



HAL
open science

Electronique

Kenneth Maussang

► **To cite this version:**

Kenneth Maussang. Electronique. Doctorat. Electronique, Montrouge, France. 2015, pp.93. hal-04183797

HAL Id: hal-04183797

<https://cel.hal.science/hal-04183797>

Submitted on 21 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Electronique de base

Amplificateur Opérationnel

Centre Interuniversitaire de préparation à
l'Agrégation de Physique

Montrouge 2015-2016



Bibliographie

Faroux et Renault H-Prépa	Electrocinétique et électronique (1997) Electronique, électrocinétique II, 1 ^{ière} année Electronique I, 2 ^{ième} année
Grossetête	Electronique 1 et 2 (classes prépa 1987)
Delacressonnière et More	Electronique, 1 ^{ière} année

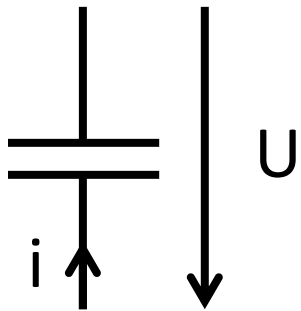
Rappels de base

Rappels

Notation complexe

Si on étudie un système à une fréquence $f = \omega/2\pi$, on peut utiliser la correspondance suivante pour toute grandeur électrique X

$$X(t) = \text{Re}(\underline{X}e^{j\omega t}), \text{ où } j^2 = -1$$



$$Q = CU \rightarrow i = C \frac{dU}{dt}$$

$$\underline{i} = j\omega C \underline{U}$$
$$\underline{Z}_c = 1/jC\omega$$

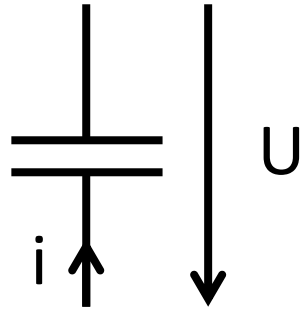
Impédance complexe

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{i}, \quad \underline{Z} \in \mathbb{C}$$

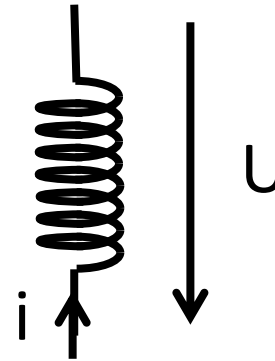
Intérêt : **permet de raisonner en terme d'impédance**, généralise les raisonnements issus des réseaux de résistances.

Rq : le signe de la partie imaginaire dépend de la convention choisie.

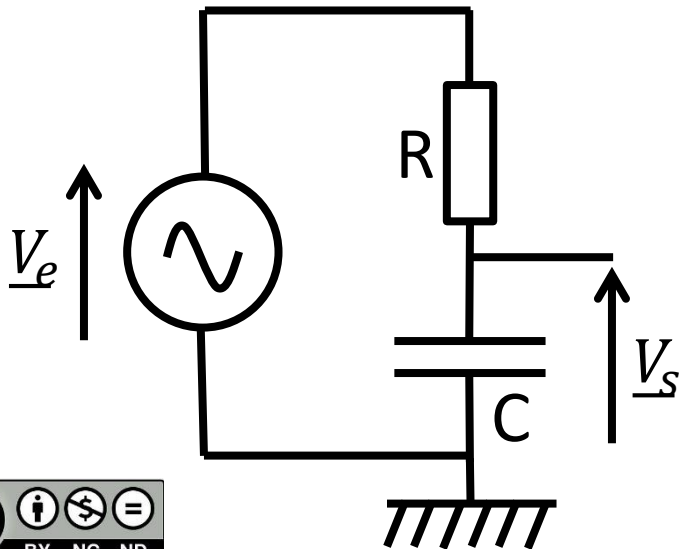
Exemples



$$Z_C = 1/j\omega C$$



$$Z_L = j\omega L$$

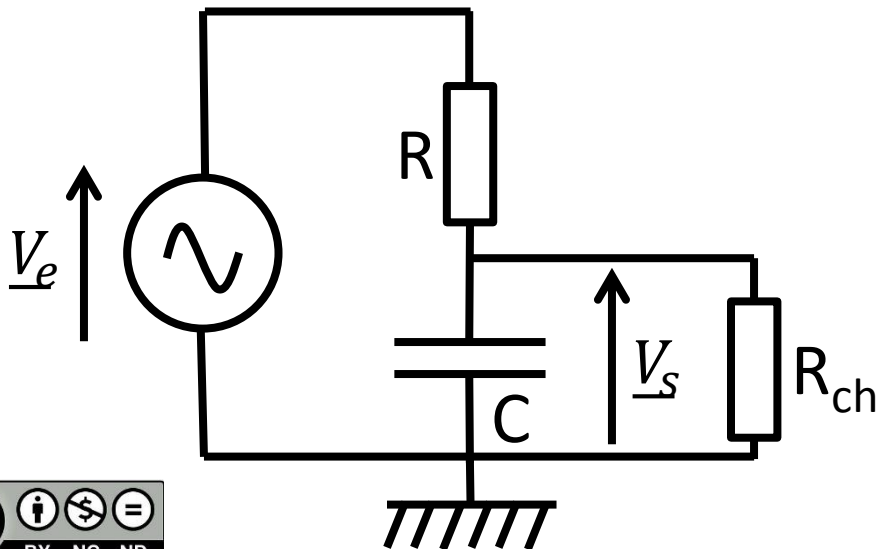


$$\begin{aligned} \underline{V}_s &= \frac{Z_C}{Z_C + R} \underline{V}_e \\ &= \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{V}_e \end{aligned}$$

Exemples

Attention :

Le pont diviseur de tension n'est valable uniquement dans le cas où aucun courant n'est débité au point de mesure (voir cours sur les filtres).



$$\begin{aligned} \underline{V}_s &= \frac{Z_C \parallel R_{ch}}{Z_C \parallel R_{ch} + R} \underline{V}_e \\ &= \frac{R}{R_{ch} + (j\omega RC + 1)R} \underline{V}_e \end{aligned}$$

Quelques théorèmes

Définition de la linéarité en Physique (d'après le programme de classes prépa) :
un phénomène physique linéaire est régi par une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

Théorème de Norton :

Tout circuit **linéaire** vu de deux points est équivalent à une source de courant idéale, *en parallèle* avec une résistance R.

Théorème de Thévenin :

Tout circuit **linéaire** vu de deux points est équivalent à un générateur de tension parfait, *en série* avec une résistance R.

La force électromotrice du générateur équivalent est égale à la différence de potentiels à **vide** entre ces deux points.

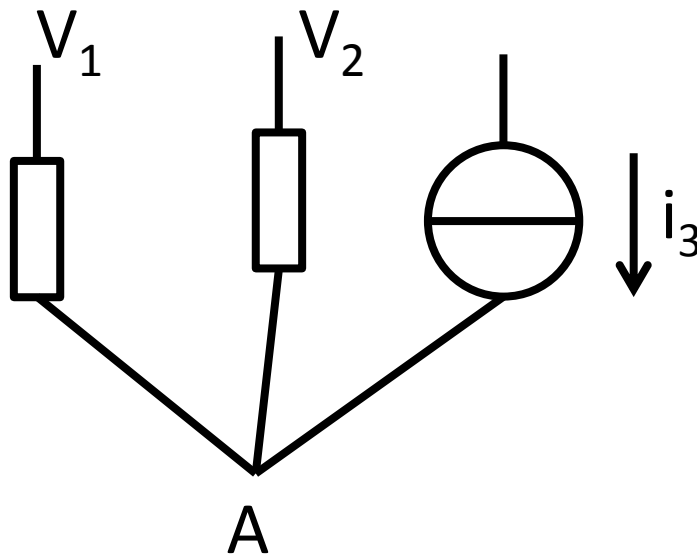
La résistance équivalente est égale à celle que l'on mesure entre les deux points lorsque tous les **générateurs indépendants** sont rendus *passifs*.

Les théorèmes de Thévenin et Norton s'appliquent à des systèmes linéaires (ou linéarisés), en régime continu (résistances) ou sinusoïdal permanent (impédances).

Quelques théorèmes

Théorème de Milleman :

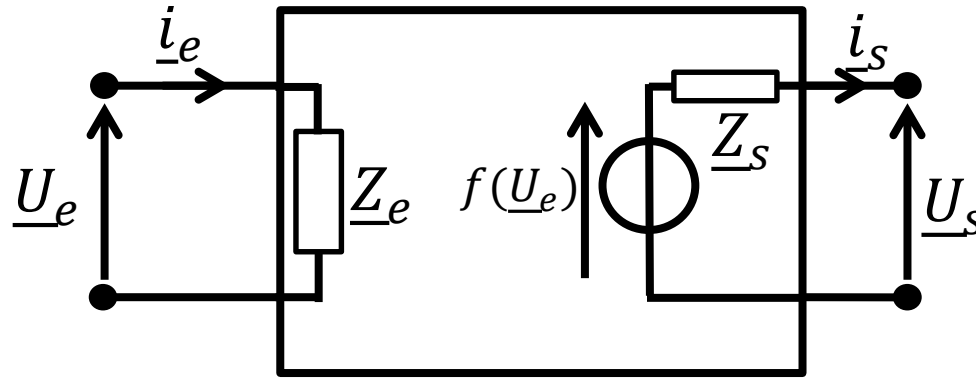
Tensions mesurées par rapport à un point commun (non indiqué). C'est une conséquence directe de l'application de la loi des nœuds.



$$V_A = \frac{\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + i_3}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Démonstration...

Etudes des quadripôles



Impédance d'entrée :

L'entrée d'un quadripôle linéaire se comporte *généralement* comme un dipôle passif linéaire. L'impédance d'entrée \underline{Z}_e est alors définie par

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e},$$

où \underline{U}_e est la tension d'entrée du quadripôle, et \underline{I}_e son intensité, orientée en convention récepteur.

Impédance de sortie :

C'est l'impédance équivalente du modèle de Thévenin du dipôle formé par les deux bornes de sortie du quadripôle. Il s'agit donc de l'impédance vue des deux bornes de sortie à tension de générateur nulle en entrée.

Etudes des quadripôles

Exemple : Impédance de sortie d'un montage actif,
le push-pull à transistors bipolaires
(TP Transistor – Multimètre (série II))

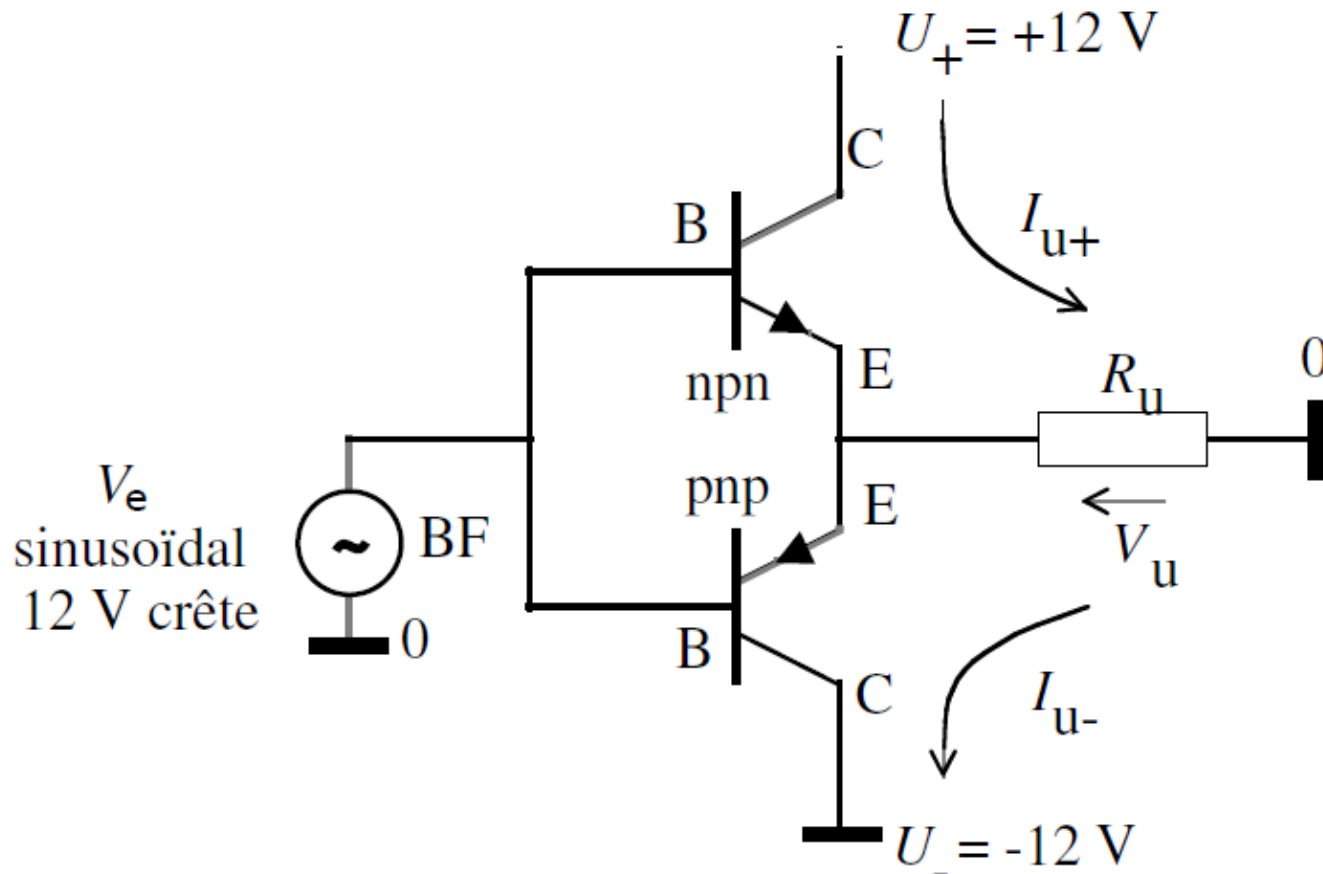


Diagramme de Bode d'un quadripôle

Il est constitué par le tracé de la fonction de transfert du quadripôle en fonction de la fréquence du signal d'entrée. En pratique, on trace sa norme et sa phase, en échelle logarithmique.

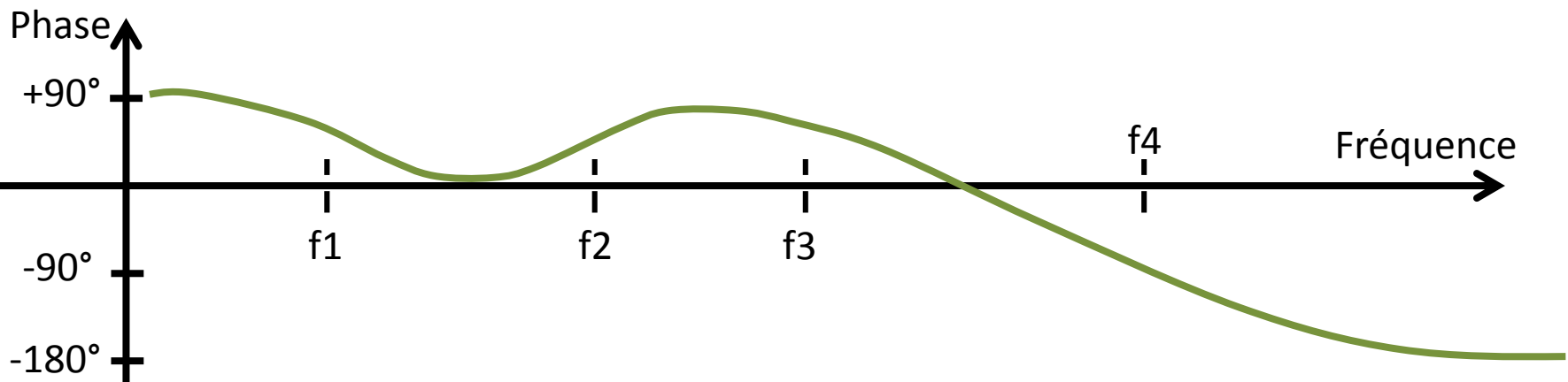
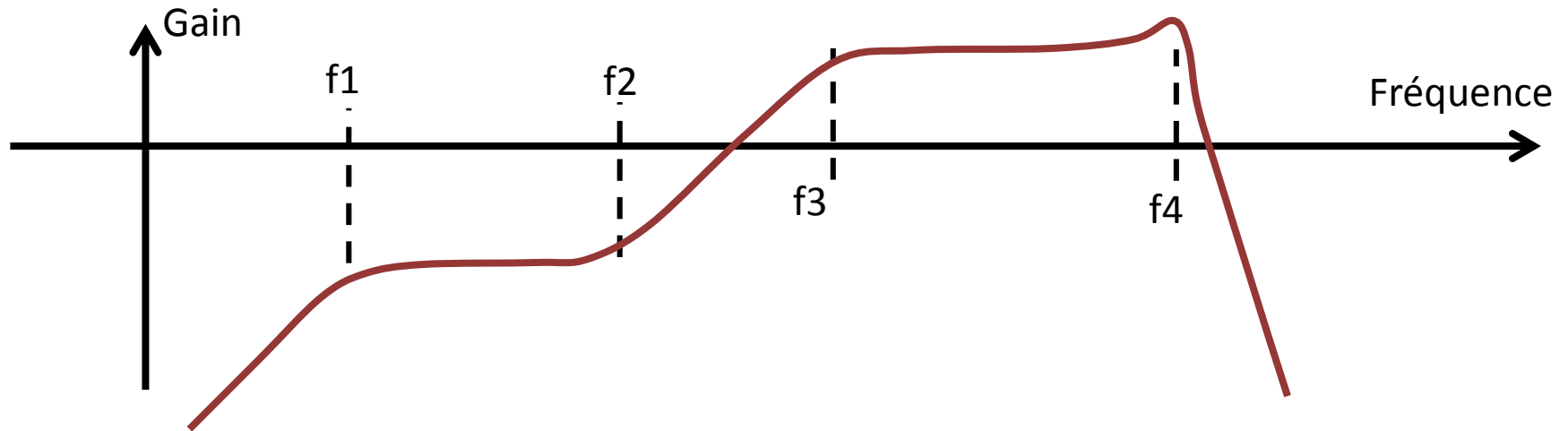
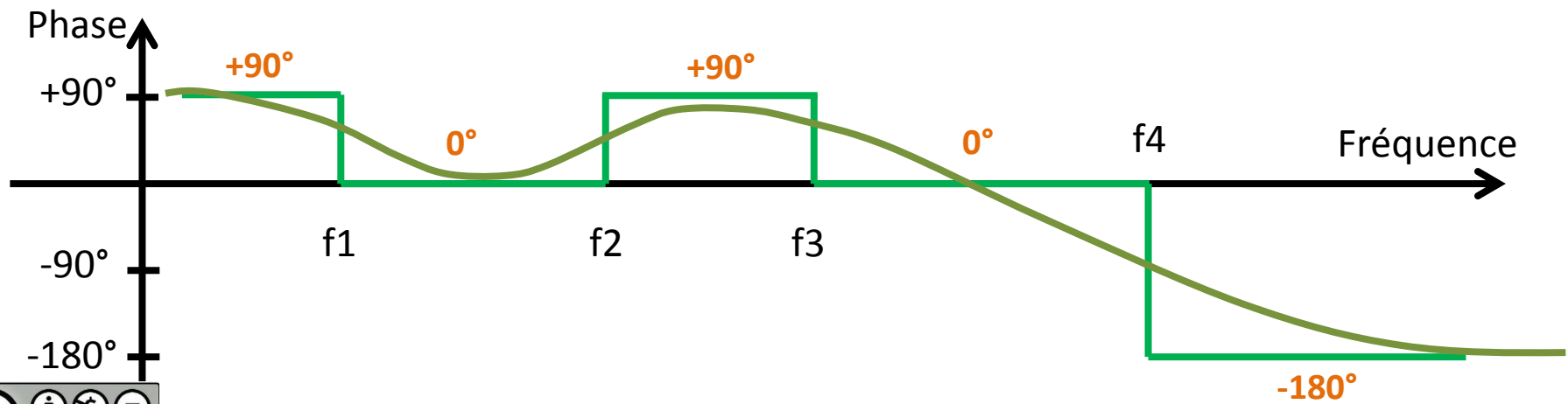
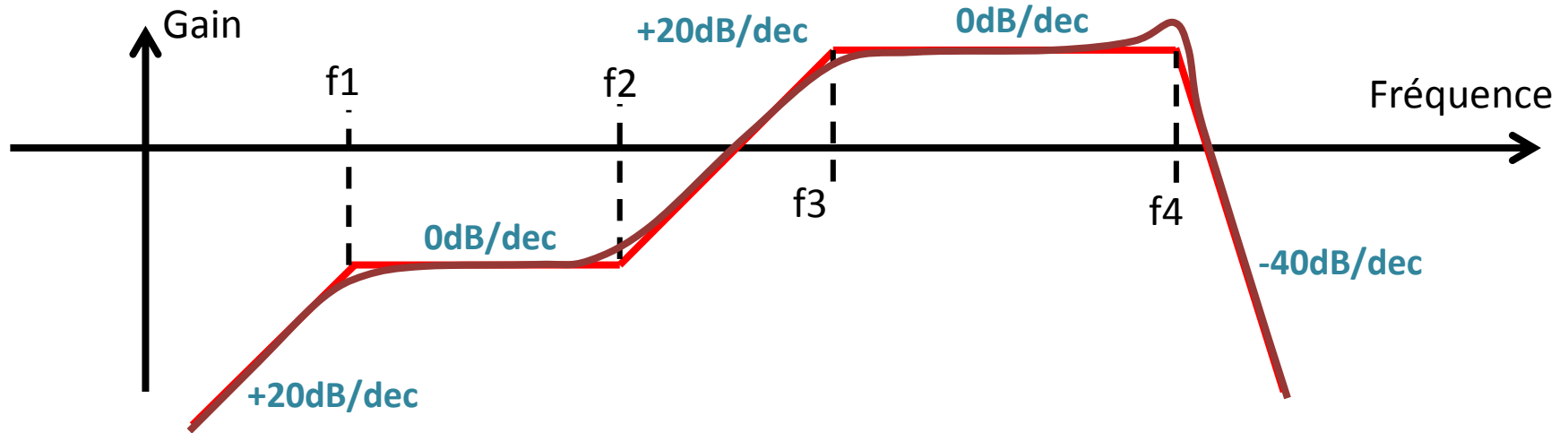


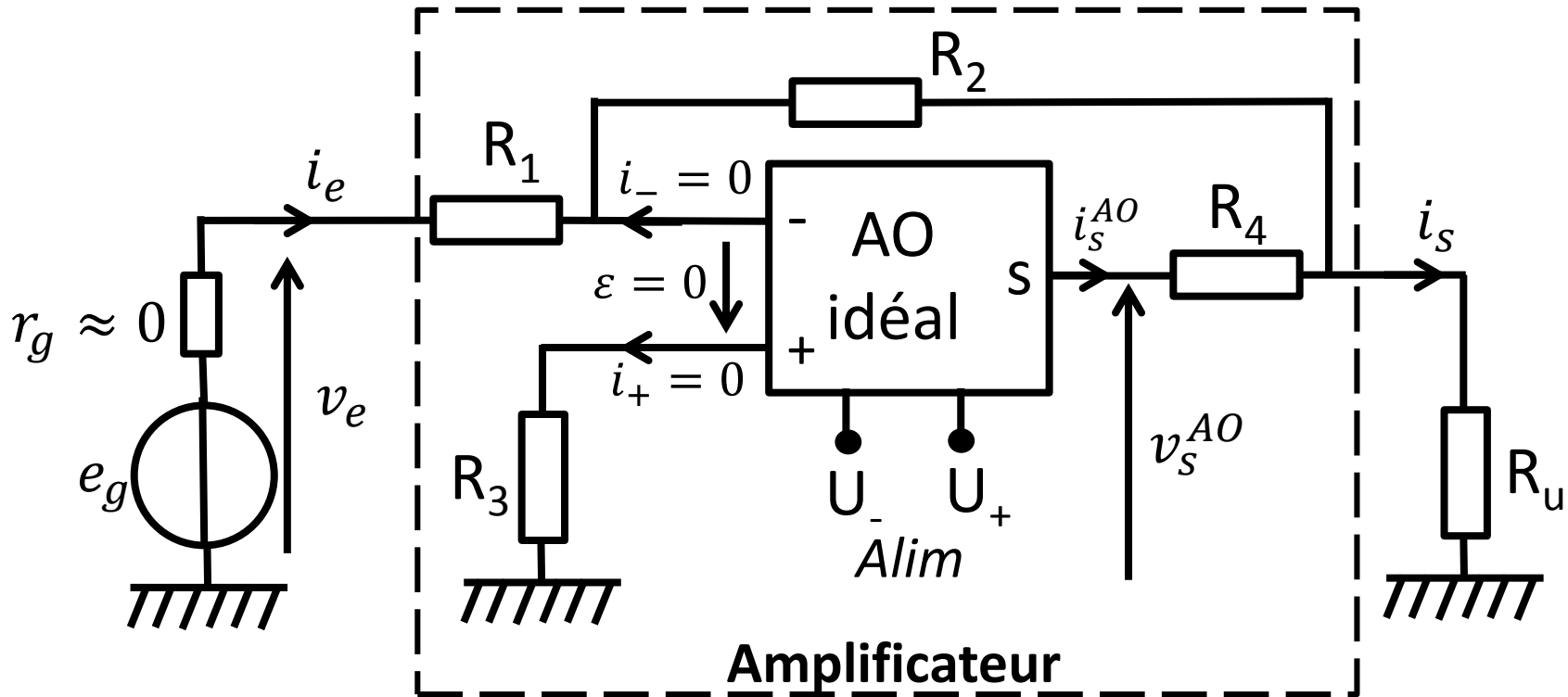
Diagramme de Bode d'un quadripôle

→ *Diagramme asymptotique*



L'Ampli Op

1. L'amplificateur inverseur



Amplification en tension

$$A_v = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{R_2}{R_1} \text{ (Démonstration)}$$

Gain linéaire : $G = |A_v|$

Gain en dB : $G_{dB} = 20 \log|A_v|$

Cas où on permute les entrées + et - ?

de R_3 ?, de R_4 ?, de R_u ?

1. L'amplificateur inverseur

Limitations, choix des résistances

il ne faut pas confondre v_s avec v_s^{AO} et i_s avec i_s^{AO}

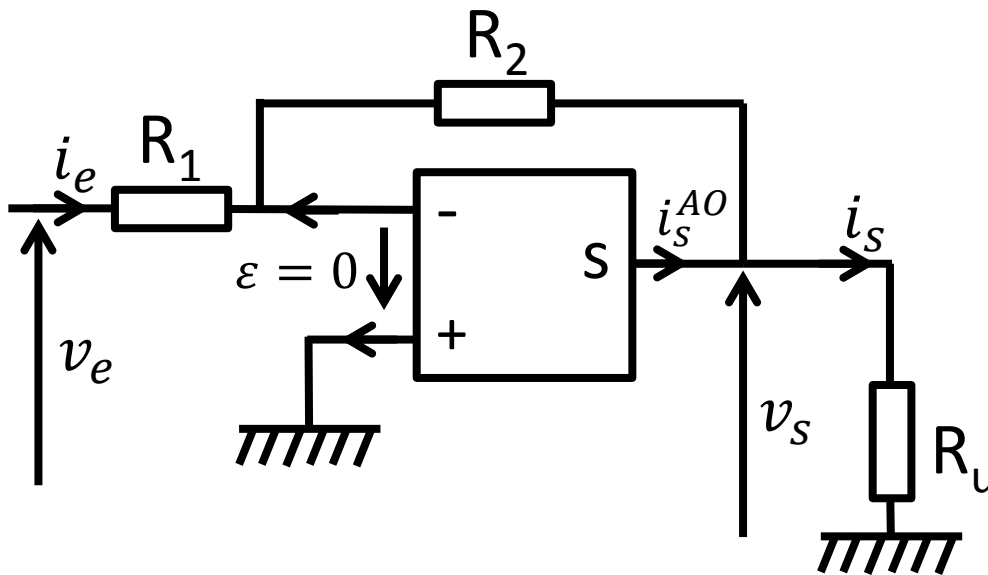
1- Limitation en tension de sortie $|v_s^{AO}| \leq V_{\text{saturation}} \leq U_{\text{alimentation}}$
(propriété assez générale, contre-exemple : onduleur)

2- Limitation en courant de sortie $|i_s^{AO}| \leq i_{\text{max}} \approx \mathbf{10\text{mA}}$ à 25mA

Ces limitations sont des phénomènes non linéaires (existence d'un seuil)

3- Exemple

On veut $G_{dB} = 20 \text{ dB}$ donc $|A_v| = 10$ et $\frac{R_2}{R_1} = 10$.



