au système ou qui ne dérivent pas d'un potentiel sont ici le couple moteur  $u(t)$  et le couple de frottement visqueux  $-k\dot{\theta}$ :

$$Q = u(t) - k\dot{\theta} \quad (2.61)$$

En utilisant les équations de Euler-Lagrange (2.20), nous obtenons la dynamique du système:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q \quad (2.62)$$

Soit:

$$(ml^2 + \mathbf{I})\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) = u(t) - k\dot{\theta} \quad (2.63)$$

Cette équation est de la forme  $\mathbf{M}(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + \mathbf{C}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}} + \underline{G}(\underline{q}) = \mathbf{D}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u})$  (cf. (2.49)) où  $\mathbf{C}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = 0$  et où le terme  $\mathbf{D}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u}) := u(t) - k\dot{\theta}$  est la force généralisée qui contient la commande  $u$  du système et le frottement visqueux  $k\dot{\theta}$ , qui est une force non conservative.

Prenons comme vecteur d'état:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

En utilisant (2.63) nous obtenons finalement la représentation d'état suivante qui est composée de deux équations différentielles non-linéaires:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\frac{mgl}{ml^2 + \mathbf{I}} \sin(\theta) - \frac{k}{ml^2 + \mathbf{I}} \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2 + \mathbf{I}} \end{bmatrix} u(t) \quad (2.65)$$

Nous obtenons ainsi un système dynamique stationnaire affine en la commande  $u(t)$ :

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t)) + \mathbf{B}u(t) \quad (2.66)$$

### 2.5.3 Équations canoniques de Hamilton

L'hamiltonien a ici l'expression suivante:

$$H(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) + V(q) = \frac{1}{2} (ml^2 + \mathbf{I}) \dot{\theta}^2 - mgl \cos(\theta) \quad (2.67)$$

En utilisant (2.54) le moment conjugué a pour expression:

$$p = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\theta}} = (ml^2 + \mathbf{I})\dot{\theta} \quad (2.68)$$

Nous pouvons vérifier que les équations canoniques de Hamilton (2.54) sont satisfaites:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (ml^2 + \mathbf{I})\dot{\theta}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\theta}} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial (ml^2 + \mathbf{I})\dot{\theta}} = \frac{1}{(ml^2 + \mathbf{I})} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \dot{\theta}} \\ \dot{p} = Q - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \Leftrightarrow (ml^2 + \mathbf{I})\ddot{\theta} = u(t) - k\dot{\theta} - mgl \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.69)$$

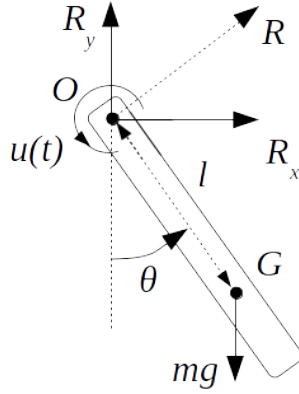


Figure 2.2: Modèle de bras de robot

#### 2.5.4 Mécanique classique

Ces équations peuvent bien évidemment être retrouvées grâce à la mécanique classique. Nous avons représenté sur la Figure 2.2 suivante les composantes  $R_x$  et  $R_y$  de la force qu'exerce le support du bras sur le bras de robot:

Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} m \underline{v}(t) &= \frac{d}{dt} m \begin{bmatrix} l \dot{\theta} \cos(\theta) \\ l \dot{\theta} \sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_x \\ R_y - mg \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) = R_x \\ ml\ddot{\theta} \sin(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) = -mg + R_y \end{cases} \end{aligned} \quad (2.70)$$

D'autre part le théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse du bras conduit à la relation suivante ( $R_x l \cos(\theta)$  et  $R_y l \sin(\theta)$  provoquent une rotation dans le sens des  $\theta$  négatifs, d'où le signe moins devant ces composantes):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{I} \dot{\theta} &= -R_x l \cos(\theta) - R_y l \sin(\theta) + u(t) - k \dot{\theta} \\ \Leftrightarrow \mathbf{I} \ddot{\theta} &= -R_x l \cos(\theta) - R_y l \sin(\theta) + u(t) - k \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.71)$$

En utilisant les expressions des composantes  $R_x$  et  $R_y$  obtenues grâce au théorème de la quantité de mouvement dans l'équation issue du théorème du moment cinétique il vient:

$$\begin{aligned} \mathbf{I} \ddot{\theta} &= - \left( ml\ddot{\theta} \cos(\theta) - ml\dot{\theta}^2 \sin(\theta) \right) l \cos(\theta) \\ &\quad - \left( mg + ml\ddot{\theta} \sin(\theta) + ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \right) l \sin(\theta) + u(t) - k \dot{\theta} \\ \Leftrightarrow \mathbf{I} \ddot{\theta} &= -ml^2 \ddot{\theta} \cos(\theta)^2 + ml^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \\ &\quad - mgl \sin(\theta) - ml^2 \ddot{\theta} \sin(\theta)^2 - ml\dot{\theta}^2 \cos(\theta) \sin(\theta) + u(t) - k \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.72)$$

Nous retrouvons ainsi l'équation (2.63) régissant la dynamique de l'angle  $\theta$ :

$$(ml^2 + \mathbf{I}) \ddot{\theta} + k \dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = u(t) \quad (2.73)$$



Notons enfin que nous pouvons aussi utiliser le théorème de König pour calculer le moment cinétique en 0, point autour duquel tourne le bras. Cela permet d'éviter le calcul des résultantes  $R_x$  et  $R_y$  et donc d'utiliser directement le théorème de la quantité de mouvement. Pour mémoire le théorème de König permet de relier les moments cinétiques définis en deux points distincts. Plus spécifiquement, en notant  $L_G$  le moment d'inertie du bras en  $G$ , centre de masse du bras, alors le moment cinétique  $L_0$  du bras en 0 (0 est le point fixe de la barre) est donné par la relation suivante:

$$\underline{L}_0 = \underline{L}_G + \underline{OG} \times m \frac{d\underline{OG}}{dt} \quad (2.74)$$

Dans le cas du bras simple de robot, le théorème de König conduit à la relation suivante:

$$\begin{aligned} \underline{L}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \sin(\theta) \\ -l \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \times m \begin{bmatrix} l\dot{\theta} \cos(\theta) \\ l\dot{\theta} \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \underline{L}_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}\dot{\theta} + ml^2\dot{\theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.75)$$

Enfin, en appliquant le théorème du moment cinétique en 0, nous avons la relation suivante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}_0 &= \underline{u}(t) + k\dot{\theta}(t) + \underline{OG} \times m\underline{g} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}\dot{\theta} + ml^2\dot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(t) - k\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l \sin(\theta) \\ -l \cos(\theta) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{I}\ddot{\theta} + ml^2\ddot{\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u(t) - k\dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -mgl \sin(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.76)$$

Nous retrouvons ainsi l'équation (2.63) régissant la dynamique de l'angle  $\theta$ :

$$(ml^2 + \mathbf{I})\ddot{\theta} + k\dot{\theta} + mgl \sin(\theta) = u(t) \quad (2.77)$$

## 2.6 Équations de Euler-Lagrange et contraintes holonomes

Supposons maintenant que toutes les composantes du vecteur des coordonnées généralisé  $\underline{q}$  ne soient pas indépendantes mais soumises à  $m$  contraintes de la forme suivante:

$$g_j(\underline{q}) = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (2.78)$$

Une contrainte modélisée par un système d'équations du type (2.78) est appelée contrainte *holonome*. Une contrainte *non-holonome* est une contrainte de la forme  $g_j(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = 0$ .

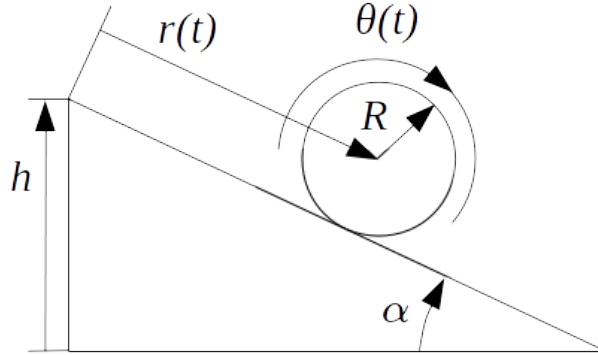


Figure 2.3: Disque roulant sans glissement sur un plan incliné

Les variations  $\delta q_i$  associées à des contraintes *holonomes* ne sont pas libres mais soumises aux relations suivantes:

$$\delta g_j(\underline{q}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j(\underline{q})}{\partial q_i} \delta q_i = 0 \quad j = 1, \dots, m \quad (2.79)$$

Dans cette situation les contraintes (2.78) sont associées à  $m$  multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_j(t)$  et les équations de Euler-Lagrange s'écrivent:

$$\begin{cases} g_j(q_1, \dots, q_n) = 0 & j = 1, \dots, m \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} & i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.80)$$

Le terme  $\sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i}$  correspond à la force généralisée interne  $\tilde{Q}_i$  des contraintes sur la composante  $q_i$  du vecteur coordonnées généralisées:

$$\tilde{Q}_i = \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial g_j}{\partial q_i} \quad (2.81)$$

Une généralisation des équations de Euler-Lagrange prenant en compte les contraintes sur les composantes du vecteur coordonnées généralisées sont les équations de Boltzmann-Hamel<sup>3</sup>.

**Exemple 2.2.** *Considérons le système de la Figure 2.3 où un disque de masse  $m$  et de moment d'inertie  $\mathbf{I}$  roule sans glissement sur un plan incliné.*

*Le vecteur des coordonnées généralisées est choisi comme suit:*

$$\underline{q}(t) = \begin{bmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

<sup>3</sup>Jonathan M. Cameron and Wayne Book, Modeling Mechanisms with Nonholonomic Joints Using the Boltzmann-Hamel Equations, The International Journal of Robotics Research, February 1997 16(1):47-59, DOI:10.1177/027836499701600104

En désignant par  $g$  l'accélération de la pesanteur le lagrangien  $\mathcal{L}$  s'écrit:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= T(q, \dot{q}) - V(q) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{I}\dot{\theta}^2 - mg(h - r \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)) \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{I}\dot{\theta}^2 - mgh + mgr \sin(\alpha)\end{aligned}\quad (2.83)$$

Comme le disque roule sans glissement sur le plan incliné les composantes  $r(t)$  et  $\theta(t)$  du vecteur  $\underline{q}(t)$  sont reliées par la relation suivante:

$$g_1(\underline{q}) = r - R\theta = 0 \quad (2.84)$$

Il y a donc une seule contrainte ( $m = 1$ ) holonome et donc un seul multiplicateur de Euler-Lagrange,  $\lambda_1(t)$ . Il n'y a ici aucune force généralisée non-conservatives  $Q_i$ . Les équations de Euler-Lagrange (2.80) prennent donc la forme suivante:

$$\begin{cases} g_1(\underline{q}) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \lambda_1(t) \frac{\partial g_1}{\partial r} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \lambda_1(t) \frac{\partial g_1}{\partial \theta} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r(t) - R\theta(t) = 0 \\ m\ddot{r}(t) - mg \sin(\alpha) = \lambda_1(t) \\ \mathbf{I}\ddot{\theta}(t) = -R\lambda_1(t) \end{cases} \quad (2.85)$$

A partir de  $r(t) - R\theta(t) = 0$  nous en déduisons que  $\ddot{r}(t) = R\ddot{\theta}(t)$ . Il vient par conséquent:

$$\ddot{r}(t) = R\ddot{\theta}(t) \Rightarrow \begin{cases} mR\ddot{\theta}(t) - mg \sin(\alpha) = \lambda_1(t) \\ \mathbf{I}\ddot{\theta}(t) = -R\lambda_1(t) \end{cases} \quad (2.86)$$

A partir de ces deux équations nous pouvons en déduire l'expression de  $\ddot{\theta}(t)$ :

$$mR\ddot{\theta}(t) - mg \sin(\alpha) = -\frac{\mathbf{I}\ddot{\theta}(t)}{R} \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = \frac{mg \sin(\alpha)}{mR + \frac{\mathbf{I}}{R}} \quad (2.87)$$

Il vient par conséquent:

$$\begin{cases} \ddot{\theta}(t) = \frac{g \sin(\alpha)}{R + \frac{\mathbf{I}}{mR}} \\ \ddot{r}(t) = R\ddot{\theta}(t) = \frac{g \sin(\alpha)}{1 + \frac{\mathbf{I}}{mR^2}} \\ \lambda_1(t) = -\frac{\mathbf{I}\ddot{\theta}(t)}{R} = -\frac{mg \sin(\alpha)}{\frac{mR^2}{\mathbf{I}} + 1} \end{cases} \quad (2.88)$$

Les forces généralisées de contrainte sur  $r(t)$  et  $\theta(t)$  internes au système s'obtiennent par la relation:

$$\begin{cases} \tilde{Q}_r = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial r} = \lambda_1 = -\frac{mg \sin(\alpha)}{\frac{mR^2}{\mathbf{I}} + 1} \\ \tilde{Q}_\theta = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \theta} = -R\lambda_1 = \frac{mgR \sin(\alpha)}{\frac{mR^2}{\mathbf{I}} + 1} \end{cases} \quad (2.89)$$

$\tilde{Q}_r$  représente la force de frottement agissant parallèlement au plan incliné et qui a pour effet que l'accélération du disque est inférieure à  $mg \sin(\theta)$ . De manière similaire  $\tilde{Q}_\theta$  représente la moment de frottement agissant sur le disque de telle sorte que la contrainte de roulement sans glissement (2.84) soit satisfaite.

■

**Exemple 2.3.** Nous reprenons l'exemple du bras simple de robot de la section 2.5 représenté sur la Figure 2.1. Nous rappelons qu'il s'agit d'un modèle de bras de robot commandé par un couple moteur noté  $u(t)$ .

L'objectif de cet exemple est de retrouver les équations de la dynamique du mouvement du bras simple de robot de la section 2.5 lorsque les composantes du vecteur coordonnées généralisées ne sont plus indépendantes mais reliées entre elles par une contrainte holonome.

En conséquence plutôt que de prendre comme coordonnée généralisée l'angle  $\theta(t)$  nous choisissons ici pour  $\underline{q}$  les coordonnées  $(x_G, y_G)$  du centre de masse du bras qui forment un vecteur dont la dimension 2:

$$\underline{q}(t) = \begin{bmatrix} x_G(t) \\ y_G(t) \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Nous rappelons que les coordonnées  $(x_G, y_G)$  du centre de masse du bras ont les expressions suivantes:

$$\underline{OG} = \begin{bmatrix} x_G \\ y_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \sin(\theta) \\ -l \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Ces expressions permettent de relier les coordonnées  $(x_G, y_G)$  à l'angle  $\theta$ .

Les énergies cinétique  $T(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$  et potentielle  $V(\underline{q})$  ont donc les expressions suivantes:

$$\begin{cases} T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2} m \underline{v}(t)^T \underline{v}(t) + \frac{1}{2} \mathbf{I} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) + \frac{1}{2} \mathbf{I} \frac{\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2}{l^2} \\ V(\underline{q}) = mgy_G \end{cases} \quad (2.92)$$

Le lagrangien  $\mathcal{L}$  vaut:

$$\mathcal{L} = T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) - V(\underline{q}) = \frac{1}{2} \left( m + \frac{\mathbf{I}}{l^2} \right) (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2) - mgy_G \quad (2.93)$$

Les forces généralisées (i.e. forces et moments) qui sont externes au système ou qui ne dérivent pas d'un potentiel sont ici le couple moteur  $u$  et le couple de frottement visqueux  $-k\dot{\theta}$ :

$$Q = u - k\dot{\theta} = u - k \frac{\sqrt{\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2}}{l} \quad (2.94)$$

En désignant par  $l$  la distance entre l'axe de rotation du bras et son centre de masse et en se souvenant que moment = distance  $\times$  force nous en déduisons l'expression des forces (virtuelles) selon les directions  $x_G$  et  $y_G$ :

$$\begin{cases} Q_{x_G} = \frac{Q}{l} \cos(\theta) \\ Q_{y_G} = \frac{Q}{l} \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.95)$$

Les coordonnées  $(x_G, y_G)$  du centre de masse du bras sont soumises à la contrainte holonome suivante:

$$g_1(\underline{q}) = x_G^2 + y_G^2 - l^2 = 0 \quad (2.96)$$

Il y a donc une seule contrainte ( $m = 1$ ) holonome et donc un seul multiplicateur de Lagrange,  $\lambda_1(t)$ . Les équations de Euler-Lagrange (2.80) prennent donc la forme suivante:

$$\begin{cases} g_1(q) = 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_G} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_G} = Q_{x_G} + \lambda_1(t) \frac{\partial g_1}{\partial x_G} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}_G} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y_G} = Q_{y_G} + \lambda_1(t) \frac{\partial g_1}{\partial y_G} \end{cases} \quad (2.97)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G^2(t) + y_G^2(t) - l^2 = 0 \\ (m + \frac{\mathbf{I}}{l^2}) \ddot{x}_G(t) = \frac{Q}{l} \cos(\theta) + 2\lambda_1(t)x_G(t) \\ (m + \frac{\mathbf{I}}{l^2}) \ddot{y}_G(t) + mg = \frac{Q}{l} \sin(\theta) + 2\lambda_1(t)y_G(t) \end{cases}$$

En utilisant l'équation (2.91) les deux dernières équations peuvent se mettre sous la forme suivante où  $2l\lambda_1$  et  $\frac{Q}{l}$  apparaissent sous la forme des coordonnées d'un vecteur:

$$\begin{bmatrix} (m + \frac{\mathbf{I}}{l^2}) \ddot{x}_G \\ (m + \frac{\mathbf{I}}{l^2}) \ddot{y}_G + mg \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{Q}{l} \\ 2l\lambda_1 \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

Après inversion de la matrice de rotation nous en déduisons les expressions suivantes:

$$\begin{bmatrix} Q/l \\ 2l\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (m + \frac{\mathbf{I}}{l^2}) \ddot{x}_G \\ (m + \frac{\mathbf{I}}{l^2}) \ddot{y}_G + mg \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

La première équation s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{l} &= \cos(\theta) \left( m + \frac{\mathbf{I}}{l^2} \right) \ddot{x}_G + \sin(\theta) \left( \left( m + \frac{\mathbf{I}}{l^2} \right) \ddot{y}_G + mg \right) \\ \Leftrightarrow Q &= (ml + \frac{\mathbf{I}}{l}) (\ddot{x}_G \cos(\theta) + \ddot{y}_G \sin(\theta)) + mgl \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.100)$$

A partir de la relation (2.91) nous pouvons aisément établir que:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l\ddot{\theta} \\ l\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \quad (2.101)$$

En conséquence:

$$\ddot{x}_G \cos(\theta) + \ddot{y}_G \sin(\theta) = l\ddot{\theta} \quad (2.102)$$

En utilisant l'expression de la force généralisée  $Q$  l'équation de la dynamique du bras de robot (2.100) une fois les contraintes holonomes prises en compte s'écrit finalement sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} Q &= (ml + \frac{\mathbf{I}}{l}) l\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) \\ \Leftrightarrow u(t) - k\dot{\theta} &= (ml^2 + \mathbf{I})\ddot{\theta} + mgl \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.103)$$

Il s'agit de l'expression obtenue dans la section la section 2.5.

■

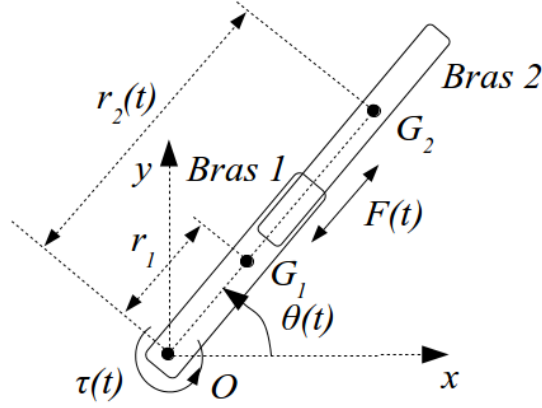


Figure 2.4: Modèle de robot RP

## 2.7 Robot RP

Le système considéré est représenté sur la Figure 2.4: il s'agit d'un modèle de robot RP (revolute/prismatic): le bras 1 est commandé en rotation par un couple moteur noté  $\tau(t)$  tandis que le second bras, encastré dans le premier, est commandé en translation par une force notée  $F(t)$ :

Nous noterons par la suite:

- $r_1$  la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse du bras 1 (cette distance est constante)
- $r_2(t)$  la distance entre l'axe de rotation et le centre de masse du bras 2
- $m_1$  et  $m_2$  la valeur des masses des bras 1 et 2
- $\mathbf{I}_1$  et  $\mathbf{I}_2$  les moments d'inertie des bras 1 et 2
- $\theta(t)$  l'angle que fait le bras 1 avec l'horizontale
- $g$  l'accélération de la pesanteur

Nous supposons que les liaisons sont parfaites et qu'il n'y a donc pas de frottement visqueux.

Nous choisissons (par exemple) l'angle  $\theta(t)$  et la distance  $r_2(t)$  comme coordonnées généralisées; en effet le système (ici les bras 1 et 2) a deux degrés de liberté et  $\theta(t)$  et  $r_2(t)$  sont deux variables qui permettent de déterminer de manière univoque la position des bras 1 et 2:

$$\underline{q}(t) := \begin{bmatrix} \theta(t) \\ r_2(t) \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

La position des centres de masse  $G_1$  et  $G_2$  de chacun des bras est donnée par les expressions suivantes dans le repère inertiel  $(O, x, y)$  considéré:

$$\underline{OG}_1(t) = \begin{bmatrix} r_1 \cos(\theta(t)) \\ r_1 \sin(\theta(t)) \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

Et:

$$\underline{OG}_2(t) = \begin{bmatrix} r_2(t) \cos(\theta(t)) \\ r_2(t) \sin(\theta(t)) \end{bmatrix} \quad (2.106)$$

Nous en déduisons les composantes de la vitesse de chacun des bras dans le référentiel inertiel:

$$\underline{v}_1(t) = \frac{d}{dt} \underline{OG}_1(t) = \begin{bmatrix} -r_1 \dot{\theta} \sin(\theta(t)) \\ r_1 \dot{\theta} \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{v}_1(t)^T \underline{v}_1(t) = r_1^2 \dot{\theta}^2 \quad (2.107)$$

Et:

$$\begin{aligned} \underline{v}_2(t) &= \frac{d}{dt} \underline{OG}_2(t) = \begin{bmatrix} \dot{r}_2(t) \cos(\theta(t)) - r_2(t) \dot{\theta} \sin(\theta(t)) \\ \dot{r}_2(t) \sin(\theta(t)) + r_2(t) \dot{\theta} \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \underline{v}_2(t)^T \underline{v}_2(t) &= \dot{r}_2^2 + r_2^2 \dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (2.108)$$

Les énergies cinétique  $T(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$  et potentielle  $V(\underline{q})$  ont donc les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) &= \frac{1}{2} m_1 \underline{v}_1(t)^T \underline{v}_1(t) + \frac{1}{2} \mathbf{I}_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \underline{v}_2(t)^T \underline{v}_2(t) + \frac{1}{2} \mathbf{I}_2 \dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 \end{aligned} \quad (2.109)$$

Remarquons que l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{r}_2 & \dot{\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_2 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ &:= \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \mathbf{M}(\underline{q}) \dot{\underline{q}} \quad \text{où} \quad \mathbf{M}(\underline{q}) = \mathbf{M}^T(\underline{q}) > 0 \end{aligned} \quad (2.110)$$

Et:

$$V(\underline{q}) = m_1 g r_1 \sin(\theta) + m_2 g r_2 \sin(\theta) \quad (2.111)$$

Le lagrangien  $\mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$  vaut donc:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) &= T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) - V(\underline{q}) = \frac{1}{2} (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + \frac{1}{2} (\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \dot{\theta}^2 \\ &\quad - m_1 g r_1 \sin(\theta) - m_2 g r_2 \sin(\theta) \end{aligned} \quad (2.112)$$

Par conséquent:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \dot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = -m_1 g r_1 \cos(\theta) - m_2 g r_2 \cos(\theta) \end{cases} \quad (2.113)$$

Et:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_2} = m_2 \dot{r}_2 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} = m_2 r_2 \dot{\theta}^2 - m_2 g \sin(\theta) \end{cases} \quad (2.114)$$

Les forces généralisées (i.e. forces et moments) qui sont externes au système ou qui ne dérivent pas d'un potentiel sont ici le couple moteur  $\tau(t)$  qui contrôle la rotation du bras 1 et la force  $F(t)$  qui contrôle la translation du bras 2:

$$\underline{Q}(t) = \begin{bmatrix} \tau(t) \\ F(t) \end{bmatrix} \quad (2.115)$$

En utilisant les équations de Euler-Lagrange (2.20) nous obtenons la dynamique du système:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} &= \tau(t) \\ \Leftrightarrow (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2) \ddot{\theta} + 2m_2 r_2 \dot{r}_2 \dot{\theta} \\ &+ (m_1 r_1 + m_2 r_2) g \cos(\theta) = \tau(t) \end{aligned} \quad (2.116)$$

Et:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}_2} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} &= F(t) \\ \Leftrightarrow m_2 \ddot{r}_2 - m_2 r_2 \dot{\theta}^2 + m_2 g \sin(\theta) &= F(t) \end{aligned} \quad (2.117)$$

En rassemblant ces deux équations nous retrouvons une équation vectorielle de la forme  $\mathbf{M}(\underline{q}) \ddot{\underline{q}} + \mathbf{C}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \dot{\underline{q}} + \underline{G}(\underline{q}) = \mathbf{D}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u})$  (cf. (2.49)):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{r}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_2 r_2 \dot{r}_2 & m_2 r_2 \dot{\theta} \\ -m_2 r_2 \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{r}_2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} (m_1 r_1 + m_2 r_2) g \cos(\theta) \\ m_2 g \sin(\theta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tau(t) \\ F(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.118)$$

La matrice  $\mathbf{C}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$  a l'expression suivante:

$$\mathbf{C}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \\ \underline{c}_2^T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 r_2 \dot{r}_2 & m_2 r_2 \dot{\theta} \\ -m_2 r_2 \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix}$$

En effet, le vecteur  $\underline{q}$  a deux composantes,  $q_1 = \theta$  et  $q_2 = r_2$ . Il vient, en utilisant les termes de Christoffel:

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 1 : q_1 = \theta \Rightarrow \underline{M}_1 = \begin{bmatrix} m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{S}_1(\underline{q}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{M}_1}{\partial \underline{q}} + \left( \frac{\partial \underline{M}_1}{\partial \underline{q}} \right)^T - \frac{\partial \mathbf{M}(\underline{q})}{\partial \theta} \right) \\ = \begin{bmatrix} 0 & m_2 r_2 \\ m_2 r_2 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \underline{c}_1^T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \dot{\underline{q}}^T \mathbf{S}_1(\underline{q}) = \begin{bmatrix} m_2 r_2 \dot{r}_2 & m_2 r_2 \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ k = 2 : q_2 = r_2 \Rightarrow \underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{S}_2(\underline{q}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \underline{M}_2}{\partial \underline{q}} + \left( \frac{\partial \underline{M}_2}{\partial \underline{q}} \right)^T - \frac{\partial \mathbf{M}(\underline{q})}{\partial r_2} \right) \\ = \begin{bmatrix} -m_2 r_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \underline{c}_2^T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \dot{\underline{q}}^T \mathbf{S}_2(\underline{q}) = \begin{bmatrix} -m_2 r_2 \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

## 2.8 Application au gyropode

Le gyropode a été inventé en 2001 par Dean Kamen (*né en 1951 à Long Island dans l'état de New York*). Le terme gyropode vient du grec gyros (cercle) et podos (pied). Le gyropode de marque Segway n'est pas considéré comme un véhicule. En conséquence il est soumis actuellement en France aux règles du





Figure 2.5: Gyropode

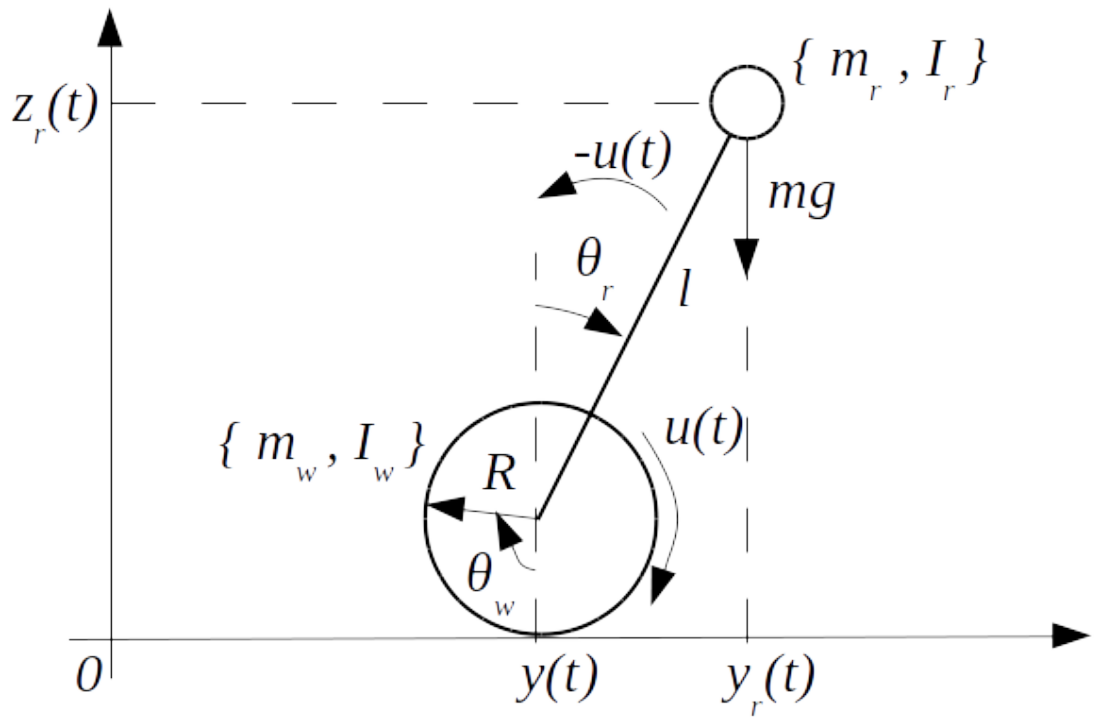


Figure 2.6: Gyropode Modélisé

code la route relatives aux piétons. La Figure 2.6 représente une modélisation du gyropode.

Comme indiqué sur la Figure 2.6 noterons par la suite:

- $\theta_r(t)$  l'angle que fait la barre (*rod* en anglais) du gyropode avec la verticale
- $\theta_w(t)$  l'angle que fait la roue (*wheel* en anglais) du gyropode avec la verticale
- $m_w$  la masse des roues
- $\mathbf{I}_w$  le moment d'inertie des roues
- $y(t)$  la position horizontale des roues
- $m_r$  la masse de l'ensemble {barre + conducteur}
- $\mathbf{I}_r$  le moment d'inertie de l'ensemble {barre + conducteur}
- $z_r(t)$  la hauteur du centre de masse de l'ensemble {barre + conducteur}
- $y_r(t)$  la position horizontale du centre de masse de l'ensemble {barre + conducteur}
- $l$  la distance entre le centre des roues du gyropode et le centre de masse de l'ensemble {barre + conducteur}
- $g$  l'accélération de la pesanteur
- $R$  le rayon des roues du gyropode
- $u(t)$  le couple moteur issu des roues du gyropode et qui, en vertu du principe des actions réciproques (ou troisième loi de Newton), exerce le couple  $-u(t)$  sur le conducteur

Nous choisissons par exemple les angles  $\theta_w(t)$  et  $\theta_r(t)$  comme coordonnées généralisées;  $\theta_w(t)$  et  $\theta_r(t)$  forment en effet un couple de variables permettant de déterminer de manière univoque la position du gyropode et de son conducteur qui constituent un système à deux degré de liberté. En supposant un roulement sans glissement (i.e.  $\dot{y} = R\dot{\theta}_w$ ) il vient:

- Énergie cinétique des roues

$$\begin{cases} T_w = \frac{1}{2}m_w\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{I}_w\dot{\theta}_w^2 \\ \dot{y} = R\dot{\theta}_w \end{cases} \Rightarrow T_w = \frac{1}{2}(m_w R^2 + \mathbf{I}_w)\dot{\theta}_w^2 \quad (2.119)$$

- Énergie cinétique de l'ensemble {barre + conducteur}

$$T_r = \frac{1}{2}m_r(\dot{y}_r^2 + \dot{z}_r^2) + \frac{1}{2}\mathbf{I}_r\dot{\theta}_r^2 \quad (2.120)$$

Les positions  $y_r(t)$  et  $z_r(t)$  peuvent s'obtenir à partir des coordonnées généralisées  $\theta_w(t)$  et  $\theta_r(t)$ :

$$\begin{cases} y_r = y + l \sin(\theta_r) \\ z_r = R + l \cos(\theta_r) \\ \dot{y} = R\dot{\theta}_w \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}_r = R\dot{\theta}_w + l\dot{\theta}_r \cos(\theta_r) \\ \dot{z}_r = -l\dot{\theta}_r \sin(\theta_r) \end{cases} \quad (2.121)$$

Par conséquent l'énergie cinétique de l'ensemble {barre + conducteur} vaut:

$$\begin{aligned} T_r &= \frac{1}{2}m_r \left( \left( R\dot{\theta}_w + l\dot{\theta}_r \cos(\theta_r) \right)^2 + \left( -l\dot{\theta}_r \sin(\theta_r) \right)^2 \right) + \frac{1}{2}\mathbf{I}_r\dot{\theta}_r^2 \\ \Leftrightarrow T_r &= \frac{1}{2}m_r \left( R^2\dot{\theta}_w^2 + l^2\dot{\theta}_r^2 + 2Rl\dot{\theta}_w\dot{\theta}_r \cos(\theta_r) \right) + \frac{1}{2}\mathbf{I}_r\dot{\theta}_r^2 \end{aligned} \quad (2.122)$$

Par conséquent l'énergie cinétique du système {gyropode - conducteur} est la suivante:

$$\begin{aligned} T(q, \dot{q}) = T_w + T_r &= \frac{1}{2} (m_w R^2 + \mathbf{I}_w) \dot{\theta}_w^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r \dot{\theta}_r^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_r \left( R^2 \dot{\theta}_w^2 + l^2 \dot{\theta}_r^2 + 2Rl\dot{\theta}_w\dot{\theta}_r \cos(\theta_r) \right) \end{aligned} \quad (2.123)$$

Il est clair que l'énergie cinétique  $T$  du système dépend des coordonnées généralisées  $q := (\theta_w, \theta_r)$  et de ses dérivées  $\dot{q} = (\dot{\theta}_w, \dot{\theta}_r)$ .

En ce qui concerne l'énergie potentielle du système, il s'agit de celle du conducteur de masse  $m_r$ :

$$V(q) = m_r g z_r(t) = m_r g (R + l \cos(\theta_r)) \quad (2.124)$$

Le lagrangien  $\mathcal{L}$  a donc l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = T(q, \dot{q}) - V(q) &= \frac{1}{2} (m_w R^2 + \mathbf{I}_w) \dot{\theta}_w^2 + \frac{1}{2} \mathbf{I}_r \dot{\theta}_r^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} m_r \left( R^2 \dot{\theta}_w^2 + l^2 \dot{\theta}_r^2 + 2Rl\dot{\theta}_w\dot{\theta}_r \cos(\theta_r) \right) \\ &\quad - m_r g (R + l \cos(\theta_r)) \end{aligned} \quad (2.125)$$

Et par conséquent:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_w} = ((m_r + m_w) R^2 + \mathbf{I}_w) \dot{\theta}_w + m_r R l \dot{\theta}_r \cos(\theta_r) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_r} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_w} = (m_r R^2 + \mathbf{I}_w) \dot{\theta}_w + m_r R l \dot{\theta}_r \cos(\theta_r) \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_r} = -m_r R l \dot{\theta}_w \sin(\theta_r) + m_r g l \sin(\theta_r) \end{cases} \quad (2.126)$$

En utilisant les équations de Euler-Lagrange (2.20), nous obtenons les équations régissant la dynamique du système:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_w} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_w} &= u \\ \Leftrightarrow ((m_r + m_w) R^2 + \mathbf{I}_w) \ddot{\theta}_w + m_r R l \ddot{\theta}_r \cos(\theta_r) - m_r R l \dot{\theta}_r^2 \sin(\theta_r) &= u \end{aligned} \quad (2.127)$$

Et:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_r} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_r} &= -u \\ \Leftrightarrow (m_r l^2 + \mathbf{I}_r) \ddot{\theta}_r + m_r R l \ddot{\theta}_w \cos(\theta_r) - m_r g l \sin(\theta_r) &= -u \end{aligned} \quad (2.128)$$

Ces équations peuvent se réécrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} (m_r + m_w) R^2 + \mathbf{I}_w & m_r R l \cos(\theta_r) \\ m_r R l \cos(\theta_r) & m_r l^2 + \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_w \\ \ddot{\theta}_r \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & -m_r R l \dot{\theta}_r \sin(\theta_r) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_w \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -m_r g l \sin(\theta_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ -u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.129)$$

Nous retrouvons une expression de la forme  $\mathbf{M}(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + \mathbf{C}(\underline{q}, \dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}} + \underline{G}(\underline{q}) = \mathbf{D}(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, \underline{u})$  (cf. (2.49))

Prenons comme variable d'état:

$$\underline{x}^T(t) = [\theta_w(t) \quad \theta_r(t) \quad \dot{\theta}_w(t) \quad \dot{\theta}_r(t)]^T \quad (2.130)$$

En utilisant (2.127) et (2.128) nous obtenons finalement la représentation d'état suivante qui est composée de quatre équations différentielles non-linéaires:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (m_r + m_w)R^2 + \mathbf{I}_w & m_r R l \cos(\theta_r) \\ 0 & 0 & m_r R l \cos(\theta_r) & m_r l^2 + \mathbf{I}_r \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_w \\ \theta_r \\ \dot{\theta}_w \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_w \\ \dot{\theta}_r \\ u + m_r R l \dot{\theta}_r^2 \sin(\theta_r) \\ -u + m_r g l \sin(\theta_r) \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_w \\ \theta_r \\ \dot{\theta}_w \\ \dot{\theta}_r \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_r l^2 + \mathbf{I}_r}{\Delta(\theta_r)} & -\frac{m_r R l \cos(\theta_r)}{\Delta(\theta_r)} \\ 0 & 0 & -\frac{m_r R l \cos(\theta_r)}{\Delta(\theta_r)} & \frac{(m_r + m_w)R^2 + \mathbf{I}_w}{\Delta_r(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_w \\ \dot{\theta}_r \\ u + m_r R l \dot{\theta}_r^2 \sin(\theta_r) \\ -u + m_r g l \sin(\theta_r) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.131)$$

Où:

$$\Delta(\theta_r) = ((m_r + m_w)R^2 + \mathbf{I}_w) (m_r l^2 + \mathbf{I}_r) - (m_r R l \cos(\theta_r))^2 \quad (2.132)$$

Il s'agit d'un système dynamique stationnaire affine en la commande  $u(t)$ :

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t)) + g(\underline{x}(t))u(t) \quad (2.133)$$

Où:

$$\begin{cases} f(\underline{x}(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_r l^2 + \mathbf{I}_r}{\Delta(\theta_r)} & -\frac{m_r R l \cos(\theta_r)}{\Delta(\theta_r)} \\ 0 & 0 & -\frac{m_r R l \cos(\theta_r)}{\Delta(\theta_r)} & \frac{(m_r + m_w)R^2 + \mathbf{I}_w}{\Delta_r(\theta)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_w \\ \dot{\theta}_r \\ m_r R l \dot{\theta}_r^2 \sin(\theta_r) \\ m_r g l \sin(\theta_r) \end{bmatrix} \\ g(\underline{x}(t)) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{m_r l^2 + \mathbf{I}_r + m_r R l \cos(\theta_r)}{\Delta(\theta_r)} \\ -\frac{(m_r + m_w)R^2 + \mathbf{I}_w + m_r R l \cos(\theta_r)}{\Delta(\theta_r)} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.134)$$

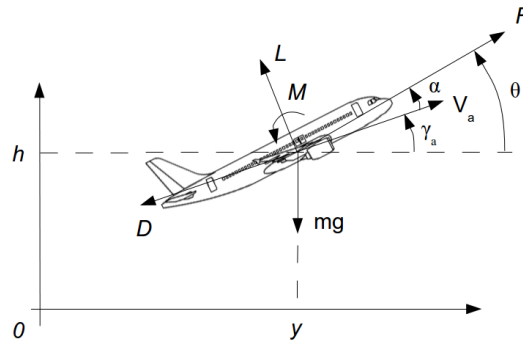


Figure 2.7: Avion évoluant selon le plan vertical

## 2.9 Dynamique du mouvement longitudinal d'un avion

### 2.9.1 Expression des forces et des moments

Nous considérons un avion évoluant selon le plan vertical comme représenté sur la Figure 2.7.

Nous noterons par la suite:

- $y(t)$  la position du centre de masse de l'avion, noté  $G$ , sur l'axe horizontal
- $h(t)$  la position du centre de masse de l'avion sur l'axe vertical
- $\mathbf{I}$  le moment d'inertie (i.e. la composante diagonale selon l'axe  $y$  du référentiel avion de la matrice d'inertie)
- $\theta(t)$  l'assiette de l'avion, i.e. l'angle entre un axe de référence avion (le fuselage la corde de l'aile par exemple) et l'axe horizontal
- $\gamma(t)$  la pente de l'avion, i.e. l'angle entre le vecteur vitesse de l'avion et l'axe horizontal
- $\alpha(t)$  l'angle d'incidence, i.e. l'angle entre l'axe de référence avion et le vecteur vitesse
- $m$  la masse de l'avion, supposée constante
- $g$  l'accélération de la pesanteur
- $V_a$  la vitesse aérodynamique de l'avion (TAS: True Airspeed)
- $D$  la force de trainée (*Drag*), dirigée à l'opposée de la vitesse
- $L$  la force de portance (*Lift*), perpendiculaire à la vitesse
- $T$  la force de poussée (*Thrust*), supposée ici colinéaire à l'axe avion
- $M$  le moment de tangage

- $\rho(h)$  la masse volumique de l'air à l'altitude  $h$
- $\alpha(t)$  l'incidence et  $\alpha_0$  une incidence de référence
- $C_L$ ,  $C_D$  et  $C_m$  les coefficients de portance, de trainée et de moment de tangage
- $\delta_m$  la position de la gouverne de profondeur ( $\delta_m > 0 \Rightarrow$  action du manche à piquer )
- $\delta_T$  la position du plan horizontal réglable (PHR) qui permet l'équilibrage (trim) de l'avion
- $\lambda$  l'allongement de l'aile (en anglais AR pour Aspect Ratio): il est égal au carré de l'envergure  $b$  divisé par la surface portante  $S$ :

$$\lambda = \frac{b^2}{S} \quad (2.135)$$

- $C_{L\alpha}$  le gradient de portance. Pour un profil mince l'approximation suivante est souvent utilisée (cf. cours de mécanique du vol):

$$C_{L\alpha} \approx \frac{\lambda\pi}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2}} \quad (2.136)$$

- $C_{L\delta}$  l'efficacité de la gouverne de profondeur
- $C_{LT}$  l'efficacité du plan horizontal réglable
- Plus généralement  $C_{ab}$  représente le gradient du paramètre  $C_a$  vis à vis des variations de  $b$
- $k_i$  le coefficient de trainée induite
- $\bar{c}$  la corde de référence de l'aile (corde aérodynamique moyenne)
- $x_G$  l'abscisse du centre de masse sur la corde de référence dont l'origine est le bord d'attaque. La quantité  $\frac{x_G}{\bar{c}}$  exprimée en pourcentage représente le centrage de l'avion, noté CG% ( $\frac{x_G}{\bar{c}} = \frac{CG\%}{100}$ )
- $x_F$  l'abscisse du foyer sur la corde de référence

Les expressions des forces aérodynamiques  $L$  et  $D$  et du moment de tangage  $M$  sont les suivantes:

$$\begin{cases} L = \frac{1}{2}\rho(h)SV_a^2C_L \\ C_L = C_{L\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{L\delta}\delta_m + C_{Lq}\frac{\dot{\theta}\bar{c}}{V_a} \end{cases} \quad (2.137)$$

$$\begin{cases} D = \frac{1}{2}\rho(h)SV_a^2C_D \\ C_D = C_{D0} + k_iC_L^2 \\ k_i = \frac{1}{\pi\lambda e} \end{cases} \quad (2.138)$$

Le coefficient  $e$  est le coefficient d'Oswald. Il est égal à 1 pour une aile de forme elliptique (cf. cours de mécanique du vol).

$$\begin{cases} M = \frac{1}{2}\rho(h)SV_a^2\bar{c}C_m \\ C_m = C_{m0} + C_{m\alpha}(\alpha - \alpha_0) + C_{m\delta}\delta_m + C_{mT}\delta_T + C_{mq}\frac{\dot{\theta}\bar{c}}{V_a} \\ C_{m\alpha} = \left(\frac{x_G}{\bar{c}} - \frac{x_F}{\bar{c}}\right)C_{L\alpha} = C_{m\alpha_{ref}} + (CG\% - CG\%_{ref})\frac{C_{L\alpha}}{100} \end{cases} \quad (2.139)$$

Généralement  $C_{m\alpha_{ref}}$  est calculé au quart de la corde aérodynamique moyenne:  $CG\%_{ref} = 25\%$ .

L'expression précédente de  $C_m$  ne tient pas compte du moment de tangage à cabrer que peut créer les réacteurs situés dans les nacelles sous les ailes. Si cet effet n'est pas négligeable la position de la manette des gaz dans être prise en compte dans l'expression de  $C_m$ .

### 2.9.2 Équations de Euler-Lagrange

Nous choisissons comme coordonnées généralisées le vecteur  $\underline{q}(t)$  suivant:

$$\underline{q}(t) = [y(t) \quad h(t) \quad \theta(t)]^T \quad (2.140)$$

Les énergies cinétique  $T(\underline{q}, \dot{\underline{q}})$  et potentielle  $V(\underline{q})$  ont les expressions suivantes, données en fonction des composantes du vecteur  $\underline{q}$  et de ses dérivées  $\dot{\underline{q}}$ :

$$\begin{cases} T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) = \frac{1}{2}mV_a^2 + \frac{1}{2}\mathbf{I}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{h}^2) + \frac{1}{2}\mathbf{I}\dot{\theta}^2 \\ V(\underline{q}) = mgh \end{cases} \quad (2.141)$$

Le lagrangien  $\mathcal{L}$  vaut:

$$\mathcal{L} = T(\underline{q}, \dot{\underline{q}}) - V(\underline{q}) = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{h}^2) + \frac{1}{2}\mathbf{I}\dot{\theta}^2 - mgh \quad (2.142)$$

Les forces généralisées (i.e. forces et moments) qui sont externes au système ou qui ne dérivent pas d'un potentiel sont ici la force de trainée  $D$  (*Drag*), la force de portance  $L$  (*Lift*), la force de poussée  $T$  (*Thrust*) et le moment de tangage  $M$ . En utilisant les équations de Euler-Lagrange (2.20), nous obtenons la dynamique longitudinale de l'avion:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = T \cos(\theta) - L \sin(\gamma) - D \cos(\gamma) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = T \sin(\theta) + L \cos(\gamma) - D \sin(\gamma) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = M \end{cases} \quad (2.143)$$

Où:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}} = m\dot{h} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} = -mg \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mathbf{I}\dot{\theta} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \quad (2.144)$$

Et par conséquent:

$$\begin{cases} m\ddot{y} = T \cos(\theta) - L \sin(\gamma) - D \cos(\gamma) \\ m\ddot{h} + mg = T \sin(\theta) + L \cos(\gamma) - D \sin(\gamma) \\ \mathbf{I}\ddot{\theta} = M \end{cases} \quad (2.145)$$

Nous noterons par la suite:

$$\dot{\theta} = q \quad (2.146)$$

Choisissons comme vecteur d'état le vecteur suivant de dimension 6:

$$\underline{x} = [ \underline{q}^T \quad \underline{\dot{q}}^T ]^T = [ y \quad h \quad \theta \quad \dot{y} \quad \dot{h} \quad q ]^T \quad (2.147)$$

La traînée  $D$ , la portance  $L$ , le moment de tangage  $M$  et la poussée  $T$  dépendent de l'altitude  $h$  et de la vitesse vraie  $V_a$  de l'avion. La poussée  $T$  dépend aussi de la position de la manette des gaz, notée  $\delta_{th}$ , la portance  $L$  de la position de la gouverne de profondeur  $\delta_m$  et le moment de tangage  $M$  de la position de la gouverne de profondeur  $\delta_m$  et de la position du plan horizontal réglable  $\delta_T$ . Comme ces trois grandeurs  $(\delta_{th}, \delta_T, \delta_m)$  sont commandables par le pilote elles peuvent être considérées comme les commandes longitudinales de l'avion:

$$\underline{u} = [ \delta_{th} \quad \delta_T \quad \delta_m ] \quad (2.148)$$

Une représentation d'état est alors la suivante:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \frac{dh}{dt} = \dot{h} \\ \frac{d\theta}{dt} = q \\ \frac{d\dot{y}}{dt} = \frac{T \cos(\theta) - L \sin(\gamma) - D \cos(\gamma)}{m} \\ \frac{d\dot{h}}{dt} = \frac{T \sin(\theta) + L \cos(\gamma) - D \sin(\gamma)}{m} - g \\ \frac{dq}{dt} = \frac{M}{\mathbf{I}} \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (2.149)$$

Où les relations entre pente  $\gamma$ , vitesse vraie  $V_a$ , vitesse sol  $\dot{y}$  et vitesse verticale  $\dot{h}$  sont les suivantes:

$$\begin{cases} \dot{y} = V_a \cos(\gamma) \\ \dot{h} = V_a \sin(\gamma) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = \text{atan}\left(\frac{\dot{h}}{\dot{y}}\right) \\ V_a = \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{h}^2} \end{cases} \quad (2.150)$$

### 2.9.3 Représentation d'état dans le référentiel aérodynamique

Pour l'étude des performances de l'avion, on préfère exprimer la représentation d'état (2.149) dans le référentiel aérodynamique (i.e. le référentiel lié à la vitesse  $V_a$ ). Pour obtenir la nouvelle représentation d'état nous définissons le vecteur d'état  $\underline{x}^*$  suivant:

$$\underline{x}^* = [ y \quad h \quad \theta \quad V_a \quad \alpha \quad q ]^T \quad (2.151)$$

En utilisant la relation:

$$\gamma = \theta - \alpha \quad (2.152)$$



Les vecteur d'état  $\underline{x}$  et  $\underline{x}^*$  sont reliés par le difféomorphisme suivant:

$$\underline{x} = \Phi(\underline{x}^*) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ h \\ \theta \\ \dot{y} \\ \dot{h} \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ h \\ \theta \\ V_a \cos(\theta - \alpha) \\ V_a \sin(\theta - \alpha) \\ q \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

Et inversement:

$$\underline{x}^* = \Phi^{-1}(\underline{x}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} y \\ h \\ \theta \\ V_a \\ \alpha \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ h \\ \theta \\ \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{h}^2} \\ \theta - \gamma = \theta - \arctan\left(\frac{\dot{h}}{\dot{y}}\right) \\ q \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

Une représentation d'état dans le référentiel aérodynamique peut s'obtenir de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}^*(t) &= \left. \frac{\partial \Phi^{-1}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} \frac{\partial \underline{x}}{\partial t} \Big|_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} \\ &= \left. \frac{\partial \Phi^{-1}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} f(\underline{x}, \underline{u}) \Big|_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} \end{aligned} \quad (2.155)$$

Il vient:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Phi^{-1}(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right|_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{h}^2}} & \frac{\dot{h}}{\sqrt{\dot{y}^2 + \dot{h}^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\dot{h}}{\dot{y}^2 + \dot{h}^2} & -\frac{\dot{y}}{\dot{y}^2 + \dot{h}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta - \alpha) & \sin(\theta - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sin(\theta - \alpha)}{V_a} & -\frac{\cos(\theta - \alpha)}{V_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.156)$$

Et:

$$f(\underline{x}, \underline{u}) \Big|_{\underline{x}=\Phi(\underline{x}^*)} = \begin{bmatrix} V_a \cos(\theta - \alpha) \\ V_a \sin(\theta - \alpha) \\ q \\ \frac{T \cos(\theta) - L \sin(\theta - \alpha) - D \cos(\theta - \alpha)}{m} \\ \frac{T \sin(\theta) + L \cos(\theta - \alpha) - D \sin(\theta - \alpha)}{m} - g \\ \frac{M}{I} \end{bmatrix} \quad (2.157)$$

D'où:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\theta - \alpha) & \sin(\theta - \alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\sin(\theta - \alpha)}{V_a} & -\frac{\cos(\theta - \alpha)}{V_a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_a \cos(\theta - \alpha) \\ V_a \sin(\theta - \alpha) \\ q \\ \frac{T \cos(\theta) - L \sin(\theta - \alpha) - D \cos(\theta - \alpha)}{m} \\ \frac{T \sin(\theta) + L \cos(\theta - \alpha) - D \sin(\theta - \alpha)}{m} - g \\ \frac{M}{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_a \cos(\theta - \alpha) \\ V_a \sin(\theta - \alpha) \\ q \\ \frac{T \cos(\alpha) - D}{m} - g \sin(\theta - \alpha) \\ q - \frac{T \sin(\alpha) + L}{m V_a} + \frac{g \cos(\theta - \alpha)}{V_a} \\ \frac{M}{I} \end{bmatrix}$$

Une représentation d'état du mouvement longitudinal de l'avion d'état dans le référentiel aérodynamique est donc la suivante:

$$\begin{cases} \dot{y} = V_a \cos(\theta - \alpha) \\ \dot{h} = V_a \sin(\theta - \alpha) \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{V}_a = \frac{T \cos(\alpha) - D}{m} - g \sin(\theta - \alpha) \\ \dot{\alpha} = q - \frac{L + T \sin(\alpha)}{m V_a} + \frac{g}{V_a} \cos(\theta - \alpha) \\ \dot{q} = \frac{M}{I} \end{cases} \quad (2.158)$$

Pour un aéronef commercial l'incidence  $\alpha$  reste faible et la portance  $L$  est très supérieure à  $T \sin(\alpha)$  de sorte que  $T \cos(\alpha) - D \approx T - D$  et  $L + T \sin(\alpha) \approx L$ . Dans le cas où  $T = D$ , les deux premières équations de (2.158) s'écrivent comme suit:

$$T = D \Rightarrow \begin{cases} \dot{V}_a \approx -g \sin(\gamma) \\ m V_a (q - \dot{\alpha}) = m V_a \dot{\gamma} \approx L - m g \cos(\gamma) \end{cases} \quad (2.159)$$

Sous ces hypothèses, l'énergie  $E = \frac{1}{2} m V_a^2 + m g \int_0^t V_a(\tau) \sin(\gamma(\tau)) d\tau$  est conservée, i.e.  $\dot{E} = 0$ . Lanchester (1908) a aussi noté que la quantité  $C(V_e)$  suivante était conservée, où  $V_e$  est une constante égale à la vitesse d'équilibre (trim) de l'avion ([BHA07]):

$$\begin{cases} C(V_e) = \frac{V_a}{V_e} \cos(\gamma) - \frac{1}{3} \left( \frac{V_a}{V_e} \right)^3 \\ V_e = \sqrt{\frac{m g}{\frac{1}{2} \rho(h) S C_L}} \end{cases} \quad (2.160)$$

Finalement les équations (2.159) qui permettent d'approximer le mode phugoïde de l'avion (i.e. mode oscillatoire du à l'échange entre énergie cinétique et potentielle) peuvent être obtenues grâce aux équations canoniques de Hamilton suivantes:

$$\begin{cases} x_1 = V_a \cos(\gamma) \\ x_2 = -V_a \sin(\gamma) \\ H = -g V_e C(V_e) = \frac{1}{2} \rho(h) S C_L \frac{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}}{3m} - g x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial H}{\partial x_2} \\ \dot{x}_2 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \end{cases} \quad (2.161)$$



## Chapitre 3

# Résolution de l'équation d'état

### 3.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre précédent que la dynamique d'un système non linéaire stationnaire peut se simplifier autour d'un point d'équilibre sous la forme d'un système d'équations différentielles linéaires et invariantes du premier ordre.

L'objectif de ce chapitre est de présenter la résolution de l'équation d'état d'un système linéaire et invariant. Nous commencerons par évoquer le théorème de Cauchy qui établit les conditions nécessaires et suffisantes permettant de conclure quant à l'unicité de la solution d'une équation différentielle. Ensuite quelques rappels sur la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants du premier ordre et sur l'exponentielle de matrice sont présentés. Puis nous effectuerons le calcul de la trajectoire de l'équation d'état d'un système linéaire et invariant dans le cas général d'un système multi-entrées - multi-sorties. Ce chapitre se conclut par la présentation de diverses techniques permettant de calculer l'exponentielle d'une matrice.

Pour mémoire, l'invention du calcul différentiel et intégral remonte aux travaux du britannique Isaac Newton (1643-1727) et de l'allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) à la fin du  $XVII^{\text{ième}}$  siècle. C'est vers 1730 que le mathématicien et physicien suisse Leonhard Euler (1707 - 1783) a commencé à l'utiliser (équations d'Euler des fluides parfaits par exemple). La résolution des équations différentielles a été initiée grâce notamment aux travaux du mathématicien italien Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) et du mathématicien astronome et physicien français Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).

### 3.2 Problème de Cauchy

#### 3.2.1 Normes de vecteurs, normes de matrices

Une norme vectorielle sur un espace vectoriel  $E$  est une application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant les trois axiomes suivants où  $\underline{x}$  et  $\underline{y}$  sont des vecteurs de  $E$  et  $\lambda$  un scalaire ( $|\lambda|$  désigne soit la valeur absolue de  $\lambda$  ou son module selon que le corps

des scalaires est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ):

$$\begin{cases} \|\lambda \underline{x}\| = |\lambda| \|\underline{x}\| \\ \|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\| \\ \|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Notons  $\underline{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . Les normes usuelles de vecteur (appelées normes de Hölder ou  $p$  normes) sont les suivantes:

$$\begin{cases} \|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|\underline{x}\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ \|\underline{x}\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \\ \|\underline{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \end{cases} \quad (3.2)$$

Les inégalités suivantes sont souvent utilisées:

– Inégalité de Minkowski:

$$\|\underline{x} + \underline{y}\|_p \leq \|\underline{x}\|_p + \|\underline{y}\|_p \quad \forall 1 \leq p \leq \infty \quad (3.3)$$

– Inégalité de Hölder:

$$|\underline{x}^T \underline{y}| \leq \|\underline{x}\|_p \|\underline{y}\|_q \quad \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (3.4)$$

Rappelons que deux normes  $n_1(\underline{x})$  et  $n_2(\underline{x})$  sont dites équivalentes lorsqu'il existe deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  telles que:

$$c_1 n_1(\underline{x}) \leq n_2(\underline{x}) \leq c_2 n_1(\underline{x}) \quad (3.5)$$

Les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes. On montre par exemple que:

$$\begin{cases} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty \\ \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \end{cases} \quad (3.6)$$

Une norme matricielle sur l'anneau des matrices d'ordre  $n$ , noté  $M_n$ , est une application  $\|\cdot\| : M_n \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant les quatre axiomes suivants où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont des matrices de  $M_n$  et  $\lambda$  un scalaire ( $|\lambda|$  désigne soit la valeur absolue de  $\lambda$  ou son module selon que le corps des scalaires est  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ):

$$\begin{cases} \|\lambda \mathbf{A}\| = |\lambda| \|\mathbf{A}\| \\ \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \\ \|\mathbf{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{A} = 0 \\ \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\| \end{cases} \quad (3.7)$$

Une norme matricielle peut être vue comme une norme vectorielle à laquelle a été rajouté l'axiome  $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\| \|\mathbf{B}\|$ .

La norme matricielle induite (ou subordonnée) par la norme vectorielle  $\|\cdot\|_p$  est définie par la relation suivante:

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup_{\underline{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\underline{x}\|_p}{\|\underline{x}\|_p} = \sup_{\|\underline{x}\|_p=1} \|\mathbf{A}\underline{x}\|_p \quad (3.8)$$

Par conséquent:

$$\|\mathbf{A}\underline{x}\|_p \leq \|\mathbf{A}\|_p \|\underline{x}\|_p \quad \forall \underline{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^n \quad (3.9)$$

La norme  $\|\mathbf{A}\|_p$  peut se définir de manière équivalente par:

$$\|\mathbf{A}\|_p = \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R}^+ : \|\mathbf{A}\underline{x}\|_p \leq \alpha \|\underline{x}\|_p \quad \forall \underline{x} \neq 0 \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (3.10)$$

Et il existe au moins un vecteur  $\underline{x}$  tel que:

$$\underline{x} \neq 0 \text{ et } \|\mathbf{A}\underline{x}\|_p = \|\mathbf{A}\|_p \|\underline{x}\|_p \quad (3.11)$$

Enfin la norme induite de la matrice identité vérifie toujours la relation suivante:

$$\|\mathbb{I}\|_p = 1 \quad \forall p \quad (3.12)$$

Les normes induites se calculent facilement dans le cas où  $p = 1, 2$  et  $\infty$ :

$$\begin{cases} \|\mathbf{A}\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}| \\ \|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)} \\ \|\mathbf{A}\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}| \end{cases} \quad (3.13)$$

Où  $\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$  désigne la plus grande des valeurs propres du produit  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ : c'est le rayon spectral de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ , noté  $\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$ . D'une manière générale le rayon spectral d'une matrice est sa plus grande valeur propre:  $\rho(\mathbf{A}) := \lambda_{\max}(\mathbf{A})$ . Notons que les racines carrées des valeurs propres de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  s'appellent les valeurs singulières de  $\mathbf{A}$ .

De façon évidente nous avons:

$$\|\mathbf{A}^T\|_1 = \|\mathbf{A}\|_\infty \quad (3.14)$$

On montre que pour une matrice  $\mathbf{A}$  d'ordre  $n$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_\infty \leq \sqrt{n} \|\mathbf{A}\|_2 \\ \frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{A}\|_2 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{A}\|_2 \\ \frac{1}{n} \|\mathbf{A}\|_\infty \leq \|\mathbf{A}\|_1 \leq n \|\mathbf{A}\|_\infty \\ \|\mathbf{A}\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty \end{cases} \quad (3.15)$$

**Exemple 3.1.** Considérons la matrice  $\mathbf{A}$  suivante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Alors

$$\begin{cases} \|\mathbf{A}\|_1 = \max(1+3, 2+4) = 6 \\ \|\mathbf{A}\|_2 \approx 5.465 \\ \|\mathbf{A}\|_\infty = \max(1+2, 3+4) = 7 \end{cases} \quad (3.17)$$

■

Notons que toutes les normes matricielles ne sont pas des normes induites. Par exemple la norme de Frobenius de la matrice  $\mathbf{A}$ , notée  $F(\mathbf{A})$ , n'est pas une norme induite:

$$F(\mathbf{A}) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \quad (3.18)$$

où les  $a_{ij}$  sont les coefficients de la matrice  $\mathbf{A}$ .

### 3.2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Wikipédia nous apprend que:

- Augustin Cauchy, 1789 - 1857, est un mathématicien français membre de l'académie des sciences et professeur à l'école polytechnique. Il fut un mathématicien très prolifique avec près de 800 parutions et sept ouvrages mais la négligence dont il fit preuve sur les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel entacha son prestige.
- Rudolph Lipschitz, 1832 - 1903, est un mathématicien allemand professeur de l'université de Bonn où il supervisa les premiers travaux de Félix Klein. Il étudia à l'université de Königsberg puis à l'université Humboldt de Berlin où il suivit les cours de Gustav Dirichlet et de Martin Ohm (le plus jeune frère du physicien Georg Ohm, découvreur de la loi qui porte son nom).

Le problème de Cauchy concerne l'existence et l'unicité de la solution de l'équation différentielle du premier ordre  $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), t)$ . Par la suite, nous nous restreindrons aux systèmes stationnaires:  $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$ . Plus précisément, nous considérons une application  $f$  de deux variables de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (\underline{x}, \underline{u}) &\mapsto f(\underline{x}, \underline{u}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Pour les systèmes stationnaires, le problème de Cauchy consiste à savoir si l'équation différentielle du premier ordre avec conditions initiales suivante a une solution:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz indique que si l'application  $f$  est lipschitzienne par rapport à l'état  $\underline{x}$  et localement intégrable par rapport à  $\underline{u}(t)$  (il suffit par exemple de prendre la commande  $\underline{u}(t)$  continue par morceaux), alors le problème de Cauchy admet une solution et cette solution est unique (on pourra se reporter à [PET09] pour la démonstration).

Rappelons qu'une fonction  $f(\underline{x}, \underline{u})$  définie sur un intervalle  $\Omega \times U_m$  est  $k_u$ -lipschitzienne lorsque:

$$\begin{aligned} \exists k_u \in \mathbb{R}^+, \forall (\underline{x}_1, \underline{x}_2) \in \Omega^2, \forall \underline{u} \in U_m : \\ \|f(\underline{x}_2, \underline{u}) - f(\underline{x}_1, \underline{u})\| \leq k_u \cdot \|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\| \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dans le cas où la commande  $\underline{u}(t)$  est de la forme  $\underline{u}(t) = k(\underline{x}(t))$  (commande par retour d'état par exemple) alors la dynamique du système bouclé s'écrit  $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), k(\underline{x}(t)))$ ; nous obtenons alors un système autonome et le problème de Cauchy se réduit à la recherche des solutions de:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t)) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

L'application  $f$  est appelée un champ de vecteur; c'est une application qui associe à chaque point d'une région de l'espace une grandeur vectorielle. De manière imagée,  $f$  représente le champ des vitesses si le vecteur d'état  $\underline{x}$  représente des positions.

L'application du théorème de Cauchy-Lipschitz nous indique que le problème (3.20) admet une solution unique lorsque  $f$  est lipschitzienne.

De plus l'application du théorème des accroissements finis pour une fonction vectorielle de variable vectorielle nous permet d'affirmer que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $f$  est lipschitzienne. En effet pour tout segment  $[a, b]$  inclus dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\forall \underline{x}_1, \underline{x}_2 \in ]a, b[$ :

$$\|f(\underline{x}_2) - f(\underline{x}_1)\| \leq \left( \sup_{\underline{x} \in [a, b]} \left\| \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right\| \right) \|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\| \leq k \cdot \|\underline{x}_2 - \underline{x}_1\| \quad (3.23)$$

où  $\left\| \frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} \right\|$  est la norme d'opérateur de la différentielle de  $f$  au point  $\underline{x}$ .

En pratique  $\frac{\partial f(\underline{x})}{\partial \underline{x}} = \mathbf{A}$  où  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ , de telle sorte que la norme d'opérateur est la norme induite.

Pour montrer qu'une application linéaire définie par la matrice  $\mathbf{A}$  est uniformément continue utilisons la relation  $\underline{y} = \mathbf{A}\underline{x}$  où  $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ . En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à ce produit scalaire il vient:

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \Rightarrow y_i^2 \leq \left( \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right) \left( \sum_{j=1}^n x_j^2 \right) \quad (3.24)$$

Soit, en prenant la somme de  $i = 1$  à  $n$ :

$$\|\underline{y}\|_2 = \|\mathbf{A}\underline{x}\|_2 \leq F \|\underline{x}\|_2 \quad (3.25)$$

Où  $F$  est la norme de Frobenius de la matrice  $\mathbf{A}$  ( $F$  n'est pas une norme induite):

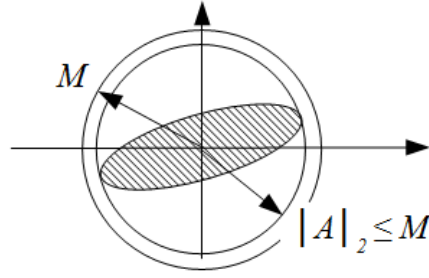
$$F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}^2} \quad (3.26)$$

Du fait de la linéarité de  $\mathbf{A}$  nous avons:

$$\|\mathbf{A}\underline{x} - \mathbf{A}\underline{x}_0\|_2 \leq F \|\underline{x} - \underline{x}_0\|_2 \quad (3.27)$$

Cette inégalité montre que l'application  $\underline{x} \rightarrow \mathbf{A}\underline{x}$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}^n$ . Notons que la norme matricielle  $\|\mathbf{A}\|_2$  n'est pas le nombre  $F$  mais le



Figure 3.1: Norme induite  $\|\mathbf{A}\|_2$ 

plus petit nombre  $N$  vérifiant l'inégalité  $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 \leq N \|\mathbf{x}\|_2$ . Comme indiqué au paragraphe précédent, la norme induite  $N := \|\mathbf{A}\|_2$  est égale à la racine carrée du rayon spectral (i.e. la plus grande valeur propre) de  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ :

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{A} \mathbf{A}^T)} \quad (3.28)$$

La figure 3.1 illustre la différence entre la norme de Frobenius  $F$  et la norme induite  $\|\mathbf{A}\|_2$ .

### 3.2.3 Flot, trajectoire, orbite, portait de phase

Nous considérons le système dynamique autonome décrit par l'équation différentielle suivante avec condition initiale fixée:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.29)$$

Lorsque la solution partant d'une condition initiale arbitraire  $\mathbf{x}_0$  existe  $\forall t \in [t_0, t_1[$  nous noterons  $\varphi_t(\mathbf{x}_0)$  l'unique solution de cette équation différentielle qui passe par  $\mathbf{x}_0$  en  $t = t_0$ .

- Le *portrait de phase* d'un système autonome  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$  est la représentation graphique (à l'aide de flèches) du champ de vecteur  $f$  dans l'espace du vecteur d'état  $\mathbf{x}$ , appelé aussi *espaces des phases* (terminologie introduite par Poincaré).
- Le *flot* d'un système dynamique autonome  $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t))$  (ou du champ de vecteur  $f$ ) est l'application à temps fixé:

$$\mathbf{x} \mapsto \varphi_t(\mathbf{x}_0) \quad (3.30)$$

- La *trajectoire* d'un système dynamique autonome est l'application à condition initiale fixée:

$$t \mapsto \varphi_t(\mathbf{x}_0) \quad (3.31)$$

- Nous appellerons *orbite* du système autonome le lieu géométrique  $\{\varphi_t(\mathbf{x}_0)\}_t$ , c'est à dire le lieu des trajectoires du système dynamique passant par  $\mathbf{x}_0$  pour l'ensemble des temps. De manière imagée la trajectoire est une courbe graduée par le temps  $t$  alors que l'orbite ne l'est pas.

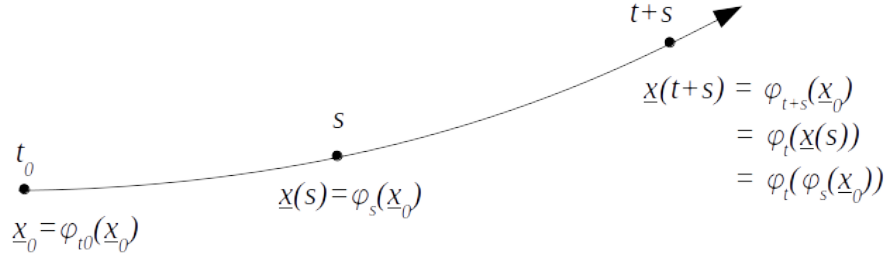


Figure 3.2: Transitivité du flot d'un système stationnaire

Une conséquence fondamentale du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les systèmes autonomes  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  est qu'il ne peut y avoir qu'une seule trajectoire passant par un point donné  $x_0$ ; en conséquence les orbites ne s'intersectent jamais et une orbite ne peut pas se recouper.

Les propriétés du flot  $\varphi_t(x_0)$  sont les suivantes [BRI09]:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \varphi_t(x_0) = f(\varphi_t(x_0)) \\ \varphi_{t_0}(x_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.32)$$

On montre de plus la propriété suivante:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_t(x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=\varphi_t(x_0)} \cdot \frac{\partial \varphi_t(x_0)}{\partial x_0} \\ \frac{\partial \varphi_{t_0}(x_0)}{\partial x_0} = \mathbb{I} \end{cases} \quad (3.33)$$

L'équation (3.33) est une équation différentielle matricielle (la dérivée partielle est prise par rapport à chacune des composantes du vecteur  $x_0$ ) où la condition initiale est donnée par  $\frac{\partial \varphi_{t_0}(x_0)}{\partial x_0} = \mathbb{I}$ . Elle traduit la dépendance continue du champ de vecteur vis à vis de  $x_0$ .

De plus:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_t(x_0)}{\partial x_0} \cdot f(x_0) = f(\varphi_t(x_0)) \\ \varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0)) \end{cases} \quad (3.34)$$

La dernière équation de (3.34) traduit la transitivité du flot lorsque le système est stationnaire. Il suffit de constater que  $\varphi_{t+s}(x_0)$  est une solution de l'équation autonome  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  qui en  $t = 0$  passe par  $\varphi_s(x_0)$ . Par définition du flot,  $\varphi_t(\varphi_s(x_0))$  est aussi une solution de l'équation différentielle qui passe par  $\varphi_s(x_0)$  en  $t = 0$ . Donc, en vertu de l'unicité de la solution du problème de Cauchy, nous avons  $\varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0))$  comme l'illustre la figure 3.2:

Enfin, si le champ de vecteur  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$  alors le flot  $\varphi_t(x_0)$  est aussi de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Notons que si  $\varphi_t(x_0)$  est une courbe dérivable définie  $\forall t \in [t_0, t_1[$  et si  $\forall t \in [t_0, t_1[$ :

$$\|f(x(t))\| < a\|x(t)\| + b \quad (3.35)$$

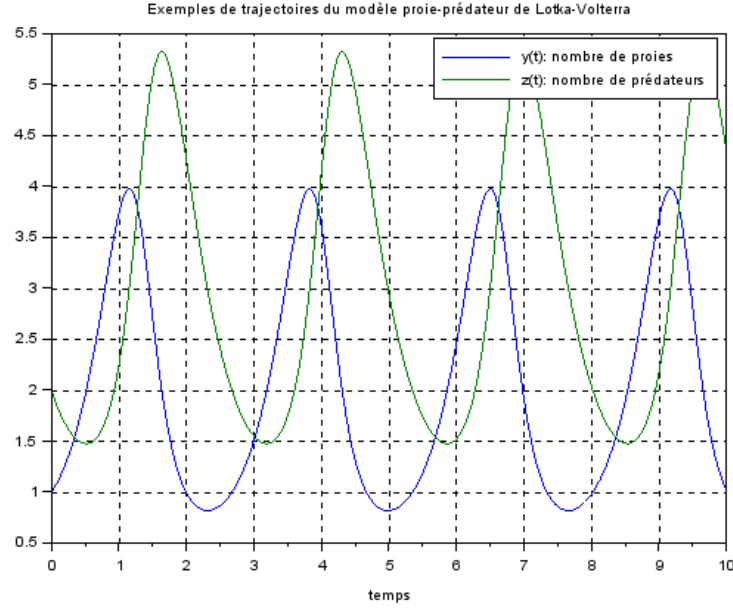


Figure 3.3: Trajectoires du nombre de proies et de prédateurs pour les conditions initiales  $(y_0, z_0) = (1, 2)$

alors l'inégalité de Gronwall [LAB07] indique que  $\forall t \in [t_0, t_1[$ :

$$\begin{cases} a \neq 0 \Rightarrow \|\varphi_t(\underline{x}_0)\| \leq \underline{x}(t_0)e^{a|t-t_0|} + \frac{b}{a}(e^{a|t-t_0|} - 1) \\ a = 0 \Rightarrow \|\varphi_t(\underline{x}_0)\| \leq \underline{x}(t_0) + b|t - t_0| \end{cases} \quad (3.36)$$

**Exemple 3.2.** Reprenons le modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra qui est rappelé ci-après:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t)(a - bz(t)) \\ \dot{z}(t) = z(t)(-c + dy(t)) \end{cases} \quad (3.37)$$

avec les paramètres  $(a, b, c, d)$  suivants:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 2 \\ d = 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

et les conditions initiales  $(y_0, z_0)$  suivantes [VIA01]:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = 2 \end{cases} \quad (3.39)$$

On rappelle que  $y(t)$  représente le nombre de proies et  $z(t)$  le nombre de prédateurs.

Pour les paramètres donnés et les conditions initiales choisies, les trajectoires du nombre de proies  $y(t)$  et du nombre de prédateurs  $z(t)$  sont représentées sur la figure 3.3.

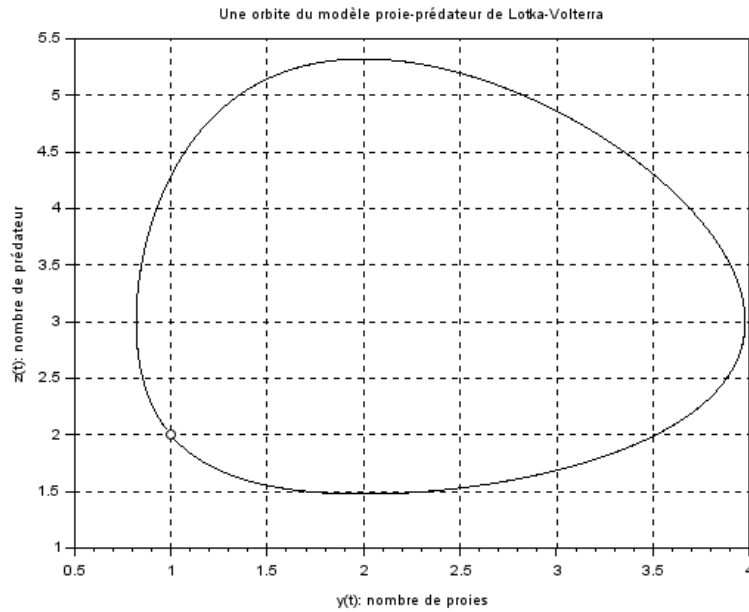


Figure 3.4: Orbite du nombre de proies et de prédateurs pour les conditions initiales  $(y_0, z_0) = (1, 2)$

L'orbite représente la courbe  $(y(t), z(t))$  paramétrée par le temps  $t$ . Elle est représentée sur la figure 3.4.

Le portrait de phase est représenté sur la figure 3.5: les flèches représentent la direction du champ de vecteur  $f$ . Alors que les trajectoires et l'orbite sont spécifiques à des conditions initiales, le portrait de phase ne l'est pas.

Enfin la figure 3.6 représente la superposition du portrait de phase et de la trajectoire.

■

**Exemple 3.3.** Considérons le système dynamique suivant:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) = x^2(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (3.40)$$

La solution de cette équation différentielle est la suivante:

$$\varphi_t(x_0) = \frac{-1}{t - \frac{1}{x_0}} \quad (3.41)$$

La propriété de (3.33) s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi_t(x_0)}{\partial x_0} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x} \Big|_{x=\varphi_t(x_0)} \cdot \frac{\partial \varphi_t(x_0)}{\partial x_0} \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \frac{\frac{1}{x_0^2}}{\left(t - \frac{1}{x_0}\right)^2} &= 2x \Big|_{x=\varphi_t(x_0)} \frac{\frac{1}{x_0^2}}{\left(t - \frac{1}{x_0}\right)^2} \\ \Leftrightarrow -2 \frac{\frac{1}{x_0^2}}{\left(t - \frac{1}{x_0}\right)^3} &= 2 \frac{-1}{t - \frac{1}{x_0}} \frac{\frac{1}{x_0^2}}{\left(t - \frac{1}{x_0}\right)^2} \end{aligned} \quad (3.42)$$

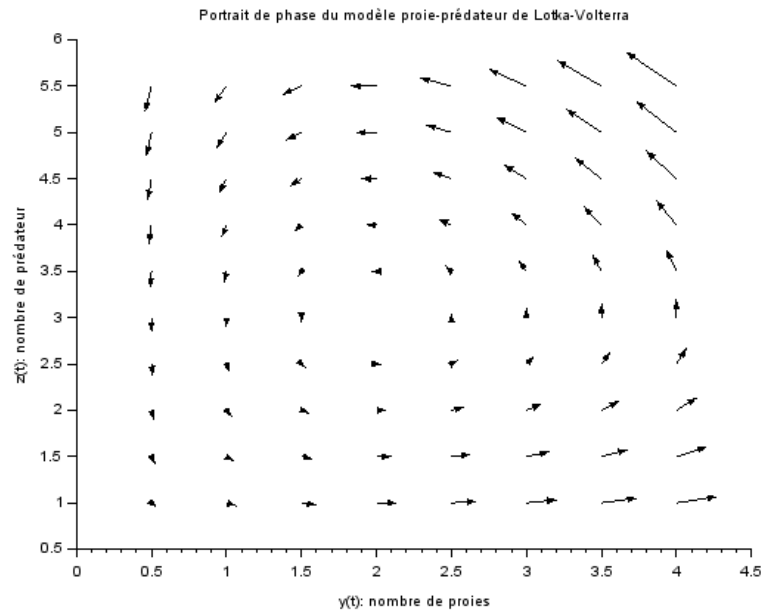
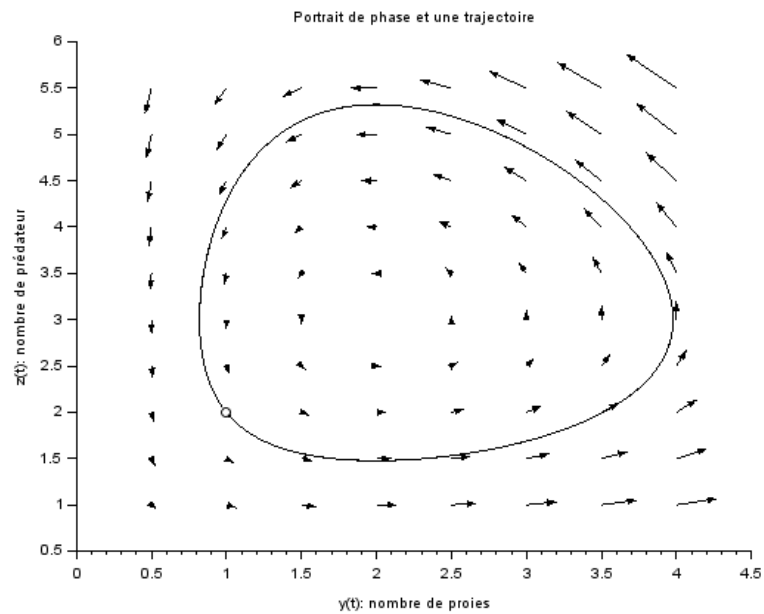


Figure 3.5: Portrait de phase du modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra

Figure 3.6: Portrait de phase du modèle proie-prédateur de Lotka-Volterra et orbite associée aux conditions initiales  $(y_0, z_0) = (1, 2)$

Et:

$$\left. \frac{\partial \varphi_t(x_0)}{\partial x_0} \right|_{t=0} = \mathbb{I} \Leftrightarrow \left. \frac{\frac{1}{x_0^2}}{\left(t - \frac{1}{x_0}\right)^2} \right|_{t=0} = 1 \quad (3.43)$$

Les deux autres propriétés données en (3.34) s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_t(x_0)}{\partial x_0} \cdot f(x_0) = f(\varphi_t(x_0)) \Leftrightarrow \frac{1}{\left(t - \frac{1}{x_0}\right)^2} \frac{1}{x_0^2} \cdot x_0^2 = \left(\frac{-1}{t - \frac{1}{x_0}}\right)^2 \\ \varphi_{t+s}(x_0) = \varphi_t(\varphi_s(x_0)) \Leftrightarrow \frac{-1}{t+s - \frac{1}{x_0}} = \frac{-1}{t - \frac{1}{s - \frac{1}{x_0}}} \end{cases} \quad (3.44)$$

■

### 3.3 Trajectoire des systèmes linéaires et invariants

#### 3.3.1 Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants du premier ordre

Nous cherchons dans cette section à résoudre l'équation différentielle suivante:

$$\dot{x}(t) - ax(t) = bu(t) \quad (3.45)$$

Où  $a$  et  $b$  sont des constantes de  $\mathbb{R}$  et  $x(t)$  et  $u(t)$  des fonction continues de  $\mathbb{R}$ .

La solution de l'équation homogène (ou sans second membre)  $\dot{x}(t) - ax(t) = 0$  est la fonction définie sur tout  $\mathbb{R}$  par:

$$x(t) = e^{at}p \quad (3.46)$$

où  $p$  est un réel dont la valeur se détermine dès que sont connues les conditions initiales.

La solution générale de l'équation avec second membre est obtenue comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Une solution particulière de l'équation avec second membre peut s'obtenir par la méthode de variation de la constante (ou méthode de Lagrange) où il s'agit de chercher  $x(t)$  sous la forme suivante:

$$x(t) = e^{at}p(t) \quad (3.47)$$

Il vient:

$$\dot{x}(t) = ae^{at}p(t) + e^{at}\dot{p}(t) \quad (3.48)$$

Soit, en utilisant ce résultat dans l'équation différentielle:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - ax(t) &= bu(t) \\ \Leftrightarrow ae^{at}p(t) + e^{at}\dot{p}(t) - ae^{at}p(t) &= bu(t) \\ \Leftrightarrow e^{at}\dot{p}(t) &= bu(t) \\ \Leftrightarrow \dot{p}(t) &= e^{-at}bu(t) \end{aligned} \quad (3.49)$$

Il s'agit alors de trouver une primitive de  $e^{-at}bu(t)$ . En notant  $x_0$  la condition initiale sur  $x(t)$  il vient finalement:

$$p(t) = x_0 + \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau \quad (3.50)$$

Et:

$$x(t) = e^{at}p(t) = e^{at}x_0 + e^{at} \int_0^t e^{-a\tau} bu(\tau) d\tau \quad (3.51)$$

### 3.3.2 Expression du vecteur d'état

L'équation d'état d'un système linéaire et invariant est rappelée ci-après:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases} \quad (3.52)$$

Il s'agit dans ce paragraphe de calculer la solution de cette équation différentielle vectorielle à coefficients constants du premier ordre, appelée aussi trajectoire du système. La méthode de résolution est la même que dans le cas scalaire. Comme il s'agit d'une équation différentielle linéaire, le cas particulier où  $\underline{u}(t) = 0$  (équation homogène) est d'abord étudié:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) \quad (3.53)$$

En désignant par  $\underline{c}$  un vecteur de constantes, la solution de cette équation différentielle vectorielle du premier ordre est donnée par:

$$\underline{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\underline{c} \quad (3.54)$$

La matrice  $e^{\mathbf{A}t}$  s'appelle la matrice de transition. Nous verrons au paragraphe suivant comment calculer l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{A}t$ . La solution générale de (3.52) est alors obtenue en faisant varier le vecteur constant  $\underline{c}$ , qui devient une fonction du temps notée  $\underline{c}(t)$ ; c'est la méthode de variation de la constante ou méthode de Lagrange. Il vient:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\underline{c}(t) + e^{\mathbf{A}t}\dot{\underline{c}}(t) \quad (3.55)$$

Soit, en remplaçant dans (3.52):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\underline{c}(t) + e^{\mathbf{A}t}\dot{\underline{c}}(t) &= \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}\underline{c}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t) \\ \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t}\dot{\underline{c}}(t) &= \mathbf{B}\underline{u}(t) \\ \Leftrightarrow \dot{\underline{c}}(t) &= e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}\underline{u}(t) \end{aligned} \quad (3.56)$$

En désignant par  $\underline{x}_0$  la condition initiale, il vient:

$$\underline{c}(t) = \underline{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B}\underline{u}(\tau) d\tau \quad (3.57)$$

En reportant dans (3.54) nous obtenons finalement:

$$\begin{aligned}\underline{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \left( \underline{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau} \mathbf{B} \underline{u}(\tau) d\tau \right) \\ \Leftrightarrow \underline{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \underline{u}(\tau) d\tau\end{aligned}\quad (3.58)$$

Le terme  $e^{\mathbf{A}t} \underline{x}_0$  représente la solution de l'équation homogène (c'est la réponse libre) et le terme  $\int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \underline{u}(\tau) d\tau$  représente une solution particulière de l'équation avec second membre (c'est la réponse forcée).

### 3.3.3 Expression du vecteur de sortie

Nous rappelons que l'équation permettant d'obtenir le vecteur de sortie  $\underline{y}(t)$  (ou de mesure) d'un système linéaire et invariant est donnée par:

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C} \underline{x}(t) + \mathbf{D} \underline{u}(t) \quad (3.59)$$

Par conséquent l'expression du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  nous permet d'exprimer le vecteur de sortie  $\underline{y}(t)$  sous la forme suivante:

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \underline{x}_0 + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \underline{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \underline{u}(t) \quad (3.60)$$

Nous rappelons ci-après une propriété importante du produit de convolution, noté  $*$ , vis-à-vis de la distribution de Dirac  $\delta(t)$ . La propriété suivante signifie que la distribution de Dirac  $\delta(t)$  est l'élément neutre du produit de convolution:

$$\underline{u}(t) = \delta(t) * \underline{u}(t) = \int_0^t \delta(t - \tau) \underline{u}(\tau) d\tau \quad (3.61)$$

Il vient finalement:

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \underline{x}_0 + \int_0^t (\mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t - \tau)) \underline{u}(\tau) d\tau \quad (3.62)$$

Remarquons que lorsque les conditions initiales sont nulles ( $\underline{x}_0 = \underline{0}$ ), l'expression de  $\underline{y}(t)$  se réduit à:

$$\underline{y}(t) = \int_0^t (\mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t - \tau)) \underline{u}(\tau) d\tau \quad (3.63)$$

Ainsi  $\underline{y}(t)$  se met sous la forme d'un produit de convolution:

$$\underline{y}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \underline{u}(\tau) d\tau := \mathbf{h}(t) * \underline{u}(t) \quad (3.64)$$

Nous en déduisons par identification l'expression de la matrice  $\mathbf{h}(t)$  en fonction des matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{B} + \mathbf{D} \delta(t) \quad (3.65)$$



Le nombre de colonne de la matrice  $\mathbf{h}(t)$  est égal au nombre d'entrées du système (i.e. la dimension du vecteur  $\underline{u}(t)$ ) et le nombre de lignes de  $\mathbf{h}(t)$  est égal au nombre de sorties du système (i.e. la dimension du vecteur  $\underline{y}(t)$ ):

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \cdots & \underline{h}_i(t) & \cdots \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{y}(t) = \sum_i \underline{h}_i(t) * u_i(t) \quad (3.66)$$

Compte tenu du fait que la distribution de Dirac  $\delta(t)$  est l'élément neutre du produit de convolution ( $\delta(t) * \underline{u}(t) = \underline{u}(t)$ ) nous concluons que chaque colonne  $\underline{h}_i(t)$  ( $\underline{h}_i(t)$  est un vecteur) de la matrice  $\mathbf{h}(t)$  représente la *réponse impulsionnelle* du système à la  $i^{\text{ième}}$  composante du vecteur de commande  $\underline{u}(t)$ . La matrice  $\mathbf{h}(t)$  s'appelle la *réponse impulsionnelle* du système.

De plus, la relation (3.66) montre qu'un système linéaire et invariant est un convoluteur lorsque les conditions initiales sont nulles.

### 3.3.4 Systèmes linéaires variant dans le temps

Un système linéaire variant dans le temps est défini par l'équation différentielle suivante où la matrice d'état  $\mathbf{A}(t)$  est une matrice carrée de dimension  $n$ :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}(t) + \mathbf{B}(t)\underline{u}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}_0 \end{cases} \quad (3.67)$$

La trajectoire d'un système linéaire, qu'il soit invariant ou non, est donnée par:

$$\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0)\underline{x}_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\underline{u}(\tau)d\tau \quad (3.68)$$

où  $\Phi(t, t_0)$  est une matrice appelée matrice de transition (ou *matrice de Green*).

La matrice de transition peut être obtenue en résolvant l'équation homogène suivante:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}(t) \quad (3.69)$$

dont la solution s'écrit:

$$\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0)\underline{x}_0 \quad (3.70)$$

A partir des relations:

$$\begin{cases} \underline{x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0)\underline{x}(t_0) = \Phi^{-1}(t_0, t_1)\underline{x}(t_0) \\ \underline{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_1)\underline{x}(t_1) \\ \underline{x}(t_2) = \Phi(t_2, t_0)\underline{x}(t_0) \end{cases} \quad (3.71)$$

nous pouvons établir les propriétés fondamentales suivantes:

$$\begin{cases} \Phi(t_2, t_0) = \Phi(t_2, t_1)\Phi(t_1, t_0) \\ \Phi^{-1}(t_0, t_1) = \Phi(t_1, t_0) \\ \Phi(t_0, t_0) = \mathbb{I} \end{cases} \quad \forall t_i \in \mathbb{R} \quad (3.72)$$

De plus, à partir des relations  $\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}(t)$  et  $\underline{x}(t) = \Phi(t, t_0)\underline{x}_0$ , nous pouvons établir que la matrice de transition satisfait à l'équation homogène suivante:

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0) \quad (3.73)$$

En intégrant (3.73) il vient:

$$\frac{\partial \Phi(t, t_0)}{\partial t} = \mathbf{A}(t) \Phi(t, t_0) \Rightarrow \Phi(t, t_0) = \mathbb{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) \Phi(\tau_1, t_0) d\tau_1 \quad (3.74)$$

En utilisant l'expression obtenue pour  $\Phi(t, t_0)$  dans l'intégrale, et en réitérant le processus d'intégration, nous obtenons l'expression de  $\Phi(t, t_0)$  sous forme d'une série, appelée la série de Dyson:

$$\begin{aligned} \Phi(t, t_0) = \mathbb{I} + \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \mathbf{A}(\tau_1) \mathbf{A}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \\ + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_2} \mathbf{A}(\tau_1) \mathbf{A}(\tau_2) \mathbf{A}(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \end{aligned} \quad (3.75)$$

Lorsque les matrices  $\mathbf{A}(\tau_1)$  et  $\mathbf{A}(\tau_2)$  commutent, c'est à dire lorsque  $\mathbf{A}(\tau_1) \mathbf{A}(\tau_2) = \mathbf{A}(\tau_2) \mathbf{A}(\tau_1)$ , alors:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} \mathbf{A}(\tau_1) \mathbf{A}(\tau_2) \dots \mathbf{A}(\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \\ = \frac{1}{n!} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t \dots \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau_1) \mathbf{A}(\tau_2) \dots \mathbf{A}(\tau_n) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n \\ = \frac{1}{n!} \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right)^n \end{aligned} \quad (3.76)$$

Dans ces conditions, la série de Dyson converge vers l'exponentielle de  $\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau$ :

$$\Phi(t, t_0) = \exp \left( \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \right) \quad (3.77)$$

De manière alternative, supposons que pour  $n$  conditions initiales distinctes  $\underline{x}_i(t_0)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , l'équation autonome  $\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}(t)$  admet  $n$  solutions distinctes  $\underline{x}_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En organisant sous forme matricielle ces  $n$  solutions nous obtenons la matrice fondamentale  $\mathbf{X}(t)$ :

$$\dot{\underline{x}}_i(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}_i(t) \Rightarrow \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \underline{x}_1(t) & \dots & \underline{x}_n(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) \quad (3.78)$$

La matrice de transition  $\Phi(t, t_0)$  est alors donnée par l'expression suivante:

$$\Phi(t, t_0) = \mathbf{X}(t)\mathbf{X}^{-1}(t_0) \quad (3.79)$$

Pour un système linéaire et invariant la matrice d'état  $\mathbf{A}(t)$  ne dépend pas du temps:  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ . Dans ces conditions la matrice de transition  $\Phi(t, t_0)$  vaut  $\Phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$  (les matrices  $\mathbf{A}t$  et  $\mathbf{A}t_0$  commutent). De plus comme dans ce cas l'origine des temps est indifférente nous pouvons prendre  $t_0 = 0$ .

En supposant que la matrice d'état  $\mathbf{A}(t)$  soit bornée ( $\|\mathbf{A}(t)\| \leq M \forall t \in [t_0, t_1]$ ) le système autonome  $\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\underline{x}(t)$  sera dit exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives  $C$  et  $\omega_s$  de telle sorte que la matrice de transition  $\Phi(t, t_0)$  satisfasse la relation suivante:

$$\|\Phi(t, t_0)\| \leq Ce^{-\omega_s(t-t_0)} \forall t \in [t_0, t_1[ \quad (3.80)$$

**Exemple 3.4.** Nous considérons le système dynamique autonome variant dans le temps suivant où la matrice d'état  $\mathbf{A}(t)$  est une matrice carrée de dimension  $n = 2$ :

$$\dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \quad (3.81)$$

Chacune des composantes du vecteur d'état satisfait aux équations différentielles suivantes:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 0 \\ \dot{x}_2(t) = t x_1(t) \end{cases} \quad (3.82)$$

Soit après intégration:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{10} \\ x_2(t) = x_{10} \frac{t^2}{2} + x_{20} \end{cases} \quad (3.83)$$

Calculons alors l'expression du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  pour  $n = 2$  conditions initiales distinctes:

$$\begin{cases} \underline{x}_1(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 t^2 \end{bmatrix} \\ \underline{x}_2(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.84)$$

En organisant sous forme matricielle ces  $n = 2$  solutions nous obtenons la matrice fondamentale  $\mathbf{X}(t)$ :

$$\mathbf{X}(t) = [\underline{x}_1(t) \quad \underline{x}_2(t)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 t^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

La matrice de transition  $\Phi(t, 0)$  est alors donnée par l'expression suivante:

$$\Phi(t, 0) = \mathbf{X}(t) \mathbf{X}^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 t^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 t^2 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Remarquons qu'en changeant les conditions initiales et en prenant par exemple  $\underline{x}_2(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 t^2 + 2 \end{bmatrix}$  nous obtenons la même matrice de transition  $\Phi(t, 0)$ . ■

### 3.4 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

Les expressions précédentes font intervenir l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{A}t$ . Il existe plusieurs manières de calculer cette exponentielle. Nous en présenterons quatre dans les paragraphes qui suivent.

### 3.4.1 Définition de l'exponentielle d'une matrice

Soit  $\mathbf{A}$  une matrice  $n \times n$ , réelle ou complexe. L'exponentielle de la matrice  $\mathbf{A}$  est la matrice  $n \times n$  obtenue par le développement de la série absolument convergente suivante où  $\mathbb{I}$  désigne la matrice identité de dimension  $n$ :

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} \quad (3.87)$$

La définition de l'exponentielle de matrice permet de montrer les propriétés suivantes:

- Valeur en  $t = 0$ :

$$e^{\mathbf{A}t} \Big|_{t=0} = e^{\mathbf{0}} = \mathbb{I} \quad (3.88)$$

- Dérivation:

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A} \quad (3.89)$$

- Intégration:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbb{I} + \mathbf{A} \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \quad (3.90)$$

- Exponentielle d'une somme de matrices: sous réserve que les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  commutent (i.e.  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ ) alors:

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{B}t} = e^{\mathbf{B}t} e^{\mathbf{A}t} \quad (3.91)$$

En conséquence:

$$e^{\mathbf{A}t} e^{\mathbf{A}\tau} = e^{\mathbf{A}(t+\tau)} = e^{\mathbf{A}\tau} e^{\mathbf{A}t} \quad (3.92)$$

Et:

$$(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t} \quad (3.93)$$

On montre de plus que:

- En désignant par  $\lambda(\mathbf{A})$  les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ :

$$\lambda(e^{\mathbf{A}t}) = e^{\lambda(\mathbf{A})t} \quad (3.94)$$

- Et en désignant par  $\det(\mathbf{A})$  le déterminant de  $\mathbf{A}$  et par  $\text{tr}(\mathbf{A})$  la trace de  $\mathbf{A}$ :

$$\det(e^{\mathbf{A}t}) = e^{\text{tr}(\mathbf{A})t} \quad (3.95)$$

### 3.4.2 Polynôme minimal d'une matrice

Nous rappelons que le polynôme minimal d'une matrice  $\mathbf{A}$  est le polynôme  $\pi_A(s)$  de plus petit degré tel que  $\pi_A(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ . C'est un polynôme unitaire (i.e. le coefficient du monôme de plus haut degré est égal à 1) qui divise le polynôme caractéristique  $\chi_A(s) := \det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})$  de la matrice  $\mathbf{A}$ . Par conséquent son degré est inférieur ou égal à la dimension  $n$  de la matrice. La matrice  $\mathbf{A}$  est diagonalisable lorsque toutes les racines du polynôme minimal de  $\mathbf{A}$  sont simples.

### 3.4.3 Cas d'une matrice nilpotente

Le calcul de la série (3.87) fait intervenir la somme d'une infinité de termes et il n'est généralement pas possible de le réaliser sauf dans les cas particuliers où  $\mathbf{A}$  est une matrice nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe un entier  $k$  tel que  $\mathbf{A}^k = \mathbf{0}$ . L'entier  $k$  est appelé indice de nilpotence. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice  $\mathbf{A}$  de dimension  $n$  soit nilpotente est que son polynôme caractéristique  $\chi_A(s) := \det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})$  soit égal à  $s^n$  ( $k \leq n$ ). De plus le polynôme minimal  $\pi_A(s)$  de la matrice d'état  $\mathbf{A}$  est alors de la forme  $s^k$ . Dans ce cas il vient:

$$\pi_A(s) = s^k \Rightarrow e^{\mathbf{A}t} = \mathbb{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad (3.96)$$

Remarquons que ce résultat peut se généraliser au cas où le polynôme minimal  $\pi_A(s)$  de la matrice d'état  $\mathbf{A}$  est de la forme  $(s - \lambda)^k$ . Nous avons en effet dans ce cas:

$$\pi_A(s) = (s - \lambda)^k \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})^k = \mathbf{0} \quad (3.97)$$

Par conséquent la matrice  $\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I}$  est nilpotente et pouvons alors écrire:

$$e^{(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})t} = \mathbb{I} + (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})t + (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad (3.98)$$

Comme les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\lambda\mathbb{I}$  commutent nous avons de plus la relation suivante:

$$e^{(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})t} = e^{-\lambda t} e^{\mathbf{A}t} \Rightarrow e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda t} e^{(\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})t} \quad (3.99)$$

Il vient finalement dans le cas où  $\pi_A(s) = (s - \lambda)^k$ :

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda t} \left( \mathbb{I} + (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})t + (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots + (\mathbf{A} - \lambda\mathbb{I})^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \right) \quad (3.100)$$

**Exemple 3.5.** Soit  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Calculons le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$ :

$$\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}) = \det \left( \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \right) = s^2 \quad (3.101)$$

Comme le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$  est égal à  $s^2$  nous en déduisons que la matrice  $\mathbf{A}$  est nilpotente. Nous vérifions que:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

Il vient:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbb{I} + \mathbf{A}t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

■

**Exemple 3.6.** *Considérons les deux matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  suivantes:*

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.104)$$

*Il est clair que les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  ne commutent pas:*

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

*Par conséquent on s'attend à ce que  $e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} \neq e^{\mathbf{B}t}e^{\mathbf{A}t}$ . Montrons le à partir des définitions et résultats précédents:*

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.106)$$

*Et*

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}t)^k = \begin{bmatrix} t^k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\Rightarrow e^{\mathbf{B}t} = \mathbb{I} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{B}t)^k}{k!} = \begin{bmatrix} 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.107)$$

*Il est clair que:*

$$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} e^t & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq e^{\mathbf{B}t}e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.108)$$

*Par contre nous pouvons aisément vérifier que:*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{d}{dt}e^{\mathbf{B}t} = \mathbf{B}e^{\mathbf{B}t} = e^{\mathbf{B}t}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.109)$$

■

### 3.4.4 Décomposition modale - diagonalisation

Nous supposerons dans cette section que la matrice  $\mathbf{A}$  est diagonalisable, autrement dit pour toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{A}$  la dimension du sous-espace propre associé  $\ker(\lambda_i\mathbb{I} - \mathbf{A})$  est égale à la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$  (ou de manière équivalente le rang de la matrice  $\lambda_i\mathbb{I} - \mathbf{A}$  est égal à la dimension de  $\mathbf{A}$  moins la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$ ). C'est le cas par exemple lorsque toutes les valeurs propres sont distinctes. Nous dirons qu'une valeur propres  $\lambda_i$  est dégénérée lorsque la dimension du sous-espace propre associé n'est pas égale à la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_i$ . Dans ce cas la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas diagonalisable.

Notons  $\lambda_i$  où  $i = 1 \cdots n$  ( $n \times n$  étant la dimension de la matrice  $\mathbf{A}$ ) les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ ,  $\underline{v}_i$  les vecteurs propres à droite de  $\mathbf{A}$  et  $\underline{w}_i$  les vecteurs propres à gauche de  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i \\ \underline{w}_j^T \mathbf{A} = \lambda_j \underline{w}_j^T \end{cases} \quad (3.110)$$

Il est clair que les vecteurs propres à gauche de  $\mathbf{A}$  sont les vecteurs propres à droite de  $\mathbf{A}^T$ :

$$\underline{w}_j^T \mathbf{A} = \lambda_j \underline{w}_j^T \Leftrightarrow \mathbf{A}^T \underline{w}_j = \lambda_j \underline{w}_j \quad (3.111)$$

La matrice  $\mathbf{P}$  de changement de base est obtenue en écrivant sous forme vectorielle la relation  $\mathbf{A}\underline{v}_i = \lambda_i \underline{v}_i$ :

$$\begin{cases} \mathbf{A}\underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}\underline{v}_n = \lambda_n \underline{v}_n \end{cases} \quad (3.112)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{A} \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

L'égalité précédente s'écrit sous la forme  $\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}$  où:

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.113)$$

L'expression de l'inverse de la matrice  $\mathbf{P}$  s'obtient après avoir remarqué que les vecteurs  $\underline{w}_j$  et  $\underline{v}_i$  sont orthogonaux. En effet:

$$\begin{aligned} \lambda_j \underline{w}_j^T \underline{v}_i &= \underline{w}_j^T \mathbf{A} \underline{v}_i = \underline{w}_j^T \lambda_i \underline{v}_i \Leftrightarrow (\lambda_i - \lambda_j) \underline{w}_j^T \underline{v}_i = 0 \\ &\Rightarrow \underline{w}_j^T \underline{v}_i = 0 \text{ si } j \neq i \end{aligned} \quad (3.114)$$

Les vecteurs  $\underline{w}_j$  et  $\underline{v}_i$  sont définis à une constante près. Ils seront toujours choisis de telle sorte que:

$$\underline{w}_j^T \underline{v}_i = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ 1 & \text{si } j = i \end{cases} \quad (3.115)$$

Il vient par conséquent:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \underline{w}_2^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} \mathbf{P} = \mathbb{I} \quad (3.116)$$

Ainsi dans le cas où tous les vecteurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sont linéairement indépendants alors la matrice  $\mathbf{P}^{-1}$  existe et la transformation  $\mathbf{P}$  permet de diagonaliser la matrice  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{\Lambda} \mathbf{P}^{-1} \text{ où } \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Le calcul de la matrice  $e^{\mathbf{A}t}$  peut alors se faire de la manière suivante:

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}t\mathbf{P}^{-1}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1} \quad (3.118)$$

Cette égalité se démontre en utilisant le développement en série de l'exponentielle:

$$e^{\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}t\mathbf{P}^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}t\mathbf{P}^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{\Lambda}t)^k\mathbf{P}^{-1}}{k!} = \mathbf{P} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{\Lambda}t)^k}{k!} \right) \mathbf{P}^{-1}$$

Comme la matrice modale  $\mathbf{\Lambda}$  est diagonale, nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{bmatrix} \\ e^{\lambda_i t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_i t)^k}{k!} \end{array} \right\} \Rightarrow e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

Par conséquent:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \underline{w}_2^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n \underline{v}_i e^{\lambda_i t} \underline{w}_i^T \end{aligned} \quad (3.120)$$

En tenant compte du fait que  $e^{\lambda_i t}$  est un scalaire nous pouvons déplacer ce terme dans l'expression obtenue. Il vient finalement:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n \underline{v}_i \underline{w}_i^T e^{\lambda_i t} \text{ avec } \underline{w}_i^T \underline{v}_i = 1 \ \forall \ i \quad (3.121)$$

Remarquons que  $\underline{v}_i \underline{w}_i^T$  est une matrice alors que  $\underline{w}_i^T \underline{v}_i$  est un scalaire.

### 3.4.5 Utilisation du théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley-Hamilton indique que la matrice  $\mathbf{A}$  vérifie sa propre équation caractéristique:

$$\chi_A(\lambda) := \det(\lambda \mathbb{I} - \mathbf{A}) \triangleq \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (3.122)$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^n + a_{n-1} \mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbf{A} + a_0 \mathbb{I} = \mathbf{0} \quad (3.123)$$

Notons que la démonstration de ce théorème est quasi-immédiate lorsque les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sont toutes distinctes (i.e.  $\mathbf{A}$  est diagonalisable). Il suffit en effet d'écrire sous forme vectorielle les  $n$  équations (3.122) en faisant intervenir chacune des valeurs propres  $\lambda_i$ , puis en faisant intervenir la matrice diagonale  $\mathbf{\Lambda}$  des valeurs propres:

$$\begin{aligned} \lambda_i^n + a_{n-1} \lambda_i^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda_i + a_0 &= 0 \\ \Rightarrow \mathbf{\Lambda}^n + a_{n-1} \mathbf{\Lambda}^{n-1} + \cdots + a_1 \mathbf{\Lambda} + a_0 \mathbb{I} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.124)$$



En multipliant à gauche  $\mathbf{P}$  et à droite par  $\mathbf{P}^{-1}$  il vient:

$$\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1} + a_{n-1}\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^{n-1}\mathbf{P}^{-1} + \dots + a_1\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} + a_0\mathbb{I} = \mathbf{0} \quad (3.125)$$

Comme  $\mathbf{P}$  est la matrice de changement de base définie par  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  le résultat (3.123) est obtenu en utilisant les relations suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1} \\ \mathbf{A}^2 = (\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^n = (\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}) \dots (\mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^{-1}) = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1} \end{cases} \quad (3.126)$$

Notons que le théorème de Cayley-Hamilton se généralise dans le cas de valeurs propres dont la multiplicité est supérieure à 1. Nous avons en effet de manière purement formelle:

$$\chi_A(\lambda) := \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbf{A}) \Rightarrow \chi_A(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A} - \mathbf{A}) = 0 \quad (3.127)$$

L'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton permet de déduire que toute matrice de la forme  $\mathbf{A}^m$  avec  $m \geq n$  est une combinaison linéaire de  $\mathbb{I}, \mathbf{A}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}$ :

$$\begin{cases} e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k t^k}{k!} \\ \mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - \dots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbb{I} \\ \mathbf{A}^m = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \mathbf{A}^i \quad \forall m \geq n \end{cases} \quad (3.128)$$

Par conséquent, la série (3.87) donnant l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{A}$  peut se limiter à l'ordre  $n-1$ :

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \mathbf{A}^k \quad (3.129)$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer les fonctions  $\gamma_k(t)$  pour calculer l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{A}$ . Pour cela notons que toutes les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ , que l'on notera  $\lambda_i$ , vérifient aussi l'équation (3.122) et par conséquent:

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_i^k \quad (3.130)$$

Dans le cas fréquent où la matrice  $\mathbf{A}$  de dimension  $n \times n$  possède  $n$  valeurs propres distinctes, alors les  $n$  fonctions  $\gamma_k(t)$  sont les solutions du système suivant à  $n$  inconnues:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_1^k \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_n^k \end{cases} \quad (3.131)$$

Soit sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

Cette écriture matricielle fait apparaître la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

Wikipedia nous apprend que *Alexandre-Théophile Vandermonde (parfois appelé Alexis-Théophile), né à Paris le 28 février 1735 et mort à Paris le 1er janvier 1796, est un mathématicien français. Il fut aussi économiste, musicien et chimiste, travaillant notamment avec Étienne Bézout et Antoine Lavoisier.*<sup>1</sup>

Le déterminant de la matrice de Vandermonde  $\mathbf{V}$  a l'expression suivante:

$$\det(\mathbf{V}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \quad (3.134)$$

Par conséquent la matrice de  $\mathbf{V}$  est inversible dès que toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice  $\mathbf{A}$  sont distinctes.

Dans le cas où une valeur propre  $\lambda_i$  de la matrice  $\mathbf{A}$  est de multiplicité  $n_i$  le système (3.132) n'est pas carré et donc n'est pas inversible. Pour le rendre carré (autant d'équations que d'inconnues) et inversible nous ajoutons au système (3.132)  $n_i - 1$  équations indépendantes en calculant les  $n_i - 1$  premières dérivées de  $e^{\lambda_i t}$  par rapport à  $\lambda_i$ :

$$\begin{aligned} e^{\lambda_i t} &= \gamma_0(t) + \gamma_1(t)\lambda_i + \gamma_2(t)\lambda_i^2 + \cdots + \gamma_{n-1}(t)\lambda_i^{n-1} \\ \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{d\lambda_i} e^{\lambda_i t} &= \gamma_1(t) + 2\gamma_2(t)\lambda_i + \cdots + (n-1)\gamma_{n-1}(t)\lambda_i^{n-2} \\ \vdots &= \vdots \\ \frac{d^{n_i-1}}{d\lambda_i^{n_i-1}} e^{\lambda_i t} &= (n_i-1)! \gamma_{n_i-1}(t) + \cdots \\ &+ (n-1)(n-2) \cdots (n-n_i) \gamma_{n-1}(t) \lambda_i^{n-n_i-1} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.135)$$

**Exemple 3.7.** Considérons la matrice  $\mathbf{A}$  suivante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

Le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$  vaut:

$$\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}) = \det \left( \begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s+5 \end{bmatrix} \right) = (s-1)(s+5) \quad (3.137)$$

Les deux valeurs propres  $\lambda_1 = 1$  et  $\lambda_2 = -5$  de  $\mathbf{A}$  de dimension  $n = 2$  sont distinctes. L'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton pour calculer  $e^{\mathbf{A}t}$  conduit à l'expression suivante:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \mathbf{A}^k = \gamma_0(t) \mathbb{I} + \gamma_1(t) \mathbf{A} \quad (3.138)$$

<sup>1</sup>[https://fr.wikipedia.org/wiki/Alexandre-Théophile\\_Vandermonde](https://fr.wikipedia.org/wiki/Alexandre-Théophile_Vandermonde)

Les deux fonctions  $\gamma_0(t)$  et  $\gamma_1(t)$  sont les solutions du système suivant:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_1^k \Leftrightarrow e^t = \gamma_0(t) + \gamma_1(t) \\ e^{\lambda_2 t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_2^k \Leftrightarrow e^{-5t} = \gamma_0(t) - 5\gamma_1(t) \end{cases} \quad (3.139)$$

Soit:

$$\begin{bmatrix} e^t \\ e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

Après inversion de cette égalité, il vient:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{-5t} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_0(t) = \frac{1}{6} (5e^t + e^{-5t}) \\ \gamma_1(t) = \frac{1}{6} (e^t - e^{-5t}) \end{cases} \end{aligned} \quad (3.141)$$

Et:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \gamma_0(t)\mathbb{I} + \gamma_1(t)\mathbf{A} = \frac{1}{6} \left( \begin{bmatrix} \gamma_0(t) & 0 \\ 0 & \gamma_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(t) & 2\gamma_1(t) \\ 0 & -5\gamma_1(t) \end{bmatrix} \right) \\ \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) + \gamma_1(t) & 2\gamma_1(t) \\ 0 & \gamma_0(t) - 5\gamma_1(t) \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t} &= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 6e^t & 2e^t - 2e^{-5t} \\ 0 & 6e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-5t} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.142)$$

■

**Exemple 3.8.** Considérons la matrice  $\mathbf{A}$  suivante où  $b$  est une constante réelle:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \quad (3.143)$$

Le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$  vaut:

$$\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}) = \det \left( \begin{bmatrix} s & -b \\ b & s \end{bmatrix} \right) = s^2 + b^2 = (s - jb)(s + jb) \quad (3.144)$$

Les deux valeurs propres  $\lambda_1 = jb$  et  $\lambda_2 = -jb$  de  $\mathbf{A}$  de dimension  $n = 2$  sont distinctes. L'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton pour calculer  $e^{\mathbf{A}t}$  conduit à l'expression suivante:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \mathbf{A}^k = \gamma_0(t)\mathbb{I} + \gamma_1(t)\mathbf{A} \quad (3.145)$$

Les deux fonctions  $\gamma_0(t)$  et  $\gamma_1(t)$  sont les solutions du système suivant:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_1^k \Leftrightarrow e^{jbt} = \gamma_0(t) + jb\gamma_1(t) \\ e^{\lambda_2 t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_2^k \Leftrightarrow e^{-jbt} = \gamma_0(t) - jb\gamma_1(t) \end{cases} \quad (3.146)$$

Soit:

$$\begin{bmatrix} e^{jbt} \\ e^{-jbt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & jb \\ 1 & -jb \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.147)$$

Après inversion de cette égalité, il vient:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} &= -\frac{1}{2jb} \begin{bmatrix} -jb & -jb \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{jbt} \\ e^{-jbt} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_0(t) = -\frac{1}{2jb} (-jbe^{jbt} - jbe^{-jbt}) = \cos(bt) \\ \gamma_1(t) = -\frac{1}{2jb} (-e^{jbt} + e^{-jbt}) = \frac{\sin(bt)}{b} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.148)$$

Et:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \gamma_0(t)\mathbb{I} + \gamma_1(t)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \gamma_0(t) & 0 \\ 0 & \gamma_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b\gamma_1(t) \\ -b\gamma_1(t) & 0 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t} &= \begin{bmatrix} \gamma_0(t) & b\gamma_1(t) \\ -b\gamma_1(t) & \gamma_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.149)$$

■

**Exemple 3.9.** Considérons la matrice  $\mathbf{A}$  suivante (il s'agit de la matrice  $\mathbf{A}$  associée à un système du deuxième ordre de pulsation naturelle  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\zeta$ ):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \quad (3.150)$$

Lorsque  $\zeta \neq 1$  les  $n = 2$  valeurs propres la matrice  $\mathbf{A}$  sont distinctes et l'expression (3.129) conduit à l'expression suivante de l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{A}t$ , où  $\mathbb{I}$  est ici la matrice identité de dimension  $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \gamma_0(t)\mathbb{I} + \gamma_1(t)\mathbf{A} \\ \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t} &= \gamma_0(t) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma_1(t) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t} &= \begin{bmatrix} \gamma_0(t) & \gamma_1(t) \\ -\omega_n^2\gamma_1(t) & \gamma_0(t) - 2\zeta\omega_n\gamma_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.151)$$

Les 2 fonctions  $\gamma_k(t)$  sont les solutions du système suivant:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \gamma_0(t) + \gamma_1(t)\lambda_1 \\ e^{\lambda_2 t} = \gamma_0(t) + \gamma_1(t)\lambda_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} \quad (3.152)$$

Après inversion de cette égalité, il vient:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -\lambda_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} \\ e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \end{bmatrix} \quad (3.153)$$

Dans le cas où le coefficient d'amortissement  $\zeta$  est inférieur à l'unité ( $0 \leq \zeta < 1$ ), les 2 valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la matrice  $\mathbf{A}$  (i.e. les pôles de la fonction de transfert) sont les suivantes:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \omega_n \left( -\zeta \pm j\sqrt{1 - \zeta^2} \right) = a \pm jb = \omega_n e^{j\Phi} \\ \text{où} \quad \begin{cases} a = -\zeta\omega_n \\ b = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} \\ \cos(\Phi) = -\zeta \\ \sin(\Phi) = \sqrt{1 - \zeta^2} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.154)$$

Dans ces conditions, les fonctions  $\gamma_k(t)$  ont les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{-2jb} \begin{bmatrix} \omega_n e^{-j\Phi} e^{(a+jb)t} - \omega_n e^{j\Phi} e^{(a-jb)t} \\ e^{(a-jb)t} - e^{(a+jb)t} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} &= \frac{1}{-2jb} \begin{bmatrix} \omega_n e^{at} (e^{j(bt-\Phi)} - e^{-j(bt-\Phi)}) \\ e^{at} (e^{-jbt} - e^{jbt}) \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} &= \frac{e^{at}}{b} \begin{bmatrix} -\omega_n \sin(bt - \Phi) \\ \sin(bt) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.155)$$

En utilisant les expressions de  $a$  et de  $b$ , il vient finalement:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \end{bmatrix} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \begin{bmatrix} -\omega_n \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} - \Phi) \\ \sin(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}) \end{bmatrix} \quad (3.156)$$

■

**Exemple 3.10.** Considérons la matrice  $\mathbf{A}$  suivante:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

Le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$  est le suivant:

$$\chi_A(\lambda) := \det(\lambda \mathbb{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \quad (3.158)$$

Les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont  $\lambda_1 = 1$  de multiplicité  $n_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 2$  de multiplicité  $n_2 = 1$ .

L'utilisation du théorème de Cayley-Hamilton pour calculer  $e^{\mathbf{A}t}$  conduit à l'expression suivante:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \mathbf{A}^k = \gamma_0(t) \mathbb{I} + \gamma_1(t) \mathbf{A} + \gamma_2(t) \mathbf{A}^2 \quad (3.159)$$

Malheureusement comme  $\lambda_1 = 1$  est une valeur propre double nous ne pouvons écrire que 2 équations pour former la matrice de Vandermonde:

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_1^k \Leftrightarrow e^t = \gamma_0(t) + \gamma_1(t) + \gamma_2(t) \\ e^{\lambda_2 t} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_2^k \Leftrightarrow e^{2t} = \gamma_0(t) + 2\gamma_1(t) + 4\gamma_2(t) \end{cases} \quad (3.160)$$

Afin d'obtenir un système carré inversible on ajoute une équation obtenue en dérivant l'expression de  $e^{\lambda_1 t}$  par rapport à  $\lambda_1$ :

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} &= \gamma_0(t) + \gamma_1(t) \lambda_1 + \gamma_2(t) \lambda_1^2 \\ \Rightarrow \frac{d}{d\lambda_1} e^{\lambda_1 t} &= t e^{\lambda_1 t} = \gamma_1(t) + 2\gamma_2(t) \lambda_1 \end{aligned} \quad (3.161)$$

Soit en utilisant la fait que  $\lambda_1 = 1$ :

$$t e^t = \gamma_1(t) + 2\gamma_2(t) \quad (3.162)$$

En écrivant sous forme matricielle (3.160) et (3.162) nous obtenons un système carré (autant d'équations que d'inconnues) et inversible:

$$\begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ te^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

Après inversion il vient:

$$\begin{bmatrix} \gamma_0(t) \\ \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ te^t \end{bmatrix} \quad (3.164)$$

Soit:

$$\begin{cases} \gamma_0(t) = e^{2t} - 2te^t \\ \gamma_1(t) = 2e^t - 2e^{2t} + 3te^t = -2e^{2t} + (2 + 3t)e^t \\ \gamma_2(t) = -e^t + e^{2t} - te^t = e^{2t} - (1 + t)e^t \end{cases} \quad (3.165)$$

Et par conséquent:

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \gamma_0(t)\mathbb{I} + \gamma_1(t)\mathbf{A} + \gamma_2(t)\mathbf{A}^2 \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_0(t) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_0(t) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_0(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_1(t) & 0 & \gamma_1(t) \\ -\gamma_1(t) & 2\gamma_1(t) & \gamma_1(t) \\ \gamma_1(t) & -\gamma_1(t) & \gamma_1(t) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 2\gamma_2(t) & -\gamma_2(t) & 2\gamma_2(t) \\ -2\gamma_2(t) & 3\gamma_2(t) & 2\gamma_2(t) \\ 3\gamma_2(t) & -3\gamma_2(t) & \gamma_2(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{2t} - te^t & (1 + t)e^t - e^{2t} & te^t \\ -te^t & (1 + t)e^t & te^t \\ e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} & e^t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.166)$$

■

### 3.4.6 Jordanisation

Lorsqu'il n'existe pas  $n_i$  vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre  $\lambda_i$  de multiplicité  $n_i$  alors la matrice  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$  n'est pas diagonale mais bloc-diagonale:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (3.167)$$

Comme précédemment nous pouvons établir que:

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}e^{\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{P}^{-1} \quad (3.168)$$

Où:

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{A}t} &= e \begin{bmatrix} \mathbf{D}t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}t \end{bmatrix} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{bmatrix} \mathbf{D}t & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}t \end{bmatrix}^k \\
 &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{D}t)^k & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{J}t)^k \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e^{\mathbf{D}t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{J}t} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.169}$$

- La matrice  $\mathbf{D}$  est une matrice diagonale constituée à partir des valeurs propres de  $\mathbf{A}$  dont la multiplicité est égale à la dimension du sous espace propre associé à la valeur propre. Diverses techniques pour calculer  $e^{\mathbf{D}t}$  ont été vues dans les paragraphes précédents.
- La matrice  $\mathbf{J}$  est une matrice bloc diagonale composée de blocs de Jordan, notés  $\mathbf{J}_i$ .

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \mathbf{J}_i \end{bmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}_1 t} & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & e^{\mathbf{J}_i t} \end{bmatrix} \tag{3.170}$$

Chaque bloc de Jordan  $\mathbf{J}_i$  est associé à une valeur propre  $\lambda_i$  dont la multiplicité  $n_i$  n'est pas égale à la dimension du sous espace propre associé.

Nous allons expliciter dans ce paragraphe comment calculer  $e^{\mathbf{J}_i t}$ .

- Si  $\lambda_i$  est une valeur propre réelle, le bloc de Jordan  $\mathbf{J}_i$  associé à  $\lambda_i$  est une matrice carrée de dimension  $n_i \times n_i$  qui a la structure suivante:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix} = \lambda_i \mathbb{I}_{n_i} + \mathbf{N} \tag{3.171}$$

La matrice  $\mathbf{N}$  est une matrice nilpotente d'ordre  $n_i$  et qui de manière évidente commute avec  $\lambda_i \mathbb{I}_{n_i}$ . Par conséquent l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{J}_i$  est la suivante:

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{J}_i t} &= e^{\lambda_i \mathbb{I}_{n_i} t} e^{\mathbf{N}t} \\
 &\Leftrightarrow e^{\mathbf{J}_i t} = e^{\lambda_i t} \left( \mathbb{I}_{n_i} + \mathbf{N} \frac{t}{1!} + \dots + \mathbf{N}^{n_i-1} \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \right)
 \end{aligned} \tag{3.172}$$

- Si  $\lambda_i$  est une valeur propre complexe, notée  $a+jb$ , alors la valeur conjuguée de  $\lambda_i$  est aussi une valeur propre de  $\mathbf{A}$ . Le bloc de Jordan  $\mathbf{J}_i$  associé à  $\lambda_i$

et à sa valeur conjuguée est une matrice carrée de dimension  $2n_i \times 2n_i$  qui a la structure suivante:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_i & \mathbb{I} & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & \mathbb{I} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{\Lambda}_i \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathbf{\Lambda}_i = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \\ \mathbb{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (3.173)$$

Le bloc de Jordan peut se réécrire sous la forme suivante:

$$\mathbf{J}_i = a\mathbb{I}_{2n_i} + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \mathbf{N} \quad (3.174)$$

La matrice  $\mathbf{N}$  est une matrice nilpotente d'ordre  $2n_i$  et l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{J}_i$  est la suivante:

$$e^{\mathbf{J}_i t} = e^{at} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(bt) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}(bt) \end{bmatrix} \left( \mathbb{I}_{2n_i} + \mathbf{N} \frac{t}{1!} + \cdots + \mathbf{N}^{n_i-1} \frac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!} \right) \quad (3.175)$$

où la matrice  $\mathbf{R}(bt)$  est la matrice de rotation dans le plan (cf. (3.149)):

$$\mathbf{R}(bt) = e \begin{bmatrix} 0 & bt \\ -bt & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix} \quad (3.176)$$

**Exemple 3.11.** Calculer  $e^{\mathbf{J}t}$  où la matrice  $\mathbf{J}$  a l'expression suivante:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.177)$$

La matrice  $\mathbf{J}$  est sous forme de Jordan. Le calcul de  $e^{\mathbf{J}t}$  peut se faire de la manière suivante:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbb{I}_2 + \mathbf{N} \quad (3.178)$$

Comme la matrice  $\mathbf{N}$  commute avec la matrice identité et que l'indice de



nilpotence de la matrice  $\mathbf{N}$  vaut 2 nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned}
 e^{\mathbf{J}t} &= e^{\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}} e^{\mathbf{N}t} \\
 &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{2-1} \frac{\begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^k}{k!} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} (\mathbb{I}_2 + \mathbf{N}t) = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.179}$$

■

**Exemple 3.12.** Calculer  $e^{\mathbf{\Lambda}t}$  où la matrice  $\mathbf{\Lambda}$  a l'expression suivante:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.180}$$

La matrice  $\mathbf{\Lambda}$  est sous forme bloc-diagonale:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \tag{3.181}$$

Où:

$$\begin{cases} \mathbf{D} = 2 \\ \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3.182}$$

Comme la matrice  $\mathbf{\Lambda}$  est bloc diagonale  $e^{\mathbf{\Lambda}t}$  peut se calculer de la manière suivante:

$$e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{D}t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{J}t} \end{bmatrix} \tag{3.183}$$

En utilisant le résultat de l'exemple précédent nous avons:

$$\begin{cases} e^{\mathbf{D}t} = e^{2t} \\ e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \end{cases} \tag{3.184}$$

D'où:

$$e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \tag{3.185}$$

■

### 3.4.7 Décomposition de Dunford (ou de Jordan–Chevalley)

Le théorème de la décomposition de Dunford (Nelson Dunford, mathématicien américain (1906 - 1986)) indique que pour toute matrice  $\mathbf{A}$  à coefficients réels il existe un unique couple formé d'une matrice  $\mathbf{D}$  diagonalisable et d'une matrice  $\mathbf{N}$  nilpotente qui commute avec  $\mathbf{D}$  tel que:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N} \text{ et } \mathbf{D}\mathbf{N} = \mathbf{N}\mathbf{D} \quad (3.186)$$

Notons qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme  $\mathbf{A}$  dans un espace vectoriel de dimension  $n$  soit nilpotent est que son polynôme caractéristique  $\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbf{A})$  soit égal à  $\lambda^n$ .

En prenant l'exponentielle de la décomposition de Dunford il vient puisque les matrices  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{D}$  commutent:

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{D}+\mathbf{N})t} = e^{\mathbf{D}t}e^{\mathbf{N}t} \quad (3.187)$$

En notant  $k$  l'indice de nilpotence de la matrice  $\mathbf{N}$  l'expression précédente devient:

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{D}t} \left( \mathbb{I} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\mathbf{N}t)^i}{i!} \right) \quad (3.188)$$

La matrice nilpotente  $\mathbf{N}$  est nulle lorsque la dimension du sous espace propre engendré par chacune des valeurs propres de  $\mathbf{A}$  est égale à la multiplicité de la valeur propre ou de manière équivalente lorsque le polynôme minimal de  $\mathbf{A}$  a toutes ses racines simples.

Remarquons que nous pouvons écrire la relation suivante:

$$e^{\mathbf{D}t}e^{\mathbf{N}t} = e^{\mathbf{D}t} + e^{\mathbf{D}t}(e^{\mathbf{N}t} - \mathbb{I}) \quad (3.189)$$

Comme la matrice  $\mathbf{N}$  est nilpotente, son spectre est  $\{0\}$ . Par conséquent le spectre de  $e^{\mathbf{N}t}$  est  $\{1\}$ . Nous en déduisons donc que la matrice  $e^{\mathbf{D}t}(e^{\mathbf{N}t} - \mathbb{I})$  est aussi une matrice nilpotente.

En notant  $\chi_A(\lambda) := \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbf{A})$  le polynôme caractéristique de la matrice  $\mathbf{A}$ , la décomposition de Dunford s'obtient à partir d'une décomposition en éléments simples de l'inverse du polynôme caractéristique  $\chi_A(\lambda)$  [BRA13]. Soient  $\lambda_i$  les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ ,  $n_i$  la multiplicité de  $\lambda_i$  et  $r$  le nombre de valeurs propres distinctes de  $\mathbf{A}$ . Nous pouvons alors écrire:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{n_i} \\ \Rightarrow \frac{1}{\chi_A(\lambda)} &= \sum_{i=1}^r \left( \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{i,k}}{(\lambda - \lambda_i)^k} \right) = \sum_{i=1}^r \left( \sum_{k=1}^{n_i} \frac{a_{i,k}(\lambda - \lambda_i)^{n_i-k}}{(\lambda - \lambda_i)^{n_i}} \right) \end{aligned} \quad (3.190)$$

En posant  $U_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{n_i} a_{i,k}(\lambda - \lambda_i)^{n_i-k}$  où  $U_i(\lambda)$  est un polynôme de degré  $n_i - 1$ , nous obtenons:

$$\frac{1}{\chi_A(\lambda)} = \sum_{i=1}^r \frac{U_i(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)^{n_i}} \quad (3.191)$$

Puis en multipliant par  $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^r (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$  il vient:

$$1 = \sum_{i=1}^r U_i(\lambda) \prod_{i \neq j} (\lambda - \lambda_i)^{n_i} = \sum_{i=1}^r P_i(\lambda) \quad (3.192)$$

On montre alors que:

$$\mathbf{D} = \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i(\mathbf{A}) \text{ et } \mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D} \quad (3.193)$$

**Exemple 3.13.** *Considérons la matrice  $\mathbf{A}$  suivante*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.194)$$

*Le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}$  est le suivant:*

$$\chi_A(\lambda) := \det(\lambda \mathbb{I} - \mathbf{A}) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2) \quad (3.195)$$

*Les valeurs propres de  $\mathbf{A}$  sont  $\lambda_1 = 1$  de multiplicité  $n_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 2$  de multiplicité  $n_2 = 1$ . Effectuons le produit:*

$$(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbb{I}_3)(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbb{I}_3) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \mathbf{0} \quad (3.196)$$

*Par conséquent  $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$  n'est pas un polynôme annulateur de  $\mathbf{A}$ . Le polynôme minimal de  $\mathbf{A}$  est donc le polynôme caractéristique  $(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$ . Comme le polynôme minimal n'a pas toutes ses racines simples la matrice  $\mathbf{A}$  n'est pas diagonalisable. Nous allons utiliser la décomposition de Dunford pour écrire  $\mathbf{A}$  sous la forme  $\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{N}$  où  $\mathbf{D}$  est diagonalisable et où  $\mathbf{N}$  est nilpotente et commute avec  $\mathbf{D}$ .*

*Décomposons  $\frac{1}{\chi_A(\lambda)}$  en éléments simples:*

$$\frac{1}{\chi_A(\lambda)} = -\frac{1}{\lambda - 1} - \frac{1}{(\lambda - 1)^2} + \frac{1}{(\lambda - 2)} = \frac{U_1(\lambda)}{(\lambda - 1)^2} + \frac{U_2(\lambda)}{\lambda - 2} \quad (3.197)$$

*où:*

$$\begin{cases} U_1(\lambda) = -\lambda \\ U_2(\lambda) = 1 \end{cases} \quad (3.198)$$

*Puis en multipliant par  $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$  il vient:*

$$1 = \sum_{i=1}^2 U_i(\lambda) \prod_{i \neq j} (\lambda - \lambda_i)^{n_i} = P_1(\lambda) + P_2(\lambda) \quad (3.199)$$

*où:*

$$\begin{cases} P_1(\lambda) = -\lambda(\lambda - 2) \\ P_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \end{cases} \quad (3.200)$$

*Nous en déduisons que:*

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \lambda_1 P_1(\mathbf{A}) + \lambda_2 P_2(\mathbf{A}) \\ &= -\mathbf{A}(\mathbf{A} - 2\mathbb{I}_3) + 2(\mathbf{A} - \mathbb{I}_3)^2 \\ &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.201)$$

Effectuons le produit  $(\mathbf{D} - \lambda_1 \mathbb{I}_3)(\mathbf{D} - \lambda_2 \mathbb{I}_3)$ . Nous obtenons:

$$(\mathbf{D} - \lambda_1 \mathbb{I}_3)(\mathbf{D} - \lambda_2 \mathbb{I}_3) = \mathbf{0} \quad (3.202)$$

Par conséquent  $(\lambda - 1)(\lambda - 2)$  est un polynôme annulateur de  $\mathbf{D}$ . Comme le polynôme annulateur de  $\mathbf{D}$  à toutes ses racines simples la matrice  $\mathbf{D}$  est diagonalisable. De plus la matrice nilpotente  $\mathbf{N}$  est obtenue comme suit:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} - \mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.203)$$

Nous pouvons vérifier que  $\mathbf{N}$  commute avec  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{ND} = \mathbf{DN} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.204)$$

Par conséquent en tenant compte du fait que  $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$  il vient:

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{D}+\mathbf{N})t} = e^{\mathbf{D}t}e^{\mathbf{N}t} = e^{\mathbf{D}t}(\mathbb{I}_3 + \mathbf{N}t) \quad (3.205)$$

■

### 3.4.8 Utilisation de la transformée de Laplace

Dans cette méthode, on utilise d'abord la propriété suivante de la transformée de Laplace (opérateur  $\mathcal{L}[\ ]$ ) puis on trouve l'original de l'expression obtenue en utilisant par exemple une table de transformées inverses ou la formule de Mellin-Fourier. En désignant par  $\mathbb{I}$  la matrice identité nous avons:

$$\mathcal{L}[e^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}] \quad (3.206)$$

La matrice  $(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}$  s'appelle la matrice résolvante de  $\mathbf{A}$  et la matrice  $e^{\mathbf{A}t}$  la matrice de transition. Nous supposons par la suite que  $\mathbf{A}$  est une matrice carrée de dimension  $n \times n$ .

Remarquons tout d'abord que la solution de l'équation d'état (3.52) peut aussi être obtenue à l'aide de la transformée de Laplace. En effet, en prenant la transformée de Laplace de  $\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t)$  dans le cas général où les conditions initiales notées  $\underline{x}(0)$  ne sont pas nulles il vient:

$$\begin{aligned} s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) &= \mathbf{A}\underline{X}(s) + \mathbf{B}\underline{U}(s) \\ \Leftrightarrow (s\mathbb{I} - \mathbf{A})\underline{X}(s) &= \underline{x}(0) + \mathbf{B}\underline{U}(s) \\ \Leftrightarrow \underline{X}(s) &= (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\underline{x}(0) + (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\underline{U}(s) \end{aligned} \quad (3.207)$$

Soit, en prenant la transformée de Laplace inverse et en se souvenant que la transformée de Laplace inverse d'un produit simple est un produit de convolution (noté  $*$ ) il vient:

$$\underline{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\underline{x}(0) + e^{\mathbf{A}t} * \mathbf{B}\underline{u}(t) = e^{\mathbf{A}t}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\underline{u}(\tau)d\tau \quad (3.208)$$

Il est possible de calculer la matrice  $(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}$  par l'algorithme Faddeev (Dmitrii Konstantinovitch Faddeev, 1907 - 1989, est un mathématicien russe) appelé aussi algorithme de Leverrier-Souriau. Il s'agit d'une modification d'un algorithme proposé par U.J.J. Leverrier (Urbain Jean Joseph Le Verrier, 1811 - 1877, est un astronome et mathématicien français spécialisé en mécanique céleste, découvreur de la planète Neptune et fondateur de la météorologie moderne française <sup>2</sup>). Écrivons la matrice résolvante de  $\mathbf{A}$  en fonction de son polynôme caractéristique  $\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})$  sous la forme suivante:

$$(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\mathbf{N}(s)}{\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})} = \frac{\mathbf{F}_0 s^{n-1} + \mathbf{F}_1 s^{n-2} + \dots + \mathbf{F}_{n-1}}{s^n - d_1 s^{n-1} - \dots - d_n} \quad (3.209)$$

où la transposée de la comatrice  $\mathbf{N}(s)$  est une matrice polynomiale en  $s$  de degrés  $n - 1$  composée des matrices constantes  $\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_{n-1}$  de dimension  $n \times n$ .