1- Pour éviter la saturation en tension :

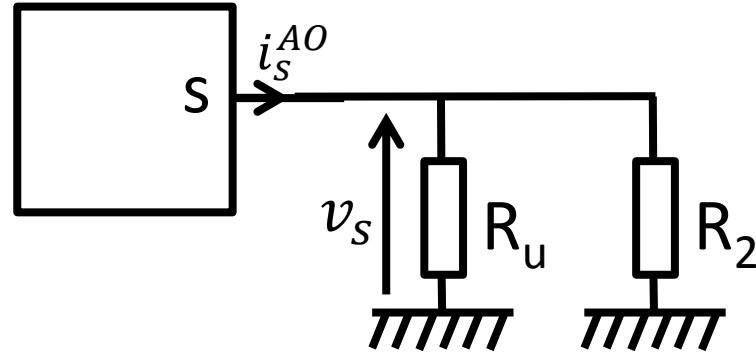
$$|v_s| = |v_s^{AO}| \leq 10\text{V (environ)}$$

$$\text{donc } |v_e| \leq \mathbf{1\text{V}}$$

1. L'amplificateur inverseur

2- Pour éviter la saturation en courant :

La sortie de l'ampli op voit



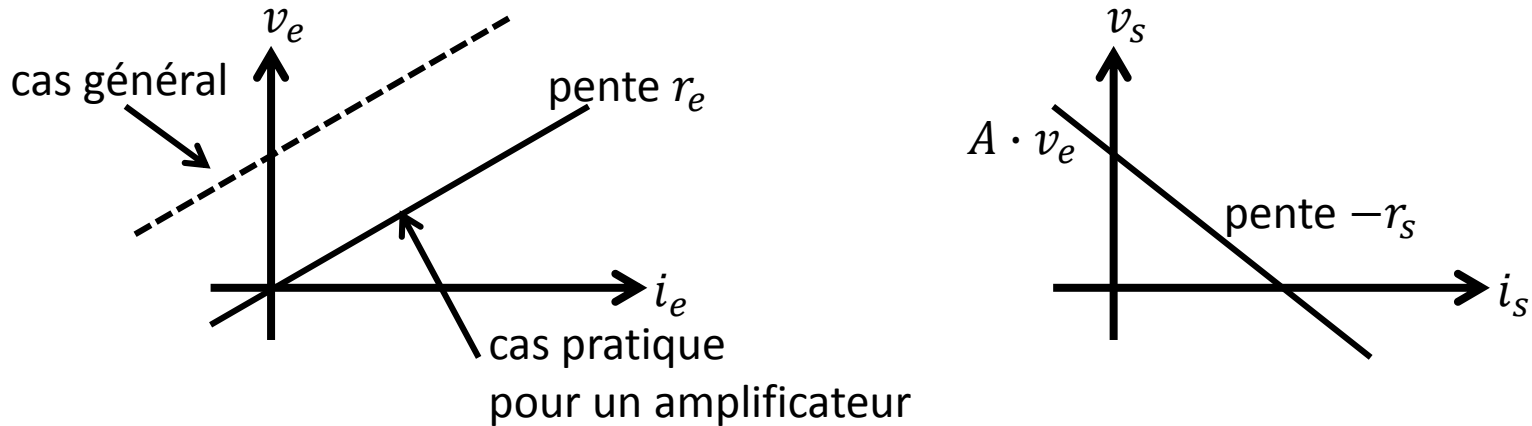
$$|i_s^{AO}|_{max} \leq \frac{10V}{R_2 \parallel R_u} \leq 10\text{mA} \text{ donc } \boxed{R_2 \parallel R_u \geq 1 \text{ k}\Omega}$$

Choix des résistances (dans l'hypothèse $R_u \gg R_2$)

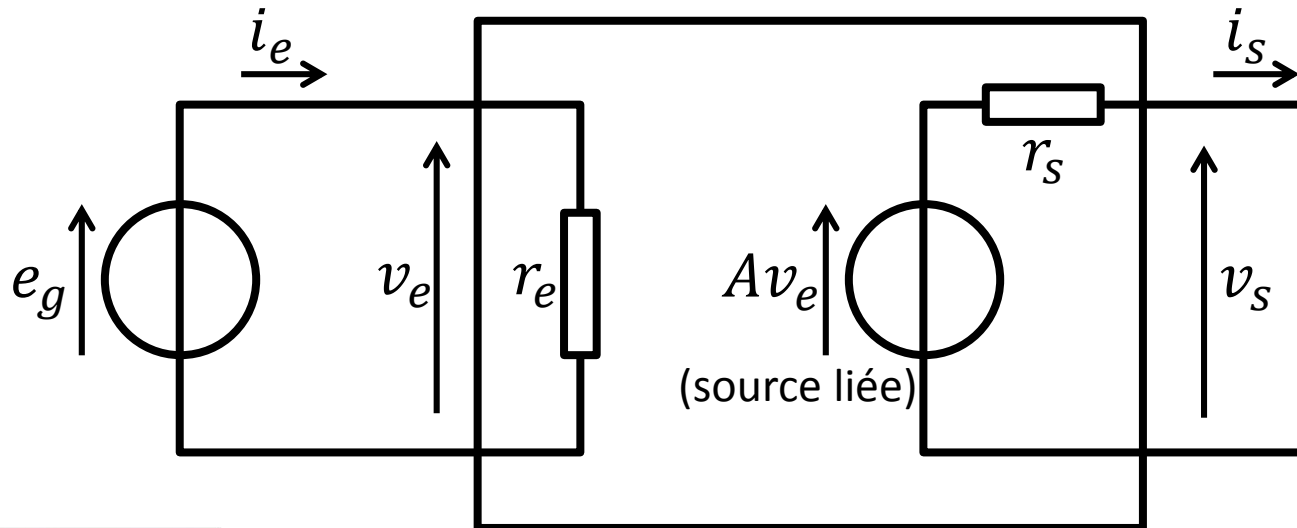
R_2	R_1	
1 k Ω	0,1 k Ω	Limite
10 k Ω	1 k Ω	Bon
100 k Ω	10 k Ω	Bon
1000 k Ω	100 k Ω	Fortes résistances déconseillées (sensibilité aux parasites, effet accru des défauts de l'AmpliOp)

2. Résistances d'entrée et de sortie

2.1 Modèle général d'amplificateur linéaire en basse fréquence (modèle statique)



d'où le schéma du modèle :



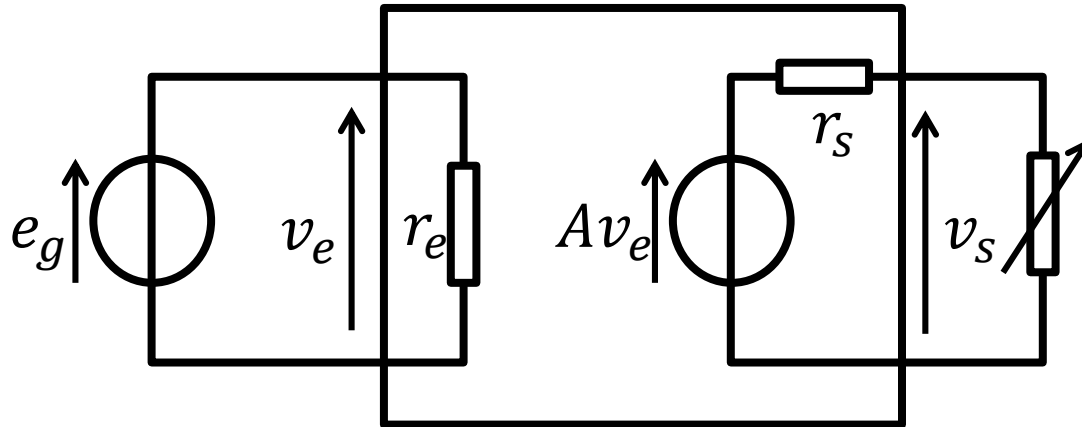
Cas idéal :

$$r_e \rightarrow +\infty$$
$$r_s = 0$$

2. Résistances d'entrée et de sortie

2.2 Détermination de la résistance de sortie d'un amplificateur

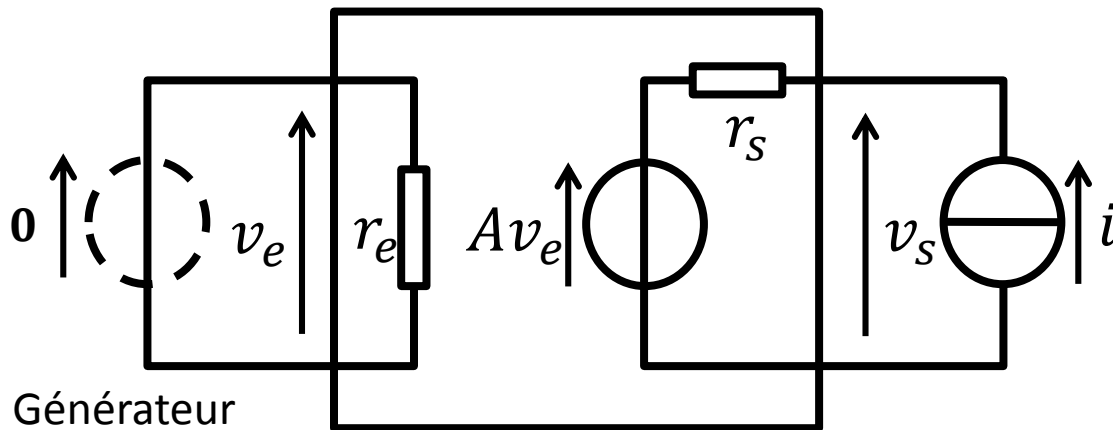
1^{ère} méthode (division de tension en sortie)



$$R \rightarrow +\infty, v_s = A e_g$$
$$R \rightarrow r_s, v_s = A e_g / 2$$

Expérimentalement, cette méthode est délicate à mettre en œuvre lorsque r_s est très petit.

2^{ème} méthode



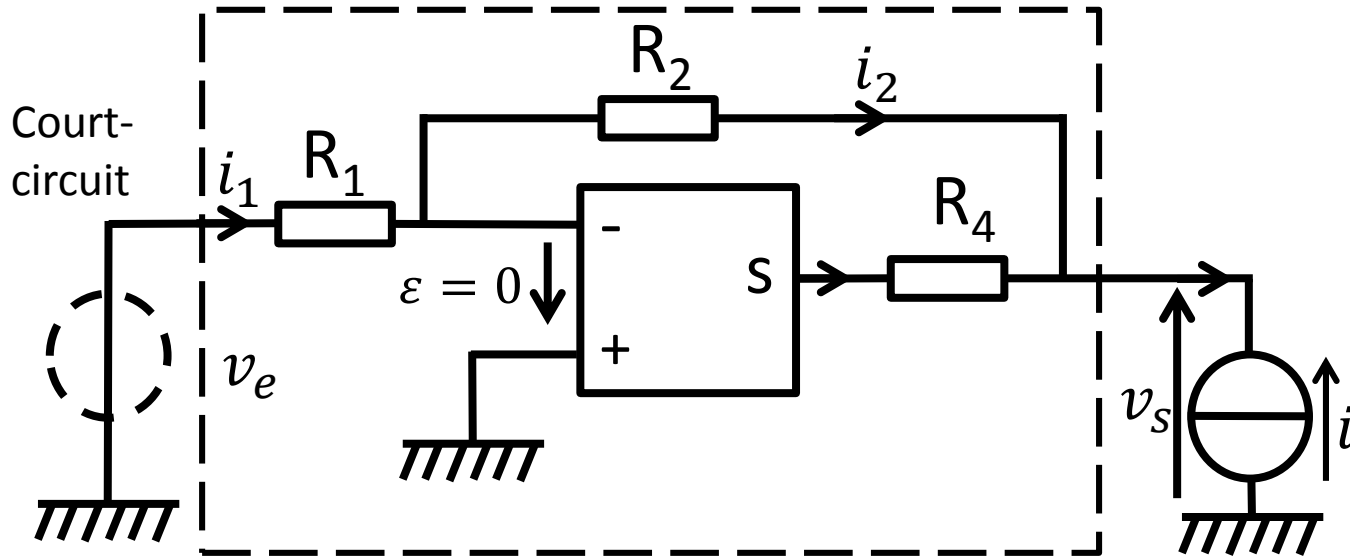
Générateur
« éteint »

- On branche sur la sortie un générateur de courant i .
- On éteint (passive) le générateur de tension sur l'entrée en le remplaçant par sa résistance interne (supposée nulle ici), mais on n'éteint pas la source liée (Av_e).
- On calcule ou on mesure v_s , d'où $r_s = v_s / i$.

Il ne faut pas éteindre les sources liées pour appliquer le théorème de thévenin ou le théorème de superposition.

2. Résistances d'entrée et de sortie

2.3 Application de la deuxième méthode à l'amplificateur inverseur à AmpliOp



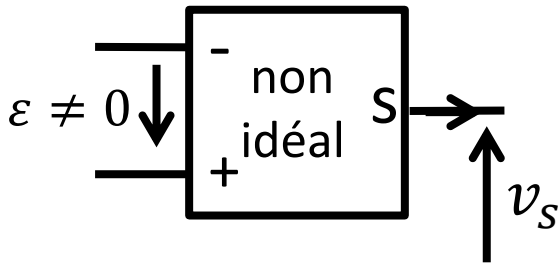
Recherche de r_s :

$$v_{R1} = -\varepsilon = 0 \rightarrow i_1 = 0 \rightarrow i_2 = 0 \rightarrow v_{R2} = 0 \rightarrow v_s = 0, \text{ et donc } v_s/i_s = r_s = 0$$

- La résistance R_4 n'influence pas la résistance interne parce qu'elle est à l'intérieur de la boucle de rétroaction. $R_s=0$ est cohérent avec le fait que le gain en tension calculé précédemment ne dépend pas de R_u .
- Où passe le courant i ?
- En réalité l'AmpliOp n'étant pas idéal r_s n'est pas nulle mais très faible, non mesurable dans une expérience d'agrégation.

3. Comportement fréquentiel de l'amplificateur non inverseur

3.1 Amplification différentielle de l'AmpliOp



$\varepsilon \neq 0$: tension différentielle d'entrée non nulle si l'AmpliOp n'est plus idéal.

En continu : $v_s = \mu_0 \varepsilon$, avec μ_0 : amplification différentielle.

AmpliOp idéal : $\mu_0 \rightarrow +\infty$; AmpliOp réel (741) : $\mu_0 \approx 10^5$

En régime quelconque :

Le comportement de l'AmpliOp est bien traduit par une équation différentielle du 1^{er} ordre avec un temps caractéristique τ (pour l'AmpliOp réel (741), $\tau \approx 10^{-2}$ s) :

$$\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = \mu_0 \varepsilon$$

En régime sinusoïdal permanent

$$(1 + j\omega\tau) \underline{v_s} = \mu_0 \underline{\varepsilon}$$

D'où, en posant $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$

$$\underline{\mu} = \frac{\underline{v_s}}{\underline{\varepsilon}} = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec $\mu_0 \approx 10^5$ et $\omega_0 \approx 100$ rad/s ($f_0 \approx 10$ Hz).

3. Comportement fréquentiel de l'amplificateur non inverseur

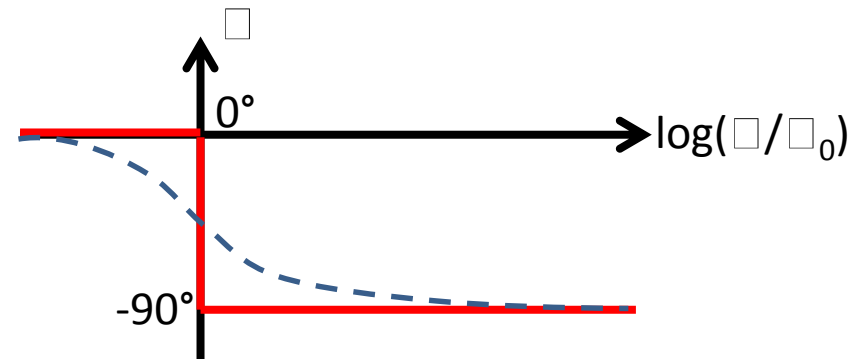
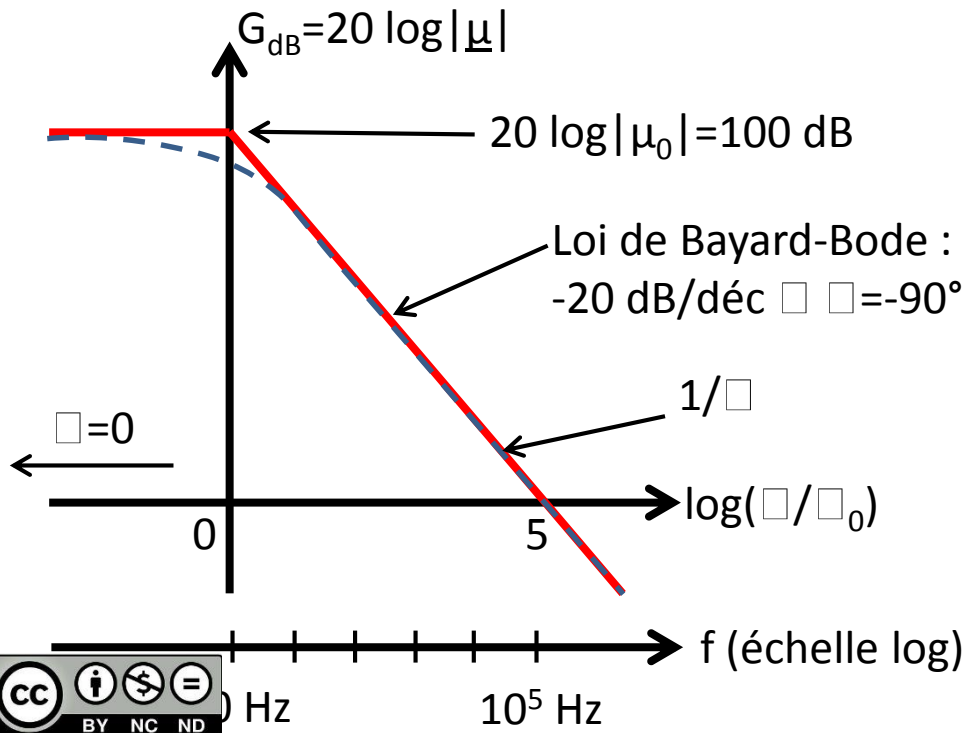
3.2 Diagramme de Bode de l'AmpliOp

On se place en régime sinusoïdal permanent, on étudie $G_{dB} = 20 \log |\underline{\mu}|$ et $\varphi = \arg(\underline{\mu})$ en fonction de $\log(\omega/\omega_0)$.

- Si $\omega \ll \omega_0$, $\underline{\mu} \cong \mu_0$ donc $\varphi \cong 0$ et $G_{dB} \cong 20 \log \mu_0 = 100 \text{ dB}$.

- Si $\omega \gg \omega_0$, $\underline{\mu} \cong -j \mu_0 \frac{\omega}{\omega_0}$ donc $\varphi \cong -90^\circ$

et $G_{dB} \cong -20 \log \frac{\omega}{\omega_0} + 20 \log \mu_0$; c'est l'équation d'une droite de pente -20dB/décade passant par le point $(\log \frac{\omega}{\omega_0} = 0, G_{dB} = 20 \log \mu_0)$.

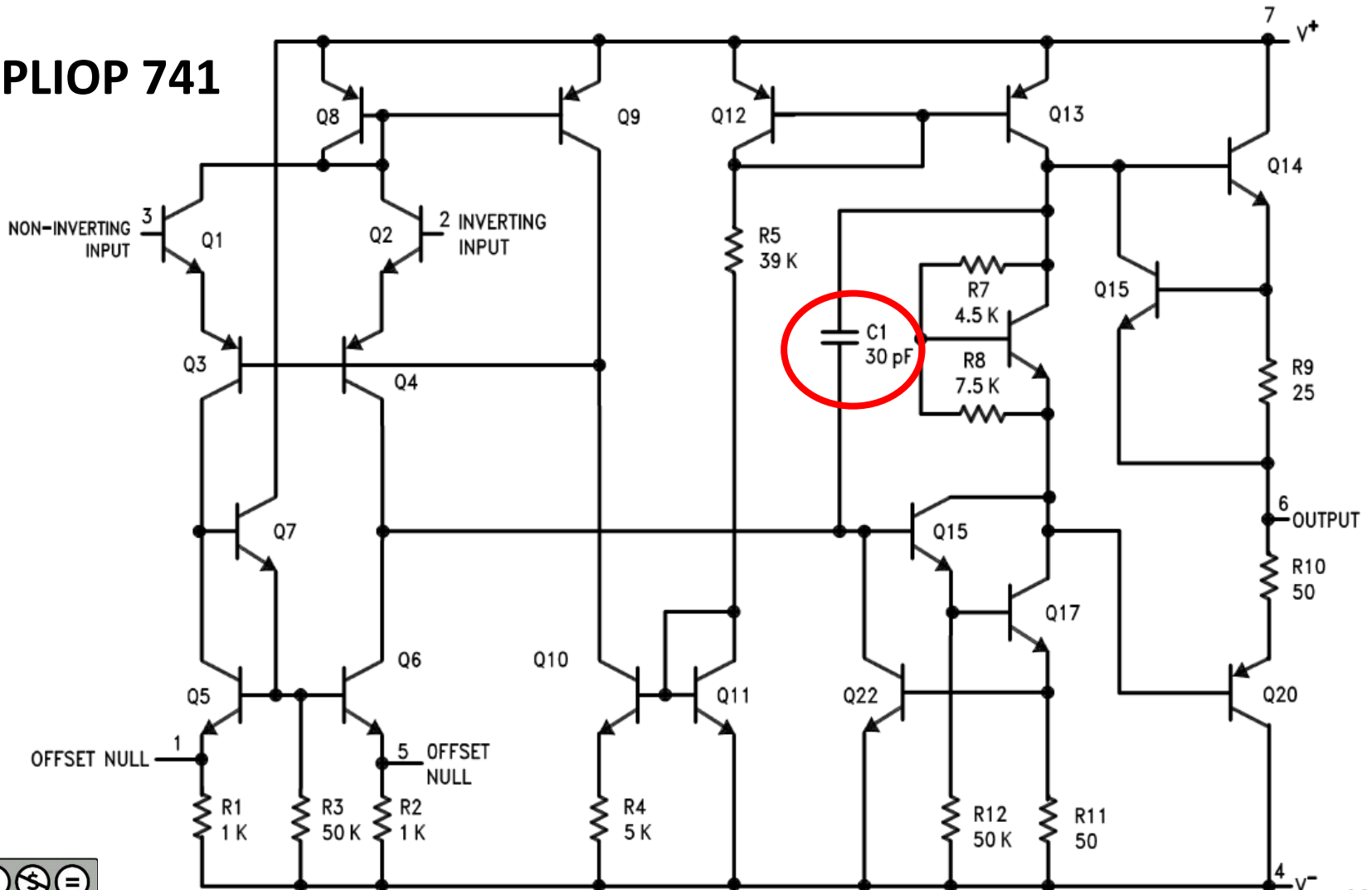


Rq1 : La loi de Bayard-Bode n'est vérifiée que pour les systèmes « à déphasage minimal », cf. H-Prépa Electronique I, 2^{ème} année PSI, p.53 et p.74

3. Comportement fréquentiel de l'amplificateur non inverseur

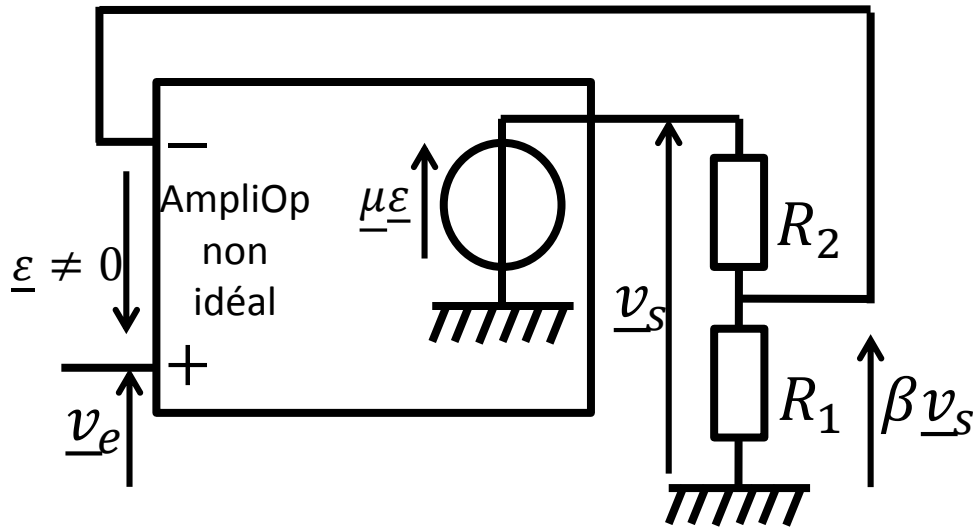
Rq2 : Pourquoi l'AmpliOp obéit-il à une équation différentielle du 1^{ère} ordre ?

AMPLIOP 741



3. Application à l'amplificateur non inverseur en régime sinusoïdal

L'AmpliOp non bouclé est inutilisable en pratique...



L'AmpliOp non idéal est représenté ici par son modèle en alternatif.

Taux de réaction négative : $\beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$.

Amplification attendue (AO idéal) :

$$A_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{\beta}$$

Calcul du gain A de l'amplificateur en régime sinusoïdal :

$\underline{v}_+ = \underline{v}_e$; $\underline{v}_- = \beta \underline{v}_s$ et $\underline{v}_+ - \underline{v}_- = \underline{\varepsilon} = \underline{v}_s / \underline{\mu}$, d'où

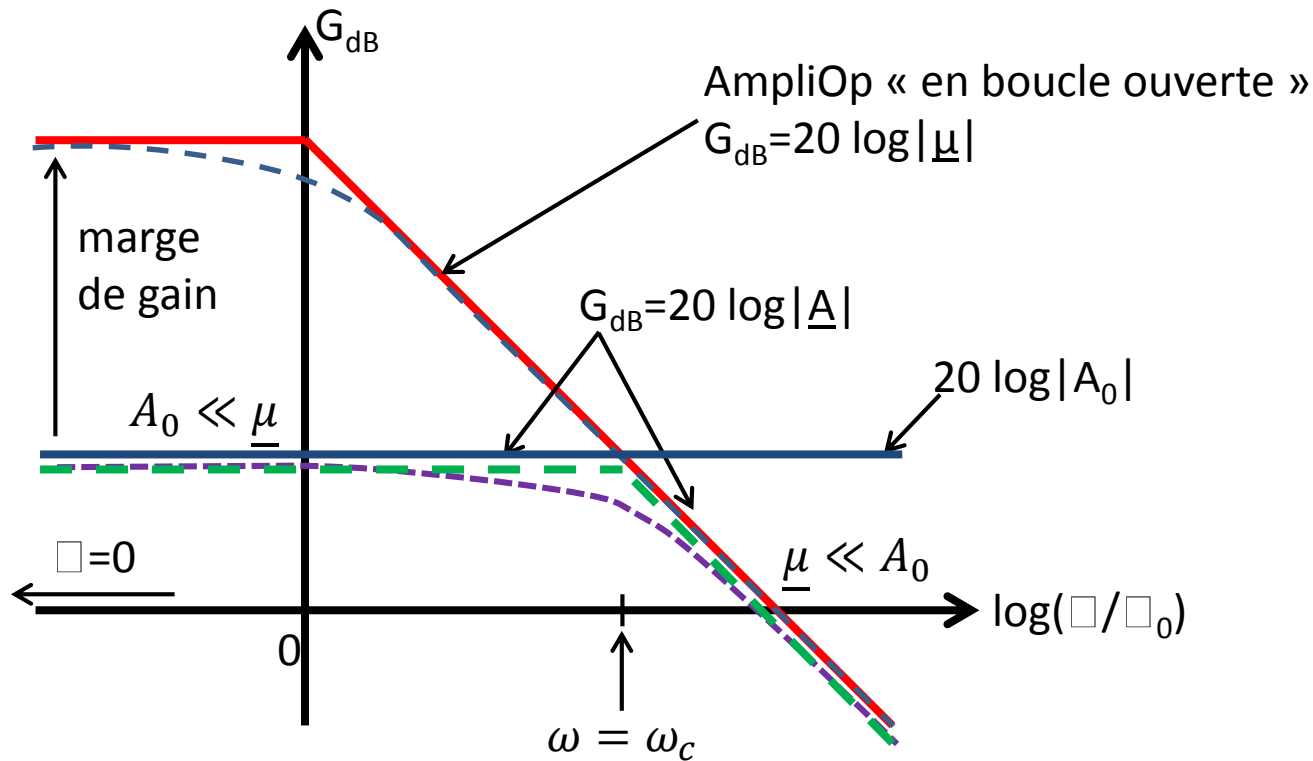
$$\underline{A} = \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{\underline{\mu}}{1 + \beta \underline{\mu}} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{\mu}} + \frac{1}{A_0}}$$

- Si $A \ll \underline{\mu}$, $\underline{A} = A_0$ ne dépend pas des caractéristiques de l'AO.
- Si $A \gg \underline{\mu}$, $\underline{A} = \underline{\mu}$.