L'algorithme de Faddeev-Leverrier indique que les  $n$  matrices  $\mathbf{F}_k$  et les coefficients  $d_k$  en (3.209) peuvent être calculés récursivement comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_0 = \mathbb{I} \\ d_1 = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_0) \quad \text{et } \mathbf{F}_1 = \mathbf{A}\mathbf{F}_0 - d_1\mathbb{I} \\ d_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_1) \quad \text{et } \mathbf{F}_2 = \mathbf{A}\mathbf{F}_1 - d_2\mathbb{I} \\ \vdots \\ d_k = \frac{1}{k} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_{k-1}) \quad \text{et } \mathbf{F}_k = \mathbf{A}\mathbf{F}_{k-1} - d_k\mathbb{I} \\ \vdots \\ d_n = \frac{1}{n} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_{n-1}) \\ \text{et } \det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}) = s^n - d_1 s^{n-1} - \dots - d_n \end{array} \right. \quad (3.210)$$

Le point de départ de l'algorithme de Faddeev-Leverrier consiste à comparer les coefficients des termes en  $s$  des polynômes qui apparaissent dans l'égalité suivante et qui est déduite de (3.209):

$$(s\mathbb{I} - \mathbf{A})(\mathbf{F}_0 s^{n-1} + \mathbf{F}_1 s^{n-2} + \dots + \mathbf{F}_{n-1}) = \mathbb{I}(s^n - d_1 s^{n-1} - \dots - d_n) \quad (3.211)$$

A partir de cette égalité nous obtenons immédiatement les relations sur les matrices  $\mathbf{F}_k$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_0 = \mathbb{I} \\ \mathbf{F}_1 = \mathbf{A}\mathbf{F}_0 - d_1\mathbb{I} \\ \mathbf{F}_2 = \mathbf{A}\mathbf{F}_1 - d_2\mathbb{I} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_k = \mathbf{A}\mathbf{F}_{k-1} - d_k\mathbb{I} \end{array} \right. \quad (3.212)$$

le reste de la démonstration peut être trouvé dans le papier de Shui-Hung Hou <sup>3</sup>.

Une fois que l'expression de  $(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}$  est connue il ne reste plus qu'à calculer la transformée de Laplace inverse de chacun des termes de cette matrice pour obtenir  $e^{\mathbf{A}t}$  en utilisant (3.206).

<sup>2</sup>[https://fr.wikipedia.org/wiki/Urbain\\_Le\\_Verrier](https://fr.wikipedia.org/wiki/Urbain_Le_Verrier)

<sup>3</sup>Shui-Hung Hou, A Simple Proof of the Leverrier-Faddeev Characteristic Polynomial Algorithm, SIAM Review, Vol. 40, No. 3 (Sep., 1998), pp. 706-709

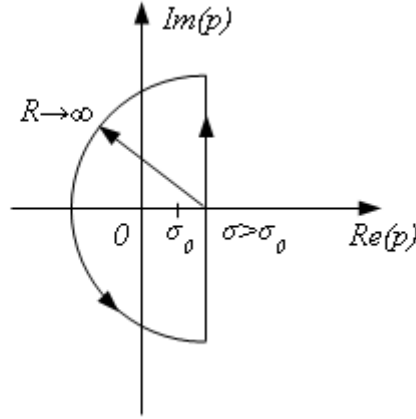


Figure 3.7: Contour de Bromwich

La formule générale d'inversion de la transformée de Laplace est donnée par la formule de Mellin-Fourier suivante, où  $\sigma$  est une constante réelle positive supérieure ou égale à l'abscisse de convergence  $\sigma_0$  de  $x(t)$  pour laquelle la transformée de Laplace  $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$  a un sens (i.e. peut être calculée):

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds \quad \forall t \geq 0 \quad (3.213)$$

Dans le cas où  $X(s)$  est une fraction rationnelle (et qui ne comporte donc pas de termes en  $e^{-st_0}$  traduisant un retard temporel) dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur, l'intégrale précédente pour les valeurs positives du temps  $t$  (i.e. signal causal) peut s'évaluer en utilisant le théorème des résidus sur un contour spécifique appelé contour de Bromwich. Ce contour est constitué d'une droite d'abscisse  $\sigma$  laissant sur sa gauche tous les pôles de  $X(s)$  et d'un demi cercle situé à gauche de la droite et dont le rayon  $R$  tend vers l'infini comme indiqué sur la figure 3.7.

L'application du théorème des résidus sur ce contour (cf. un cours sur les fonctions d'une variable complexe) conduit alors à l'expression suivante de  $x(t)$ , original de  $X(s)$ :

$$x(t) = \sum_{\text{pôles de } X(s)} \text{Res} [X(s)e^{st}] \quad \forall t \geq 0 \quad (3.214)$$

Si  $\lambda_k$  est un pôle de  $X(s)$  de multiplicité  $n_k$ , alors le résidu de  $X(s)e^{st}$  en ce pôle est donné par la relation suivante:

$$\text{Res}_{s=\lambda_k} [X(s)e^{st}] = \frac{1}{(n_k - 1)!} \left. \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} (s - \lambda_k)^{n_k} X(s)e^{st} \right|_{s=\lambda_k} \quad (3.215)$$

De manière équivalente si la matrice résolvante de  $\mathbf{A}$  est décomposée comme  $\frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)}$  où le degré de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$  est strictement inférieur à celui du polynôme  $\Psi(s) = \prod_k (s - \lambda_k)^{n_k}$  alors la formule de Mellin-Fourier donne

l'expression suivante pour  $e^{\mathbf{A}t}$ :

$$\begin{aligned} (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} = \frac{\mathbf{N}(s)}{\prod_k (s - \lambda_k)^{n_k}} \\ \Rightarrow e^{\mathbf{A}t} &= \sum_k \frac{1}{(n_k - 1)!} \frac{d^{n_k - 1}}{ds^{n_k - 1}} (s - \lambda_k)^{n_k} \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} e^{st} \Big|_{s=\lambda_k} \end{aligned} \quad (3.216)$$

Pour les valeurs négatives du temps  $t$ , le contour est constitué par la droite d'abscisse  $\sigma$  et d'un demi cercle choisi du coté droit de l'axe réel. Comme  $X(s)$  est analytique à l'intérieur de ce contour, l'intégrale de Mellin-Fourier est nulle et par conséquent  $x(t) = 0 \ \forall t < 0$ . Dans le cas où la droite constituant le contour laisse sur sa droite tous les pôles de  $X(s)$ , le résultat est un signal anti-causal, i.e. un signal nul pour  $t > 0$ .

**Exemple 3.14.** Calculer l'original de la fraction rationnelle suivante:

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{(s + 1)^3} \quad (3.217)$$

Cette fraction rationnelle présente un pôle  $\lambda_1 = -1$  de multiplicité  $n_1 = 3$ . L'application de la formule de Mellin-Fourier et du théorème des résidus conduit à l'expression suivante de la fonction  $f(t)$ , original de  $F(s)$ :

$$f(t) = \text{Res} [F(s)e^{st}]_{s=-1} = \frac{1}{(3-1)!} \frac{d^{3-1}}{ds^{3-1}} (s+1)^3 F(s)e^{st} \Big|_{s=-1} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.218)$$

Or:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (s+1)^3 F(s)e^{st} &= (2s+2)e^{st} + t(s^2+2s+3)e^{st} \\ \Rightarrow \frac{d^2}{ds^2} (s+1)^3 F(s)e^{st} &= 2e^{st} + 2t(2s+2)e^{st} + t^2(s^2+2s+3)e^{st} \\ \Rightarrow \frac{d^2}{ds^2} (s+1)^3 F(s)e^{st} \Big|_{s=-1} &= 2e^{-t} + 2t^2e^{-t} \end{aligned} \quad (3.219)$$

Il vient finalement:

$$f(t) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} (s+1)^3 F(s)e^{st} \Big|_{s=-1} = e^{-t} + t^2e^{-t} = (1+t^2)e^{-t} \quad \forall t \geq 0 \quad (3.220)$$

■

**Exemple 3.15.** Calculer  $e^{\mathbf{A}t}$ . Nous reprenons l'exemple où  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Comme ici  $n = 2$  la méthode de Faddeev conduit à:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0 = \mathbb{I} \\ d_1 = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_0) = \text{tr}(\mathbf{A}) = 0 \text{ et } \mathbf{F}_1 = \mathbf{A}\mathbf{F}_0 - d_1\mathbb{I} = \mathbf{A} \\ d_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_1) = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}^2) = 0 \\ \text{et } \det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}) = s^2 - d_1s - d_2 = s^2 \end{cases} \quad (3.221)$$

D'où:

$$(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})} (\mathbf{F}_0s + \mathbf{F}_1) = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \quad (3.222)$$

L'application de la formule de Mellin-Fourier et du théorème des résidus permet de calculer les originaux de  $1/s$  et  $1/s^2$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] &= \text{Res} \left[ \frac{1}{s} e^{st} \right]_{s=0} = \frac{1}{(1-1)!} \frac{d^{1-1}}{ds^{1-1}} s^1 e^{st} \Big|_{s=0} = e^{st} \Big|_{s=0} = 1 \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s^2} \right] &= \text{Res} \left[ \frac{1}{s^2} e^{st} \right]_{s=0} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} s^2 \frac{1}{s^2} e^{st} \Big|_{s=0} = t e^{st} \Big|_{s=0} = t\end{aligned}\quad (3.223)$$

L'utilisation de la relation (3.206) conduit finalement à:

$$e \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^t = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Gamma(t) \quad (3.224)$$

La présence de l'échelon unité  $\Gamma(t)$  est due au fait que la transformée de Laplace est utilisée pour l'étude de signaux causaux définis pour  $t \geq 0$ . De fait, pour  $t \geq 0$ , les expressions (3.103) et (3.224) sont équivalentes.

De manière équivalente la matrice résolvante de  $\mathbf{A}$  peut être décomposée comme  $\frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)}$ . Nous avons vu en effet que:

$$(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad (3.225)$$

L'application de la formule de Mellin-Fourier et du théorème des résidus conduit à l'expression suivante de  $e^{\mathbf{A}t}$ :

$$\begin{aligned}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} \\ \Rightarrow e^{\mathbf{A}t} &= \sum_k \frac{1}{(n_k-1)!} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} (s - \lambda_k)^{n_k} \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} e^{st} \Big|_{s=\lambda_k} \\ &= \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{ds^{2-1}} s^2 \frac{1}{s^2} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} e^{st} \Big|_{s=0} \\ &= \frac{d}{ds} \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} e^{st} \Big|_{s=0} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{st} \Big|_{s=0} + \begin{bmatrix} s & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} t e^{st} \Big|_{s=0} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (3.226)$$

■

**Exemple 3.16.** Calculer  $e^{\mathbf{A}t}$ . Nous reprenons l'exemple où  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ .

Comme ici  $n = 2$  la méthode de Faddeev conduit à:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0 = \mathbb{I} \\ d_1 = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_0) = -4 \text{ et } \mathbf{F}_1 = \mathbf{A}\mathbf{F}_0 - d_1\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ d_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_1) = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right) = 5 \\ \text{et } \det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}) = s^2 - d_1s - d_2 = s^2 + 4s - 5 = (s-1)(s+5) \end{cases} \quad (3.227)$$



D'où:

$$\begin{aligned} (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})} (\mathbf{F}_0 s + \mathbf{F}_1) = \frac{1}{(s-1)(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s-1)(s+5)} \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.228)$$

L'utilisation de la formule d'inversion de Mellin-Fourier permet de connaître l'original de chacune des transformées de Laplace qui apparaît dans la matrice de transfert:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-1} \right] = e^t \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s+5} \right] = e^{-5t} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2}{(s-1)(s+5)} \right] = 2 \left( \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{6}e^{-5t} \right) = \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-5t} \end{cases} \quad (3.229)$$

L'utilisation de la relation (3.206) conduit finalement à:

$$\begin{aligned} e^{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} t} &= \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{2}{(s-1)(s+5)} \\ 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow e^{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} t} &= \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-5t} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \Gamma(t) \end{aligned} \quad (3.230)$$

La présence de l'échelon unité  $\Gamma(t)$  est due au fait que la transformée de Laplace est utilisée pour l'étude de signaux causaux définis pour  $t \geq 0$ . De fait, pour  $t \geq 0$ , les expressions (3.230) et (3.142) sont identiques.

De manière équivalente la matrice résolvante de  $\mathbf{A}$  peut être décomposée comme  $\frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)}$ . Nous avons vu en effet que:

$$(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} \quad (3.231)$$

L'application de la formule de Mellin-Fourier et du théorème des résidus conduit à l'expression suivante de  $e^{\mathbf{A}t}$ :

$$\begin{aligned} (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} \\ \Rightarrow e^{\mathbf{A}t} &= \sum_k \frac{1}{(n_k-1)!} \frac{d^{n_k-1}}{ds^{n_k-1}} (s - \lambda_k)^{n_k} \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} e^{st} \Big|_{s=\lambda_k} \\ &= (s-1) \frac{1}{(s-1)(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} e^{st} \Big|_{s=1} \\ &\quad + (s+5) \frac{1}{(s-1)(s+5)} \begin{bmatrix} s+5 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix} e^{st} \Big|_{s=-5} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} e^{st} \Big|_{s=1} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} e^{st} \Big|_{s=-5} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{3}e^t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{3}e^{-5t} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^t & \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-5t} \\ 0 & e^{-5t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.232)$$

■

**Exemple 3.17.** Calculer  $e^{\mathbf{D}t}$ . Nous reprenons l'exemple où  $\mathbf{D}$  a l'expression suivante:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.233)$$

Il vient:

$$(s\mathbb{I} - \mathbf{D})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-2} & \frac{-1}{(s-1)(s-2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0 \\ \frac{1}{(s-1)(s-2)} & \frac{-1}{(s-1)(s-2)} & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} \quad (3.234)$$

L'utilisation de la formule d'inversion de Mellin-Fourier permet de connaître l'original de chacune des transformées de Laplace qui apparaît dans la matrice de transfert:

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-2} \right] = e^{2t} \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s-1} \right] = e^t \\ \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{(s-1)(s-2)} \right] = e^{2t} - e^t \end{cases} \quad (3.235)$$

L'utilisation de la relation (3.206) conduit finalement à:

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^t - e^{2t} & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ e^{2t} - e^t & e^t - e^{2t} & e^t \end{bmatrix} \Gamma(t) \quad (3.236)$$

■

**Exemple 3.18.** Calculer  $e^{\mathbf{A}t}$ . La matrice  $\mathbf{A}$  est celle associée à un système du deuxième ordre de pulsation naturelle  $\omega_n$  et de coefficient d'amortissement  $\zeta$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \quad (3.237)$$

La méthode de Faddeev conduit à l'expression suivante de  $(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}$ :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0 = \mathbb{I} \\ d_1 = \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_0) = -2\zeta\omega_n \text{ et } \mathbf{F}_1 = \mathbf{A}\mathbf{F}_0 - d_1\mathbb{I} = \begin{bmatrix} 2\zeta\omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & 0 \end{bmatrix} \\ d_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{F}_1) = \frac{1}{2} \text{tr} \left( \begin{bmatrix} -\omega_n^2 & 0 \\ -4\zeta\omega_n^3 & -\omega_n^2 \end{bmatrix} \right) = -\omega_n^2 \\ \text{et } \det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}) = s^2 - d_1s - d_2 = s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2 \end{cases} \quad (3.238)$$

D'où:

$$\begin{aligned} (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})} (\mathbf{F}_0s + \mathbf{F}_1) \\ \Leftrightarrow (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2} \begin{bmatrix} s + 2\zeta\omega_n & 1 \\ -\omega_n^2 & s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.239)$$

Dans le cas où le coefficient d'amortissement  $\zeta$  est inférieur à l'unité, les 2 racines de  $s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2$  sont données par les relations (3.154) que nous

rappelons ci-après:

$$\lambda_{1,2} = \omega_n \left( -\zeta \pm j\sqrt{1-\zeta^2} \right) = a \pm jb = \omega_n e^{\pm j\Phi}$$

$$\text{où } \begin{cases} a = -\zeta\omega_n \\ b = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ \cos(\Phi) = -\zeta \\ \sin(\Phi) = \sqrt{1-\zeta^2} \end{cases}$$

De sorte que:

$$(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s-(\lambda_1+\lambda_2)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} & \frac{1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} \\ \frac{-\omega_n^2}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} & \frac{s}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} \end{bmatrix} \quad (3.240)$$

Nous poserons, sans perte de généralité, que l'exponentielle  $e^{\mathbf{A}t}$  a l'expression suivante:

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ -\omega_n^2 a_{12}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (3.241)$$

L'utilisation de la formule d'inversion de Mellin-Fourier conduit à l'expression suivante du coefficient  $a_{11}(t)$  de la matrice  $e^{\mathbf{A}t}$ :

$$\begin{aligned} a_{11}(t) &= \sum_{\text{residus}} \frac{s-(\lambda_1+\lambda_2)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} e^{st} = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{\lambda_1 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ \Leftrightarrow a_{11}(t) &= \frac{\omega_n e^{-j\Phi} e^{(a+jb)t} - \omega_n e^{j\Phi} e^{(a-jb)t}}{-2jb} \\ \Leftrightarrow a_{11}(t) &= \omega_n e^{at} \frac{e^{j(bt-\Phi)} - e^{-j(bt-\Phi)}}{-2jb} \\ \Leftrightarrow a_{11}(t) &= -\frac{\omega_n e^{at}}{b} \sin(bt - \Phi) \end{aligned} \quad (3.242)$$

Il vient finalement en utilisation les expressions de  $a$  et  $b$ :

$$a_{11}(t) = -\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} - \Phi\right) \quad (3.243)$$

En utilisant à nouveau la formule d'inversion de Mellin-Fourier nous obtenons pour le coefficient  $a_{12}(t)$  de la matrice  $e^{\mathbf{A}t}$ :

$$\begin{aligned} a_{12}(t) &= \sum_{\text{residus}} \frac{1}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} e^{st} = \frac{e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \Leftrightarrow a_{12}(t) &= \frac{e^{(a+jb)t} - e^{(a-jb)t}}{2jb} \\ \Leftrightarrow a_{12}(t) &= e^{at} \frac{e^{jbt} - e^{-jbt}}{2jb} \\ \Leftrightarrow a_{12}(t) &= \frac{e^{at}}{b} \sin(bt) \end{aligned} \quad (3.244)$$

Il vient finalement en utilisation les expressions de  $a$  et  $b$ :

$$a_{12}(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2}\right) \quad (3.245)$$

Et enfin:

$$\begin{aligned} a_{22}(t) &= \sum_{\text{residus}} \frac{s}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)} e^{st} = \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} - \frac{\lambda_2 e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ \Leftrightarrow a_{22}(t) &= \omega_n \frac{e^{j\Phi} e^{(a+jb)t} - e^{-j\Phi} e^{(a-jb)t}}{2jb} \\ \Leftrightarrow a_{22}(t) &= \omega_n e^{at} \frac{e^{j(bt+\Phi)} - e^{-j(bt+\Phi)}}{2jb} \\ \Leftrightarrow a_{22}(t) &= \frac{\omega_n e^{at}}{b} \sin(bt + \Phi) \end{aligned} \quad (3.246)$$

Il vient finalement en utilisation les expressions de  $a$  et  $b$ :

$$a_{22}(t) = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\left(\omega_n t \sqrt{1-\zeta^2} + \Phi\right) \quad (3.247)$$

On pourra vérifier que l'expression de  $a_{22}(t)$  correspond à l'expression  $\gamma_0(t) - 2\zeta\omega_n\gamma_1(t)$  obtenue en (3.151). ■

### 3.5 Calcul d'une fonction de matrice diagonalisable

Les résultats précédents peuvent se généraliser pour calculer l'expression de la matrice  $f(\mathbf{A}t)$  où  $\mathbf{A}$  est une matrice de dimension  $n \times n$  possédant  $n$  valeurs propres distinctes et  $f(x)$  une fonction du scalaire  $x$  admettant un développement en série. Dans ces conditions, en désignant par  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  les  $n$  valeurs propres distinctes de  $\mathbf{A}$ , nous obtenons les résultats suivants en utilisant soit la diagonalisation de  $\mathbf{A}$  soit le théorème de Cayley-Hamilton:

$$f(\mathbf{A}t) = \mathbf{P} \begin{bmatrix} f(\lambda_1 t) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n t) \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \mathbf{A}^k \quad (3.248)$$

où:

- en désignant par  $\underline{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres  $\lambda_i$ :

$$\mathbf{P} = [\underline{v}_1 \quad \dots \quad \underline{v}_n] \quad (3.249)$$

- les  $n$  fonctions  $\gamma_k(t)$  sont les solutions du système suivant à  $n$  inconnues:

$$\begin{cases} f(\lambda_1 t) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_1^k \\ \vdots \\ f(\lambda_n t) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(t) \lambda_n^k \end{cases} \quad (3.250)$$



## Chapitre 4

# Réalisation des systèmes

### 4.1 Introduction

Les relations entre la représentation d'état et la matrice de transfert d'un système invariant et linéaire fait appel à la théorie de la réalisation des systèmes. Plus précisément le problème de la réalisation d'un système invariant et linéaire consiste à déterminer un quadruplet  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  associé à une représentation d'état à partir d'une matrice de transfert (ou de la transformée de Laplace d'un système d'équations différentielles linéaires couplées)  $\mathbf{F}(s)$ . Le quadruplet  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  doit être construit de telle sorte que:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.1)$$

La solution à ce problème n'est pas unique et donne lieu à diverses réalisations dont les plus remarquables portent des noms spécifiques, *forme compagne de commande* et *forme modale* par exemple. La représentation d'état associée à la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  s'écrit sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) + \mathbf{D}\underline{u}(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

Nous écrirons de manière abrégée:

$$\mathbf{F}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) \quad (4.3)$$

Nous débutons ce chapitre par l'obtention de la matrice de transfert à partir de la représentation d'état. Puis le problème de la réalisation est abordé. Nous traitons d'abord le problème de la réalisation des fonctions de transfert associées aux systèmes mono-entrée et mono-sortie. Puis la réalisation des matrices de transfert est abordée.

Notons qu'une partie des travaux de Rudolf Kalman (né en 1930 à Budapest, Hongrie) ont porté sur la théorie de la réalisation des systèmes.

## 4.2 Matrice de transfert

### 4.2.1 Obtention à partir de la représentation d'état

L'objet de cette section est de calculer la matrice de transfert d'un système linéaire et invariant à partir de sa représentation d'état.

Pour cela calculons dans un premier la transformée de Laplace l'équation d'état en supposant que la condition initiale sur le vecteur d'état, notée  $\underline{x}_0$ , soit non nulle:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t) \Rightarrow s\underline{X}(s) - \underline{x}(0) = \mathbf{A}\underline{X}(s) + \mathbf{B}\underline{U}(s) \quad (4.4)$$

Soit:

$$\begin{aligned} (s\mathbb{I} - \mathbf{A}) \underline{X}(s) &= \underline{x}(0) + \mathbf{B}\underline{U}(s) \\ \Leftrightarrow \underline{X}(s) &= (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \underline{x}(0) + (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\underline{U}(s) \end{aligned} \quad (4.5)$$

De plus, la transformée de Laplace de l'équation de sortie (ou d'observation) est la suivante:

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) + \mathbf{D}\underline{u}(t) \Rightarrow \underline{Y}(s) = \mathbf{C}\underline{X}(s) + \mathbf{D}\underline{U}(s) \quad (4.6)$$

Enfin en imposant des conditions initiales nulles ( $\underline{x}_0 = \underline{0}$ ) et en remplaçant  $\underline{X}(s)$  par son expression en fonction de  $\underline{U}(s)$ , nous obtenons la matrice de transfert entre la transformée de Laplace du vecteur de sortie  $\underline{Y}(s)$  et la transformée de Laplace du vecteur d'entrée  $\underline{U}(s)$  sous la forme suivante:

$$\underline{Y}(s) = \mathbf{F}(s)\underline{U}(s) \quad (4.7)$$

Où:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.8)$$

Remarquons que le nombre de sorties du système (i.e. la taille de  $\underline{y}(t)$  et donc de  $\underline{Y}(s)$ ) est égal au nombre de lignes de  $\mathbf{F}(s)$  et que le nombre d'entrées (ou de commandes) du système (i.e. la taille de  $\underline{u}(t)$  et donc de  $\underline{U}(s)$ ) est égal au nombre de colonnes de  $\mathbf{F}(s)$ .

La matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est constituée de la somme de deux termes:

- Le terme  $\mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$  qui dépend de la variable de Laplace  $s$ ;
- La matrice  $\mathbf{D}$  qui est une matrice constante.

Nous rappelons que l'inverse de la matrice carrée  $s\mathbb{I} - \mathbf{A}$  est donnée par la relation suivante où  $\text{adj}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})$  est la transposée de la comatrice de  $s\mathbb{I} - \mathbf{A}$  (i.e. la transposée de la matrice des cofacteurs, *adjugate matrix* en anglais) et  $\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})$  le déterminant de  $s\mathbb{I} - \mathbf{A}$ :

$$(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})} \quad (4.9)$$

Comme le déterminant de  $s\mathbb{I} - \mathbf{A}$  est un polynôme en  $s$  de degré  $n$  et que les cofacteurs sont des polynômes en  $s$  de degré  $n - 1$ , il est clair que le terme  $\mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$  est une fraction rationnelle dont le numérateur est au

maximum de degré  $n - 1$  (selon l'effet de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{B}$ ) et le dénominateur de degré  $n$ . Par conséquent, l'expression  $\mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  est strictement propre (i.e. tous les polynômes qui apparaissent dans la matrice des numérateurs ont un degré strictement inférieur au polynôme dénominateur) et nous avons la relation suivante:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Et par conséquent:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}(s) = \mathbf{D} \quad (4.11)$$

Enfin il est important de remarquer que le dénominateur de la fonction de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est le déterminant de la matrice  $s\mathbb{I} - \mathbf{A}$ . Ce déterminant a pour origine le calcul de l'inverse de la matrice  $s\mathbb{I} - \mathbf{A}$ . Par conséquent les poles de la fonction de transfert  $\mathbf{F}(s)$  sont les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$ .

**Exemple 4.1.** Calculons la matrice de transfert associée au système suivant d'équations différentielles linéaires:

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) + 2\dot{y}_1(t) + 3y_1(t) + \dot{y}_2(t) + 2y_2(t) = \dot{u}_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \\ \dot{y}_1(t) + y_1(t) + 3\dot{y}_2(t) + y_2(t) = u_2(t) + u_3(t) + \dot{u}_3(t) \end{cases} \quad (4.12)$$

Il vient en prenant la transformée de Laplace de ce système d'équations différentielles avec des conditions initiales nulles:

$$\begin{bmatrix} s^2 + 2s + 3 & s + 2 \\ s + 1 & 3s + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & 1 & 1 \\ 0 & 1 & s + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Inversons dans un premier temps la matrice  $\begin{bmatrix} s^2 + 2s + 3 & s + 2 \\ s + 1 & 3s + 2 \end{bmatrix}$ :

$$\begin{bmatrix} s^2 + 2s + 3 & s + 2 \\ s + 1 & 3s + 2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4 + 10s + 7s^2 + 3s^3} \begin{bmatrix} 2 + 3s & -2 - s \\ -1 - s & 3 + 2s + s^2 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Il vient:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{F}(s) \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Où la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  du système est donnée par:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+3s^2}{4+10s+7s^2+3s^3} & \frac{2s}{4+10s+7s^2+3s^3} & \frac{-s^2}{4+10s+7s^2+3s^3} \\ \frac{-s-s^2}{4+10s+7s^2+3s^3} & \frac{2+s+s^2}{4+10s+7s^2+3s^3} & \frac{2+4s+3s^2+s^3}{4+10s+7s^2+3s^3} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

■



### 4.2.2 Non-unicité de la réalisation

Nous rappelons que la représentation d'état n'est pas unique. En effet, soit  $\mathbf{P}$  une matrice inversible et soit  $\underline{x}^*(t)$  le vecteur défini à partir du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  comme suit:

$$\underline{x}(t) = \mathbf{P}\underline{x}^*(t) \quad (4.17)$$

En utilisant la relation (1.26) où  $\Phi^{-1}(\underline{x}) = \mathbf{P}^{-1}\underline{x}$ , la représentation d'état (1.66) est transformée en la représentation d'état équivalente suivante:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}^*(t) = \mathbf{A}^*\underline{x}^*(t) + \mathbf{B}^*\underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = \mathbf{C}^*\underline{x}^*(t) + \mathbf{D}^*\underline{u}(t) \end{cases} \quad (4.18)$$

Où:

$$\begin{cases} \mathbf{A}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} \\ \mathbf{B}^* = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}^* = \mathbf{C}\mathbf{P} \\ \mathbf{D}^* = \mathbf{D} \end{cases} \quad (4.19)$$

A partir de cette représentation d'état la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est obtenue à partir de la relation (4.8) où nous remplaçons les matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  par  $\mathbf{A}^*$ ,  $\mathbf{B}^*$ ,  $\mathbf{C}^*$  et  $\mathbf{D}^*$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^*(s\mathbb{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{B}^* + \mathbf{D}^* &= \mathbf{C}\mathbf{P}(s\mathbb{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{P}(s\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}\mathbf{P}(\mathbf{P}^{-1}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \end{aligned} \quad (4.20)$$

En utilisant le fait que  $(\mathbf{XYZ})^{-1} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}^{-1}$  il vient:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^*(s\mathbb{I} - \mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{B}^* + \mathbf{D}^* &= \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nous retrouvons la même expression qu'en (4.8). En conséquence la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est indépendante de la représentation d'état.

### 4.2.3 Zéros de transmission

Soit  $\mathbf{R}(s)$  la matrice de Rosenbrock, comme proposé en 1967 par Howard H. Rosenbrock<sup>1</sup>:

$$\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Comme, d'après (4.8), la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  d'un système s'écrit  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ , nous pouvons écrire la relation suivante:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \mathbf{R}(s) &= \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.23)$$

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Rosenbrock\\_system\\_matrix](https://en.wikipedia.org/wiki/Rosenbrock_system_matrix)

Nous supposons par la suite que la matrice  $\mathbf{R}(s)$  est une matrice carrée. Du fait que  $\det \left( \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \right) = 1$  et en utilisant la propriété  $\det(\mathbf{XY}) = \det(\mathbf{X})\det(\mathbf{Y})$ , nous obtenons la propriété suivante pour la matrice de Rosenbrock  $\mathbf{R}(s)$ :

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \mathbf{R}(s) \right) &= \det \left( \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}(s) \end{bmatrix} \right) \\ \Rightarrow \det \left( \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \right) \det(\mathbf{R}(s)) &= \det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{F}(s)) \\ \Rightarrow \det(\mathbf{R}(s)) &= \det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}) \det(\mathbf{F}(s)) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Pour un système mono-entrée mono-sortie (SISO) nous avons  $\det(\mathbf{F}(s)) = F(s)$ . Par conséquent la propriété précédente se réduit comme suit:

$$\det(\mathbf{F}(s)) = F(s) \Rightarrow F(s) = \frac{\det(\mathbf{R}(s))}{\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})} \quad (4.25)$$

Pour des matrices qui ne sont pas carrées, l'inégalité de Sylvester indique que si  $\mathbf{X}$  est une matrice  $m \times n$  et  $\mathbf{Y}$  une matrice  $n \times k$ , alors nous avons:

$$\text{rank}(\mathbf{X}) + \text{rank}(\mathbf{Y}) - n \leq \text{rank}(\mathbf{XY}) \leq \min(\text{rank}(\mathbf{X}), \text{rank}(\mathbf{Y})) \quad (4.26)$$

Pour un système MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) la fonction de transfert entre l'entrée  $i$  et la sortie  $j$  est donnée par la relation suivante où  $\underline{b}_i$  est la  $i^{\text{ième}}$  colonne de  $\mathbf{B}$  et  $\underline{c}_j^T$  la  $j^{\text{ième}}$  ligne de  $\mathbf{C}$ :

$$F_{ij}(s) = \frac{\det \left( \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\underline{b}_i \\ \underline{c}_j^T & d_{ij} \end{bmatrix} \right)}{\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})} \quad (4.27)$$

Dans le cas MIMO les zéros (de transmission) de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  sont définis comme les valeurs de  $s$  qui rendent défectueux le rang *normal* de la matrice de Rosenbrock  $\mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ , c'est à dire les valeurs de  $s$  pour lesquelles le rang de  $\mathbf{R}(s)$  est inférieur à son rang *normal*. Lorsque  $\mathbf{R}(s)$  est une matrice carrée cela signifie que  $\mathbf{R}(s)$  n'est pas inversible; dans ce cas les zéros (de transmission) sont les valeurs de  $s$  telles que  $\det(\mathbf{R}(s)) = 0$ .

En notant  $z$  un zéro (de transmission) du système, il existe des conditions initiales non nulles, notées  $\underline{x}_0$  et une entrée non nulle  $u(t) = u_0 \exp^{zt}$ , de telle sorte que la réponse du système à l'entrée  $u(t)$  avec les conditions initiales  $\underline{x}_0$  soit identiquement nulle  $\forall t \geq 0$ ; les valeurs de  $\underline{x}_0$  et  $u_0$  associées au zéro  $z$  sont données par:

$$\begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}_{s=z} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (4.28)$$

Cette expression peut s'obtenir à partir de la représentation d'état  $\dot{\underline{x}} = \mathbf{A}\underline{x} + \mathbf{B}u$ ; en prenant  $\underline{x}$  et  $u(t)$  sous la forme  $\underline{x} = \underline{x}_0 \exp^{zt}$  et  $u(t) = u_0 \exp^{zt}$ ,

où  $z$  est un zéro (de transmission) du système, il vient:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \mathbf{A}\underline{x} + \mathbf{B}u \\ u(t) = u_0 \exp^{zt} \Rightarrow \underline{x}_0 z \exp^{zt} = \mathbf{A}\underline{x}_0 \exp^{zt} + \mathbf{B}u_0 \exp^{zt} \\ \underline{x} = \underline{x}_0 \exp^{zt} \end{cases} \quad (4.29)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} z\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} \exp^{zt} = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} z\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

En ce qui concerne la sortie  $y = \mathbf{C}\underline{x} + \mathbf{D}u$ , nous l'imposons identiquement nulle:

$$\begin{cases} y = \mathbf{C}\underline{x} + \mathbf{D}u = 0 \\ u(t) = u_0 \exp^{zt} \Rightarrow (\mathbf{C}\underline{x}_0 + \mathbf{D}u_0) \exp^{zt} = 0 \Rightarrow \mathbf{C}\underline{x}_0 + \mathbf{D}u_0 = 0 \\ \underline{x} = \underline{x}_0 \exp^{zt} \end{cases} \quad (4.30)$$

En regroupant les deux dernières équations nous obtenons le résultat (4.28)

:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} z\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \underline{0} \\ y = \mathbf{C}\underline{x}_0 + \mathbf{D}u_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}_{s=z} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (4.31)$$

**Exemple 4.2.** Considérons la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

1. Quels sont les zéros (de transmission) de ce système? Retrouver ce résultat à l'aide de la fonction de transfert.

Les zéros (de transmission) du système sont obtenus en utilisant la relation (4.25):

$$\det \begin{pmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{s=z} = \det \begin{pmatrix} s+7 & 12 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{s=z} = 0 \quad (4.33)$$

$$\Leftrightarrow z + 2 = 0 \Leftrightarrow z = -2$$

Ainsi  $z = -2$  est le seul zéro (de transmission) du système.

Ce résultat peut être retrouvé à l'aide de la fonction de transfert qui a pour expression:

$$F(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{s+2}{s^2+7s+12} \quad (4.34)$$

Nous retrouvons le fait que  $z = -2$  soit le seul zéro de la fonction de transfert et donc du système.

2. Quelles sont l'entrée  $u(t) \neq 0$  et les conditions initiales  $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$  qui rendent la sortie identiquement nulle?

L'entrée  $u(t) = u_0 \exp^{zt}$  et la condition initiale non nulle  $\underline{x}_0$  qui rendent la sortie identiquement nulle sont obtenues à partir de (4.28):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{s=z} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} s+7 & 12 & -1 \\ -1 & s & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}_{s=-2} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 5 & 12 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ u_0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.35)$$

La deuxième et la troisième ligne de la matrice précédente sont colinéaires ; en notant  $x_{01}$  et  $x_{02}$  les deux composantes du vecteur  $\underline{x}_0$ , il vient:

$$\begin{cases} 5x_{01} + 12x_{02} - u_0 = 0 \\ x_{01} + 2x_{02} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = 2x_{02} \\ x_{01} = -2x_{02} \end{cases} \quad (4.36)$$

Choisissons par exemple  $x_{02} = 1$ . Il vient:

$$x_{02} = 1 \Rightarrow \begin{cases} u_0 = 2 \\ x_{01} = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ u(t) = u_0 \exp^{zt} = 2 \exp^{-2t} \end{cases} \quad (4.37)$$

Par conséquent, pour les conditions initiales  $\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  et pour l'entrée  $u(t) = 2 \exp^{-2t}$  la réponse du système est identiquement nulle.

3. A partir de la fonction de transfert, déduire l'expression de l'équation différentielle reliant l'entrée  $u(t)$  à la sortie  $y(t)$  du système.

La transformée de Laplace de l'équation différentielle reliant l'entrée  $u(t)$  à la sortie  $y(t)$  du système est obtenue à partir de la fonction de transfert:

$$\begin{aligned} F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} &= \mathbf{C} (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{s+2}{s^2+7s+12} \\ \Rightarrow (s^2 + 7s + 12) Y(s) &= (s + 2) U(s) \end{aligned} \quad (4.38)$$

Soit, après inversion et en prenant des conditions initiales nulles (comme c'est toujours le cas lors du calcul d'une fonction de transfert):

$$\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 12y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t) \quad (4.39)$$

4. On place à l'entrée du système la commande  $u(t) = 2 \exp^{-2t}$ . Calculer l'expression de la sortie  $y(t)$  en supposant des conditions initiales nulles pour la sortie  $y(t)$  et ses dérivées.

Calculons la transformée de Laplace de l'équation différentielle précédente, en se plaçant dans le cas où les conditions initiales sont nulles pour  $y(t)$  mais pas pour  $u(t)$ :

$$(s^2 + 7s + 12) Y(s) = sU(s) - u_0 + 2U(s) = (s + 2)U(s) - u_0 \quad (4.40)$$

La transformée de Laplace de l'entrée  $u(t) = 2 \exp^{-2t}$  est  $U(s) = \frac{2}{s+2}$ . Il vient:

$$\begin{aligned} U(s) = \frac{2}{s+2} &\Rightarrow (s^2 + 7s + 12) Y(s) = 2 - 2 = 0 \\ &\Rightarrow Y(s) = 0 \Rightarrow y(t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

Par conséquent, la sortie  $y(t)$  est identiquement nulle  $\forall t \geq 0$  alors que l'entrée  $u(t)$  est non nulle ; le nom de zéro (de transmission) est donc bien justifié !

■

#### 4.2.4 Interprétation de la décomposition modale

Lorsque la matrice d'état  $\mathbf{A}$  est diagonalisable nous avons vu en (3.121) que  $e^{\mathbf{A}t}$  pouvait s'écrire sous la forme suivante où  $\underline{v}_i$  est un vecteur propre à droite associé à la valeur propre  $\lambda_i$  et  $\underline{w}_i$  un vecteur propre à gauche associé à la même valeur propre  $\lambda_i$ :

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n \underline{v}_i \underline{w}_i^T e^{\lambda_i t} \quad (4.42)$$

De plus nous savons vu en (3.60) que la réponse du système à une entrée  $\underline{u}(t)$  peut s'exprimer comme suit:

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}t} \underline{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \underline{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \underline{u}(t) \quad (4.43)$$

En assemblant les deux résultats précédents nous obtenons l'expression suivante pour le vecteur de sortie  $\underline{y}(t)$ :

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{C} \underline{v}_i (\underline{w}_i^T \underline{x}(0)) e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^n \mathbf{C} \underline{v}_i \int_0^t e^{\lambda_i(t-\tau)} (\underline{w}_i^T \mathbf{B}) \underline{u}(\tau) d\tau \\ + \mathbf{D} \underline{u}(t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dans le cas mono-entrée  $\mathbf{B}$  est un vecteur et par conséquent  $\underline{w}_i^T \mathbf{B}$  est un scalaire mais dans le cas multi-entrées  $\mathbf{B}$  est une matrice et par conséquent  $\underline{w}_i^T \mathbf{B}$  est aussi une matrice.

Notons que le produit  $\underline{w}_i^T \underline{x}(0)$  est un scalaire. Puisque le produit  $\underline{w}_i^T \underline{x}_0$  est un scalaire la réponse libre  $\underline{y}_L(t)$  (obtenue lorsque  $\underline{u}(t) = 0$ ) s'écrit sous la forme suivante:

$$\underline{y}_L(t) = \mathbf{C} \sum_{i=1}^n \underline{v}_i (\underline{w}_i^T \underline{x}_0) e^{\lambda_i t} = \mathbf{C} \sum_{i=1}^n (\underline{w}_i^T \underline{x}_0) \underline{v}_i e^{\lambda_i t} \quad (4.45)$$

L'intérêt de l'expression (4.44) est qu'elle met en évidence l'importance des vecteurs propres dans l'expression de la réponse  $\underline{y}(t)$ : si le produit  $\underline{w}_i^T \underline{x}_0$  est nul le mode  $\lambda_i$  ne sera jamais excité dans la réponse libre du système ; de manière similaire si le produit  $\underline{w}_i^T \mathbf{B}$  est nul le mode  $\lambda_i$  ne contribuera pas à la réponse forcée du système. Autrement dit le mode  $\lambda_i$  ne sera pas excité dans la réponse libre (respectivement forcée) lorsque la condition initiale  $\underline{x}_0$  (respectivement  $\mathbf{B}$ ) est une combinaison linéaire des vecteurs propres  $\underline{v}_j$ ,  $j \neq i$  (en effet  $\underline{v}_j$  est perpendiculaire à  $\underline{w}_i^T$  comme l'indique la relation (3.114)). Nous dirons alors que le mode  $\lambda_i$  n'est pas contrôlable.

De même si le produit  $\mathbf{C}\underline{v}_i$  est nul le mode  $\lambda_i$  n'apparaîtra pas dans le vecteur de sortie  $\underline{y}(t)$  du système. Autrement dit le mode  $\lambda_i$  ne sera pas excité dans la réponse du système lorsque  $\mathbf{C}$  est une combinaison linéaire des vecteurs propres  $\underline{w}_j^T$ ,  $j \neq i$  (en effet  $\underline{v}_j$  est perpendiculaire à  $\underline{w}_i^T$  comme l'indique la relation (3.114)). Nous dirons que le mode  $\lambda_i$  n'est pas observable.

En conséquence les couplages entre les composantes du vecteur d'entrée  $\underline{u}(t)$ , du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  et du vecteur de sortie  $\underline{y}(t)$  sont conditionnés par les vecteurs propres  $\underline{v}_i$  et  $\underline{w}_i^T$ . Nous pouvons aussi montrer que ces vecteurs conditionnent le numérateur de la fonction (ou de la matrice) de transfert  $\mathbf{F}(s)$  du système puisqu'elle peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C} (p\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{C}\underline{v}_i \underline{w}_i^T \mathbf{B}}{p - \lambda_i} + \mathbf{D} \quad (4.46)$$

Pour montrer ce résultat nous noterons  $\mathbf{\Lambda}$  la forme diagonale de la matrice diagonalisable  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Nous avons vu que les matrices de changement de base  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}^{-1}$  ont les expressions suivantes:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} \text{ où } \begin{cases} \mathbf{P} = [\underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \cdots & \underline{v}_n] \\ \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \underline{w}_2^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.48)$$

En utilisant la relation  $(\mathbf{X}\mathbf{Y})^{-1} = \mathbf{Y}^{-1}\mathbf{X}^{-1}$  valable pour toute matrice

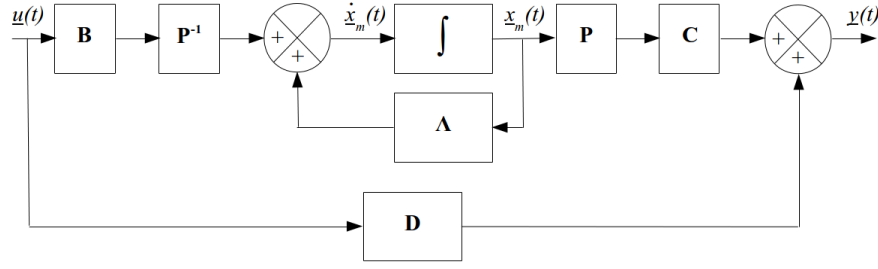


Figure 4.1: Décomposition modale d'une fonction de transfert

carrée inversible, la fonction de transfert  $\mathbf{F}(s)$  s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(s) &= \mathbf{C} (p\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \\
 &= \mathbf{C} (\mathbf{P} (p\mathbb{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) \mathbf{P}^{-1})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \\
 &= \mathbf{C}\mathbf{P} (p\mathbb{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\
 &= \mathbf{C} (\mathbf{P} (p\mathbb{I} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}) \mathbf{P}^{-1})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \\
 &= \mathbf{C}\mathbf{P} (p\mathbb{I} - \mathbf{\Lambda})^{-1} \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\
 &= [\mathbf{C}\underline{v}_1 \quad \mathbf{C}\underline{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{C}\underline{v}_n] \begin{bmatrix} \frac{1}{p-\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{p-\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \mathbf{B} \\ \underline{w}_2^T \mathbf{B} \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \mathbf{B} \end{bmatrix} + \mathbf{D} \\
 &= [\mathbf{C}\underline{v}_1 \quad \mathbf{C}\underline{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{C}\underline{v}_n] \begin{bmatrix} \frac{\underline{w}_1^T \mathbf{B}}{p-\lambda_1} \\ \frac{\underline{w}_2^T \mathbf{B}}{p-\lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{\underline{w}_n^T \mathbf{B}}{p-\lambda_n} \end{bmatrix} + \mathbf{D}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Nous obtenons finalement:

$$\mathbf{F}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{C}\underline{v}_i \underline{w}_i^T \mathbf{B}}{p - \lambda_i} + \mathbf{D} \tag{4.50}$$

La figure 4.1 présente la décomposition modale de la fonction de transfert  $\mathbf{F}(s)$  où  $\underline{x}_m(t)$  est le vecteur d'état exprimé dans la base modale et où les matrices  $\mathbf{\Lambda}$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}^{-1}$  sont définies ci-après:

$$\begin{cases} \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{P} = [\underline{v}_1 \quad \cdots \quad \underline{v}_n] \\ \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T \\ \vdots \\ \underline{w}_n^T \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.51}$$

### 4.3 Réalisation des systèmes SISO

Les systèmes SISO (Single-Input Single-Output) sont les systèmes mono-entrée et mono-sortie.

Nous considérons la fonction de transfert suivante:

$$F(s) = \frac{N(s)}{\Psi(s)} + d \quad (4.52)$$

Où  $N(s)$  et  $\Psi(s)$  désignent des polynômes en  $s$  tels que:

- le degré de  $N(s)$  est strictement inférieur à celui de  $\Psi(s)$
- $\Psi(s)$  est un polynôme unitaire de degré  $n$ :

Par conséquent:

$$\begin{cases} N(s) = n_0 + n_1s + \dots + n_{n-1}s^{n-1} \\ \Psi(s) = a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + 1 \times s^n \end{cases} \quad (4.53)$$

En tenant compte des propriétés de la transformée de Laplace, la variable  $s$  peut être interprétée comme l'opérateur de dérivation:

$$s y(t) := \frac{dy(t)}{dt} \quad (4.54)$$

#### 4.3.1 Forme compagne de commande

En identifiant cette fonction de transfert (4.52) avec l'expression (4.1) il est clair que la transmission directe  $d$  est égale à la matrice  $\mathbf{D}$ .

$$\mathbf{D} = d \quad (4.55)$$

Il nous reste alors à expliciter les matrices  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  de telle sorte que:

$$\mathbf{C} (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \frac{N(s)}{\Psi(s)} \quad (4.56)$$

où le degré du numérateur la fraction rationnelle  $\frac{N(s)}{\Psi(s)}$  est strictement inférieur à celui de son dénominateur: la fonction de transfert  $\frac{N(s)}{\Psi(s)}$  est strictement propre.

Dans le cas mono-entrée mono-sortie, la réalisation de la fonction de transfert  $F(s)$  sous forme compagne de commande est la suivante:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c u(t) \\ y = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} u(t) \end{cases} \quad (4.57)$$

Où:



$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_c = [n_0 \quad n_1 \quad \cdots \quad n_{n-2} \quad n_{n-1}] \\ \mathbf{D} = d \end{array} \right. \quad (4.58)$$

Une forme compagne de commande alternative est la suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{ca} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -a_2 \\ & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{ca} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_{ca} = [n_{n-1} \quad n_{n-2} \quad \cdots \quad n_1 \quad n_0] \\ \mathbf{D} = d \end{array} \right. \quad (4.59)$$

Comparée à la réalisation (4.58) la valeur 1 apparaît sur la diagonale inférieure de la matrice d'état qui est obtenue grâce à la matrice de changement de base pour laquelle la valeur 1 apparaît sur l'antidiagonale.

Pour obtenir la réalisation (4.58) commençons par exprimer la sortie  $Y(s)$  du système (4.52) sous la forme suivante:

$$Y(s) = N(s) \frac{U(s)}{\Psi(s)} + dU(s) \quad (4.60)$$

Intéressons nous alors à la variable intermédiaire  $Z(s)$  définie par:

$$Z(s) = \frac{U(s)}{\Psi(s)} = \frac{U(s)}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (4.61)$$

Soit:

$$a_0 Z(s) + a_1 s Z(s) + a_2 s^2 Z(s) + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} Z(s) + s^n Z(s) = U(s) \quad (4.62)$$

Choisissons alors (par exemple) les composantes suivantes pour le vecteur d'état:

$$\begin{cases} x_1(t) := z(t) \\ x_2(t) := \dot{x}_1(t) = \dot{z}(t) \\ x_3(t) := \dot{x}_2(t) = \ddot{z}(t) \\ \vdots \\ x_n(t) := \dot{x}_{n-1}(t) = z^{(n-1)}(t) \end{cases} \quad (4.63)$$

Il vient par conséquent en ramenant dans le domaine temporel l'équation (4.62):

$$\begin{aligned} a_0 x_1(t) + a_1 x_2(t) + a_2 x_3(t) + \cdots + a_{n-1} x_n(t) + \dot{x}_n(t) &= u(t) \\ \Leftrightarrow \dot{x}_n(t) &= -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - a_2 x_3(t) - \cdots - a_{n-1} x_n(t) + u(t) \end{aligned} \quad (4.64)$$

La variable intermédiaire  $Z(s)$  nous permet d'exprimer la sortie  $Y(s)$  sous la forme suivante:

$$Y(s) = N(s)Z(s) + dU(s) = (n_0 + \cdots + n_{n-1}s^{n-1}) Z(s) + dU(s) \quad (4.65)$$

Soit en revenant dans le domaine temporel:

$$y(t) = n_0 z(t) + \cdots + n_{n-1} z^{(n-1)}(t) + du(t) \quad (4.66)$$

L'utilisation des variables d'état précédemment définies conduit finalement à l'expression suivante de la sortie  $y(t)$ :

$$y(t) = n_0 x_1(t) + \cdots + n_{n-1} x_n(t) + du(t) \quad (4.67)$$

En regroupant sous forme vectorielle les équations (4.63), (4.64) et (4.67) nous obtenons la représentation d'état (4.58).

Rappelons qu'il existe une infinité d'autres expressions pour les matrices **A**, **B** et **C**. Ces expressions sont obtenues par le changement de variables  $\underline{x}(t) = \mathbf{P} \underline{x}^*(t)$  où **P** est une matrice inversible. Ainsi en écrivant la fonction de transfert  $F(s)$  sous la forme suivante où le produit  $N_1(s)N_2(s)$  est un polynôme de degré strictement inférieur à  $n$ , degré du dénominateur:

$$F(s) = \frac{N_1(s)N_2(s)}{a_0 + a_1 s + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + 1 \times s^n} \quad (4.68)$$

Nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} N_2(s) \Big|_{s=0} \\ \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} N_2(s) \Big|_{s=0} \\ N_2(0) \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} N_1(0) & \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} N_1(s) \Big|_{s=0} & \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} N_1(s) \Big|_{s=0} & \cdots \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.69)$$

La réalisation (4.58) correspond au cas où  $N_1(s) = N(s)$  et  $N_2(s) = 1$ .

**Exemple 4.3.** Donner la représentation d'état sous forme compagne de commande de la fonction de transfert suivante:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} \quad (4.70)$$

La représentation d'état sous forme compagne de commande est obtenue à partir de (4.58):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = 0 \end{array} \right. \quad (4.71)$$

■

**Exemple 4.4.** Donner la représentation d'état sous forme compagne de commande de la fonction de transfert suivante:

$$F(s) = \frac{4s^3 + 3s^2 + 2s}{2s^3 + 5s + 1} \quad (4.72)$$

Comme  $F(s)$  n'est pas une fonction de transfert strictement propre nous la décomposons comme la somme d'une fonction de transfert strictement propre et d'une constante:

$$F(s) = \frac{2(2s^3 + 5s + 1) + 3s^2 - 8s - 2}{2s^3 + 5s + 1} = \frac{3s^2 - 8s - 2}{2s^3 + 5s + 1} + 2 \quad (4.73)$$

Dans un dernier temps nous rendons unitaire le polynôme qui apparaît au dénominateur en factorisant par  $\frac{1}{2}$ :

$$F(s) = \frac{\frac{3}{2}s^2 - 4s - 1}{1 \times s^3 + \frac{5}{2}s + \frac{1}{2}} + 2 \quad (4.74)$$

La représentation d'état sous forme compagne de commande est obtenue à partir de (4.58):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = 2 \end{array} \right. \quad (4.75)$$

■

#### 4.3.2 Pôles et zéros de la fonction de transfert

Il est important de remarquer que le numérateur de la fonction de transfert ne dépend que des matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$ , alors que son dénominateur est constitué du polynôme unitaire construit à partir des valeurs propres de la matrice d'état  $\mathbf{A}$ .

Comme la fonction de transfert ne dépend pas de la représentation d'état utilisée, nous pouvons utiliser la forme compagne de commande pour vérifier ce résultat. Nous pouvons en effet remarquer que la fonction de transfert  $\mathbf{C}_c(s\mathbb{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c$  a un dénominateur qui ne dépend que de la matrice d'état  $\mathbf{A}_c$  et un numérateur qui ne dépend que des coefficients de  $\mathbf{C}_c$ , ce vecteur ligne affectant un poids à chacun des monômes  $s^j$  où  $j = 0, \dots, n-1$ :

$$\begin{aligned} (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c &= \left( \frac{1}{\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}_c)} \begin{bmatrix} * & * & 1 \\ * & * & s \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ * & * & s^{n-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{C}_c(s\mathbb{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c &= \frac{\mathbf{C}_c}{\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}_c)} \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ \vdots \\ s^{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.76)$$

D'une manière générale, c'est le polynôme caractéristique de la matrice d'état  $\mathbf{A}$  qui forme le dénominateur de la fonction de transfert et le produit  $\mathbf{B}\mathbf{C}$  qui forme les coefficients qui apparaissent au numérateur d'une fonction de transfert strictement propre (i.e. pour laquelle  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ). En conséquence c'est  $\mathbf{A}$  qui fixe les poles de la fonction de transfert et le produit  $\mathbf{B}\mathbf{C}$  qui fixe ses zéros.

### 4.3.3 Forme modale

#### Cas d'une fonction de transfert avec tous les poles distincts

Nous considérons ici le cas d'une fonction de transfert dont tous les poles, notés  $\lambda_i$ , sont distincts:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{N(s)}{\Psi(s)} + d \\ &= \frac{N(s)}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)} + d \\ &= \frac{r_1}{s-\lambda_1} + \frac{r_2}{s-\lambda_2} + \cdots + \frac{r_n}{s-\lambda_n} + d \end{aligned} \quad (4.77)$$

Le nombre  $r_i$  est appelé résidu de la fonction de transfert  $F(s)$  en le pole  $\lambda_i$ . Comme la multiplicité de chaque pole  $\lambda_i$  est ici égale à 1 il est clair que chaque résidu  $r_i$  peut être calculé par la relation suivante:

$$r_i = (s - \lambda_i)F(s)|_{s=\lambda_i} \quad (4.78)$$

Nous définissons alors les constantes  $b_i$  et  $c_i$  de telle sorte que leur produit soit égal à  $r_i$ :

$$r_i = c_i b_i \quad (4.79)$$

Par conséquent la fonction de transfert  $F(s)$  s'écrit comme suit:

$$F(s) = \frac{c_1 b_1}{s - \lambda_1} + \frac{c_2 b_2}{s - \lambda_2} + \cdots + \frac{c_n b_n}{s - \lambda_n} + d \quad (4.80)$$

Définissons ensuite la transformée de Laplace des composantes  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  comme suit:

$$\begin{cases} \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{b_1}{s-\lambda_1} \\ \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{b_2}{s-\lambda_2} \\ \vdots \\ \frac{X_n(s)}{U(s)} = \frac{b_n}{s-\lambda_n} \end{cases} \quad (4.81)$$

En utilisant (4.81) la fonction de transfert  $F(s)$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} = F(s) &= c_1 \frac{X_1(s)}{U(s)} + c_2 \frac{X_2(s)}{U(s)} + \cdots + c_n \frac{X_n(s)}{U(s)} + d \\ \Rightarrow Y(s) &= c_1 X_1(s) + c_2 X_2(s) + \cdots + c_n X_n(s) + dU(s) \end{aligned} \quad (4.82)$$

En revenant dans le domaine temporel il vient:

$$y(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) + du(t) \quad (4.83)$$

De plus dans le domaine temporel (4.81) s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_1(t) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_2(t) + b_2 u(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = \lambda_n x_n(t) + b_n u(t) \end{cases} \quad (4.84)$$

Les équations (4.84) et (4.83) conduisent à la représentation d'état suivante, appelée forme modale (ou diagonale):

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}_m \underline{x}(t) + \mathbf{B}_m u(t) \\ \underline{y}(t) = \mathbf{C}_m \underline{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases} \quad (4.85)$$

où:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_m = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \\ \mathbf{D} = d \end{cases} \quad (4.86)$$

**Exemple 4.5.** Considérons la fonction de transfert suivante:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} \quad (4.87)$$

La décomposition en éléments simples de  $F(s)$  donne l'expression suivante:

$$F(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)} = \frac{-1}{s+3} + \frac{2}{s+4} \quad (4.88)$$

La fonction de transfert  $F(s)$  a deux poles simples:  $\lambda_1 = -3$  et  $\lambda_2 = -4$ . Par conséquent la représentation d'état sous forme modale de  $F(s)$  est la suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_m = [c_1 \quad c_2] \\ \mathbf{D} = 0 \end{cases} \quad (4.89)$$

Les coefficients  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $c_1$  et  $c_2$  sont choisis de telle sorte que:

$$\begin{cases} c_1 b_1 = -1 \\ c_2 b_2 = 2 \end{cases} \quad (4.90)$$

Nous pouvons donc choisir par exemple:

$$\begin{cases} b_1 = 1 \\ c_1 = -1 \\ b_2 = 1 \\ c_2 = 2 \end{cases} \quad (4.91)$$

■

### Fonction de transfert avec des poles complexes conjugués distincts

Lorsque les poles de la fonction de transfert  $F(s)$  sont complexes conjugués les résidus le sont aussi de même que les matrices de la représentation d'état. Cela peut être un inconvénient. Nous allons voir comment retrouver des matrices réelles pour la représentation d'état.

Supposons que  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$  forment une paire de poles complexes conjugués de  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{r_1}{s - \lambda} + \frac{\bar{r}_1}{s - \bar{\lambda}} \quad (4.92)$$

Soit  $\alpha$  la partie réelle du pole  $\lambda$  et  $\beta$  sa partie imaginaire:

$$\lambda = \alpha + j\beta \Leftrightarrow \bar{\lambda} = \alpha - j\beta \quad (4.93)$$

Selon la section précédente la représentation d'état de  $F(s)$  sous forme modale est la suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} b_1 \\ \bar{b}_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_m = [c_1 \quad \bar{c}_1] \\ \mathbf{D} = 0 \end{array} \right. \quad (4.94)$$

Où:

$$r_1 = c_1 b_1 \Rightarrow \bar{r}_1 = \bar{c}_1 \bar{b}_1 \quad (4.95)$$

Il est clair que la forme modale de la fonction de transfert  $F(s)$  est complexe. A partir de la réalisation précédente nous pouvons écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = (\alpha + j\beta) x_1(t) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_2(t) = (\alpha - j\beta) x_2(t) + \bar{b}_1 u(t) \end{array} \right. \quad (4.96)$$

Nous en déduisons que les composantes  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  du vecteur d'état sont complexes conjugués. Soit  $x_R(t)$  la partie réelle de  $x_1(t)$  et  $x_I(t)$  sa partie imaginaire:

$$x_1(t) = x_R(t) + jx_I(t) \Rightarrow x_2(t) = \bar{x}_1(t) = x_R(t) - jx_I(t) \quad (4.97)$$

L'équation (4.96) s'écrit alors:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_R(t) + j\dot{x}_I(t) = (\alpha + j\beta) (x_R(t) + jx_I(t)) + b_1 u(t) \\ \dot{x}_R(t) - j\dot{x}_I(t) = (\alpha - j\beta) (x_R(t) - jx_I(t)) + \bar{b}_1 u(t) \end{array} \right. \quad (4.98)$$

Nous en déduisons deux nouvelles équations en combinant les deux équations précédentes: la première est obtenue en additionnant les deux

équations précédentes et en divisant le résultat par 2 et la seconde est obtenue en soustrayant les deux équations précédentes et en divisant le résultat par  $2j$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_R(t) = \alpha x_R(t) - \beta x_I(t) + \frac{b_1 + \bar{b}_1}{2} u(t) \\ \dot{x}_I(t) = \beta x_R(t) + \alpha x_I(t) + \frac{b_1 - \bar{b}_1}{2j} u(t) \end{cases} \quad (4.99)$$

En ce qui concerne la sortie  $y(t)$  nous pouvons l'exprimer en fonction des nouvelles composantes  $x_R(t)$  et  $x_I(t)$  du vecteur d'état comme suit:

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 x_1(t) + \bar{c}_1 \bar{x}_1(t) \\ &= c_1 (x_R(t) + j x_I(t)) + \bar{c}_1 (x_R(t) - j x_I(t)) \\ &= (c_1 + \bar{c}_1) x_R(t) + j (c_1 - \bar{c}_1) x_I(t) \end{aligned} \quad (4.100)$$

Par conséquent la forme modale complexe (4.94) est rendue réelle en utilisant la partie réelle et la partie imaginaire des composantes complexes du vecteur d'état. En effet les équations (4.99) et (4.100) conduisent à la représentation d'état suivante où les matrices ( $\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n, \mathbf{D}$ ) sont réelles:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \frac{b_1 + \bar{b}_1}{2} \\ \frac{b_1 - \bar{b}_1}{2j} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_n = [ (c_1 + \bar{c}_1) \quad j (c_1 - \bar{c}_1) ] \\ \mathbf{D} = 0 \end{cases} \quad (4.101)$$

Nous pouvons vérifier que le déterminant de la matrice complexe  $\mathbf{A}_m$  est le même que celui de la matrice réelle  $\mathbf{A}_n$ :

$$\det \left( s\mathbb{I} - \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix} \right) = \det \left( s\mathbb{I} - \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \right) \quad (4.102)$$

**Exemple 4.6.** Considérons la fonction de transfert suivante:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s + 5} \quad (4.103)$$

Les deux poles de  $F(s)$  sont  $\lambda_1 = 1 + 2j$  et  $\bar{\lambda}_1 = 1 - 2j$ . Le développement en éléments simples de  $F(s)$  est le suivant:

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s + 5} = \frac{s+2}{(s - \lambda_1)(s - \bar{\lambda}_1)} = \frac{r_1}{s - \lambda_1} + \frac{r_2}{s - \bar{\lambda}_1} \text{ où } \lambda_1 = 1 + 2j \quad (4.104)$$

Les résidus  $r_1$  et  $r_2$  ont les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} r_1 = (s - \lambda_1)F(s)|_{s=\lambda_1} = \frac{s+2}{s-\bar{\lambda}_1} \Big|_{s=\lambda_1} = \frac{3+2j}{4j} = \frac{2-3j}{4} \\ r_2 = (s - \bar{\lambda}_1)F(s)|_{s=\bar{\lambda}_1} = \frac{s+2}{s-\lambda_1} \Big|_{s=\bar{\lambda}_1} = \frac{3-2j}{-4j} = \frac{2+3j}{4} = \bar{r}_1 \end{cases} \quad (4.105)$$



Nous obtenons finalement:

$$F(s) = \frac{r_1}{s - \lambda_1} + \frac{r_2}{s - \bar{\lambda}_1} = \frac{\frac{2-3j}{4}}{s - (1+2j)} + \frac{\frac{2+3j}{4}}{s - (1-2j)} \quad (4.106)$$

Les résidus  $r_1$  et  $r_2$  sont décomposés par exemple comme suit:

$$\begin{cases} r_1 = \frac{2-3j}{4} = (2-3j) \times \frac{1}{4} = c_1 \times b_1 \\ r_2 = \frac{2+3j}{4} = (2+3j) \times \frac{1}{4} = \bar{c}_1 \times \bar{b}_1 \end{cases} \quad (4.107)$$

L'utilisation de (4.86) permet d'obtenir la forme modale de  $F(s)$ :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \bar{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2j & 0 \\ 0 & 1-2j \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} b_1 \\ \bar{b}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} c_1 & \bar{c}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3j & 2+3j \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = 0 \end{cases} \quad (4.108)$$

Cette réalisation sous forme modale est complexe. Elle est rendue réelle par l'utilisation des relations (4.101):

$$\begin{cases} \mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \frac{b_1 + \bar{b}_1}{2} \\ \frac{b_1 - \bar{b}_1}{2j} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_n = \begin{bmatrix} (c_1 + \bar{c}_1) & j(c_1 - \bar{c}_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = 0 \end{cases} \quad (4.109)$$

Pour chacune des réalisations nous pouvons vérifier que  $F(s)$  peut être obtenue par la relation  $F(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$  mais dans cette dernière réalisation les matrices  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  sont réelles. ■

### Fonction de transfert avec des poles de multiplicité supérieure à un

Considérons maintenant le cas où la fonction de transfert  $F(s)$  a un pole  $\lambda$  de multiplicité  $n$ . La décomposition en éléments simples de  $F(s)$  s'écrit:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = F(s) = \frac{r_1}{s - \lambda} + \frac{r_2}{(s - \lambda)^2} + \cdots + \frac{r_n}{(s - \lambda)^n} + d \quad (4.110)$$

Les coefficients  $r_i \quad \forall n \geq i \geq 1$  peuvent être calculés grâce à la relation suivante:

$$r_i = \frac{1}{(n-i)!} \left. \frac{d^{n-i}}{ds^{n-i}} ((s - \lambda)^n F(s)) \right|_{s=\lambda} \quad \forall n \geq i \geq 1 \quad (4.111)$$

Pour mémoire le coefficient  $r_1$  est appelé résidu de la fonction de transfert  $F(s)$  en  $\lambda$ .

Calculons maintenant la transformée de Laplace des composantes  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$ :

$$\frac{X_i(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-\lambda)^{n-i+1}} \quad \forall 1 \leq i \leq n \quad (4.112)$$

En utilisant (4.112) la fonction de transfert  $F(s)$  s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} = F(s) &= r_1 \frac{X_n(s)}{U(s)} + r_2 \frac{X_{n-1}(s)}{U(s)} + \dots + r_n \frac{X_1(s)}{U(s)} + d \\ \Rightarrow Y(s) &= r_1 X_n(s) + r_2 X_{n-1}(s) + \dots + r_n X_1(s) + dU(s) \end{aligned} \quad (4.113)$$

En revenant dans le domaine temporel et en réarrangeant l'ordre des composantes du vecteur d'état il vient:

$$y(t) = r_n x_1(t) + r_{n-1} x_2(t) + \dots + r_1 x_n(t) + du(t) \quad (4.114)$$

Les  $n$  composantes du vecteur d'état  $\underline{x}(t)$  définies par (4.112) s'écrivent:

$$\begin{aligned} \frac{X_i(s)}{U(s)} &= \frac{1}{(s-\lambda)^{n-i+1}} \quad \forall 1 \leq i \leq n \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{X_n(s)}{U(s)} = \frac{1}{s-\lambda} \\ \frac{X_{n-1}(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-\lambda)^2} \Rightarrow X_{n-1}(s) = \frac{X_n(s)}{s-\lambda} \\ \vdots \\ \frac{X_2(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-\lambda)^{n-1}} \Rightarrow X_2(s) = \frac{X_3(s)}{s-\lambda} \\ \frac{X_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s-\lambda)^n} \Rightarrow X_1(s) = \frac{X_2(s)}{s-\lambda} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.115)$$

En revenant dans le domaine temporel et en inversant l'ordre des équations nous obtenons:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda x_2(t) + x_3(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) = \lambda x_{n-1}(t) + x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) = \lambda x_n(t) + u(t) \end{cases} \quad (4.116)$$

Les équations (4.116) et (4.114) conduisent à la représentation d'état suivante, appelée forme modale (ou de Jordan):

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}_m \underline{x}(t) + \mathbf{B}_m u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_m \underline{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \end{cases} \quad (4.117)$$

La matrice  $\mathbf{A}_m$  est une matrice carrée  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}_m$  est un vecteur à  $n$  lignes

et  $\mathbf{C}_m$  est un vecteur à  $n$  colonnes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{n \text{ termes}} \\ \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_m = [r_n \quad r_{n-1} \quad \cdots \quad r_1] \\ \mathbf{D} = d \end{array} \right. \quad (4.118)$$

De manière alternative nous pouvons utiliser les polynômes  $N_1(s)$  et  $N_2(s)$  définis comme suit:

$$F(s) = \frac{r_1}{s - \lambda} + \frac{r_2}{(s - \lambda)^2} + \cdots + \frac{r_n}{(s - \lambda)^n} = \frac{N_1(s)N_2(s)}{(s - \lambda)^n} \quad (4.119)$$

Pradin<sup>2</sup> a montré que les formes modales équivalentes de la fonction de transfert  $F(s)$  s'écrivent sous la forme suivante où  $\mathbf{A}_m$  est une matrice carrée  $n \times n$ ,  $\mathbf{B}_m$  un vecteur à  $n$  lignes et  $\mathbf{C}_m$  un vecteur à  $n$  colonnes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{n \text{ termes}} \\ \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} N_2(s) \Big|_{s=\lambda} \\ \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} N_2(s) \Big|_{s=\lambda} \\ N_2(s) \Big|_{s=\lambda} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} N_1(s) \Big|_{s=\lambda} & \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} N_1(s) \Big|_{s=\lambda} & \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} N_1(s) \Big|_{s=\lambda} & \cdots \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = d \end{array} \right. \quad (4.120)$$

<sup>2</sup>Bernard Pradin, Automatique Linéaire - Systèmes multivariables, Notes de cours INSA 2000

La relation précédente s'étend au cas général d'une fonction de transfert  $F(s)$  avec des poles  $\lambda_i$  de multiplicité  $n_i$ :

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \sum_i \frac{r_{i1}}{s-\lambda_i} + \frac{r_{i2}}{(s-\lambda_i)^2} + \cdots + \frac{r_{in_i}}{(s-\lambda_i)^{n_i}} + d \\
 &= \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} \frac{r_{ij}}{(s-\lambda_i)^j} + d \\
 &= \sum_i \frac{N_{i1}(s)N_{i2}(s)}{(s-\lambda_i)^{n_i}} + d
 \end{aligned} \tag{4.121}$$

Il peut alors être montré<sup>2</sup> que la forme modale de la réalisation de la fonction de transfert  $F(s)$  est la suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \mathbf{A}_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_m = [ \mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2 \quad \cdots ] \\ \mathbf{D} = d \end{array} \right. \tag{4.122}$$

La matrice  $\mathbf{A}_i$  est une matrice carrée  $n_i \times n_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  est un vecteur à  $n_i$  lignes et  $\mathbf{C}_i$  est un vecteur à  $n_i$  colonnes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}}_{n_i \text{ termes}} \\ \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_i = [ r_{in_i} \quad \cdots \quad r_{i2} \quad r_{i1} ] \\ \mathbf{D} = d \end{array} \right. \tag{4.123}$$

Ou de manière équivalente::

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}}_{n_i \text{ termes}} \\ \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} N_2(s) \Big|_{s=\lambda_i} \\ \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} N_2(s) \Big|_{s=\lambda_i} \\ N_2(s) \Big|_{s=\lambda_i} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_i = \left[ N_1(s) \Big|_{s=\lambda_i} \quad \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} N_1(s) \Big|_{s=\lambda_i} \quad \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} N_1(s) \Big|_{s=\lambda_i} \quad \cdots \right] \\ \mathbf{D} = d \end{array} \right. \quad (4.124)$$

**Exemple 4.7.** *Considérons la fonction de transfert suivante:*

$$F(s) = \frac{\overbrace{(s+1)}^{N_1(s)} \overbrace{(s+2)}^{N_2(s)}}{(s+3)^3}$$

*Une réalisation possible de cette fonction de transfert où le pôle  $\lambda_1 = -3$  est de multiplicité 3 est la suivante:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_m = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_m = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = 0 \end{array} \right.$$

■

## 4.4 Réalisation des systèmes SIMO

Les systèmes SIMO (Single-Input Multiple-Output) sont les systèmes mono-entrée et multi-sorties.

Nous rappelons que la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  exprime la relation entre la transformée de Laplace de la sortie du système,  $\underline{y}(t)$ , et la transformée de Laplace de l'entrée du système,  $\underline{u}(t)$ . En notant  $\underline{Y}(s) = \mathcal{L}[\underline{y}(t)]$  et  $U(s) = \mathcal{L}[u(t)]$  nous écrivons:

$$\underline{Y}(s) = \mathbf{F}(s)U(s) \quad (4.125)$$

où  $\underline{Y}(s)$  est un vecteur à  $p$  lignes et  $U(s)$  un scalaire.

Comme dans le cas SISO la réalisation de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  consiste à déterminer un quadruplet  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  tel que:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.126)$$

Nous considérons par la suite un système SIMO à  $p$  sorties. Nous allons présenter ci-après plusieurs réalisations possibles.

#### 4.4.1 Procédure générique

Dans la cas SIMO nous pouvons toujours écrire la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  comme un vecteur composé de  $p$  fonctions de transfert de systèmes SISO:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} F_1(s) \\ \vdots \\ F_p(s) \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Si nous réalisons la fonction de transfert  $F_i(s)$  par  $\left( \frac{\mathbf{A}_i | \mathbf{B}_i}{\mathbf{C}_i | d_i} \right)$  alors une réalisation possible de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est la suivante:

$$F_i(s) = \left( \frac{\mathbf{A}_i | \mathbf{B}_i}{\mathbf{C}_i | d_i} \right) \Rightarrow \mathbf{F}(s) = \left( \frac{\begin{array}{ccc|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{A}_p & \mathbf{B}_p \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \cdots & d_1 \\ \mathbf{0} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{C}_p & d_p \end{array}} \right) \quad (4.128)$$

Pour obtenir ce résultat nous écrivons  $\mathbf{F}(s)$  comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \begin{bmatrix} F_1(s) \\ \vdots \\ F_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 + d_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_p (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p + d_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & \mathbf{C}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \mathbf{B}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & \mathbf{C}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_p)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & \mathbf{C}_p \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_1) & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_p) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.129)$$

A partir de l'équation précédente nous en déduisons la réalisation (4.128).

**Exemple 4.8.** *Considérons la matrice de transfert suivante d'un système SIMO:*

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+6s+9} \\ \frac{5}{s^2+6s+9} \end{bmatrix} \quad (4.130)$$

$\mathbf{F}(s)$  est la matrice de transfert du système avec  $p = 2$  sorties, ce qui correspond au nombre de lignes de  $\mathbf{F}(s)$ , ce qui correspond au nombre de colonnes de  $\mathbf{F}(s)$ .

Nous remarquons que  $\mathbf{F}(s)$  est strictement propre. Par conséquent:

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.131)$$

Nous écrivons  $\mathbf{F}_{sp}(s) := \mathbf{F}(s)$  comme le rapport entre un vecteur polynomial  $\mathbf{N}(s)$  à  $p = 2$  ligne et un polynôme  $\Psi(s)$ :

$$\mathbf{F}(s) := \mathbf{F}_{sp}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 \\ 5 \end{bmatrix}}{s^2+6s+9} \quad (4.132)$$

Une réalisation de la fonction de transfert  $F_1(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+9}$  est par exemple la forme compagne de commande:

$$\mathbf{F}_1(s) = \frac{s+1}{s^2+6s+9} = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -9 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad (4.133)$$

De même une réalisation de la fonction de transfert  $F_2(s) = \frac{5}{s^2+6s+9}$  est à nouveau par exemple la forme compagne de commande:

$$\mathbf{F}_2(s) = \frac{5}{s^2+6s+9} = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -9 & -6 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (4.134)$$

En appliquant la procédure générique nous obtenons la réalisation suivante de la matrice de transfert SIMO  $\mathbf{F}(s)$ :

$$\mathbf{F}(s) = \left( \begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -6 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (4.135)$$

■

#### 4.4.2 Forme compagne de commande

Nous pouvons aussi écrire la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  sous la forme suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_{sp}(s) + \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} = \mathbf{F}_{sp}(s) + \underline{d} \quad (4.136)$$

où  $\underline{d}$  est un vecteur constant et  $\mathbf{F}_{sp}(s)$  une matrice de transfert strictement propre:

$$\begin{cases} \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}(s) = \underline{d} \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{sp}(s) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (4.137)$$

Comme dans le cas SISO nous avons:

$$\mathbf{D} = \underline{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_p \end{bmatrix} \quad (4.138)$$

Il nous reste donc à trouver un triplet  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  de telle sorte que:

$$\mathbf{F}_{sp}(s) = \mathbf{C} (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (4.139)$$

Pour obtenir la forme compagne de commande nous écrivons la matrice de transfert  $\mathbf{F}_{sp}(s)$  comme le rapport entre un vecteur polynomial  $\mathbf{N}(s)$  à  $p$  lignes et un polynôme  $\Psi(s)$ :

$$\mathbf{F}_{sp}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} = \frac{\begin{bmatrix} N_1(s) \\ \vdots \\ N_p(s) \end{bmatrix}}{\Psi(s)} \quad (4.140)$$

Nous établissons ensuite pour chaque fonction de transfert  $N_i(s)/\Psi(s)$  une réalisation sous forme compagne de commande  $(\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_i, \mathbf{0})$ . Nous pouvons remarquer que:

- La matrice  $\mathbf{A}_c$  est commune à chacune des réalisations car le polynôme dénominateur  $\Psi(s)$  est le même pour chaque fonction de transfert  $N_i(s)/\Psi(s)$ . Si nous écrivons  $\Psi(s)$  comme suit:

$$\Psi(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \quad (4.141)$$

Alors  $\mathbf{A}_c$  est une matrice carrée de taille  $n \times n$ :

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad (4.142)$$

- Le vecteur  $\mathbf{B}_c$  est commun à chacune des réalisations parce que nous utilisons la forme compagne de commande pour chacune des fonctions de transfert SISO  $N_i(s)/\Psi(s)$ . C'est un vecteur composé de  $n$  lignes:

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.143)$$



- Chaque vecteur  $\mathbf{C}_i$  est dédié à une sortie. C'est un vecteur ligne composé de  $p$  colonnes et construit à partir des coefficients des polynômes  $N_i(s)$ .

Par conséquent la forme compagne de commande de la matrice de transfert SIMO  $\mathbf{F}(s)$  est la suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \hline \mathbf{C}_1 & d_1 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{C}_p & d_p \end{array} \right) \quad (4.144)$$

**Exemple 4.9.** *Considérons la matrice de transfert suivante d'un système SIMO:*

$$\mathbf{F}(s) = \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{s+1} \\ \frac{2}{s+2} \end{array} \right] \quad (4.145)$$

$\mathbf{F}(s)$  est la matrice de transfert d'un système à  $p = 2$  sorties, qui est le nombre de lignes de  $\mathbf{F}(s)$ , et une entrée, qui est le nombre de colonnes de  $\mathbf{F}(s)$ .

Nous remarquons que  $\mathbf{F}(s)$  est strictement propre. Par conséquent:

$$\underline{d} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (4.146)$$

Écrivons la matrice de transfert  $\mathbf{F}_{sp}(s) := \mathbf{F}(s)$  comme le rapport entre un vecteur polynomial  $\mathbf{N}(s)$  à  $p = 2$  lignes et un polynôme  $\Psi(s)$ :

$$\mathbf{F}(s) := \mathbf{F}_{sp}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} = \frac{\left[ \begin{array}{c} s+2 \\ 2(s+1) \end{array} \right]}{(s+1)(s+2)} = \frac{\left[ \begin{array}{c} s+2 \\ 2(s+1) \end{array} \right]}{s^2 + 3s + 2} \quad (4.147)$$

La matrice  $\mathbf{A}_c$  de la réalisation de  $\mathbf{F}(s)$  sous forme compagne de commande est obtenue à partir des coefficients du dénominateur  $\Psi(s)$  et le vecteur  $\mathbf{B}_c$  est fixé par le choix de la forme compagne de commande:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_c = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{array} \right] \\ \mathbf{B}_c = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (4.148)$$

Le vecteur  $\mathbf{C}_c$  obtenue à partir des coefficients à partir des coefficients du polynôme  $\mathbf{N}(s)$ :

$$\mathbf{C}_c = \left[ \begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right] \quad (4.149)$$

Nous obtenons finalement:

$$\mathbf{F}(s) = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \quad (4.150)$$

■

**Exemple 4.10.** Soit la matrice de transfert SIMO  $\mathbf{F}(s)$  suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s^2+6s+9} \\ \frac{5}{s^2+6s+9} \end{bmatrix} \quad (4.151)$$

$\mathbf{F}(s)$  est la matrice de transfert d'un système à  $p = 2$  sorties, qui est le nombre de lignes de  $\mathbf{F}(s)$ , et une entrée, qui est le nombre de colonnes de  $\mathbf{F}(s)$ .

Nous remarquons que  $\mathbf{F}(s)$  est strictement propre. Par conséquent:

$$\underline{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.152)$$

Écrivons la matrice de transfert  $\mathbf{F}_{sp}(s) := \mathbf{F}(s)$  comme le rapport entre un vecteur polynomial  $\mathbf{N}(s)$  à  $p = 2$  lignes et un polynôme  $\Psi(s)$ :

$$\mathbf{F}(s) := \mathbf{F}_{sp}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} = \frac{\begin{bmatrix} s+1 \\ 5 \end{bmatrix}}{s^2+6s+9} \quad (4.153)$$

La matrice  $\mathbf{A}_c$  de la réalisation de  $\mathbf{F}(s)$  sous forme compagne de commande est obtenue à partir des coefficients du dénominateur  $\Psi(s)$  et le vecteur  $\mathbf{B}_c$  est fixé par le choix de la forme compagne de commande:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & -6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.154)$$

Le vecteur  $\mathbf{C}_c$  obtenue à partir des coefficients à partir des coefficients du polynôme  $\mathbf{N}(s)$ :

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.155)$$

Nous obtenons finalement:

$$\mathbf{F}(s) = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -9 & -6 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (4.156)$$

■

## 4.5 Réalisation des systèmes MIMO

Les systèmes MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) sont les systèmes multi-entrées et multi-sorties.

Comme la sortie  $\underline{y}(t)$  et l'entrée  $\underline{u}(t)$  du système sont des vecteurs dans le cas MIMO il n'est plus possible d'exprimer le rapport entre  $\underline{Y}(s) = \mathcal{L}[\underline{y}(t)]$  et  $\underline{U}(s) = \mathcal{L}[\underline{u}(t)]$ . Nous écrirons simplement:

$$\underline{Y}(s) = \mathbf{F}(s)\underline{U}(s) \quad (4.157)$$

Nous considérerons par la suite des systèmes MIMO à  $m$  entrées et  $p$  sorties. En conséquence  $\underline{Y}(s) = \mathcal{L}[\underline{y}(t)]$  est un vecteur à  $p$  lignes,  $\underline{U}(s) = \mathcal{L}[\underline{u}(t)]$  est un vecteur à  $m$  lignes et la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  a  $m$  colonnes et  $p$  lignes.

### 4.5.1 Procédure générique

Comme dans le cas SIMO, la réalisation d'une matrice de transfert MIMO  $\mathbf{F}(s)$  consiste à trouver un quadruplet  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  vérifiant l'égalité:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.158)$$

La matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  peut toujours s'écrire comme une matrice composée de  $p \times m$  fonctions de transfert SISO, notées  $F_{ij}(s)$ :

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) & \cdots & F_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ F_{p1}(s) & \cdots & F_{pm}(s) \end{bmatrix} \quad (4.159)$$

La matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  peut être décomposée comme la somme de matrices de transfert de systèmes SIMO:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} F_{11}(s) \\ \vdots \\ F_{p1}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \\ \cdots + \begin{bmatrix} F_{1m}(s) \\ \vdots \\ F_{pm}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.160)$$

Soit:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \mathbf{F}_1(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \mathbf{F}_m(s) \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^m \mathbf{F}_i(s) \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underbrace{1}_{i\text{-ième colonne}} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.161)$$

Si la réalisation du système SIMO  $\mathbf{F}_i(s) = \begin{bmatrix} F_{1i}(s) \\ \vdots \\ F_{pi}(s) \end{bmatrix}$  de la  $i^{\text{ème}}$  colonne de

$\mathbf{F}(s)$  est  $\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{array} \right)$  alors une réalisation de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est la suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(s) = \begin{bmatrix} F_{1i}(s) \\ \vdots \\ F_{pi}(s) \end{bmatrix} &= \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{array} \right) \\ \Rightarrow \mathbf{F}(s) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & & \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & \mathbf{A}_m & \vdots & & \mathbf{B}_m \\ \hline \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_m & \mathbf{D}_1 & \cdots & \mathbf{D}_m \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4.162)$$

La représentation d'état de matrice de transfert SIMO  $\mathbf{F}_i(s)$  peut être obtenue en utilisant par exemple la forme compagne de commande (4.144).

Remarquons que la représentation d'état ainsi obtenue est bloc-diagonale mais n'est pas nécessairement minimale (cf. section 4.6.1).

Pour obtenir ce résultat nous utilisons le même type de raisonnement que celui présenté pour obtenir la procédure générique dans le cas SIMO et vu dans l'équation (4.128). En effet:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(s) &= \mathbf{F}_1(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \mathbf{F}_m(s) \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1(s) & \cdots & \mathbf{F}_m(s) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 + \mathbf{D}_1 & \cdots & \mathbf{C}_m (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_m)^{-1} \mathbf{B}_m + \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_m)^{-1} \mathbf{B}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \cdots & \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_m)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & \mathbf{B}_m \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \cdots & \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_m \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_1) & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_m) \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & & \mathbf{B}_m \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_1 & \cdots & \mathbf{D}_m \end{bmatrix} \tag{4.163}
\end{aligned}$$

**Exemple 4.11.** Considérons la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{s+1}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} \tag{4.164}$$

Nous écrivons  $\mathbf{F}(s)$  sous la forme suivante:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{-2}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} 2(s+3) & -2(s+2) \\ s+3 & 5(s+3) \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&:= \mathbf{F}_{sp}(s) + \mathbf{D} \tag{4.165}
\end{aligned}$$

La matrice de transfert strictement propre  $\mathbf{F}_{sp}(s)$  se décompose alors comme suit:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_{sp}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{2(s+3)}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{s+3}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-2(s+2)}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{5(s+3)}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&:= \mathbf{F}_1(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_2(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.166}
\end{aligned}$$

Les matrices  $\mathbf{F}_1(s)$  et  $\mathbf{F}_2(s)$  représentent les matrices de transfert de systèmes deux mono-entrée et multi-sorties. Deux options sont possibles pour obtenir la réalisation de  $\mathbf{F}_{sp}(s)$

- *Option 1: aucune simplification n'est réalisée dans les expressions de  $\mathbf{F}_1(s)$  et  $\mathbf{F}_2(s)$ . Il vient:*

$$\mathbf{F}_{sp}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2s+6}{s^2+5s+6} \\ \frac{s+3}{s^2+5s+6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-2s-4}{s^2+5s+6} \\ \frac{5s+15}{s^2+5s+6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.167)$$

*L'utilisation de la forme compagne de commande (4.58) pour  $\mathbf{F}_1(s)$  et  $\mathbf{F}_2(s)$  conduit à la réalisation bloc-diagonale suivante:*

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{u}(t) \end{bmatrix} \quad (4.168)$$

Où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -6 & -5 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -6 & -5 \end{array} \right] \\ \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & \\ & 0 \\ & 1 \end{array} \right] \\ \mathbf{C} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 6 & 2 & -4 & -2 \\ 3 & 1 & 15 & 5 \end{array} \right] \\ \mathbf{D} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (4.169)$$

*Remarquons que la matrice  $\mathbf{A}$  est de dimension 4 alors que nous avons vu que la dimension du système vaut 3. Cette réalisation n'est donc pas minimale (cf. section 4.6.1).*

- *Option 2: réaliser les simplifications éventuelles dans  $\mathbf{F}_1(s)$  et  $\mathbf{F}_2(s)$ ; dans ce cas il faut prendre garde à ce que les simplifications éventuelles concernent toutes les lignes des matrices  $\mathbf{F}_i(s)$  de telle sorte que chaque matrice  $\mathbf{F}_i(s)$  ait le même dénominateur. Ainsi la simplification par  $s+3$  est possible dans  $\mathbf{F}_1(s)$  car  $s+3$  est un facteur commun aux deux lignes de  $\mathbf{F}_1(s)$ ; par contre aucune simplification n'est possible dans  $\mathbf{F}_2(s)$  car il n'y a aucun facteur commun entre le dénominateur  $(s+2)(s+3)$  et les deux numérateurs de  $\mathbf{F}_2(s)$ . Il vient:*

$$\mathbf{F}_{sp}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-2(s+2)}{(s+2)(s+3)} \\ \frac{5(s+3)}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.170)$$

L'utilisation de la forme compagne de commande (4.58) pour  $\mathbf{F}_1(s)$  et  $\mathbf{F}_2(s)$  conduit à la réalisation bloc-diagonale suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{u}(t) \end{bmatrix} \quad (4.171)$$

Où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|cc} -2 & & \\ \hline & 0 & 1 \\ & -6 & -5 \end{array} \right] \\ \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & 0 \\ & 1 \end{array} \right] \\ \mathbf{C} = \left[ \begin{array}{c|cc} 2 & -4 & -2 \\ \hline 1 & 15 & 5 \end{array} \right] \\ \mathbf{D} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (4.172)$$

Remarquons que la matrice  $\mathbf{A}$  est de dimension 3 qui est la dimension du système. Cette réalisation est donc minimale (cf. section 4.6.1).

Dans les deux options la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  peut bien évidemment être retrouvée par la relation (4.1).

■

#### 4.5.2 Forme compagne de commande

Dans le cas MIMO nous pouvons toujours écrire une matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  sous la forme suivante où les matrices constantes  $\mathbf{C}_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  et  $\mathbf{D}$  sont des matrices  $p \times m$  qui ont la même dimension que la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  à  $m$  entrées et  $p$  sorties:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{C}_{n-1}s^{n-1} + \dots + \mathbf{C}_1s + \mathbf{C}_0}{1 \times s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} + \mathbf{D} \quad (4.173)$$

En suivant une démarche similaire à celle des systèmes SISO et en notant  $\mathbb{I}_m$  la matrice identité de dimension  $m$  une réalisation de la fonction de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est la suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \left( \frac{\mathbf{A}_c | \mathbf{B}_c}{\mathbf{C}_c | \mathbf{D}} \right) \quad (4.174)$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbb{I}_m & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{I}_m & \ddots & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \mathbb{I}_m \\ -a_0\mathbb{I}_m & -a_1\mathbb{I}_m & -a_2\mathbb{I}_m & \cdots & -a_{n-1}\mathbb{I}_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbb{I}_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_c = [\mathbf{C}_0 \quad \mathbf{C}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{n-2} \quad \mathbf{C}_{n-1}] \\ \mathbf{D} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}(s) \end{array} \right. \quad (4.175)$$

Cette représentation d'état s'appelle forme compagne de commande. Pour obtenir la réalisation (4.175) commençons par exprimer la sortie  $\underline{Y}(s)$  du système sous la forme suivante:

$$\underline{Y}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} \underline{U}(s) + \mathbf{D} \underline{U}(s) = \mathbf{N}(s) \frac{\underline{U}(s)}{\Psi(s)} + \mathbf{D} \underline{U}(s) \quad (4.176)$$

Où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{N}(s) = \mathbf{C}_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \mathbf{C}_1s + \mathbf{C}_0 \\ \Psi(s) = 1 \times s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0 \end{array} \right. \quad (4.177)$$

Intéressons nous alors à la variable intermédiaire  $\underline{Z}(s)$  comme suit où il est clair que la dimension du vecteur  $\underline{Z}(s)$  est celle du vecteur  $\underline{U}(s)$ , c'est à dire  $m$ :

$$\underline{Z}(s) = \frac{\underline{U}(s)}{\Psi(s)} = \frac{\underline{U}(s)}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \cdots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} \quad (4.178)$$

Soit:

$$a_0\underline{Z}(s) + a_1s\underline{Z}(s) + a_2s^2\underline{Z}(s) + \cdots + a_{n-1}s^{n-1}\underline{Z}(s) + s^n\underline{Z}(s) = \underline{U}(s) \quad (4.179)$$

Choisissons alors (par exemple) les composantes suivantes pour le vecteur d'état:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_1(t) := \underline{z}(t) \\ \underline{x}_2(t) := \dot{\underline{x}}_1(t) = \dot{\underline{z}}(t) \\ \underline{x}_3(t) := \dot{\underline{x}}_2(t) = \ddot{\underline{z}}(t) \\ \vdots \\ \underline{x}_n(t) := \dot{\underline{x}}_{n-1}(t) = \underline{z}^{(n-1)}(t) \end{array} \right. \quad (4.180)$$

Il vient par conséquent en ramenant dans le domaine temporel l'équation (4.179):

$$\begin{aligned} a_0\underline{x}_1(t) + a_1\underline{x}_2(t) + a_2\underline{x}_3(t) + \cdots + a_{n-1}\underline{x}_n(t) + \dot{\underline{x}}_n(t) &= \underline{u}(t) \\ \Leftrightarrow \dot{\underline{x}}_n(t) &= -a_0\underline{x}_1(t) - a_1\underline{x}_2(t) - a_2\underline{x}_3(t) - \cdots - a_{n-1}\underline{x}_n(t) + \underline{u}(t) \end{aligned} \quad (4.181)$$

La variable intermédiaire  $\underline{Z}(s)$  nous permet d'exprimer la sortie  $\underline{Y}(s)$  sous la forme suivante:

$$\underline{Y}(s) = \mathbf{N}(s)\underline{Z}(s) + \mathbf{D}\underline{U}(s) = (\mathbf{C}_0 + \cdots + \mathbf{C}_{n-1}s^{n-1})\underline{Z}(s) + \mathbf{D}\underline{U}(s) \quad (4.182)$$

Soit en revenant dans le domaine temporel:

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C}_0 \underline{z}(t) + \cdots + \mathbf{C}_{n-1} \underline{z}^{(n-1)}(t) + \mathbf{D} \underline{u}(t) \quad (4.183)$$

L'utilisation des variables d'état précédemment définies conduit finalement à l'expression suivante de la sortie  $\underline{y}(t)$ :

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C}_0 \underline{x}_1(t) + \cdots + \mathbf{C}_{n-1} \underline{x}_n(t) + \mathbf{D} \underline{u}(t) \quad (4.184)$$

En regroupant sous forme vectorielle les équations (4.180), (4.181) et (4.184) nous obtenons la représentation d'état (4.175).

**Exemple 4.12.** *Considérons la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  suivante:*

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{s+1}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} \quad (4.185)$$

*Nous écrivons  $\mathbf{F}(s)$  sous la forme suivante:*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{-2}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 2(s+3) & -2(s+2) \\ s+3 & 5(s+3) \end{bmatrix}}{(s+2)(s+3)} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}{s^2+5s+6} + \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 3 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.186)$$

*Le système décrit par la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  a  $m = 2$  entrées. L'utilisation de la forme compagne de commande (4.175) conduit à la réalisation suivante:*

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \mathbf{C}_c & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{u}(t) \end{bmatrix} \quad (4.187)$$



Où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_c = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -5 \end{array} \right] \\ \mathbf{B}_c = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] \\ \mathbf{C}_c = \left[ \begin{array}{cc|cc} 6 & -4 & 2 & -2 \\ 3 & 15 & 1 & 5 \end{array} \right] \\ \mathbf{D} = \left[ \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (4.188)$$

La matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  peut bien évidemment être retrouvée par la relation (4.1). ■

### 4.5.3 Forme modale

Comme dans le cas SIMO nous écrivons  $\mathbf{F}(s)$  sous la forme suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_{sp}(s) + \mathbf{D} \quad (4.189)$$

Où  $\mathbf{D}$  est une matrice constante et  $\mathbf{F}_{sp}(s)$  une matrice de transfert strictement propre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}(s) = \mathbf{D} \\ \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{sp}(s) = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (4.190)$$

Nous devons alors trouver un triplet de matrices  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  tel que:

$$\mathbf{F}_{sp}(s) = \mathbf{C} (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \quad (4.191)$$

Écrivons la matrice de transfert  $\mathbf{F}_{sp}(s)$  comme le rapport entre une matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$  et un dénominateur commun  $\Psi(s)$ :

$$\mathbf{F}_{sp}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} \quad (4.192)$$

La forme modale est obtenue à partir de la décomposition en éléments simples de la matrice de transfert  $\mathbf{F}_{sp}(s)$ . En notant  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les  $r$  racines distinctes de  $\Psi(s)$  et  $n_i$  la multiplicité de la racine  $\lambda_i$  nous obtenons la décomposition suivante où les matrices  $\mathbf{R}_{ij}$  sont des matrices constantes:

$$\mathbf{F}_{sp}(s) = \sum_i \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\mathbf{R}_{ij}}{(s - \lambda_i)^j} \quad (4.193)$$

La forme modale de la matrice de transfert MIMO  $\mathbf{F}(s)$  est la suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \left( \begin{array}{ccc|c} \mathbf{J}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{0} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{J}_r & \mathbf{B}_r \\ \hline \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_r & \mathbf{D} \end{array} \right) \quad (4.194)$$

Où en notant  $n_i$  la multiplicité de la racine  $\lambda_i$ ,  $m$  le nombre d'entrées du système et  $\mathbb{I}_m$  la matrice identité de dimension  $m \times m$ :

- La matrice d'état de Jordan  $\mathbf{J}_i$  est une matrice  $(m \times n_i) \times (m \times n_i)$  qui a l'expression suivante:

$$\mathbf{J}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i \mathbb{I}_m & \mathbb{I}_m & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbb{I}_m \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \lambda_i \mathbb{I}_m \end{bmatrix}}_{n_i \text{ termes } \lambda_i \mathbb{I}_m} \quad (4.195)$$

La matrice  $(s\mathbb{I} - \mathbf{J}_i)^{-1}$  a l'expression suivante:

$$(s\mathbb{I} - \mathbf{J}_i)^{-1} = \begin{bmatrix} (s - \lambda_i)^{-1} \mathbb{I}_m & (s - \lambda_i)^{-2} \mathbb{I}_m & \cdots & (s - \lambda_i)^{-n_i} \mathbb{I}_m \\ \mathbf{0} & (s - \lambda_i)^{-1} \mathbb{I}_m & \ddots & (s - \lambda_i)^{-n_i+1} \mathbb{I}_m \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & (s - \lambda_i)^{-1} \mathbb{I}_m \end{bmatrix} \quad (4.196)$$

- $\mathbf{B}_i$  est une matrice  $(m \times n_i) \times m$ :

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbb{I}_m \end{bmatrix} \quad (4.197)$$

- $\mathbf{C}_i$  est une matrice  $p \times (m \times n_i)$ :

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{in_i} & \cdots & \mathbf{R}_{i2} & \mathbf{R}_{i1} \end{bmatrix} \quad (4.198)$$

Une représentation modale alternative existe. Pour l'obtenir concentrons nous dans un premier temps sur la réalisation de la fonction de transfert  $\mathbf{F}_i(s)$  suivante, de dimension  $p \times m$  avec un pole  $\lambda_i$  de multiplicité  $n_i$ :

$$\mathbf{F}_i(s) = \frac{\begin{bmatrix} \mathbb{I}_{\rho_i} & \mathbf{0}_{\rho_i \times (m-\rho_i)} \\ \mathbf{0}_{(p-\rho_i) \times \rho_i} & \mathbf{0}_{(p-\rho_i) \times (m-\rho_i)} \end{bmatrix}}{(s - \lambda_i)^{n_i}} \quad (4.199)$$

où  $\mathbb{I}_{\rho_i}$  est la matrice identité de dimension  $\rho_i$  et  $\mathbf{0}_{p \times m}$  la matrice nulle à  $p$  lignes et  $m$  colonnes.

Ensuite nous rappelons l'expression de l'inverse de la matrice  $n \times n$  bidiagonale suivante:

$$\mathbf{L}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & -1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{L}_i^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_i^{-1} & \lambda_i^{-2} & \cdots & \lambda_i^{-n} \\ & \lambda_i^{-1} & \ddots & \\ & & \ddots & \lambda_i^{-2} \\ 0 & & & \lambda_i^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.200)$$

La représentation modale alternative de  $\mathbf{F}_i(s)$  est alors la suivante<sup>3</sup>:

$$\mathbf{F}_i(s) = \left( \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_i & [\mathbf{B}_i \quad \mathbf{0}_{n\rho_i \times (m-\rho_i)}] \\ \hline \mathbf{C}_i & \mathbf{0}_{p \times m} \end{array} \right] \right) \quad (4.201)$$

où  $\mathbf{A}_i$  est une matrice carrée de dimension  $(n \times \rho_i) \times (n \times \rho_i)$ ,  $\mathbf{B}_i^T$  (la transposée de  $\mathbf{B}_i$ ) une matrice  $\rho_i \times (n \times \rho_i)$  dont les  $\rho_i$  lignes sont construites à partir du vecteur ligne  $\underbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 1}_{n \text{ termes}}$  et  $\mathbf{C}_i$  une matrice  $\rho_i \times (n \times \rho_i)$  dont les

$\rho_i$  lignes sont construites à partir du vecteur ligne  $\underbrace{1 \ 0 \ \cdots \ 0}_{n \text{ termes}}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{J}_i & \mathbf{0} & \cdots \\ \mathbf{0} & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \mathbf{J}_i \end{bmatrix}}_{\rho_i \text{ termes}} \quad \text{où} \quad \mathbf{J}_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \end{bmatrix}}_{n \text{ termes}} \\ \\ \mathbf{B}_i^T = \left[ \begin{array}{ccc} \underbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 1}_{n \text{ termes}} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \cdots \\ & \ddots & \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & \cdots & \underbrace{0 \ 0 \ \cdots \ 1}_{n \text{ termes}} \end{array} \right] \Bigg\} \rho_i \text{ termes} \\ \\ \mathbf{C}_i = \left[ \begin{array}{ccc} \underbrace{1 \ 0 \ \cdots \ 0}_{n \text{ termes}} & \mathbf{0}_{1 \times n} & \cdots \\ & \ddots & \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & \cdots & \underbrace{1 \ 0 \ \cdots \ 0}_{n \text{ termes}} \end{array} \right] \Bigg\} \rho_i \text{ termes} \end{array} \right. \quad (4.202)$$

<sup>3</sup>Toshiya Morisue, Minimal Realization of a Transfer Function Matrix with Multiple Poles, Transactions of the Society of Instrument and Control Engineers, Volume 21 (1985) Issue 6 Pages 546-549

Considérons maintenant la fonction de transfert  $\mathbf{F}_i(s)$  suivante où  $\mathbf{N}_{i1}$  est une matrice  $p \times \rho_i$  constante,  $\mathbf{N}_{i2}$  une matrice  $\rho_i \times m$  constante et  $\mathbf{N}_{i1}\mathbf{N}_{i2}$  une matrice  $p \times m$  constante de rang  $\rho_i$ :

$$\mathbf{F}_i(s) = \frac{\mathbf{N}_{i1}\mathbf{N}_{i2}}{(s - \lambda_i)^{n_i}} = \frac{\mathbf{N}_{i1}\mathbb{I}_{\rho_i}\mathbf{N}_{i2}}{(s - \lambda_i)^{n_i}} \quad \text{où} \quad \text{rank}(\mathbf{N}_{i1}\mathbf{N}_{i2}) = \rho_i \quad (4.203)$$

A partir des résultats précédents il est clair que la forme modale alternative de  $\mathbf{F}_i(s)$  est la suivante:

$$\mathbf{F}_i(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i\mathbf{N}_{i2} \\ \hline \mathbf{N}_{i1}\mathbf{C}_i & \mathbf{0}_{p \times m} \end{array} \right) \quad (4.204)$$

Dans un dernier temps considérons une fonction de transfert  $\mathbf{F}(s)$  de dimension  $p \times m$ , qui a un seul pole  $\lambda_i$  de multiplicité  $n_i$  et où  $\mathbf{R}(s)$  est une matrice polynomiale de degré strictement inférieur à  $n_i$ . Une décomposition en éléments simples de  $\mathbf{F}(s)$  conduit à l'expression suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \frac{\mathbf{R}(s)}{(s - \lambda_i)^{n_i}} \\ &= \frac{\mathbf{R}_1}{s - \lambda_i} + \frac{\mathbf{R}_2}{(s - \lambda_i)^2} + \cdots + \frac{\mathbf{R}_{n_i}}{(s - \lambda_i)^{n_i}} \\ &= \sum_{i=1}^{n_i} \frac{\mathbf{R}_i}{(s - \lambda_i)^i} \end{aligned} \quad (4.205)$$

Les matrices constantes  $\mathbf{R}_i$  peuvent être obtenues comme suit:

$$\mathbf{R}_i = \frac{1}{(n_i - i)!} \frac{d^{n_i - i}}{ds^{n_i - i}} (s - \lambda_i)^{n_i} \mathbf{F}(s) \Big|_{s=\lambda_i} \quad (4.206)$$

Soit  $\rho_i$  le rang de la matrice *constante*  $\mathbf{R}_i$ :

$$\rho_i = \text{rank}(\mathbf{R}_i) \quad (4.207)$$

Chaque terme  $\mathbf{R}_i$  peut être décomposé comme le produit de deux matrices *constantes*  $\mathbf{N}_{i1}$  et  $\mathbf{N}_{i2}$  où  $\mathbf{N}_{i1}$  est une matrice  $p \times \rho_i$  et  $\mathbf{N}_{i2}$  une matrice  $\rho_i \times m$ :

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{N}_{i1}\mathbf{N}_{i2} = \mathbf{N}_{i1}\mathbb{I}_{\rho_i}\mathbf{N}_{i2} \quad (4.208)$$

La forme modale alternative de la fonction de transfert MIMO  $\mathbf{F}(s)$  est la suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \sum_{i=1}^{n_i} \mathbf{F}_i(s) = \left( \begin{array}{ccc|c} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{B}_1\mathbf{N}_{12} \\ \mathbf{0} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{A}_{n_1} & \mathbf{B}_{n_1}\mathbf{N}_{n_12} \\ \hline \mathbf{N}_{11}\mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{N}_{n_11}\mathbf{C}_{n_1} & \mathbf{0} \end{array} \right) \quad (4.209)$$

Cette forme modale de  $\mathbf{F}(s)$  n'est pas en général *minimale* (cf. section 4.6.1).

#### 4.5.4 Méthode de Gilbert

Lorsque toutes les racines de  $\Psi(s)$  sont simples, l'algorithme de Gilbert présenté dans [ALA] permet d'obtenir de manière simple la réalisation *minimale* d'une matrice de transfert (cf. section 4.6.1).

Considérons une matrice  $\mathbf{F}(s)$  où toutes les racines de  $\Psi(s)$  sont simples de telle sorte que l'on peut décomposer  $\mathbf{F}(s)$  en éléments simples sous la forme suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} + \mathbf{D} = \frac{\mathbf{N}(s)}{(s - \lambda_1) \cdots (s - \lambda_q)} + \mathbf{D} = \sum_{i=1}^q \frac{\mathbf{R}_i}{s - \lambda_i} + \mathbf{D} \quad (4.210)$$

Les matrices  $\mathbf{R}_i$  ne dépendent pas de  $s$ . Elles peuvent être calculées par la relation suivante:

$$\mathbf{R}_i = \lim_{s \rightarrow \lambda_i} (s - \lambda_i) \mathbf{F}(s) \quad (4.211)$$

La dimension  $n$  du système est la somme des rangs des matrices  $\mathbf{R}_i$ . En notant  $\rho_i = \text{rank}(\mathbf{R}_i)$  il vient:

$$n = \sum_{i=1}^q \rho_i \quad (4.212)$$

Comme toutes les racines de  $\Psi(s)$  sont simples, la matrice d'état de la réalisation modale  $\mathbf{A}_m$  est sous forme diagonale. La valeur propre  $\lambda_i$  apparaît  $\rho_i$  fois dans la diagonale de la matrice  $\mathbf{A}_m$ :

$$\mathbf{A}_m := \begin{pmatrix} \lambda_1 \mathbb{I}_{\rho_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_q \mathbb{I}_{\rho_q} \end{pmatrix} \quad (4.213)$$

La réalisation de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est alors la suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_m & \mathbf{B}_m \\ \hline \mathbf{C}_m & \mathbf{D} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 \mathbb{I}_{\rho_1} & & & \mathbf{B}_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \lambda_q \mathbb{I}_{\rho_q} & \mathbf{B}_q \\ \hline \mathbf{C}_1 & \dots & \mathbf{C}_q & \mathbf{D} \end{array} \right) \quad (4.214)$$

Notons que le polynôme  $\Psi(s)$  est un polynôme annulateur de la matrice d'état, avec ici  $\mathbf{A} = \mathbf{A}_m$ :

$$\Psi(\mathbf{A}) = 0 \quad (4.215)$$

Les matrices  $\mathbf{C}_i$  et  $\mathbf{B}_i$  sont obtenues par la décomposition non-unique suivante:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \quad (4.216)$$

où la matrice  $\mathbf{C}_i$  à  $\rho_i$  colonnes et la matrice  $\mathbf{B}_i$  à  $\rho_i$  lignes.

Remarquons que la méthode de Gilbert permet d'obtenir une généralisation de la forme modale vue pour les systèmes SISO.

**Exemple 4.13.** *Considérons la matrice de transfert suivante que nous avons déjà rencontrée lors d'un exemple précédent:*

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{s+1}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+3} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 2(s+3) & (s+1)(s+2) \\ s+3 & 5(s+3) \end{bmatrix} \quad (4.217)$$

Toutes les racines de  $\Psi(s)$  sont simples. Décomposons  $\mathbf{F}(s)$  en éléments simples sous la forme suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+3} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.218)$$

Le dernier élément  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  représente le transfert direct et est associé à la matrice  $\mathbf{D}$ .

La dimension  $n$  du système est la somme des rangs  $\rho_1$  et  $\rho_2$  des matrices  $\mathbf{R}_i$ :

$$n = \text{rank} \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \right) + \text{rank} \left( \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \rho_1 + \rho_2 = 2 + 1 = 3 \quad (4.219)$$

Par conséquent  $\lambda_1 = -2$  va apparaître  $\rho_1 = 2$  fois (rang de la matrice  $\mathbf{R}_1$  associée à  $\frac{1}{s+2}$ ) dans la diagonale de la matrice  $\mathbf{A}_m$  et  $\lambda_2 = -3$  va apparaître  $\rho_2 = 1$  fois dans la diagonale de la matrice  $\mathbf{A}_m$  (rang de la matrice  $\mathbf{R}_2$  associée à  $\frac{1}{s+3}$ ):

$$\mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \quad (4.220)$$

De plus, nous pouvons décomposer par exemple les matrices  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  comme suit:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} := \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} := \mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2 \end{cases} \quad (4.221)$$

Une réalisation minimale (cf. section 4.6.1) de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est alors la suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \left( \begin{array}{cc|c} \lambda_1 \mathbb{I}_{\rho_1} & & \mathbf{B}_1 \\ & \lambda_2 \mathbb{I}_{\rho_2} & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \mathbf{D} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|cc} -2 & & & 1 & 0 \\ & -2 & & 0 & 1 \\ & & -3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (4.222)$$

■

## 4.6 Réalisation minimale

### 4.6.1 Définition

Nous nous intéressons dans un premier temps à un exemple et considérons les fonctions de transfert suivantes:

$$\begin{cases} F_1(s) = \frac{1}{s+1} \\ F_2(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2} \end{cases} \quad (4.223)$$

La forme compagne de commande associée à ces deux fonctions de transfert s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} F_1(s) = \left( \frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{C}_1} \middle| \frac{\mathbf{B}_1}{\mathbf{D}_1} \right) = \left( \frac{-1}{1} \middle| \frac{1}{0} \right) \\ F_2(s) = \left( \frac{\mathbf{A}_2}{\mathbf{C}_2} \middle| \frac{\mathbf{B}_2}{\mathbf{D}_2} \right) = \left( \frac{0}{-2} \quad \frac{1}{-3} \middle| \frac{0}{1} \right) \end{cases} \quad (4.224)$$

Il est clair que la dimension de la matrice  $\mathbf{A}_1$  associée à  $F_1(s)$  est 1 tandis la dimension de la matrice  $\mathbf{A}_2$  associée à  $F_2(s)$  est 2.

D'autre part il est facile de voir que les poles de la fonction de transfert  $F_2(s)$  sont  $-1$  et  $-2$ :

$$s^2 + 3s + 2 = (s + 1)(s + 2) \quad (4.225)$$

En conséquence  $F_2(s)$  s'écrit:

$$F_2(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+2} = \frac{s+2}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} \quad (4.226)$$

Nous obtenons finalement:

$$F_2(s) = F_1(s) \quad (4.227)$$

Bien que  $F_2(s) = F_1(s)$  nous avons obtenu deux réalisations dont la dimension de la matrice d'état est différente. Ce cas apparaît typiquement lors d'une simplification pole-zéro dans la fonction de transfert.

L'ordre de la réalisation est la dimension de la matrice d'état  $\mathbf{A}$ . Dans cet exemple l'ordre de la réalisation de  $F_2(s)$  est plus grand que l'ordre de la réalisation de  $F_1(s)$ .

Nous pouvons aussi remarquer que l'ordre des réalisations (4.188) et (4.222) de la même matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  n'est pas le même. Nous avons en effet vu dans les exemples précédents que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{s+1}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} \\
&= \left( \begin{array}{cccc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -5 & 0 & 1 \\ \hline 6 & -4 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 3 & 15 & 1 & 5 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
&= \left( \begin{array}{ccc|cc} -2 & & & 1 & 0 \\ & -2 & & 0 & 1 \\ & & -3 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \tag{4.228}
\end{aligned}$$

D'une manière générale nous dirons que la réalisation  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  d'un système est minimale lorsque qu'il n'existe pas d'autre réalisation  $(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*, \mathbf{C}^*, \mathbf{D}^*)$  où la dimension de  $\mathbf{A}^*$  est inférieure à celle de  $\mathbf{A}$ .

Nous dirons de manière équivalente que la réalisation est minimale lorsque la réalisation est commandable et observable; ces deux termes seront définis ultérieurement dans le cours d'analyse des systèmes.

Notons que la méthode de Gilbert conduit toujours à une réalisation minimale.

#### 4.6.2 Mineurs d'une matrice, Plus Petit Dénominateur Commun (PPDC)

Nous rappelons que:

- Les mineurs d'ordre  $k$  d'une matrice sont les déterminants de ses sous-matrices carrées de dimension  $k$ . Ainsi si  $\mathbf{F}(s)$  est une matrice de taille  $p \times m$  les mineurs d'ordre  $k$  sont obtenus en calculant les déterminants de toutes les sous-matrices carrées de taille  $k$  obtenues en supprimant  $p - k$  lignes et  $m - k$  colonnes de la matrice initiale.
- Le plus Plus Petit Dénominateur Commun (PPDC, *Least Common Denominator* en anglais) d'une matrice de fractions rationnelles irréductibles est le plus petit commun multiple des dénominateurs de ces fractions. Il s'obtient en calculant le produit de tous les facteurs, communs ou non, de chacun des dénominateurs de tous les mineurs non nuls de la matrice, chaque facteur étant affecté de son plus grand exposant.

#### 4.6.3 Dimension d'un système

Nous rappelons l'expression (4.1) de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  d'un système linéaire et invariant:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} := \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} + \mathbf{D} \tag{4.229}$$



où  $\mathbf{N}(s)$  est une matrice polynomiale et où  $\Psi(s)$  est un polynôme commun à tous les dénominateurs de  $\mathbf{F}(s)$ .

Nous noterons:

$$\frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} := \mathbf{F}_{sp}(s) = \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{\mathbf{C}\text{adj}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})} \quad (4.230)$$

Par construction la matrice de transfert  $\frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)}$  est strictement propre, c'est à dire que tous les polynômes qui apparaissent dans  $\mathbf{N}(s)$  ont un degré strictement inférieur au degré de  $\Psi(s)$ :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{sp}(s) = \mathbf{0} \quad (4.231)$$

Pour les systèmes mono-entrée et mono-sortie (*SISO* en anglais) la réalisation  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$  est minimale lorsque les polynômes  $\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})$  et  $\mathbf{C}\text{adj}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}$  n'ont aucune racine commune; on dit alors que  $\chi_A(s)$  et  $\mathbf{C}\text{adj}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}$  sont premiers entre eux. Dans ce cas la dimension du système est le degré du polynôme caractéristique  $\chi_A(s) = \det(s\mathbb{I} - \mathbf{A})$ .

Dans le cas général d'un système multi-entrées et multi-sorties (*MIMO* en anglais) représenté par sa matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  de dimension  $p \times m$  le polynôme caractéristique  $\chi_A(s)$  de la réalisation minimale (on parle alors de représentation) est défini comme le Plus Petit Dénominateur Commun (PPDC, *Least Common Denominator* en anglais) de tous les mineurs possibles (i.e. les mineurs de l'ordre 1 jusqu'à l'ordre  $\min(p, m)$ ) non identiquement nuls de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  (ou de la matrice  $\mathbf{F}_{sp}(s)$ ). *Il faudra prendre garde aux simplifications poles / zéros qui peuvent apparaître dans le calcul des mineurs.*

La dimension d'un système est égale à la dimension du vecteur d'état (et donc de la matrice  $\mathbf{A}$ ) issue de la réalisation *minimale* de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$ . C'est aussi le degré du polynôme caractéristique  $\chi_A(s)$  de la réalisation minimale.

D'une manière générale la dimension d'un système MIMO n'est pas le degré du polynôme  $\Psi(s)$  mais le degré du Plus Petit Dénominateur Commun (PPDC) de tous les mineurs non identiquement nuls de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$ .

**Exemple 4.14.** *Considérons la matrice  $\mathbf{F}(s)$  suivante:*

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s^2+2s+1} & \frac{s^2+3}{2s^2+2s+1} \end{bmatrix} \quad (4.232)$$

*Le système considéré est un système à 1 sortie (nombre de lignes de  $\mathbf{F}(s)$ ) et 2 entrées (nombre de colonnes de  $\mathbf{F}(s)$ ).*

*Commençons par déterminer la dimension de ce système: le Plus Petit Dénominateur Commun (PPDC) de tous les mineurs de  $\mathbf{F}(s)$  vaut  $2s^2 + 2s + 1$ ; par conséquent ce système est de dimension 2.*

*Pour obtenir une réalisation de  $\mathbf{F}(s)$ , faisons apparaître dans un premier temps le transfert direct et faisons ensuite en sorte que le coefficient en facteur du terme de plus haut degré apparaissant au dénominateur de la matrice strictement propre soit égal à 1:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2s^2+2s+1} & \frac{0.5(2s^2+2s+1)-s+2.5}{2s^2+2s+1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2s^2+2s+1} & \frac{2.5-s}{2s^2+2s+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{0.5}{s^2+s+0.5} & \frac{0.5(2.5-s)}{s^2+s+0.5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{0.5}{s^2+s+0.5} & \frac{1.25-0.5s}{s^2+s+0.5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.233}$$

Le terme  $\begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix}$  constitue la transmission directe et est identifié à la matrice  $\mathbf{D}$ .

Le second terme se décompose comme suit:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{0.5}{s^2+s+0.5} & \frac{0.5(2.5-s)}{s^2+s+0.5} \end{bmatrix} &= \frac{0.5}{s^2+s+0.5} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1.25-0.5s}{s^2+s+0.5} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&:= \mathbf{F}_1(s) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{F}_2(s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.234}$$

L'utilisation de la forme compagne de commande (4.58) pour  $\mathbf{F}_1(s)$  et  $\mathbf{F}_2(s)$  conduit à la réalisation bloc-diagonale suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{u}(t) \end{bmatrix} \tag{4.235}$$

Où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & & \\ -0.5 & -1 & & \\ \hline & & 0 & 1 \\ & & -0.5 & -1 \end{array} \right] \\ \mathbf{B} = \left[ \begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline 1 & \\ \hline & 0 \\ & 1 \end{array} \right] \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 1.25 & -0.5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array} \right. \tag{4.236}$$

La matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  peut bien évidemment être retrouvée par la relation (4.1).

Remarquons que la matrice  $\mathbf{A}$  est de dimension 4 alors que la dimension du système vaut 2. La réalisation obtenue n'est donc pas minimale. ■

#### 4.6.4 Pôles et zéros de transmission

Les racines du polynôme caractéristique  $\chi_A(s)$  d'une réalisation minimale sont les poles de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$ .

Les zéros d'une matrice de transfert sont les valeurs de  $s$  qui rendent déficient le rang de  $\mathbf{F}(s)$ . De manière équivalente ce sont également les racines du polynôme obtenu comme le plus grand diviseur commun (PGDC) (cf. section 4.7.1) de tous les numérateurs des mineurs d'ordre  $r$  de  $\mathbf{F}(s)$  où  $r$  est le

rang *normal* de la matrice  $\mathbf{F}(s)$ , c'est à dire le rang de  $\mathbf{F}(s)$  lorsque  $s$  n'est pas égal à un zéro de transmission. De manière générale les zéros n'ont aucun rapport avec les zéros des fractions rationnelles constituant la matrice de transfert.

Les zéros de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  peuvent aussi s'obtenir comme les poles de  $\mathbf{F}^{-1}(s)$  sous la réserve que cette matrice existe ( $\mathbf{F}(s)$  doit être une matrice carrée).

**Exemple 4.15.** *Considérons à nouveau la matrice de transfert suivante:*

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{s+1}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} \quad (4.237)$$

*Pour calculer la dimension du système il faut calculer le degré du Plus Petit Dénominateur Commun (PPDC) associé à  $\mathbf{F}(s)$ .*

*Les mineurs d'ordre 1 de  $\mathbf{F}(s)$  sont les suivants:*

$$\begin{cases} m_{22} = \frac{2}{s+2} \\ m_{21} = \frac{s+1}{s+3} \\ m_{12} = \frac{1}{s+2} \\ m_{11} = \frac{5}{s+2} \end{cases} \quad (4.238)$$

*Le mineur d'ordre 2 de  $\mathbf{F}(s)$  est le suivant:*

$$\begin{aligned} m_2 &= \frac{2}{s+2} \frac{5}{s+2} - \frac{s+1}{s+3} \frac{1}{s+2} \\ &= \frac{10(s+3) - (s+1)(s+2)}{(s+2)^2(s+3)} \\ &= \frac{-s^2 + 7s + 28}{(s+2)^2(s+3)} \end{aligned} \quad (4.239)$$

*Le Plus Petit Dénominateur Commun (PPDC) de  $\mathbf{F}(s)$ , qui est aussi le polynôme caractéristique du système, vaut donc:*

$$\chi_A(s) = (s+2)^2(s+3) \quad (4.240)$$

*Par conséquent la dimension du système est 3, c'est à dire le degré de  $\chi_A(s)$ . La réalisation sera minimale lorsque la dimension de la matrice  $\mathbf{A}$  issue de la réalisation de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  sera égale à 3.*

*Remarquons que la dimension du système n'est pas égale au degré de  $\Psi(s)$  qui ici vaut 2.*

*Les poles de  $\mathbf{F}(s)$  sont les racines de  $\chi_A(s)$ : ici  $-2$  de multiplicité 2 et  $-3$  de multiplicité 1.*

*En ce qui concerne les zéros de  $\mathbf{F}(s)$ , commençons par établir son rang: ici le rang normal de la matrice  $\mathbf{F}(s)$  vaut 2. Les zéros d'une matrice de transfert sont les valeurs de  $s$  qui rendent déficient le rang de  $\mathbf{F}(s)$ . Écrivons alors l'unique mineur d'ordre 2 de  $\mathbf{F}(s)$  sous la forme  $m_2 = \frac{n(s)}{\chi_A(s)}$ . Les zéros de  $\mathbf{F}(s)$  sont les racines de  $n(s)$ . Il vient ici:*

$$n(s) = -s^2 + 7s + 28 \quad (4.241)$$

■

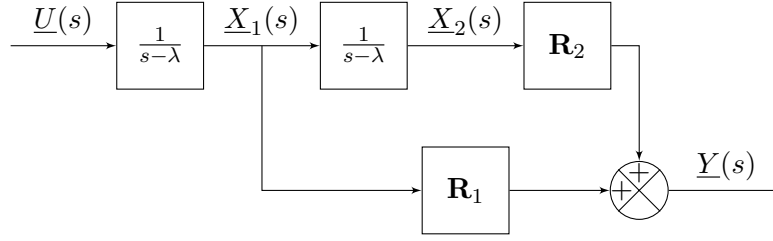


Figure 4.2: Schéma bloc associé à la matrice de transfert  $\frac{\mathbf{R}_1}{s-\lambda} + \frac{\mathbf{R}_2}{(s-\lambda)^2}$

#### 4.6.5 Schéma bloc de la forme modale et minimalité

Notons que la notion de minimalité peut être facilement appréhendée de manière graphique. Considérons par exemple la matrice de transfert  $\mathbf{F}_{sp}(s)$  suivante décomposée sous forme modale:

$$\mathbf{F}_{sp}(s) = \frac{\mathbf{R}_1}{s-\lambda} + \frac{\mathbf{R}_2}{(s-\lambda)^2} \quad (4.242)$$

Le schéma bloc associé à cette matrice de transfert est représenté sur la Figure 4.2 où les transformées de Laplace  $\underline{X}_i(s)$  de chacune des composantes du vecteur d'état sont placées à la sortie de chaque bloc  $\frac{1}{s-\lambda}$ .

Il est clair que les transformées de Laplace des composantes  $\underline{X}_i(s)$  du vecteur d'état et du vecteur de sortie  $\underline{Y}(s)$  s'écrivent sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \underline{X}_1(s) = \frac{1}{s-\lambda} \underline{U}(s) \\ \underline{X}_2(s) = \frac{1}{s-\lambda} \underline{X}_1(s) \\ \underline{Y}(s) = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{R}_2] \begin{bmatrix} \underline{X}_1(s) \\ \underline{X}_2(s) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.243)$$

Les dimensions des matrices  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  sont celles de la matrice de transfert  $\mathbf{F}_{sp}(s)$ . Par conséquent le nombre de colonnes de  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  est égal au nombre d'entrées  $m$  du système. Comme les matrices  $\mathbf{R}_1$  et  $\mathbf{R}_2$  sont multipliées par les vecteurs  $\underline{X}_1(s)$  et  $\underline{X}_2(s)$  la dimension de chaque composante  $\underline{x}_i(t)$  du vecteur d'état est égale au nombre d'entrées  $m$  du système.

Soient  $\rho_i$  le rang de la matrice  $\mathbf{R}_i$ ,  $\mathbf{C}_i$  une matrice à  $\rho_i$  colonnes et  $\mathbf{B}_i$  une matrice à  $\rho_i$  lignes telles que:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \quad i = 1, 2 \quad (4.244)$$

Le schéma bloc de la Figure 4.2 peut être simplifié comme indiqué sur la Figure 4.3.

Les transformées de Laplace des composantes  $\underline{X}_i(s)$  du vecteur d'état et du vecteur de sortie  $\underline{Y}(s)$  s'écrivent maintenant sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \underline{X}_1(s) = \frac{1}{s-\lambda} \underline{U}(s) \\ \underline{X}_2(s) = \frac{\mathbf{B}_2}{s-\lambda} \underline{X}_1(s) \\ \underline{Y}(s) = [\mathbf{R}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \underline{X}_1(s) \\ \underline{X}_2(s) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.245)$$

Le vecteur  $\underline{X}_2(s)$  est maintenant un vecteur à  $\rho_2 \leq m$  composantes ce qui peut réduire la dimension de la représentation d'état.

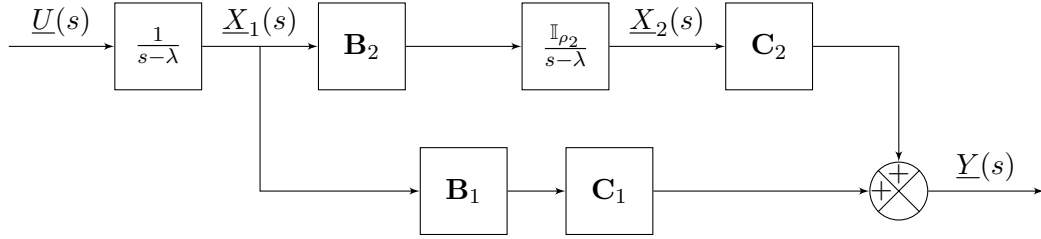


Figure 4.3: Schéma bloc associé à la matrice de transfert  $\frac{\mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1}{s-\lambda} + \frac{\mathbf{C}_2 \mathbf{B}_2}{(s-\lambda)^2}$

## 4.7 Décomposition polynomiale matricielle

### 4.7.1 PGCD de deux polynômes

Nous rappelons que le plus grand diviseur commun (PGDC, *Greatest Common Divisor* en anglais) de deux polynômes  $N(s)$  et  $\Psi(s)$  est le polynôme unitaire (un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient du monôme dominant (coefficient du terme de plus haut degré) est égal à 1) de degré le plus élevé possible et qui est divisé à la fois  $N(s)$  et  $\Psi(s)$ .

Le PGDC de deux polynômes de deux polynômes  $N(s)$  et  $\Psi(s)$  peut être déterminé en appliquant l'algorithme d'Euclide. Il s'agit d'effectuer des divisions euclidiennes (suivant les puissances décroissantes de  $s$ ) successives et d'appliquer les résultats suivants : la division euclidienne de  $N(s)$  par  $\Psi(s)$  où  $\deg(\Psi(s)) \leq \deg(N(s))$  donne le quotient  $Q(s)$  et le reste  $R(s)$  qui sont définis par la relation suivante :

$$\deg(\Psi(s)) \leq \deg(N(s)) \Rightarrow \begin{cases} N(s) = Q(s)\Psi(s) + R(s) \\ \deg(R(s)) < \deg(\Psi(s)) \end{cases} \quad (4.246)$$

Dans ces conditions:

$$\begin{cases} PGDC(N(s), \Psi(s)) = PGDC(\Psi(s), R(s)) \\ PGDC(\Psi(s), R(s)) = PGDC(\Psi(s), \lambda R(s)) \end{cases} \quad (4.247)$$

où  $\lambda$  est un scalaire non nul.

Le PGDC est alors le dernier reste non nul divisé par le coefficient du terme dominant du reste (nous rappelons que par convention le PGDC est un polynôme unitaire).

**Exemple 4.16.** Soient  $N(s)$  et  $\Psi(s)$  les deux polynômes suivants:

$$\begin{cases} N(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \\ \Psi(s) = s^3 + 4s^2 + s - 6 \end{cases} \quad (4.248)$$

Comme les polynômes  $N(s)$  et  $\Psi(s)$  sont de même degré nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned} N(s) &= s^3 + 4s^2 + s - 6 + (2s^2 + 10s + 12) \\ &= \Psi(s) + 2s^2 + 10s + 12 = \Psi(s) + R(s) \end{aligned} \quad (4.249)$$

et:

$$\begin{aligned} PGDC(N(s), \Psi(s)) &= PGDC(\Psi(s), R(s)) \\ &= PGDC(\Psi(s), 2s^2 + 10s + 12) \end{aligned} \quad (4.250)$$

Divisons alors  $\Psi(s)$  par  $2s^2 + 10s + 12$ :

$$\begin{array}{r|l}
 s^3 & +4s^2 & +s & -6 & 2s^2 + 10s + 12 \\
 \hline
 -(s^3 & +5s^2 & +6s) & & \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} \\
 \hline
 & -s^2 & -5s & & \\
 & -(-s^2 & -5s & -6) & \\
 \hline
 & & & 0 & 
 \end{array} \quad (4.251)$$

Le dernier reste non nul est le polynôme  $s^2 + 5s + 6$ , qui est un polynôme unitaire. Nous obtenons donc:

$$PGDC(N(s), \Psi(s)) = s^2 + 5s + 6 \quad (4.252)$$

Finalement nous pouvons écrire:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 N(s) = s^3 + 6s^2 + 11s + 6 \\
 \quad = (s + 1)(s^2 + 5s + 6) \\
 \quad = (s + 1) \times PGDC(N(s), \Psi(s)) \\
 \Psi(s) = s^3 + 4s^2 + s - 6 \\
 \quad = (s - 1)(s^2 + 5s + 6) \\
 \quad = (s - 1) \times PGDC(N(s), \Psi(s))
 \end{array} \right. \quad (4.253)$$

Ces relations montrent clairement que  $PGDC(N(s), \Psi(s))$  divise à la fois  $N(s)$  et  $\Psi(s)$ . ■

#### 4.7.2 Forme de Smith d'une matrice polynomiale

Tout d'abord introduisons la notion de matrice unimodulaire: une matrice polynomiale carrée  $\mathbf{U}(s)$  est unimodulaire lorsque son inverse est aussi une matrice polynomiale. De manière équivalente, une matrice polynomiale carrée  $\mathbf{U}(s)$  est unimodulaire si et seulement si son déterminant est une constante non nulle indépendante de  $s$ .

**Exemple 4.17.** Considérons la matrice polynomiale  $\mathbf{U}(s)$  suivante:

$$\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} s & 1 \\ 2s - 3 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.254)$$

Il est clair que  $\det(\mathbf{U}(s)) = 3$ . Le déterminant de  $\mathbf{U}(s)$  est une constante indépendante de  $s$ . Par conséquent  $\mathbf{U}(s)$  est une matrice polynomiale unimodulaire et son inverse est aussi une matrice polynomiale: ■

$$\mathbf{U}^{-1}(s) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2s + 3 & s \end{bmatrix} \quad (4.255)$$

La forme de Smith est une forme canonique pour les matrices polynomiales. Soit  $\mathbf{N}(s)$  une matrice polynomiale de dimension  $p \times m$ . Le théorème de Smith indique que toute matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$  peut être décomposée sous la forme suivante:

$$\mathbf{S}(s) = \mathbf{V}(s)\mathbf{N}(s)\mathbf{W}(s) \quad (4.256)$$

où:

- $\mathbf{S}(s)$  est une matrice quasi-diagonale ;
- Les matrices polynomiales carrées  $\mathbf{V}(s)$  et  $\mathbf{W}(s)$  sont des matrices unimodulaires ;
- La matrice  $\mathbf{V}(s)$  est de dimension  $p \times p$  et la matrice  $\mathbf{W}(s)$  est de dimension  $m \times m$ .

Les matrices  $\mathbf{N}(s)$  et  $\mathbf{S}(s)$  sont dites équivalentes.

La matrice quasi-diagonale  $\mathbf{S}(s)$  a l'expression suivante où  $r$  est le rang normal de  $\mathbf{N}(s)$  (le rang normal d'une matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$  est le rang de cette matrice pour presque toutes les valeurs de  $s$ ).

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} s_1(s) & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & s_r(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.257)$$

Les polynômes unitaires  $s_k(s)$  sont des facteurs invariants de  $\mathbf{N}(s)$ . Un polynôme unitaire est un polynôme dont le coefficient du monôme dominant est égal à 1. De plus  $s_k(s)$  divise  $s_{k+1}(s) \forall k = 1, \dots, r-1$ :

$$s_k(s) \mid s_{k+1}(s) \forall k = 1, \dots, r-1 \quad (4.258)$$

Des séquences d'opérations élémentaires doivent être effectuées pour obtenir la forme de Smith  $\mathbf{S}(s)$  d'une matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$ . Le terme *opérations élémentaires* sur les lignes et les colonnes de  $\mathbf{N}(s)$  désigne l'une des trois opérations suivantes:

- Permutation de 2 lignes ou de 2 colonnes;
- Multiplication d'une ligne ou d'une colonne par une constante;
- Addition d'une ligne (ou d'une colonne) avec une autre ligne (ou une autre colonne) multipliée par un polynôme.

Les séquences, qui ne sont pas uniques, permettant d'obtenir la forme de Smith  $\mathbf{S}(s)$  d'une matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$ , sont les suivantes:

1. Réaliser les permutations permettant de placer en première ligne et en première colonne le polynôme de plus petit degré. Soit  $a_{11}(s)$  ce polynôme;

2. Effectuer les divisions euclidiennes de manière à exprimer tous les polynômes de la première ligne comme suit où  $\deg(r(s)) < \deg(a_{11}(s))$ :

$$a_{1j}(s) = a_{11}(s)q_j(s) + r_j(s) \quad (4.259)$$

Ensuite soustraire  $q_j(s)$  fois la première colonne à la colonne  $j$  et réaliser les permutations permettant de placer en première ligne et en première colonne le polynôme de plus petit degré. Ce processus doit être répété jusqu'à ce que tous les éléments de la première ligne soient divisibles par  $a_{11}(s)$ ;

3. Soustraire des multiples de la première colonne aux colonnes  $j$ ,  $j = 2, \dots, m$  de manière à obtenir 0 dans la première ligne et toutes les colonnes  $j$ ,  $j = 2, \dots, m$ ;
4. Procéder aux même type d'opérations, mais en se focalisant sur les lignes plutôt que sur les colonnes.
5. Une fois finalisé, ce processus conduit à la matrice polynomiale suivante où  $s_1(s) \neq 0$  est un polynôme unitaire:

$$\begin{bmatrix} s_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{N}_1(s) & \\ 0 & & & \end{bmatrix} \quad (4.260)$$

Si  $\mathbf{N}_1(s) = \mathbf{0}$  alors le processus s'arrête. Sinon les séquences d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de  $\mathbf{N}_1(s)$  sont appliquées de manière à obtenir un nouvel élément diagonal.