→ donc $\underline{A} \cong \inf(A_0, \underline{\mu})$

Interprétation : une réaction négative ne peut que diminuer le gain.

3. Application à l'amplificateur non inverseur en régime sinusoïdal



Plus la « marge » de gain est grande, plus le gain est proche du gain attendu.

Pulsation de coupure ω_c à -3dB : $G_{dB} = 20 \log A_0 - 3\text{dB}$ d'où $|\underline{A}| = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$.

Or, puisque $\omega_c \gg \omega_0$, $\underline{\mu} = -j\mu_0 \frac{\omega_0}{\omega_c}$ donc il faut que : $\frac{1}{\left| \frac{1}{A_0} + j \frac{\omega_c}{\mu_0 \omega_0} \right|} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$,

d'où $A_0 \omega_c = \mu_0 \omega_0 = \text{constante}$.

Le produit « amplification (attendue) x bande passante » est constant.

3. Application à l'amplificateur non inverseur en régime sinusoïdal

Pour le 741 : $A_0 f_c = \mu_0 f_0 \approx 10^5 \times 10\text{Hz} = 10^6\text{Hz}$.

Rq1 :

Ce comportement fréquentiel de l'AmpliOp est un phénomène linéaire. Par exemple si on double le signal d'entrée, le signal de sortie est doublé sans changer de forme (et pourtant les deux n'ont pas nécessairement la même forme, songer au cas d'un signal carré qui voit ses harmoniques supérieurs atténués et déphasés au cours de l'amplification linéaire).

Rq2 :

Dans le cas d'un amplificateur inverseur, la relation ci-dessus devient

$$(|A_0| + 1)\omega_c = \text{constante, avec } A_0 = \frac{R_2}{R_1}.$$

Rq3 :

Il existe une autre cause de limitation de la rapidité de l'AmpliOp, c'est le « **slew-rate** ». La tension de sortie v_s de l'AmpliOp a une vitesse de variation limitée : $\left| \frac{dv_s}{dt} \right| \leq S$ où S est une constante en $V \cdot s^{-1}$. Par exemple : $S \approx 0.5 V/\mu s$ pour le 741.

C'est un phénomène non linéaire.

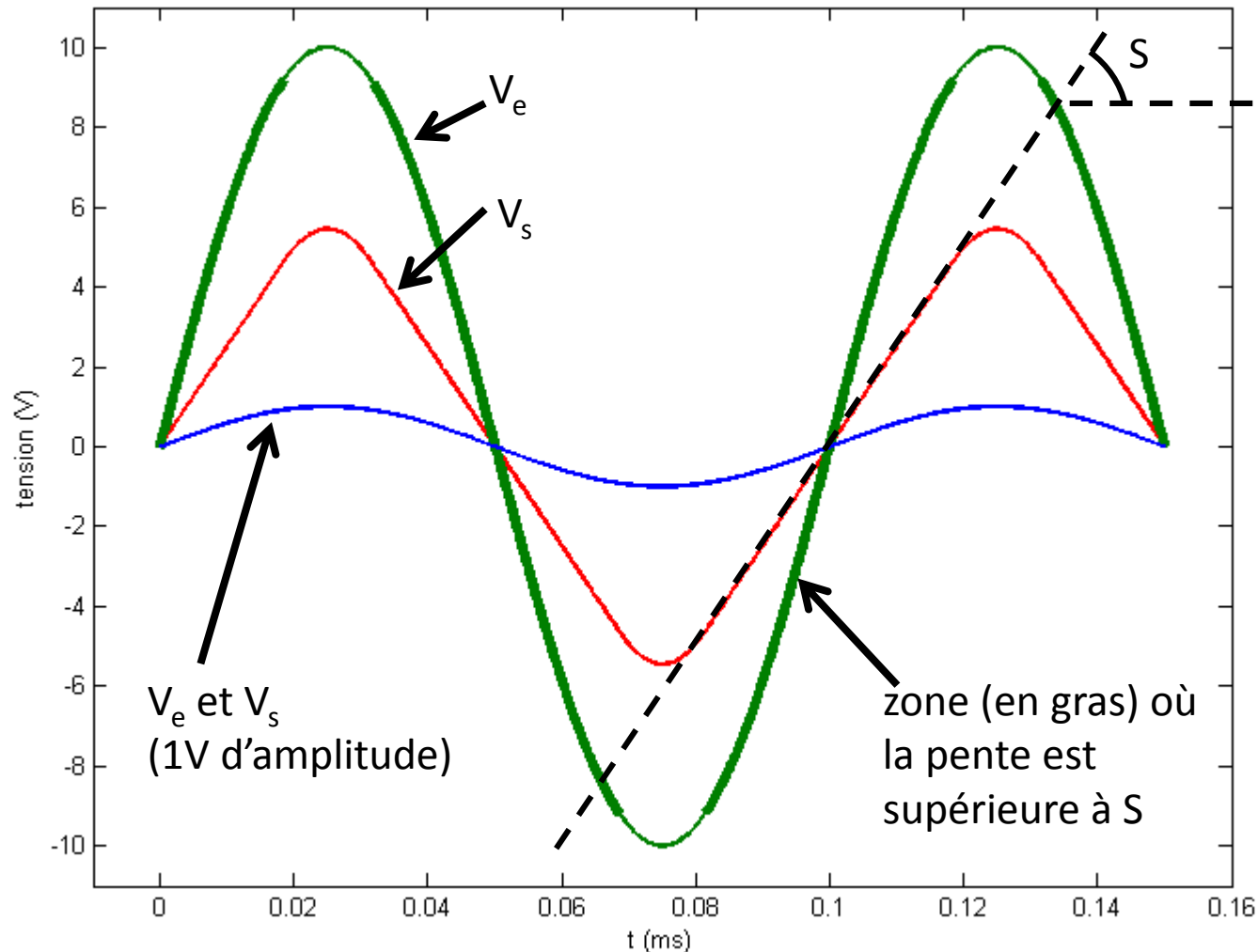
Pour l'observer seul :

- Se placer à faible gain de façon à avoir une fréquence de coupure élevée ;
- Opérer à une fréquence inférieure à cette fréquence de coupure mais suffisante pour

3. Application à l'amplificateur non inverseur en régime sinusoïdal

Exemple : en **suiveur** à 10 kHz.

On passe de la courbe bleue à la courbe rouge en effectuant une augmentation de l'amplitude du signal d'entrée. On constate que le signal de sortie devient progressivement triangulaire. Si $v_s = v_{s0} \sin \omega t$, ce phénomène commence à apparaître lorsque : $\omega v_{s0} = S$.



Aparté

amplificateur à base de transistors



This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International” license.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

Asservissement linéaire

Centre Interuniversitaire de préparation à
l'Agrégation de Physique

Montrouge 2015-2016



Bibliographie

H-Prépa

Electronique I, 2^{ième} année (n'aborde pas les corrections PI, PID).

Delacressonnière
Olivier, More, Gié

Electronique, 2^{ième} année.
Physique, PSI.

Krob

Electronique expérimentale.

Les livres qui suivent correspondent à un enseignement de technologie.

Descotes-Genon

L'automatique en classe prépa

Vibet

Systèmes asservis linéaires continus

Manneville & Esquieu

Systèmes bouclés linéaires de
communication & filtrage.

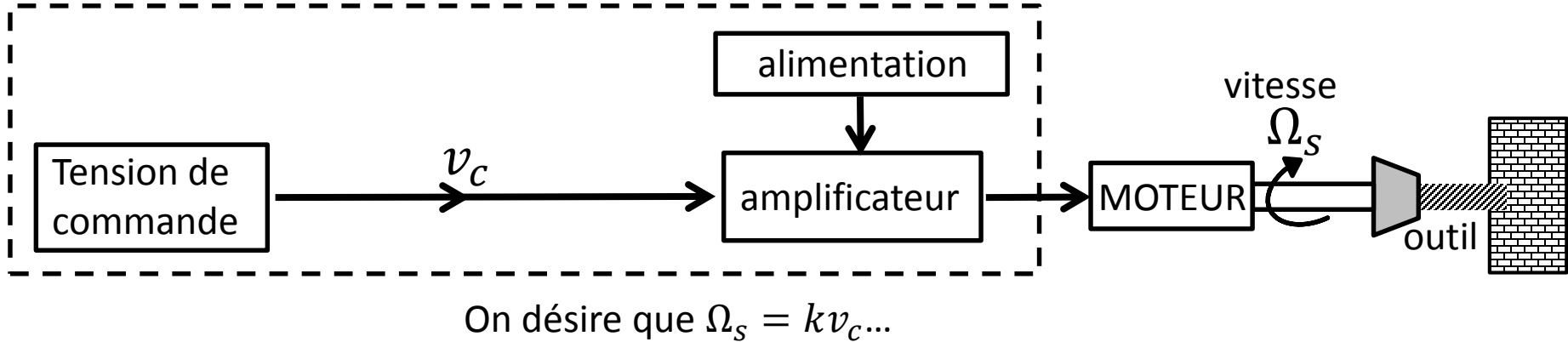
Montage : MP27 Systèmes bouclés.

Leçon : LP21 Rétroaction et oscillations.

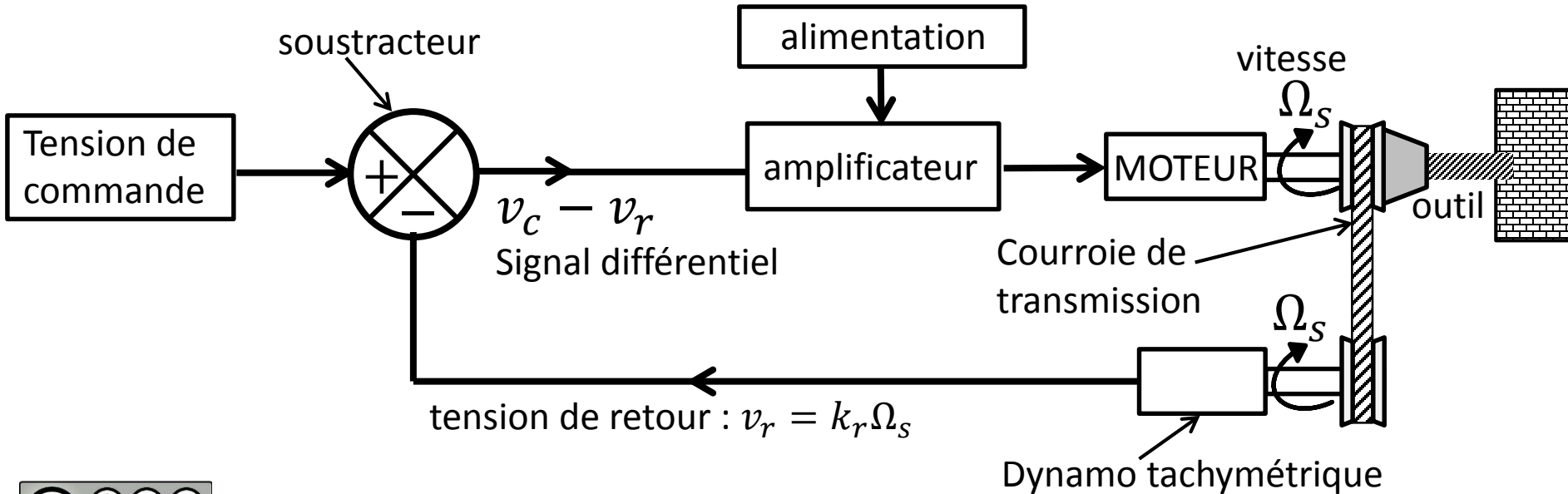
1. Introduction

1. Exemple d'un asservissement de vitesse de rotation

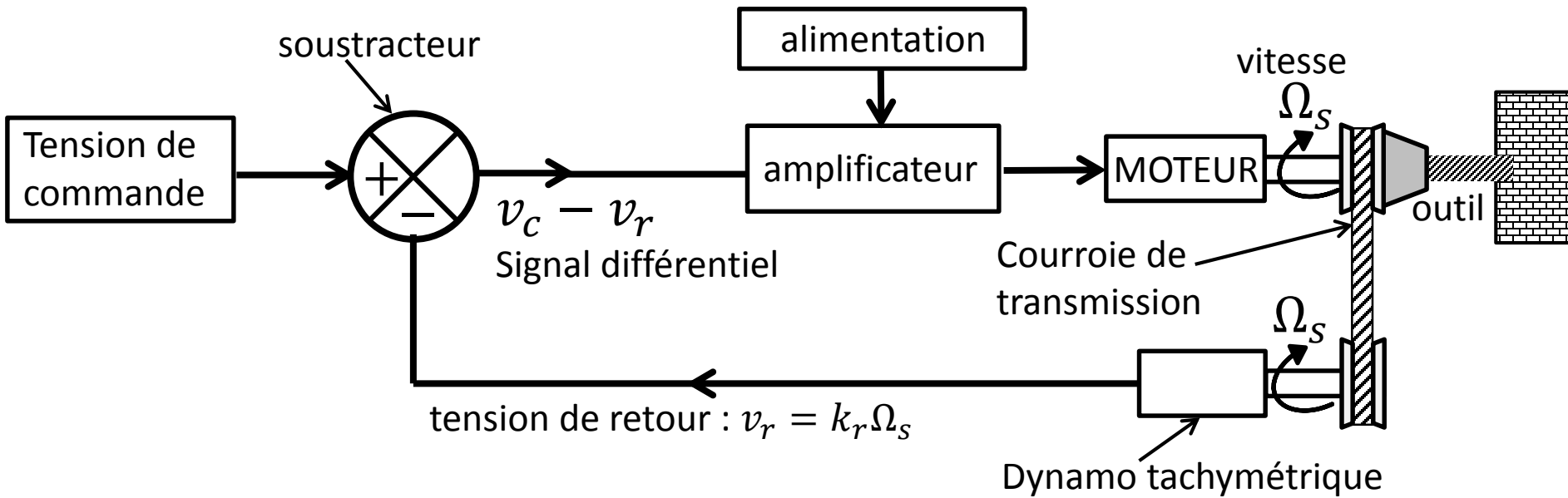
1.1 Cas d'une commande sans boucle



1.2 Cas d'une commande avec boucle de rétroaction



1. Introduction



Justification du signe – du soustracteur : **rétroaction négative.**

Cas où le gain de l'amplificateur tend vers l'infini.

Il y a asservissement de Ω_s par v_c .

L'énergie de l'outil provient de l'alimentation, pas de la tension de commande.

1. Introduction

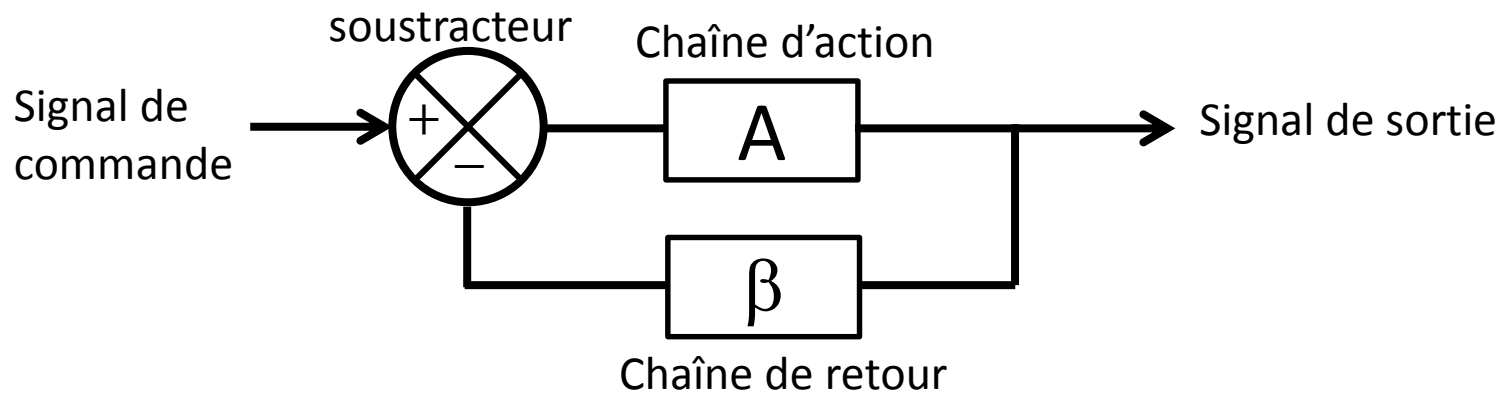
2. Généralisation

Définition de l'asservissement (donnée dans le Robert) : ***une grandeur physique impose ses variations à une autre grandeur sans être influencée par elle.***

En pratique l'asservissement s'obtient par utilisation d'une rétroaction.

En fait nous sommes entourés de systèmes asservis : régulation de température par thermostat, de niveau d'eau dans une chasse d'eau... et nous-mêmes utilisons dans nos actions des rétroactions par la vue, l'ouïe, le sens tactile...

Voici le schéma général d'un système asservi (l'alimentation est incluse dans la chaîne d'action) :



Dans la suite, l'alphabet romain (A, B,...) sera utilisé pour représenter la chaîne d'action, l'alphabet grec pour la chaîne de retour.

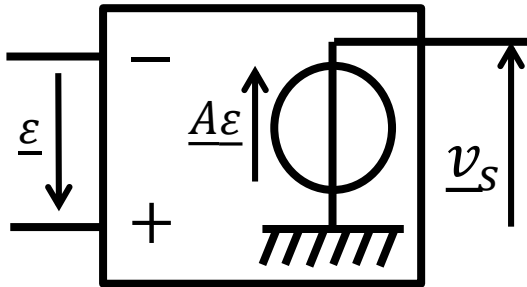
Sur le schéma ci-dessus ne reconnaît-on pas le schéma d'un montage à AmpliOp ?

2. Etude d'un amplificateur suiveur

1. Présentation du système

L'objet étudié en TP se présente sous forme d'une boîte grise à relier à une alimentation d'AmpliOp et avec une entrée +, une entrée - et une sortie.

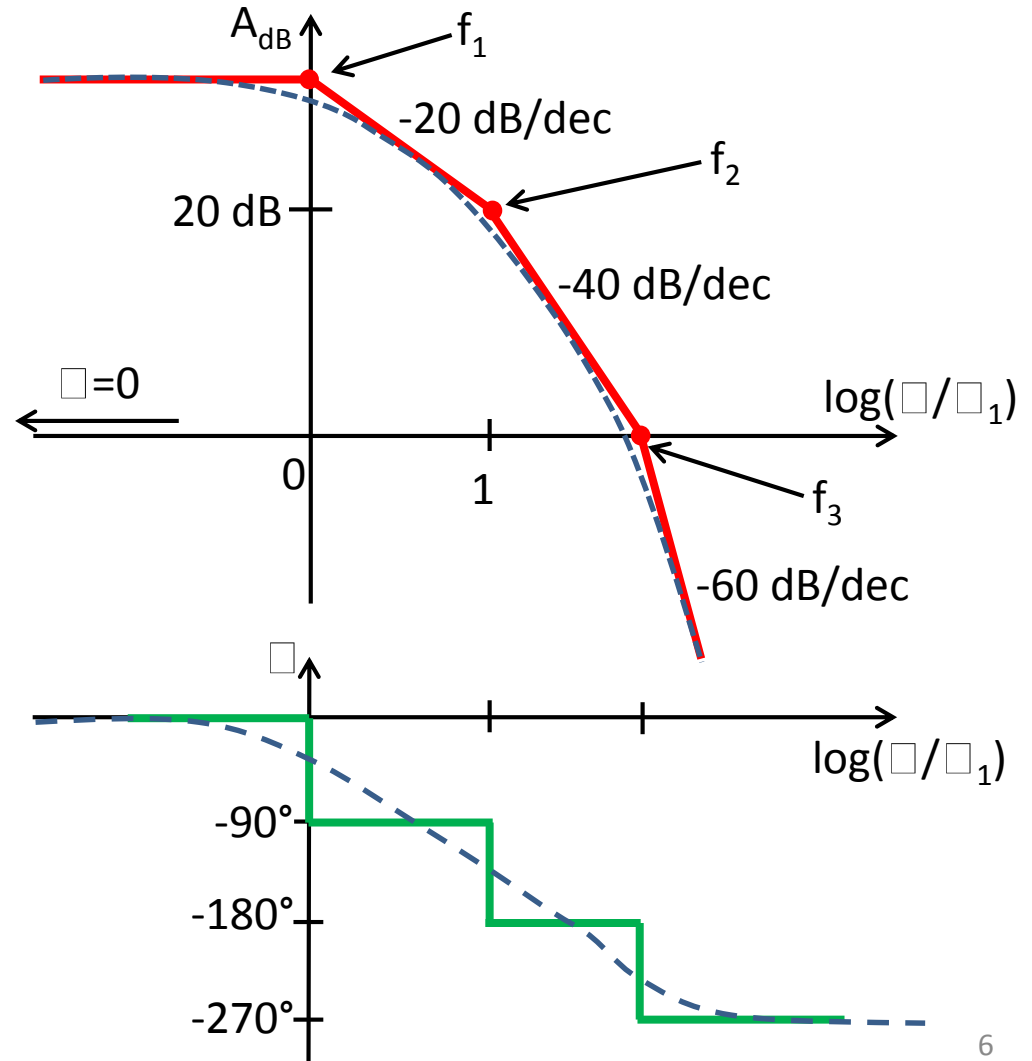
1.1 Diagramme de Bode de l'amplificateur en boucle ouverte



Cette étude expérimentale sera réalisée en TP au moyen du logiciel BODE.

Ce diagramme s'applique aussi à un ensemble amplificateur+moteur qui possède plusieurs fréquences caractéristiques.

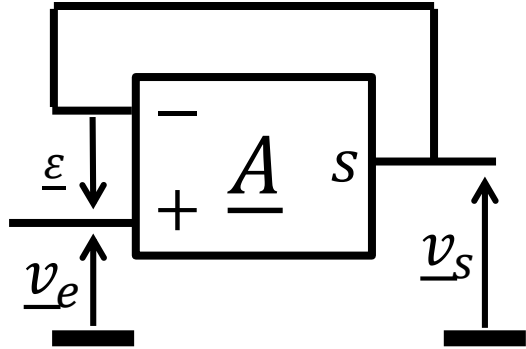
Remarquer qu'il y a une fréquence où $\varphi = -180^\circ$, donc A change de signe.



2. Etude d'un amplificateur suiveur

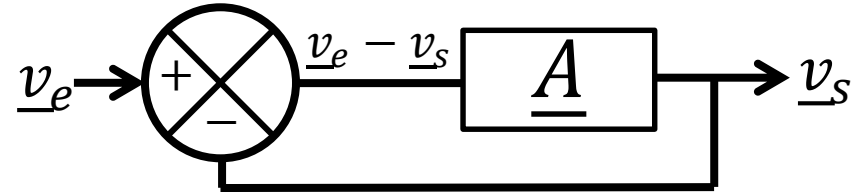
1.2 Réalisation du suiveur, schéma équivalent et gain en régime sinusoïdal

Chaîne de retour unitaire ($\beta=1$)



Comme avec un AmpliOp, on réalise le suiveur en reliant la sortie à l'entrée – par un court-circuit.

Cet ensemble peut être représenté par le schéma équivalent :



$$\underline{A}(\underline{v}_e - \underline{v}_s) = \underline{v}_s \text{ d'où } \frac{\underline{v}_s}{\underline{v}_e} = \frac{\underline{A}}{1 + \underline{A}}$$

Si $\underline{A} \rightarrow \infty$, $\underline{v}_s/\underline{v}_e \rightarrow 1$ on a donc bien un suiveur.

2. Critère de stabilité de NYQUIST (forme simplifiée dite « critère du revers »)

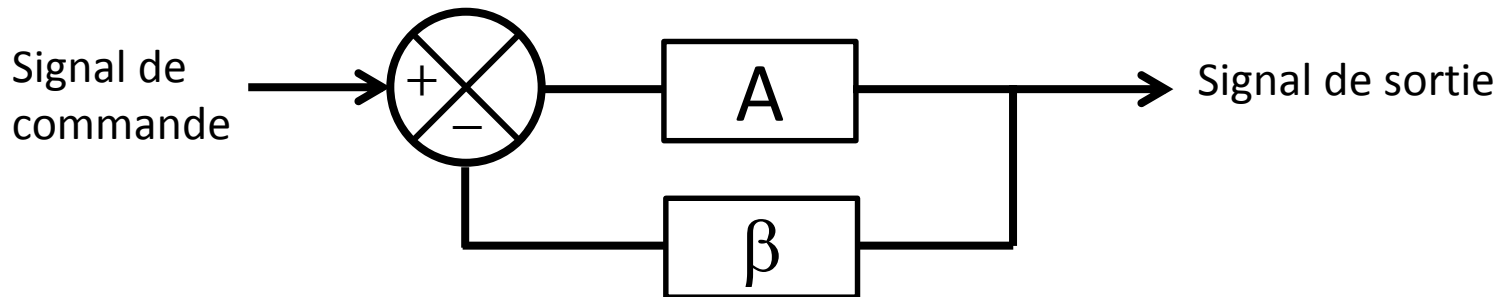
Le principal problème que rencontrent les concepteurs d'asservissements est le risque d'instabilité : il arrive souvent qu'un système stable devienne instable lorsque l'on ferme la boucle de rétroaction. Dans ce cas, le signal de sortie n'atteint pas le régime permanent attendu, mais passe à un régime d'oscillation permanente ou dans un état de saturation permanente en absence de signal d'entrée.

2. Etude d'un amplificateur suiveur

2. Critère de stabilité de NYQUIST (forme simplifiée dite « critère du revers »)

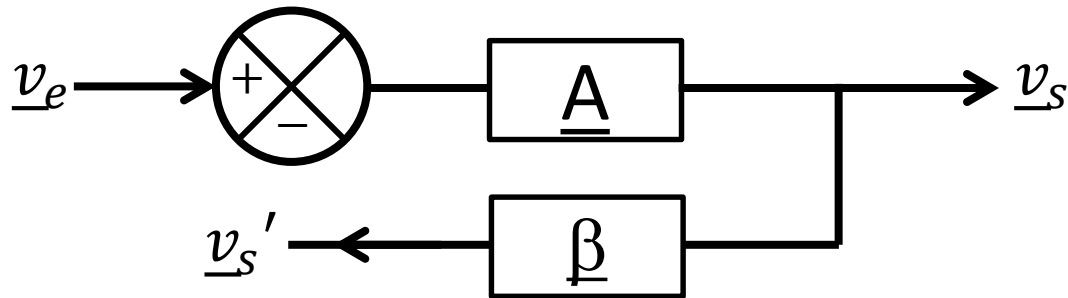
Hormis la simple observation directe, il y a plusieurs méthodes pour savoir si le bouclage va déstabiliser un système linéaire (Cf. H-Prépa Electronique, électrocinétique I, 1^{ière} année p. 104 et H-Prépa Electronique I, 2^{ième} année p. 148). Le critère que l'on va expliciter ici se prête bien à une présentation expérimentale (mais il n'est pas au programme des classes préparatoires, de 1997, bien que H-Prépa Electronique I, 2^{ième} année p.150 l'introduise sans le nommer).

On suppose dans la suite que la chaîne d'action A est stable avant bouclage. On se pose la question : le système **linéaire** suivant est-il stable ?