D'un point de vue algorithmie, les matrices  $\mathbf{V}(s)$  et  $\mathbf{W}(s)$  sont initialisées avec une matrice identité de taille adéquate de part et d'autre de  $\mathbf{N}(s)$ . Ensuite les *opérations élémentaires* sur les lignes (matrice  $\mathbf{V}(s)$ ) et les colonnes (matrice  $\mathbf{W}(s)$ ) sont réalisées jusqu'à obtenir la matrice  $\mathbf{S}(s)$ .

Une méthode alternative pour trouver l'expression de  $\mathbf{S}(s)$ , c'est à dire la forme de Smith de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$ , est basée sur tous les mineurs d'ordre  $k$  de  $\mathbf{N}(s)$ : posons  $P_0(s) = 1$  et définissons par  $P_k(s)$ ,  $k = 1, \dots, r$  le plus grand diviseur commun (PGDC) des mineurs d'ordre  $k$  de  $\mathbf{N}(s)$ . Alors:

$$s_k(s) = \frac{P_k(s)}{P_{k-1}(s)}, \quad k = 1, \dots, r \quad (4.261)$$

Les mineurs d'ordre  $k$  d'une matrice sont les déterminants de ses sous-matrices carrées de dimension  $k$ . Soit  $\mathbf{N}(s)$  une matrice polynomiale de taille  $p \times m$ . Ses mineurs d'ordre  $k$  sont les déterminants de toutes les sous-matrices carrées de taille  $k \times k$  obtenues en supprimant  $p - k$  lignes et  $m - k$  colonnes de  $\mathbf{N}(s)$ . Il y a au total  $\binom{p}{k} \times \binom{m}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \times \frac{m!}{k!(m-k)!}$  mineurs d'ordre  $k$  dans  $\mathbf{N}(s)$ , où  $k \leq \min(p, m)$ .



**Exemple 4.18.** Soit  $\mathbf{N}(s)$  la matrice polynomiale suivante:

$$\mathbf{N}(s) = \begin{bmatrix} 4 & -(s+2) \\ 2(s+2) & -0.5 \end{bmatrix} \quad (4.262)$$

Comme  $\mathbf{N}(s)$  est une matrice dont le rang normal vaut 2 sa forme de Smith est la suivante:

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} s_1(s) & 0 \\ 0 & s_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.263)$$

Les séquences, qui ne sont pas uniques, permettant d'obtenir la forme de Smith  $\mathbf{S}(s)$  de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$ , sont présentées dans la Table 4.1.

| Séquence                           | $\mathbf{V}(s)$ (lignes)                                | $\mathbf{N}(s)$                                                                    | $\mathbf{W}(s)$ (colonnes)                           |
|------------------------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|
|                                    | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$          | $\begin{bmatrix} 4 & -(s+2) \\ 2(s+2) & -0.5 \end{bmatrix}$                        | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$       |
| $r_1 \leftarrow r_1/4$             | $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$        | $\begin{bmatrix} 1 & -(s+2)/4 \\ 2(s+2) & -0.5 \end{bmatrix}$                      | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$       |
| $c_2 \leftarrow c_2 + (s+2)/4 c_1$ | $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$        | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2(s+2) & -0.5 + (s+2)^2/2 \end{bmatrix}$                 | $\begin{bmatrix} 1 & (s+2)/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $r_2 \leftarrow r_2 - 2(s+2) r_1$  | $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -(s+2)/2 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 + (s+2)^2/2 = \frac{s^2+4s+3}{2} \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & (s+2)/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $r_2 \leftarrow 2r_2$              | $\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -(s+2) & 2 \end{bmatrix}$   | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+4s+3 \end{bmatrix}$                              | $\begin{bmatrix} 1 & (s+2)/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ |

Table 4.1: Forme de Smith de  $\mathbf{N}(s)$

Nous pouvons vérifier que  $\mathbf{S}(s) = \mathbf{V}(s)\mathbf{N}(s)\mathbf{W}(s)$  où  $\mathbf{V}(s)$  et  $\mathbf{W}(s)$  sont des matrices polynomiales unimodulaires:

$$\begin{cases} \mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+4s+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+3) \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -(s+2) & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{V}(s)) = \frac{1}{2} \\ \mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} 1 & (s+2)/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{W}(s)) = 1 \end{cases} \quad (4.264)$$

De manière alternative, l'expression de  $\mathbf{S}(s)$ , c'est à dire la forme de Smith de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$ , peut être obtenue à partir de tous les mineurs d'ordre  $k$  de  $\mathbf{N}(s)$ .

– Nous commençons par:

$$P_0(s) = 1 \quad (4.265)$$

– Les mineurs d'ordre 1 de  $\mathbf{N}(s)$  sont:

$$4, \quad -(s+2), \quad 2(s+2), \quad -0.5 \quad (4.266)$$

Le plus grand diviseur commun (PGDC) de ces mineurs d'ordre 1 est  $-0.5$ . Ce polynôme n'étant pas unitaire nous le divisons par le coefficient du terme dominant, c'est à dire  $-0.5$  ici. Il vient:

$$P_1(s) = 1 \quad (4.267)$$

– Le mineur d'ordre 2 de  $\mathbf{N}(s)$  est le suivant:

$$\det \left( \begin{bmatrix} 4 & -(s+2) \\ 2(s+2) & -0.5 \end{bmatrix} \right) = -2 + 2(s+2)^2 = 2(s^2 + 4s + 3) \quad (4.268)$$

Le plus grand diviseur commun (PGDC) de tous ces mineurs est  $2(s^2 + 4s + 3)$ . Ce polynôme n'étant pas unitaire nous le divisons par le coefficient du terme dominant, c'est à dire 2 ici. Il vient:

$$P_2(s) = s^2 + 4s + 3 \quad (4.269)$$

Nous avons par conséquent:

$$s_k(s) = \frac{P_k(s)}{P_{k-1}(s)}, \quad k = 1, 2 \Rightarrow \begin{cases} s_1(s) = \frac{P_1(s)}{P_0(s)} = 1 \\ s_2(s) = \frac{P_2(s)}{P_1(s)} = s^2 + 4s + 3 \end{cases} \quad (4.270)$$

La forme de Smith de la matrice  $\mathbf{N}(s)$  est donc la suivante:

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} s_1(s) & 0 \\ 0 & s_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 + 4s + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+3) \end{bmatrix} \quad (4.271)$$

■

**Exemple 4.19.** Soit  $\mathbf{N}(s)$  la matrice polynomiale suivante<sup>4</sup>:

$$\mathbf{N}(s) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{bmatrix} \quad (4.272)$$

Comme  $\mathbf{N}(s)$  est une matrice dont le rang normal vaut 2 sa forme de Smith est la suivante:

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} s_1(s) & 0 \\ 0 & s_2(s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.273)$$

Les séquences, qui ne sont pas uniques, permettant d'obtenir la forme de Smith  $\mathbf{S}(s)$  de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$ , sont présentées dans la Table 4.2.

Nous pouvons vérifier que  $\mathbf{S}(s) = \mathbf{V}(s)\mathbf{N}(s)\mathbf{W}(s)$  où  $\mathbf{V}(s)$  et  $\mathbf{W}(s)$  sont des matrices polynomiales unimodulaires:

$$\begin{cases} \mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 - 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -s/3 & 1/3 & 0 \\ s & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{V}(s)) = \frac{1}{9} \\ \mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{W}(s)) = 3 \end{cases} \quad (4.274)$$

De manière alternative, l'expression de  $\mathbf{S}(s)$ , c'est à dire la forme de Smith de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$ , peut être obtenue à partir de tous les mineurs d'ordre  $k$  de  $\mathbf{N}(s)$ .

<sup>4</sup>Multivariable Feedback Design (Addison-Wesley) J.M. Maciejowski (1989)

| Séquence                    | $\mathbf{V}(s)$ (lignes)                                                    | $\mathbf{N}(s)$                                                                            | $\mathbf{W}(s)$ (colonnes)                      |
|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
|                             | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$         | $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  |
| $c_2 \leftarrow c_2 + c_1$  | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$         | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s^2 + s - 4 & 3s^2 - 12 \\ s^2 - 4 & 3s^2 - 12 \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  |
| $c_1 \leftarrow 3c_1 - c_2$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$         | $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3s & 3s^2 - 12 \\ 0 & 3s^2 - 12 \end{bmatrix}$                   | $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $r_2 \leftarrow r_2 - sr_1$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$        | $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3s^2 - 12 \\ 0 & 3s^2 - 12 \end{bmatrix}$                    | $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $r_1 \leftarrow r_1/3$      | $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$      | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3s^2 - 12 \\ 0 & 3s^2 - 12 \end{bmatrix}$                    | $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $r_3 \leftarrow r_3 - r_2$  | $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -s & 1 & 0 \\ s & -1 & 1 \end{bmatrix}$     | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3s^2 - 12 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$                            | $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ |
| $r_2 \leftarrow r_2/3$      | $\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -s/3 & 1/3 & 0 \\ s & -1 & 1 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 - 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$                              | $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ |

Table 4.2: Forme de Smith de  $\mathbf{N}(s)$ 

– Nous commençons par:

$$P_0(s) = 1 \quad (4.275)$$

– Les mineurs d'ordre 1 de  $\mathbf{N}(s)$  sont:

$$1, \quad -1, \quad s^2 + s - 4, \quad 2s^2 - s - 8, \quad s^2 - 4, \quad 2s^2 - 8 \quad (4.276)$$

Le plus grand diviseur commun (PGDC) de ces mineurs d'ordre 1 est 1 et par conséquent:

$$P_1(s) = 1 \quad (4.277)$$

– Les mineurs d'ordre 2 de  $\mathbf{N}(s)$  sont les suivants:

$$\left\{ \begin{array}{l} \det \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \end{bmatrix} \right) = 3s^2 - 12 \\ \det \left( \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{bmatrix} \right) = 3s^2 - 12 \\ \det \left( \begin{bmatrix} s^2 + s - 4 & 2s^2 - s - 8 \\ s^2 - 4 & 2s^2 - 8 \end{bmatrix} \right) = s(3s^2 - 12) \end{array} \right. \quad (4.278)$$

Le plus grand diviseur commun (PGDC) de tous ces mineurs est  $3s^2 - 12$ . Ce polynôme n'étant pas unitaire nous le divisons par le coefficient du terme dominant, c'est à dire 3 ici. Il vient:

$$P_2(s) = \frac{3s^2 - 12}{3} = s^2 - 4 \quad (4.279)$$

Nous avons par conséquent:

$$s_k(s) = \frac{P_k(s)}{P_{k-1}(s)}, \quad k = 1, 2 \Rightarrow \begin{cases} s_1(s) = \frac{P_1(s)}{P_0(s)} = 1 \\ s_2(s) = \frac{P_2(s)}{P_1(s)} = s^2 - 4 \end{cases} \quad (4.280)$$

La forme de Smith de la matrice  $\mathbf{N}(s)$  est donc la suivante:

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} s_1(s) & 0 \\ 0 & s_2(s) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 - 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.281)$$

■

### 4.7.3 Forme de Smith-McMillan d'une matrice de transfert

La forme de Smith-McMillan d'une matrice de transfert est une matrice quasi-diagonale à partir de laquelle la notion de poles et de zéros d'un système multi-entrées et multi-sorties peut être définie.

Nous nous intéressons à un système défini par la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  suivante où  $\mathbf{N}(s)$  est une matrice polynomiale et  $\Psi(s)$  un polynôme qui est le plus petit commun multiple (en anglais, Least Common Multiple) des dénominateurs de tous les éléments de  $\mathbf{F}(s)$ :

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} \quad (4.282)$$

Nous supposons que la matrice de transfert  $\frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)}$  est propre, c'est à dire que tous les polynômes qui apparaissent dans  $\mathbf{N}(s)$  ont un degré inférieur ou égal au degré de  $\Psi(s)$ :

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}(s) < \infty \quad (4.283)$$

En utilisant la forme de Smith (4.257) de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$  il vient:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(s) &= \begin{bmatrix} s_1(s) & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & s_r(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)} &= \begin{bmatrix} \frac{s_1(s)}{\Psi(s)} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \frac{s_r(s)}{\Psi(s)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.284)$$

La matrice  $\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)}$  est la forme de Smith-McMillan de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$ : c'est une matrice quasi-diagonale de fractions rationnelles qui peuvent éventuellement se simplifier. Soient  $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$  les fractions rationnelles obtenues après d'éventuelles simplifications de chacun des éléments la matrice quasi-diagonale

$\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)}$ . La forme de Smith-McMillan de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  a alors l'expression suivante:

$$\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.285)$$

Les polynômes  $\varepsilon_k(s)$  et  $\psi_k(s)$  sont premiers entre eux. De plus  $\varepsilon_k(s)$  divise  $\varepsilon_{k+1}(s)$  et  $\psi_{k+1}(s)$  divise  $\psi_k(s) \forall k = 1, \dots, r-1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_k(s) \mid \varepsilon_{k+1}(s) \\ \psi_{k+1}(s) \mid \psi_k(s) \end{array} \right\} \forall k = 1, \dots, r-1 \quad (4.286)$$

**Exemple 4.20.** Soit la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s^2+s-4}{(s+1)(s+2)} & \frac{2s^2-s-8}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2s-4}{s+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{bmatrix} \\ &:= \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} \end{aligned} \quad (4.287)$$

La forme de Smith de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$  qui apparaît au numérateur de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  a été obtenue dans un exemple précédent. Nous concluons que la forme de Smith-McMillan de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est la suivante où nous pouvons remarquer des simplifications dans les termes de la matrice quasi-diagonale  $\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)} &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2-4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{(s-2)(s+2)}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.288)$$

■

**Exemple 4.21.** Considérons la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s) := \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)}$  suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{s+1}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} = \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 2(s+3) & (s+1)(s+2) \\ s+3 & 5(s+3) \end{bmatrix} \quad (4.289)$$

Calculons la forme de Smith de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$ :

$$\mathbf{N}(s) = \begin{bmatrix} 2(s+3) & (s+1)(s+2) \\ s+3 & 5(s+3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2s+6 & s^2+3s+2 \\ s+3 & 5s+15 \end{bmatrix} \quad (4.290)$$

Comme  $\mathbf{N}(s)$  est une matrice dont le rang normal vaut 2 sa forme de Smith est la suivante:

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} s_1(s) & 0 \\ 0 & s_2(s) \end{bmatrix} \quad (4.291)$$

Les séquences, qui ne sont pas uniques, permettant d'obtenir la forme de Smith  $\mathbf{S}(s)$  de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$ , sont présentées dans la Table 4.3.

| Séquence                                                       | $\mathbf{V}(s)$ (lignes)                                                   | $\mathbf{N}(s)$                                                          | $\mathbf{W}(s)$ (colonnes)                                       |
|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
|                                                                | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$                             | $\begin{bmatrix} 2s+6 & s^2+3s+2 \\ s+3 & 5s+15 \end{bmatrix}$           | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$                   |
| $r_1 \leftarrow r_1/2$                                         | $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$                           | $\begin{bmatrix} s+3 & s^2/2+1.5s+1 \\ s+3 & 5s+15 \end{bmatrix}$        | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$                   |
| $r_2 \leftarrow r_2 - r_1$                                     | $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$                        | $\begin{bmatrix} s+3 & s^2/2+1.5s+1 \\ 0 & -s^2/2+3.5s+14 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$                   |
| $c_2 \leftarrow c_2 - 0.5s c_1$                                | $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$                        | $\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & -s^2/2+3.5s+14 \end{bmatrix}$            | $\begin{bmatrix} 1 & -0.5s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$               |
| $c_2 \leftrightarrow c_1$                                      | $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 \end{bmatrix}$                        | $\begin{bmatrix} 1 & s+3 \\ -s^2/2+3.5s+14 & 0 \end{bmatrix}$            | $\begin{bmatrix} -0.5s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$               |
| $r_2 \leftarrow p(s) r_1 - r_2$<br>$p(s) = -s^2/2 + 3.5s + 14$ | $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.25s^2+1.75s+7.5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & s+3 \\ 0 & (-s^2/2+3.5s+14)(s+3) \end{bmatrix}$     | $\begin{bmatrix} -0.5s & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$               |
| $c_2 \leftarrow (s+3)c_1 - c_2$                                | $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.25s^2+1.75s+7.5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s^2/2-3.5s-14)(s+3) \end{bmatrix}$        | $\begin{bmatrix} -0.5s & -s^2/2-1.5s-1 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}$ |
| $c_2 \leftarrow 2c_2$                                          | $\begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ -0.25s^2+1.75s+7.5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s^2-7s-28)(s+3) \end{bmatrix}$            | $\begin{bmatrix} -0.5s & -s^2-3s-2 \\ 1 & 2(s+3) \end{bmatrix}$  |

Table 4.3: Forme de Smith de  $\mathbf{N}(s)$

Nous pouvons vérifier que  $\mathbf{S}(s) = \mathbf{V}(s)\mathbf{N}(s)\mathbf{W}(s)$  où  $\mathbf{V}(s)$  et  $\mathbf{W}(s)$  sont des matrices polynomiales unimodulaires:

$$\begin{cases} \mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s^2-7s-28)(s+3) \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -0.25s^2+1.75s+7.5 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{V}(s)) = -0.5 \\ \mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} -0.5s & -s^2-3s-2 \\ 1 & 2(s+3) \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{W}(s)) = 2 \end{cases} \quad (4.292)$$

De manière alternative, la forme de Smith de la matrice polynomiale  $\mathbf{N}(s)$  peut être obtenue à partir de tous les mineurs d'ordre  $k$  de  $\mathbf{N}(s)$ :

– Nous commençons par:

$$P_0(s) = 1 \quad (4.293)$$

– Les mineurs d'ordre 1 de  $\mathbf{N}(s)$  sont:

$$2(s+3), \quad (s+1)(s+2), \quad s+3, \quad 5(s+3) \quad (4.294)$$

Le plus grand diviseur commun (PGDC) de ces mineurs d'ordre 1 est 1 et par conséquent:

$$P_1(s) = 1 \quad (4.295)$$

– Le mineur d'ordre 2 de  $\mathbf{N}(s)$  est le suivant:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{N}(s)) &= \det \begin{pmatrix} 2(s+3) & (s+1)(s+2) \\ s+3 & 5(s+3) \end{pmatrix} \\ &= 10(s+3)^2 - (s+1)(s+2)(s+3) \end{aligned} \quad (4.296)$$

Le plus grand diviseur commun (PGDC) de ce mineur d'ordre 2 est bien évidemment lui même:  $10(s+3)^2 - (s+1)(s+2)(s+3)$ . Ce polynôme n'étant pas unitaire nous le divisons par le coefficient du terme dominant, c'est à dire  $-1$  ici. Il vient:

$$P_2(s) = (s+1)(s+2)(s+3) - 10(s+3)^2 \quad (4.297)$$

Nous avons par conséquent:

$$\begin{aligned} s_k(s) &= \frac{P_k(s)}{P_{k-1}(s)}, \quad k = 1, 2 \\ \Rightarrow \begin{cases} s_1(s) = \frac{P_1(s)}{P_0(s)} = 1 \\ s_2(s) = \frac{P_2(s)}{P_1(s)} = (s+1)(s+2)(s+3) - 10(s+3)^2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.298)$$

La forme de Smith de la matrice  $\mathbf{N}(s)$  est donc la suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} s_1(s) & 0 \\ 0 & s_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2)(s+3) - 10(s+3)^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s^2 - 7s - 28)(s+3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.299)$$

Nous en déduisons la forme de Smith-McMillan de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  en divisant la matrice polynomiale  $\mathbf{S}(s)$  par le polynôme  $\Psi(s) = (s+2)(s+3)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)} &= \frac{1}{(s+2)(s+3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (s^2 - 7s - 28)(s+3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{s^2 - 7s - 28}{s+2} \end{bmatrix} \\ &:= \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.300)$$

■

#### 4.7.4 Dimension, poles et zéros

Lorsque la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est écrite sous la forme de Smith-McMillan (4.285) nous avons les résultats suivants:

– La dimension  $n$  du système est donnée par la somme des degrés des invariants  $\psi_k(s)$ :

$$n = \sum_{k=1}^r \deg(\psi_k(s)) \quad (4.301)$$

- Le polynôme caractéristique du système est donné par:

$$\chi_A(s) = \prod_{k=1}^r \psi_k(s) \quad (4.302)$$

- Les poles de  $\mathbf{F}(s)$  sont les racines du polynôme  $\chi_A(s) = \prod_{k=1}^r \psi_k(s)$ ;
- Les zéros (de transmission) de  $\mathbf{F}(s)$  sont les racines du polynôme  $\prod_{k=1}^r \varepsilon_k(s)$ ;
- Les poles et les zéros à l'infini sont obtenus en évaluant les poles et les zéros de la forme de Smith-McMillan de la matrice de transfert  $\mathbf{F}\left(\frac{1}{s}\right) := \frac{\bar{\mathbf{N}}(s)}{d(s)}$  où  $d(s)$  est le plus petit commun multiple (en anglais, Least Common Multiple) de tous les éléments de  $\mathbf{F}\left(\frac{1}{s}\right)$  et où  $\mathbf{V}(s)$  et  $\mathbf{W}(s)$  sont des matrices unimodulaires<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\left(\frac{1}{s}\right) &:= \frac{\bar{\mathbf{N}}(s)}{d(s)} \Rightarrow \begin{cases} \bar{\mathbf{N}}(s) = \mathbf{V}(s)\bar{\mathbf{S}}(s)\mathbf{W}(s) \\ \bar{\mathbf{S}}(s) = \begin{bmatrix} s_1(s) & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & s_r(s) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \end{cases} \\ \Rightarrow \mathbf{F}\left(\frac{1}{s}\right) &= \mathbf{V}(s)\frac{\bar{\mathbf{S}}(s)}{d(s)}\mathbf{W}(s) = \mathbf{V}(s) \begin{bmatrix} \frac{\psi_1(s)}{\varepsilon_1(s)} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \frac{\psi_r(s)}{\varepsilon_r(s)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{W}(s) \end{aligned} \quad (4.303)$$

Les polynômes  $\varepsilon_k(s)$  et  $\psi_k(s)$  sont premiers entre eux. Comme  $s_k(s)$  divise  $s_{k+1}(s)$ ,  $k = 1, \dots, r-1$ , le polynôme  $\psi_k(s)$  divise  $\psi_{k+1}(s)$  et  $\varepsilon_{k+1}(s)$  divise  $\varepsilon_k(s) \forall k = 1, \dots, r-1$ :

$$\left. \begin{array}{l} \psi_k(s) \mid \psi_{k+1}(s) \\ \varepsilon_{k+1}(s) \mid \varepsilon_k(s) \end{array} \right\} \forall k = 1, \dots, r-1 \quad (4.304)$$

De plus, nous dirons que  $\mathbf{F}(s)$  a un pole à l'infini de multiplicité  $\nu_p$  si  $s = 0$  est une racine de  $\prod_{k=1}^r \varepsilon_k(s)$  de multiplicité  $\nu_p$ . De manière similaire, nous dirons que  $\mathbf{F}(s)$  a un zéro à l'infini de multiplicité  $\nu_z$  si  $s = 0$  est une racine de  $\prod_{k=1}^r \psi_k(s)$  de multiplicité  $\nu_z$ .

**Exemple 4.22.** *Considérons la matrice de transfert suivante:*

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{s+1}{s+3} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} \quad (4.305)$$

<sup>5</sup>Juan C. Zuniga-Anaya, Structural Properties of Polynomial and Rational Matrices, a Survey, Mathematica Aeterna, Vol. 1, 2011, no. 06, 361 - 403



Nous avons vu que la forme de Smith-McMillan de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  était la suivante:

$$\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{\psi_2(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+2)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{s^2-7s-28}{s+2} \end{bmatrix} \quad (4.306)$$

Nous avons les résultats suivants:

- La dimension  $n$  du système est donnée par la somme des degrés des invariants  $\psi_i(s)$ :

$$n = \sum_{i=1}^r \deg(\psi_i(s)) = 2 + 1 = 3 \quad (4.307)$$

La dimension  $n$  du système est la dimension de la réalisation minimale de  $\mathbf{F}(s)$ ;

- Le polynôme caractéristique du système est donné par:

$$\chi_A(s) = \prod_{i=1}^r \psi_i(s) = (s+2)^2(s+3) \quad (4.308)$$

- Les poles de  $\mathbf{F}(s)$  sont les racines des polynômes  $\psi_i(s)$ , c'est à dire ici  $-2$ , de multiplicité 2, et  $-3$ ;
- Les zéros (de transmission) de  $\mathbf{F}(s)$  sont les racines des polynômes  $\varepsilon_i(s)$ , c'est à dire ici les racines de  $s^2 - 7s - 28$ .

■

#### 4.7.5 Réalisation de la matrice de transfert

Nous partons de l'expression suivante:

$$\underline{Y}(s) = \mathbf{F}(s)\underline{U}(s) \quad (4.309)$$

où:

$$\begin{cases} \mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} \\ \mathbf{S}(s) = \mathbf{V}(s)\mathbf{N}(s)\mathbf{W}(s) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{F}(s) = \mathbf{V}^{-1}(s) \frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)} \mathbf{W}^{-1}(s) \quad (4.310)$$

Pour un système à  $p$  sorties et  $m$  entrées, nous décomposons les matrices polynomiales unimodulaires carrées  $\mathbf{V}(s)$  (de dimension  $p \times p$ ) et  $\mathbf{W}(s)$  (de dimension  $m \times m$ ) de la manière suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \underline{v}_1(s) & \dots & \underline{v}_p(s) \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T(s) \\ \vdots \\ \underline{w}_m^T(s) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.311)$$

Il vient alors:

$$\mathbf{F}(s) = \sum_{i=1}^r \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \underline{v}_i(s) \underline{w}_i^T(s) \quad (4.312)$$

Soit  $\mathbf{F}_i(s)$  la matrice de transfert élémentaire MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) suivante de dimension  $p \times m$ :

$$\mathbf{F}_i(s) = \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \underline{v}_i(s) \underline{w}_i^T(s) \quad (4.313)$$

Soit  $\mathbf{A}_i$  une matrice compagne du polynôme  $\psi_i(s)$ . Dans ces conditions le polynôme caractéristique de  $\mathbf{A}_i$  est  $\psi_i(s)$ :

$$\det(s\mathbb{I} - \mathbf{A}_i) = \psi_i(s) \quad (4.314)$$

En utilisant les résultats dédiés à la réalisation des fonctions de transfert, nous pouvons obtenir la réalisation suivante de  $\mathbf{F}_i(s)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_i(s) &= \frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)} \underline{v}_i(s) \underline{w}_i^T(s) = \mathbf{C}_i (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_i)^{-1} \mathbf{B}_i + \mathbf{D}_i := \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \hline \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{array} \right) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}}_i(t) = \mathbf{A}_i \underline{x}_i(t) + \mathbf{B}_i \underline{u}(t) \\ \underline{y}_i(t) = \mathbf{C}_i \underline{x}_i(t) + \mathbf{D}_i \underline{u}(t) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.315)$$

Par exemple la matrice  $\mathbf{A}_i$  peut être une matrice bloc diagonale de Jordan. Dans ce cas les matrices  $\mathbf{C}_i$  et  $\mathbf{B}_i$  sont des matrices constantes de dimension  $p \times n_i$  et  $n_i \times m$ , respectivement, où  $n_i$  est le degré du polynôme  $\psi_i(s)$ . Les matrices constantes  $\mathbf{C}_i$  et  $\mathbf{B}_i$  vérifient la propriété suivante:

$$(s\mathbb{I} - \mathbf{A}_i)^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbb{I} - \mathbf{A}_i)}{\psi_i(s)} \Rightarrow \mathbf{C}_i \text{adj}(s\mathbb{I} - \mathbf{A}_i) \mathbf{B}_i = \varepsilon_i(s) \underline{v}_i(s) \underline{w}_i^T(s) \quad (4.316)$$

Enfin  $\mathbf{D}_i = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}_i(s)$ . D'autres réalisations possibles sont présentées dans la Section 4.7.6.

Une réalisation de  $\mathbf{F}(s)$  est alors obtenue en agrégeant les réalisations de toutes les matrices de transfert  $\mathbf{F}_i(s)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{A}_r \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_r \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{C}_r] \\ \mathbf{D} = \sum_i \mathbf{D}_i \end{array} \right. \quad (4.317)$$

La réalisation ainsi obtenue est une généralisation de la méthode de Gilbert.

**Exemple 4.23.** Soit  $\mathbf{F}(s)$  la matrice de transfert suivante:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(s) &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s^2+s-4}{(s+1)(s+2)} & \frac{2s^2-s-8}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s-2}{s+1} & \frac{2s-4}{s+1} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s^2+s-4 & 2s^2-s-8 \\ s^2-4 & 2s^2-8 \end{bmatrix} \\ &:= \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)}\end{aligned}\quad (4.318)$$

Nous avons vu dans un exemple précédent que la forme de Smith-McMillan de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est la suivante:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(s) &= \mathbf{V}^{-1}(s) \frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)} \mathbf{W}^{-1}(s) \\ &= \mathbf{V}^{-1}(s) \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2-4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W}^{-1}(s) \\ &= \begin{bmatrix} \underline{v}_1(s) & \underline{v}_2(s) & \underline{v}_3(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T(s) \\ \underline{w}_2^T(s) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \underline{v}_1(s) \underline{w}_1^T(s) + \frac{s-2}{s+1} \underline{v}_2(s) \underline{w}_2^T(s)\end{aligned}\quad (4.319)$$

où:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -s/3 & 1/3 & 0 \\ s & -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{V}^{-1}(s) := \begin{bmatrix} \underline{v}_1(s) & \underline{v}_2(s) & \underline{v}_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3s & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{W}^{-1}(s) := \begin{bmatrix} \underline{w}_1^T(s) \\ \underline{w}_2^T(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \end{cases}\quad (4.320)$$

Il vient:

$$\mathbf{F}(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s & -s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{s-2}{s+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\quad (4.321)$$

La matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est alors décomposée sous la forme  $\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_1(s) + \mathbf{F}_2(s)$  où les matrices de transfert élémentaires  $\mathbf{F}_1(s)$  et  $\mathbf{F}_2(s)$  s'écrivent comme suit:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ s & -s \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_2(s) = \frac{s-2}{s+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \left(1 - \frac{3}{s+1}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}\quad (4.322)$$

Les matrices de transfert élémentaires  $\mathbf{F}_1(s)$  et  $\mathbf{F}_2(s)$  sont telles que tous les facteurs de  $\frac{1}{s-\lambda_i}$  sont des matrices  $3 \times 2$  de rang  $n_i = 1$ . Ces matrices peuvent

donc être décomposées comme le produit de deux matrices constantes  $\mathbf{C}_i$  et  $\mathbf{B}_i$  de dimension  $3 \times 1$  et  $1 \times 2$ , respectivement:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{s+2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_2(s) = \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.323)$$

La réalisation de  $\mathbf{F}_1(s)$  et  $\mathbf{F}_2(s)$  utilisant la forme bloc-diagonale de Jordan est la suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_1(s) = \left( \frac{\mathbf{A}_1 | \mathbf{B}_1}{\mathbf{C}_1 | \mathbf{D}_1} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ \mathbf{F}_2(s) = \left( \frac{\mathbf{A}_2 | \mathbf{B}_2}{\mathbf{C}_2 | \mathbf{D}_2} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} -1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{array} \right) \end{cases} \quad (4.324)$$

Une réalisation minimale de  $\mathbf{F}(s)$  est alors obtenue en agrégeant les réalisations de toutes les matrices de transfert élémentaires  $\mathbf{F}_i(s)$ :

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{1} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \vdots & 0 \\ -1 & 2 & \vdots & -3 \\ 0 & 0 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D} = \sum_i \mathbf{D}_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.325)$$

■

#### 4.7.6 Décomposition polynomiale matricielle (P-MFD)

La décomposition polynomiale (en anglais P-MFD pour *Polynomial Matrix Fraction Description*) est une alternative à la représentation d'état d'une matrice de transfert. Elle généralise le concept de numérateur et de dénominateur pour les fonctions de transfert MIMO (Multiple-Input Multiple-Output).

Une décomposition polynomiale à droite de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  de dimension  $p \times m$  est une factorisation de la forme suivante où  $\mathbf{F}_{RN}(s)$  est une

matrice polynomiale de dimension  $p \times m$  et  $\mathbf{F}_{RD}(s)$  une matrice polynomiale carrée de dimension  $m \times m$ :

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_{RN}(s)\mathbf{F}_{RD}^{-1}(s) \quad (4.326)$$

De manière similaire, une décomposition polynomiale à *gauche* de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  de dimension  $p \times m$  est une factorisation de la forme suivante où  $\mathbf{F}_{LD}(s)$  une matrice polynomiale carrée de dimension  $p \times p$  et  $\mathbf{F}_{LN}(s)$  est une matrice polynomiale de dimension  $p \times m$ :

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_{LD}^{-1}(s)\mathbf{F}_{LN}(s) \quad (4.327)$$

Nous avons que la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  peut être décomposée comme suit:

$$\begin{cases} \mathbf{F}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\Psi(s)} \\ \mathbf{N}(s) = \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{S}(s)\mathbf{W}^{-1}(s) \end{cases} \Rightarrow \mathbf{F}(s) = \mathbf{V}^{-1}(s)\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)}\mathbf{W}^{-1}(s) \quad (4.328)$$

La matrice  $\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)}$  est la forme de Smith-McMillan de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$ : c'est une matrice quasi-diagonale de fractions rationnelles qui peuvent éventuellement se simplifier. De plus  $\mathbf{S}(s)$  est une matrice polynomiale de dimension  $p \times m$  et  $\Psi(s)$  un polynôme. En notant  $\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}$  les éléments obtenus après d'éventuelles simplifications de cette matrice quasi-diagonale, la matrice  $\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)}$  a l'expression suivante:

$$\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)} = \begin{bmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \frac{\varepsilon_r(s)}{\psi_r(s)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.329)$$

Soient  $\mathbf{D}_{\Psi_p}(s)$  et  $\mathbf{D}_{\Psi_m}(s)$  les matrices polynomiales carrées suivantes, construites à partir des polynômes  $\psi_i(s)$  et de dimension  $p \times p$  et  $m \times m$  respectivement (ces 2 matrices ne diffèrent que par le nombre de 1 sur leur diagonale), et  $\mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s)$  la matrice polynomiale suivante construite à partir des polynômes  $\varepsilon_i(s)$  et de dimension  $p \times m$ :

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{\Psi_p}(s) = \text{diag}(\psi_1(s), \dots, \psi_r(s), 1, \dots, 1) : \text{matrice carrée } p \times p \\ \mathbf{D}_{\Psi_m}(s) = \text{diag}(\psi_1(s), \dots, \psi_r(s), 1, \dots, 1) : \text{matrice carrée } m \times m \\ \mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s) = \text{diag}(\varepsilon_1(s), \dots, \varepsilon_r(s), 0, \dots, 0) : \text{matrice } p \times m \end{cases} \quad (4.330)$$

La matrice  $\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)}$  de dimension  $p \times m$  peut alors s'exprimer de deux manières différentes:

$$\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)} = \mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s)\mathbf{D}_{\Psi_m}^{-1}(s) = \mathbf{D}_{\Psi_p}^{-1}(s)\mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s) \quad (4.331)$$

En reportant ces expressions dans (4.328), la fonction de transfert  $\mathbf{F}(s)$  s'écrit alors comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \mathbf{V}^{-1}(s)\frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)}\mathbf{W}^{-1}(s) \\ &= \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s)\mathbf{D}_{\Psi_m}^{-1}(s)\mathbf{W}^{-1}(s) \\ &= \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{D}_{\Psi_p}^{-1}(s)\mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s)\mathbf{W}^{-1}(s) \end{aligned} \quad (4.332)$$

En identifiant (4.332) à (4.326) nous obtenons l'expression suivante de la décomposition polynomiale matricielle *à droite* de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(s) &= \mathbf{F}_{RN}(s)\mathbf{F}_{RD}^{-1}(s) \\ &= \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s)\mathbf{D}_{\Psi_m}^{-1}(s)\mathbf{W}^{-1}(s) \\ &= \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s)(\mathbf{W}(s)\mathbf{D}_{\Psi_m}(s))^{-1} \\ \Rightarrow \quad &\begin{cases} \mathbf{F}_{RN}(s) = \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s) \\ \mathbf{F}_{RD}(s) = \mathbf{W}(s)\mathbf{D}_{\Psi_m}(s) \end{cases}\end{aligned}\quad (4.333)$$

De manière similaire, en identifiant (4.332) à (4.327) nous obtenons l'expression suivante de la décomposition polynomiale matricielle *à gauche* de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(s) &= \mathbf{F}_{LD}^{-1}(s)\mathbf{F}_{LN}(s) \\ &= \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{D}_{\Psi_p}^{-1}(s)\mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s)\mathbf{W}^{-1}(s) \\ &= (\mathbf{D}_{\Psi_p}(s)\mathbf{V}(s))^{-1}\mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s)\mathbf{W}^{-1}(s) \\ \Rightarrow \quad &\begin{cases} \mathbf{F}_{LD}(s) = \mathbf{D}_{\Psi_p}(s)\mathbf{V}(s) \\ \mathbf{F}_{LN}(s) = \mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s)\mathbf{W}^{-1}(s) \end{cases}\end{aligned}\quad (4.334)$$

Remarquons que  $\mathbf{V}(s)$  et  $\mathbf{W}(s)$  sont des matrices polynomiales unimodulaires. Par conséquent  $\mathbf{V}^{-1}(s)$  et  $\mathbf{W}^{-1}(s)$  sont aussi des matrices polynomiales unimodulaires et les matrices  $\mathbf{F}_{RN}(s)$ ,  $\mathbf{F}_{RD}(s)$ ,  $\mathbf{F}_{LN}(s)$  et  $\mathbf{F}_{LD}(s)$  sont des matrices polynomiales.

Considérons maintenant le système linéaire et invariant suivant à  $m$  entrées et  $p$  sorties:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \mathbf{A}\underline{x} + \mathbf{B}\underline{u} \\ \underline{y} = \mathbf{C}\underline{x} \end{cases}\quad (4.335)$$

Une fois obtenue la forme de Smith-McMillan de ce système, la décomposition polynomiale matricielle à droite de  $\mathbf{F}(s)$  conduit à la réalisation suivante du système sous forme compagne de commande:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(s) &= \mathbf{F}_{RN}(s)\mathbf{F}_{RD}^{-1}(s) \\ &= (\mathbf{N}_{r-1}s^{r-1} + \cdots + \mathbf{N}_1s + \mathbf{N}_0)(\mathbb{I}_m s^r + \mathbf{D}_{r-1}s^{r-1} + \cdots + \mathbf{D}_1s + \mathbf{D}_0)^{-1} \\ &= \mathbf{C}_c(s\mathbb{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}\mathbf{B}_c := \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_c & \mathbf{B}_c \\ \hline \mathbf{C}_c & \mathbf{0}_{p \times m} \end{array} \right)\end{aligned}\quad (4.336)$$

où:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m & \mathbb{I}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \mathbb{I}_m & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbb{I}_m \\ -\mathbf{D}_0 & -\mathbf{D}_1 & \cdots & & -\mathbf{D}_{r-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vdots \\ \mathbf{0}_m \\ \mathbb{I}_m \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_c = [\mathbf{N}_0 \quad \mathbf{N}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{N}_{r-1}] \end{cases}\quad (4.337)$$

De manière analogue, la décomposition polynomiale matricielle à gauche de  $\mathbf{F}(s)$  conduit à la réalisation suivante du système sous forme compagne d'observation:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(s) &= \mathbf{F}_{LD}^{-1}(s) \mathbf{F}_{LN}(s) \\
 &= (\mathbb{I}_m s^r + \mathbf{D}_{r-1} s^{r-1} + \cdots + \mathbf{D}_1 s + \mathbf{D}_0)^{-1} (\mathbf{N}_{r-1} s^{r-1} + \cdots + \mathbf{N}_1 s + \mathbf{N}_0) \\
 &= \mathbf{C}_o (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_o)^{-1} \mathbf{B}_o := \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_o & \mathbf{B}_o \\ \hline \mathbf{C}_o & \mathbf{0}_{p \times m} \end{array} \right)
 \end{aligned} \tag{4.338}$$

où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & -\mathbf{D}_0 \\ \mathbb{I}_m & \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & -\mathbf{D}_1 \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbb{I}_m & -\mathbf{D}_{r-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 \\ \mathbf{N}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{N}_{r-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m & \cdots & \mathbf{0}_m & \mathbb{I}_m \end{bmatrix} \end{array} \right. \tag{4.339}$$

**Exemple 4.24.** Nous reprenons la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{-1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{s^2+s-4}{(s+1)(s+2)} & \frac{2s^2-s-8}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} \tag{4.340}$$

Ici le nombre de sorties  $p$  du système vaut 3 et le nombre d'entrées  $m$  du système vaut 2.

Nous avons vu dans un exemple précédent que la forme de Smith-McMillan de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est la suivante:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}(s) &= \mathbf{V}^{-1}(s) \frac{\mathbf{S}(s)}{\Psi(s)} \mathbf{W}^{-1}(s) \\
 &= \mathbf{V}^{-1}(s) \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2 - 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W}^{-1}(s) \\
 &= \mathbf{V}^{-1}(s) \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{W}^{-1}(s) \\
 &= \mathbf{V}^{-1}(s) \mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s) \mathbf{D}_{\Psi_m}^{-1}(s) \mathbf{W}^{-1}(s) \\
 &= \mathbf{V}^{-1}(s) \mathbf{D}_{\Psi_p}^{-1}(s) \mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s) \mathbf{W}^{-1}(s)
 \end{aligned} \tag{4.341}$$

où:

$$\begin{cases} \mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s-2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{\Psi_m}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_{\Psi_p}(s) = \begin{bmatrix} (s+1)(s+2) & 0 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.342)$$

et:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -s/3 & 1/3 & 0 \\ s & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{V}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3s & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.343)$$

L'expression de la décomposition polynomiale matricielle à droite de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est alors la suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_{RN}(s)\mathbf{F}_{RD}^{-1}(s)$$

$$\text{où} \begin{cases} \mathbf{F}_{RN}(s) = \mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3s & 3s-6 \\ 0 & 3s-6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{RD}(s) = \mathbf{W}(s)\mathbf{D}_{\Psi_m}(s) = \begin{bmatrix} 2s^2+6s+4 & s+1 \\ -s^2-3s-2 & s+1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.344)$$

Et l'expression de la décomposition polynomiale matricielle à gauche de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  est la suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_{LD}^{-1}(s)\mathbf{F}_{LN}(s)$$

$$\text{où} \begin{cases} \mathbf{F}_{LD}(s) = \mathbf{D}_{\Psi_p}(s)\mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} s^2/3+s+2/3 & 0 & 0 \\ -s^2/3-s/3 & s/3+1/3 & 0 \\ s & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{LN}(s) = \mathbf{N}_{\varepsilon_{pm}}(s)\mathbf{W}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3+s/3 & 2/3s-4/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.345)$$

■

#### 4.7.7 Applications de la forme d'Hermite

##### Obtention du Plus Grand Diviseur Commun (PGDC)

La forme (normale) d'Hermite d'une matrice polynomiale, découverte par Charles Hermite (1822-1901) en 1851 dans le domaine des entiers, est une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont de plus haut degré sur chacune des colonnes.



Soient  $\mathbf{D}(s)$  et  $\mathbf{N}(s)$  deux matrices polynomiales ayant le même nombre de colonnes et  $\mathbf{P}(s) := \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix}$ . La forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$  peut être obtenue en utilisant l'algorithme suivant<sup>6</sup>:

1. Permuter les lignes de  $\mathbf{P}(s)$  pour amener dans la première ligne un polynôme non-nul de degré minimal parmi tous les polynômes apparaissant dans la première colonne de  $\mathbf{P}(s)$ ;
2. Multiplier la première ligne par un nombre réel de telle sorte que le polynôme  $m_{1,1}(s)$  apparaissant en première colonne soit unitaire, c'est à dire que le coefficient du monôme de plus haut degré vaut 1;
3. Pour chaque polynôme  $m_{i,1}(s)$  sous la première ligne et dans la première colonne, utiliser la division polynomiale pour écrire la relation suivante où chaque reste  $r_{i,1}(s)$  est tel que  $\deg(r_{i,1}(s)) < \deg(m_{1,1}(s))$ :

$$m_{i,1}(s) = q_i(s)m_{1,1}(s) + r_{i,1}(s), \quad i \geq 2 \quad (4.346)$$

Si  $m_{i,1}(s) = 0$  alors  $q_i(s) = r_{i,1}(s) = 0$ . Si  $\deg(m_{i,1}(s)) = 0$  alors  $\deg(m_{1,1}(s)) = 0$  et  $r_{i,1}(s) = 0$ .

4. Pour  $i \geq 2$ , ajouter à la  $i^{\text{ième}}$  ligne le produit entre  $-q_i(s)$  et la première ligne, c'est à dire le produit  $-q_i(s)m_{1,1}(s)$ . Les résultats de ces opérations dans la première colonne et sous la première ligne sont les polynômes  $r_{2,1}(s), \dots, r_{p+m,1}(s)$ , chacun de degré plus petit que celui de  $m_{1,1}(s)$ .
5. Répéter les opérations précédentes jusqu'à ce que toutes les lignes de la première colonne soient nulles à l'exception de la première. Comme le degré des polynômes apparaissant dans la première colonne et sous la première ligne diminue à chaque itération, cela nécessite un nombre fini d'itérations.

Ensuite, appliquer ces itérations sur la deuxième colonne de  $\mathbf{P}(s)$  en ignorant la première ligne. Le résultat est un polynôme unitaire  $m_{2,2}(s)$  qui apparaît en deuxième ligne et deuxième colonne, les lignes suivantes étant nulles. Si  $m_{1,2}(s)$  n'est pas de degré inférieur à celui de  $m_{2,2}(s)$ , alors la division polynomiale de  $m_{1,2}(s)$  par  $m_{2,2}(s)$  de l'étape 4 remplace  $m_{1,2}(s)$  par un polynôme de degré plus petit que  $\deg(m_{2,2}(s))$ .

Enfin répéter ces opérations sur la troisième colonne de  $\mathbf{P}(s)$ , en ignorant les deux premières lignes. En continuant ainsi nous obtenons la forme (normale) d'Hermite de la matrice polynomiale  $\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix}$  où  $\mathbf{U}(s)$  est une matrice polynomiale unimodulaire (c'est à dire que  $\det(\mathbf{U}(s)) = \text{constante}$ ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \det(\mathbf{U}(s)) = \text{constante} \end{array} \right. \quad (4.347)$$

<sup>6</sup>Rugh W. J., Linear System Theory, Prentice Hall, 1992

La matrice polynomiale  $\mathbf{R}(s)$  est le Plus Grand Diviseur Commun (PGDC) à droite des matrices polynomiales  $\mathbf{N}(s)$  et  $\mathbf{D}(s)$ .

### Décomposition polynomiale matricielle (P-MFD)

Afin d'obtenir une décomposition polynomiale d'une matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  (en anglais P-MFD pour *Polynomial Matrix Fraction Description*), nous écrivons dans un premier temps  $\mathbf{F}(s)$  sous la forme suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{N}(s)\mathbf{D}^{-1}(s) \text{ où } \mathbf{D}(s) = \text{diag}(\Psi(s), \dots, \Psi(s)) \quad (4.348)$$

où  $\mathbf{N}(s)$  est une matrice polynomiale  $p \times m$ ,  $\mathbf{D}(s)$  une matrice polynomiale diagonale  $m \times m$  et  $\Psi(s)$  un polynôme.

A partir de la forme d'Hermite (voir Section 4.7.7) de la matrice polynomiale  $\mathbf{P}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix}$ , nous obtenons la relation (4.347) où  $\mathbf{U}(s)$  est une matrice polynomiale  $(p+m) \times (p+m)$  *unimodulaire* (c'est à dire que  $\det(\mathbf{U}(s)) = \text{constante}$ ):

$$\begin{cases} \mathbf{U}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \det(\mathbf{U}(s)) = \text{constante} \end{cases} \quad (4.349)$$

La matrice  $\mathbf{U}(s)$  est alors partitionnée comme suit, où  $\mathbf{U}_{11}(s)$  est une matrice polynomiale  $m \times m$  et  $\mathbf{U}_{22}(s)$  une matrice polynomiale  $p \times p$ :

$$\mathbf{U}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11}(s) & \mathbf{U}_{12}(s) \\ \mathbf{U}_{21}(s) & \mathbf{U}_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.350)$$

La matrice  $\mathbf{U}_{22}(s)$  est une matrice carrée inversible. La décomposition polynomiale en facteurs premiers à gauche de  $\mathbf{F}(s)$  s'écrit comme suit:

$$\boxed{\mathbf{F}(s) = -\mathbf{U}_{22}^{-1}(s)\mathbf{U}_{21}(s)} \quad (4.351)$$

En effet, à partir de (4.347) nous avons:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11}(s) & \mathbf{U}_{12}(s) \\ \mathbf{U}_{21}(s) & \mathbf{U}_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{U}_{21}(s)\mathbf{D}(s) + \mathbf{U}_{22}(s)\mathbf{N}(s) &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{F}(s) = \mathbf{N}(s)\mathbf{D}^{-1}(s) &= -\mathbf{U}_{22}^{-1}(s)\mathbf{U}_{21}(s) \end{aligned} \quad (4.352)$$

En utilisant  $\mathbf{V}(s) = \mathbf{U}^{-1}(s)$  nous obtenons la relation suivante où  $\mathbf{V}_{11}(s)$  est une matrice polynomiale  $m \times m$  et  $\mathbf{V}_{22}(s)$  une matrice polynomiale  $p \times p$ :

$$\mathbf{U}^{-1}(s) = \mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}(s) & \mathbf{V}_{12}(s) \\ \mathbf{V}_{21}(s) & \mathbf{V}_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.353)$$

La matrice  $\mathbf{V}_{11}(s)$  est une matrice carrée inversible. La décomposition polynomiale en facteurs premiers à droite de  $\mathbf{F}(s)$  s'écrit comme suit:

$$\boxed{\mathbf{F}(s) = \mathbf{V}_{21}(s)\mathbf{V}_{11}^{-1}(s)} \quad (4.354)$$

Nous avons en effet:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}(s) & \mathbf{V}_{12}(s) \\ \mathbf{V}_{21}(s) & \mathbf{V}_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}(s) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{D}(s) = \mathbf{V}_{11}(s)\mathbf{R}(s) \\ \mathbf{N}(s) = \mathbf{V}_{21}(s)\mathbf{R}(s) \end{cases} \\ \Rightarrow \mathbf{F}(s) = \mathbf{N}(s)\mathbf{D}^{-1}(s) &= \mathbf{V}_{21}(s)\mathbf{R}(s)\mathbf{R}^{-1}(s)\mathbf{V}_{11}^{-1}(s) = \mathbf{V}_{21}(s)\mathbf{V}_{11}^{-1}(s) \end{aligned} \quad (4.355)$$

De plus, puisque  $\mathbf{V}(s) = \mathbf{U}^{-1}(s)$ , nous avons la relation suivante, connue sous le nom d'identité de Bézout:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11}(s) & \mathbf{U}_{12}(s) \\ \mathbf{U}_{21}(s) & \mathbf{U}_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}(s) & \mathbf{V}_{12}(s) \\ \mathbf{V}_{21}(s) & \mathbf{V}_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (4.356)$$

En réalisant un travail similaire sur les colonnes de la forme d'Hermite obtenue, la matrice  $\mathbf{R}(s)$  peut être diagonalisée. Nous obtenons ainsi la relation suivante où les matrices  $\mathbf{U}(s)$  (opérations sur les lignes) et  $\mathbf{W}(s)$  (opérations sur les colonnes) sont unimodulaires et  $\text{diag}(p_i(s))$  est une matrice diagonale polynomiale:

$$\mathbf{U}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix} \mathbf{W}(s) = \begin{bmatrix} \text{diag}(p_i(s)) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.357)$$

**Exemple 4.25.** Nous considérons la matrice de transfert suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{s}{s^2-s-1} \\ \frac{1}{s^2} & \frac{s-1}{s(s^2-s-1)} \\ \frac{1}{s} & \frac{s-1}{s^2-s-1} \\ 0 & \frac{1}{s^2-s-1} \end{bmatrix} \quad (4.358)$$

Il est clair que  $\mathbf{F}(s)$  peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \frac{1}{s^2(s^2-s-1)} \begin{bmatrix} 0 & s^3 \\ (s^2-s-1) & s(s-1) \\ s(s^2-s-1) & s^2(s-1) \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & s^3 \\ (s^2-s-1) & s(s-1) \\ s(s^2-s-1) & s^2(s-1) \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2(s^2-s-1) & 0 \\ 0 & s^2(s^2-s-1) \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (4.359)$$

Recherchons alors la forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s) := \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix}$  où:

$$\begin{cases} \mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} s^2(s^2-s-1) & 0 \\ 0 & s^2(s^2-s-1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}(s) = \begin{bmatrix} 0 & s^3 \\ (s^2-s-1) & s(s-1) \\ s(s^2-s-1) & s^2(s-1) \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.360)$$

| Opération sur les lignes       | $\mathbf{U}(s)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | $\mathbf{P}(s)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$        | $\begin{bmatrix} s^2(s^2-s-1) & 0 \\ 0 & s^2(s^2-s-1) \\ 0 & s^3 \\ (s^2-s-1) & s(s-1) \\ s(s^2-s-1) & s^2(s-1) \\ 0 & s^2 \\ (s^2-s-1) & s(s-1) \\ 0 & s^2(s^2-s-1) \\ 0 & s^3 \\ s^2(s^2-s-1) & 0 \\ s(s^2-s-1) & s^2(s-1) \\ 0 & s^2 \\ (s^2-s-1) & s(s-1) \\ 0 & s^2(s^2-s-1) \\ 0 & s^3 \\ 0 & -s^3(s-1) \\ s(s^2-s-1) & s^2(s-1) \\ 0 & s^2 \\ (s^2-s-1) & s(s-1) \\ 0 & s^2(s^2-s-1) \\ 0 & s^3 \\ 0 & -s^3(s-1) \\ 0 & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix}$ |
| $r_1 \leftrightarrow r_4$      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $r_4 \leftarrow r_4 - s^2 r_1$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $r_5 \leftarrow r_5 - s r_1$   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |

Table 4.4: Forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$ : itérations pour la première colonne

En appliquant l'algorithme proposé par Rugh<sup>6</sup>, la forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$  peut être calculée par itérations successives comme montré dans la Table 4.4 pour la première colonne.

Ensuite nous appliquons les itérations à la seconde colonne, en ignorant la première ligne, comme montré dans la Table 4.5.

Enfin la matrice  $\mathbf{U}(s)$  est partitionnée comme suit, où  $\mathbf{U}_{11}(s)$  est une matrice polynomiale  $2 \times 2$  et  $\mathbf{U}_{22}(s)$  une matrice polynomiale  $4 \times 4$ :

$$\mathbf{U}(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & (s^2-s) \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(s^2-s-1) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{U}_{11}(s) & \mathbf{U}_{12}(s) \\ \hline \mathbf{U}_{21}(s) & \mathbf{U}_{22}(s) \end{array} \right] \quad (4.361)$$

La matrice  $\mathbf{U}_{22}(s)$  est une matrice carrée inversible. La décomposition

| Opération sur les lignes                 | $\mathbf{U}(s)$                                                                                                                                                                                              | $\mathbf{P}(s)$                                                                                                                    |
|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $r_2 \leftrightarrow r_6$                | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$                       | $\begin{bmatrix} (s^2 - s - 1) & s(s - 1) \\ 0 & s^2 \\ 0 & s^3 \\ 0 & -s^3(s - 1) \\ 0 & 0 \\ 0 & s^2(s^2 - s - 1) \end{bmatrix}$ |
| $r_3 \leftarrow r_3 - s r_2$             | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$                      | $\begin{bmatrix} (s^2 - s - 1) & s(s - 1) \\ 0 & s^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -s^3(s - 1) \\ 0 & 0 \\ 0 & s^2(s^2 - s - 1) \end{bmatrix}$   |
| $r_4 \leftarrow r_4 + (s^2 - s) r_2$     | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & (s^2 - s) \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$              | $\begin{bmatrix} (s^2 - s - 1) & s(s - 1) \\ 0 & s^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & s^2(s^2 - s - 1) \end{bmatrix}$             |
| $r_6 \leftarrow r_6 - (s^2 - s - 1) r_2$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & (s^2 - s) \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(s^2 - s - 1) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} (s^2 - s - 1) & s(s - 1) \\ 0 & s^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$                            |

Table 4.5: Forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$ : itérations pour la seconde colonne

polynomiale en facteurs premiers à gauche de  $\mathbf{F}(s)$  s'écrit comme suit:

$$\mathbf{F}(s) = -\mathbf{U}_{22}^{-1}(s)\mathbf{U}_{21}(s) = - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -s \\ 0 & -s^2 & 0 & (s^2 - s) \\ 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(s^2 - s - 1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.362)$$

En calculant  $\mathbf{V}(s) = \mathbf{U}^{-1}(s)$  il vient:

$$\mathbf{U}^{-1}(s) = \mathbf{V}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11}(s) & \mathbf{V}_{12}(s) \\ \mathbf{V}_{21}(s) & \mathbf{V}_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^2 & s - s^2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - s + s^2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & s & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.363)$$

La matrice  $\mathbf{V}_{11}(s)$  est une matrice carrée inversible. La décomposition polynomiale en facteurs premiers à droite de  $\mathbf{F}(s)$  s'écrit comme suit:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{V}_{21}(s)\mathbf{V}_{11}^{-1}(s) = \begin{bmatrix} 0 & s \\ 1 & 0 \\ s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2 & s - s^2 \\ 0 & -1 - s + s^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (4.364)$$

En réalisant un travail similaire sur les colonnes de la forme d'Hermite obtenue, la matrice  $\mathbf{R}(s)$  peut être diagonalisée. En partant de la Table 4.5, les opérations sur les lignes (matrice  $\mathbf{U}(s)$ ) et les colonnes (matrice  $\mathbf{W}(s)$ ) de  $\mathbf{P}(s)$  sont présentées dans la Table 4.6.

Nous obtenons ainsi la relation suivante où les matrices  $\mathbf{U}(s)$  (opérations sur les lignes) et  $\mathbf{W}(s)$  (opérations sur les colonnes) sont unimodulaires:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(s) \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix} \mathbf{W}(s) &= \begin{bmatrix} \text{diag}(p_i(s)) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & (s^2 - s) \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(s^2 - s - 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2(s^2 - s - 1) & 0 \\ 0 & s^2(s^2 - s - 1) \\ 0 & s^3 \\ (s^2 - s - 1) & s(s - 1) \\ s(s^2 - s - 1) & s^2(s - 1) \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & s^2 - s \\ 1 & -s^2 + s + 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -s^2(s^2 - s - 1) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.365) \end{aligned}$$

■

| Opération (colonne ou ligne)             | $\mathbf{U}(s)$                                                                                                                                                                                                 | $\mathbf{P}(s)$                                                                                                | $\mathbf{W}(s)$                                                  |
|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
|                                          | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & (s^2 - s) \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(s^2 - s - 1) \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} (s^2 - s - 1) & s(s - 1) \\ 0 & s^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$        | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$                   |
| $c_2 \leftarrow c_2 - c_1$               | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & (s^2 - s) \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(s^2 - s - 1) \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} (s^2 - s - 1) & 1 \\ 0 & s^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$               | $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$                  |
| $c_2 \leftrightarrow c_1$                | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & (s^2 - s) \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(s^2 - s - 1) \end{bmatrix}$    | $\begin{bmatrix} 1 & (s^2 - s - 1) \\ s^2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$               | $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$                  |
| $r_2 \leftarrow r_2 - s^2 r_1$           | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & (s^2 - s) \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(s^2 - s - 1) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & (s^2 - s - 1) \\ 0 & -s^2(s^2 - s - 1) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$                  |
| $c_2 \leftarrow c_2 - (s^2 - s - 1) c_1$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -s \\ 1 & 0 & 0 & -s^2 & 0 & (s^2 - s) \\ 0 & 0 & 0 & -s & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(s^2 - s - 1) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -s^2(s^2 - s - 1) \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$             | $\begin{bmatrix} -1 & s^2 - s \\ 1 & -s^2 + s + 1 \end{bmatrix}$ |

Table 4.6: Obtention de la forme de Smith-McMillan à partir de la forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$

#### 4.7.8 Degré de McMillan, dimension, poles et zéros de transmission

A partir des décompositions polynomiales en facteurs premiers à droite ou à gauche de  $\mathbf{F}(s)$ , les propriétés suivantes peuvent être établies<sup>6</sup>:

- Le déterminant de  $\mathbf{V}_{11}(s)$  est égal au déterminant  $\mathbf{U}_{22}(s)$ , à une constante près:

$$\det(\mathbf{V}_{11}(s)) = c \det(\mathbf{U}_{22}(s)), \quad c = \text{constante} \quad (4.366)$$

- Le degré de  $\det(\mathbf{V}_{11}(s))$  (ou de  $\det(\mathbf{U}_{22}(s))$ ) est appelé degré de McMillan de  $\mathbf{F}(s)$ . Le degré de McMillan de  $\mathbf{F}(s)$  est égal à la dimension du vecteur d'état (et donc de la matrice d'état  $\mathbf{A}$ ) issue de la réalisation minimale de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$ .
- Les poles de  $\mathbf{F}(s)$  sont soit les racines de  $\det(\mathbf{V}_{11}(s)) = 0$  ou de  $\det(\mathbf{U}_{22}(s)) = 0$ .
- Les zéros de transmission de  $\mathbf{F}(s)$  sont les valeurs de  $s$  qui rendent déficient le rang normal de  $\mathbf{V}_{21}(s)$  ou de  $\mathbf{U}_{21}(s)$ .

**Exemple 4.26.** Considérons la matrice  $\mathbf{F}(s)$  suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2s^2+2s+1} & \frac{s^2+3}{2s^2+2s+1} \end{bmatrix} \quad (4.367)$$

Le système considéré est un système à 1 sortie (nombre de lignes de  $\mathbf{F}(s)$ ) et 2 entrées (nombre de colonnes de  $\mathbf{F}(s)$ ).

| Opération sur les lignes                  | $\mathbf{U}(s)$                                                                                            | $\mathbf{P}(s)$                                                                                                                                |
|-------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                           | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 2s^2 + 2s + 1 & 0 \\ 0 & 2s^2 + 2s + 1 \\ 1 & s^2 + 3 \\ 1 & s^2 + 3 \\ 0 & 2s^2 + 2s + 1 \\ 2s^2 + 2s + 1 & 0 \end{bmatrix}$ |
| $r_3 \leftrightarrow r_1$                 |                                                                                                            |                                                                                                                                                |
| $r_3 \leftarrow r_3 - (2s^2 + 2s + 1)r_1$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -(2s^2 + 2s + 1) \end{bmatrix}$                         | $\begin{bmatrix} 1 & s^2 + 3 \\ 0 & 2s^2 + 2s + 1 \\ 0 & -(2s^2 + 2s + 1)(s^2 + 3) \end{bmatrix}$                                              |

Table 4.7: Forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$ : itérations pour la première colonne

| Opération sur les lignes            | $\mathbf{U}(s)$                                                                            | $\mathbf{P}(s)$                                                           |
|-------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $r_3 \leftarrow r_3 + (s^2 + 3)r_2$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & (s^2 + 3) & -(2s^2 + 2s + 1) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} 1 & s^2 + 3 \\ 0 & 2s^2 + 2s + 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ |

Table 4.8: Forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$ : itérations pour la seconde colonne

Il est clair que  $\mathbf{F}(s)$  peut s'écrire comme suit où  $\mathbf{D}(s)$  est une matrice diagonale construite autour du polynôme  $\Psi(s) = 2s^2 + 2s + 1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \mathbf{N}(s)\mathbf{D}^{-1}(s) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & s^2 + 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2s^2 + 2s + 1 & 0 \\ 0 & 2s^2 + 2s + 1 \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (4.368)$$

Recherchons alors la forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s) := \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix}$  où:

$$\begin{cases} \mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} 2s^2 + 2s + 1 & 0 \\ 0 & 2s^2 + 2s + 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}(s) = \begin{bmatrix} 1 & s^2 + 3 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.369)$$

En appliquant l'algorithme proposé par Rugh<sup>6</sup>, la forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$  peut être calculée par itérations successives comme montré dans la Table 4.7 pour la première colonne.

Ensuite nous appliquons le même type d'itérations à la seconde colonne, en ignorant la première ligne et en faisant en sorte que sur la deuxième ligne apparaisse toujours un polynôme non nul de degré minimal. Nous obtenons la Table 4.8.

Enfin la matrice polynomiale unimodulaire  $\mathbf{U}(s)$  (ici  $\det(\mathbf{U}(s)) = -1$ ) est partitionnée comme suit, où  $\mathbf{U}_{11}(s)$  est une matrice polynomiale  $2 \times 2$  et  $\mathbf{U}_{22}(s)$  une matrice polynomiale  $1 \times 1$ :

$$\mathbf{U}(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & (s^2 + 3) & -(2s^2 + 2s + 1) \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11}(s) & \mathbf{U}_{12}(s) \\ \mathbf{U}_{21}(s) & \mathbf{U}_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.370)$$



La décomposition polynomiale en facteurs premiers à gauche de  $\mathbf{F}(s)$  s'écrit comme suit:

$$\mathbf{F}(s) = -\mathbf{U}_{22}^{-1}(s)\mathbf{U}_{21}(s) = \frac{1}{2s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} 1 & (s^2 + 3) \end{bmatrix} \quad (4.371)$$

Nous pouvons alors affirmer que:

- Le degré de McMillan de  $\mathbf{F}(s)$  est égal à 2: il s'agit de la dimension du système.
- Les poles de  $\mathbf{F}(s)$  sont au nombre de 2: ce sont les racines de:

$$\det(2s^2 + 2s + 1) = 2s^2 + 2s + 1 \quad (4.372)$$

- Les zéros de transmission de  $\mathbf{F}(s)$  n'existent pas. En effet, il n'existe pas de valeur de  $s$  rendant déficient le rang normal de  $\begin{bmatrix} 1 & (s^2 + 3) \end{bmatrix}$ , qui vaut 1  $\forall s$ .

■

**Exemple 4.27.** Considérons à nouveau la matrice de transfert suivante:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{s+1}{s+2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} \quad (4.373)$$

Il est clair que  $\mathbf{F}(s)$  peut s'écrire comme suit où  $\mathbf{D}(s)$  est une matrice diagonale construite autour du polynôme  $\Psi(s) = (s+2)(s+3) = s^2 + 5s + 6$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \mathbf{N}(s)\mathbf{D}^{-1}(s) \\ &= \begin{bmatrix} 2(s+3) & (s+1)(s+2) \\ (s+3) & 5(s+3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (s+2)(s+3) & 0 \\ 0 & (s+2)(s+3) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2s+6 & s^2+3s+2 \\ s+3 & 5s+15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^2+5s+6 & 0 \\ 0 & s^2+5s+6 \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned} \quad (4.374)$$

Recherchons alors la forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s) := \begin{bmatrix} \mathbf{D}(s) \\ \mathbf{N}(s) \end{bmatrix}$  où:

$$\begin{cases} \mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} s^2 + 5s + 6 & 0 \\ 0 & s^2 + 5s + 6 \end{bmatrix} \\ \mathbf{N}(s) = \begin{bmatrix} 2s + 6 & s^2 + 3s + 2 \\ s + 3 & 5s + 15 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.375)$$

En appliquant l'algorithme proposé par Rugh<sup>6</sup>, la forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$  peut être calculée par itérations successives comme montré dans la Table 4.9 pour la première colonne.