2. Etude d'un amplificateur suiveur

2. Critère de stabilité de NYQUIST (forme simplifiée dite « critère du revers »)



Pour répondre, le critère de Nyquist indique les opérations suivantes :

- **Ouvrir la boucle** au niveau de la liaison avec le soustracteur ;
- Étudier en **régime sinusoïdal permanent** la fonction de transfert globale en boucle ouverte (**gain de boucle**)

$$\frac{\underline{v}_s'}{\underline{v}_e} = \underline{A}(\omega)\underline{\beta}(\omega) = |\underline{A}| |\underline{\beta}| e^{i\varphi}$$

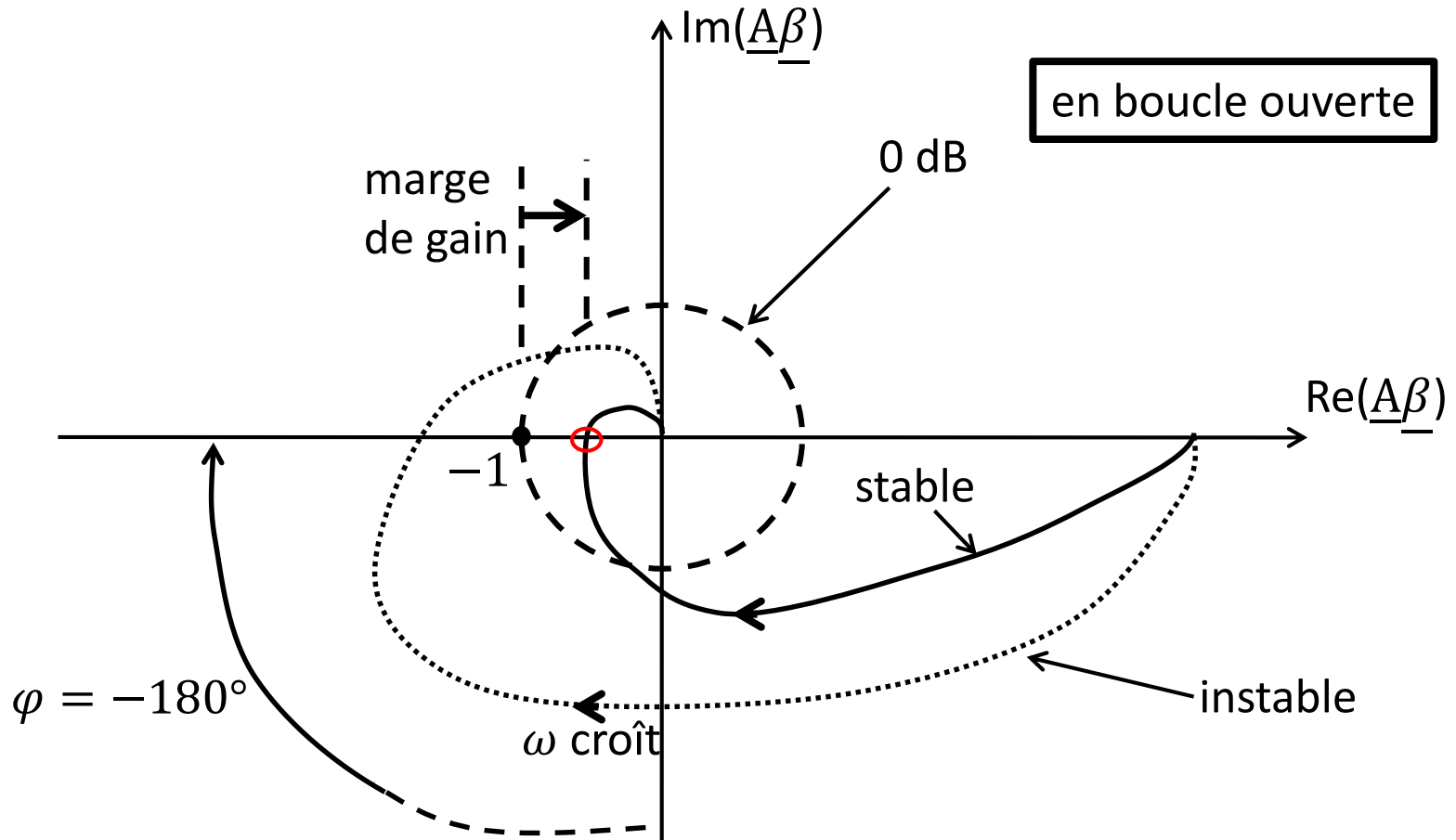
ce qui expérimentalement consiste à mesurer \underline{v}_e et \underline{v}_s' avec un voltmètre alternatif et le déphasage entre eux avec un phasemètre ;

- Pour chaque valeur de ω placer un point représentant le gain de la boucle $\underline{A}\underline{\beta}$ dans le plan complexe (diagramme de Nyquist).

2. Etude d'un amplificateur suiveur

2. Critère de stabilité de NYQUIST (forme simplifiée dite « critère du revers »)

Pour les systèmes asservis (du type « vitesse ») pas trop compliqués, on obtient typiquement le diagramme ci-dessous :



2. Etude d'un amplificateur suiveur

2. Critère de stabilité de NYQUIST (forme simplifiée dite « critère du revers »)

On voit l'évolution du gain de boucle, sur la courbe en trait gras plein, en suivant le sens de la flèche tracée dessus :

- à basse fréquence le gain est élevé et la phase nulle, ce qui traduit le fait que le système a ses meilleurs performances ;
- lorsque la fréquence tend vers l'infini, le gain de boucle tend vers zéro (propriété générale) et la phase atteint sa valeur extrême (-270° sur la figure). Le fait que la phase soit négative est courant : l'inertie domine, procurant un retard.

Le critère de Nyquist stipule que le système bouclé sera stable lorsque l'on ferme la boucle de rétroaction sur le – du soustracteur, si la courbe n'entoure pas le point fixe d'abscisse -1 (0 dB, -180°), donc si, quand la phase vaut -180° , le gain de boucle est inférieur à 0 dB.

Le système est stable lorsqu'on ferme la boucle, si $G_{-180^\circ} < 0$ dB.

En pratique, pour que le système soit utilisable, il faut une **marge de gain** d'au moins 10 dB : $G_{-180^\circ} < -10$ dB.

2. Etude d'un amplificateur suiveur

2. Critère de stabilité de NYQUIST (forme simplifiée dite « critère du revers »)

Notes :

- Remarque sur les conventions de signe du gain de boucle ;
- La démonstration du critère de Nyquist dans le cas général n'est pas simple. Les justifications intuitives, basées sur des raisonnements séquentiels, sont en contradiction avec les critères de convergence mathématiques.

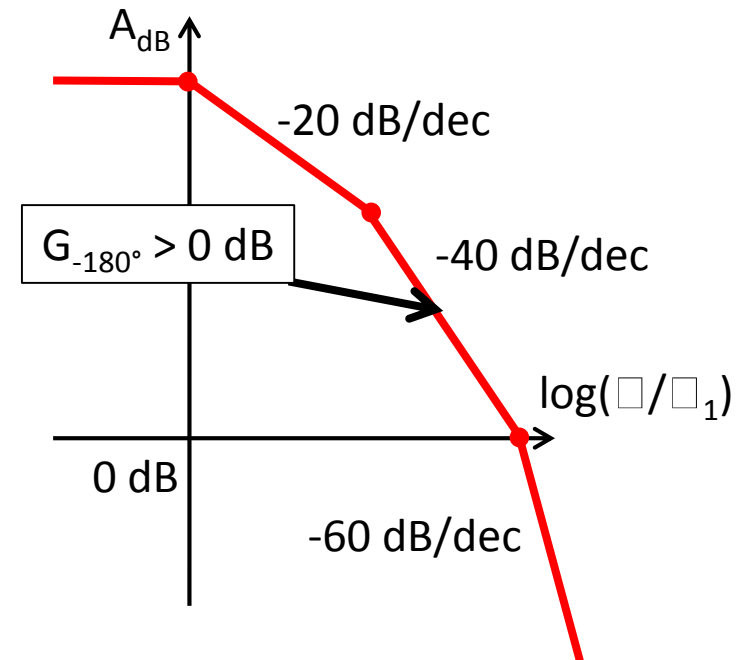
Pourquoi 180° et 0 dB exactement ?

2. Etude d'un amplificateur suiveur

3. Application du critère de stabilité de Nyquist à l'amplificateur suiveur

On est dans le cas où $\beta = 1$ (boucle de retour unitaire), il suffit donc d'étudier \underline{A} . Au lieu d'utiliser le diagramme de Nyquist, on va se servir du diagramme de Bode :

on voit sur le diagramme de Bode de l'amplificateur que, suivant la règle de Bayard-Bode, lorsque $A_{dB}=0$ dB, alors $|\varphi_{0dB}| > 180^\circ$ donc l'amplificateur sera instable après bouclage, ce que l'on vérifie expérimentalement en observant que la tension de sortie, en absence de signal d'entrée, oscille en permanence.



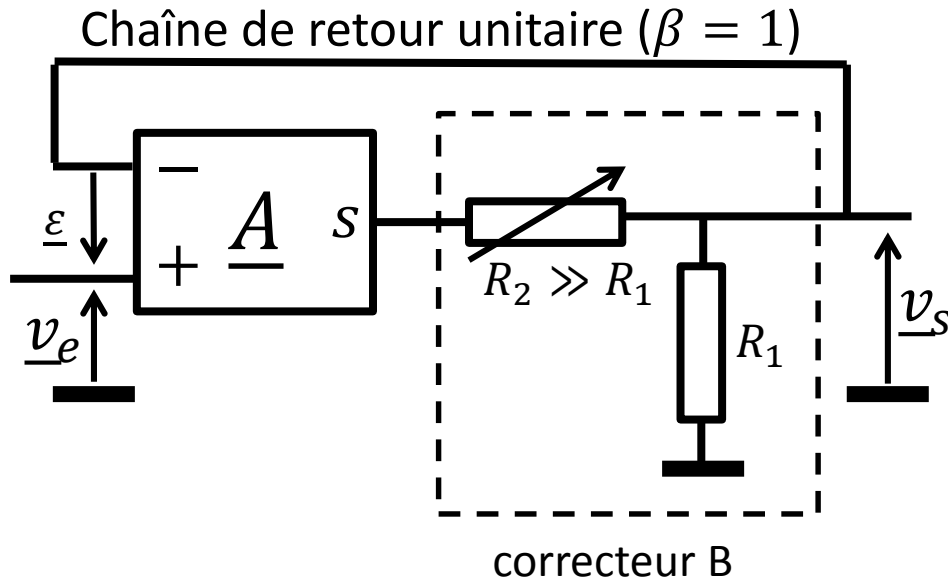
2. Etude d'un amplificateur suiveur

4. Correction proportionnelle

But : rendre le suiveur stable.

4.1 Présentation du correcteur

Pour stabiliser le système, il faut diminuer le gain lorsque la phase prend la valeur de -180° . Pour cela, sans changer la chaîne de retour, on ajoute à la chaîne d'action un diviseur de tension.



On pose

$$B = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$B_{dB} < 0$$

Notes :

Du point de vue de la stabilité, il serait équivalent de placer le correcteur B sur la chaîne de retour, mais alors l'amplificateur ne serait plus un suiveur, son amplification attendue vaudrait $(1+R_2/R_1)$.

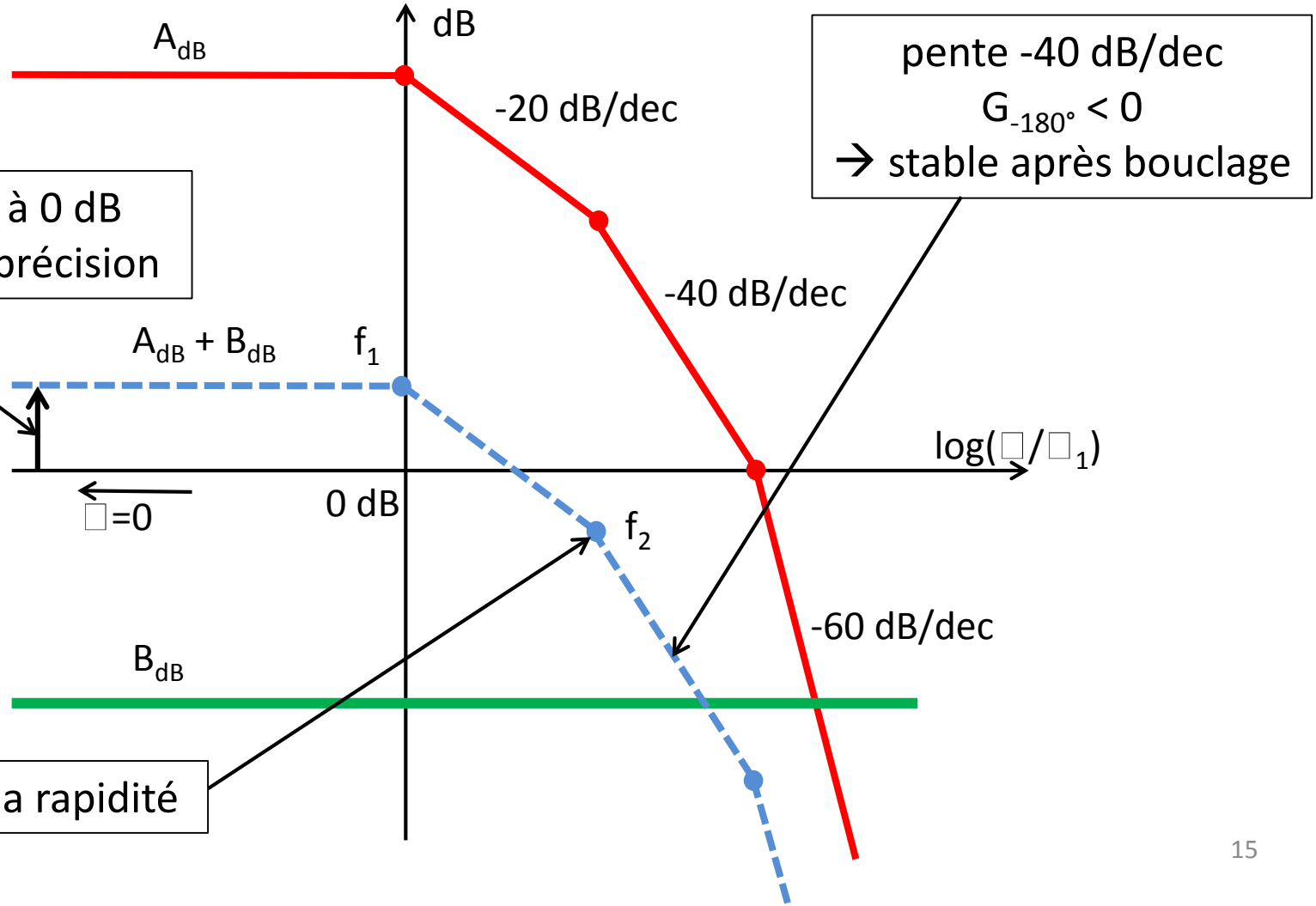
Dans les amplificateurs réels le correcteur est placé avant l'étage de puissance.

2. Etude d'un amplificateur suiveur

4. Correction proportionnelle

4.2 Influence du correcteur sur la stabilité

Tout revient à remplacer \underline{A} par $\underline{A}' = \underline{A} \cdot \underline{B}$ donc $A'_{dB} = A_{dB} + B_{dB}$. Le diagramme en boucle ouverte devient :



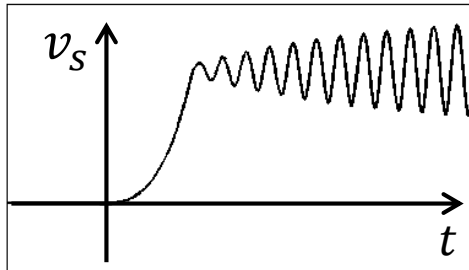
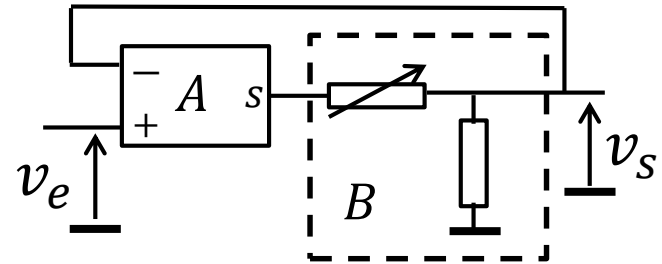
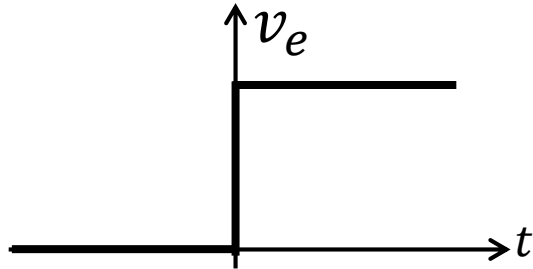
2. Etude d'un amplificateur suiveur

4. Correction proportionnelle

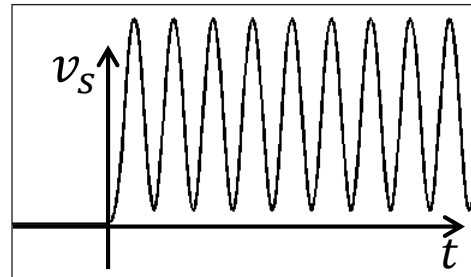
4.3 Etude de la réponse indicielle du système bouclé

4.3.1 Ajustement de la réponse indicielle du système bouclé

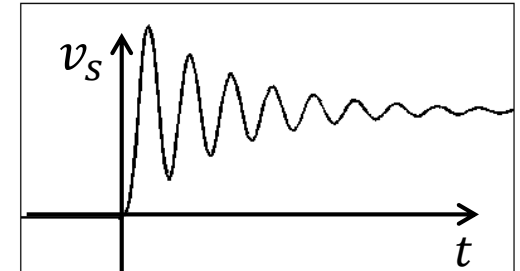
La réponse indicielle est la réponse à un échelon de tension :



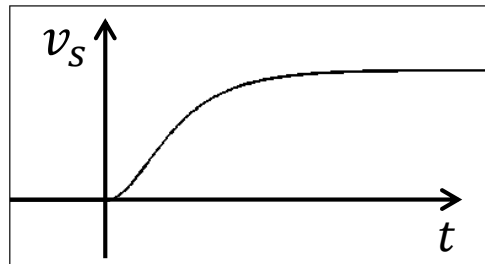
$B=1$, instable



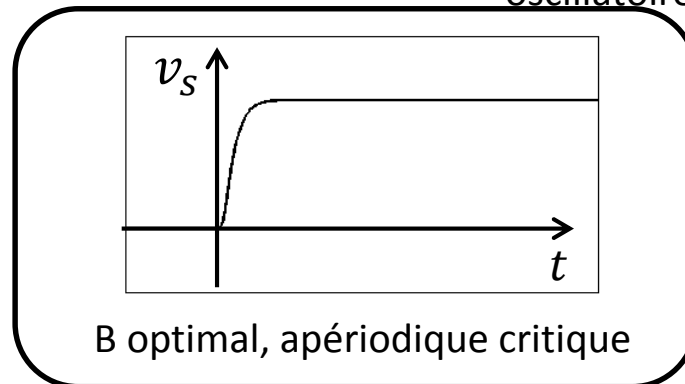
$B=B_{limite}$, sinusoïdal



$B < B_{limite}$, mais trop grand oscillatoire amorti



B trop petit, apériodique



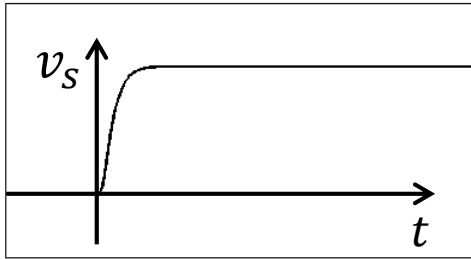
B optimal, apériodique critique

2. Etude d'un amplificateur suiveur

4. Correction proportionnelle

4.3 Etude de la réponse indicielle du système bouclé

4.3.1 Ajustement de la réponse indicielle du système bouclé



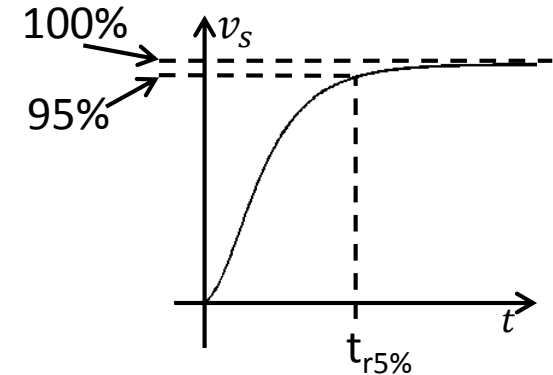
Note :

On se place souvent dans le cas d'un dépassement de 5%...

4.3.2 Temps de réponse à 5% du système bouclé

Ce choix de temps de réponse à 5% est souvent utilisé dans la technologie des systèmes asservis.

Une étude non développée ici indique **qu'au régime critique** : $t_{r5\%} \approx 1/f_2$, où f_2 est la 2^{ème} fréquence de changement de pente du diagramme de Bode en boucle ouverte (passage de -20 dB/dec à -40 dB/dec).



Note :

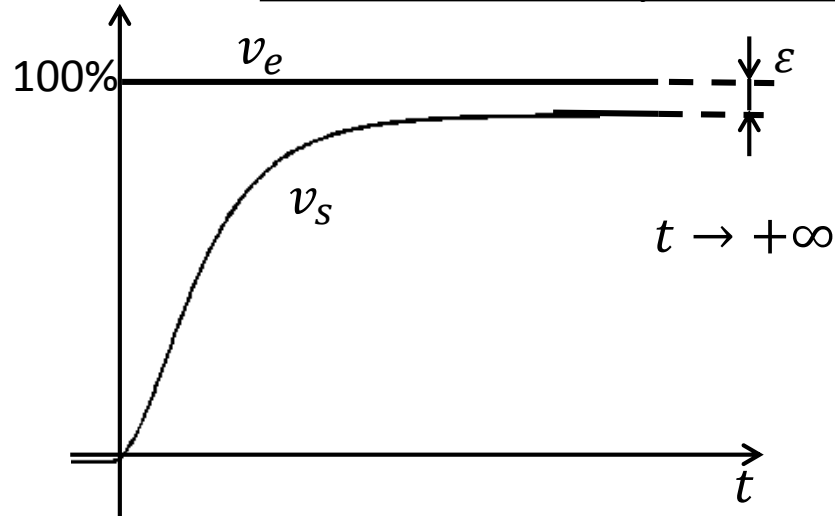
Plus précisément, la correction reportant la fréquence f_3 dans une zone de gain très faible, on peut considérer que le système bouclé est du 2^{ème} ordre, régi par les fréquences f_1 et f_2 . Un calcul un peu lourd permet d'établir que $t_{r5\%} = 1.51/(f_1 + f_2)$. Cependant, cette formule n'étant pas dans les livres, et sa vérification précise n'étant pas nécessaire ici, il est préférable d'en retenir une forme simplifiée, sachant que $f_1 \ll f_2$. Par ailleurs, la formule $t_{r5\%} = 1.51/(f_1 + f_2)$ montre que dans un système du 2^{ème} ordre, c'est la fréquence caractéristique la plus élevée qui impose le temps de réponse.

2. Etude d'un amplificateur suiveur

4. Correction proportionnelle

4.3 Etude de la réponse indicielle du système bouclé

4.3.3 Précision du système bouclé



L'erreur statique est mesurée par l'écart relatif ϵ entre la valeur attendue (ici $v_s = v_e$ pour le suiveur) et la valeur effectivement obtenue lorsque le régime permanent de la réponse indicielle est atteint, c'est-à-dire au bout d'un temps infini.

L'amplification en boucle fermée peut s'écrire:

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{\underline{A} \cdot B}{1 + \underline{A} \cdot B}.$$

Le régime permanent, qui correspond à une solution continue, est obtenu en se plaçant à fréquence nulle sur le diagramme de Bode : $\underline{A} = A_{0\text{ Hz}}$. On en déduit

$$\epsilon = 1 - \frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{1 + A_{0\text{ Hz}} \cdot B}.$$

Ce qui montre que plus B est petit, plus ϵ est grand. Conclusion :

LA STABILITE ET LA PRECISION SONT CONTRADICTOIRES

2. Etude d'un amplificateur suiveur

4. Correction proportionnelle

4.3 Etude de la réponse indicielle du système bouclé

4.3.3 Précision du système bouclé

Note (**FACULTATIF**) :

Quelques informations complémentaires sur la « classe » d'un système asservi...

Il s'agit des propriétés du système à fréquence nulle.

De manière générale, le *gain en boucle* d'un système linéaire peut se mettre sous la forme :

$$\frac{v_s'}{v_e} = \underline{A\beta} = \frac{1}{(j\omega)^n} \frac{a_0 + j\omega a_1 + \dots}{b_0 + j\omega b_{n+1} + \dots} \sim \frac{\text{Cste}}{(j\omega)^n} \text{ quand } \omega \rightarrow 0,$$

l'entier n est appelé « classe » du système.

Le gain à fréquence nulle d'un système de classe 0 est fini, alors que celui d'un système de classe $n > 0$ tend vers l'infini. On en déduit qu'un système de classe 0 a toujours une erreur statique alors que ceux de classe supérieure n'en ont pas.

Exemple :

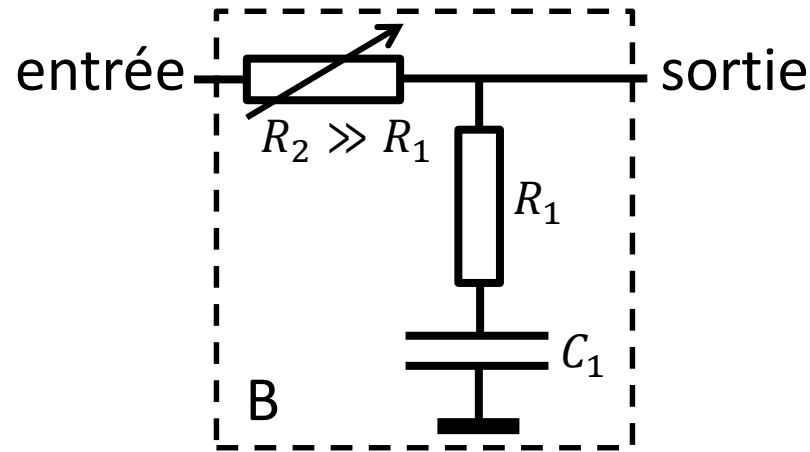
- l'amplificateur étudié ici (de même qu'un moteur asservi en vitesse) est de classe 0 ;
- un moteur asservi en position est de classe 1, son erreur statique est nulle.

2. Etude d'un amplificateur suiveur

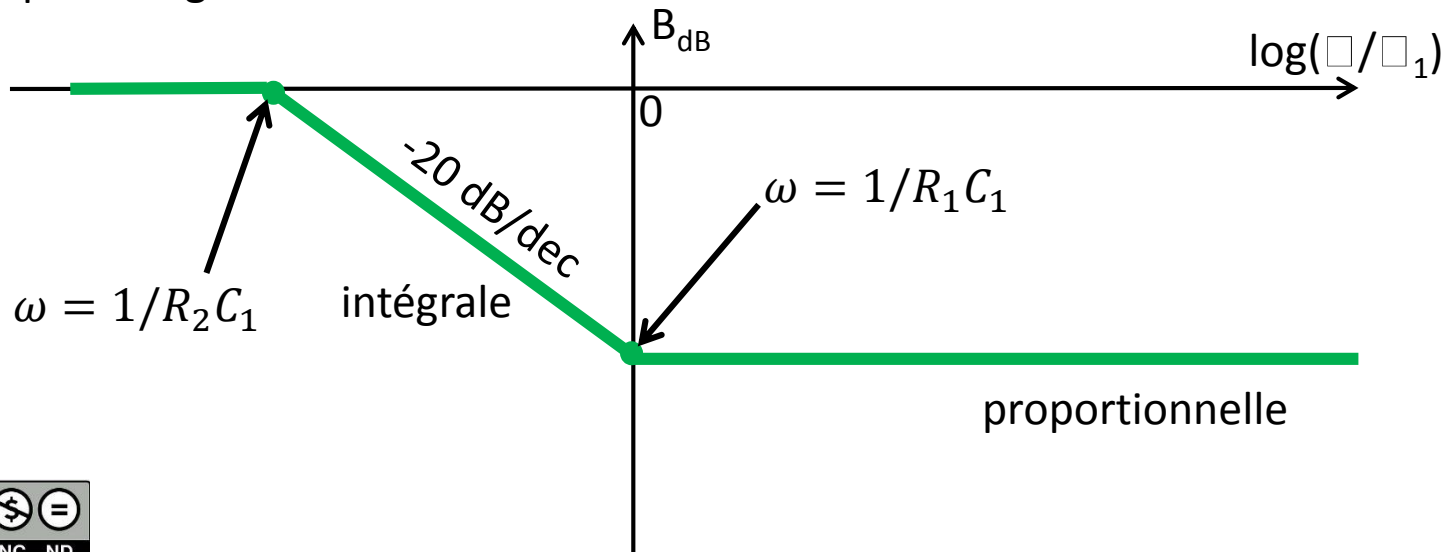
5. Correction proportionnelle et intégrale (P & I)

But : améliorer la précision sans changer la stabilité.

On remplace le correcteur proportionnel par le correcteur suivant :



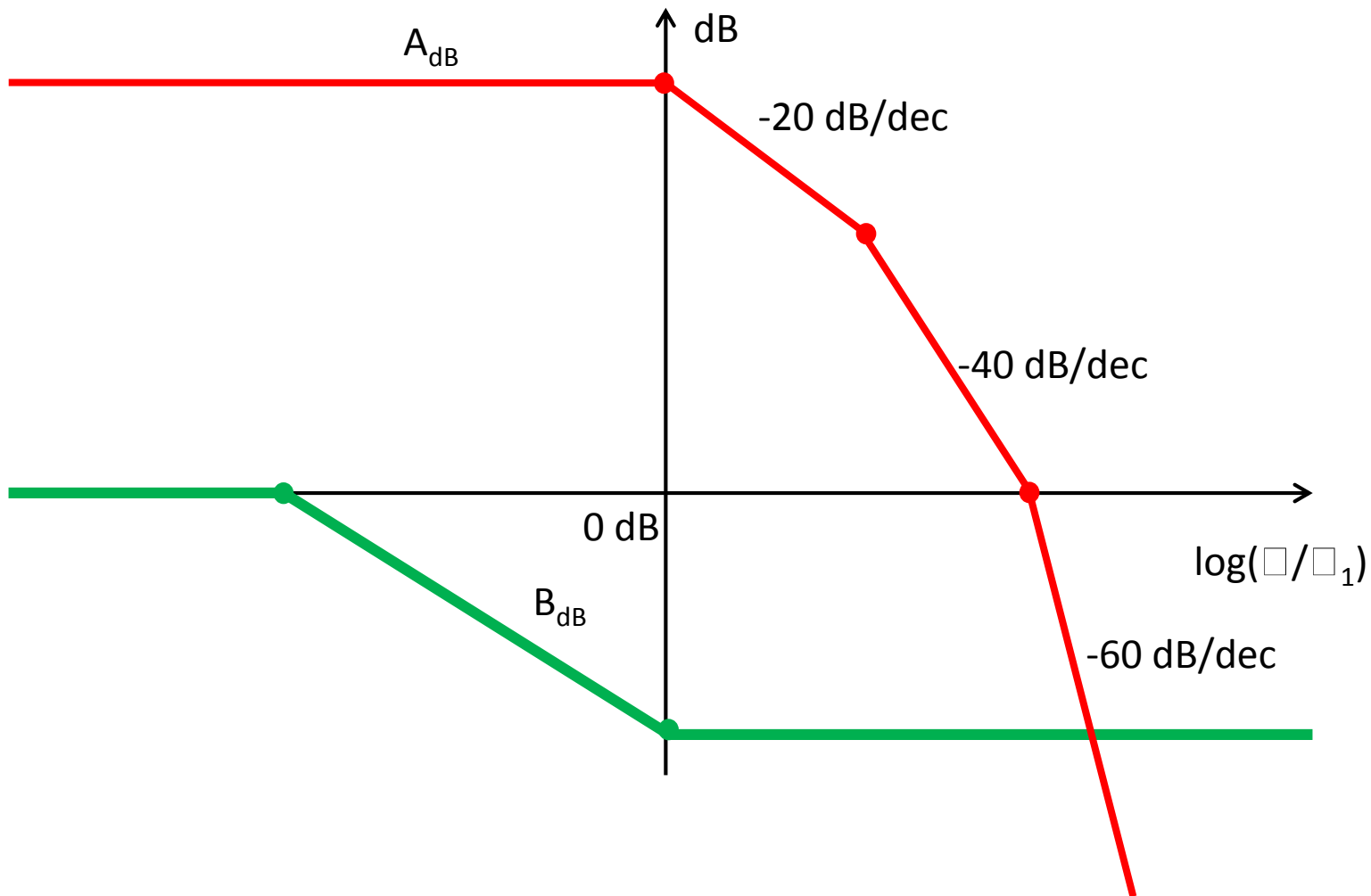
qui a pour diagramme de Bode :



2. Etude d'un amplificateur suiveur

5. Correction proportionnelle et intégrale (P & I)

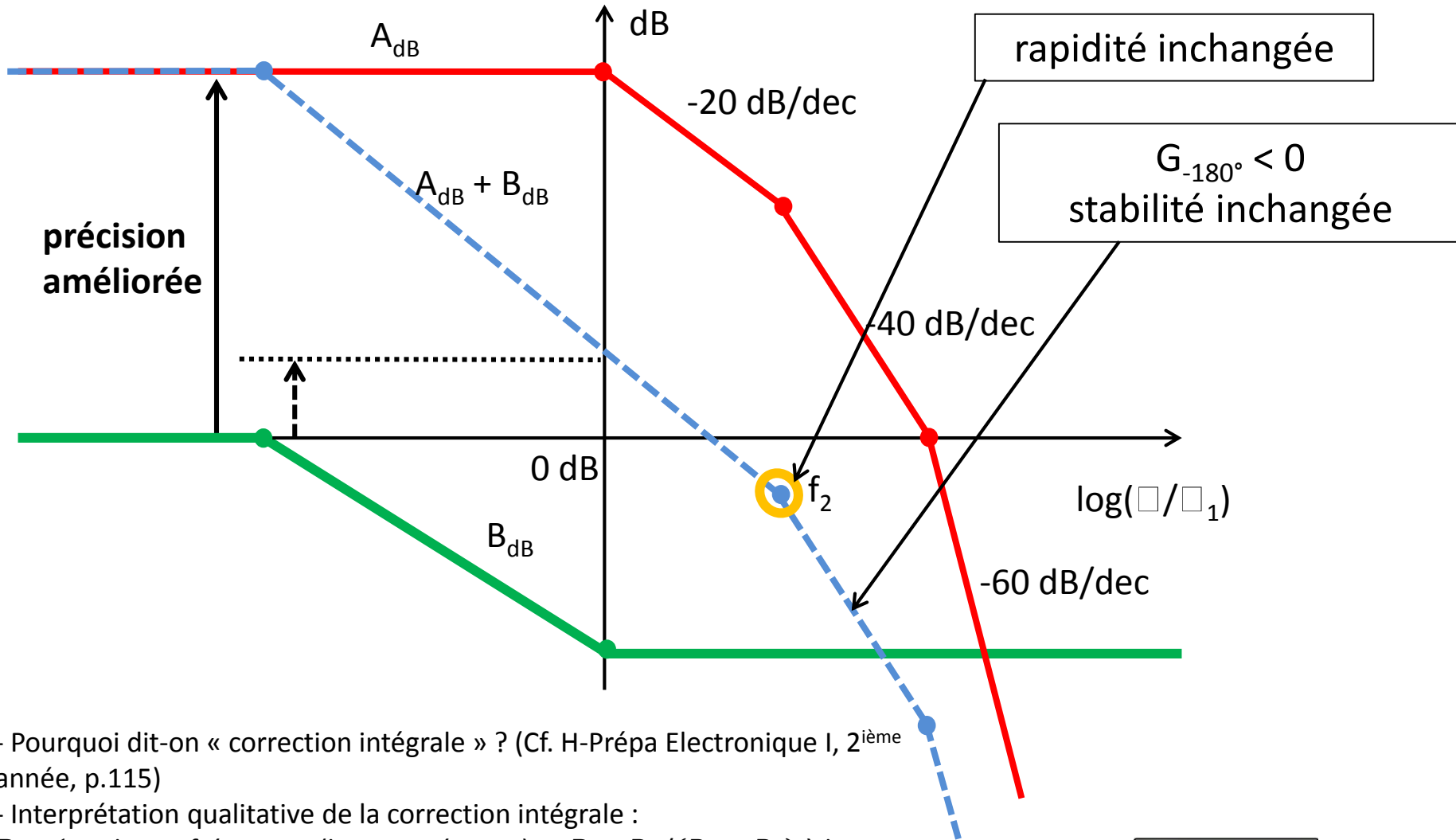
Et voici le résultat de son action sur le gain de boucle :



2. Etude d'un amplificateur suiveur

5. Correction proportionnelle et intégrale (P & I)

Et voici le résultat de son action sur le gain de boucle :



- Pourquoi dit-on « correction intégrale » ? (Cf. H-Prépa Electronique I, 2^{ème} année, p.115)

- Interprétation qualitative de la correction intégrale :

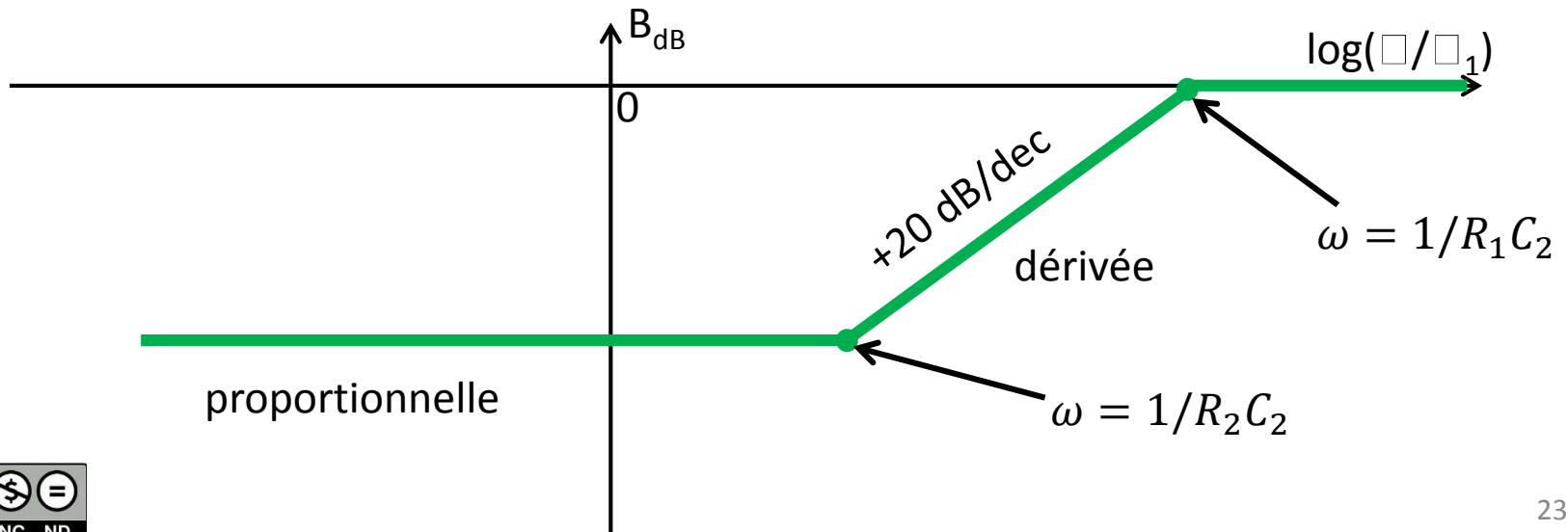
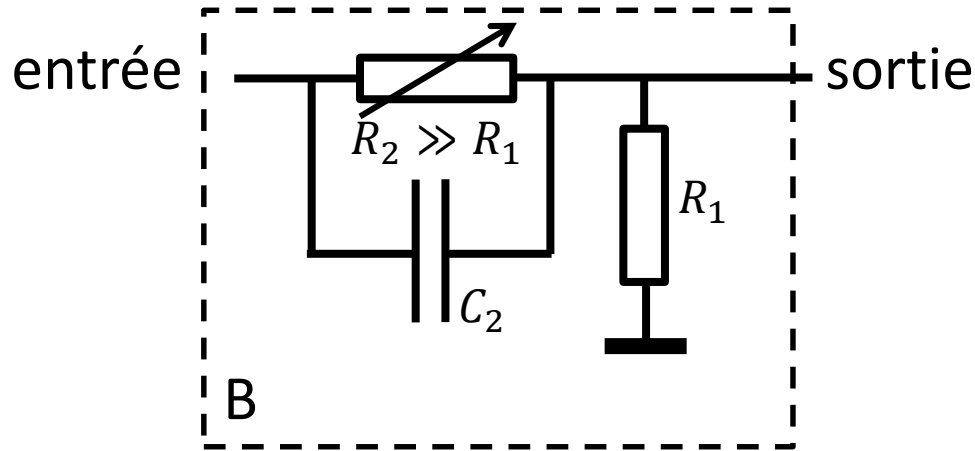
$B \cong 1$ en basse fréquence (bonne précision) et $B \cong R_1 / (R_1 + R_2)$ à la fréquence critique correspondant à -180° (stabilité).

2. Etude d'un amplificateur suiveur

6. Correction proportionnelle et dérivée (P & D)

But : améliorer la rapidité.

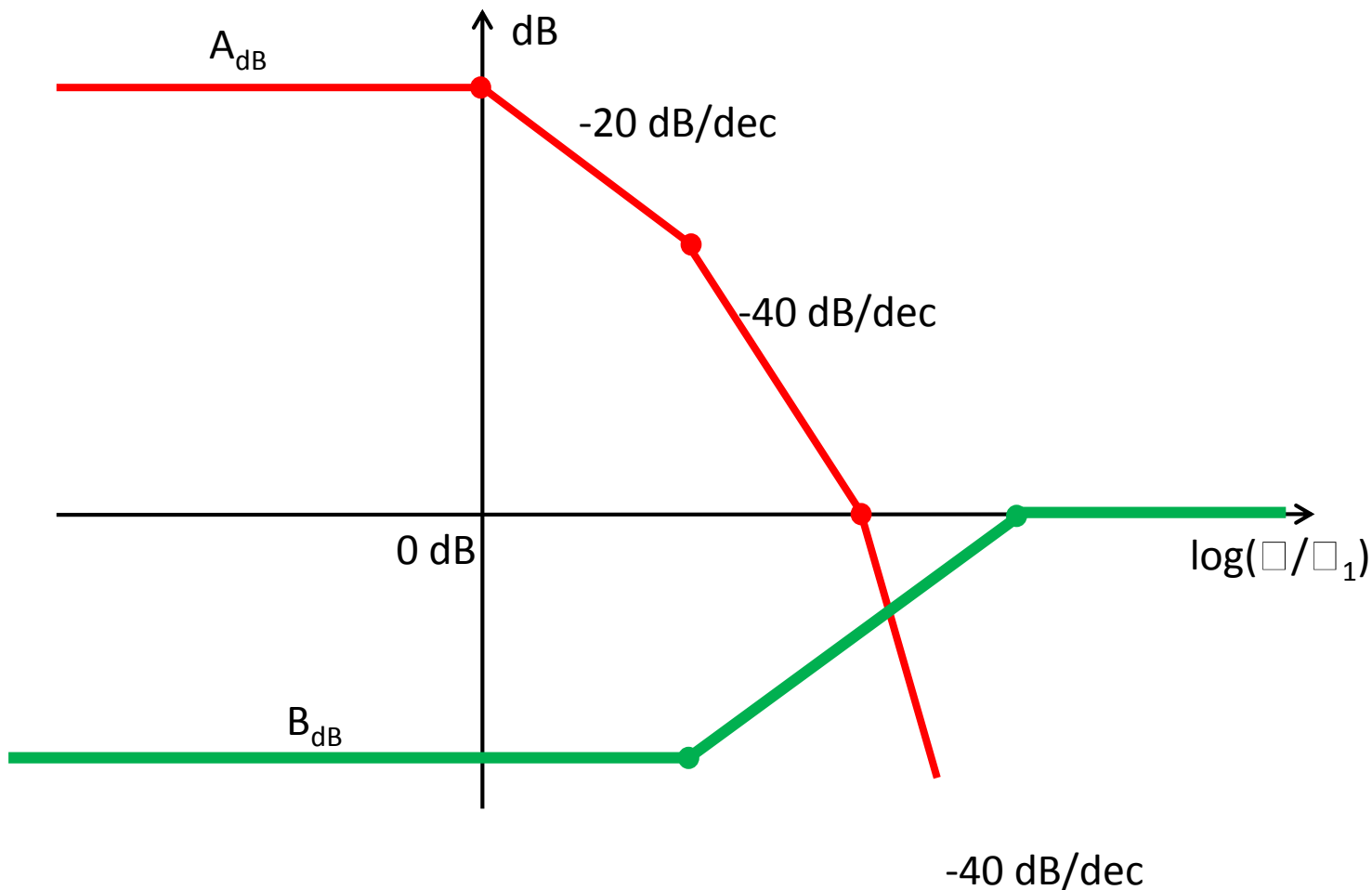
On remplace le correcteur proportionnel par le correcteur suivant :



2. Etude d'un amplificateur suiveur

6. Correction proportionnelle et dérivée (P & D)

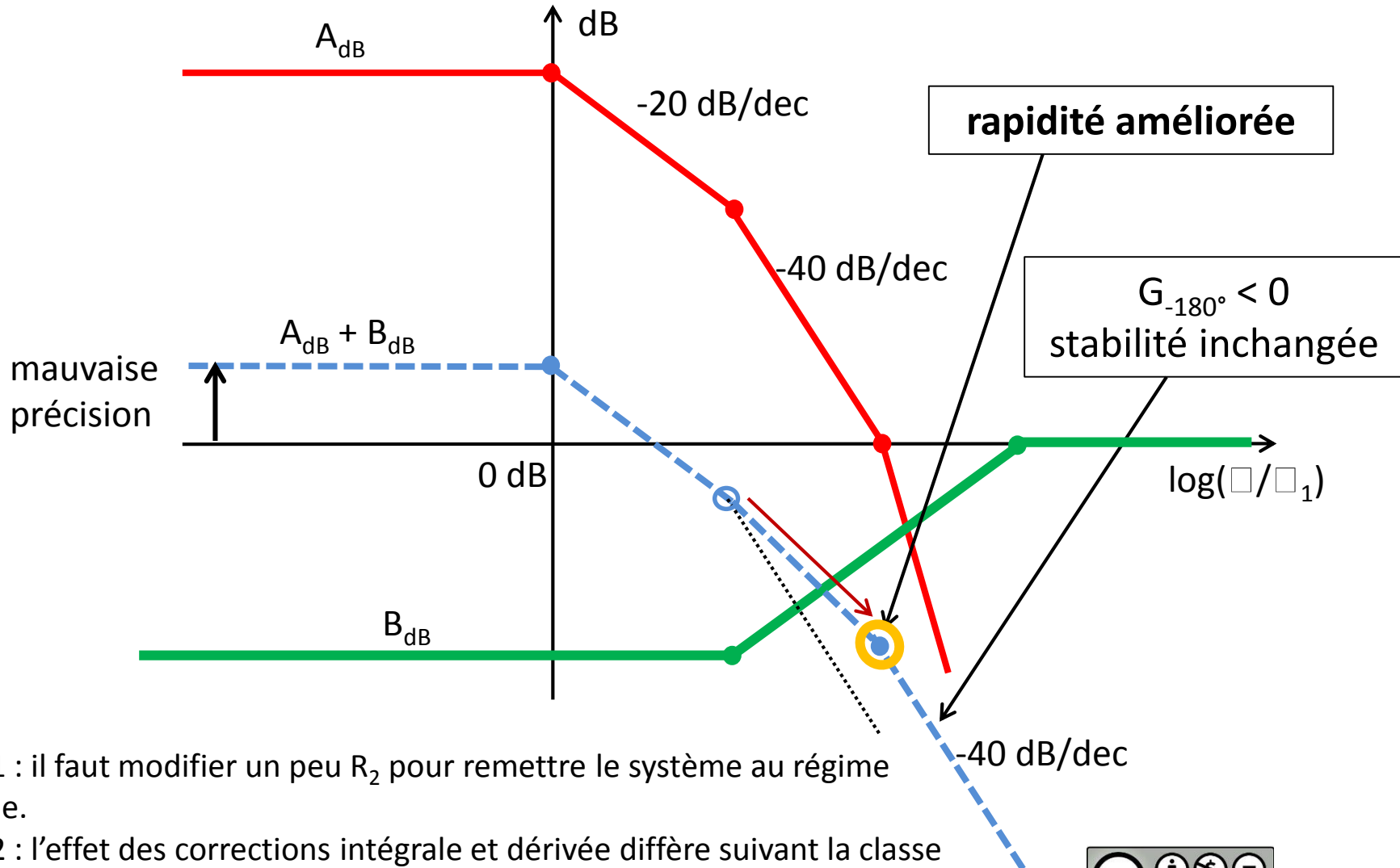
Et voici le résultat de son action sur le gain de boucle :



2. Etude d'un amplificateur suiveur

6. Correction proportionnelle et dérivée (P & D)

Et voici le résultat de son action sur le gain de boucle :



Note 1 : il faut modifier un peu R_2 pour remettre le système au régime critique.

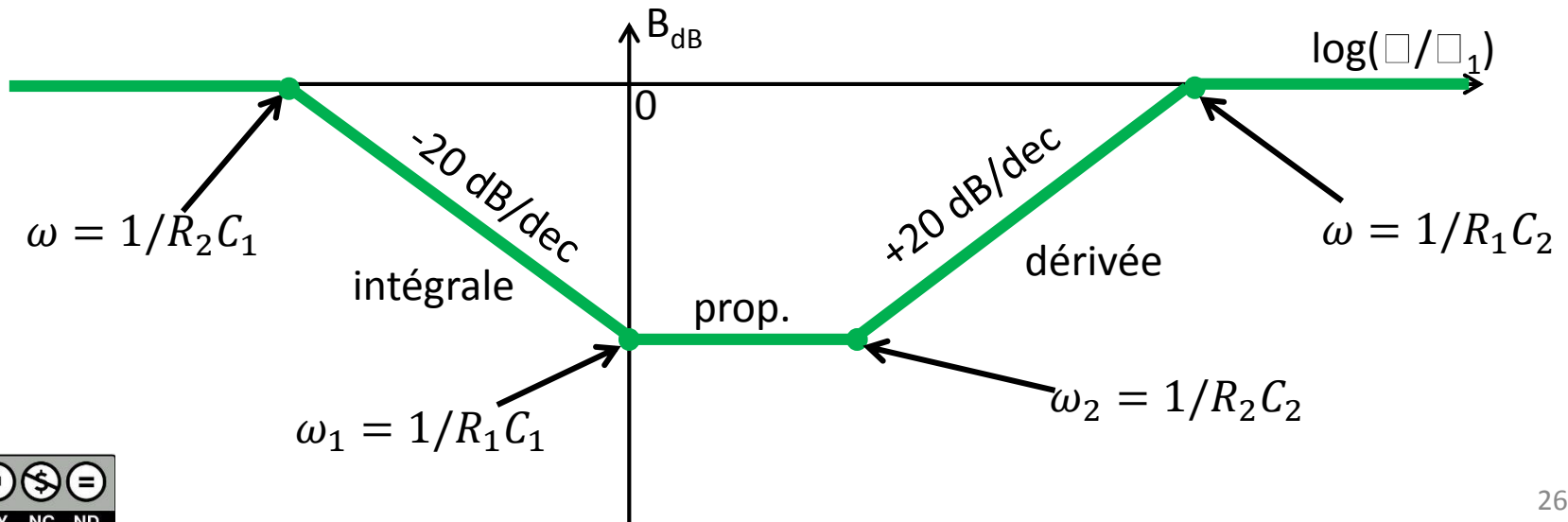
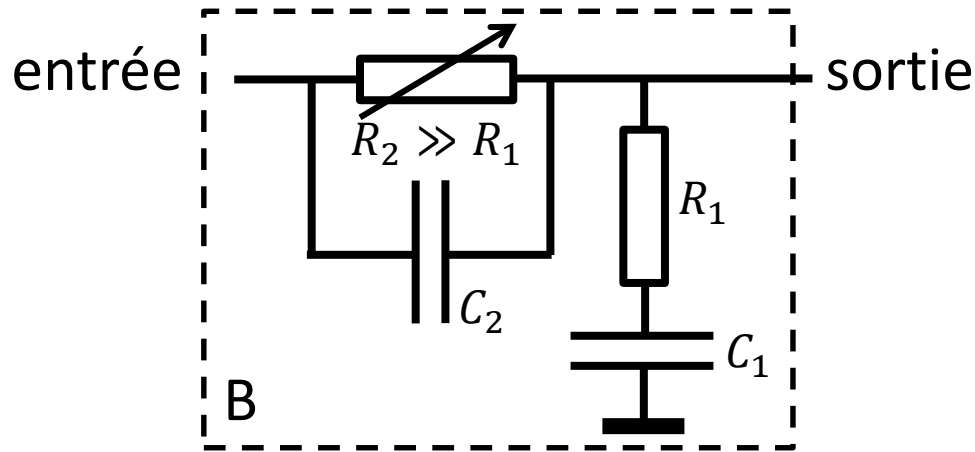
Note 2 : l'effet des corrections intégrale et dérivée diffère suivant la classe du système. Le cas traité ici est spécifique des systèmes de classe 0.

2. Etude d'un amplificateur suiveur

7. Correction proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

But : améliorer la rapidité.

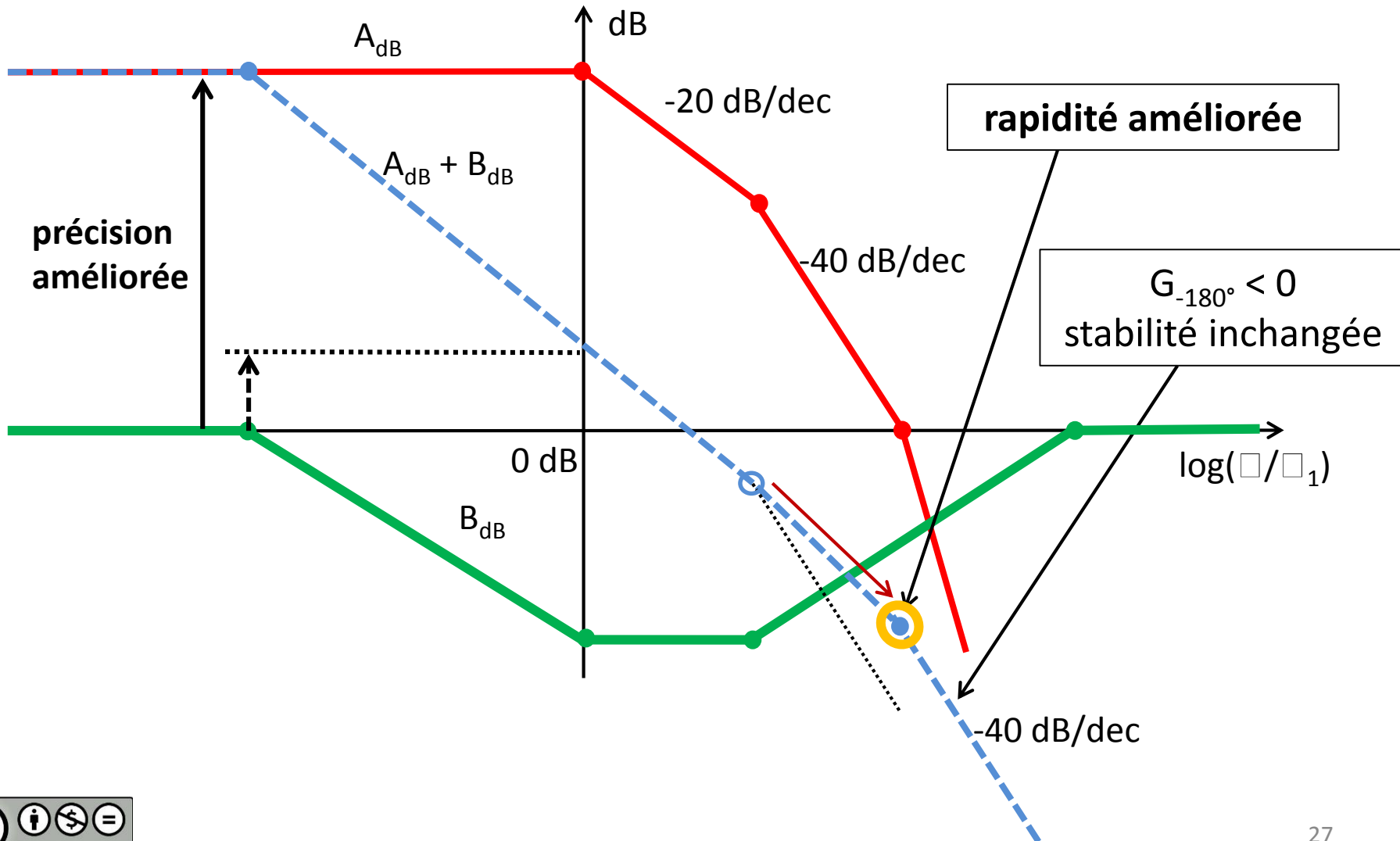
On remplace le correcteur proportionnel par le correcteur suivant :



2. Etude d'un amplificateur suiveur

7. Correction proportionnelle, intégrale et dérivée (PID)

Et voici le résultat de son action sur le gain de boucle :



2. Etude d'un amplificateur suiveur

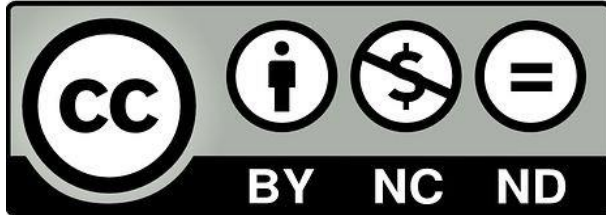
8. En résumé, pour le montage « systèmes bouclés »

- Diagramme de Bode de l'amplificateur en boucle ouverte
- puis tout le reste en boucle fermée :
 - instabilité → correction proportionnelle
 - réponse indicielle : ajustement, précision, temps de réponse, corrections PI puis PID.
- expérience de *régulation* d'éclairage ou de vitesse (la *régulation* a les mêmes propriétés que la précision dans le cadre de l'*asservissement*).