Ensuite nous appliquons le même type d'itérations à la seconde colonne, en ignorant la première ligne et en faisant en sorte que sur la deuxième ligne apparaisse toujours un polynôme unitaire (non nul) de degré minimal. Nous obtenons la Table 4.10. La dernière itération,  $r_1 \leftarrow r_1 - (5s + 15)r_2$ , permet

| Opération sur les lignes          | $\mathbf{U}(s)$                                                                                          | $\mathbf{P}(s)$                                                                                                  |
|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                   | $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$         | $\begin{bmatrix} s^2 + 5s + 6 & 0 \\ 0 & s^2 + 5s + 6 \\ 2s + 6 & s^2 + 3s + 2 \\ s + 3 & 5s + 15 \end{bmatrix}$ |
| $r_4 \leftrightarrow r_1$         | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$         | $\begin{bmatrix} s + 3 & 5s + 15 \\ 0 & s^2 + 5s + 6 \\ 2s + 6 & s^2 + 3s + 2 \\ s^2 + 5s + 6 & 0 \end{bmatrix}$ |
| $r_3 \leftarrow r_3 - 2r_1$       | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$        | $\begin{bmatrix} s + 3 & 5s + 15 \\ 0 & s^2 + 5s + 6 \\ 0 & s^2 - 7s - 28 \\ s^2 + 5s + 6 & 0 \end{bmatrix}$     |
| $r_4 \leftarrow r_4 - (s + 2)r_1$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -(s + 2) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} s + 3 & 5s + 15 \\ 0 & s^2 + 5s + 6 \\ 0 & s^2 - 7s - 28 \\ 0 & -5s^2 - 25s - 30 \end{bmatrix}$ |

Table 4.9: Forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$ : itérations pour la première colonne

de remplacer  $m_{1,2}(s) = 5s + 15$  par un polynôme de degré plus petit que  $\deg(m_{2,2}(s)) = 0$

Enfin la matrice polynomiale unimodulaire  $\mathbf{U}(s)$  (ici  $\det(\mathbf{U}(s)) = -6/10$ ) est partitionnée comme suit, où  $\mathbf{U}_{11}(s)$  est une matrice polynomiale  $2 \times 2$  et  $\mathbf{U}_{22}(s)$  une matrice polynomiale  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{U}(s) = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & p_{12}(s) & p_{13}(s) & p_{14}(s) \\ 0 & \frac{6s-59}{10} & -\frac{(6s+13)}{10} & \frac{6s+13}{5} \\ \hline 0 & p_{32}(s) & p_{33}(s) & p_{34}(s) \\ 1 & p_{42}(s) & p_{43}(s) & p_{44}(s) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{U}_{11}(s) & \mathbf{U}_{12}(s) \\ \hline \mathbf{U}_{21}(s) & \mathbf{U}_{22}(s) \end{array} \right] \quad (4.376)$$

La décomposition polynomiale en facteurs premiers à gauche de  $\mathbf{F}(s)$  s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= -\mathbf{U}_{22}^{-1}(s)\mathbf{U}_{21}(s) = \begin{bmatrix} p_{33}(s) & p_{34}(s) \\ p_{43}(s) & p_{44}(s) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & p_{32}(s) \\ 1 & p_{42}(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0.6s^2 + 3s + 3.6 & -1.2s^2 - 6s - 7.2 \\ -3s^3 - 21.5s^2 - 50.5s - 39 & 6s^3 + 43s^2 + 100s + 76 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \begin{bmatrix} 0 & -0.6s^2 + 4.2s + 16.8 \\ 1 & 3s^3 - 14.5s^2 - 129.5s - 177 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.377)$$

De plus:

$$\det(\mathbf{U}_{22}(s)) = -0.6s^3 - 4.2s^2 - 9.6s - 7.2 = -0.6(s + 2)^2(s + 3) \quad (4.378)$$

Nous pouvons alors affirmer que:

- Le degré de McMillan de  $\mathbf{F}(s)$  est égal à  $\deg(\det(\mathbf{U}_{22}(s))) = 3$ : il s'agit de la dimension du système;

| Opération sur les lignes                     | $\mathbf{U}(s)$                                                                                                                                                                                                         | $\mathbf{P}(s)$                                                                                            |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $r_3 \leftarrow r_3 - r_2$                   | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -(s+2) \end{bmatrix}$                                                                                                                 | $\begin{bmatrix} s+3 & 5s+15 \\ 0 & s^2+5s+6 \\ 0 & -12s-34 \\ 0 & -5s^2-25s-30 \end{bmatrix}$             |
| $r_3 \leftrightarrow r_2$                    | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(s+2) \end{bmatrix}$                                                                                                                 | $\begin{bmatrix} s+3 & 5s+15 \\ 0 & -12s-34 \\ 0 & s^2+5s+6 \\ 0 & -5s^2-25s-30 \end{bmatrix}$             |
| $r_2 \leftarrow -\frac{1}{12}r_2$            | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(s+2) \end{bmatrix}$                                                                                  | $\begin{bmatrix} s+3 & 5s+15 \\ 0 & s+\frac{17}{6} \\ 0 & s^2+5s+6 \\ 0 & -5s^2-25s-30 \end{bmatrix}$      |
| $r_3 \leftarrow r_3 - (s + \frac{13}{6})r_2$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{-6s+59}{72} & \frac{6s+13}{72} & \frac{-6s-13}{36} \\ 1 & 0 & 0 & -(s+2) \end{bmatrix}$                                   | $\begin{bmatrix} s+3 & 5s+15 \\ 0 & s+\frac{17}{6} \\ 0 & -\frac{5}{36} \\ 0 & -5s^2-25s-30 \end{bmatrix}$ |
| $r_3 \leftrightarrow r_2$                    | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-6s+59}{72} & \frac{6s+13}{72} & \frac{-6s-13}{36} \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 & -(s+2) \end{bmatrix}$                                   | $\begin{bmatrix} s+3 & 5s+15 \\ 0 & -\frac{5}{36} \\ 0 & s+\frac{17}{6} \\ 0 & -5s^2-25s-30 \end{bmatrix}$ |
| $r_2 \leftarrow -\frac{36}{5}r_2$            | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{6s-59}{10} & \frac{-(6s+13)}{10} & \frac{6s+13}{5} \\ 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & 0 & -(s+2) \end{bmatrix}$                                   | $\begin{bmatrix} s+3 & 5s+15 \\ 0 & 1 \\ 0 & s+\frac{17}{6} \\ 0 & -5s^2-25s-30 \end{bmatrix}$             |
| $r_3 \leftarrow r_3 - (s + \frac{17}{6})r_2$ | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{6s-59}{10} & \frac{-(6s+13)}{10} & \frac{6s+13}{5} \\ 0 & p_{32}(s) & p_{33}(s) & p_{34}(s) \\ 1 & 0 & 0 & -(s+2) \end{bmatrix}$                                            | $\begin{bmatrix} s+3 & 5s+15 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & -5s^2-25s-30 \end{bmatrix}$                          |
| $r_4 \leftarrow r_4 + (5s^2 + 25s + 30)r_2$  | $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{6s-59}{10} & \frac{-(6s+13)}{10} & \frac{6s+13}{5} \\ 0 & p_{32}(s) & p_{33}(s) & p_{34}(s) \\ 1 & p_{42}(s) & p_{43}(s) & p_{44}(s) \end{bmatrix}$                         | $\begin{bmatrix} s+3 & 5s+15 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$                                     |
| $r_1 \leftarrow r_1 - (5s + 15)r_2$          | $\begin{bmatrix} 0 & p_{12}(s) & p_{13}(s) & p_{14}(s) \\ 0 & \frac{6s-59}{10} & \frac{-(6s+13)}{10} & \frac{6s+13}{5} \\ 0 & p_{32}(s) & p_{33}(s) & p_{34}(s) \\ 1 & p_{42}(s) & p_{43}(s) & p_{44}(s) \end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$                                         |

$$\text{où } \begin{cases} p_{12}(s) = -3s^2 + 20.5s + 88.5 \\ p_{13}(s) = 3s^2 + 15.5s + 19.5 \\ p_{14}(s) = 6s^2 - 31s - 38 \\ p_{32}(s) = \frac{-3s^2+21s+84}{5} = -0.6s^2 + 4.2s + 16.8 \\ p_{33}(s) = \frac{3s^2+15s+18}{5} = 0.6s^2 + 3s + 3.6 \\ p_{34}(s) = \frac{-6s^2-30s-36}{5} = -1.2s^2 - 6s - 7.2 \\ p_{42}(s) = 3s^3 - 14.5s^2 - 129.5s - 177 \\ p_{43}(s) = -3s^3 - 21.5s^2 - 50.5s - 39 \\ p_{44}(s) = 6s^3 + 43s^2 + 100s + 76 \end{cases}$$

Table 4.10: Forme (normale) d'Hermite de  $\mathbf{P}(s)$ : itérations pour la seconde colonne

- Les 3 poles de  $\mathbf{F}(s)$  sont les racines de  $\det(\mathbf{U}_{22}(s))$ : ce sont  $-2$ , de multiplicité 2, et  $-3e$  multiplicité 1;
- Les zéros de transmission de  $\mathbf{F}(s)$  sont les valeurs de  $s$  rendant déficient le rang normal de  $\mathbf{U}_{21}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -0.6s^2 + 4.2s + 16.8 \\ 1 & 3s^3 - 14.5s^2 - 129.5s - 177 \end{bmatrix}$ . Le normal rang de  $\mathbf{U}_{21}(s)$  vaut 2 sauf pour les valeurs de  $s$  solutions de l'équation suivante:

$$-0.6s^2 + 4.2s + 16.8 = 0 \Leftrightarrow -s^2 + 7s + 28 = 0 \quad (4.379)$$

■



## Chapitre 5

# Réduction de modèle

### 5.1 Introduction

Rappelons que l'expression de la trajectoire d'un système dynamique linéaire et invariant (i.e. la solution de l'équation différentielle décrivant la dynamique du système) s'exprime à partir de  $\exp^{\mathbf{A}t}$ . Le développement sous forme modale de  $\exp^{\mathbf{A}t}$  que nous avons vu dans le chapitre précédent consacré à la résolution de l'équation d'état est le suivant:

$$\exp^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=1}^n \underline{v}_i \underline{w}_i^T \exp^{\lambda_i t} \quad (5.1)$$

Lorsque toutes les valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{A}$  sont négatives alors il est clair que  $\exp^{\lambda_i t}$  convergera d'autant plus vite vers 0 que  $\lambda_i$  est négatif. Pour  $t$  suffisamment *grand* alors les termes qui dépendent de  $\exp^{\lambda_i t}$  où  $\lambda_i$  est *très* négatif auront une contribution négligeable dans le calcul de  $\exp^{\mathbf{A}t}$  et donc dans l'expression de la trajectoire du système. Ainsi en négligeant les modes rapides d'un système (i.e. les modes non dominants, c'est à dire les valeurs propres  $\lambda_i$  à partie réelle négative les plus éloignées de l'origine) il est possible de construire des modèles plus simples qui ne seront valables pour les *grandes* échelles de temps.

La réduction d'un système consiste à déterminer un modèle d'ordre plus faible afin de faciliter sa manipulation. Plusieurs méthodes existent.

Nous présentons dans un premier temps l'approximation de Padé pour les fonctions ou les matrices de transfert. Cette méthode a pour principal intérêt d'être très simple à mettre en œuvre. Dans un deuxième temps nous revenons dans le domaine temporel et une méthode de réduction de la représentation d'état est présentée: il s'agit de la technique des perturbations singulières. Cette technique permet de mettre en évidence les échelles de temps du système étudié et donc de séparer des dynamiques distinctes lorsque le système étudié en possède.

## 5.2 Méthode de Padé

Nous présentons dans cette section l'approximation de Padé, qui a pour principal intérêt d'être très simple à mettre en œuvre.

Soit  $F(s)$  une fonction de transfert dont le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur (i.e. fonction de transfert strictement propre) et dont le dénominateur a toutes ses racines à partie réelle strictement négative:

$$\begin{cases} F(s) = \frac{n_0 + n_1 s + \dots + n_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} = \frac{N(s)}{D(s)} \\ D(\lambda_i) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Notons que, sans perte de généralité, le coefficient  $a_n$  a pour valeur 1.

L'approximation de Padé d'ordre  $(q, r)$  de  $F(s)$  est la fraction rationnelle  $\tilde{F}_{q,r}(s)$  dont le développement limité autour de  $s = 0$  est le même que celui de  $F(s)$  jusqu'à l'ordre  $q + r$ :

$$\tilde{F}_{q,r}(s) = \frac{\tilde{n}_0 + \tilde{n}_1 s + \dots + \tilde{n}_q s^q}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 s + \dots + \tilde{a}_{r-1} s^{r-1} + s^r} \quad (5.3)$$

La justification de cette approximation provient de l'identification de la réponse indicielle des systèmes de fonction de transfert  $F(s)$  et de  $\tilde{F}_{q,r}(s)$  pour  $t$  grand ; l'utilisation du théorème de la valeur finale conduit alors à identifier  $F(s)$  et  $\tilde{F}_{q,r}(s)$  autour de  $s$  voisin de zéro. Nous avons en effet en ce qui concerne la réponse indicielle:

$$\begin{cases} Y(s) = F(s)U(s) \\ Y_r(s) = \tilde{F}_{q,r}(s)U(s) \\ \underline{u}(t) = \Gamma(t) \Rightarrow U(s) = \frac{1}{s} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y(s) = \frac{F(s)}{s} \\ Y_r(s) = \frac{\tilde{F}_{q,r}(s)}{s} \end{cases} \quad (5.4)$$

L'utilisation du théorème de la valeur finale conduit à:

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{y}(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} F(s) \\ \lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY_r(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{F}_{q,r}(s) \end{cases} \quad (5.5)$$

On rappelle que le théorème de la valeur finale n'a de sens que si la limite existe, c'est à dire à condition que  $F(s)$  et  $\tilde{F}_{q,r}(s)$  soient stables (i.e. tous les pôles à partie réelle négative)!

En imposant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) \quad (5.6)$$

Il vient:

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \tilde{F}_{q,r}(s) \quad (5.7)$$

D'un point de vue pratique le développement limité autour de  $s = 0$  peut être obtenu comme le quotient de la division selon les puissances *croissantes* de  $s$  (attention à ne pas confondre cette division avec la division Euclidienne où les polynômes  $N(s)$  et  $D(s)$  sont écrits selon les puissances décroissantes de  $s$ ).

Comme le développement limité est effectué autour de  $s = 0$ , l'approximation de Padé conserve le comportement basse fréquence,

c'est-à-dire à longue échelle de temps, de  $F(s)$ . Par la suite nous prendrons  $q = 0$  et nous noterons  $\tilde{F}_{0,r}(s) := \tilde{F}(s)$ :

$$\tilde{F}_{0,r}(s) := \tilde{F}(s) = \frac{\tilde{n}_0}{\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 s + \cdots + \tilde{a}_{r-1} s^{r-1} + s^r} = \frac{\tilde{n}_0}{\tilde{D}(s)} \quad (5.8)$$

Le dénominateur  $\tilde{D}(s)$  du modèle réduit  $\tilde{F}(s)$  est obtenu à partir des  $r$  pôles de  $F(s)$  dont la partie réelle est la plus proche de zéro, c'est-à-dire à partir des pôles dominants de  $F(s)$ . Lorsque la division entre la partie réelle des pôles non-dominants de  $F(s)$  avec la partie réelle des pôles dominants de  $F(s)$  est supérieure à 3 (ou 2) alors le modèle basse fréquence obtenu grâce à approximation de Padé est représentatif du comportement du système sur une échelle de temps importante (grande échelle de temps).

Une fois que  $\tilde{D}(s)$  est connu, le coefficient  $\tilde{n}_0$  du numérateur peut être obtenu en identifiant les gains statiques des fonctions de transfert  $F(s)$  et  $\tilde{F}(s)$ . Cela évite ainsi de calculer les développements limités autour de  $s = 0$ .

Nous pouvons remarquer que les modèles élémentaires du premier et du second ordre sont très largement étudiés parce qu'ils peuvent être considérés comme la réduction de fonctions de transfert d'ordre plus élevé:

- lorsque le pôle dominant est réel alors  $r = 1$ : l'approximation de Padé conduit à un modèle élémentaire du premier ordre;
- lorsque les pôles dominants sont complexes conjugués alors  $r = 2$ : l'approximation de Padé conduit à un modèle élémentaire du deuxième ordre.

**Exemple 5.1.** *Considérons la fonction de transfert suivante:*

$$F_1(s) = \frac{2s + 1}{5s^2 + 6s + 1} \quad (5.9)$$

*Les deux pôles de  $F_1(s)$  sont  $-1$  et  $-1/5$ . Dans cet exemple le pôle dominant de  $F_1(s)$  est  $-1/5$ . L'approximation de Padé conduit au modèle élémentaire du premier ordre suivant:*

$$\tilde{F}_1(s) = \frac{\tilde{n}_0}{s + 1/5} \quad (5.10)$$

*La valeur du coefficient  $\tilde{n}_0$  est obtenue en identifiant les valeurs de  $F_1(s)$  et  $\tilde{F}_1(s)$  en  $s = 0$ :*

$$\tilde{F}_1(0) = F_1(0) \Rightarrow \frac{\tilde{n}_0}{1/5} = \frac{1}{1} \Rightarrow \tilde{n}_0 = 1/5 \quad (5.11)$$

*Ainsi l'expression de  $\tilde{F}_1(s)$  est la suivante:*

$$\tilde{F}_1(s) = \frac{1/5}{s + 1/5} = \frac{1}{5s + 1} \quad (5.12)$$

*La Figure 5.1 représente les réponses à un échelon unité de  $F_1(s)$  et  $\tilde{F}_1(s)$ : nous pouvons constater que les deux réponses indicielles sont très proches pour des valeurs suffisamment grandes du temps.*

■



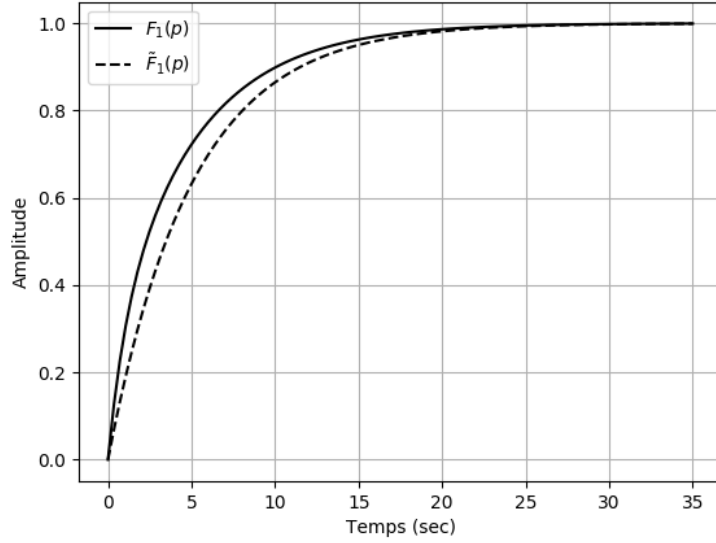


Figure 5.1: Réponses à un échelon unité de  $F_1(s)$  et  $\tilde{F}_1(s)$

**Exemple 5.2.** Considérons la fonction de transfert suivante:

$$F_2(s) = \frac{8}{s^3 + 5s^2 + 8.25s + 17} \quad (5.13)$$

Ici les trois pôles de  $F_2(s)$  sont  $-0.5 \pm 2j$  et  $-4$ . Compte tenu de la définition proposée, les pôles dominants de  $F_2(s)$  sont  $-0.5 \pm 2j$ . L'approximation de Padé conduit au modèle élémentaire du deuxième ordre suivant:

$$\tilde{F}_2(s) = \frac{\tilde{n}_0}{(s + 0.5 + 2j)(s + 0.5 - 2j)} = \frac{\tilde{n}_0}{s^2 + s + 4.25} \quad (5.14)$$

La valeur du coefficient  $\tilde{n}_0$  est obtenue en identifiant les valeurs de  $F_2(s)$  et  $\tilde{F}_2(s)$  en  $s = 0$ :

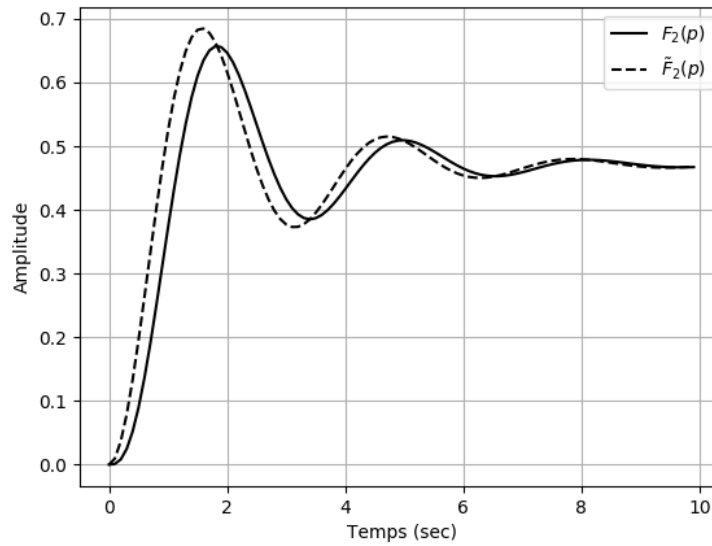
$$\tilde{F}_2(0) = F_2(0) \Rightarrow \frac{\tilde{n}_0}{4.25} = \frac{8}{17} \Rightarrow \tilde{n}_0 = 4.25 \frac{8}{17} = 2 \quad (5.15)$$

Ainsi l'expression de  $\tilde{F}_2(s)$  est la suivante:

$$\tilde{F}_2(s) = \frac{2}{s^2 + s + 4.25} \quad (5.16)$$

La Figure 5.2 représente les réponses à un échelon unité de  $F_2(s)$  et  $\tilde{F}_2(s)$ : nous pouvons constater que les deux réponses indicielles sont très proches pour des valeurs suffisamment grandes du temps.

■

Figure 5.2: Réponses à un échelon unité de  $F_2(s)$  et  $\tilde{F}_2(s)$ 

## 5.3 Méthodes des perturbations singulières

### 5.3.1 Perturbations régulières

La théorie des perturbations consiste à analyser l'effet d'une petite variation dans les paramètres d'une équation sur la solution de celle-ci.

Considérons par exemple l'équation différentielle suivante, où  $\epsilon$  est un paramètre *petit*:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) + \epsilon x^2(t) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (5.17)$$

Nous pouvons vérifier que la solution exacte de cette équation est donnée par:

$$x(t) = \frac{\cos(\epsilon)}{e^t(1+\epsilon \cos(\epsilon)) - \epsilon \cos(\epsilon)} \quad (5.18)$$

Dans le cas général la solution d'une équation différentielle non-linéaire peut s'avérer extrêmement difficile à calculer (et encore, lorsque le calcul est possible...). Afin de trouver une solution approchée, considérons dans un premier temps le cas où  $\epsilon = 0$ . Dans ces conditions, l'équation différentielle non-linéaire précédente devient une équation différentielle linéaire:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (5.19)$$

dont la solution est:

$$x_0(t) = e^{-t} \quad (5.20)$$

Maintenant que nous avons approximé la solution pour  $\epsilon = 0$ , approchons la solution de l'équation (5.17) par un développement selon les puissances croissantes de  $\epsilon$ :

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots \quad (5.21)$$

Il vient, en utilisant cette expression de  $x(t)$  dans (5.17):

$$\begin{cases} (\dot{x}_0(t) + \epsilon \dot{x}_1(t) + \dots) + (x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots) + \epsilon (x_0(t) + \epsilon x_1(t) + \dots)^2 = 0 \\ x_0(0) + \epsilon x_1(0) + \dots = 1 \end{cases} \quad (5.22)$$

En identifiant à zéro tous les coefficients de  $\epsilon^n$  il vient:

$$\begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_0(t) + x_0(t) = 0 \\ x_0(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x_0(t) = e^{-t} \\ n = 1 &\Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) + x_1(t) + x_0^2(t) = 0 \\ x_1(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow x_1(t) = e^{-2t} \end{aligned} \quad (5.23)$$

En conséquence la solution de l'équation (5.17) peut être approchée par:

$$x(t) = x_0(t) + \epsilon x_1(t) + O(\epsilon^2) = e^{-t} + \epsilon e^{-2t} + O(\epsilon^2) \quad (5.24)$$

Les figures 5.3 et 5.4 permettent de comparer la solution exacte de l'équation (5.17) et la solution approchée à l'ordre 1 donnée en (5.24) pour deux valeurs du paramètre:  $\epsilon = 0.1$  et  $\epsilon = 0.01$ . On peut bien évidemment constater que plus la valeur du paramètre  $\epsilon$  est proche de zéro, plus l'erreur entre la solution approchée et la solution exacte est faible:

Cette approche peut se généraliser: la solution d'un problème avec perturbation est obtenue par un développement selon les puissances de la perturbation. Chaque terme de la solution approchée est obtenu en identifiant les coefficients de chaque puissance de la perturbation.

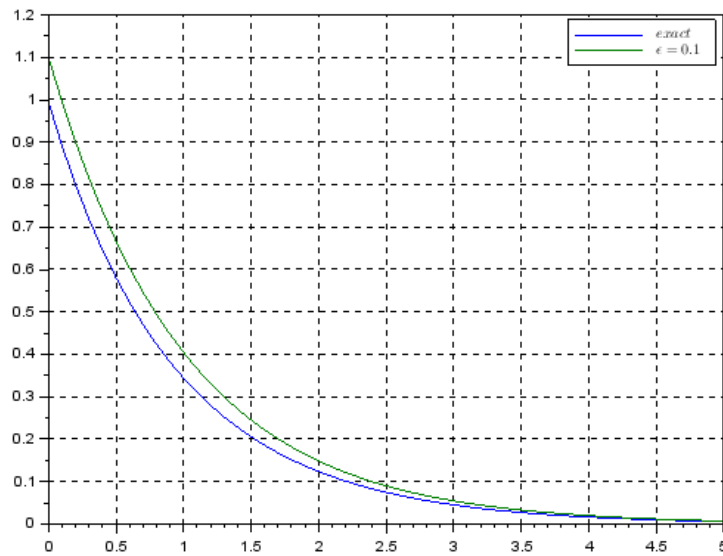
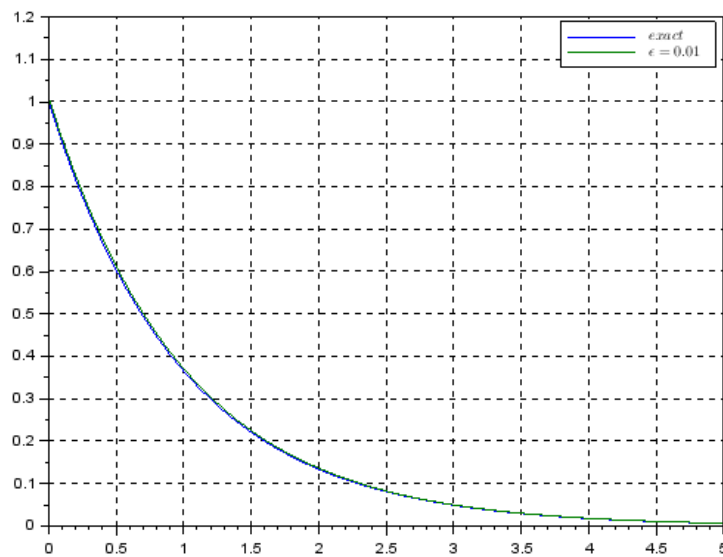
### 5.3.2 Perturbations singulières: exemple introductif

Nous avons supposé lors de l'étude des perturbations régulières que la solution perturbée d'une équation différentielle est proche de sa solution non perturbée. Cela n'est plus le cas lorsque le *petit* paramètre  $\epsilon$  est en facteur de la dérivée de plus grand ordre dans une équation différentielle. Dans ce cas en effet le fait de fixer  $\epsilon = 0$  diminue l'ordre de l'équation différentielle et les conditions initiales ne peuvent plus être satisfaites par la solution réduite. Prenons par exemple le cas de l'équation différentielle linéaire du premier ordre suivante:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x}(t) + x(t) = 1 \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.25)$$

Cette équation différentielle a pour solution exacte:

$$x(t, \epsilon) = 1 + (x_0 - 1)e^{-\frac{t}{\epsilon}} \quad (5.26)$$

Figure 5.3: Approximation par perturbations régulières pour  $\epsilon=0.1$ Figure 5.4: Approximation par perturbations régulières pour  $\epsilon=0.01$

En posant  $\epsilon = 0$  alors l'ordre de l'équation différentielle initiale est diminué et la solution de l'équation réduite est discontinue en zéro lorsque  $x_0 \neq 1$ ; nous avons en effet:

$$\epsilon = 0 \Rightarrow x(t, 0) = 1 \quad \forall t \geq 0 \quad (5.27)$$

Pour approcher la solution exacte  $x(t, \epsilon)$  lorsque le paramètre  $\epsilon$  est *petit* on dilate l'échelle des temps en prenant  $\tau = \frac{t}{\epsilon}$  afin de mieux analyser le phénomène transitoire rapide; cela revient à ajouter à  $x(t, 0)$  un terme correctif  $x_r(\tau)$  qui tend vers zéro lorsque  $\tau$  devient grand:

$$x(t, \epsilon) \approx x(t, 0) + x_r(\tau) \Rightarrow \dot{x}(t, \epsilon) \approx \dot{x}(t, 0) + \frac{1}{\epsilon} \frac{dx_r(\tau)}{d\tau} \quad (5.28)$$

L'approximation précédente revient à séparer les échelles de temps: la trajectoire  $x(t, \epsilon)$  est approchée par la somme:

- d'une trajectoire à temps *lent*, notée  $x(t, 0)$  et obtenue pour  $\epsilon = 0$ , et
- d'une trajectoire à temps *rapide*, notée  $x_r(\tau)$  où  $\tau$  est l'échelle de temps *rapide* définie par:

$$\tau = \frac{t}{\epsilon} \quad (5.29)$$

L'équation à laquelle obéit  $x_r(\tau)$  est appelée équation de couche limite ou de raccordement. Elle est obtenue en écrivant  $x(t, \epsilon) \approx x(t, 0) + x_r(\tau)$  puis en identifiant les termes en  $t$  et  $\tau$  et en imposant dans un dernier temps  $\epsilon = 0$ . Notons que cette approximation n'est valide que si la trajectoire à temps *rapide*  $x_r(\tau)$  tend vers zéro lorsque  $\tau$  devient grand.

Appliquons cette technique à l'exemple introductif:

$$\begin{cases} \epsilon \left( \dot{x}(t, 0) + \frac{1}{\epsilon} \frac{dx_r(\tau)}{d\tau} \right) + x(t, 0) + x_r(\tau) = 1 \\ x(0, 0) + x_r(0) = x_0 \end{cases} \quad (5.30)$$

En identifiant les trajectoires à temps *lent* et *rapide* puis en fixant  $\epsilon = 0$  il vient:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x}(t, 0) + x(t, 0) = 1 \text{ où } \epsilon = 0 \Rightarrow x(t, 0) = 1 \\ \frac{dx_r(\tau)}{d\tau} + x_r(\tau) = 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

Notons que le changement d'échelle de temps (5.29) permet de rendre *régulière* l'équation différentielle initiale singulièrement perturbée.

La solution de l'équation à temps lent a déjà été calculée précédemment ( $\epsilon = 0$ ). Quant à la solution de l'équation à temps rapide, ou équation de la couche limite, elle est donnée par:

$$x_r(\tau) = e^{-\tau} x_r(0) \quad (5.32)$$

Soit, en tenant compte de la condition initiale  $x(0, 0) + x_r(0) = x_0$  et de l'expression de la solution à temps lent  $x(t, 0) = 1$ :

$$x_r(0) = x_0 - x(0, 0) = x_0 - 1 \Rightarrow x_r(\tau) = e^{-\tau} (x_0 - 1) \quad (5.33)$$

La solution de (5.26) est alors approchée comme suit, où  $\tau$  représente l'échelle de temps *rapide*:

$$x(t) \approx x(t, \epsilon) + x_r(\tau) = 1 + (x_0 - 1)e^{-\tau} \quad (5.34)$$

Notons que la trajectoire à temps *rapide*, qui vaut ici  $(x_0 - 1)e^{-\tau}$ , tend bien vers zéro lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ .

### 5.3.3 Forme standard -Théorème de Tikhonov

Un système d'équations différentielles stationnaires est sous la forme standard d'un système singulièrement perturbé s'il peut s'écrire sous la forme suivante où  $\epsilon$  est un *petit* coefficient:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_1(t, \epsilon) = g(\underline{x}_1(t, \epsilon), \underline{x}_2(t, \epsilon), \epsilon), & \underline{x}_1(0, \epsilon) = \underline{x}_{10}, \quad \underline{x}_1(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^r \\ \epsilon \dot{\underline{x}}_2(t, \epsilon) = f(\underline{x}_1(t, \epsilon), \underline{x}_2(t, \epsilon), \epsilon), & \underline{x}_2(0, \epsilon) = \underline{x}_{20}, \quad \underline{x}_2(t, \epsilon) \in \mathbb{R}^{n-r} \end{cases} \quad (5.35)$$

La solution de ce système sera notée  $(\underline{x}_1(t, \epsilon), \underline{x}_2(t, \epsilon))$ :  $\underline{x}_1(t, \epsilon)$  est le vecteur des variables *lentes* et  $\underline{x}_2(t, \epsilon)$  est le vecteur des variables *rapides*.

En imposant  $\epsilon = 0$  dans le système (5.35) la première équation différentielle (équation à temps *rapide*) dégénère en une équation algébrique:

$$\epsilon = 0 \Rightarrow 0 = f(\underline{x}_1(t, 0), \underline{x}_2(t, 0), 0) \quad (5.36)$$

Nous supposons que cette équation admet des solutions séparées que nous noterons  $\varphi(\underline{x}_1(t, 0))$ :

$$0 = f(\underline{x}_1(t, 0), \underline{x}_2(t, 0), 0) = 0 \Rightarrow \underline{x}_2(t, 0) = \varphi(\underline{x}_1(t, 0)) \quad (5.37)$$

Le système (5.35) de  $n$  équations différentielles se réduit à un modèle réduit d'ordre  $r$ :

$$\begin{aligned} \epsilon = 0 \Rightarrow \dot{\underline{x}}_1(t, 0) &= g(\underline{x}_1(t, 0), \underline{x}_2(t, 0), 0) \\ &\Leftrightarrow \dot{\underline{x}}_1(t, 0) = g(\underline{x}_1(t, 0), \varphi(\underline{x}_1(t, 0)), 0) \end{aligned} \quad (5.38)$$

Soit:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_1(t, 0) = g(\underline{x}_1(t, 0)) \text{ où } \underline{x}_1(t, 0) \in \mathbb{R}^r \\ \underline{x}_1(0, 0) = \underline{x}_{10} \end{cases} \quad (5.39)$$

Ce modèle est appelé modèle à temps *lent*. Lorsque les conditions du théorème de Tikhonov sont satisfaites ce modèle permet d'obtenir une approximation de la solution  $\underline{x}_1(t, \epsilon)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\underline{x}_1(t, \epsilon) \approx \underline{x}_1(t, 0) \quad (5.40)$$

Par contre il n'y a aucune raison pour que la solution de l'équation algébrique (5.37) soit égale à  $\underline{x}_{20}$  à l'instant initial  $t = 0$ :

$$\underline{x}_2(0, 0) = \varphi(\underline{x}_1(0, 0)) \neq \underline{x}_{20} = \underline{x}_2(0, \epsilon) \quad (5.41)$$

Afin d'approcher la solution  $\underline{x}_2(0, \epsilon)$  nous ajoutons un terme correctif à temps *rapide* noté  $\underline{x}_{2f}(\tau)$  au terme  $\underline{x}_2(t, 0)$ :

$$\underline{x}_2(t, \epsilon) \approx \underline{x}_2(t, 0) + \underline{x}_{2f}(\tau) \quad (5.42)$$

Où  $\tau$  est le temps *rapide*:

$$\tau = \frac{t}{\epsilon} \quad (5.43)$$

Il s'agit maintenant de déterminer la dynamique de la solution approchée à temps *rapide*  $\underline{x}_{2f}(\tau)$ . Pour cela, approchons  $\underline{x}_1(t, \epsilon)$  de manière similaire à  $\underline{x}_2(t, \epsilon)$ :

$$\underline{x}_1(t, \epsilon) \approx \underline{x}_1(t, 0) + \underline{x}_{1f}(\tau) \quad (5.44)$$

Il vient après dérivation:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\underline{x}_2(t, \epsilon) \approx \frac{d}{dt}\underline{x}_2(t, 0) + \frac{d}{d\tau}\underline{x}_{2f}(\tau) = \frac{d}{dt}\underline{x}_2(t, 0) + \frac{1}{\epsilon}\frac{d}{d\tau}\underline{x}_{2f}(\tau) \\ \frac{d}{dt}\underline{x}_1(t, \epsilon) \approx \frac{d}{dt}\underline{x}_1(t, 0) + \frac{d}{d\tau}\underline{x}_{1f}(\tau) = \frac{d}{dt}\underline{x}_1(t, 0) + \frac{1}{\epsilon}\frac{d}{d\tau}\underline{x}_{1f}(\tau) \end{cases} \quad (5.45)$$

Utilisons ces approximations dans le système d'équations différentielles singulièrement perturbées (5.35):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\underline{x}_1(t, 0) + \frac{1}{\epsilon}\frac{d}{d\tau}\underline{x}_{1f}(\tau) \approx g(\underline{x}_2(t, 0) + \underline{x}_{2f}(\tau), \underline{x}_1(t, 0) + \underline{x}_{1f}(\tau), \epsilon) \\ \epsilon \left( \frac{d}{dt}\underline{x}_2(t, 0) + \frac{1}{\epsilon}\frac{d}{d\tau}\underline{x}_{2f}(\tau) \right) \approx f(\underline{x}_2(t, 0) + \underline{x}_{2f}(\tau), \underline{x}_1(t, 0) + \underline{x}_{1f}(\tau), \epsilon) \end{cases} \quad (5.46)$$

Soit en multipliant par  $\epsilon$  la première équation et en développant la deuxième équation:

$$\begin{cases} \epsilon \frac{d}{dt}\underline{x}_1(t, 0) + \frac{d}{d\tau}\underline{x}_{1f}(\tau) = \epsilon g(\underline{x}_2(t, 0) + \underline{x}_{2f}(\tau), \underline{x}_1(t, 0) + \underline{x}_{1f}(\tau), \epsilon) \\ \epsilon \frac{d}{dt}\underline{x}_2(t, 0) + \frac{d}{d\tau}\underline{x}_{2f}(\tau) = f(\underline{x}_2(t, 0) + \underline{x}_{2f}(\tau), \underline{x}_1(t, 0) + \underline{x}_{1f}(\tau), \epsilon) \end{cases} \quad (5.47)$$

En imposant  $\epsilon = 0$  nous obtenons:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}\underline{x}_{1f}(\tau) = 0 \\ \frac{d}{d\tau}\underline{x}_{2f}(\tau) = f(\underline{x}_2(t, 0) + \underline{x}_{2f}(\tau), \underline{x}_1(t, 0) + \underline{x}_{1f}(\tau), 0) \end{cases} \quad (5.48)$$

La première équation nous indique que  $\underline{x}_{1f}(\tau)$  est constant. Comme nous avons vu en (5.39) que  $\underline{x}_1(0, 0) = \underline{x}_{10}$  et sachant que  $\underline{x}_1(t, \epsilon) \approx \underline{x}_1(t, 0) + \underline{x}_{1f}(\tau)$  nous en déduisons que  $\underline{x}_{1f}(0) = 0$  et par conséquent:

$$\underline{x}_{1f}(\tau) = 0 \quad \forall \tau \quad (5.49)$$

Quant à l'expression de  $\underline{x}_2(t, 0)$ , elle est donnée par (5.37). Il vient finalement pour la dynamique de la solution approchée à temps *rapide*  $\underline{x}_{2f}(\tau)$ :

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau}\underline{x}_{2f}(\tau) = f(\varphi(\underline{x}_1(t, 0)) + \underline{x}_{2f}(\tau), \underline{x}_1(t, 0), 0) \quad \text{où } \underline{x}_{2f}(\tau) \in \mathbb{R}^{n-r} \\ \underline{x}_{2f}(0) = \underline{x}_2(0, \epsilon) - \varphi(\underline{x}_1(0, 0)) \end{cases} \quad (5.50)$$

Le théorème d'Andrey Nikolayevich Tikhonov (1952) indique que  $\underline{x}_1(t, \epsilon)$  tend vers  $\underline{x}_1(t, 0)$  et  $\underline{x}_2(t, \epsilon)$  tend vers  $\underline{x}_2(t, 0) + \underline{x}_{2f}(\tau)$  uniformément sur l'intervalle  $[0, T]$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  dans les conditions suivantes<sup>1</sup>:

- Les champs de vecteurs  $f$  et  $g$  sont continus

<sup>1</sup>Ying Tang, Christophe Prieur, Antoine Girard. Tikhonov theorem for linear hyperbolic systems. Automatica, Elsevier, 2015, 57, pp.1-10. <10.1016/j.automatica.2015.03.028>. <hal-01064805>

- La première équation de (5.35) et l'équation (5.39) ont des solutions uniques sur l'intervalle  $[0, T[$ ;
- Il existe une solution isolée de  $f(\underline{x}_2(t, 0), \underline{x}_1(t, 0), 0) = 0$  que nous noterons  $\underline{x}_2(t, 0) = \varphi(\underline{x}_1(t, 0))$ ;
- Le point 0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable de (5.50);
- La valeur initiale  $\underline{x}_2(0, \epsilon) - \varphi(\underline{x}_1(0, 0))$  est dans le bassin d'attraction de cet équilibre.

## 5.4 Cas des systèmes linéaires

### 5.4.1 Représentation d'état singulièrement perturbée

Considérons une réalisation  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{0})$  d'un système linéaire sans transmission directe ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ) décrit dans l'espace d'état sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) \end{cases} \quad (5.51)$$

Nous supposons par la suite que toutes les valeurs propres de la matrice d'état  $\mathbf{A}$  sont toutes à partie réelle négative (système linéaire stable) et nous désignerons par  $\lambda_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  classées par ordre décroissant de leur valeur réelle:

$$0 > R_e(\lambda_1) \geq R_e(\lambda_2) \geq \dots \geq R_e(\lambda_n) \quad (5.52)$$

En supposant que la multiplicité de chaque valeur propre vaut 1 la fonction de transfert de ce système s'écrit sous la forme suivante ( $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{R}_i}{s - \lambda_i} \end{aligned} \quad (5.53)$$

Nous nous intéressons au cas où les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  peuvent se décomposer en deux groupes suffisamment *distants* l'un de l'autre et nous définissons le paramètre  $\epsilon$  comme la valeur inférieure du rapport entre la partie réelle de deux valeurs propres successives triées par ordre décroissant. En notant  $r$  et  $r+1$  les indices des deux valeurs propres successives associées à ce minimum il vient:

$$0 < \epsilon := \inf_i \left( \frac{R_e(\lambda_i)}{R_e(\lambda_{i+1})} \right) := \frac{R_e(\lambda_r)}{R_e(\lambda_{r+1})} \leq 1 \quad (5.54)$$

Nous noterons,  $\forall i > r$ :

$$\lambda_i = \frac{\lambda'_i}{\epsilon} \quad \forall i > r \quad (5.55)$$

L'expression de  $\mathbf{F}(s)$  se décompose alors en deux fonction de transfert: la première fonction de transfert fait intervenir les modes *lents* où  $i \leq r$  et la



seconde fonction de transfert les modes *rapides* où  $i > r$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(s) &= \sum_{i=1}^f \frac{\mathbf{R}_i}{s - \lambda_i} + \sum_{i=r+1}^n \frac{\mathbf{R}_i}{s - \lambda_i} \\ &= \sum_{i=1}^f \frac{\mathbf{R}_i}{s - \lambda_i} + \sum_{i=r+1}^n \frac{\mathbf{R}_i}{s - \frac{\lambda'_i}{\epsilon}}\end{aligned}\quad (5.56)$$

Nous désignerons par:

- $\underline{x}_{sm}(t)$  les composantes du vecteur d'état associées aux modes lents (*slow*) dans la base modale, c'est à dire les composantes du vecteurs d'état associées aux valeurs propres les plus proches de zéro. Ce vecteur d'état est associé à la fonction de transfert suivante:

$$\mathbf{F}_s(s) = \sum_{i=1}^f \frac{\mathbf{R}_i}{s - \lambda_i} \quad (5.57)$$

- $\underline{x}_{fm}(t)$  les composantes du vecteur d'état associées aux modes rapides (*fast*) dans la base modale. Ce vecteur d'état est associé à la fonction de transfert suivante:

$$\mathbf{F}_f(s) = \sum_{i=r+1}^n \frac{\mathbf{R}_i}{s - \frac{\lambda'_i}{\epsilon}} \quad (5.58)$$

Par conséquent:

$$\mathbf{F}(s) = \mathbf{F}_s(s) + \mathbf{F}_f(s) \quad (5.59)$$

En utilisant la méthode de Gilbert et en choisissant  $\mathbf{C}_i$  et  $\mathbf{B}_i$  de telle sorte que  $\mathbf{C}_i \mathbf{B}_i = \mathbf{R}_i \forall i$  et  $\rho_i = \text{rank}(\mathbf{R}_i)$  la représentation d'état sous forme modale de  $\mathbf{F}(s)$  est alors la suivante:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_{sm}(t) \\ \dot{\underline{x}}_{fm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{sm}(t) \\ \underline{x}_{fm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_f \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{sm}(t) \\ \underline{x}_{fm}(t) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.60)$$

Où:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \mathbb{I}_{\rho_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_r \mathbb{I}_{\rho_r} & & \\ & & & \lambda_{r+1} \mathbb{I}_{\rho_{r+1}} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_n \mathbb{I}_{\rho_n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{B}_r \\ \mathbf{B}_{r+1} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_n \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{C}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \cdots & \mathbf{C}_r & \mathbf{C}_{r+1} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.61)$$

En tenant compte du fait que chaque valeur propre  $\lambda_i$  du modèle à temps *rapide* peut s'écrire  $\lambda_i = \frac{\lambda'_i}{\epsilon} \forall i > r$  et en écrivant  $\mathbf{B}_f$  sous la forme  $\mathbf{B}_f = \frac{\mathbf{B}'_f}{\epsilon}$ , l'équation d'état s'écrit comme suit:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_f = \frac{\mathbf{A}'_f}{\epsilon} \\ \mathbf{B}_f = \frac{\mathbf{B}'_f}{\epsilon} \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_{sm}(t) \\ \dot{\underline{x}}_{fm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\mathbf{A}'_f}{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{sm}(t) \\ \underline{x}_{fm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s \\ \frac{\mathbf{B}'_f}{\epsilon} \end{bmatrix} u(t) \quad (5.62)$$

Soit de manière équivalente dans la base modale:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_{sm}(t) \\ \epsilon \dot{\underline{x}}_{fm}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}'_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_{sm}(t) \\ \underline{x}_{fm}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s \\ \mathbf{B}'_f \end{bmatrix} u(t) \quad (5.63)$$

D'une manière générale, et sans faire intervenir la base modale et pour une multiplicité quelconque des valeurs propres, l'équation d'état d'un système singulièrement perturbé est la suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}}_s(t) \\ \dot{\underline{x}}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \frac{\mathbf{A}_{21}}{\epsilon} & \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_s(t) \\ \underline{x}_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \frac{\mathbf{B}_2}{\epsilon} \end{bmatrix} u(t) \quad (5.64)$$

Où:

- $\underline{x}_s(t)$  désigne les composantes du vecteur d'état associées aux modes lents (*slow*), c'est à dire les composantes du vecteurs d'état associées aux valeurs propres les plus proches de zéro, appelées aussi valeurs propres dominantes, ou *pôles dominants*;
- $\underline{x}_f(t)$  désigne les composantes du vecteur d'état associées aux modes rapides (*fast*).

En multipliant par  $\epsilon$  les composantes *rapides* du vecteur, la réalisation (5.64) peut s'écrire sous la forme suivante qui est celle d'un système algébro-différentiel singulièrement perturbé:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_s(t) = \mathbf{A}_{11}\underline{x}_s(t) + \mathbf{A}_{12}\underline{x}_f(t) + \mathbf{B}_1 u(t) \\ \epsilon \dot{\underline{x}}_f(t) = \mathbf{A}_{21}\underline{x}_s(t) + \mathbf{A}_{22}\underline{x}_f(t) + \mathbf{B}_2 u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_1\underline{x}_s(t) + \mathbf{C}_2\underline{x}_f(t) \end{cases} \quad (5.65)$$

La comportement du modèle réduit à temps *lent* est obtenu en posant  $\epsilon = 0$ . Il convergera d'autant plus rapidement vers le comportement du modèle non perturbé que le paramètre  $\epsilon$  sera proche de zéro.

**Exemple 5.3.** Considérons l'équation différentielle linéaire du deuxième ordre suivante:

$$\begin{cases} \ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = 3u(t) \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \quad (5.66)$$

Utilisons la méthode de Brunovsky pour obtenir une représentation d'état associées à l'équation différentielle (5.66): les composantes du vecteur d'état sont alors  $x_1(t) = y(t)$  et  $x_2(t) = \dot{y}(t)$ . Il vient:

$$\begin{cases} x_1(t) = y(t) \\ x_2(t) = \dot{y}(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \\ x_1(0) := x_1(0, \epsilon) = 0 \\ x_2(0) := x_2(0, \epsilon) = 0 \end{cases} \quad (5.67)$$

La matrice  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$  possède 2 valeurs propres:

- $\lambda_1 = -1$  associée à la première composante du vecteur d'état  $x_1(t) = y(t)$ ;
- et  $\lambda_2 = -3$  associée à la seconde composante du vecteur d'état  $x_2(t) = \dot{y}(t)$ .

Nous pouvons donc prendre comme paramètre  $\epsilon$  le rapport  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{1}{3}$ . En factorisant par 3 (en fait le rapport  $1/\epsilon = \lambda_2/\lambda_1$ ) la deuxième ligne de la représentation d'état, il vient:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 3(-x_1(t) - \frac{4}{3}x_2(t) + u(t)) \end{cases} \quad (5.68)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \frac{1}{3}\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - \frac{4}{3}x_2(t) + u(t) \end{cases}$$

Posons  $\epsilon = \frac{1}{3}$  de telle sorte que le système précédent s'écrit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, \epsilon) = x_2(t, \epsilon) \\ \epsilon \dot{x}_2(t, \epsilon) = -x_1(t, \epsilon) - \frac{4}{3}x_2(t, \epsilon) + u(t) \\ y(t) = x_1(t, \epsilon) \end{cases} \quad (5.69)$$

En identifiant avec (5.65) il vient:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11} = 0 \\ \mathbf{A}_{12} = 1 \\ \mathbf{A}_{21} = -1 \\ \mathbf{A}_{22} = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbf{B}_1 = 0 \\ \mathbf{B}_2 = 1 \\ \mathbf{C}_1 = 1 \\ \mathbf{C}_2 = 0 \end{cases} \quad (5.70)$$

En posant  $\epsilon = 0$  dans le système singulièrement perturbé (5.69) il vient:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, 0) = x_2(t, 0) \\ 0 = -x_1(t, 0) - \frac{4}{3}x_2(t, 0) + u(t) \\ y_s(t) = x_1(t, 0) \end{cases} \quad (5.71)$$

Soit:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, 0) = -\frac{3}{4}x_1(t, 0) + \frac{3}{4}u(t) \\ y_s(t) = x_1(t, 0) \end{cases} \quad (5.72)$$

Nous en déduisons la fonction de transfert du système réduit à temps lent (slow):

$$F_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3/4}{s + 3/4} = \frac{3}{4s + 3} \quad (5.73)$$

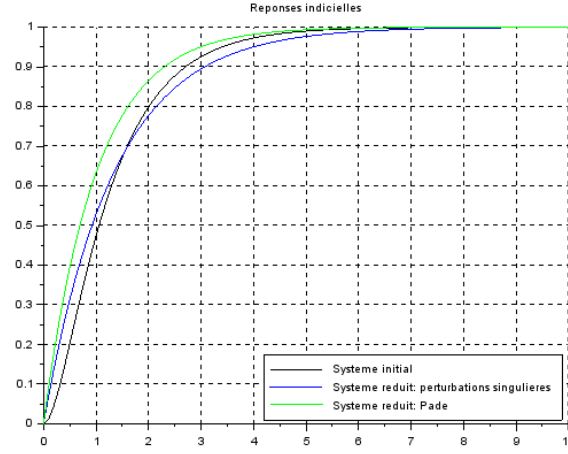


Figure 5.5: Réponse indicielle du modèle initial  $F(s)$  et des modèles réduits  $F_s(s)$  et  $F_p(s)$

La réponse indicielle du système réduit (5.72) lorsque  $y_s(0) = x_1(0) = 0$  est:

$$y_s(0) = x_1(0) = 0 \Rightarrow y_s(t) = 1 - e^{-\frac{3}{4}t} \quad \forall t \geq 0 \quad (5.74)$$

En ce qui concerne le système non singulièrement perturbé (5.66) sa fonction de transfert est la suivante:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{(s+1)(s+3)} = \frac{3}{s^2+4s+3} \quad (5.75)$$

La réponse indicielle de ce système non singulièrement perturbé est donnée par:

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-t} \quad \forall t \geq 0 \quad (5.76)$$

Remarquons que lorsqu'on ne conserve que le mode dominant  $\lambda_1 = -1$  de la fonction de transfert initiale  $F(s)$  alors l'approximation de Padé  $F_p(s)$  de la fonction de transfert  $F(s)$  et la réponse indicielle associée sont les suivantes:

$$\begin{cases} F_p(s) = \frac{1}{s+1} \\ y_p(0) = 0 \Rightarrow y_p(t) = 1 + e^{-t} \quad \forall t \geq 0 \end{cases} \quad (5.77)$$

La Figure 5.5 et la Figure 5.6 représentent les réponses indicielles et les diagrammes de Bode du modèle initial  $F(s)$  et des modèles réduits  $F_s(s)$  et  $F_p(s)$ .

Nous pouvons constater que la réponse indicielle du système réduit par perturbations singulières est plus proche de la réponse indicielle du système initial et que le comportement basse fréquence de  $F(s)$  se retrouve dans  $F_s(s)$  et  $F_p(s)$ .

Pour obtenir la dynamique de la variable à temps rapide nous appliquons le théorème de Tikhonov présenté à la section 5.3.3. Commençons par exprimer

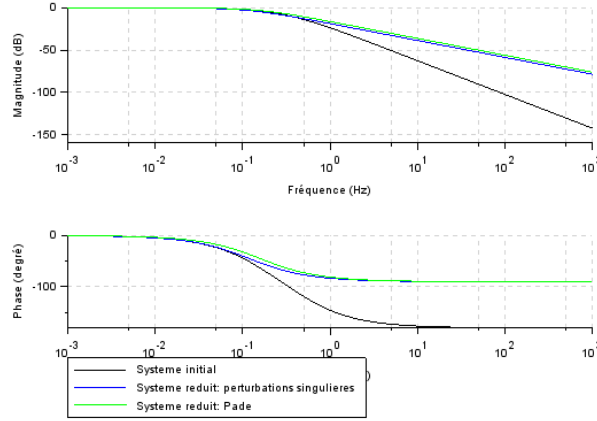


Figure 5.6: Diagramme de Bode du modèle initial  $F(s)$  et des modèles réduits  $F_s(s)$  et  $F_p(s)$

$x_2(t, 0)$  en fonction de  $y_s(t)$ . En reprenant (5.72) il vient:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, 0) = x_2(t, 0) \\ y_s(t) = x_1(t, 0) \end{cases} \Rightarrow x_2(t, 0) = \dot{y}_s(t) = \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t} \quad (5.78)$$

La dynamique de la variable à temps rapide  $x_{2f}(\tau)$  est obtenue à partir de (5.69). Sachant que  $x_2(0) = x_2(0, \epsilon)$  et que les conditions initiales imposent  $x_2(0) = 0$  il vient en prenant  $x_{1f}(\tau) = 0$  et  $u(\tau) = 0$ :

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x}_2(t, 0) = \dot{x}_{2f}(\tau) = -x_{1f}(\tau) - \frac{4}{3}x_{2f}(\tau) + u(\tau) = -\frac{4}{3}x_{2f}(\tau) \\ x_{2f}(0) = x_2(0, \epsilon) - x_2(0, 0) = x_2(0, \epsilon) - \dot{y}_s(0) = -\frac{3}{4} \end{cases} \quad (5.79)$$

La résolution de cette équation différentielle donne:

$$x_{2f}(\tau) = -\frac{3}{4}e^{-\frac{4}{3}\tau} \quad (5.80)$$

En conséquence la vitesse  $\dot{y}(t)$  du système initial est approchée par:

$$\dot{y}(t) = x_2(t) \approx x_2(t, 0) + x_{2f}(\tau) = \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{3}{4}e^{-\frac{4}{3}\tau} \quad (5.81)$$

Soit en tenant compte du fait que  $\tau = \frac{t}{\epsilon} = 3t$ :

$$\dot{y}(t) \approx \frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t} - \frac{3}{4}e^{-4t} \quad (5.82)$$

Nous pouvons remarquer que ce résultat est très proche du résultat exact:

$$\dot{y}(t) = \frac{3}{2}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-3t} \quad (5.83)$$

■

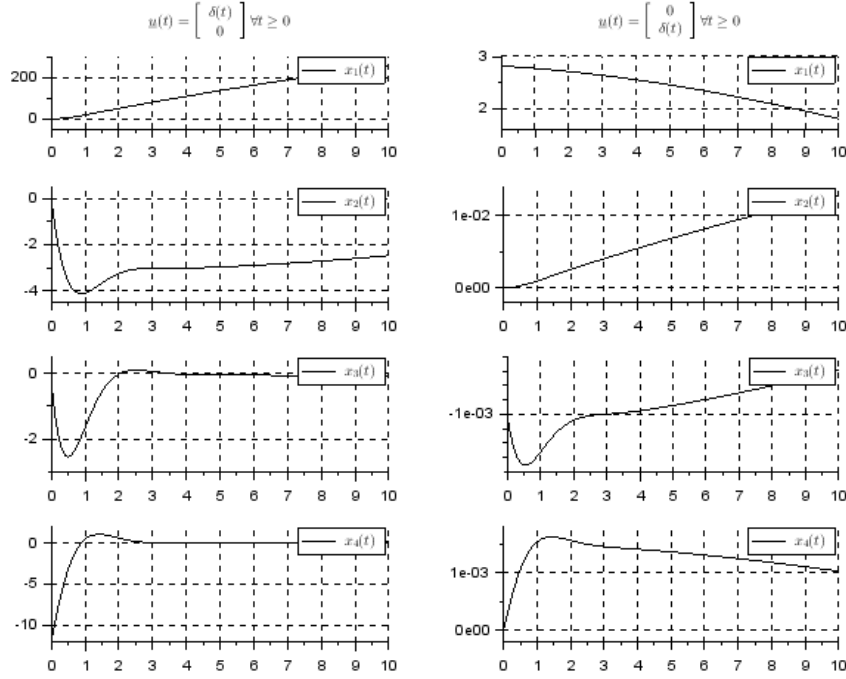


Figure 5.7: Composantes du vecteur d'état pour une impulsion de Dirac sur chaque entrée

**Exemple 5.4.** *Considérons le système suivant:*

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) \end{cases} \quad (5.84)$$

Où:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.013 & -9.806 & 5.86 & -0.106 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.001 & 0 & -1.256 & 0.966 \\ 0 & 0 & -2.525 & -1.782 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.713 & 2.817 \\ 0 & 0 \\ -0.228 & -0.001 \\ -11.986 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.85)$$

La Figure 5.7 représente les composantes du vecteur d'état lorsqu'une impulsion de Dirac est placée sur chaque entrée.

Cette figure nous suggère que les deux premières composantes du vecteur d'état sont les composantes lentes du système et que les deux dernières composantes du vecteur d'état sont les composantes rapides. Nous écrivons:

$$\begin{cases} \underline{x}_s := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T \\ \underline{x}_f := \begin{bmatrix} x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \end{cases} \quad (5.86)$$

Les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{A}$  sont les suivantes:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1.5195786 \pm j1.5402258 \\ \lambda_{3,4} = -0.0059214 \pm j0.0724843 \end{cases} \quad (5.87)$$

Nous prendrons pour  $\epsilon$  le rapport suivant:

$$\epsilon = \frac{-0.0059214}{-1.5195786} \approx 0.0038968 \quad (5.88)$$

■

En multipliant par  $\epsilon$  les lignes de  $\mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$  associées aux modes rapides il vient:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_s(t) = \mathbf{A}_{11}\underline{x}_s(t) + \mathbf{A}_{12}\underline{x}_f(t) + \mathbf{B}_1u(t) \\ \epsilon\dot{\underline{x}}_f(t) = \mathbf{A}_{21}\underline{x}_s(t) + \mathbf{A}_{22}\underline{x}_f(t) + \mathbf{B}_2u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_1\underline{x}_s(t) + \mathbf{C}_2\underline{x}_f(t) \end{cases} \quad (5.89)$$

Où:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -0.013 & -9.806 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 5.86 & -0.106 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{21} = \epsilon \begin{bmatrix} -0.001 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0000039 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{22} = \epsilon \begin{bmatrix} -1.256 & 0.966 \\ -2.525 & -1.782 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0048943 & 0.0037643 \\ -0.0098393 & -0.0069440 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.90)$$

$$\begin{cases} \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} -0.713 & 2.817 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_2 = \epsilon \begin{bmatrix} -0.228 & -0.001 \\ -11.986 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0008885 & -0.0000039 \\ -0.0467066 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.91)$$

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.92)$$

#### 5.4.2 Modèle à temps lent

La dynamique du système à temps lent est obtenue en fixant  $\epsilon = 0$  dans la représentation d'état singulièrement perturbée (5.65). Il vient:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_s(t) = \mathbf{A}_{11}\underline{x}_s(t) + \mathbf{A}_{12}\underline{x}_f(t) + \mathbf{B}_1u(t) \\ 0 = \mathbf{A}_{21}\underline{x}_s(t) + \mathbf{A}_{22}\underline{x}_f(t) + \mathbf{B}_2u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_1\underline{x}_s(t) + \mathbf{C}_2\underline{x}_f(t) \end{cases} \quad (5.93)$$

Nous en déduisons l'expression de  $\underline{x}_f(t)$  sous la condition que la matrice  $\mathbf{A}_{22}$  soit inversible:

$$\underline{x}_f(t) = -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\underline{x}_s(t) - \mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{B}_2u(t) \quad (5.94)$$

En reportant cette expression dans (5.93) nous obtenons la représentation d'état réduite à temps lent du système:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_s(t) = \mathbf{A}_s \underline{x}_s(t) + \mathbf{B}_s u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_s \underline{x}_s(t) + \mathbf{D}_s u(t) \end{cases} \quad (5.95)$$

Où:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_s = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{B}_s = \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_s = \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{D}_s = -\mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 \end{cases} \quad (5.96)$$

Nous pouvons remarquer que:

- Le modèle réduit à temps lent correspond à l'approximation basse fréquence du système
- Le modèle réduit à temps lent possède systématiquement une transmittance directe alors que l'équation d'état initiale n'en possède pas. En effet l'expression de la sortie  $y(t)$  dépend du terme  $\mathbf{D}_s = -\mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2$  en facteur de  $u(t)$  alors que dans le modèle d'état initial la matrice  $\mathbf{D}$  est nulle.
- La matrice de transfert à temps lent est donnée par:

$$\mathbf{H}_s(s) = \mathbf{C}_s (s\mathbb{I} - \mathbf{A}_s)^{-1} \mathbf{B}_s + \mathbf{D}_s \quad (5.97)$$

- Le modèle réduit à temps lent (5.95) possède le même gain statique que le modèle d'état singulièrement perturbé (5.65). En effet la gain statique est obtenu en fixant  $\dot{\underline{x}}_s(t) = 0$  et  $\dot{\underline{x}}_f(t) = 0$  ce qui conduit à la même expression de  $y(t)$  en fonction de  $u(t)$  pour le modèle d'état singulièrement perturbé (5.65) et modèle réduit à temps lent (5.95).

**Exemple 5.5.** Les matrices à temps lent ( $\mathbf{A}_s, \mathbf{B}_s, \mathbf{C}_s, \mathbf{D}_s$ ) du système décrit dans l'exemple précédent ont les expressions suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_s = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -0.0152898 & -9.806 \\ 0.0005398 & 0. \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_s = \mathbf{B}_1 - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} -15.399978 & 2.8147102 \\ -3.0955008 & 0.0005398 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C}_s = \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0. & 1. \\ -0.0003810 & 0. \end{bmatrix} \\ \mathbf{D}_s = -\mathbf{C}_2 \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0. & 0. \\ -2.562304 & -0.0003810 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.98)$$

La figure 5.8 montre le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}$  pour le modèle complet et le modèle à temps lent: nous pouvons constater que le diagramme de Bode du modèle à temps lent est très proche du diagramme de Bode du modèle complet pour les basses fréquences.

■



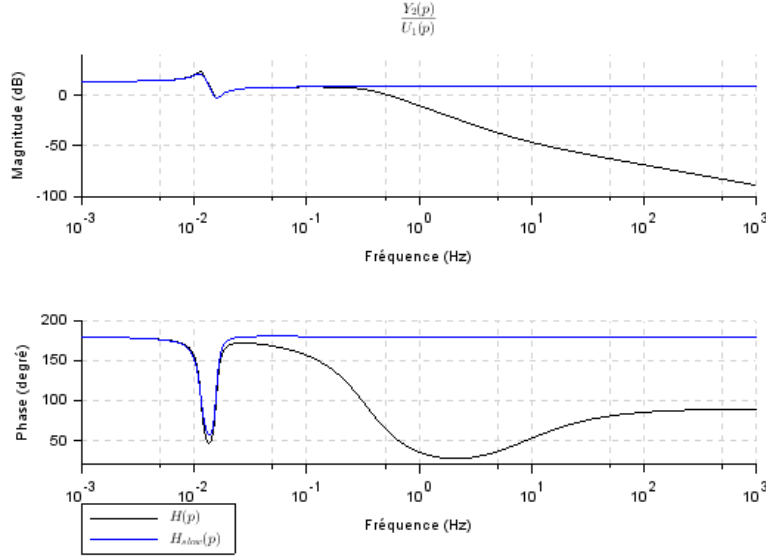


Figure 5.8: Comparaison des diagrammes de Bode des modèles à temps lent et complet

### 5.4.3 Modèle à temps rapide

La dynamique du système à temps rapide est obtenu en réalisant le changement de variable suivant:

$$\tau = \frac{t}{\epsilon} \Rightarrow dt = \epsilon d\tau \quad (5.99)$$

En utilisant ce changement de variable dans la représentation d'état singulièrement perturbée (5.65) il vient:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \underline{x}_s(\tau) = \epsilon (\mathbf{A}_{11} \underline{x}_s(\tau) + \mathbf{A}_{12} \underline{x}_f(\tau) + \mathbf{B}_1 \underline{u}(\tau)) \\ \frac{d}{d\tau} \underline{x}_f(\tau) = \mathbf{A}_{21} \underline{x}_s(\tau) + \mathbf{A}_{22} \underline{x}_f(\tau) + \mathbf{B}_2 \underline{u}(\tau) \\ \underline{y}(\tau) = \mathbf{C}_1 \underline{x}_s(\tau) + \mathbf{C}_2 \underline{x}_f(\tau) \end{cases} \quad (5.100)$$

La dynamique du système à temps rapide est obtenue en fixant  $\epsilon = 0$  dans la représentation d'état précédente. Nous imposerons de plus  $x_s(0) = 0$ .

$$\frac{d}{d\tau} \underline{x}_s(\tau) = 0 \Rightarrow \underline{x}_s(\tau) = \text{Constante} := 0 \quad (5.101)$$

La dynamique du système à temps rapide se réduit donc à l'expression suivante:

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \underline{x}_f(\tau) = \mathbf{A}_{22} \underline{x}_f(\tau) + \mathbf{B}_2 \underline{u}(\tau) \\ \underline{y}(\tau) = \mathbf{C}_2 \underline{x}_f(\tau) \end{cases} \quad (5.102)$$

Soit en revenant dans le domaine en  $t$ :

$$d\tau = \frac{dt}{\epsilon} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} \underline{x}_f(\tau) = \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \underline{x}_f(t) + \frac{\mathbf{B}_2}{\epsilon} \underline{u}(t) \\ \underline{y}(t) = \mathbf{C}_2 \underline{x}_f(t) \end{cases} \quad (5.103)$$

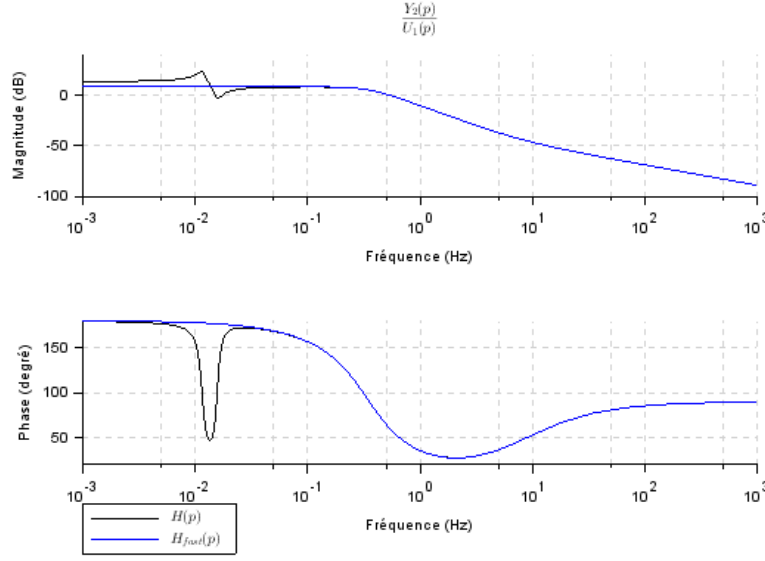


Figure 5.9: Comparaison des diagrammes de Bode des modèles à temps rapide et complet

La matrice de transfert à temps rapide est donnée par:

$$\mathbf{H}_f(s) = \mathbf{C}_2 \left( s\mathbb{I} - \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \right)^{-1} \frac{\mathbf{B}_2}{\epsilon} \quad (5.104)$$

Le modèle réduit à temps rapide correspond à l'approximation haute fréquence du système.

**Exemple 5.6.** La figure 5.9 montre le diagramme de Bode de la fonction de transfert  $\frac{Y_2(s)}{U_1(s)}$  de l'exemple précédent pour le modèle complet et le modèle à temps rapide: nous pouvons constater que le diagramme de Bode du modèle à temps rapide est très proche du diagramme de Bode du modèle complet pour les hautes fréquences.