Une régulation peut être réalisée de manière plus basique, suivant le cahier des charges (thermostat d'un four par exemple) : expérience de régulation en température (module « tout-ou-rien »).

L'instabilité d'un système bouclé peut être exploitée pour réaliser des oscillateurs (Cf. suite du cours (Oscillateurs actifs)).

Il existe des asservissements non-linéaires : la boucle à verrouillage de phase par exemple.



This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International” license.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

Acquisition et numérisation de signaux électriques

Centre Interuniversitaire de préparation à l'Agrégation de Physique

Montrouge 2015-2016



1- Base 2 – base 10

Numérisation :

C'est le passage d'une base décimale à une base binaire.

Soit $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^N - 1 > n$. Alors

$$\exists (a_i)^N \in \{0; 1\} \text{ tels que } n = \sum_{i=0}^N a_i \times 2^i .$$

L'ensemble des $\{a_i\}$ forme le chiffre binaire correspondant à n : $a_N a_{N-1} a_{N-2} \dots a_2 a_1 a_0$

Exemple : $N=4$ (codage sur 4 bits)

$$1 = 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \text{ soit le chiffre binaire } 0001$$

$$2 = 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \text{ soit le chiffre binaire } 0010$$

$$3 = 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \text{ soit le chiffre binaire } 0011$$

$$4 = 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 \text{ soit le chiffre binaire } 0100$$

etc...

Seuls les nombres entiers sont ainsi convertis en nombre binaires. Pour un nombre réel (un « flottant »), on se ramène à la donnée de nombres entiers.

1- Base 2 – base 10

Gamme dynamique :

Suivant la valeur de N , un nombre peut ou non être converti sur N bits (i.e. N chiffres binaires). Ainsi, N va définir la valeur maximale du nombre décimale entier que l'on peut coder sur N bits (ou N chiffres binaires).

Le choix du nombre de bits utilisé : compromis entre le nombre de valeurs nécessaires, la mémoire disponible et la vitesse de calcul ou d'acquisition (Cf. FFT et taux d'échantillonnage).

Exemples :

- Codage en 8 bits (1 octet), le chiffre maximal 11111111 vaut $2^8 - 1 = 255$;
- Codage en 16 bits : $2^{16} - 1 = 65535$;
- Echelles de couleurs 8 bits / 16 bits dans la numérisation des images.

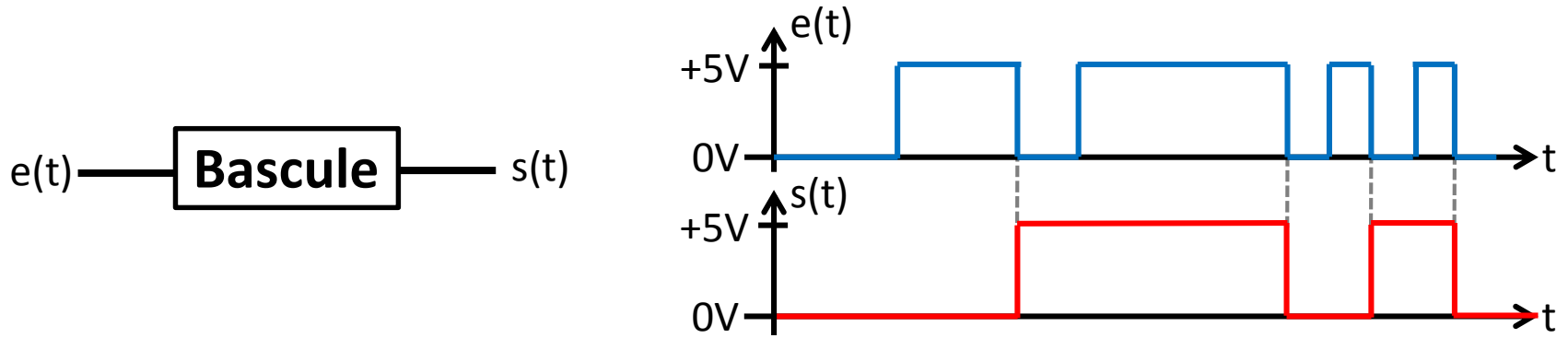
8 bits en RVB = 24 bits couleurs car : 8 bits pour R, 8 bits pour V et 8 bits pour B.
24 bits = 16 777 216 \approx 16 millions de couleurs.

La plupart des moniteurs sont sur ce standard (8 bits RVB).

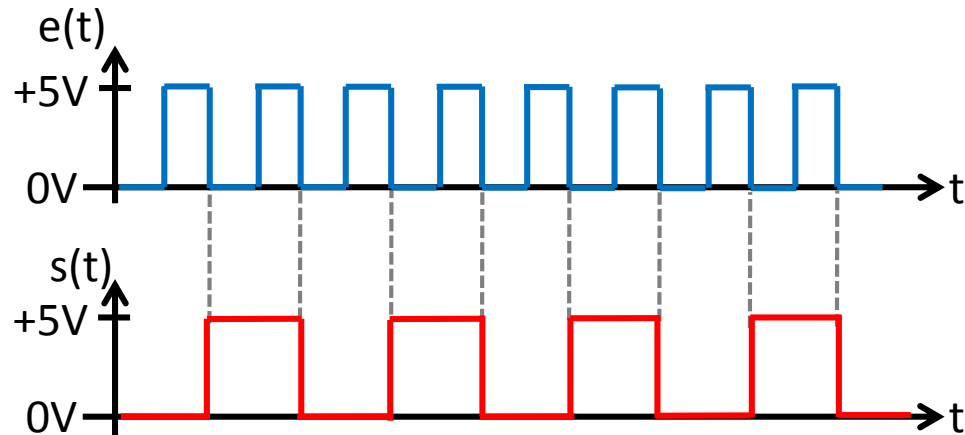
Puissance des logiciels. Ex. : Gimp (logiciel libre) ne code que sur 8 bits alors que Photoshop pour utiliser des codages de 8 ou 16 bits, soit respectivement 16 millions de couleur et 281 475 milliards de couleurs. Il existe également une option 32 bits, d'utilisation marginale (HDR).

2- Compteur numérique

Un compteur est basé sur un élément de base : une bascule (ou « flip-flop »). Il s'agit d'un composant qui bascule d'une valeur logique à une autre (0V ou 5V) à chaque fois qu'une impulsion électrique lui est appliquée en entrée :

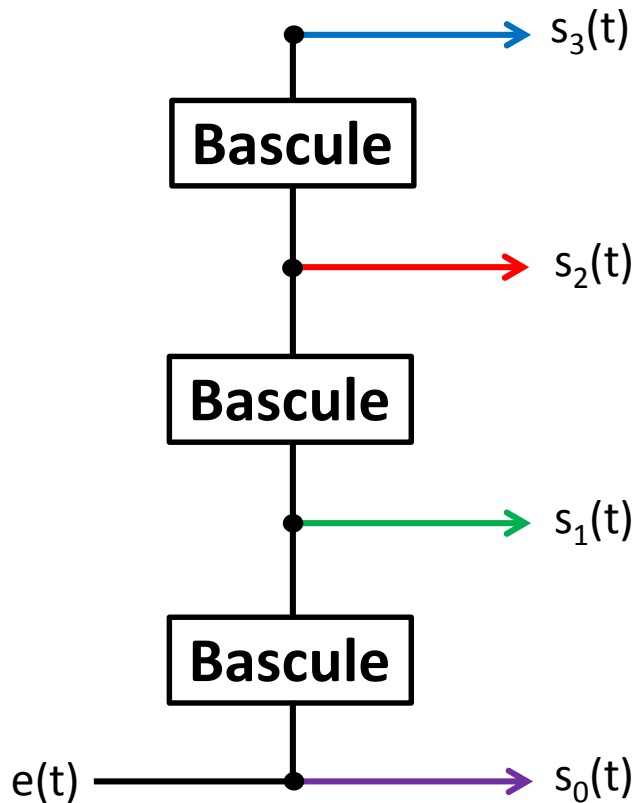


En pratique, si une bascule est alimentée par un signal d'horloge TTL, la sortie sera également un signal d'horloge mais à une fréquence 2 fois plus faible. Il se comporte en diviseur de fréquence :



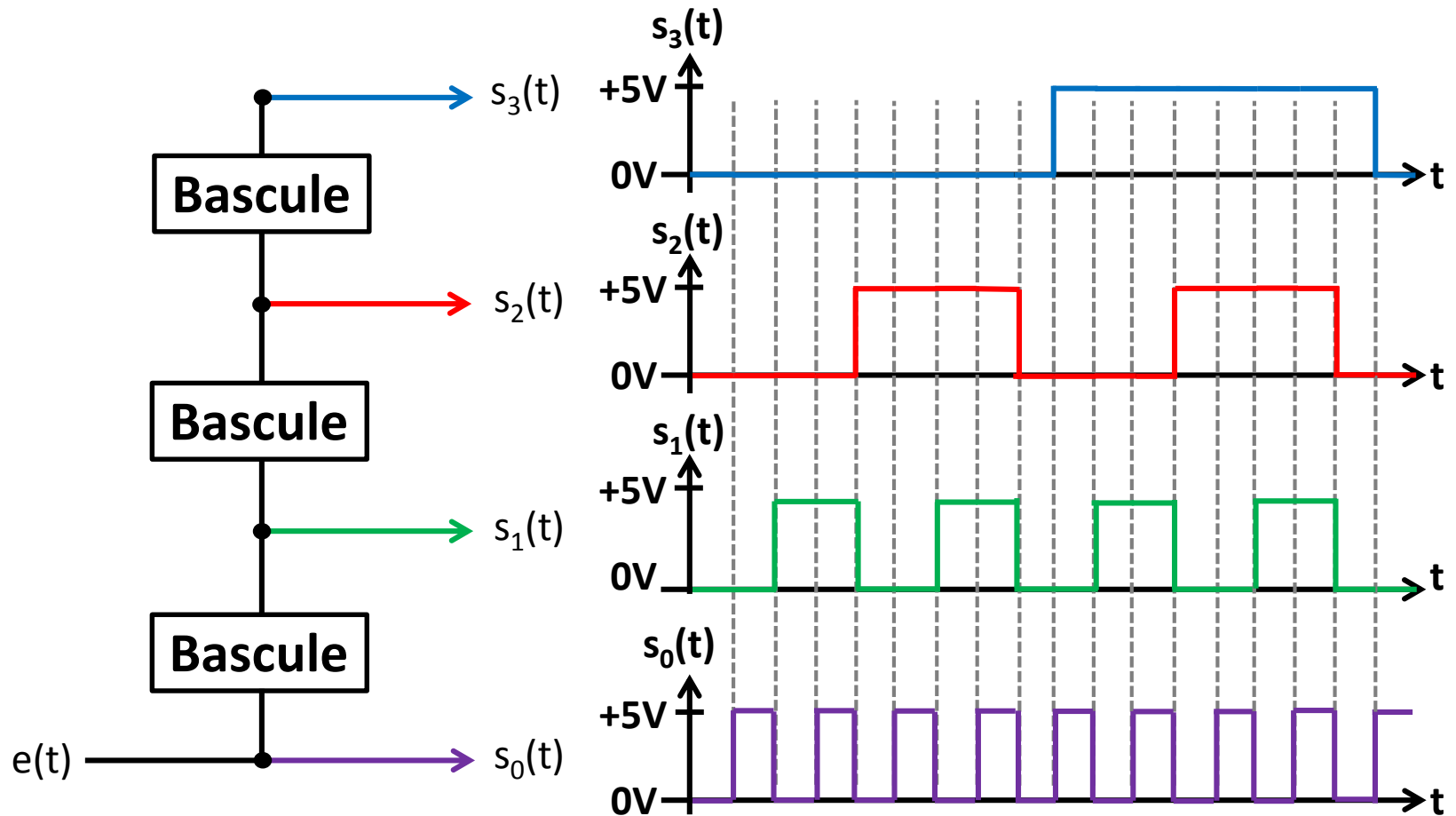
2- Compteur numérique

En utilisant plusieurs bascules en série, on peut ainsi réaliser un compteur binaire



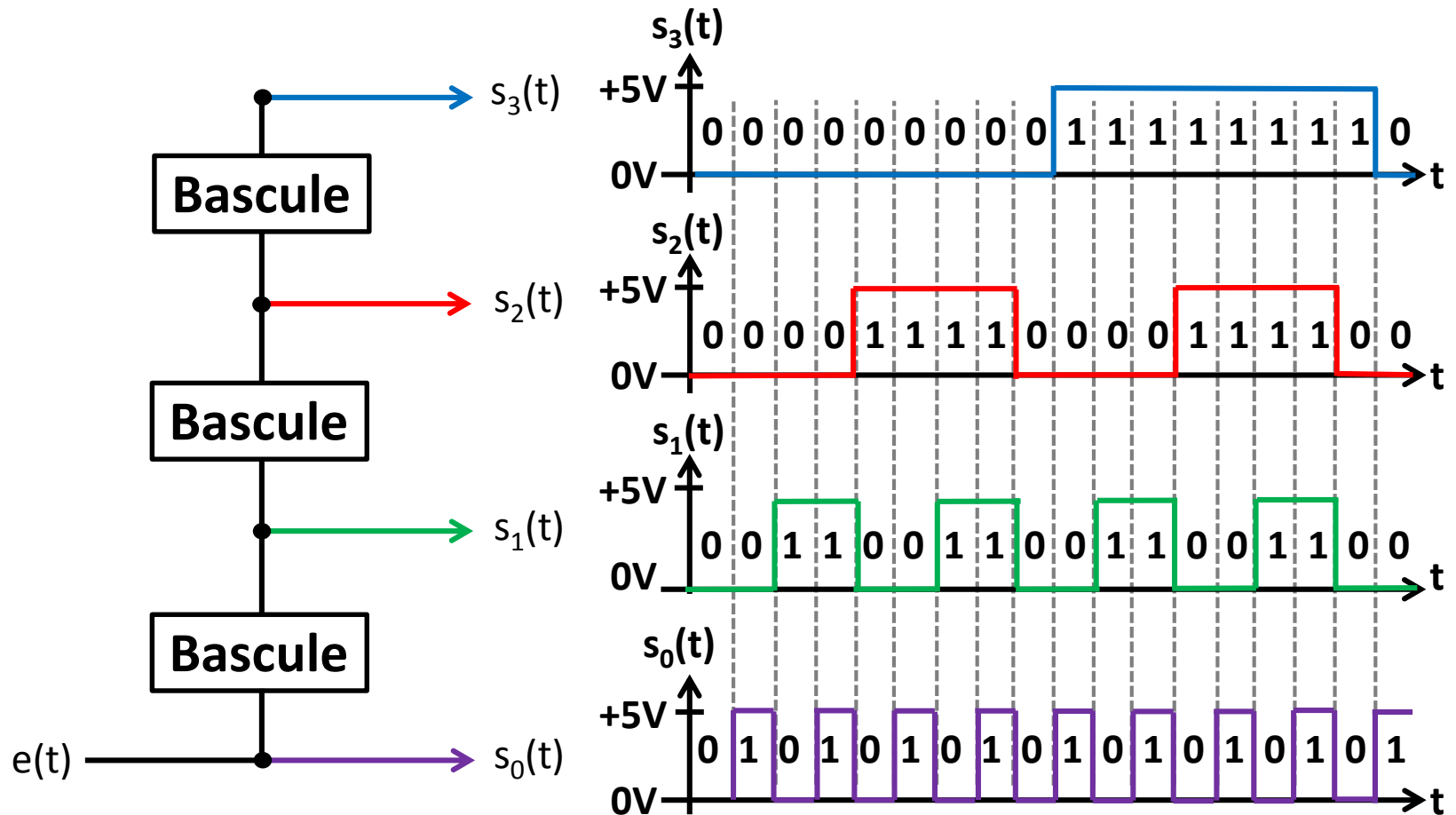
2- Compteur numérique

En utilisant plusieurs bascules en série, on peut ainsi réaliser un compteur binaire



2- Compteur numérique

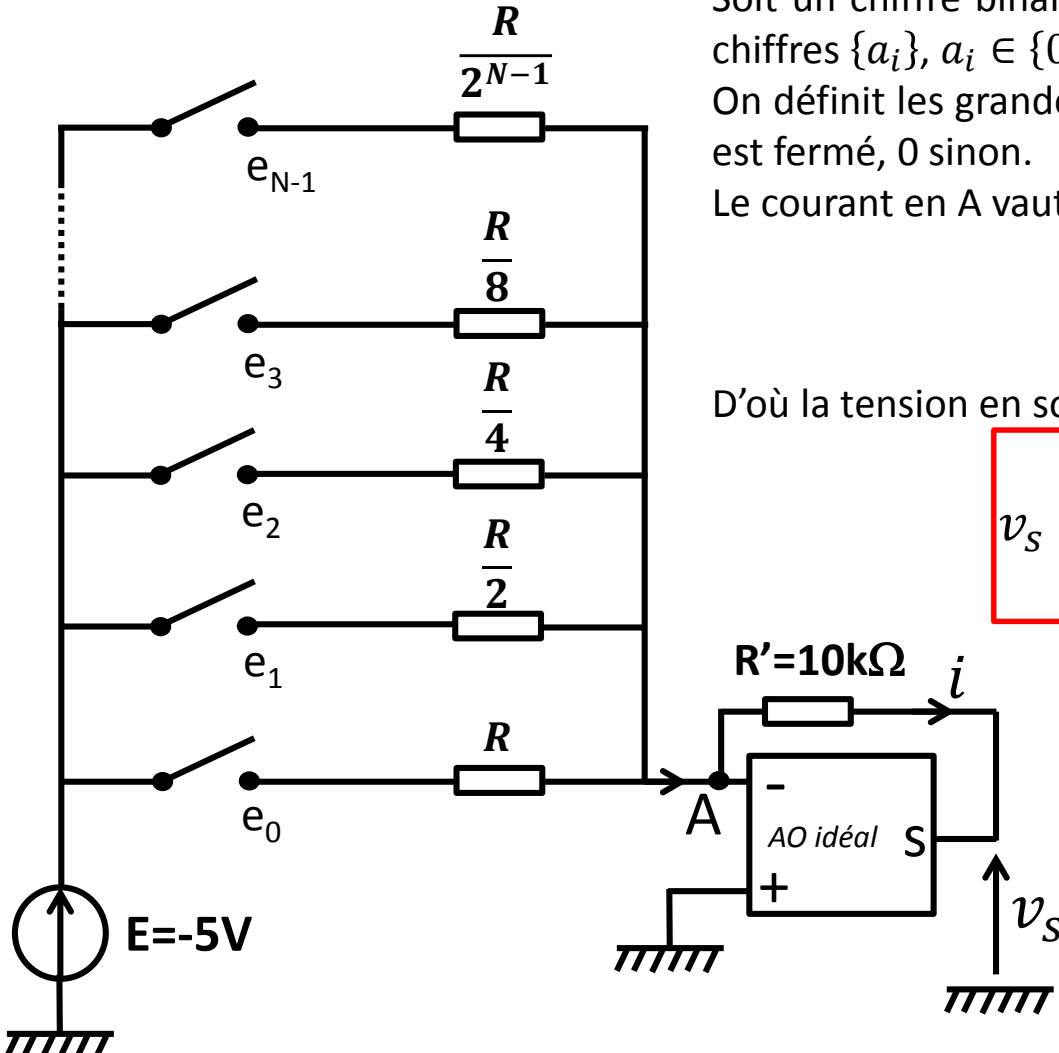
En utilisant plusieurs bascules en série, on peut ainsi réaliser un compteur binaire



Ainsi, au cours du temps, chaque voie peut être considérée comme un bits, dont l'ensemble forme un nombre binaire. Ce nombre augmente de 1 toutes les périodes d'horloge : on obtient un compteur numérique...

3- Le Convertisseur Numérique-Analogique

a) CNA à réseau de pondération en tension



Soit un chiffre binaire quelconque constitué par une série de chiffres $\{a_i\}$, $a_i \in \{0,1\}$.

On définit les grandeurs $\{e_i\}$ telles que $e_i = 1$ si l'interrupteur est fermé, 0 sinon.

Le courant en A vaut (Milleman) :

$$i = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{e_j E}{R_j}$$

D'où la tension en sortie de l'AO

$$v_s = -\frac{ER'}{R} \sum_{j=0}^{N-1} e_j \times 2^j$$

On a donc converti un nombre binaire en une valeur décimale (une tension).

Il y donc bien conversion d'une grandeur binaire en grandeur analogique.

3- Le Convertisseur Numérique-Analogique

a) CNA à réseau de pondération en tension

Remarques :

1- En pratique, on considérera des tensions d'entrée de 5 volts car la plupart des composants logiques fonctionnent avec un codage binaire 0V-5V.

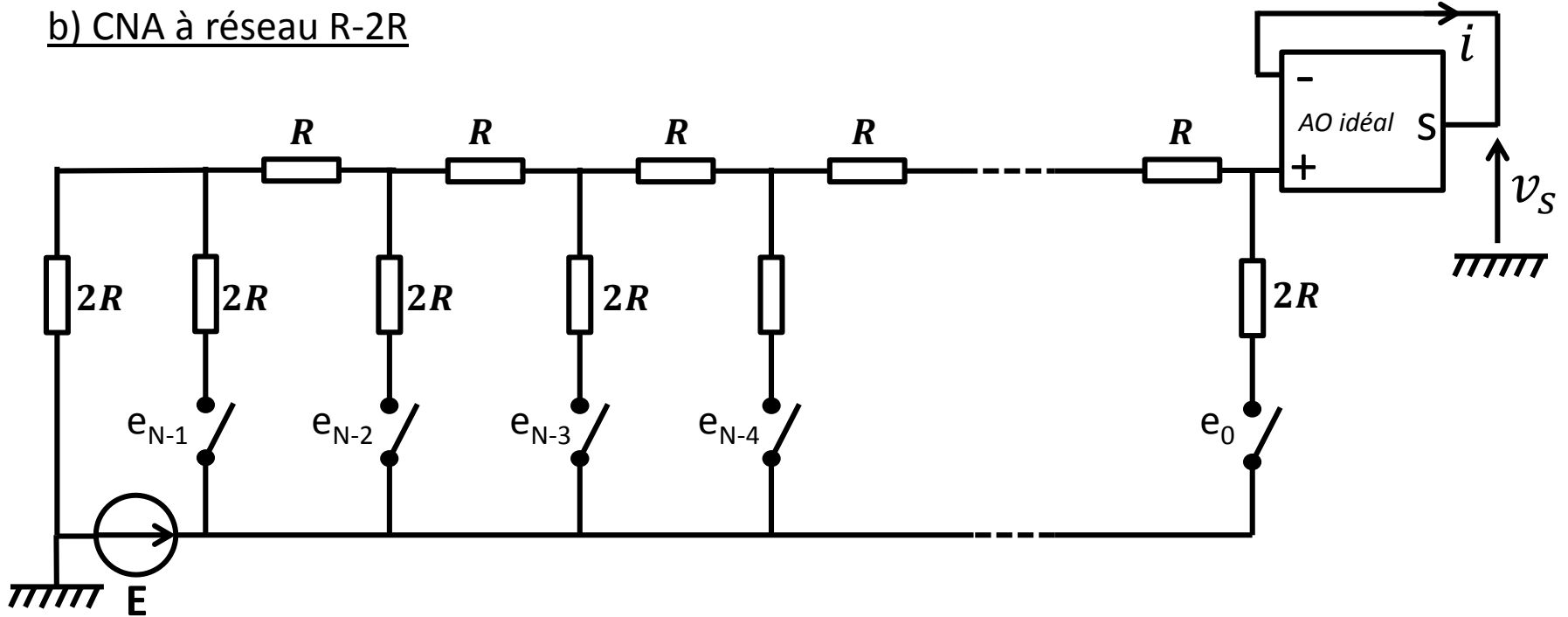
2- Par construction, la tension v_s est comprise entre 0V et $-E \frac{R'}{R} 2^N$. Il y a donc une plage finie de valeur accessible à circuit donné. Or, le nombre de valeur finale est lié au nombre de valeur binaire initiales, soit 2^N pour un codage sur N bits. Par conséquent, la discrétisation des valeurs finales est de $\Delta v_s = \frac{ER'}{R}$.

3- Ce montage est simple, et l'ampli op est utilisé dans un montage simple d'additionneur de courants. Par contre, la valeur des résistances varie fortement. Par exemple, *pour un convertisseur de 10 bits, la valeur des résistances varie d'un facteur 1000... et l'impédance du réseau de résistances également !*

Ainsi ce montage bien que simple à l'inconvénient d'avoir une impédance d'entrée qui varie beaucoup. On lui préfère en pratique des montages dit en « R-2R ».

3- Le Convertisseur Numérique-Analogique

b) CNA à réseau R-2R



Avantage de ce réseau : son impédance est constante et égale à R tout au long du réseau.

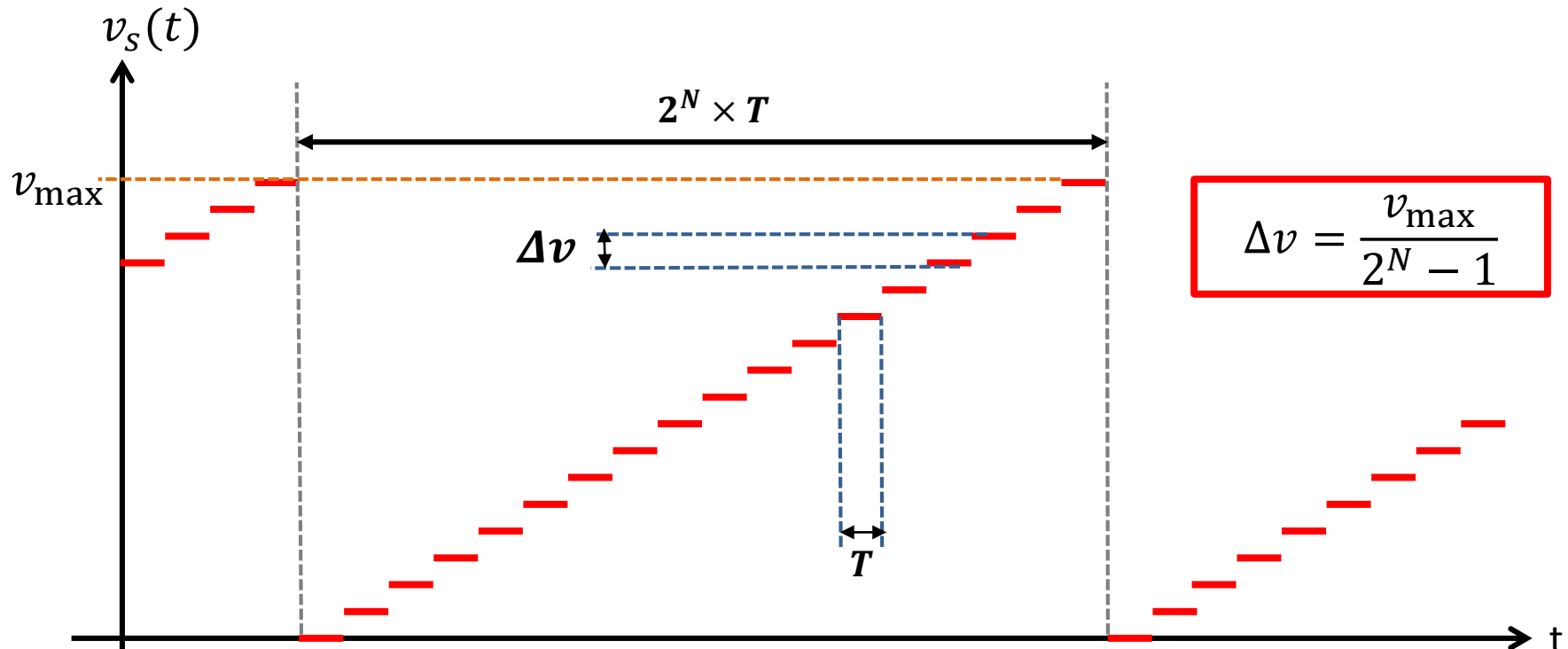
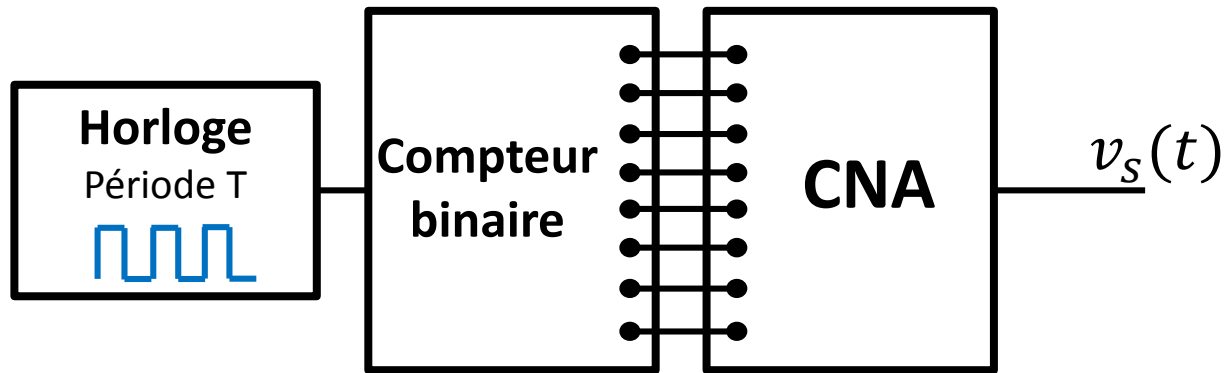
c) Autres CNA

Il existe bien d'autres technologies :

- CNA par pondération de courant (à base de transistors) ;
- CNA par pondération de tension à courants constants ;
- CNA par pondération de capacités ;
- CNA par pondération de capacités en réseau C-2C ;
- etc...

4- Le Convertisseur Analogique-Numérique

a) Principe : convertisseur simple rampe



4- Le Convertisseur Analogique-Numérique

a) Principe : convertisseur simple rampe

L'horloge alimente le compteur binaire engendrant un comptage binaire à la fréquence $1/T$ de l'horloge. Le chiffre binaire est ensuite converti en tension analogique par un CNA. On obtient en sortie une rampe de tension numérique de 0 à V_{\max} de durée $2^N T$, où N est le nombre de bits du convertisseur et de l'horloge, et V_{\max} est **intrinsèque au CNA** (et donc **réglable**). Le pas de discrétisation ΔV de la rampe générée est lié aux paramètres du CNA selon

$$\Delta v = \frac{v_{\max}}{2^N - 1} \approx \frac{v_{\max}}{2^N}.$$

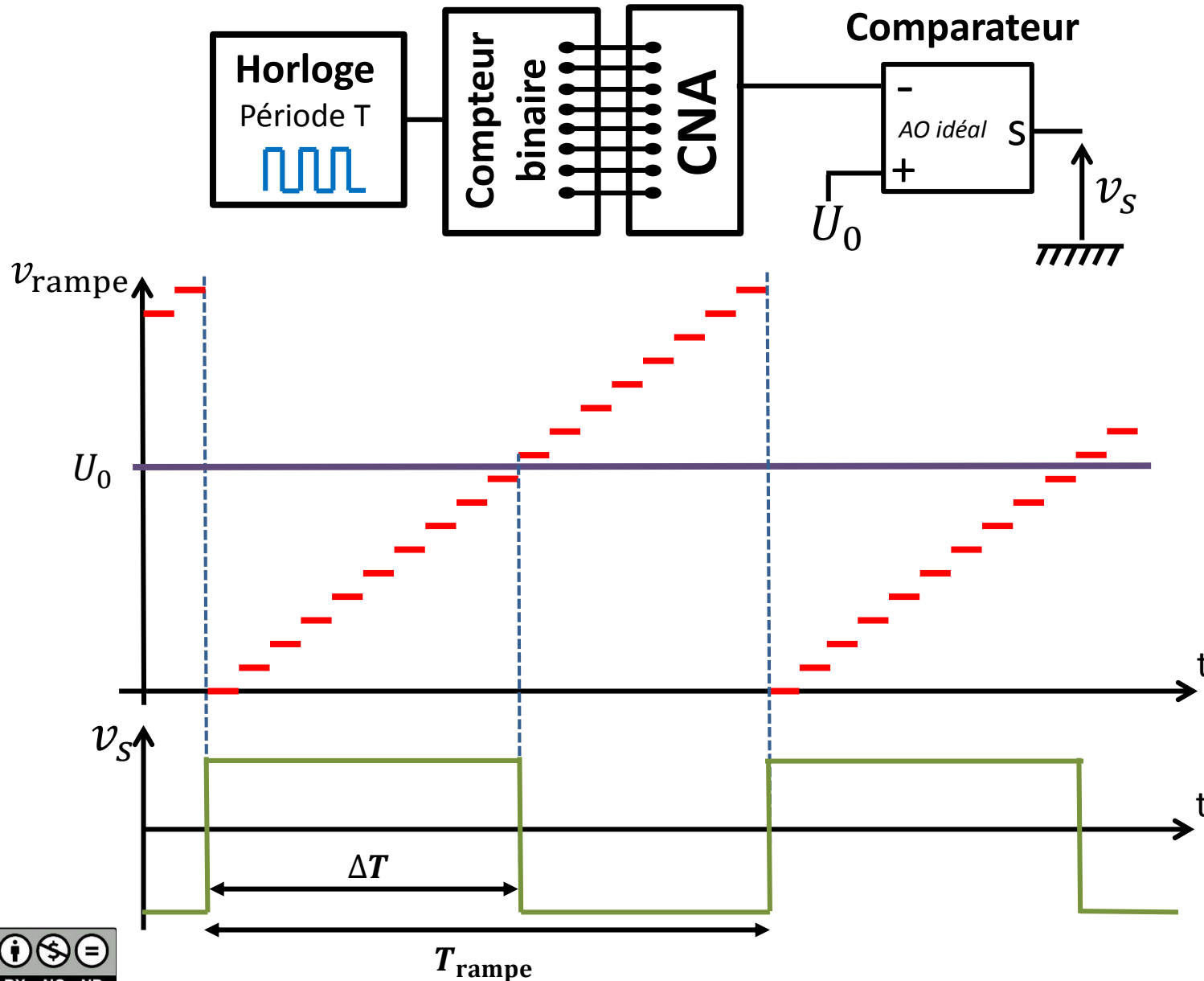
La durée de la rampe est liée à la fréquence de l'horloge et le nombre de bits

$$T_{\text{rampe}} = 2^N \times T_{\text{horloge}}.$$

Le principe de base du convertisseur Analogique Numérique simple rampe consiste à utiliser une rampe de tension et de comparer cette tension à la tension que l'on veut mesurer et convertir en valeur numérique. Si ***on note U_0 la valeur de la tension à mesurer***, le principe est schématisé ainsi

4- Le Convertisseur Analogique-Numérique

a) Principe : convertisseur simple rampe



4- Le Convertisseur Analogique-Numérique

Le principe réside dans la **conversion TEMPS-TENSION** : la mesure de ΔT permet de remonter à U_0 par une simple règle de 3.

Quelques considérations techniques :

1- la résolution en tension de la mesure est due à la discrétisation de la rampe. La valeur du basculement est résolue à $\Delta V = V_{\max}/2^N$ près.

Conséquences :

1. $\Delta V = V_{\max}/2^N$ → plus le nombre de bits est important, meilleure est la résolution en tension ;
2. $\Delta V = V_{\max}/2^N$ → V_{\max} définit la tension maximale mesurable par le dispositif. En pratique, cette valeur est fixée par le CNA, et donc contrôlable. A nombre de bits fixe, elle va également fixer la résolution en tension. En pratique, elle correspond **au calibre** de l'appareil. Ainsi, **il est important de choisir convenablement le calibre pour bénéficier de la meilleure résolution en tension.**
3. Le nombre de bits et la fréquence d'horloge vont fixer la vitesse de conversion Analogique-Numérique. Ainsi, la fréquence d'échantillonnage maximale va dépendre de la qualité du CAN de l'appareil.

4- Le Convertisseur Analogique-Numérique

4. Plus la résolution est importante via le nombre de bits N , plus il faut de temps pour réaliser la rampe (pour une fréquence d'horloge donnée). Ainsi, PRECISION de mesure et RAPIDITE de mesure sont contradictoires. Il existe ainsi sur les multimètres modernes un mode FAST, MEDIUM ou SLOW pour pouvoir faire une mesure rapide moins précise, ou « augmenter le nombre de bits d'acquisition » (en pratique plus subtile que changer le nombre de bits) pour une mesure précise mais lente.
5. INCERTITUDE de CALIBRE et INCERTITUDE PROPORTIONNELLE.

La plupart des multimètres donnent une incertitude de lecture comme une valeur constante uniquement dépendante du calibre et une proportionnelle à la valeur mesurée. On propose ici une **interprétation simpliste**.

- si la pente de la rampe de tension α est mal calibrée (erreur de l'horloge ou de V_{\max}), alors le temps mesuré ΔT est affecté d'une erreur : $\delta(\Delta T)/\Delta T = \delta\alpha/\alpha$. Or, $V_{\text{mes}} \propto \Delta T$. Donc l'erreur commise sur V est proportionnelle à la valeur mesurée.

- si le comparateur a un défaut (ex. : offset de l'AO, mal compensé), la mesure sera affectée d'un décalage constant, indépendant de la valeur mesurée. Donc l'erreur commise sur V est indépendante de la valeur mesurée.

Remarque : Seul le principe de base du CAN a été présenté ; les CAN « réels » sont bien plus complexes afin d'augmenter les performances (rapidité, précision de la mesure en temps). Un modèle plus élaboré est présenté dans le Duffait (CAN double rampe).



This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International” license.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

Transformée de Fourier Rapide

Centre Interuniversitaire de préparation à
l'Agrégation de Physique

Montrouge 2015-2016



kenneth.maussang@ens.fr

Transformée de Fourier et FFT

Notion de spectre :

Soit un signal $s(t)$ dépendant du temps. On définit sa transformée de Fourier $\hat{s}(f)$ selon

$$\hat{s}(f) = \mathcal{F}(s(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2i\pi ft} dt,$$

et sa transformée inverse

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{s}(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{s}(f)e^{2i\pi ft} df.$$

Rq1 : Dans le cas d'un circuit linéaire, le principe de superposition permet de caractériser complètement sa réponse en étudiant la réponse harmonique. D'où l'importance de l'étude de la fonction de transfert dans l'espace réciproque.

Rq2 : Transformée de Fourier et produit de convolution

$$[s * h](t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u - t) \cdot h(u) du,$$

$$\mathcal{F}([s * h]) = \mathcal{F}(s) \cdot \mathcal{F}(h) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(s \cdot h) = [\mathcal{F}(s) * \mathcal{F}(h)]$$

Transformée de Fourier et FFT

Numérisation et transformée de Fourier discrète :

Soit un signal $s(t)$, échantillonné par un instrument (oscilloscope, carte d'acquisition,...) avec un taux d'échantillonnage $1/\delta t_e$. Le signal obtenu est alors de la forme

$$S_n = s(t_0 + n\delta t_e), \quad t_0 \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

On définit la transformée de Fourier discrète selon

$$\tilde{S}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} S_n \cdot e^{-2i\pi k \frac{n}{N}},$$

où N est le nombre de points échantillonnés. Alors que la TF est une décomposition sur la base des fonctions exponentielles complexes de norme 1, la TF discrète est une décomposition sur la base des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité...

La transformée de Fourier inverse est définie selon

$$S_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{S}(k) \cdot e^{2i\pi k \frac{n}{N}}.$$

Soit la fréquence d'échantillonnage $F_e = 1/\delta t_e$.

On peut montrer que :

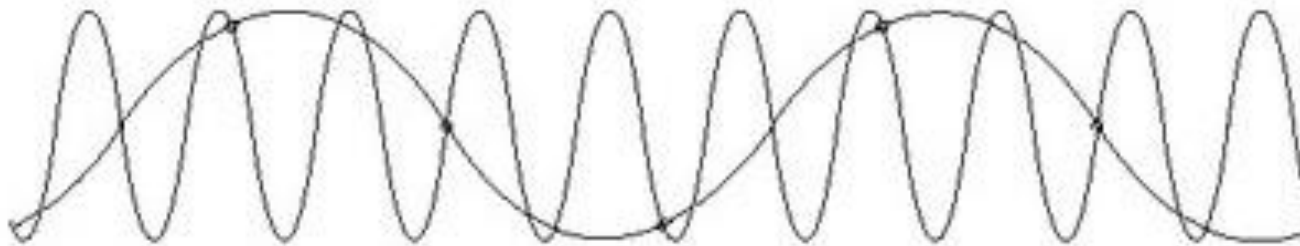
- la **résolution en fréquence** est de $\delta f = F_e/N$;
- la **fréquence maximale du spectre accessible** est $F_e/2$ (critère de Shannon).

Transformée de Fourier et FFT

Illustration du critère de Shannon :



Adequately sampled signal

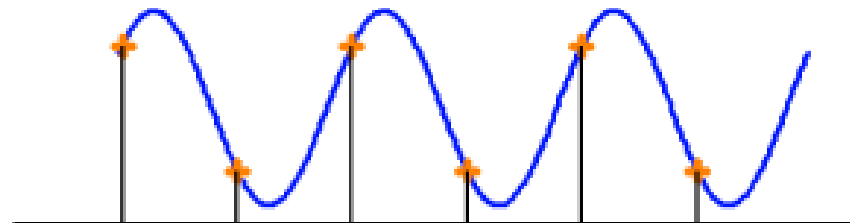


Aliased signal due to undersampling

ALIASING

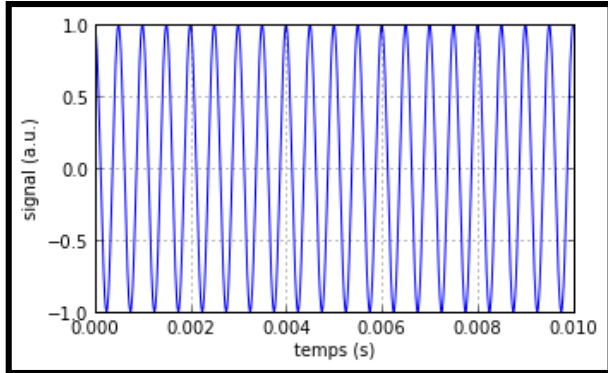
(repliement de spectre)

Echantillonnage de Shannon

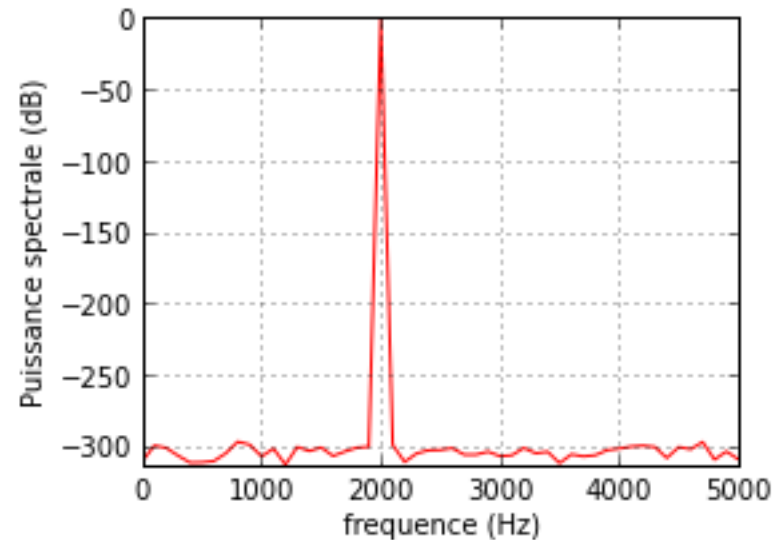
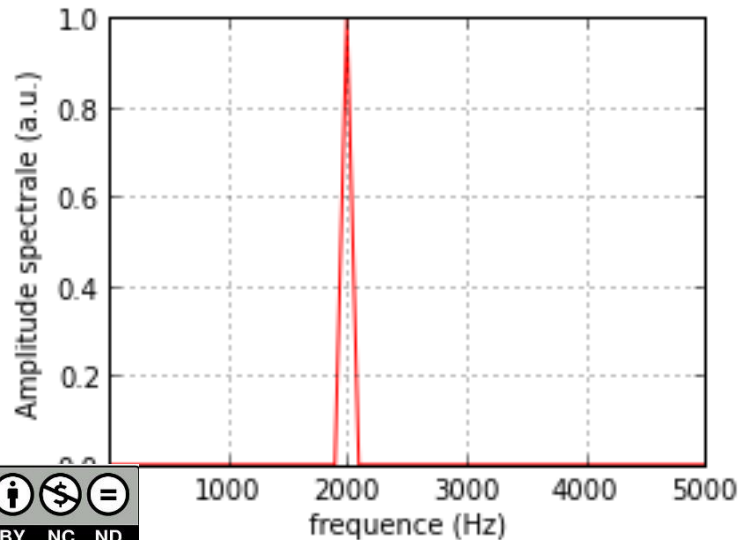
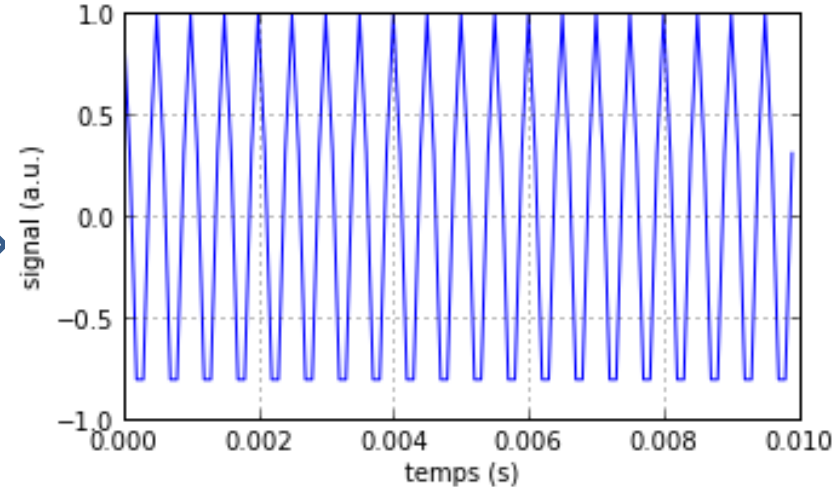


Transformée de Fourier et FFT

Exemple : signal de $f=2\text{kHz}$, échantillonnage de $f_e=10\text{kHz}$ pendant $T=10\text{ms}$.

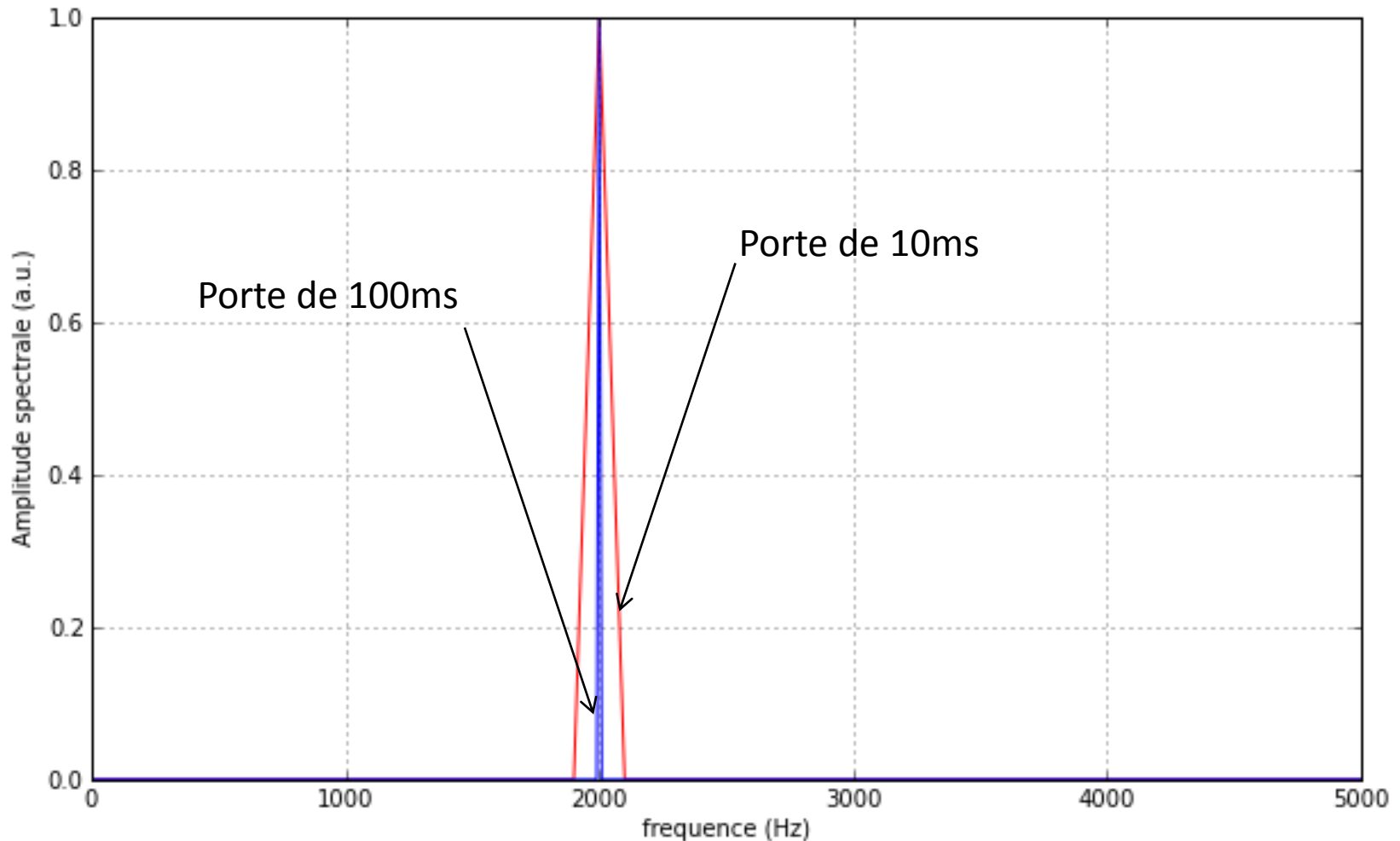


échantillonnage



Transformée de Fourier et FFT

Influence de la durée d'acquisition : acquisition de $T=100\text{ms}$ et $T=10\text{ms}$
signal à $f=2\text{kHz}$, échantillonnage à $f_e=10\text{kHz}$



Transformée de Fourier et FFT

Cas de la FFT sur un oscilloscope.

Le nombre de points échantillonné est fixé par le constructeur. Le taux d'échantillonnage f_e va donc être fixé par la base de temps utilisé et donc la durée d'acquisition et la fréquence d'échantillonnage sont liées selon

$$f_e = \frac{N}{T} = \frac{N}{(x \text{ secondes/divisions}) \times (\text{Nombre de divisions sur l'écran})}$$

le nombre de point étant un paramètre de l'oscilloscope utilisé.

Ainsi, pour augmenter la résolution fréquentielle du spectre, il faut augmenter le temps d'acquisition T , mais en faisant cela, on diminue également la fréquence d'échantillonnage f_e et donc la fréquence maximale satisfaisant le critère de Shannon ($f_e/2$).

En pratique : commencer avec un temps d'acquisition suffisamment court et l'augmenter progressivement jusqu'à une valeur satisfaisante.

TF, FFT et fenêtre de pondération

Considérons un signal dépendant du temps $x(t)$ et sa transformée de Fourier

$$\hat{x}(f) = \mathcal{F}(x(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2i\pi ft} dt.$$

En pratique, il est impossible d'acquérir un signal pendant une durée infinie. Il est nécessaire de **tronquer** le signal avant son traitement numérique, afin qu'il soit limité dans le temps.

Mathématiquement, cela revient à effectuer l'opération suivante

$$x_T(t) = x(t) \cdot \Pi_T(t),$$

où $x_T(t)$ est le signal à traiter et $\Pi_T(t)$ la fonction porte de durée T (où T est la durée d'acquisition en pratique).

Or, d'après les propriétés de la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(x_T(t)) = \mathcal{F}(x(t) \cdot \Pi_T(t)) = [\mathcal{F}(x(t)) * \mathcal{F}(\Pi_T(t))],$$

ainsi, la transformée de Fourier du signal tronquée correspond à la convolution entre la transformée de Fourier du signal complet et la transformée de Fourier de la fonction de troncature.

Dans le cas d'un signal harmonique, la TF d'une fonction porte est un sinus cardinal : il y a à la fois un élargissement du pic et l'apparition de lobes secondaires.

Deux conséquences :

une résolution fréquentielle dépendant du temps de mesure T finie ;

apparition de lobes secondaires qui peuvent masquer d'autres fréquences.

TF, FFT et fenêtre de pondération

Pour atténuer les effets de l'opération de troncature, on introduit des fenêtres de pondération $\rho_T(t)$. Cela signifie qu'au lieu de traiter le signal tronqué $x_T(t)$, on traite le signal pondéré par

$$x_p(t) = \rho_T(t) \cdot x_T(t).$$

Idéalement, il faudrait obtenir un lobe principal aussi étroit que possible et des lobes secondaires d'amplitudes très faibles.

Cependant, il n'est pas possible d'avoir simultanément ces deux propriétés...

Les fenêtres sont donc à choisir en fonction du signal analysé et du compromis désiré.

Par ailleurs, une fenêtre diminuant partiellement le signal par rapport à une fenêtre porte, le choix de fenêtrage sera également guidé en fonction du rapport signal à bruit (une fenêtre atténuant trop le signal ne permettra pas forcément de résoudre des pics de faible amplitude).

Remarque : l'analyse de Fourier est un processus complexe, intervenant fréquemment dans le contexte de l'analyse et la spectroscopie (ex. : spectroscopie IR par TF).

Ce cours n'a aucunement la prétention d'être complet sur le sujet...