■

#### 5.4.4 Stabilité du modèle singulièrement perturbé

Nous reprenons ici les résultats de H. Khalil <sup>2</sup>. Considérons la réalisation singulièrement perturbée autonome suivante où la commande  $\underline{u}(t)$  n'apparaît pas (il peut par exemple s'agir d'un système bouclé par un retour d'état de la forme  $\underline{u}(t) = -\mathbf{K} \begin{bmatrix} \underline{x}_s(t) & \underline{x}_f(t) \end{bmatrix}^T$ ):

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}_s(t) = \mathbf{A}_{11} \underline{x}_s(t) + \mathbf{A}_{12} \underline{x}_f(t) \\ \epsilon \dot{\underline{x}}_f(t) = \mathbf{A}_{21} \underline{x}_s(t) + \mathbf{A}_{22} \underline{x}_f(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\underline{x}}_s(t) = \mathbf{A}_{11} \underline{x}_s(t) + \mathbf{A}_{12} \underline{x}_f(t) \\ \dot{\underline{x}}_f(t) = \frac{\mathbf{A}_{21}}{\epsilon} \underline{x}_s(t) + \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \underline{x}_f(t) \end{cases} \quad (5.105)$$

<sup>2</sup>Hassan K. Khalil, On the robustness of output feedback control methods to modeling errors, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, April 1981, pp 524-526

Où  $0 < \epsilon \ll 1$  et où la matrice  $\mathbf{A}_{22}$  est supposée inversible. Le spectre (i.e. l'ensemble des valeurs propres) du système singulièrement perturbé précédent peut alors être approximé par:

$$\lambda \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \frac{\mathbf{A}_{21}}{\epsilon} & \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \end{bmatrix} \right) \approx \lambda(\mathbf{A}_0) \cup \frac{1}{\epsilon} \lambda(\mathbf{A}_{22}) \quad (5.106)$$

Où:

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \quad (5.107)$$

La base de la démonstration de ce résultat est le complément de Schur:

$$\det \left( \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{11} & \mathbf{X}_{12} \\ \mathbf{X}_{21} & \mathbf{X}_{22} \end{bmatrix} \right) = \det(\mathbf{X}_{22}) \det(\mathbf{X}_{11} - \mathbf{X}_{12} \mathbf{X}_{22}^{-1} \mathbf{X}_{21}) \quad (5.108)$$

Le complément de Schur appliqué au calcul des valeurs propres de la réalisation singulièrement perturbée autonome (5.105) s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A}_{11} & -\mathbf{A}_{12} \\ -\frac{\mathbf{A}_{21}}{\epsilon} & s\mathbb{I} - \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \end{bmatrix} \right) \\ = \det \left( s\mathbb{I} - \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \right) \det \left( s\mathbb{I} - \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \left( s\mathbb{I} - \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \right)^{-1} \frac{\mathbf{A}_{21}}{\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (5.109)$$

Lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , nous pouvons écrire  $s\mathbb{I} - \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\approx} -\frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon}$ . La relation (5.106) est alors obtenue grâce à l'approximation suivante:

$$\begin{aligned} \det \left( \begin{bmatrix} s\mathbb{I} - \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \frac{\mathbf{A}_{21}}{\epsilon} & s\mathbb{I} - \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \end{bmatrix} \right) \\ \approx \det \left( s\mathbb{I} - \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \right) \det \left( s\mathbb{I} - \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \left( -\frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \right)^{-1} \frac{\mathbf{A}_{21}}{\epsilon} \right) \\ = \det \left( s\mathbb{I} - \frac{\mathbf{A}_{22}}{\epsilon} \right) \det \left( s\mathbb{I} - \mathbf{A}_{11} + \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} \right) \end{aligned} \quad (5.110)$$

**Exemple 5.7.** Reprenons l'exemple précédent. Les matrices  $\mathbf{A}_s$  et  $\mathbf{A}_{22}$  ont les expressions suivantes:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_s = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} -0.0152898 & -9.806 \\ 0.0005398 & 0. \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_{22} = \epsilon \begin{bmatrix} -1.256 & 0.966 \\ -2.525 & -1.782 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0048943 & 0.0037643 \\ -0.0098393 & -0.0069440 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (5.111)$$

Les spectres des matrices  $\mathbf{A}_s$  et  $\mathbf{A}_{22}/\epsilon$  sont les suivants:

$$\begin{aligned} \lambda \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \right) &\approx \lambda(\mathbf{A}_s) \cup \lambda(\mathbf{A}_{22}/\epsilon) \\ \text{où } \begin{cases} \lambda(\mathbf{A}_{22}/\epsilon) &= -1.519 \pm j1.5394743 \\ \lambda(\mathbf{A}_s) &= -0.0076449 \pm j0.0723546 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.112)$$

*Il est clair que ces valeurs propres issues du système singulièrement perturbé sont très proches de celles de la matrice  $\mathbf{A}$  du système initial données en (5.87) et que nous rappelons ci-après:*

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = -1.5195786 \pm j1.5402258 \\ \lambda_{3,4} = -0.0059214 \pm j0.0724843 \end{cases} \quad (5.113)$$

■



# Appendices



# Appendix A

## Identification des systèmes

### A.1 Introduction

Nous débutons ce chapitre par la description des méthodes de Broïda et de Strejc dédiées à l'identification des systèmes mono-entrée et mono-sortie. Puis l'identification paramétrique utilisant la méthode des moindres carrés est présentée. Enfin les paramètres de Markov sont introduits ainsi que la manière de les utiliser dans le cadre des problèmes de réalisation et d'identification des systèmes linéaires et invariants.

### A.2 Identification par les méthodes de Broïda et de Strejc

Les méthodes de Broïda et de Strejc sont des méthodes d'identification de systèmes mono-entrée et mono-sortie basées sur l'identification de la réponse à un échelon. Elles consistent à déterminer la fonction de transfert  $F(s)$  d'un système, considéré comme une boîte noire, à partir de la réponse de ce système à un échelon.

#### A.2.1 Réponse apériodique

Lorsque la réponse à un échelon d'amplitude  $u_0$  du système à étudier est apériodique (i.e. sans oscillation), comme illustré sur la Figure A.1, les méthodes de Broïda ou de Strejc peuvent être utilisées.

Dans la méthode de Broïda, le système  $F(s)$  à identifier est modélisé par un système du premier ordre, où  $k$  représente le gain statique et  $\tau$  la constante de temps, associé à un retard pur noté  $t_0$  :

$$F(s) = \frac{k}{1 + \tau s} e^{-st_0} \quad (\text{A.1})$$

Les paramètres de Broïda sont obtenus à partir des relations suivantes, où  $u_0$  représente l'amplitude de l'échelon placé à l'entrée du système :

$$k = \frac{y_\infty}{u_0} \text{ et } \begin{cases} \tau = 5.5(t_2 - t_1) \\ t_0 = 2.8t_1 - 1.8t_2 \end{cases} \quad \text{où } \begin{cases} y(t_1) = 0.28y_\infty \\ y(t_2) = 0.4y_\infty \end{cases} \quad (\text{A.2})$$



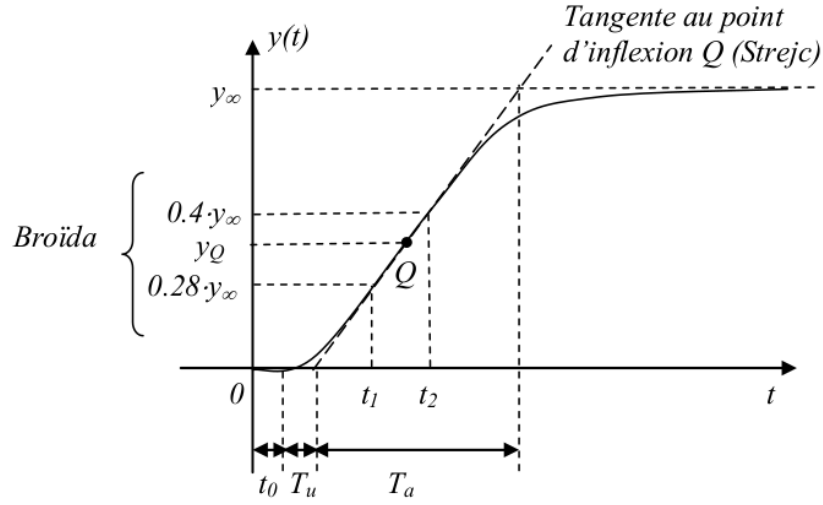


Figure A.1: Réponse à un échelon apériodique: paramètres de Broïda et de Strejc

| $n$ | $\frac{y_Q}{y_\infty}$ | $\alpha = \frac{T_u}{T_a}$ | $\beta = \frac{\tau}{T_a}$ |
|-----|------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 2   | 0.26                   | 0.104                      | 0.368                      |
| 3   | 0.32                   | 0.218                      | 0.271                      |
| 4   | 0.35                   | 0.319                      | 0.224                      |
| 5   | 0.37                   | 0.410                      | 0.195                      |
| 6   | 0.38                   | 0.493                      | 0.175                      |
| 7   | 0.39                   | 0.570                      | 0.161                      |
| 8   | 0.40                   | 0.642                      | 0.149                      |
| 9   | 0.41                   | 0.709                      | 0.140                      |

Table A.1: Tableau des paramètres de Strejc

La modélisation de la réponse à un échelon de  $F(s)$  est très proche de la réponse observée lorsque  $t_0/\tau < 0.25$ .

Strejc a proposé en 1959 un modèle plus général de fonction de transfert dont la réponse à un échelon est apériodique :

$$F(s) = \frac{k}{(1 + \tau s)^n} e^{-st_0} \quad (\text{A.3})$$

Le calcul du coefficient  $k$  se fait comme pour la méthode de Broïda. Les autres coefficients du modèle sont obtenus à partir du tracé de la tangente au point d'inflexion (noté Q) de la réponse à un échelon qui donne les valeurs  $t_0 + T_u$  et  $T_a$  et par la lecture de la Table A.1:

- La deuxième colonne de ce tableau donne le rapport  $\frac{y_Q}{y_\infty}$ . Il permet de déterminer l'ordre  $n$  du système ;
- La valeur  $T_a$  étant connue, la troisième colonne permet de calculer le temps  $T_u$  à partir de la connaissance de  $n$  et  $\alpha$  :  $T_u = \alpha T_a$  ;

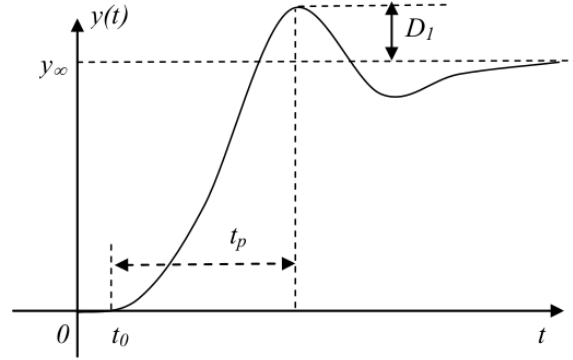


Figure A.2: Réponse à un échelon non-apériodique associé à un modèle du deuxième ordre

- La valeur  $t_0 + T_u$  étant connue, le retard  $t_0$  est calculé par la relation  $t_0 = (t_0 + T_u) - T_u$  ; ce retard doit être positif.
- La valeur  $T_a$  étant connue ainsi que celle de  $n$ , la quatrième colonne permet de calculer la constante de temps  $\tau = \beta T_a$ .

### A.2.2 Réponse oscillante

Lorsque la réponse à un échelon présente des oscillations (réponse non-apériodique), l'identification est alors réalisée à partir de l'amplitude du premier dépassement et de l'instant associé comme représenté sur la Figure A.2.

Le système  $F(s)$  à identifier est alors modélisé par un système du deuxième ordre associé à un retard pur noté  $t_0$  ; le retard pur  $t_0$  est lu directement sur la réponse à l'échelon tandis que les autres paramètres du système sont obtenus à partir des relations suivantes, où  $u_0$  représente l'amplitude de l'échelon placé à l'entrée du système :

$$F(s) = \frac{k}{s^2 + a_1 s + a_0} e^{-s t_0} \quad (\text{A.4})$$

Où:

$$k = \frac{y_\infty}{u_0} \text{ et } \begin{cases} a_1 = 2 \frac{|\ln(D_1/y_\infty)|}{t_p} \\ a_2 = \frac{\pi^2 + |\ln(D_1/y_\infty)|^2}{t_p^2} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Notons que le terme  $e^{-s t_0}$  associé au retard pur  $t_0$  est souvent approché par un filtre déphaseur pur (appelé aussi passe tout ou *all pass* en anglais), obtenu grâce à l'approximation de Padé :

$$e^{-s t_0} = \frac{e^{-s \frac{t_0}{2}}}{e^{+s \frac{t_0}{2}}} \approx \frac{1 - s \frac{t_0}{2}}{1 + s \frac{t_0}{2}} \quad (\text{A.6})$$

Enfin si le système à modéliser est instable ou présente une ou plusieurs intégrations, alors la réponse à un échelon tend vers l'infini et les méthodes présentées ne sont pas directement applicables. Pour pouvoir les appliquer,

c'est la réponse à un échelon du système bouclé par un gain  $K$  stabilisant qui doit être identifiée ; à partir de l'identification de la fraction  $\frac{KF(s)}{(1+KF(s))}$  nous en déduisons l'expression de la fonction de transfert  $F(s)$ .

### A.3 Identification paramétrique

#### A.3.1 Méthode des moindres carrés

L'identification paramétrique d'une fonction de transfert consiste à déterminer les paramètres de cette fonction de transfert dont la structure est connue à-priori.

Considérons un système à temps discret dont la relation entre la sortie  $y_k$  et l'entrée  $u_k$  est décrite par l'équation aux différences suivante:

$$D(z^{-1})y(k) = N(z^{-1})u(k) \Leftrightarrow y(k) = -\sum_{i=1}^n a_i y(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j u(k-j) \quad (\text{A.7})$$

Cette relation peut se ré-écrire de manière à faire apparaître les coefficients  $a_i$  et  $b_j$  que l'on cherche à déterminer sous forme d'un vecteur:

$$y(k) = \begin{bmatrix} -y(k-1) & \cdots & -y(k-n) & u(k) & \cdots & u(k-m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

En écrivant la relation (A.8)  $\forall k = n, \dots, n+L-1$ , nous en déduisons la relation suivante:

$$\underline{y} = \mathbf{M} \underline{\Theta} \quad (\text{A.9})$$

où:

$$\underline{y} = \begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \vdots \\ y(n+L-1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.11})$$

et:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -y(n-1) & \cdots & -y(0) & u(n) & \cdots & u(n-m) \\ -y(n) & \cdots & -y(1) & u(n+1) & \cdots & u(n-m+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -y(n+L-2) & \cdots & -y(L-1) & u(n+L-1) & \cdots & u(n-m+L-1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

Le vecteur des coefficients  $\underline{\Theta}$  qui minimise la norme de l'erreur  $\underline{y} - \mathbf{M}\underline{\Theta}$  est alors donné par:

$$\underline{\Theta} = (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \underline{y} \quad (\text{A.13})$$

La matrice  $(\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T$  s'appelle matrice pseudo inverse à gauche de la matrice  $\mathbf{M}$ . Ce résultat s'obtient en annulant la dérivée de l'erreur quadratique d'estimation  $(\underline{y} - \mathbf{M}\underline{\Theta})^T (\underline{y} - \mathbf{M}\underline{\Theta})$  par rapport au vecteur  $\underline{\Theta}$ . En effet:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \underline{\Theta}} (\underline{y} - \mathbf{M}\underline{\Theta})^T (\underline{y} - \mathbf{M}\underline{\Theta}) &= \frac{\partial}{\partial \underline{\Theta}} \underline{y}^T \underline{y} - \underline{y}^T \mathbf{M} \underline{\Theta} - \underline{\Theta}^T \mathbf{M}^T \underline{y} + \underline{\Theta}^T \mathbf{M}^T \mathbf{M} \underline{\Theta} \\ &= -2\mathbf{M}^T \underline{y} + 2\mathbf{M}^T \mathbf{M} \underline{\Theta} \\ \frac{\partial}{\partial \underline{\Theta}} (\underline{y} - \mathbf{M}\underline{\Theta})^T (\underline{y} - \mathbf{M}\underline{\Theta}) &= 0 \\ \Rightarrow \underline{\Theta} &= (\mathbf{M}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}^T \underline{y} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

### A.3.2 Méthode des variables instrumentales

Dans la méthode des variables instrumentales, l'équation (A.13) présentée à la section décrit à la section A.3.1 est remplacés par la relation suivante:

$$\underline{\Theta}_{iv} = (\mathbf{V}^T \mathbf{M})^{-1} \mathbf{V}^T \underline{y} \quad (\text{A.15})$$

où  $\mathbf{V}$  est appelée matrice des *variables instrumentales* et les  $z_i$  sont appelées *variables instrumentales*:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -z(n-1) & \cdots & -z(0) & u(n) & \cdots & u(n-m) \\ -z(n) & \cdots & -z(1) & u(n+1) & \cdots & u(n-m+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z(n+L-2) & \cdots & -z(L-1) & u(n+L-1) & \cdots & u(n-m+L-1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Les variables instrumentales  $z_i$  doivent être choisies de telles sorte qu'elles soient corrélées avec les sorties  $y_i$  du système, afin que l'inverse de  $\mathbf{V}^T \mathbf{M}$  existe, mais décorrélées des bruits qui affectent le système. Plusieurs choix sont possibles. Un choix classique pour les variables instrumentales  $z_i$  est de les obtenir à partir du filtre construit avec l'estimation des moindres carrés<sup>1</sup>:

$$\underline{z} = \mathbf{M} \underline{\Theta} \Leftrightarrow z(k) = - \sum_{i=1}^n a_i z(k-i) + \sum_{j=0}^m b_j u(k-j) \quad (\text{A.17})$$

<sup>1</sup>P. Young, The Instrumental Variable Method: A Practical Approach to Identification and System Parameter Estimation, IFAC Proceedings Volumes, Volume 18, Issue 5, 1985, Pages 1-15, ISSN 1474-6670, [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)60535-4](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)60535-4).

### A.3.3 Cas des systèmes à temps continu

Pour les système à temps continu, la relation entre la sortie  $y(t)$  et l'entrée  $u(t)$  est décrite par l'équation différentielle linéaire et à coefficients constants suivante où  $y^{(i)}(t)$  désigne la dérivée  $i^{me}$  de  $y(t)$  par rapport au temps et  $u^{(j)}(t)$  la dérivée  $j^{me}$  de  $u(t)$  par rapport au temps:

$$D(s)y(t) = N(s)u(t) \Leftrightarrow y^{(n)}(t) = -\sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)}(t) + \sum_{j=0}^m b_j u^{(m-j)}(t) \quad (\text{A.18})$$

Cette relation peut se ré-écrire de manière à faire apparaître les coefficients  $a_i$  et  $b_j$  que l'on cherche à déterminer sous forme d'un vecteur:

$$y^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} -y^{(n-1)}(t) & \cdots & -y(t) & u^{(m)}(t) & \cdots & u(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Afin d'éviter au maximum l'amplification du bruit lorsqu'un signal bruité est dérivé, la dérivée  $i^{me}$  de  $y(t)$  par rapport au temps,  $y^{(i)}(t)$ , est obtenue par filtrage passe-bas du signal disponible  $y(t)$ . En notant  $F(s)$  la fonction de transfert du filtre passe-bas utilisé, nous pouvons écrire la relation entrée-sortie du système à identifier comme suit:

$$D(s)y(t) = N(s)u(t) \Leftrightarrow D(s)F(s)y(t) = N(s)F(s)u(t) \quad (\text{A.20})$$

La fonction de transfert  $F(s)$  du filtre passe-bas dépend d'une constante de temps  $\tau$  qui est à régler par l'ingénieur:

$$F(s) = \frac{1}{(1 + \tau s)^n} \quad (\text{A.21})$$

Remarquons que pour  $\tau = 0$  alors  $F(s) = 1$ .

Soient  $\hat{y}^{(i)}(t) := s^i F(s)y(t)$  et  $\hat{u}^{(j)}(t) := s^j F(s)u(t)$ :

$$\begin{cases} \hat{y}^{(i)}(t) := \frac{s^i}{(1+\tau s)^n} y(t) \\ \hat{u}^{(j)}(t) := \frac{s^j}{(1+\tau s)^n} u(t) \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

La relation (A.19) devient:

$$\hat{y}^{(n)}(t) = \begin{bmatrix} -\hat{y}^{(n-1)}(t) & \cdots & -\hat{y}(t) & \hat{u}^{(m)}(t) & \cdots & \hat{u}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

En écrivant la relation (A.23) pour différentes valeurs du temps,  $t = t_1, \dots, t_L$ , nous en déduisons la relation suivante:

$$\underline{\hat{y}} = \mathbf{M} \underline{\Theta} \quad (\text{A.24})$$

où:

$$\underline{\hat{y}} = \begin{bmatrix} \hat{y}^{(n)}(t_1) \\ \hat{y}^{(n)}(t_2) \\ \vdots \\ \hat{y}^{(n)}(t_L) \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ b_0 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

et:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\hat{y}^{(n-1)}(t_1) & \dots & -\hat{y}(t_1) & \hat{u}^{(m)}(t_1) & \dots & \hat{u}(t_1) \\ -\hat{y}^{(n-1)}(t_2) & \dots & -\hat{y}(t_2) & \hat{u}^{(m)}(t_2) & \dots & \hat{u}(t_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\hat{y}^{(n-1)}(t_L) & \dots & -\hat{y}(t_L) & \hat{u}^{(m)}(t_L) & \dots & \hat{u}(t_L) \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

Nous retrouvons ainsi le cadre décrit à la section A.3.1. Nous pouvons donc appliquer les résultats déjà présentés. En général, la constante de temps  $\tau$  est choisie *grande* devant le pas de temps  $T = t_2 - t_1$ , par exemple  $\tau \approx 5T$ .

Comme dans le cas des systèmes à temps discret, la méthode des variables instrumentales présentée à la section A.3.2 peut être utilisée afin de diminuer statistiquement le biais de l'estimation obtenue.

## A.4 Paramètres de Markov

Nous considérons un système MIMO dont la matrice de transfert est notée  $\mathbf{F}(s)$ . Les paramètres de Markov, notés  $\mathbf{J}_k$ , sont définis comme les coefficients du développement de  $\mathbf{F}(s)$  au voisinage de  $s \rightarrow \infty$ :

$$\mathbf{F}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_k}{s^k} \quad (\text{A.28})$$

Afin d'exprimer les paramètres de Markov en fonction de la réalisation  $\left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right)$  de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  nous rappelons l'expression de la série de Neumann:

$$\begin{aligned} (\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k \\ \Rightarrow (s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{s} (\mathbb{I} - \frac{\mathbf{A}}{s})^{-1} = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\mathbf{A}}{s} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{k-1}}{s^k} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Ainsi la réalisation de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(s) &= \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) = \mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \mathbf{D} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}}{s^k} \\ &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{J}_k}{s^k} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Il vient par identification:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{J}_0 = \mathbf{D} \\ \mathbf{J}_k = \mathbf{C}\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \quad \forall k \geq 1 \end{cases}} \quad (\text{A.31})$$

Remarquons que les paramètres de Markov peuvent aussi s'obtenir par la relation de récurrence suivante:

$$\begin{cases} \mathbf{J}_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{F}(s) \\ \mathbf{J}_1 = \lim_{s \rightarrow \infty} s(\mathbf{F}(s) - \mathbf{J}_0) \\ \mathbf{J}_2 = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2(\mathbf{F}(s) - \mathbf{J}_0 - s^{-1}\mathbf{J}_1) \\ \vdots \end{cases} \quad (\text{A.32})$$

Considérons la fonction de transfert  $\mathbf{F}(s)$  strictement propre suivante d'un système SIMO :

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\underline{b}_0 + \underline{b}_1 s + \dots + \underline{b}_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (\text{A.33})$$

Les paramètres de Markov peuvent être obtenus à partir de la division polynomiale du numérateur de  $F(s)$  par son dénominateur commun suivant les puissances croissantes de  $s^{-1}$ .

$$\mathbf{F}(s) = \frac{\underline{b}_{n-1} s^{-1} + \dots + \underline{b}_1 s^{-n+1} + \underline{b}_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{-n+1} + a_0 s^{-n}} \quad (\text{A.34})$$

Les  $n$  premiers paramètres de Markov peuvent être déterminés par la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{b}_{n-1} \\ \underline{b}_{n-2} \\ \vdots \\ \underline{b}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Et pour  $q \geq n+1$  les paramètres sont obtenus par la relation:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_q \\ \mathbf{J}_{q+1} \\ \vdots \\ \mathbf{J}_{q+n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}^{q-1} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{J}_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

Les paramètres de Markov d'une matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$  sont les paramètres de Markov de chacune des fonctions de transfert constituant  $\mathbf{F}(s)$ .

Il faut faire attention au fait que le coefficient du terme en  $s^n$  de degré le plus élevé apparaissant au dénominateur de chacune des fonctions de transfert soit égal à 1 (le dénominateur doit être un polynôme unitaire).

De manière équivalente les paramètres de Markov  $\mathbf{J}_k$  sont les coefficients du développement en série de la réponse impulsionnelle du système, notée  $\mathbf{h}(t)$ . Nous rappelons que la réponse impulsionnelle du système  $\mathbf{h}(t)$  est obtenue en prenant la transformée de Laplace inverse de la matrice de transfert  $\mathbf{F}(s)$ . Compte tenu du développement en série de  $e^{\mathbf{A}t}$  il vient:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(t) &= \mathcal{L}^{-1}[\mathbf{F}(s)] \\ &= \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) \\ &= \mathbf{C} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!} \right) \mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)\end{aligned}\tag{A.37}$$

Soit:

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{C} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) := \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{J}_k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + \mathbf{J}_0\delta(t)\tag{A.38}$$

En conséquence les paramètres de Markov  $\mathbf{J}_k$ , où  $k \geq 1$ , peuvent être obtenus à partir de la réponse impulsionnelle du système par la relation suivante:

$$\boxed{\mathbf{J}_k = \left. \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \mathbf{h}(t) \right|_{t=0} \quad \forall k \geq 1}\tag{A.39}$$

Enfin, nous savons vu que la réponse du système à une entrée  $\underline{u}(t)$  et avec des conditions initiales  $\underline{x}_0$  non nulles peut s'exprimer comme suit:

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\underline{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\underline{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\underline{u}(t)\tag{A.40}$$

En conséquence la réponse libre  $\underline{y}_L(t)$  (obtenue lorsque  $\underline{u}(t) = 0$  et  $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ ) s'écrit sous la forme suivante:

$$\underline{y}_L(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\underline{x}_0\tag{A.41}$$

Ainsi la réponse impulsionnelle  $\mathbf{h}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t)$  peut être identifiée à l'expression de la réponse libre  $\underline{y}_L(t)$  (obtenue lorsque  $\underline{u}(t) = 0$  et  $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ ) du système en remplaçant  $\mathbf{B}$  par  $\underline{x}_0$  et  $\mathbf{D}$  par  $\mathbf{0}$ . Dans ces conditions:

$$\mathbf{J}_k = \left. \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \underline{y}_L(t) \right|_{t=0} \quad \forall k \geq 1\tag{A.42}$$

## A.5 Matrice de Hankel - Dimension d'un système

La matrice de Hankel d'ordre  $r$  est définie à partir des paramètres de Markov comme suit:



$$\mathbf{H}_r(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{J}_r \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{J}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{J}_r & \mathbf{J}_{r+1} & \cdots & \mathbf{J}_{2r-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

Il est clair qu'en utilisant (A.31) nous avons la relation suivante:

$$\mathbf{H}_r(0) = \mathcal{O}_r \mathcal{C}_r \quad (\text{A.44})$$

Où les matrices  $\mathcal{O}_r$  et  $\mathcal{C}_r$  ont les expressions suivantes:

$$\mathcal{O}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{r-1} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_r = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{r-1}\mathbf{B}] \quad (\text{A.45})$$

De manière générale les matrices  $\mathbf{H}_r(k)$  sont définies comme suit:

$$\mathbf{H}_r(k) = \mathcal{O}_r \mathbf{A}^k \mathcal{C}_r \quad \forall k \geq 0 \quad (\text{A.46})$$

La valeur de  $r$  au delà de laquelle le rang de la matrice  $\mathbf{H}_r(0)$  devient constant est appelée indice de réalisabilité et est noté  $r_0$ . La dimension  $n$  du système est le rang de la matrice  $\mathbf{H}_{r_0}(0)$ :

$$n = \text{rank}(\mathbf{H}_{r_0}(0)) \quad \text{tel que} \quad \text{rank}(\mathbf{H}_{r_0}(0)) = \text{rank}(\mathbf{H}_{r_0+1}(0)) \quad (\text{A.47})$$

Ce résultat est connu sous le nom d'algorithme de Silverman <sup>2</sup>.

## A.6 Algorithme de Ho-Kalman (ou ERA)

Nous présentons dans cette section l'algorithme de Ho-Kalman et qui permet d'obtenir une réalisation minimale dans le cas général.

Afin d'obtenir les expressions des matrices  $\mathcal{O}_r$  et  $\mathcal{C}_r$  la matrice de Hankel  $\mathbf{H}_r(0)$  définie en (A.43) est décomposée en valeurs singulières sous la forme suivante, où  $\mathbf{\Sigma}$  est une matrice diagonale semi-définie positive:

$$\mathbf{H}_r(0) = \mathcal{O}_r \mathcal{C}_r = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T \quad (\text{A.48})$$

où:

- $\mathbf{\Sigma}$  est une matrice dont tous les coefficients sont nuls à l'exception de ceux situés sur sa diagonale qui sont soit positifs soit nuls. Les coefficients non nuls de  $\mathbf{\Sigma}$  sont appelés valeurs singulières de  $\mathbf{H}_r(0)$ . De manière équivalente les valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{H}_r(0)$  sont les racines carrées des valeurs propres non nulles de  $\mathbf{H}_r(0)^T \mathbf{H}_r(0)$  ou de  $\mathbf{H}_r(0) \mathbf{H}_r(0)^T$ .

<sup>2</sup>L.M. Silverman, Realization of linear dynamical systems, IEEE Trans. Automat. Control 16 (6) (1971)

- $\mathbf{U}$  est une matrice unitaire et  $\mathbf{V}^T$  est la matrice unitaire transposée de  $\mathbf{V}$ .

Notons que  $\Sigma$  n'est pas nécessairement une matrice carrée; par conséquent donc  $\Sigma^{1/2}$  n'est pas nécessairement définie.

Lorsque  $r > r_0$ , où  $r_0$  est l'indice de réalisabilité, la matrice  $\Sigma$  présente au moins une valeur diagonale nulle et la dimension  $n$  du système est égale au nombre de valeurs singulières (par définition non nulles) de  $\mathbf{H}_r(0)$ . De manière équivalente la dimension  $n$  du système peut être obtenue par l'algorithme de Silverman (A.47).

En notant  $\Sigma_n$  la matrice carrée diagonale constituée des  $n$  valeurs singulières (par définition non nulles) de  $\Sigma$ ,  $\mathbf{U}_n$  la matrice constituée à partir des  $n$  colonnes de  $\mathbf{U}$  associées aux  $n$  valeurs singulières (par définition non nulles) de  $\Sigma$  et  $\mathbf{V}_n$  la matrice constituée à partir des  $n$  colonnes de  $\mathbf{V}$  associées aux  $n$  valeurs singulières (par définition non nulles) de  $\Sigma$ , la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{H}_r(0)$  s'écrit comme suit:

$$\mathbf{H}_r(0) = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_n & \mathbf{U}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_n^T \\ \mathbf{V}_s^T \end{bmatrix} = \mathbf{U}_n \Sigma_n \mathbf{V}_n^T \quad (\text{A.49})$$

L'algorithme suivant, appelé algorithme de Ho-Kalman<sup>3</sup> ou algorithme ERA (Eigensystem Realization Algorithm), permet d'obtenir une réalisation minimale d'une matrice de transfert:

- Une fois la dimension  $n$  du système connue, les deux matrices  $\mathcal{O}_n$  et  $\mathcal{C}_n$  suivantes sont définies:

$$\mathbf{H}_{r_0}(0) = \mathcal{O}_n \mathcal{C}_n = \mathbf{U}_n \Sigma_n \mathbf{V}_n^T \text{ où } \begin{cases} \mathcal{O}_n = \mathbf{U}_n \Sigma_n^{1/2} \\ \mathcal{C}_n = \Sigma_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

- La matrice  $\mathbf{A}$  est ensuite définie à partir de la relation suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{r_0}(1) &= \mathcal{O}_n \mathbf{A} \mathcal{C}_n \\ \Rightarrow \mathbf{A} &= \mathcal{O}_n^+ \mathbf{H}_{r_0}(1) \mathcal{C}_n^+ = \Sigma_n^{-1/2} \mathbf{U}_n^T \mathbf{H}_{r_0}(1) \mathbf{V}_n \Sigma_n^{-1/2} \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

où  $\mathcal{O}_n^+$  désigne la pseudo-inverse de  $\mathcal{O}_n$ ,  $\mathcal{C}_n^+$  la pseudo-inverse de  $\mathcal{C}_n$  et où  $\mathbf{H}_{r_0}(1)$  désigne la matrice obtenue par la translation de  $\mathbf{H}_{r_0}(0)$  d'un bloc colonne vers la gauche:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{r_0}(0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{J}_{r_0} \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{J}_{r_0+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{J}_{r_0} & \mathbf{J}_{r_0+1} & \cdots & \mathbf{J}_{2r_0-1} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{H}_{r_0}(1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{J}_{r_0+1} \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 & \cdots & \mathbf{J}_{r_0+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{J}_{r_0+1} & \mathbf{J}_{r_0+2} & \cdots & \mathbf{J}_{2r_0} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

<sup>3</sup>B.L. Ho, R.E. Kalman, Effective construction of linear state-variable models from input=output functions, Proceedings of the Third Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, Monticello, IL, October 1965, pp. 449–459

- Les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  sont enfin définies à partir des relations fondamentales suivantes:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_n = [\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \\ \mathcal{O}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.53})$$

Les matrices  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  correspondent donc respectivement aux premiers blocs des matrices  $\mathcal{C}_n$  et  $\mathcal{O}_n$  avec les dimensions appropriées. Pour un système MIMO à  $m$  entrées et  $p$  sorties, et en désignant par  $\mathbb{I}_m$  la matrice identité de dimension  $m$ , nous obtenons le résultat suivant:

$$\begin{cases} \mathbf{B} = \mathcal{C}_n \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [\mathbb{I}_p \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] \mathcal{O}_n = [\mathbb{I}_p \quad \mathbf{0} \quad \dots \quad \mathbf{0}] \mathbf{U}_n \boldsymbol{\Sigma}_n^{1/2} \end{cases} \quad (\text{A.54})$$

## A.7 Exemples

**Exemple A.1.** *Considérons la fonction de transfert suivante:*

$$F(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12} \quad (\text{A.55})$$

*En multipliant le numérateur et le dénominateur par  $s^{-2}$  et en effectuant la division suivant les puissances croissantes de  $s^{-1}$  il vient:*

$$F(s) = \frac{s^{-1} + 2s^{-2}}{1 + 7s^{-1} + 12s^{-2}} = s^{-1} - 5s^{-2} + 23s^{-3} - 101s^{-4} + 431s^{-5} + \dots \quad (\text{A.56})$$

*Nous en déduisons donc les cinq premiers paramètres de Markov de  $F(s)$ :*

$$\begin{cases} \mathbf{J}_1 = 1 \\ \mathbf{J}_2 = -5 \\ \mathbf{J}_3 = 23 \\ \mathbf{J}_4 = -101 \\ \mathbf{J}_5 = 431 \end{cases} \quad (\text{A.57})$$

*Les deux premiers paramètres auraient pu être trouvés par les relations suivantes:*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.58})$$

*Et pour  $q = 3$ :*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_3 \\ \mathbf{J}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ -101 \end{bmatrix} \quad (\text{A.59})$$

Les premières matrices de Hankel de la fonction de transfert  $F(s) = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$  sont donc les suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1(0) &= \mathbf{J}_1 = 1, \text{ rank}(\mathbf{H}_1(0)) = 1 \\ \mathbf{H}_2(0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 23 \end{bmatrix}, \text{ rank}(\mathbf{H}_2(0)) = 2 \\ \mathbf{H}_3(0) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 & \mathbf{J}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 23 \\ -5 & 23 & -101 \\ 23 & -101 & 431 \end{bmatrix}, \text{ rank}(\mathbf{H}_3(0)) = 2 \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Par conséquent, l'indice de réalisabilité  $r_0$  vaut 2 et la dimension  $n$  du système est aussi égale à 2.

La décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{H}_2(0)$  est la suivante (fonction `svd` sous `scilab`):

$$\mathbf{H}_2(0) = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \text{ où } \begin{cases} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.2116997 & 0.9773348 \\ 0.9773348 & 0.2116997 \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 24.083046 & 0. \\ 0. & 0.0830460 \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.2116997 & -0.9773348 \\ 0.9773348 & -0.2116997 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.61})$$

Nous en déduisons les expressions des matrices  $\mathbf{\Sigma}_2$ ,  $\mathcal{O}_2$  et  $\mathcal{C}_2$ ; ici comme la matrice  $\mathbf{\Sigma}$  est carrée nous avons  $\mathbf{\Sigma}_2 = \mathbf{\Sigma}$ ,  $\mathbf{U}_2 = \mathbf{U}$  et  $\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}$ :

$$\begin{cases} \mathcal{O}_2 = \mathbf{U}_2\mathbf{\Sigma}_2^{1/2} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}^{1/2} = \begin{bmatrix} -1.0389053 & 0.2816454 \\ 4.7962195 & 0.0610070 \end{bmatrix} \\ \mathcal{C}_2 = \mathbf{\Sigma}_2^{1/2}\mathbf{V}_2^T = \mathbf{\Sigma}^{1/2}\mathbf{V}^T = \begin{bmatrix} -1.0389053 & 4.7962195 \\ -0.2816454 & -0.0610070 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.62})$$

Les expressions de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{B}$  sont respectivement données par la première ligne de  $\mathcal{O}_2$  et la première colonne de  $\mathcal{C}_2$ :

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1.0389053 & 0.2816454 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1.0389053 \\ -0.2816454 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.63})$$

Formons ensuite  $\mathbf{H}_2(1)$  et calculons la matrice  $\mathbf{A}$  (ici comme la matrice  $\mathbf{\Sigma}$  est carrée la pseudo-inverse se réduit à l'inversion simple):

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_2(1) &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 23 \\ 23 & -101 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{A} &= \mathcal{O}_2^+ \mathbf{H}_2(1) \mathcal{C}_2^+ = \begin{bmatrix} -4.4103665 & -0.7607675 \\ 0.7607675 & -2.5896335 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Nous vérifions bien évidemment que  $\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^+ \mathbf{B} = \frac{s+2}{s^2+7s+12}$ .

■

**Exemple A.2.** Considérons la matrice de transfert suivante que nous avons déjà rencontrée lors d'un exemple précédent:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} \frac{2}{s+2} & \frac{s+1}{(s+3)^2} \\ \frac{1}{s+2} & \frac{5}{s+2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.65})$$

Les sept premiers paramètres de Markov de  $\mathbf{F}(s)$  sont les suivants (on peut utiliser la commande `ldiv` de `scilab` pour réaliser ces calculs):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_3 = \begin{bmatrix} 8 & 21 \\ 4 & 20 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_4 = \begin{bmatrix} -16 & -81 \\ -8 & -40 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_5 = \begin{bmatrix} 32 & 297 \\ 16 & 80 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_6 = \begin{bmatrix} -64 & -1053 \\ -32 & -160 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_7 = \begin{bmatrix} 128 & 3645 \\ 64 & 320 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.66})$$

Le rang des quatre premières matrices de Hankel sont les suivants:

$$\begin{aligned} \text{rank}(\mathbf{H}_1(0)) &= \text{rank}(\mathbf{J}_1) = 2 \\ \text{rank}(\mathbf{H}_2(0)) &= \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 \end{bmatrix}\right) = 3 \\ \text{rank}(\mathbf{H}_3(0)) &= \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 & \mathbf{J}_5 \end{bmatrix}\right) = 4 \\ \text{rank}(\mathbf{H}_4(0)) &= \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 & \mathbf{J}_5 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 & \mathbf{J}_5 & \mathbf{J}_6 \\ \mathbf{J}_4 & \mathbf{J}_5 & \mathbf{J}_6 & \mathbf{J}_7 \end{bmatrix}\right) = 4 \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Par conséquent, l'indice de réalisabilité  $r_0$  vaut 3 et la dimension  $n$  du système est égale à 4 (ce que nous avons déjà vu lors d'un exercice précédent!).

La décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{H}_3(0)$  est la suivante (fonction

*svd sous scilab*):  $\mathbf{H}_3(0) = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$  où:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.0665917 & -0.0286338 & 0.6183012 & -0.7825914 & 0. & 0. \\ -0.0670298 & -0.2070805 & -0.0155810 & 0.0009704 & -0.9759001 & -0.0001521 \\ 0.2518390 & -0.0280292 & -0.7490178 & -0.6121795 & 0. & 0. \\ 0.1340596 & 0.4141611 & 0.0311620 & -0.0019407 & -0.0977294 & 0.8944120 \\ -0.9153086 & 0.3128341 & -0.2271075 & -0.1129919 & 0. & 0. \\ -0.2681191 & -0.8283221 & -0.0623239 & 0.0038814 & 0.1951103 & 0.4472440 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 339.36047 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25.796784 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.197932 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0094089 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} -0.0290860 & -0.0694338 & 0.2048075 & -0.0024260 & 0.7262657 & 0.6518582 \\ -0.0812864 & -0.5838878 & -0.2002240 & 0.7825457 & 0. & 0. \\ 0.0581720 & 0.1388677 & -0.409615 & 0.0048520 & 0.6700645 & -0.6004477 \\ 0.2765137 & 0.686206 & 0.2791581 & 0.6121538 & 0. & 0. \\ -0.1163439 & -0.2777353 & 0.8192300 & -0.0097041 & 0.1534658 & -0.4631884 \\ -0.9482441 & 0.2948799 & -0.0333575 & 0.1129882 & 0. & 0. \end{bmatrix}$$

(A.68)

Nous en déduisons les expressions des matrices  $\mathbf{\Sigma}_3$ ,  $\mathbf{O}_3$  et  $\mathbf{C}_3$ : on rappelle que  $\mathbf{\Sigma}_3$  est la matrice carrée diagonale constituée des  $n = 4$  valeurs singulières (par définition non nulles) de  $\mathbf{\Sigma}$ ,  $\mathbf{U}_3$  est la matrice constituée à partir des  $n = 4$  colonnes de  $\mathbf{U}$  associées aux valeurs singulières (par définition non nulles) de  $\mathbf{\Sigma}$  et  $\mathbf{V}_3$  est la matrice constituée à partir des  $n = 4$  colonnes de  $\mathbf{V}$  associées aux  $n = 4$  valeurs singulières (par définition non nulles) de  $\mathbf{\Sigma}$ :

$$\mathbf{\Sigma}_3 = \begin{bmatrix} 339.36047 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25.796784 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10.197932 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0094089 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}_3 = \begin{bmatrix} -0.0665917 & -0.0286338 & 0.6183012 & -0.7825914 \\ -0.0670298 & -0.2070805 & -0.0155810 & 0.0009704 \\ 0.2518390 & -0.0280292 & -0.7490178 & -0.6121795 \\ 0.1340596 & 0.4141611 & 0.0311620 & -0.0019407 \\ -0.9153086 & 0.3128341 & -0.2271075 & -0.1129919 \\ -0.2681191 & -0.8283221 & -0.0623239 & 0.0038814 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} -0.0290860 & -0.0694338 & 0.2048075 & -0.0024260 \\ -0.0812864 & -0.5838878 & -0.2002240 & 0.7825457 \\ 0.0581720 & 0.1388677 & -0.409615 & 0.0048520 \\ 0.2765137 & 0.686206 & 0.2791581 & 0.6121538 \\ -0.1163439 & -0.2777353 & 0.8192300 & -0.0097041 \\ -0.9482441 & 0.2948799 & -0.0333575 & 0.1129882 \end{bmatrix}$$

(A.69)

Les expressions des matrices  $\mathcal{O}_3$  et  $\mathcal{C}_3$  sont alors les suivantes:

$$\mathcal{O}_3 = \mathbf{U}_3 \boldsymbol{\Sigma}_3^{1/2} = \begin{bmatrix} -1.226735 & -0.1454328 & 1.9744954 & -0.0759111 \\ -1.234805 & -1.0517731 & -0.0497566 & 0.0000941 \\ 4.6393129 & -0.1423620 & -2.3919286 & -0.0593812 \\ 2.4696101 & 2.1035462 & 0.0995133 & -0.0001882 \\ -16.861576 & 1.588901 & -0.7252497 & -0.0109602 \\ -4.9392201 & -4.2070924 & -0.1990265 & 0.0003765 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{C}_3 = \boldsymbol{\Sigma}_3^{1/2} \mathbf{V}_3^T = \begin{bmatrix} -0.5358144 & -1.497437 & 1.0716289 & 5.0938637 & -2.1432577 & -17.468305 \\ -0.3526581 & -2.9655975 & 0.7053162 & 3.4852769 & -1.4106324 & 1.4977107 \\ 0.6540364 & -0.6393995 & -1.3080727 & 0.8914692 & 2.6161455 & -0.1065244 \\ -0.0002353 & 0.0759067 & 0.0004706 & 0.0593787 & -0.0009413 & 0.0109598 \end{bmatrix} \quad (\text{A.70})$$

Les expressions de  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{B}$  sont respectivement données par les 2 premières lignes (2 sorties) de  $\mathcal{O}_3$  et les 2 premières colonne (2 entrées) de  $\mathcal{C}_3$ :

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1.226735 & -0.1454328 & 1.9744954 & -0.0759111 \\ -1.234805 & -1.0517731 & -0.0497566 & 0.0000941 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -0.5358144 & -1.497437 \\ -0.3526581 & -2.9655975 \\ 0.6540364 & -0.6393995 \\ -0.0002353 & 0.0759067 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.71})$$

Formons ensuite  $\mathbf{H}_3(1)$  obtenue par la translation de  $\mathbf{H}_3(0)$  d'un bloc colonne vers la gauche:

$$\mathbf{H}_3(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_5 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 & \mathbf{J}_5 \\ \mathbf{J}_4 & \mathbf{J}_5 & \mathbf{J}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4. & -5. & 8. & 21. & -16. & -81. \\ -2. & -10. & 4. & 20. & -8. & -40. \\ 8. & 21. & -16. & -81. & 32. & 297. \\ 4. & 20. & -8. & -40. & 16. & 80. \\ -16. & -81. & 32. & 297. & -64. & -1053. \\ -8. & -40. & 16. & 80. & -32. & -160. \end{bmatrix} \quad (\text{A.72})$$

et calculons enfin la matrice  $\mathbf{A}$  en utilisant les pseudo-inverses de  $\mathcal{O}_3$  et  $\mathcal{C}_3$ :

$$\mathbf{A} = \mathcal{O}_3^+ \mathbf{H}_3(1) \mathcal{C}_3^+ = \begin{bmatrix} -3.3947213 & 0.2144643 & -1.0270236 & -0.1341279 \\ 1.6201703 & -2.2465697 & 1.1944215 & 0.1669244 \\ 0.3651873 & -0.1105679 & -1.7605138 & -0.2010013 \\ 0.1389162 & -0.1622925 & 0.0260823 & -2.5981951 \end{bmatrix} \quad (\text{A.73})$$

La réalisation est minimale puisque la dimension de la matrice  $\mathbf{A}$  est égale à la dimension du système.

Nous vérifions bien évidemment que  $\mathbf{C}(s\mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{F}(s)$ .

■

## A.8 Discrétisation de l'équation d'état

### A.8.1 Systèmes linéaires et invariants

Nous avons vu qu'un système à temps continu peut être représenté par l'équation d'état suivante:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t) \quad (\text{A.74})$$

Nous avons de plus montré que la solution de cette équation différentielle linéaire se mettait sous la forme suivante:

$$\underline{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \underline{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B}\underline{u}(\tau) d\tau \quad (\text{A.75})$$

Après discrétisation du vecteur d'état avec un pas d'échantillonnage note  $T$  il vient pour  $t = kT$ :

$$\underline{x}(kT) = e^{\mathbf{A}kT} \underline{x}_0 + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}(kT-\tau)} \mathbf{B}\underline{u}(\tau) d\tau \quad (\text{A.76})$$

Nous cherchons à exprimer  $\underline{x}((k+1)T)$  en fonction de  $\underline{x}(kT)$ . Pour cela exprimons  $\underline{x}(t)$  pour  $t = (k+1)T$ :

$$\begin{aligned} \underline{x}((k+1)T) &= e^{\mathbf{A}(k+1)T} \underline{x}_0 \\ &\quad + \int_0^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B}\underline{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}(k+1)T} \underline{x}_0 \\ &\quad + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B}\underline{u}(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B}\underline{u}(\tau) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}T} \left( e^{\mathbf{A}kT} \underline{x}_0 + \int_0^{kT} e^{\mathbf{A}(kT-\tau)} \mathbf{B}\underline{u}(\tau) d\tau \right) \\ &\quad + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B}\underline{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Nous reconnaissons dans le terme entre parenthèses l'expression de  $\underline{x}(kT)$  obtenue précédemment. Il vient:

$$\underline{x}((k+1)T) = e^{\mathbf{A}T} \underline{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B}\underline{u}(\tau) d\tau \quad (\text{A.78})$$

En supposant que le terme  $\underline{u}(\tau)$  qui apparaît dans l'intégrale est constant entre chaque instant d'échantillonnage (c'est le cas lorsqu'il est issu d'un échantillonneur bloqueur), nous pouvons le remplacer par  $\underline{u}(kT)$  et le sortir avec la matrice  $\mathbf{B}$  de l'intégrale. Il vient:

$$\begin{aligned} \underline{x}((k+1)T) &= e^{\mathbf{A}T} \underline{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} \mathbf{B}\underline{u}(kT) d\tau \\ &= e^{\mathbf{A}T} \underline{x}(kT) + \left( \int_{kT}^{(k+1)T} e^{\mathbf{A}((k+1)T-\tau)} d\tau \right) \mathbf{B}\underline{u}(kT) \\ &= e^{\mathbf{A}T} \underline{x}(kT) + \left( \int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\tau)} d\tau \right) \mathbf{B}\underline{u}(kT) \\ &= e^{\mathbf{A}T} \underline{x}(kT) + \left( \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{B}\underline{u}(kT) \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

Soit finalement:

$$\underline{x}((k+1)T) = \mathbf{A}_d \underline{x}(kT) + \mathbf{B}_d \underline{u}(kT) \quad (\text{A.80})$$



Où:

$$\boxed{\begin{cases} \mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}T} \\ \mathbf{B}_d = \left( \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \right) \mathbf{B} \end{cases}} \quad (\text{A.81})$$

Une astuce pour calculer efficacement  $\mathbf{A}_d$  et  $\mathbf{B}_d$  est d'utiliser la propriété suivante<sup>4</sup>:

$$\exp \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} T \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{B}_d \\ \mathbf{0} & \mathbb{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.82})$$

De manière concise, en notant  $\underline{x}_{k+1} := \underline{x}((k+1)T)$  et  $\underline{u}_k := \underline{u}(kT)$ , nous avons:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} := \underline{x}((k+1)T) \\ \underline{u}_k := \underline{u}(kT) \end{cases} \Rightarrow \underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \underline{x}_k + \mathbf{B}_d \underline{u}_k \quad (\text{A.83})$$

Sous réserve que  $\mathbf{A}^{-1}$  existe et en utilisant la propriété  $e^{\mathbf{A}T} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} e^{\mathbf{A}T}$  nous pouvons expliciter le calcul de l'intégrale utilisée pour le calcul de  $\mathbf{B}_d$ :

$$\int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} d\tau = \mathbf{A}^{-1} [e^{\mathbf{A}\tau}]_{\tau=0}^T = \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}T} - \mathbb{I}) \quad (\text{A.84})$$

Finalement, sous réserve que  $\mathbf{A}^{-1}$  existe, nous obtenons:

$$\underline{x}_{k+1} = e^{\mathbf{A}T} \underline{x}_k + \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}T} - \mathbb{I}) \mathbf{B} \underline{u}_k \quad (\text{A.85})$$

En ce qui concerne l'équation de sortie elle reste inchangée:

$$\underline{y}(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) + \mathbf{D}\underline{u}(t) \Rightarrow \underline{y}_k = \mathbf{C}\underline{x}_k + \mathbf{D}\underline{u}_k \quad (\text{A.86})$$

Par conséquent la représentation d'état d'un système à temps discret MIMO à  $m$  entrées et  $p$  sorties est la suivante:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \underline{x}_k + \mathbf{B}_d \underline{u}_k \\ \underline{y}_k = \mathbf{C} \underline{x}_k + \mathbf{D} \underline{u}_k \end{cases} \quad (\text{A.87})$$

Lorsque le système à temps continu est perturbé par des bruits blancs gaussiens, nous avons la représentation d'état suivante:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}\underline{u}(t) + \underline{w}(t) \\ \underline{y}(t) = \mathbf{C}\underline{x}(t) + \mathbf{D}\underline{u}(t) + \underline{v}(t) \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \underline{w}(t) \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \mathbf{Q}) \\ \underline{v}(t) \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \mathbf{R}) \end{cases} \quad (\text{A.88})$$

Le système correspondant à temps discret est le suivant<sup>4</sup>:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \underline{x}_k + \mathbf{B}_d \underline{u}_k + \underline{w}_k \\ \underline{y}_k = \mathbf{C} \underline{x}_k + \mathbf{D} \underline{u}_k + \underline{v}_k \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \underline{w}_k \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \mathbf{Q}_d = \int_0^T e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{Q} e^{\mathbf{A}^T \tau} d\tau) \\ \underline{v}_k \sim \mathcal{N}(\underline{0}, \mathbf{R}_d = \frac{\mathbf{R}}{T}) \end{cases} \quad (\text{A.89})$$

Une astuce pour calculer efficacement  $\mathbf{Q}_d$  est d'utiliser la propriété suivante<sup>4</sup>:

$$\exp \left( \begin{bmatrix} -\mathbf{A} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \end{bmatrix} T \right) = \begin{bmatrix} * & \mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{Q}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_d^T \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{Q}_d = (\mathbf{A}_d^T)^T (\mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{Q}_d) \quad (\text{A.90})$$

<sup>4</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Discretization>

Notons de plus que si  $z_k = a_k + jb_k$  est une valeur propre de la matrice d'état  $\mathbf{A}_d$  du système à temps discret, la valeur propre  $s_k$  correspondante associée à la matrice d'état  $\mathbf{A}$  du système à temps continu peut s'obtenir comme suit:

$$s_k = \frac{1}{T} \ln \left( \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \right) + j \frac{1}{T} \operatorname{atan} \left( \frac{b_k}{a_k} \right) \Leftrightarrow z_k = a_k + jb_k = e^{s_k T} \quad (\text{A.91})$$

Lorsque la période d'échantillonnage  $T$  est suffisamment petite, nous pouvons faire les approximations suivantes:

$$e^{\mathbf{A}T} \approx \mathbb{I} + \mathbf{A}T \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}_d \approx \mathbb{I} + \mathbf{A}T \\ \mathbf{B}_d \approx \mathbf{B}T \end{cases} \quad (\text{A.92})$$

Ces approximations peuvent être obtenues en discrétisant la dérivée  $\dot{\underline{x}}(t)$  du vecteur d'état par un schéma d'Euler:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \dot{\underline{x}}(kT) = \mathbf{A}\underline{x}(kT) + \mathbf{B}\underline{u}(kT) \\ \dot{\underline{x}}(kT) \approx \frac{\underline{x}((k+1)T) - \underline{x}(kT)}{T} \end{cases} \\ & \Rightarrow \underline{x}((k+1)T) = (\mathbb{I} + \mathbf{A}T) \underline{x}(kT) + \mathbf{B}T \underline{u}(kT) \\ & \Leftrightarrow \underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \underline{x}_k + \mathbf{B}_d \underline{u}_k \end{aligned} \quad (\text{A.93})$$

Une autre approximation de  $e^{\mathbf{A}T}$  est la suivante:

$$e^{\mathbf{A}T} = e^{\mathbf{A}T/2} \left( e^{\mathbf{A}T/2} \right)^{-1} \approx \left( \mathbb{I} + \frac{1}{2} \mathbf{A}T \right) \left( \mathbb{I} - \frac{1}{2} \mathbf{A}T \right)^{-1} \quad (\text{A.94})$$

## A.8.2 Discrétisation par les séries d'Adomian

### Équations différentielles

Nous rappelons dans un premier temps le principe de la méthode d'Adomian<sup>5</sup>. Nous considérons l'équation différentielle suivante où  $\underline{x}$  est une fonction (ou un vecteur de fonctions) inconnue,  $L$  un opérateur linéaire différentiel,  $N(\underline{x}(t))$  un opérateur non-linéaire agissant sur  $\underline{x}$  et  $\underline{h}(t)$  une fonction (ou un vecteur de fonctions) connue et indépendante de  $\underline{x}$ :

$$L(\underline{x}) = N(\underline{x}) + \underline{h} \quad (\text{A.95})$$

Après intégration, et en utilisant la linéarité de  $L$ , il vient:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}(0) + L^{-1} (N(\underline{x}) + \underline{h}) = (\underline{x}(0) + L^{-1} (\underline{h})) + L^{-1} (N(\underline{x})) \quad (\text{A.96})$$

Ensuite,  $\underline{x}(t)$  et l'opérateur non-linéaire  $N(\underline{x})$ , qui est supposé analytique (c'est à dire indéfiniment dérivable), sont représentés par les séries suivantes:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{x}_i(t) \\ N(\underline{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_i) \end{cases} \quad (\text{A.97})$$

---

<sup>5</sup>Y. Cherruault, G. Adomian, Decomposition methods: a new proof of convergence, Math. Comp. Model. 18 (1993) 103–106

Les polynômes d'Adomian  $A_m(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_m)$  sont obtenus comme suit:

$$A_m(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_m) = \frac{1}{m!} \left[ \frac{d^m}{d\lambda^m} N \left( \sum_{k=0}^m \lambda^k \underline{x}_k \right) \right]_{\lambda=0} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.98})$$

Les polynômes d'Adomian  $A_m(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_m)$  peuvent être calculés de manière équivalente comme suit<sup>6</sup>:

$$A_m(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} N \left( \sum_{k=0}^m \underline{x}_k e^{jk\lambda} \right) e^{-jm\lambda} d\lambda \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.99})$$

En utilisant le développement en série (A.97) dans (A.96) nous obtenons:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \underline{x}_i(t) = (\underline{x}(0) + L^{-1}(\underline{h})) + L^{-1} \left( \sum_{i=0}^{\infty} A_i(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_i) \right) \quad (\text{A.100})$$

En identifiant les termes de même ordre de part et d'autre du signal égal nous obtenons une approximation d'ordre  $n$  de  $\underline{x}(t)$ :

$$\underline{x}(t) \approx \sum_{i=0}^n \underline{x}_i(t) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \underline{x}_0(t) = \underline{x}(0) + L^{-1}(\underline{h}) \\ \underline{x}_1(t) = L^{-1}(A_0(\underline{x}_0)) \\ \underline{x}_2(t) = L^{-1}(A_1(\underline{x}_0, \underline{x}_1)) \\ \vdots \\ \underline{x}_n(t) = L^{-1}(A_{n-1}(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_{n-1})) \end{cases} \quad (\text{A.101})$$

**Exemple A.3.** Nous considérons l'équation différentielle suivante<sup>7</sup>:

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \sin(x) \\ x(0) = \theta_0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.102})$$

Ici l'opérateur différentiel  $L$  est la dérivée seconde  $d^2/dt^2$ . Par conséquent  $L^{-1}$  représente la double intégration  $\int_0^t (\int_0^{\tau_1} d\tau_2) d\tau_1$ . De plus, pour cet exemple  $\underline{h}$  n'existe pas et  $N(x) = \sin(x)$ . En utilisant (A.98), le développement en série d'Adomian de  $\sin(x)$  s'écrit:

$$\begin{cases} A_0(x_0) = \sin(x_0) \\ A_1(x_0, x_1) = x_1 \cos(x_0) \\ A_2(x_0, x_1, x_2) = x_2 \cos(x_0) - \frac{x_1^2}{2} \sin(x_0) \\ A_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 \cos(x_0) - \frac{1}{6} x_1^3 \cos(x_0) - x_1 x_2 \sin(x_0) \\ \vdots \end{cases} \quad (\text{A.103})$$

<sup>6</sup>K. K. Kataria, P. Vellaisamy, Simple Parametrization Methods For Generating Adomian Polynomials, available online at <http://pefmath.etf.rs>

<sup>7</sup>G Adomian, A review of the decomposition method in applied mathematics, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 135, Issue 2, 1988, Pages 501-544, [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(88\)90170-9](https://doi.org/10.1016/0022-247X(88)90170-9).

Ainsi, en utilisant (A.101), nous obtenons l'approximation suivante de  $\underline{x}(t)$ :

$$\underline{x}(t) \approx \sum_{i=0}^n \underline{x}_i(t) \quad (\text{A.104})$$

où:

$$\begin{aligned} \underline{x}_0(t) &= \underline{x}(0) + L^{-1}(\underline{h}) = \theta_0 \\ \underline{x}_1(t) &= L^{-1}(A_0(\underline{x}_0)) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} \sin(x_0) d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \int_0^t \int_0^{\tau_1} \sin(\theta_0) d\tau_2 d\tau_1 = \frac{t^2}{2} \sin(\theta_0) \\ \underline{x}_2(t) &= L^{-1}(A_1(\underline{x}_0, \underline{x}_1)) = \int_0^t \int_0^{\tau_1} x_1 \cos(x_0) d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \int_0^t \int_0^{\tau_1} \frac{\tau_2^2}{2} \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) d\tau_2 d\tau_1 = \frac{t^4}{4!} \sin(\theta_0) \cos(\theta_0) \\ \underline{x}_3(t) &= L^{-1}(A_2(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2)) \\ &= \int_0^t \int_0^{\tau_1} \left( x_2 \cos(x_0) - \frac{x_1^2}{2} \sin(x_0) \right) d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \frac{t^6}{6!} (\sin(\theta_0) \cos^2(\theta_0) - 3 \sin^3(\theta_0)) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (\text{A.105})$$

■

### Systèmes non-linéaires

Nous considérons maintenant la représentation d'état non-linéaire suivante où  $f(\underline{x}(t), \underline{u}(t))$  est un champ de vecteur analytique (c'est à dire indéfiniment dérivable) sur  $\mathbb{R}^n$ :

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t), \underline{u}(t)) \quad (\text{A.106})$$

La solution  $\underline{x}(t)$  de cette équation différentielle s'écrit comme suit où  $L^{-1}$  représente l'intégration  $\int_0^t d\tau$ :

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \underline{x}(0) + L^{-1}(f(\underline{x}(t), \underline{u}(t))) \\ &= \underline{x}(0) + \int_0^t (f(\underline{x}(\tau), \underline{u}(\tau))) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

En supposant l'utilisation qu'un bloqueur d'ordre zéro (ZOH: Zero Order Hold) modélise le convertisseur numérique analogique (DAC: digital-to-analog convert), le vecteur de commande  $\underline{u}(t)$  est constant sur la période d'échantillonnage  $T$ :

$$\underline{u}(t) = \underline{u}(kT) := \underline{u}_k = \text{constant } \forall t \in [t_k, t_{k+1}) = [kT, (k+1)T) \quad (\text{A.108})$$

Ainsi, lorsque la dynamique du système non-linéaire (A.107) est discrétisée,  $\underline{u}(\tau)$  est remplacé par  $\underline{u}_k = \text{constant } \forall t \in [kT, (k+1)T)$ . Il vient:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &= \underline{x}(0) + \int_0^{(k+1)T} (f(\underline{x}(\tau), \underline{u}(\tau))) d\tau \\ &= \underline{x}_k + \int_{kT}^{(k+1)T} (f(\underline{x}(\tau), \underline{u}(\tau))) d\tau \\ &= \underline{x}_k + \int_{kT}^{(k+1)T} (f(\underline{x}(\tau), \underline{u}_k)) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.109})$$

Plus généralement,  $\forall t \in [kT, (k+1)T)$ , nous pouvons écrire:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_k + \int_{kT}^t (f(\underline{x}(\tau), \underline{u}_k)) d\tau \quad \forall t \in [kT, (k+1)T) \quad (\text{A.110})$$

En utilisant la décomposition d'Adomian,  $\underline{x}(t)$  et  $f(\underline{x}(t), \underline{u}_k)$  sont représentés par les séries suivantes:

$$\begin{cases} \underline{x}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{x}_i(t) \\ f(\underline{x}(t), \underline{u}_k) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_i) \end{cases} \quad (\text{A.111})$$

Les polynômes d'Adomian  $A_i(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_i)$  sont obtenus selon (A.98):

$$A_i(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_i) = \frac{1}{i!} \left[ \frac{d^i}{d\lambda^i} f \left( \sum_{j=0}^i \lambda^j \underline{x}_j, \underline{u}_k \right) \right]_{\lambda=0} \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.112})$$

En identifiant les termes de même ordre de part et d'autre du signal égal de (A.109), nous obtenons une approximation d'ordre  $n$  de  $\underline{x}(t)$ . En notant maintenant  $L^{-1}$  l'opérateur d'intégration  $\int_{kT}^t d\tau$ , il vient:

$$\underline{x}(t) \approx \sum_{i=0}^n \underline{x}_i(t) \text{ où } \begin{cases} \underline{x}_0(t) = \underline{x}_k \\ \underline{x}_1(t) = L^{-1}(A_0(\underline{x}_0)) := \int_{kT}^t A_0(\underline{x}_0) d\tau \\ \underline{x}_2(t) = \int_{kT}^t A_1(\underline{x}_0, \underline{x}_1) d\tau \\ \vdots \\ \underline{x}_n(t) = \int_{kT}^t A_{n-1}(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_{n-1}) d\tau \end{cases} \quad (\text{A.113})$$

Enfin, en affectant à  $t$  la valeur  $(k+1)T$  dans  $\underline{x}(t)$  nous obtenons une approximation d'ordre  $n$  de la dynamique du système discrétisé:

$$\underline{x}((k+1)T) \approx \sum_{i=0}^n \underline{x}_i((k+1)T) \quad (\text{A.114})$$

Pour  $n = 1$ , l'approximation obtenue correspond à celle obtenue avec la méthode d'Euler.

**Exemple A.4.** *Considérons le système linéaire et invariant suivant*

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A}\underline{x} + \mathbf{B}\underline{u} \quad (\text{A.115})$$

*Il est clair que nous avons par identification avec (A.106):*

$$f(\underline{x}, \underline{u}) = \mathbf{A}\underline{x} + \mathbf{B}\underline{u} \quad (\text{A.116})$$

*En suivant la procédure d'Adomian il vient:*

$$\begin{cases} A_0(\underline{x}_0) = \mathbf{A}\underline{x}_0 + \mathbf{B}\underline{u}_k \\ A_1(\underline{x}_0, \underline{x}_1) = \left[ \frac{d}{d\lambda} (\mathbf{A}(\underline{x}_0 + \lambda \underline{x}_1) + \mathbf{B}\underline{u}_k) \right]_{\lambda=0} = \mathbf{A}\underline{x}_1 \\ A_2(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2) = \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{d\lambda^2} (\mathbf{A}(\underline{x}_0 + \lambda \underline{x}_1 + \lambda^2 \underline{x}_2) + \mathbf{B}\underline{u}_k) \right]_{\lambda=0} = \mathbf{A}\underline{x}_2 \\ \vdots \\ A_n(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_n) = \mathbf{A}\underline{x}_n \end{cases} \quad (\text{A.117})$$

Ainsi l'approximation à l'ordre  $n$  de  $\underline{x}(t)$  s'écrit  $\underline{x}(t) \approx \sum_{i=0}^n \underline{x}_i(t)$  où :

$$\begin{cases} \underline{x}_0(t) = \underline{x}_k \\ \underline{x}_1(t) = \int_{kT}^t A_0(\underline{x}_0) d\tau = (\mathbf{A}\underline{x}_k + \mathbf{B}\underline{u}_k)(t - kT) \\ \underline{x}_2(t) = \int_{kT}^t A_1(\underline{x}_0, \underline{x}_1) d\tau = \mathbf{A}(\mathbf{A}\underline{x}_k + \mathbf{B}\underline{u}_k) \frac{(t-kT)^2}{2} \\ \vdots \\ \underline{x}_n(t) = \int_{kT}^t A_{n-1}(\underline{x}_0, \dots, \underline{x}_{n-1}) d\tau = \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{A}\underline{x}_k + \mathbf{B}\underline{u}_k) \frac{(t-kT)^n}{n!} \end{cases} \quad (\text{A.118})$$

Enfin, en affectant à  $t$  la valeur  $(k+1)T$  dans  $\underline{x}(t)$  nous obtenons une approximation d'ordre  $n$  de la dynamique du système discrétisé :

$$\underline{x}((k+1)T) \approx \sum_{i=0}^n \underline{x}_i((k+1)T) \quad (\text{A.119})$$

où :

$$\begin{cases} \underline{x}_0((k+1)T) = \underline{x}_k \\ \underline{x}_1((k+1)T) = (\mathbf{A}\underline{x}_k + \mathbf{B}\underline{u}_k)T \\ \underline{x}_2((k+1)T) = \mathbf{A}(\mathbf{A}\underline{x}_k + \mathbf{B}\underline{u}_k) \frac{T^2}{2} \\ \vdots \\ \underline{x}_n((k+1)T) = \mathbf{A}^{n-1}(\mathbf{A}\underline{x}_k + \mathbf{B}\underline{u}_k) \frac{T^n}{n!} \end{cases} \quad (\text{A.120})$$

Lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et en supposant que  $\mathbf{A}^{-1}$  existe, nous obtenons la série suivante :

$$\begin{aligned} \underline{x}((k+1)T) &= \sum_{i=0}^{\infty} \underline{x}_i((k+1)T) \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}T)^i}{i!} \right) \underline{x}_k + \mathbf{A}^{-1} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}T)^i}{i!} \right) \mathbf{B}\underline{u}_k \\ &= \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}T)^i}{i!} \right) \underline{x}_k + \mathbf{A}^{-1} \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}T)^i}{i!} - \mathbb{I} \right) \mathbf{B}\underline{u}_k \\ &= e^{\mathbf{A}T} \underline{x}_k + \mathbf{A}^{-1} (e^{\mathbf{A}T} - \mathbb{I}) \mathbf{B}\underline{u}_k \end{aligned} \quad (\text{A.121})$$

Nous retrouvons ainsi le résultat (A.85). ■

**Exemple A.5.** Nous considérons l'équation différentielle suivante où  $a \neq 0$ ,  $b$  et  $c$  sont des constantes :

$$\begin{cases} a\ddot{\theta}(t) + b\dot{\theta}(t) + c\sin(\theta(t)) = u(t) \\ \theta(0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0 \end{cases} \quad (\text{A.122})$$

En définissant  $x_1 := \theta$  et  $x_2 := \dot{\theta}$ , la représentation d'état de ce système est la suivante :

$$\begin{cases} x_1 := \theta \\ x_2 := \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{a}(u - b x_2 - c \sin(x_1)) \end{cases} \quad (\text{A.123})$$

Soit, sous forme vectorielle :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{a}(u - b x_2 - c \sin(x_1)) \end{bmatrix} := f(\underline{x}, \underline{u}) \quad (\text{A.124})$$

En suivant la procédure d'Adomian il vient:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} A_0(\underline{x}_0) & = & f(\underline{x}_0, \underline{u}_k) \\ & = & \left[ \begin{array}{c} x_{0,2} \\ \frac{1}{a} (u_k - b x_{0,2} - c \sin(x_{0,1})) \end{array} \right] \\ A_1(\underline{x}_0, \underline{x}_1) & = & \left[ \frac{d}{d\lambda} (f(\underline{x}_0 + \lambda \underline{x}_1, \underline{u}_k)) \right]_{\lambda=0} \\ & = & \frac{d}{d\lambda} \left[ \begin{array}{c} x_{0,2} + \lambda x_{1,2} \\ \frac{1}{a} (u_k - b (x_{0,2} + \lambda x_{1,2}) - c \sin(x_{0,1} + \lambda x_{1,1})) \end{array} \right]_{\lambda=0} \\ & = & \left[ \begin{array}{c} x_{1,2} \\ \frac{1}{a} (-b x_{1,2} - c x_{1,1} \cos(x_{0,1})) \end{array} \right] \\ A_2(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2) & = & \frac{1}{2!} \left[ \frac{d^2}{d\lambda^2} (f(\underline{x}_0 + \lambda \underline{x}_1 + \lambda^2 \underline{x}_2, \underline{u}_k)) \right]_{\lambda=0} \\ & = & \left[ \begin{array}{c} x_{2,2} \\ \frac{1}{a} \left( -b x_{2,2} - c \left( x_{2,1} \cos(x_{0,1}) - \frac{x_{1,1}^2}{2} \sin(x_{0,1}) \right) \right) \end{array} \right] \\ & \vdots & \end{array} \right. \quad (\text{A.125})$$

Ainsi l'approximation à l'ordre  $n$  de  $\underline{x}(t)$  s'écrit  $\underline{x}(t) \approx \sum_{i=0}^n \underline{x}_i(t)$  où:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\underline{x}_0(t) = \underline{x}_k := \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix} \\
\underline{x}_1(t) = \int_{kT}^t A_0(\underline{x}_0) d\tau \\
\quad = \begin{bmatrix} x_{0,2} \\ \frac{1}{a} (u_k - b x_{0,2} - c \sin(x_{0,1})) \end{bmatrix} (t - kT) \\
\quad := \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{1,2} \end{bmatrix} (t - kT) \\
\underline{x}_2(t) = \int_{kT}^t A_1(\underline{x}_0, \underline{x}_1) d\tau \\
\quad = \int_{kT}^t \begin{bmatrix} x_{1,2} \\ \frac{1}{a} (-b x_{1,2} - c x_{1,1} \cos(x_{0,1})) \end{bmatrix} d\tau \\
\quad = \begin{bmatrix} \alpha_{1,2} \\ \frac{1}{a} (-b \alpha_{1,2} - c \alpha_{1,1} \cos(x_{0,1})) \end{bmatrix} \int_{kT}^t (\tau - kT) d\tau \\
\quad = \begin{bmatrix} \alpha_{1,2} \\ \frac{1}{a} (-b \alpha_{1,2} - c \alpha_{1,1} \cos(x_{0,1})) \end{bmatrix} \frac{(t - kT)^2}{2} \\
\quad := \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} \\ \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \frac{(t - kT)^2}{2} \\
\underline{x}_3(t) = \int_{kT}^t A_2(\underline{x}_0, \underline{x}_1, \underline{x}_2) d\tau \\
\quad = \int_{kT}^t \begin{bmatrix} x_{2,2} \\ \frac{1}{a} \left( -b x_{2,2} - c \left( x_{2,1} \cos(x_{0,1}) - \frac{x_{1,1}^2}{2} \sin(x_{0,1}) \right) \right) \end{bmatrix} d\tau \\
\quad = \begin{bmatrix} \alpha_{2,2} \\ \frac{1}{a} \left( -b \alpha_{2,2} - c \left( \alpha_{2,1} \cos(\alpha_{0,1}) - \frac{\alpha_{1,1}^2}{2} \sin(\alpha_{0,1}) \right) \right) \end{bmatrix} \int_{kT}^t \frac{(\tau - kT)^2}{2} d\tau \\
\quad = \begin{bmatrix} \alpha_{2,2} \\ \frac{1}{a} \left( -b \alpha_{2,2} - c \left( \alpha_{2,1} \cos(\alpha_{0,1}) - \frac{\alpha_{1,1}^2}{2} \sin(\alpha_{0,1}) \right) \right) \end{bmatrix} \frac{(t - kT)^2}{3!} \\
\quad := \begin{bmatrix} \alpha_{3,1} \\ \alpha_{3,2} \end{bmatrix} \frac{(t - kT)^2}{3!} \\
\vdots
\end{array} \right. \quad (\text{A.126})$$

Enfin, en affectant à  $t$  la valeur  $(k + 1)T$  dans  $\underline{x}(t)$  nous obtenons une approximation d'ordre  $n$  de la dynamique du système discrétisé:

$$\underline{x}((k + 1)T) \approx \sum_{i=0}^n \underline{x}_i((k + 1)T) \quad (\text{A.127})$$



où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_0((k+1)T) = \underline{x}_k := \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{bmatrix} \\ \underline{x}_1((k+1)T) = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{1,2} \end{bmatrix} T \\ \underline{x}_2((k+1)T) = \begin{bmatrix} \alpha_{2,1} \\ \alpha_{2,2} \end{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ \underline{x}_3((k+1)T) = \begin{bmatrix} \alpha_{3,1} \\ \alpha_{3,2} \end{bmatrix} \frac{T^3}{3!} \\ \vdots \end{array} \right. \quad (\text{A.128})$$

■

## A.9 Approximation de la trajectoire de l'équation d'état

### A.9.1 Transformation bilinéaire (ou de Tustin)

Considérons l'équation différentielle suivante:

$$\dot{x}(t) = y(x(t)) \quad (\text{A.129})$$

En prenant la transformée de Laplace de cette équation, et en imposant des conditions initiales nulles, il vient:

$$sX(s) = Y(s) \quad (\text{A.130})$$

Si nous approximons la dérivée à l'aide de la méthode d'Euler, il vient en notant  $T$  le pas échantillonnage et  $\underline{x}(kT) := \underline{x}_k$ :

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{T} = y_k \quad (\text{A.131})$$

La transformée en  $\mathcal{Z}$  de cette relation s'écrit:

$$\frac{zX(z) - X(z)}{T} = Y(z) \Leftrightarrow \frac{z-1}{T}X(z) = Y(z) \quad (\text{A.132})$$

En comparant les relations (A.130) et (A.132), une première méthode de discrétisation est donnée par la correspondance suivante entre les variables  $s$  et  $z$ :

$$s = \frac{z-1}{T} \quad (\text{A.133})$$

Une autre méthode d'approximation issue de l'analyse non-standard<sup>8</sup> consiste en la correspondance suivante:

$$s = \frac{z-1}{\Phi} \text{ où } \Phi = \frac{1 - e^{-RT}}{R} \quad (\text{A.134})$$

---

<sup>8</sup>Ronald E. Mickens, Discretizations of nonlinear differential equations using explicit nonstandard methods, Journal of Computational and Applied Mathematics 110 (1999), pp 181-185

En notant  $x_i, i = 1, 2, \dots, N$  les points d'équilibre, c'est à dire les points pour lesquels  $y(x_i) = 0$ , la constante  $R$  est calculée comme suit :

$$R = \max \left( \left\| \frac{\partial y(x)}{\partial x} \right\|_{x=x_i} \right), i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{A.135})$$

Une autre approximation possible peut être obtenue en approximant l'intégrale issue de l'équation différentielle avec la méthode des trapèzes :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t y(\tau) d\tau \\ \Rightarrow x_{k+1} &= \int_0^{(k+1)T} y(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{kT} y(\tau) d\tau + \int_{kT}^{(k+1)T} y(\tau) d\tau \\ &\approx x_k + T \frac{(y_k + y_{k+1})}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

La transformée en  $\mathcal{Z}$  de cette relation s'écrit :

$$\begin{aligned} z X(z) &= X(z) + \frac{T}{2} (Y(z) + z Y(z)) \\ \Leftrightarrow (z - 1) X(z) &= \frac{T}{2} (1 + z) Y(z) \\ \Leftrightarrow \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} X(z) &= Y(z) \end{aligned} \quad (\text{A.137})$$

En comparant les relations (A.130) et (A.137), une deuxième méthode de discrétisation est donnée par la correspondance suivante entre les variables  $s$  et  $z$  :

$$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1} \quad (\text{A.138})$$

Cette approximation est appelée transformation bilinéaire (ou de Tustin).

De manière alternative, et en supposant que  $\omega_0$  n'est pas une valeur propre de  $\mathbf{A}$ , la transformation bilinéaire (ou de Tustin)  $s \mapsto z = \frac{\omega_0 + s}{\omega_0 - s}$  change la réalisation de la fonction de transfert  $F(s)$  comme suit<sup>9</sup> :

$$s \mapsto z = \frac{\omega_0 + s}{\omega_0 - s} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{A} + \omega_0 \mathbb{I}) (\omega_0 \mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \\ \tilde{\mathbf{B}} = \sqrt{2\omega_0} (\omega_0 \mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \\ \tilde{\mathbf{C}} = \sqrt{2\omega_0} \mathbf{C} (\omega_0 \mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \\ \tilde{\mathbf{D}} = F(\omega_0) = \mathbf{D} + \mathbf{C} (\omega_0 \mathbb{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} \end{cases} \quad (\text{A.139})$$

Inversement, si  $-1$  n'est pas une valeur propre de  $\tilde{\mathbf{A}}$ , alors l'inverse de la transformation bilinéaire  $s = \omega_0 \frac{z-1}{z+1}$  produit l'effet suivant sur la réalisation de  $\tilde{F}(z)$ <sup>9</sup> :

$$z \mapsto s = \omega_0 \frac{z-1}{z+1} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{A} = \omega_0 (\tilde{\mathbf{A}} - \mathbb{I}) (\mathbb{I} + \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \\ \mathbf{B} = \sqrt{2\omega_0} (\mathbb{I} + \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \\ \mathbf{C} = \sqrt{2\omega_0} \tilde{\mathbf{C}} (\mathbb{I} + \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \\ \mathbf{D} = \tilde{\mathbf{D}} - \tilde{\mathbf{C}} (\mathbb{I} + \tilde{\mathbf{A}})^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \end{cases} \quad (\text{A.140})$$

<sup>9</sup>Jarmo Malinen, The Cayley Transform as a Time Discretization Scheme, Numerical Functional Analysis and Optimization 28(7):825-851, August 2007, DOI: 10.1080/01630560701493321

### A.9.2 Systèmes non-linéaires - Méthode de Runge-Kutta

Considérons la représentation d'état non-linéaire suivante:

$$\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t)) \quad (\text{A.141})$$

Notons que pour les équations différentielles non autonomes où le temps apparaît explicitement,  $\dot{\underline{z}}(t) = g(\underline{z}(t), t)$ , nous pouvons nous ramener au cas précédent en prenant comme vecteur d'état  $\underline{x}(t) = [\underline{z}(t), t]^T$ . En effet:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} \underline{z}(t) \\ t \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\underline{z}}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\underline{z}(t), t) \\ 1 \end{bmatrix} := f(\underline{x}(t)) \quad (\text{A.142})$$

Revenons à l'équation  $\dot{\underline{x}}(t) = f(\underline{x}(t))$ . Il vient, après intégration, et en désignant par  $\underline{x}_0$  le vecteur d'état initial:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_0 + \int_0^t f(\underline{x}(\tau)) d\tau \quad (\text{A.143})$$

Soit, en désignant par  $T$  le pas d'intégration:

$$\begin{aligned} \underline{x}((k+1)T) &= \underline{x}_0 + \int_0^{(k+1)T} f(\underline{x}(\tau)) d\tau \\ &= \underline{x}_0 + \int_0^{kT} f(\underline{x}(\tau)) d\tau + \int_{kT}^{(k+1)T} f(\underline{x}(\tau)) d\tau \\ &= \underline{x}(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} f(\underline{x}(\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.144})$$

Nous allons présenter par la suite 2 méthodes de Runge-Kutta permettant d'approcher la solution de l'équation différentielle: la méthode d'ordre 2 et la méthode d'ordre 4.

#### Méthode de Runge-Kutta d'ordre 2

Dans la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, l'intégrale  $\int_{kT}^{(k+1)T} f(\underline{x}(\tau)) d\tau$  est approximée en utilisant la méthode des trapèzes. Nous avons alors les relations suivantes où pour abrégier l'écriture où nous notons  $\underline{x}(kT) := \underline{x}_k$ :

$$\begin{aligned} \int_{kT}^{(k+1)T} f(\underline{x}(\tau)) d\tau &\approx T \frac{(f(\underline{x}_k) + f(\underline{x}_{k+1}))}{2} \\ \Rightarrow \underline{x}_{k+1} &\approx \underline{x}_k + T \frac{(f(\underline{x}_k) + f(\underline{x}_{k+1}))}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.145})$$

Dans la relation précédente,  $\underline{x}_{k+1}$  apparaît à gauche et à droite de l'équation au travers  $f$ , ce qui définit  $\underline{x}_{k+1}$  de manière *implicite* et nécessite donc l'utilisation d'un algorithme de résolution. Afin de rendre la méthode *explicite*, l'expression de  $\underline{x}_{k+1}$  dans la partie droite de l'équation est approximée par  $\tilde{\underline{x}}_{k+1}$  à l'aide de la dérivée au point  $\underline{x}_k$ :

$$\underline{x}_{k+1} \approx \tilde{\underline{x}}_{k+1} = \underline{x}_k + Tf(\underline{x}_k) \Rightarrow f(\underline{x}_{k+1}) \approx f(\tilde{\underline{x}}_{k+1}) = f(\underline{x}_k + Tf(\underline{x}_k)) \quad (\text{A.146})$$

Au final, l'approximation (A.145) conduit à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 qui s'écrit comme suit:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &\approx \underline{x}_k + T \frac{(f(\underline{x}_k) + f(\underline{x}_k + Tf(\underline{x}_k)))}{2} \\ &\approx \underline{x}_k + \frac{T}{2} (k_1 + k_2) \end{aligned} \quad (\text{A.147})$$

Où:

$$\begin{cases} k_1 = f(\underline{x}_k) \\ k_2 = f(\underline{x}_k + Tf(\underline{x}_k)) = f(\underline{x}_k + Tk_1) \end{cases} \quad (\text{A.148})$$

**Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4**

Dans la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, l'intégrale  $\int_{kT}^{(k+1)T} f(\underline{x}(\tau))d\tau$  est approximée en utilisant la méthode de Simpson: le champ de vecteur  $f(\underline{x}(t))$  est remplacé par un polynôme quadratique  $p(\underline{x}(t))$  prenant les mêmes valeurs que  $f(\underline{x}(t))$  aux points d'abscisse  $a = kT$ ,  $b = (k+1)T$  et  $m = (a+b)/2 = kT + T/2$  en utilisant l'interpolation lagrangienne:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}(t)) &\approx p(\underline{x}(t)) \\ \text{où } p(\underline{x}(t)) &= f(\underline{x}(a)) \frac{(t-m)(t-b)}{(a-m)(a-b)} \\ &\quad + f(\underline{x}(m)) \frac{(t-a)(t-b)}{(m-a)(m-b)} \\ &\quad + f(\underline{x}(b)) \frac{(t-a)(t-m)}{(b-a)(b-m)} \end{aligned} \quad (\text{A.149})$$

L'intégrale du champ de vecteur  $f(\underline{x}(t))$  sur l'intervalle  $[a, b] := [kT, (k+1)T]$  est alors approximée par l'intégrale de  $p(\underline{x}(t))$  sur ce même intervalle:

$$\int_a^b p(\underline{x}(\tau))d\tau = \left( \frac{b-a}{6} \right) (f(\underline{x}(a)) + 4f(\underline{x}(m)) + f(\underline{x}(b))) \quad (\text{A.150})$$

Avec  $a = kT$ ,  $b = (k+1)T$  et  $m = kT + T/2$ , nous obtenons finalement la relation suivante où pour abréger l'écriture nous notons  $\underline{x}(kT) := \underline{x}_k$ :

$$\underline{x}_{k+1} \approx \underline{x}_k + \frac{T}{6} \left( f(\underline{x}_k) + 4f(\underline{x}_{k+1/2}) + f(\underline{x}_{k+1}) \right) \quad (\text{A.151})$$

Cette formule n'est pas directement exploitable car les termes  $\underline{x}_{k+1/2} := \underline{x}(kT + T/2)$  et  $\underline{x}_{k+1} := \underline{x}((k+1)T)$  qui apparaissent dans la partie droite de la relation précédente ne sont pas connus à l'instant  $kT$ .

Comme  $f(\underline{x}_k)$  est la dérivée en  $\underline{x}_k$ , nous pouvons faire une première approximation  $\tilde{\underline{x}}_{k+1/2}$  de  $\underline{x}_{k+1/2}$  à l'ordre 1 en utilisant la valeur de la dérivée obtenue avec la connaissance de  $\underline{x}_k$ . Il vient, en désignant par  $k_1$  la valeur de  $f(\underline{x}_k)$ :

$$\tilde{\underline{x}}_{k+1/2} = \underline{x}_k + \frac{T}{2} f(\underline{x}_k) = \underline{x}_k + \frac{T}{2} k_1 \text{ où } k_1 = f(\underline{x}_k) \quad (\text{A.152})$$

Maintenant que  $\tilde{\underline{x}}_{k+1/2}$  est connu, une deuxième approximation  $\hat{\underline{x}}_{k+1/2}$  de  $\underline{x}_{k+1/2}$  à l'ordre 1 peut être réalisée en utilisant la valeur de la dérivée obtenue avec la connaissance de  $\tilde{\underline{x}}_{k+1/2}$ . Il vient, en désignant par  $k_2$  la valeur de  $f(\tilde{\underline{x}}_{k+1/2})$ :

$$\hat{\underline{x}}_{k+1/2} = \underline{x}_k + \frac{T}{2} f(\tilde{\underline{x}}_{k+1/2}) = \underline{x}_k + \frac{T}{2} k_2 \text{ où } k_2 = f(\tilde{\underline{x}}_{k+1/2}) = f(\underline{x}_k + \frac{T}{2} k_1) \quad (\text{A.153})$$

Au final,  $f(\underline{x}_{k+1/2})$  est approché en faisant la moyenne des 2 approximations précédentes:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_{k+1/2}) &\approx \frac{1}{2} \left( f(\tilde{\underline{x}}_{k+1/2}) + f(\hat{\underline{x}}_{k+1/2}) \right) \\ &= \frac{1}{2} f\left(\underline{x}_k + \frac{T}{2} k_1\right) + \frac{1}{2} f\left(\underline{x}_k + \frac{T}{2} k_2\right) \end{aligned} \quad (\text{A.154})$$

Enfin,  $\underline{x}_{k+1}$  est approximé en utilisant la dérivée  $f(\hat{\underline{x}}_{k+1/2})$  issue de l'approximation  $\hat{\underline{x}}_{k+1/2}$ :

$$\underline{x}_{k+1} \approx \underline{x}_k + T f(\hat{\underline{x}}_{k+1/2}) \quad (\text{A.155})$$

Par conséquent:

$$f(\underline{x}_{k+1}) \approx f(\underline{x}_k + T k_3) \quad (\text{A.156})$$

où:

$$k_3 = f(\hat{\underline{x}}_{k+1/2}) = f(\underline{x}_k + \frac{T}{2} k_2) \quad (\text{A.157})$$

Au final, l'approximation (A.151) s'écrit:

$$\begin{aligned} \underline{x}_{k+1} &\approx \underline{x}_k + \frac{T}{6} \left( f(\underline{x}_k) + 4f(\underline{x}_{k+1/2}) + f(\underline{x}_{k+1}) \right) \\ &\approx \underline{x}_k + \frac{T}{6} \left( f(\underline{x}_k) + 4 \left( \frac{1}{2} f(\underline{x}_k + \frac{T}{2} k_1) + \frac{1}{2} f(\underline{x}_k + \frac{T}{2} k_2) \right) + f(\underline{x}_k + T k_3) \right) \\ &\approx \underline{x}_k + \frac{T}{6} \left( f(\underline{x}_k) + 2f(\underline{x}_k + \frac{T}{2} k_1) + 2f(\underline{x}_k + \frac{T}{2} k_2) + f(\underline{x}_k + T k_3) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.158})$$

Soit, sous forme compacte:

$$\underline{x}_{k+1} \approx \underline{x}_k + \frac{T}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{A.159})$$

Où:

$$\begin{cases} k_1 = f(\underline{x}_k) \\ k_2 = f(\underline{x}_k + \frac{T}{2} k_1) \\ k_3 = f(\underline{x}_k + \frac{T}{2} k_2) \\ k_4 = f(\underline{x}_k + T k_3) \end{cases} \quad (\text{A.160})$$

D'autres méthodes existent, comme celles basées sur la décomposition d'Adomian<sup>10</sup> et présentées au paragraphe A.8.2.

## A.10 Réponse d'un système à temps discret à une entrée quelconque pour des conditions initiales nulles

Nous considérons la représentation d'état suivante d'un système linéaire et invariant à temps discret:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \underline{x}_k + \mathbf{B}_d \underline{u}_k \\ \underline{y}_k = \mathbf{C} \underline{x}_k + \mathbf{D} \underline{u}_k \end{cases} \quad (\text{A.161})$$

<sup>10</sup>Yuanliang Zhang, Kil To Chong, Nikolaos Kazantzis, A.G. Parlos, Discretization of nonlinear input-driven dynamical systems using the Adomian Decomposition Method, Applied Mathematical Modelling, Volume 36, Issue 12, 2012, Pages 5856-5875, <https://doi.org/10.1016/j.apm.2012.01.030>

Calculons alors la réponse de ce système à une séquence d'entrée  $\underline{u}_k$  quelconque en supposant que les conditions initiales sont nulles ( $\underline{x}_0 = \underline{0}$ ):

$$\begin{aligned}
\underline{x}_0 &= \underline{0} \\
\Rightarrow \underline{y}_0 &= \mathbf{D}\underline{u}_0 \\
\underline{x}_1 &= \mathbf{A}_d \underline{x}_0 + \mathbf{B}_d \underline{u}_0 \\
&= \mathbf{B}_d \underline{u}_0 \\
\Rightarrow \underline{y}_1 &= \mathbf{C} \underline{x}_1 + \mathbf{D} \underline{u}_1 \\
&= \mathbf{C} \mathbf{B}_d \underline{u}_0 + \mathbf{D} \underline{u}_1 \\
\underline{x}_2 &= \mathbf{A}_d \underline{x}_1 + \mathbf{B}_d \underline{u}_1 \\
&= \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \underline{u}_0 + \mathbf{B}_d \underline{u}_1 \\
\Rightarrow \underline{y}_2 &= \mathbf{C} \underline{x}_2 + \mathbf{D} \underline{u}_2 \\
&= \mathbf{C} (\mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \underline{u}_0 + \mathbf{B}_d \underline{u}_1) + \mathbf{D} \underline{u}_2 \\
&= \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \underline{u}_0 + \mathbf{C} \mathbf{B}_d \underline{u}_1 + \mathbf{D} \underline{u}_2 \\
\underline{x}_3 &= \mathbf{A}_d \underline{x}_2 + \mathbf{B}_d \underline{u}_2 \\
&= \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d \underline{u}_0 + \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \underline{u}_1 + \mathbf{B}_d \underline{u}_2 \\
\Rightarrow \underline{y}_3 &= \mathbf{C} \underline{x}_3 + \mathbf{D} \underline{u}_3 \\
&= \mathbf{C} \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d \underline{u}_0 + \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \underline{u}_1 + \mathbf{C} \mathbf{B}_d \underline{u}_2 + \mathbf{D} \underline{u}_3 \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{A.162}$$

Soit, d'une manière générale (et avec des conditions initiales nulles):

$$\boxed{\underline{x}_0 = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \underline{x}_k = \sum_{j=1}^k \mathbf{A}_d^{j-1} \mathbf{B}_d \underline{u}_{k-j} \\ \underline{y}_k = \mathbf{C} \sum_{j=1}^k \mathbf{A}_d^{j-1} \mathbf{B}_d \underline{u}_{k-j} + \mathbf{D} \underline{u}_k \end{cases}} \tag{A.163}$$

## A.11 Paramètres de Markov d'un système à temps discret

La réponse impulsionnelle  $\underline{h}_k$  d'un système à temps discret (réponse pour laquelle les conditions initiales sont par hypothèse nulles) est obtenue en prenant pour l'entrée  $\underline{u}_k$  une impulsion d'amplitude unité:

$$\begin{cases} \underline{x}_0 = \underline{0} \\ \underline{u}_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \forall k \neq 0 \end{cases} \end{cases} \tag{A.164}$$

A partir de la réponse générale (A.163) nous pouvons exprimer la réponse

impulsionnelle  $\underline{h}_k$  comme suit:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \underline{h}_0 &:= \underline{y}_0 = \underline{0} \\
 &\quad \underline{x}_1 = \mathbf{A}_d \underline{x}_0 + \mathbf{B}_d \underline{u}_0 \\
 \Rightarrow \underline{h}_1 &:= \underline{y}_1 = \mathbf{C} \underline{x}_1 + \mathbf{D} \underline{u}_1 \\
 &\quad \underline{x}_2 = \mathbf{A}_d \underline{x}_1 + \mathbf{B}_d \underline{u}_1 \\
 \Rightarrow \underline{h}_2 &:= \underline{y}_2 = \mathbf{C} \underline{x}_2 + \mathbf{D} \underline{u}_2 \\
 &\quad \underline{x}_3 = \mathbf{A}_d \underline{x}_2 + \mathbf{B}_d \underline{u}_2 \\
 \Rightarrow \underline{h}_3 &:= \underline{y}_3 = \mathbf{C} \underline{x}_3 + \mathbf{D} \underline{u}_3 \\
 &\quad \vdots
 \end{aligned} \tag{A.165}$$

Les paramètres de Markov d'un système à temps discret sont définis comme la réponse impulsionnelle  $\underline{h}_k$  de ce système:

$$\begin{cases} \underline{h}_0 := \mathbf{D} := \mathbf{J}_0 \\ \underline{h}_k := \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d := \mathbf{J}_k \quad \forall k \geq 1 \end{cases} \tag{A.166}$$

En utilisant (A.163) (et avec des conditions initiales nulles), la réponse d'un système à temps discret s'exprime comme suit:

$$\underline{y}_k = \sum_{j=0}^k \mathbf{J}_k \underline{u}_{k-j} \tag{A.167}$$

En comparaison avec les systèmes à temps continus où le paramètre de Markov  $\mathbf{J}_k$  est obtenu en dérivant  $k - 1$  fois la réponse impulsionnelle, le paramètre de Markov  $\mathbf{J}_k$  d'un système à temps discret est *simplement* la valeur de sa réponse impulsionnelle à l'instant d'échantillonnage  $k$ .

Il est important de noter que des relations similaires sur les matrices de Hankel s'obtiennent lorsque c'est la réponse libre  $\underline{y}_L(k)$  (obtenue lorsque  $\underline{u}_k = \underline{0}$  et  $\underline{x}_0 \neq \underline{0}$ ) d'un système mono-entrée qui est étudiée:

$$\begin{cases} \underline{x}_0 \neq \underline{0} \\ \underline{u}_k = \underline{0} \quad \forall k \geq 0 \\ \tilde{\mathbf{B}}_d = \mathbf{A}_d \underline{x}_0 \end{cases} \Rightarrow \underline{y}_L(k) = \mathbf{C} \mathbf{A}_d^k \underline{x}_0 = \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{k-1} \tilde{\mathbf{B}}_d := \mathbf{J}_k \quad \forall k \geq 1 \tag{A.168}$$

Nous constatons que la matrice  $\mathbf{B}_d$  est formellement remplacée par la matrice  $\tilde{\mathbf{B}}_d = \mathbf{A}_d \underline{x}_0$ . Par conséquent l'algorithme de Ho-Kalman peut aussi être utilisé pour identifier les matrices  $\mathbf{A}_d$  et  $\mathbf{C}$  d'un système à partir de sa réponse libre.

## A.12 Modèle ARMA d'un système à temps discret

En prenant la transformée en  $\mathcal{Z}$  de la représentation d'état à temps discret (A.87) avec des conditions initiales nulles et en utilisant le fait que dans ces conditions  $\mathcal{Z}[\underline{x}_{k+1}] = z\underline{X}(z)$  où  $\mathcal{Z}[\underline{x}_k] = \underline{X}(z)$  nous obtenons la matrice de transfert d'un système à temps discret:

$$\underline{Y}(z) = \mathbf{F}(z)\underline{U}(z) \quad (\text{A.169})$$

Nous considérons la fonction de transfert  $\mathbf{F}(z)$  suivante d'un système SIMO à  $p$  sorties:

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\underline{b}_0 z^n + \underline{b}_1 z^{n-1} + \cdots + \underline{b}_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (\text{A.170})$$

Cette fonction de transfert correspond à celle d'un modèle appelé ARMA (Auto-Régressif à Moyenne Ajustée).

Le problème de l'identification consiste à déterminer les matrices  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{B}_d$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  à partir d'un ensemble de mesures constitué des valeurs des entrées  $u_k$  et des sorties  $\underline{y}_k$  aux instants d'échantillonnage de telle sorte que:

$$\mathbf{F}(z) = \mathbf{C}(z\mathbb{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{B}_d + \mathbf{D} \quad (\text{A.171})$$

Une réalisation de ce système à temps discret SIMO est la suivante:

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \underline{x}_k + \mathbf{B}_d u_k \\ \underline{y}_k = \mathbf{C} \underline{x}_k + \mathbf{D} u_k \end{cases} \quad (\text{A.172})$$

Comme dans le cas continu, les paramètres de Markov  $\mathbf{J}_k$  peuvent être obtenus par identification du quotient de la division selon les puissances croissantes de  $z^{-1}$  de la fonction de transfert ARMA. En multipliant et en divisant par  $z^{-n}$  la fonction de transfert  $\mathbf{F}(z)$ , nous obtenons:

$$\mathbf{F}(z^{-1}) = \frac{\underline{b}_0 + \underline{b}_1 z^{-1} + \cdots + \underline{b}_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{J}_k z^{-k} \quad (\text{A.173})$$

Les  $n+1$  premiers paramètres de Markov peuvent être déterminés par la relation suivante:

$$\begin{bmatrix} \underline{b}_0 \\ \underline{b}_1 \\ \vdots \\ \underline{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 0 \\ \mathbf{J}_n & \mathbf{J}_{n-1} & \cdots & \mathbf{J}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.174})$$

Et:

$$\mathbf{J}_{n+j} = - \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{J}_{n+j-i} \quad \forall j \geq 1 \quad (\text{A.175})$$



### A.13 Identification d'un système à temps discret

Supposons que nous ayons à notre disposition  $L + 1$  mesures  $\underline{y}_k$  associées à la séquence d'entrée  $\underline{u}_k$ . Nous définissons alors la matrice  $\mathcal{U}_L$  comme suit:

$$\mathcal{U}_L = \begin{bmatrix} \underline{u}_0 & \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_L \\ \underline{0} & \underline{u}_0 & \underline{u}_1 & \cdots & \underline{u}_{L-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \underline{0} & \underline{0} & \cdots & \underline{0} & \underline{u}_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.176})$$

La relation de récurrence (A.163) peut alors s'écrire sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_0 & \cdots & \underline{y}_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C}\mathbf{B}_d & \mathbf{C}\mathbf{A}_d\mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{L-1}\mathbf{B}_d \end{bmatrix} \mathcal{U}_L \quad (\text{A.177})$$

Si le système est stable, alors pour une valeur de  $p \in \mathbb{N}$  suffisant grande nous pouvons faire l'approximation suivante<sup>11</sup>:

$$\mathbf{A}_d^i \approx \mathbf{0} \quad \forall i \geq p \quad (\text{A.178})$$

Dans ces conditions la relation précédente peut être approximée comme suit:

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_0 & \cdots & \underline{y}_p & \cdots & \underline{y}_L \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C}\mathbf{B}_d & \mathbf{C}\mathbf{A}_d\mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{p-1}\mathbf{B}_d \end{bmatrix} \mathcal{U}_L \quad (\text{A.179})$$

où la matrice  $\mathcal{U}_L$  a maintenant  $p + 1$  lignes:

$$\mathcal{U}_L = \begin{bmatrix} \underline{u}_0 & \underline{u}_1 & \underline{u}_2 & \cdots & \underline{u}_L \\ \underline{0} & \underline{u}_0 & \underline{u}_1 & \cdots & \underline{u}_{L-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \underline{0} & \cdots & \underline{u}_0 & \cdots & \underline{u}_{L-p} \end{bmatrix} \quad (\text{A.180})$$

En désignant par  $\mathcal{U}_L^+ := \mathcal{U}_L^T (\mathcal{U}_L \mathcal{U}_L^T)^{-1}$  la pseudo-inverse de  $\mathcal{U}_L$ , nous pouvons écrire l'expression de  $\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C}\mathbf{B}_d & \mathbf{C}\mathbf{A}_d\mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{p-1}\mathbf{B}_d \end{bmatrix}$  à partir de (A.179):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{C}\mathbf{B}_d & \mathbf{C}\mathbf{A}_d\mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{C}\mathbf{A}_d^{p-1}\mathbf{B}_d \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \underline{y}_0 & \cdots & \underline{y}_p & \cdots & \underline{y}_L \end{bmatrix} \mathcal{U}_L^+ \quad (\text{A.181})$$

Soit, compte tenu de la définition des paramètres de Markov:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_0 & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{J}_p \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \underline{y}_0 & \cdots & \underline{y}_p & \cdots & \underline{y}_L \end{bmatrix} \mathcal{U}_L^+ \quad (\text{A.182})$$

Dés lors que les paramètres de Markov  $\mathbf{J}_k$  sont connus, il est possible de construire les matrices  $\mathbf{H}_{rs}(0)$  et  $\mathbf{H}_{rs}(1)$  à  $r$  lignes et  $s$  colonnes et d'appliquer

<sup>11</sup>Juang J.N, Phan M., Horta L.G, Longman R.W., Identification of Observer/Kalman Filter Markov Parameters: Theory and Experiments, Journal Of Guidance, Control And Dynamics, Vol. 16, No. 2, March-April 1993

l'algorithme de Ho-Kalman décrit dans la section A.6:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_{rs}(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{J}_s \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{J}_{s+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{J}_r & \mathbf{J}_{r+1} & \cdots & \mathbf{J}_{r+s-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_{rs}(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{J}_{s+1} \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 & \cdots & \mathbf{J}_{s+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{J}_{r+1} & \mathbf{J}_{r+2} & \cdots & \mathbf{J}_{s+r} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.183})$$

D'une manière générale, on peut établir la relation suivante:

$$\mathbf{H}_{rs}(k) = \mathcal{O}_r \mathbf{A}_d^k \mathcal{C}_s \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{r-1} \end{bmatrix} \\ \mathcal{C}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{A}_d^{s-1} \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.184})$$

Une fois que les matrices  $\mathbf{H}_{rs}(0)$  et  $\mathbf{H}_{rs}(1)$  sont connues, l'algorithme de Ho-Kalman (appelé aussi ERA) décrit à la section A.6 peut être appliqué pour obtenir la réalisation du système.

Notons que l'algorithme ERA-DC<sup>12</sup>, Eigensystem Realization Algorithm with Data Correlation, permet de diminuer la sensibilité de l'algorithme de Ho-Kalman aux bruits de mesure. Son principe est le même que l'algorithme de Ho-Kalman, mais il est basé sur les deux matrices suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_0 = \mathbf{H}_{rs}(0) \mathbf{H}_{rs}^T(0) \\ \mathcal{H}_1 = \mathbf{H}_{rs}(1) \mathbf{H}_{rs}^T(0) \end{array} \right. \quad (\text{A.185})$$

En effet, à partir de la décomposition en valeurs singulières de  $\mathbf{H}_{rs}(0)$  nous pouvons écrire les relations suivantes:

$$\mathbf{H}_{rs}(0) = \mathcal{O}_n \mathcal{C}_n = \mathbf{U}_n \mathbf{\Sigma}_n \mathbf{V}_n^T \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_n = \mathbf{U}_n \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \\ \mathcal{C}_n = \mathbf{\Sigma}_n^{1/2} \mathbf{V}_n^T \end{array} \right. \quad (\text{A.186})$$

D'où:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 &= \mathbf{H}_{rs}(0) \mathbf{H}_{rs}^T(0) = \mathcal{O}_n \mathcal{C}_n \mathcal{C}_n^T \mathcal{O}_n^T := \mathcal{O}_n \mathcal{Q}_n \\ \text{où } \mathcal{Q}_n &= \mathcal{C}_n \mathcal{C}_n^T \mathcal{O}_n^T \end{aligned} \quad (\text{A.187})$$

De plus, nous avons:

$$\mathcal{H}_1 = \mathbf{H}_{rs}(1) \mathbf{H}_{rs}^T(0) = \mathcal{O}_n \mathbf{A}_d \mathcal{C}_n \mathcal{C}_n^T \mathcal{O}_n^T = \mathcal{O}_n \mathbf{A}_d \mathcal{Q}_n \quad (\text{A.188})$$

<sup>12</sup>Francesco Vicario, OKID as a general approach to linear and bilinear system identification, Columbia University, 2014

En suivant la même approche que l'algorithme ERA, une décomposition en valeurs singulières de  $\mathcal{H}_0$  conduit à la relation suivante:

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{U}_n \mathcal{S}_n \mathcal{V}_n^T \quad (\text{A.189})$$

D'où, par identification:

$$\begin{cases} \mathcal{O}_n = \mathcal{U}_n \mathcal{S}_n^{1/2} \\ \mathcal{Q}_n = \mathcal{S}_n^{1/2} \mathcal{V}_n^T \end{cases} \quad (\text{A.190})$$

La matrice  $\mathcal{C}_n$  est alors obtenue comme suit:

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{O}_n^+ \mathbf{H}_{rs}(0) = \mathcal{S}_n^{-1/2} \mathcal{U}_n^T \mathbf{H}_{rs}(0) \quad (\text{A.191})$$

Pour un système MIMO à  $m$  entrées et  $p$  sorties, et en désignant par  $\mathbb{I}_m$  la matrice identité de dimension  $m$ , nous obtenons les résultats suivants qui s'appuient sur l'algorithme de Ho-Kalman (appelé aussi ERA) décrit à la section A.6:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_d = \mathcal{O}_n^{-1} \mathcal{H}_1 \mathcal{Q}_n^{-1} = \mathcal{S}_n^{-1/2} \mathcal{U}_n^T \mathcal{H}_1 \mathcal{V}_n \mathcal{S}_n^{-1/2} \\ \mathbf{B}_d = \mathcal{C}_n \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m \\ \mathbf{0} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathcal{S}_n^{-1/2} \mathcal{U}_n^T \mathbf{H}_{rs}(0) \begin{bmatrix} \mathbb{I}_m \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = [\mathbb{I}_p \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}] \mathcal{O}_n = [\mathbb{I}_p \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}] \mathcal{U}_n \mathcal{S}_n^{1/2} \end{cases} \quad (\text{A.192})$$

#### A.14 Modèle ARMARKOV d'un système à temps discret

Définissons dans un premier temps la fonction de transfert  $\mathbf{F}(z)$  ARMARKOV à  $r \geq 1$  paramètres de Markov de ce système<sup>13</sup>: il s'agit d'une fonction de transfert dont le dénominateur a le même nombre de coefficients que celle issue du modèle ARMA mais qui est de degré  $r + n - 1$  et non  $n$ :

$$\mathbf{F}(z) = \frac{\mathbf{J}_0 z^{r+n-1} + \cdots + \mathbf{J}_{r-1} z^n + \underline{\beta}_{r,1} z^{n-1} + \cdots + \underline{\beta}_{r,n}}{z^{r+n-1} + 0 \times z^{r+n-2} + \cdots + 0 \times z^n + \alpha_{r,1} z^{n-1} + \cdots + \alpha_{r,n}} \quad (\text{A.193})$$

Il est clair que pour  $r = 1$  nous retrouvons la fonction de transfert ARMA. Remarquons cependant que la fonction de transfert ARMARKOV n'est pas équivalente à une fonction de transfert ARMA non-minimale car les coefficients de  $z^{r+n-2}, \dots, z^n$  du dénominateur sont fixés à zéro. Les coefficients  $\alpha_{r,i}$  et  $\underline{\beta}_{r,i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  peuvent être obtenus en identifiant les coefficients du quotient de la division selon les puissances croissantes de  $z^{-1}$  des modèles ARMA et ARMARKOV.

<sup>13</sup>Akers, J.C., and Bernstein, D.S., ARMARKOV Least-Squares Identification, Proceedings of the American Control Conference, Albuquerque, NM, June, 1997

A partir de (A.193) et en revenant dans le domaine temporel, nous pouvons montrer que:

$$\underline{y}_k = \mathbf{W}_r \underline{\Phi}_{n,r}(k) \quad (\text{A.194})$$

Où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\Phi}_{n,r}(k) = \begin{bmatrix} \underline{y}(k-r) \\ \vdots \\ \underline{y}(k-r-n+1) \\ u(k) \\ \vdots \\ u(k-r-n+1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{W}_r = \begin{bmatrix} -\mathcal{A}_r & \mathbf{J}_0 & \cdots & \mathbf{J}_{r-1} & \mathcal{B}_r \end{bmatrix} \\ \mathcal{A}_r = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_{r,1} & \cdots & \alpha_{r,n} \end{bmatrix}}_{n \text{ termes}} \\ \mathcal{B}_r = \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{r,1} & \cdots & \beta_{r,n} \end{bmatrix}}_{n \text{ termes}} \end{array} \right. \quad (\text{A.195})$$

Soit  $\widehat{\mathbf{W}}_r$  une estimation de la matrice  $\mathbf{W}_r$  obtenue à partir des entrées  $u(k)$  et des sorties  $\underline{y}_k$  placées dans le vecteur  $\underline{\Phi}_{n,r}(k)$  et  $\widehat{\underline{y}}_k$  le vecteur de sortie estimé à partir de  $\widehat{\mathbf{W}}_r$  :

$$\widehat{\underline{y}}_k = \widehat{\mathbf{W}}_r \underline{\Phi}_{n,r}(k) \quad (\text{A.196})$$

Soient  $y(0), \dots, y(L)$  les  $L+1$  échantillons de la réponse d'un système à temps discret *mono-entrée* à une entrée  $u(k)$  appliquée à partir de l'instant  $k=0$ ,  $\underline{e}_k$  l'erreur d'estimation et  $J_n$  l'erreur quadratique moyenne d'estimation:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{e}_k = y_k - \widehat{\underline{y}}_k \\ J_n = \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^L \frac{1}{2} \underline{e}^T(k) \underline{e}_k \end{array} \right. \quad (\text{A.197})$$

On montre alors <sup>13</sup> que l'erreur quadratique moyenne d'estimation  $J_n$  est minimisée lorsque la matrice  $\widehat{\mathbf{W}}_r$  a l'expression suivante, sous la réserve que la matrice  $\sum_{k=0}^L \underline{\Phi}_{n,r}(k) \underline{\Phi}_{n,r}^T(k)$  ne soit pas singulière:

$$\widehat{\mathbf{W}}_r = \left( \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^L \underline{\Phi}_{n,r}^T(k) \underline{y}_k \right) \left( \frac{1}{L+1} \sum_{k=0}^L \underline{\Phi}_{n,r}(k) \underline{\Phi}_{n,r}^T(k) \right)^{-1} \quad (\text{A.198})$$

A partir de  $\widehat{\mathbf{W}}_r$  et en choisissant  $r=1$  les coefficients du numérateur et du dénominateur de la fonction de transfert ARMA peuvent être estimés, ce qui conduit à une réalisation du système pour une valeur de la dimension  $n$  du système fixée à priori. De manière pratique nous pouvons faire croître la valeur de  $n$  jusqu'à obtenir la valeur minimale de  $J_n$ .

Dans le cas général où  $r > 1$  il est possible d'extraire de la matrice  $\widehat{\mathbf{W}}_r$  une valeur estimée des paramètres de Markov  $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_{r-1}$  et de construire les matrices de Hankel  $\mathbf{H}_r(0)$  et  $\mathbf{H}_r(1)$ . L'application de l'algorithme de Ho-Kalman décrit dans la section A.6 peut alors être appliqué pour obtenir une réalisation du système, mais là encore la dimension  $n$  du système doit être fixée à priori.

## A.15 Identification d'un système à temps discret

### A.15.1 Méthode basée sur la réponse à un échelon unité

Soient  $\underline{y}(0), \dots, \underline{y}(L)$  les  $L + 1$  échantillons de la réponse d'un système à temps discret *mono-entrée* où l'entrée  $u(k)$  est appliquée à partir de l'instant  $k = 0$ . En tenant compte du fait que  $\underline{y}_k = \underline{0} \ \forall k < 0$  et  $u_k = 0 \ \forall k < 0$ , la relation de récurrence (A.172) s'écrit sous la forme suivante pour les différentes valeurs de  $k \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \underline{x}(0) &= \mathbf{A}_d \underline{x}(-1) + \mathbf{B}_d u(-1) = \underline{0} \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{y}(0) = \mathbf{C} \underline{x}(0) + \mathbf{D} u(0) \\ \quad = \mathbf{D} u(0) \\ \quad = \mathbf{J}_0 u(0) \\ \underline{y}(1) = \mathbf{C} \underline{x}(1) + \mathbf{D} u(1) = \mathbf{C} (\mathbf{A}_d \underline{x}(0) + \mathbf{B}_d u(0)) + \mathbf{D} u(1) \\ \quad = \mathbf{C} \mathbf{B}_d u(0) + \mathbf{D} u(1) \\ \quad = \mathbf{J}_1 u(0) + \mathbf{J}_0 u(1) \\ \underline{y}(2) = \mathbf{C} \underline{x}(2) + \mathbf{D} u(2) = \mathbf{C} (\mathbf{A}_d \underline{x}(1) + \mathbf{B}_d u(1)) + \mathbf{D} u(2) \\ \quad = \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d u(0) + \mathbf{C} \mathbf{B}_d u(1) + \mathbf{D} u(2) \\ \quad = \mathbf{J}_2 u(0) + \mathbf{J}_1 u(1) + \mathbf{J}_0 u(2) \\ \underline{y}(3) = \mathbf{C} \underline{x}(3) + \mathbf{D} u(3) = \mathbf{C} (\mathbf{A}_d \underline{x}(2) + \mathbf{B}_d u(2)) + \mathbf{D} u(3) \\ \quad = \mathbf{C} \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d u(0) + \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d u(1) + \mathbf{C} \mathbf{B}_d u(2) + \mathbf{D} u(3) \\ \quad = \mathbf{J}_3 u(0) + \mathbf{J}_2 u(1) + \mathbf{J}_1 u(2) + \mathbf{J}_0 u(3) \\ \vdots \end{array} \right. \quad (\text{A.199}) \end{aligned}$$

A partir des relations précédentes nous pouvons écrire les équations matricielles suivantes pour la réponse du système à un échelon d'amplitude unité:

$$u(k) = 1 \ \forall k \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{Y}_r(0) = \mathcal{T}_r(0) \mathbf{1} + \mathbf{H}_r(0) \mathbf{1}_s \\ \mathbf{Y}_r(1) = \mathcal{T}_r(1) \mathbf{1} + \mathbf{H}_r(1) \mathbf{1}_s \end{cases} \quad (\text{A.200})$$

où  $\mathbf{1}$  une matrice  $r \times l$  constituée de 1,  $\mathbf{1}_s$  est une matrice  $l \times l$  triangulaire supérieure constituée de 1 et où:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Y}_r(0) = \begin{bmatrix} \underline{y}(1) & \underline{y}(2) & \cdots & \underline{y}(l) \\ \underline{y}(2) & \underline{y}(3) & \cdots & \underline{y}(l+1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{y}(r) & \underline{y}(r+1) & \cdots & \underline{y}(L-1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}_r(1) = \begin{bmatrix} \underline{y}(2) & \underline{y}(3) & \cdots & \underline{y}(l+1) \\ \underline{y}(3) & \underline{y}(4) & \cdots & \underline{y}(l+2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{y}(r+1) & \underline{y}(r+2) & \cdots & \underline{y}(L) \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.201})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{T}_r(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_{r-1} & \cdots & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{T}_r(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_0 & \mathbf{0} & \vdots \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{J}_0 \\ \mathbf{J}_r & \cdots & \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.202})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_r(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{J}_l \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{J}_{l+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{J}_r & \mathbf{J}_{r+1} & \cdots & \mathbf{J}_{r+l-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_r(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{J}_{l+1} \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 & \cdots & \mathbf{J}_{l+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{J}_{r+1} & \mathbf{J}_{r+2} & \cdots & \mathbf{J}_{l+r} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.203})$$

Si les matrices  $\mathbf{H}_r(0)$  et  $\mathbf{H}_r(1)$  étaient connues l'algorithme de Ho-Kalman décrit dans la section A.6 pourrait être appliqué. Malheureusement ici ce sont les matrices  $\mathbf{Y}_r(0)$  et  $\mathbf{Y}_r(1)$  construites à partir des mesures  $y(0), \dots, y(L)$  qui sont connues. L'idée est alors de construire des matrices semblables à  $\mathbf{H}_r(0)$  et  $\mathbf{H}_r(1)$  avant d'appliquer l'algorithme de Ho-Kalman. L'algorithme présenté par Miller et Callafon <sup>14</sup> est le suivant:

- Construire les matrices de Hankel  $\mathbf{Y}_r(0)$  et  $\mathbf{Y}_r(1)$  à partir des mesures  $\underline{y}(0), \dots, \underline{y}(L)$ ;
- Construire les matrices  $\mathbf{M}_r(0)$  et  $\mathbf{M}_r(1)$  suivantes qui ont la même

---

<sup>14</sup>Daniel N. Miller and Raymond A. de Callafon, Identification of Linear Time-Invariant Systems via Constrained Step-Based Realization, Preprints of the 16th IFAC Symposium on System Identification The International Federation of Automatic Control, Brussels, Belgium. July 11-13, 2012

dimension que  $\mathbf{Y}_r(0)$  et  $\mathbf{Y}_r(1)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_r(0) = \begin{bmatrix} \underline{y}(0) & \underline{y}(0) & \cdots & \underline{y}(0) \\ \underline{y}(1) & \underline{y}(1) & \cdots & \underline{y}(1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{y}(r-1) & \underline{y}(r-1) & \cdots & \underline{y}(r-1) \end{bmatrix} = \mathcal{T}_r(0)\mathbf{1} \\ \mathbf{M}_r(1) = \begin{bmatrix} \underline{y}(1) & \underline{y}(1) & \cdots & \underline{y}(1) \\ \underline{y}(2) & \underline{y}(2) & \cdots & \underline{y}(2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \underline{y}(r) & \underline{y}(r) & \cdots & \underline{y}(r) \end{bmatrix} = \mathcal{T}_r(1)\mathbf{1} \end{array} \right. \quad (\text{A.204})$$

– Enfin calculer les matrices  $\mathbf{H}_r(0)\mathbf{1}_s$  et  $\mathbf{H}_r(1)\mathbf{1}_s$  comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_r(0)\mathbf{1}_s = \mathbf{Y}_r(0) - \mathbf{M}_r(0) \\ \mathbf{H}_r(1)\mathbf{1}_s = \mathbf{Y}_r(1) - \mathbf{M}_r(1) \end{array} \right. \quad (\text{A.205})$$

Les colonnes des matrices  $\mathbf{H}_r(0)\mathbf{1}_s$  et  $\mathbf{H}_r(1)\mathbf{1}_s$  sont obtenues comme une combinaison linéaire des colonnes des matrices  $\mathbf{H}_r(0)$  et  $\mathbf{H}_r(1)$ . Par conséquent le développement en valeurs singulières des matrices  $\mathbf{H}_r(0)\mathbf{1}_s$  et  $\mathbf{H}_r(1)\mathbf{1}_s$  et le même que celui des matrices  $\mathbf{H}_r(0)$  et  $\mathbf{H}_r(1)$ . Par conséquent une fois que les matrices  $\mathbf{H}_r(0)\mathbf{1}_s$  et  $\mathbf{H}_r(1)\mathbf{1}_s$  sont connues l'algorithme de Ho-Kalman décrit dans la section A.6 peut alors être appliqué pour déterminer les matrices  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{B}_d$  et  $\mathbf{C}$  après avoir fait les identifications suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_r(0)\mathbf{1}_s := \mathbf{H}_r(0) \\ \mathbf{H}_r(1)\mathbf{1}_s := \mathbf{H}_r(1) \\ \mathbf{A}_d := \mathbf{A} \\ \mathbf{B}_d := \mathbf{B} \end{array} \right. \quad (\text{A.206})$$

La profondeur  $r$  devra être choisie supérieure ou égale à la dimension  $n$  du système, ce qui est facilement obtenu en inspectant les valeurs singulières de la matrice  $\mathbf{H}_r(0)$ :

$$r \geq n \quad (\text{A.207})$$

### A.15.2 Méthode basée sur la réponse à une entrée quelconque

#### Relations entrée-sortie

Nous considérons un système à temps discret MIMO à  $m$  entrées et  $p$  sorties dont la représentation d'état est la suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_{k+1} = \mathbf{A}_d \underline{x}_k + \mathbf{B}_d \underline{u}_k \\ \underline{y}_k = \mathbf{C} \underline{x}_k + \mathbf{D} \underline{u}_k \end{array} \right. \quad (\text{A.208})$$

Le problème de l'identification de ce système consiste à déterminer les matrices  $\mathbf{A}_d$ ,  $\mathbf{B}_d$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{D}$  à partir d'un ensemble de mesures constitué des valeurs des entrées  $\underline{u}_k$  et des sorties  $\underline{y}_k$  aux instants d'échantillonnage.

La méthode présentée est basée sur les travaux de Longman et Phan <sup>15</sup>. Soient  $\underline{U}_r(k)$  le vecteur colonne constitué des  $r$  valeurs du vecteur d'entrée  $\underline{u}$  entre les instants  $k$  et  $k + r - 1$  et  $\underline{Y}_r(k)$  le vecteur colonne constitué des  $r$  valeurs du vecteur de sortie  $\underline{y}$  entre les instants  $k$  et  $k + r - 1$ :

$$\underline{U}_r(k) \begin{bmatrix} \underline{u}_k \\ \underline{u}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{u}(k+r-1) \end{bmatrix} \text{ et } \underline{Y}_r(k) \begin{bmatrix} \underline{y}_k \\ \underline{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \underline{y}(k+r-1) \end{bmatrix} \quad (\text{A.209})$$

On montre alors les relations suivantes <sup>15</sup> où  $\mathcal{T}_r$  est une matrice de Toeplitz triangulaire inférieure:

$$\begin{cases} \underline{x}(k+r) = \mathbf{A}_d^r \underline{x}_k + \mathcal{C}_r \underline{U}_r(k) \\ \underline{Y}_r(k) = \mathcal{O}_r \underline{x}_k + \mathcal{T}_r \underline{U}_r(k) \end{cases} \quad (\text{A.210})$$

où:

$$\begin{cases} \mathcal{C}_r = [ \mathbf{A}_d^{r-1} \mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_d ] \\ \mathcal{O}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{r-1} \end{bmatrix} \\ \mathcal{T}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \mathbf{B}_d & \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{C} \mathbf{B}_d & \mathbf{D} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} \mathbf{A}_d^{r-2} \mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{C} \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{C} \mathbf{B}_d & \mathbf{D} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.211})$$

A partir de la relation (A.210) nous obtenons la relation suivante où le vecteur d'état n'apparaît plus:

$$\underline{Y}_r(k) = [ \mathcal{B}_1 \quad \mathcal{B}_2 \quad \mathcal{T}_r ] \begin{bmatrix} \underline{U}_r(k-r) \\ \underline{Y}_r(k-r) \\ \underline{U}_r(k) \end{bmatrix} \quad (\text{A.212})$$

où les matrices  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{T}_r$  sont des matrices de dimension respectives  $rp \times rm$ ,  $rp \times rp$  et  $rp \times rm$  définies par:

$$\begin{cases} \mathcal{B}_1 = \mathcal{O}_r (\mathcal{C}_r + \mathcal{M}_r \mathcal{T}_r) \\ \mathcal{B}_2 = -\mathcal{O}_r \mathcal{M}_r \\ \mathbf{A}_d^r + \mathcal{M}_r \mathcal{O}_r = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{M}_r = -\mathbf{A}_d^r \mathcal{O}_r^+ \end{cases} \quad (\text{A.213})$$

<sup>15</sup>Ryoung K. Lim, Minh Q. Phan, Richard W. Longman, State-Space System Identification with Identified Hankel Matrix, Department of Mechanical and Aerospace Engineering Technical Report No. 3045, September 1998. Princeton University, Princeton, NJ.



### Obtention des matrices caractéristiques à partir des entrées et des sorties

A partir l'équation (A.212) les matrices  $\mathcal{B}_1$ ,  $\mathcal{B}_2$  et  $\mathcal{T}_r$  sont déterminées par les expressions suivantes basées sur les  $l + 1$  valeurs des matrices  $\mathbf{Y}_{rl}(k)$  et  $\mathbf{V}_{rl}(k)$  et où  $\mathbf{V}_{rl}^+(k)$  désigne la pseudo-inverse de  $\mathbf{V}_{rl}(k)$  :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{T}_r \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{rl}(k) \mathbf{V}_{rl}^+(k) \quad (\text{A.214})$$

et:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{rl}(k) = \begin{bmatrix} \underline{Y}_r(k+r) & \underline{Y}_r(k+r+1) & \cdots & \underline{Y}_r(k+r+l-1) \end{bmatrix} \\ \mathbf{V}_{rl}(k) = \begin{bmatrix} \underline{U}_r(k) & \underline{U}_r(k+1) & \cdots & \underline{U}_r(k+l-1) \\ \underline{Y}_r(k) & \underline{Y}_r(k+1) & \cdots & \underline{Y}_r(k+l-1) \\ \underline{U}_r(k+r) & \underline{U}_r(k+r+1) & \cdots & \underline{U}_r(k+r+l-1) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (\text{A.215})$$

Notons que la relation (A.214) n'est autre que l'inverse de la relation (A.212) dans laquelle le paramètre  $k$  est remplacé successivement par les valeurs  $k+r$ ,  $k+r+1$ ,  $\dots$ ,  $k+r+l-1$ .

Pour un système à  $m$  entrées et  $p$  sorties la matrice  $\mathbf{V}_{rl}(k)$  est une matrice à  $mr + mr + pr = r(2m + p)$  lignes et  $l$  colonnes. La matrice  $\mathbf{V}_{rl}(k)$  sera donc une matrice carrée en choisissant pour  $l$  la valeur suivante:

$$l = r(2m + p) \quad (\text{A.216})$$

Lorsque les valeurs du couple  $(\underline{y}_k, \underline{u}_k)$  sont définies pour  $k = 1, \dots, L$  alors les vecteurs  $\underline{Y}_r(k+r+l-1)$  et  $\underline{U}_r(k+r+l-1)$  utilisés dans les matrices  $\mathbf{Y}_{rl}(k)$  et  $\mathbf{V}_{rl}(k)$  sont définis pour les valeurs suivantes de  $l \geq 1$ :

$$k + 2r + l - 2 \leq L \Leftrightarrow l \leq L + 2 - (k + 2r) \quad (\text{A.217})$$

La matrice  $\mathbf{L}_r(0)$  est alors définie par la relation suivante:

$$\mathbf{L}_r(0) = \mathcal{O}_r \mathcal{C}_r \quad (\text{A.218})$$

A partir de (A.213) nous en déduisons que:

$$\mathbf{L}_r(0) = \mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2 \mathcal{T}_r \quad (\text{A.219})$$

Nous définissons ensuite la matrice  $\mathbf{L}_r(1)$  par la relation suivante:

$$\mathbf{L}_r(1) = \mathcal{O}_r \mathbf{A}_d^r \mathcal{C}_r = \mathcal{B}_2 \mathbf{L}_r(0) \quad (\text{A.220})$$

En effet:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \mathbf{L}_r(1) = \mathcal{O}_r \mathbf{A}_d^r \mathcal{C}_r \\ \mathbf{A}_d^r = -\mathcal{M}_r \mathcal{O}_r \end{cases} \\ \Rightarrow \mathbf{L}_r(1) &= \mathcal{O}_r \mathbf{A}_d^r \mathcal{C}_r = \mathcal{O}_r (-\mathcal{M}_r \mathcal{O}_r) \mathcal{C}_r = -(\mathcal{O}_r \mathcal{M}_r) \mathcal{O}_r \mathcal{C}_r = \mathcal{B}_2 \mathbf{L}_r(0) \end{aligned} \quad (\text{A.221})$$

On montre que d'une manière générale:

$$\mathbf{L}_r(k) = \mathcal{O}_r (\mathbf{A}_d^r)^k \mathcal{C}_r = \mathcal{B}_2^k \mathbf{L}_r(0) \quad (\text{A.222})$$

### Matrices de Hankel

Une fois que les matrices  $\mathbf{L}_r(0)$  et  $\mathbf{L}_r(1)$  sont connues les matrices de Hankel  $\mathbf{H}_r(0)$  et  $\mathbf{H}_r(1)$  sont obtenues en ré-arrangeant les colonnes des matrices  $\mathbf{L}_r(0)$  et  $\mathbf{L}_r(1)$ . En effet les matrices  $\mathbf{L}_r(0)$  et  $\mathbf{L}_r(1)$  ont les expressions suivantes:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_r(0) &= \mathcal{O}_r \mathcal{C}_r \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA}_d \\ \vdots \\ \mathbf{CA}_d^{r-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_d^{r-1} \mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{CA}_d^{r-1} \mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{CA}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{CB}_d \\ \mathbf{CA}_d^r \mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{CA}_d^2 \mathbf{B}_d & \mathbf{CA}_d \mathbf{B}_d \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{CA}_d^{2r-2} \mathbf{B}_d & \cdots & \mathbf{CA}_d^r \mathbf{B}_d & \mathbf{CA}_d^{r-1} \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.223})$$

Soit en notant  $\mathbf{J}_k = \mathbf{CA}_d^{k-1} \mathbf{B}_d$  les paramètres de Markov:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_r(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_r & \cdots & \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_1 \\ \mathbf{J}_{r+1} & \cdots & \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{J}_{2r-1} & \cdots & \mathbf{J}_{r+1} & \mathbf{J}_r \end{bmatrix} \\ \mathbf{L}_r(1) = \mathcal{O}_r \mathbf{A}_d^r \mathcal{C}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{2r} & \cdots & \mathbf{J}_{r+2} & \mathbf{J}_{r+1} \\ \mathbf{J}_{2r+1} & \cdots & \mathbf{J}_{r+3} & \mathbf{J}_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{J}_{3r-1} & \cdots & \mathbf{J}_{2r+1} & \mathbf{J}_{2r} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.224})$$

En conséquence la matrice  $\mathbf{L}_r(0)$  permet d'obtenir les paramètres  $\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_r$  et la matrice  $\mathbf{L}_r(1)$  les paramètres  $\mathbf{J}_{r+1}, \dots, \mathbf{J}_{2r}$ .

A partir des paramètres de Markov  $\mathbf{J}_k$  les matrices de Hankel  $\mathbf{H}_r(0)$  et  $\mathbf{H}_r(1)$  sont construites grâce aux expressions (A.52):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_r(0) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & \mathbf{J}_2 & \cdots & \mathbf{J}_r \\ \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{J}_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{J}_r & \mathbf{J}_{r+1} & \cdots & \mathbf{J}_{2r-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{H}_r(1) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_2 & \mathbf{J}_3 & \cdots & \mathbf{J}_{r+1} \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 & \cdots & \mathbf{J}_{r+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{J}_{r+1} & \mathbf{J}_{r+2} & \cdots & \mathbf{J}_{2r} \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (\text{A.225})$$

Il est clair que la matrice  $\mathbf{H}_r(0)$  est obtenue en lisant les colonnes de la matrice  $\mathbf{L}_r(0)$  de droite à gauche et la matrice  $\mathbf{H}_r(1)$  en décalant à gauche d'une colonne la matrice  $\mathbf{H}_r(0)$  et en y ajoutant la dernière colonne de  $\mathbf{L}_r(1)$ .

| $N$ | Polynôme                    | Somme modulo 2                         | Période: $L = 2^N - 1$ |
|-----|-----------------------------|----------------------------------------|------------------------|
| 2   | $x^2 + x + 1$               | $b_2 \oplus b_1$                       | 3                      |
| 3   | $x^3 + x^2 + 1$             | $b_3 \oplus b_2$                       | 7                      |
| 4   | $x^4 + x^3 + 1$             | $b_4 \oplus b_3$                       | 15                     |
| 5   | $x^5 + x^3 + 1$             | $b_5 \oplus b_3$                       | 31                     |
| 6   | $x^6 + x^5 + 1$             | $b_6 \oplus b_5$                       | 63                     |
| 7   | $x^7 + x^6 + 1$             | $b_7 \oplus b_6$                       | 127                    |
| 8   | $x^8 + x^6 + x^5 + x^4 + 1$ | $b_8 \oplus b_6 \oplus b_5 \oplus b_4$ | 255                    |
| 9   | $x^9 + x^5 + 1$             | $b_9 \oplus b_5$                       | 511                    |
| 10  | $x^{10} + x^7 + 1$          | $b_{10} \oplus b_7$                    | 1023                   |
| 11  | $x^{11} + x^9 + 1$          | $b_{11} \oplus b_9$                    | 2047                   |

Table A.2: Polynômes générateurs de séquences binaires pseudo-aléatoires<sup>17</sup>

## A.16 Séquence binaire pseudo-aléatoire

Afin d'identifier un système il est important de placer à son entrée une séquence  $u(k)$  permettant d'exciter tous les modes du système. Pour ce faire la séquence d'entrée  $u(k)$  est en général une séquence binaire pseudo-aléatoire (en anglais PRBS: Pseudo Random Binary Sequence).

$$u(k) \in \{0, 1\} \quad \forall k \quad (\text{A.226})$$

Les séquences PRBS sont générées à l'aide de la fonction logique "somme modulo 2" (fonction "ou exclusif" ou XOR en anglais) et d'un registre à  $N$  bits dont les valeurs sont décalées à droite à chaque instant d'échantillonnage.

Le câblage de la fonction logique "somme modulo 2" autour du registre à décalage est relié aux polynômes de Galois, appelés polynômes générateurs de la séquence PRBS. Les premiers polynômes générateurs sont donnés dans la Table A.2.

La période de la séquence binaire pseudo-aléatoire vaut  $L = 2^N - 1$ : la séquence a  $2^{N-1}$  valeurs à "1" et  $2^{N-1} - 1$  valeurs à "0".

La Figure A.3 représente le câblage et l'initialisation de la fonction logique "somme modulo 2" autour du registre à décalage pour  $N = 4$  bits. La valeur 1 placée dans  $b_1$  est due au fait que tous les polynômes de Galois s'achèvent par la valeur 1 mais pratiquement les bits du registre peuvent être initialisés avec n'importe quelle suite binaire exceptée celle constituée uniquement de 0.

La table A.3 représente la séquence générée: chaque ligne est obtenue en décalant à droite la ligne précédente est en plaçant dans la colonne  $b_4 \oplus b_3$  la somme modulo 2 des valeurs des bits en position 3 et 4. Nous pouvons remarquer que pour la ligne  $k = 16$  les valeurs de  $b_4 \oplus b_3$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  et  $b_4$  sont les mêmes que celles de la ligne  $k = 1$ ; par conséquent la périodicité de la séquence générée est bien  $L = 2^N - 1 = 15$ .

<sup>17</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Linear-feedback\\_shift\\_register](https://en.wikipedia.org/wiki/Linear-feedback_shift_register)

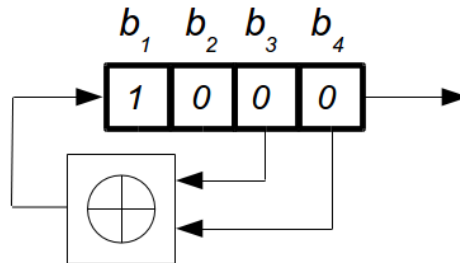


Figure A.3: Câblage et initialisation de la fonction logique "somme modulo 2" autour du registre à décalage pour  $N = 4$  bits

| $k$ | $b_4 \oplus b_3$ | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4 = u_i(k)$ |
|-----|------------------|-------|-------|-------|----------------|
| 1   | 0                | 1     | 0     | 0     | 0              |
| 2   | 0                | 0     | 1     | 0     | 0              |
| 3   | 1                | 0     | 0     | 1     | 0              |
| 4   | 1                | 1     | 0     | 0     | 1              |
| 5   | 0                | 1     | 1     | 0     | 0              |
| 6   | 1                | 0     | 1     | 1     | 0              |
| 7   | 0                | 1     | 0     | 1     | 1              |
| 8   | 1                | 0     | 1     | 0     | 1              |
| 9   | 1                | 1     | 0     | 1     | 0              |
| 10  | 1                | 1     | 1     | 0     | 1              |
| 11  | 1                | 1     | 1     | 1     | 0              |
| 12  | 0                | 1     | 1     | 1     | 1              |
| 13  | 0                | 0     | 1     | 1     | 1              |
| 14  | 0                | 0     | 0     | 1     | 1              |
| 15  | 1                | 0     | 0     | 0     | 1              |
| 16  | 0                | 1     | 0     | 0     | 0              |

Table A.3: Génération de la séquence binaire pseudo-aléatoire pour  $N = 4$  bits