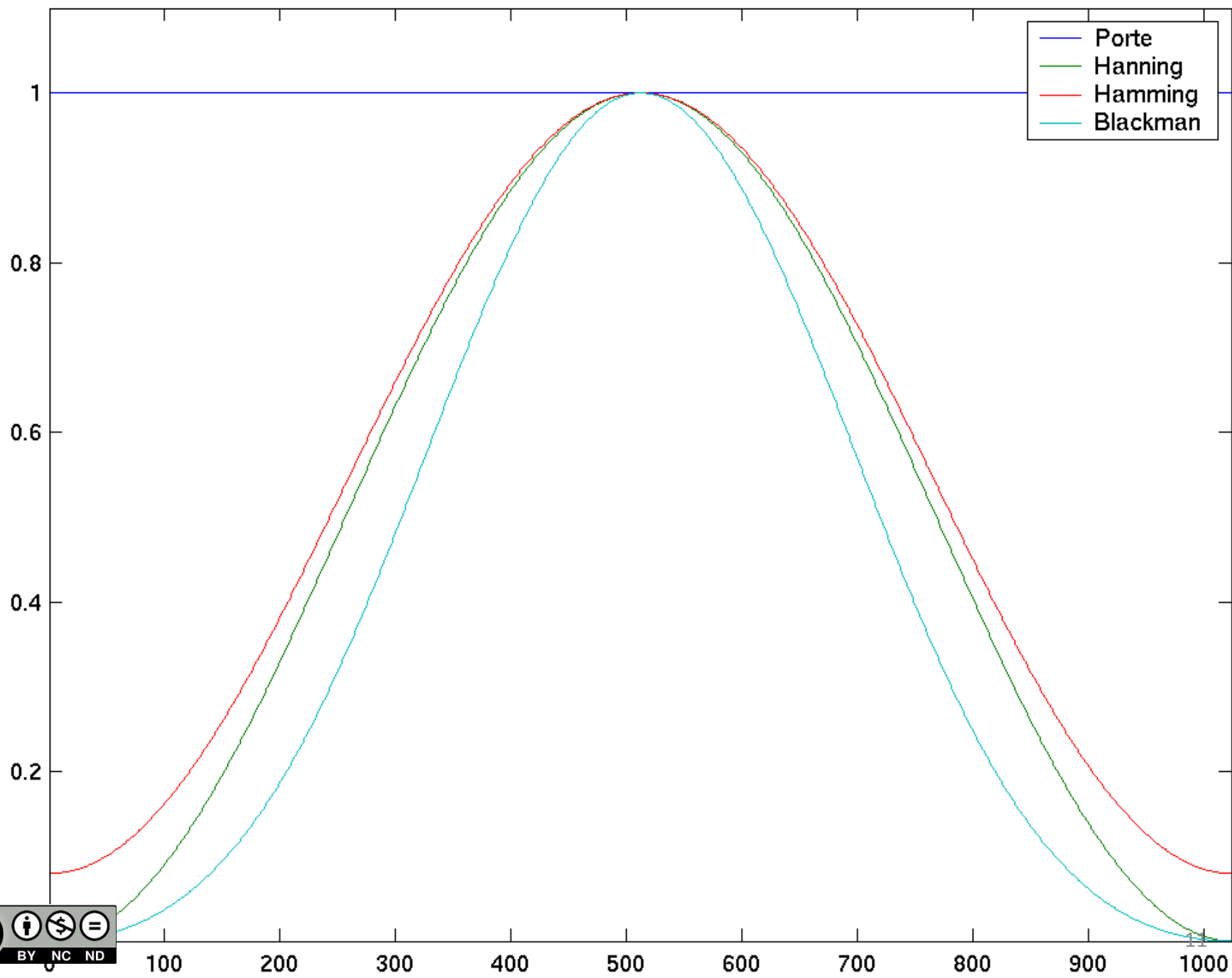
Quelques fenêtres de pondération

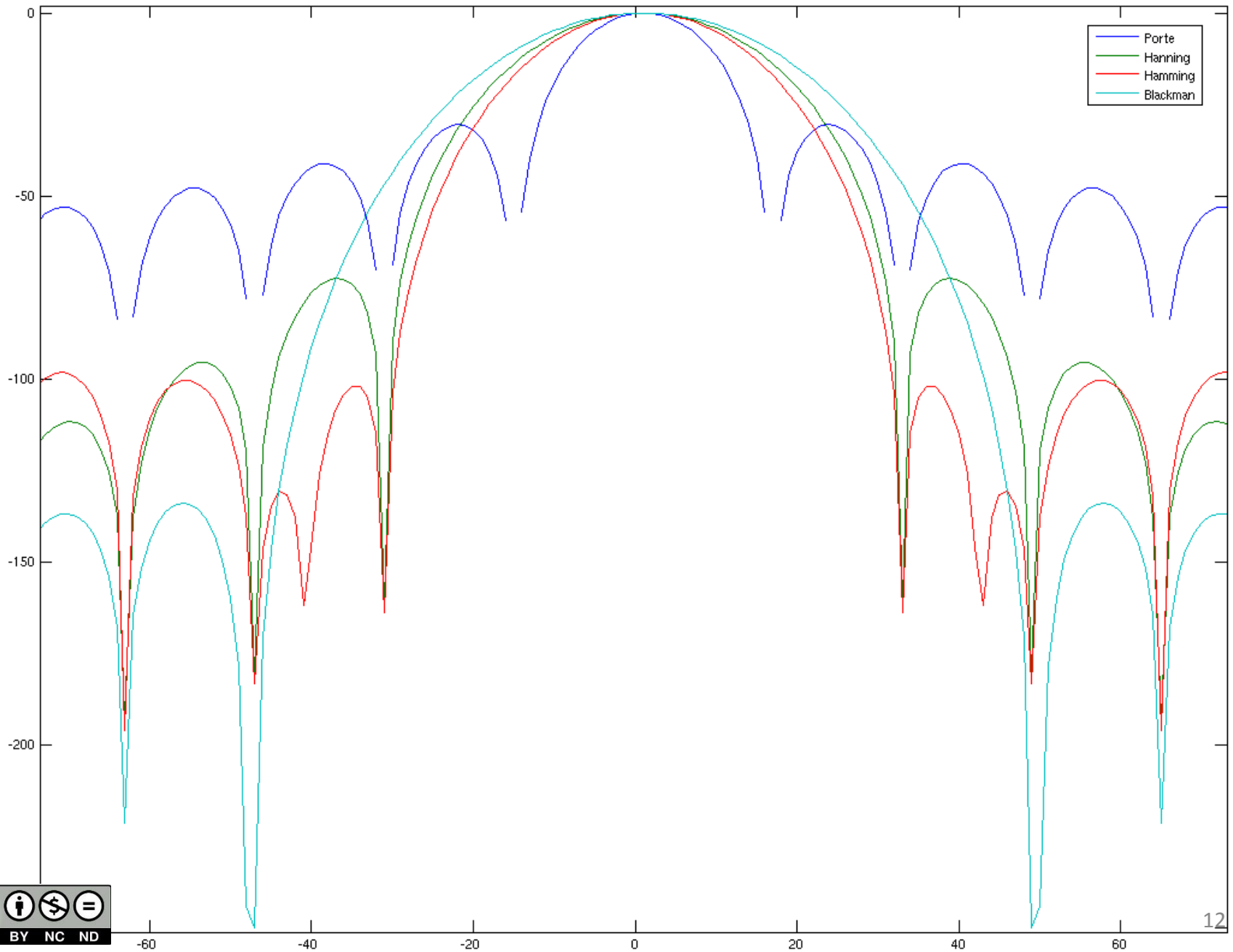
On note A l'atténuation du signal par rapport à une fenêtre rectangulaire,
 W_{-3dB} la largeur à -3dB du pic principale de sa transformée de Fourier,
 $\Delta f = \frac{f_e}{N}$ la résolution fréquentielle.

Nom	Expression	A (dB)	W_{-3dB}
Rectangulaire	1	0	$0.89 \cdot \Delta f$
Hamming	$0.54 + 0.46 \cos(2\pi t)$	-30 dB	$1.30 \cdot \Delta f$
Hanning	$0.5(1 + \cos(2\pi t))$	-19 dB	$1.44 \cdot \Delta f$
Gaussienne	$\exp(-t^2)$	-42 dB	$1.55 \cdot \Delta f$

Remarque 1 : il en existe bien d'autre : triangulaire, exponentielle, flat-top, Blackman-Harris, Kaiser, etc...

Remarque 2 : les problèmes de fenêtrages en analyse numérique sont conceptuellement proches des problèmes d'apodisation en optique.





Quelques exemples pratiques

Le choix de l'utilisation de fenêtres n'a de réel intérêt que dans le cadre de *l'analyse spectrale*, c'est-à-dire un signal composé de plusieurs composantes spectrales.

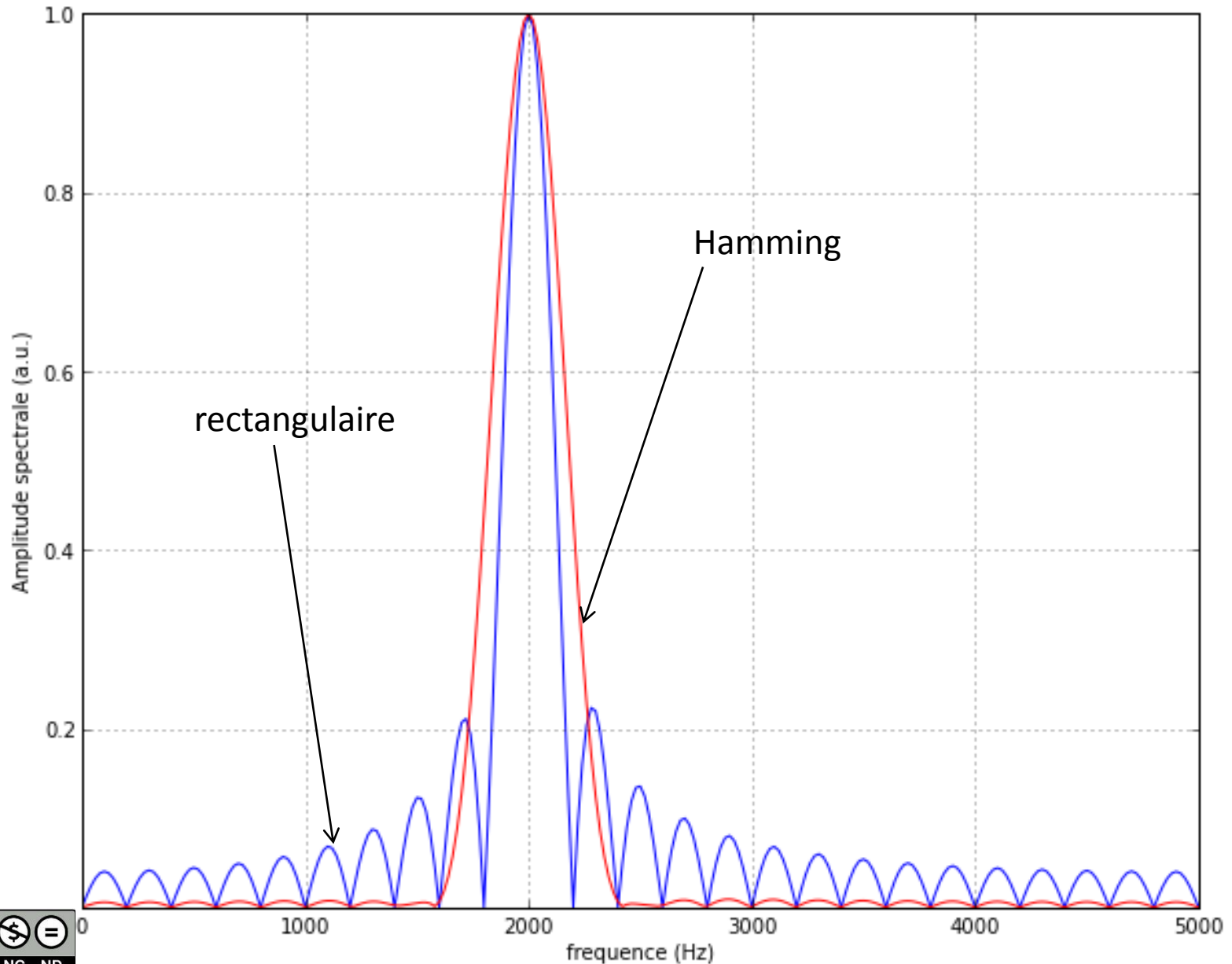
Signal : $x(t) = \cos(2\pi ft)$ avec $f = 2\text{kHz}$. Cas d'une TF avec une porte de 5ms.

Comparaison entre une fenêtre rectangulaire (en bleu) et une fenêtre Hamming (en rouge).

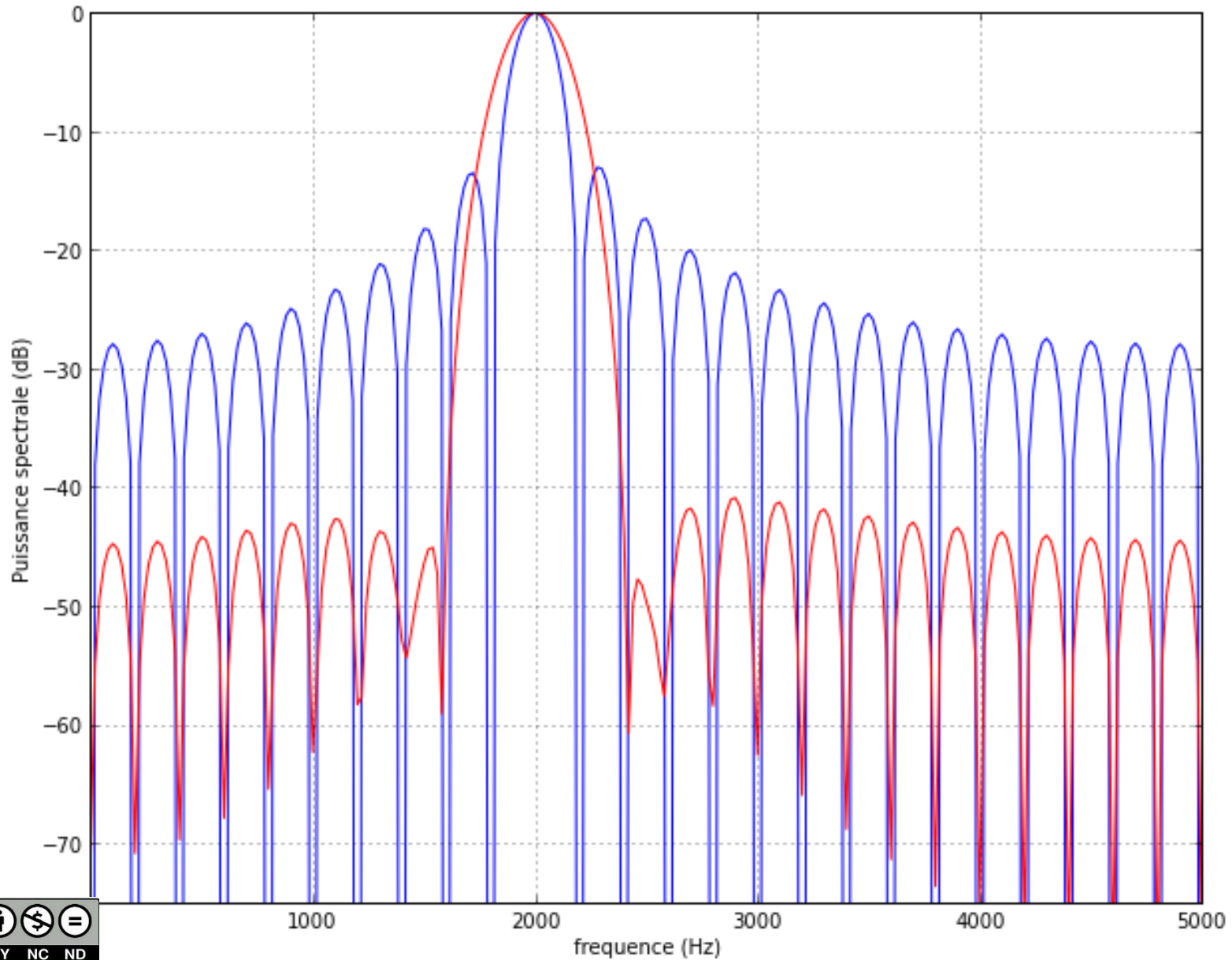
La fenêtre Hamming permet de réduire l'amplitude des lobes, mais en contrepartie le lobe principale est élargi : la résolution en fréquence est dégradée.

Si les spectres sont normalisés correctement, on observe la diminution du signal spectral avec la fenêtre pondérée.

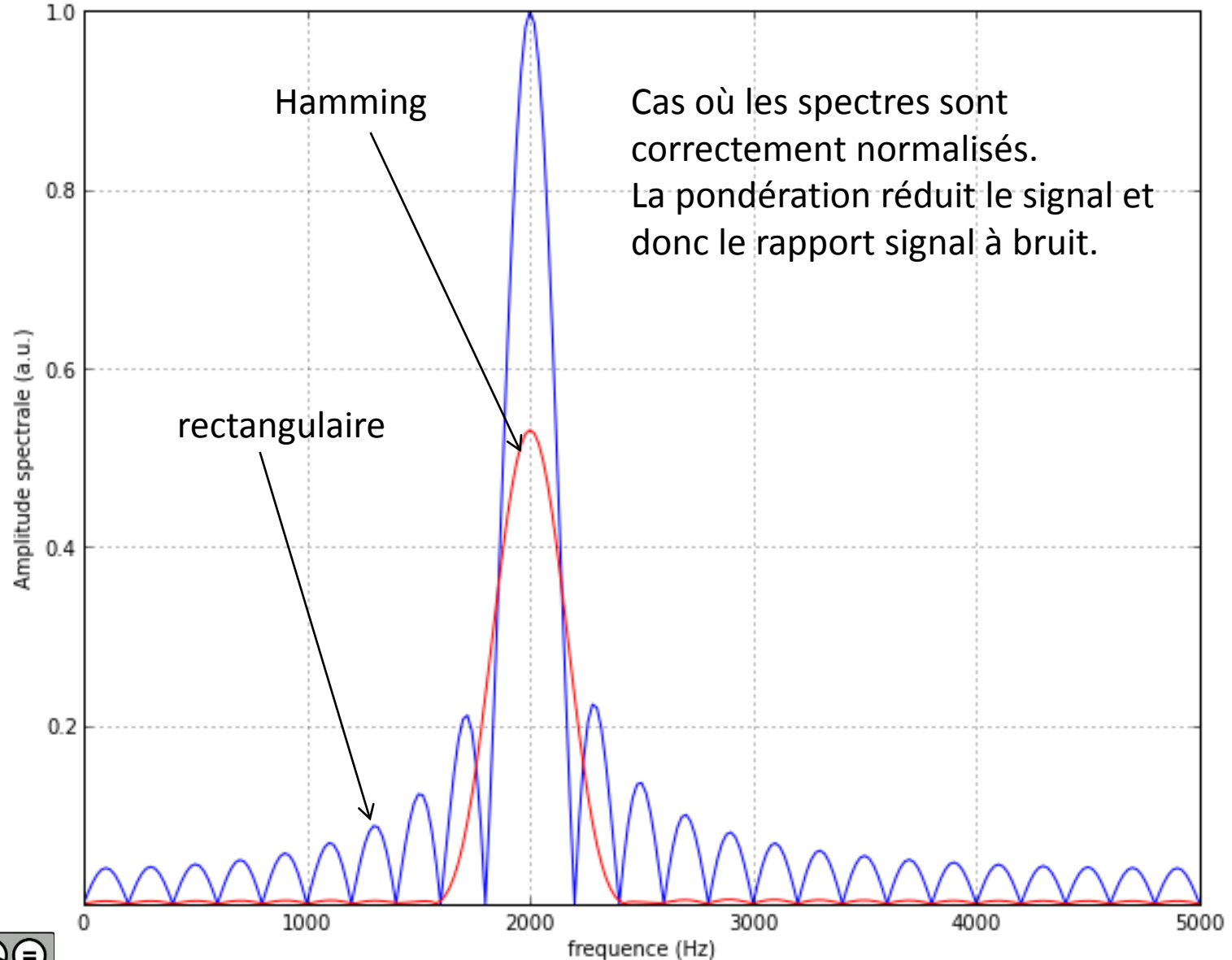
Quelques exemples pratiques



Quelques exemples pratiques

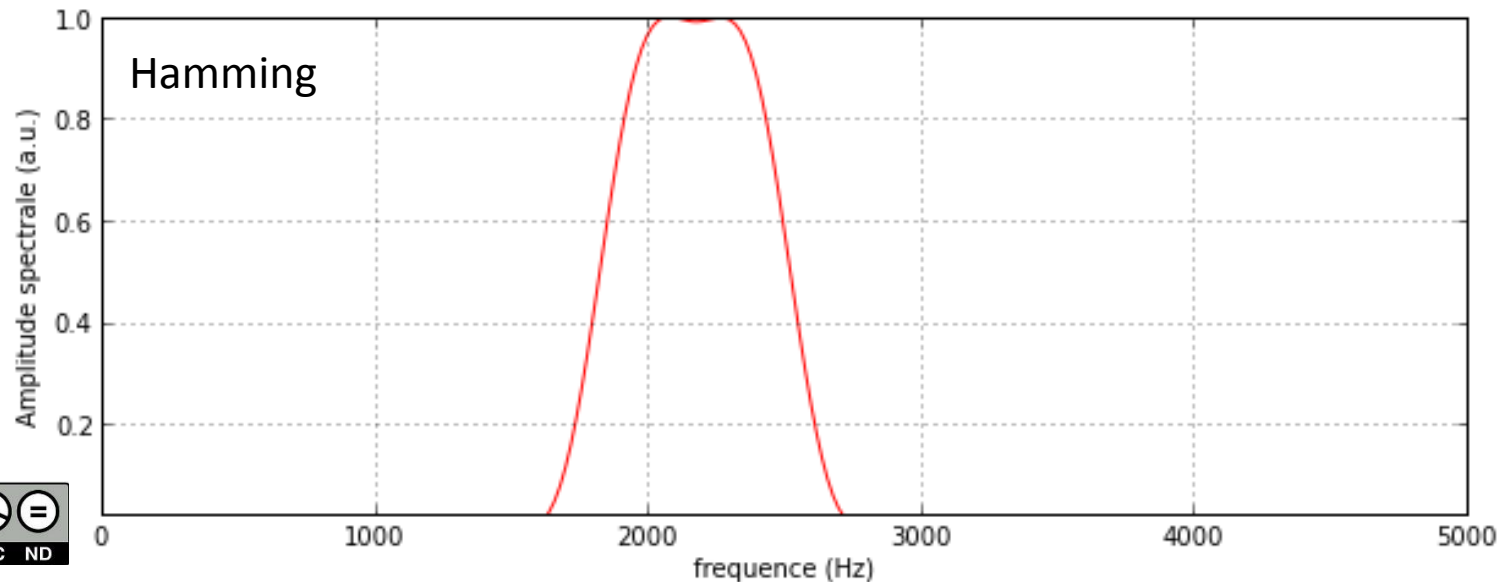
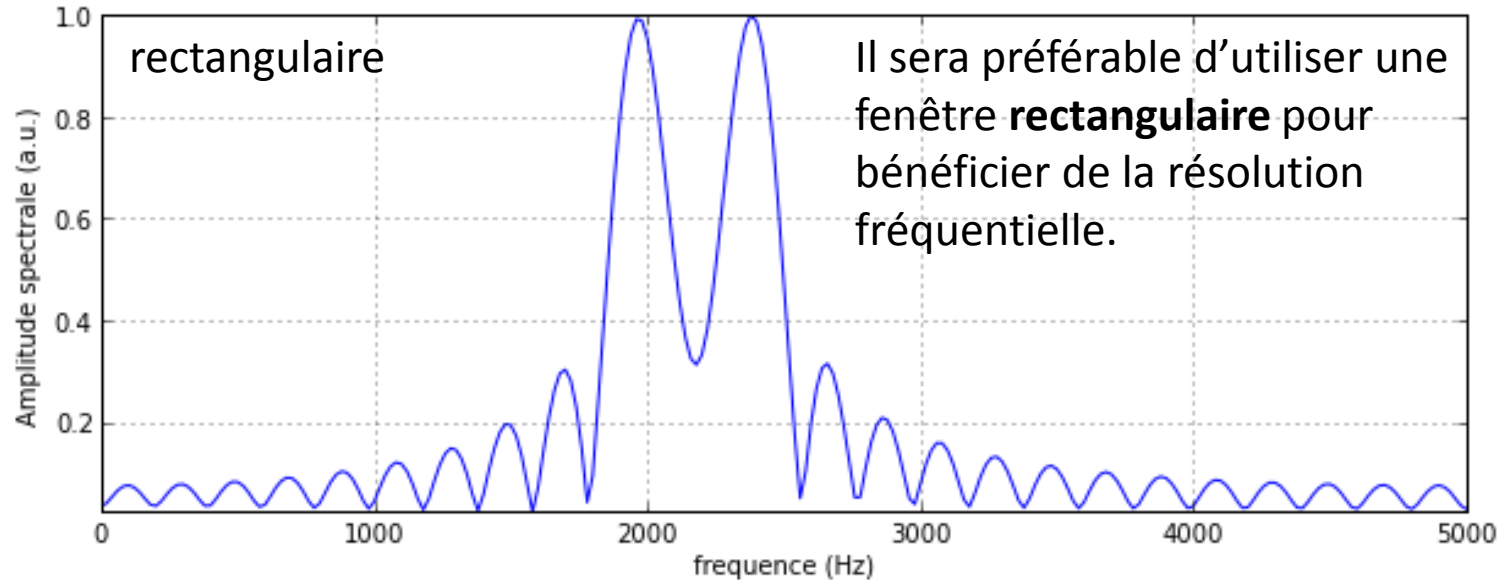


Quelques exemples pratiques



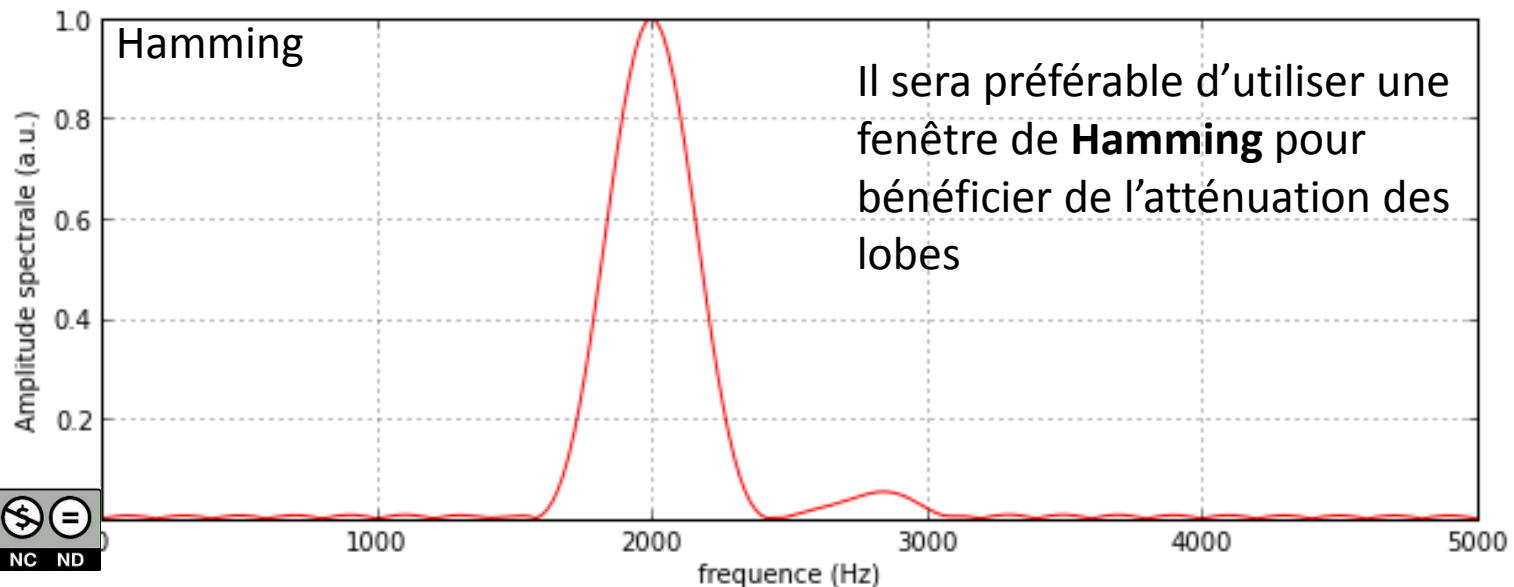
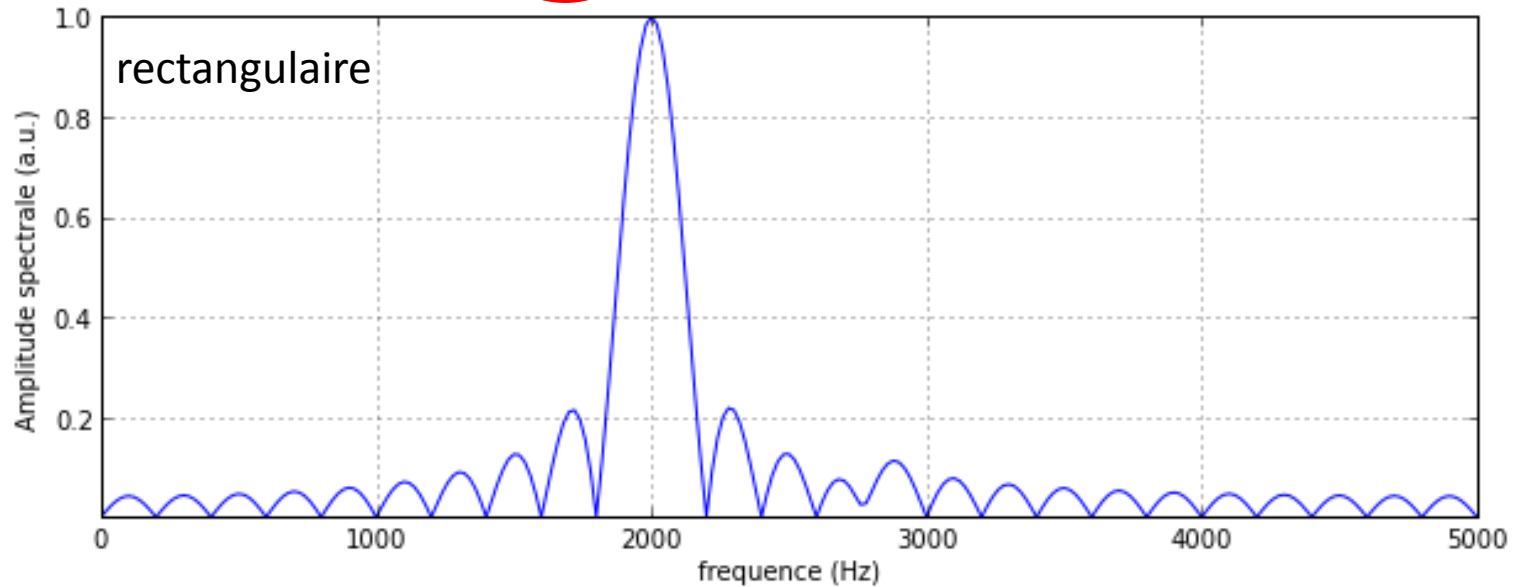
Quelques exemples pratiques

Signal : $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_1 = 2\text{kHz}$ et $f_2 = 2.35\text{kHz}$.



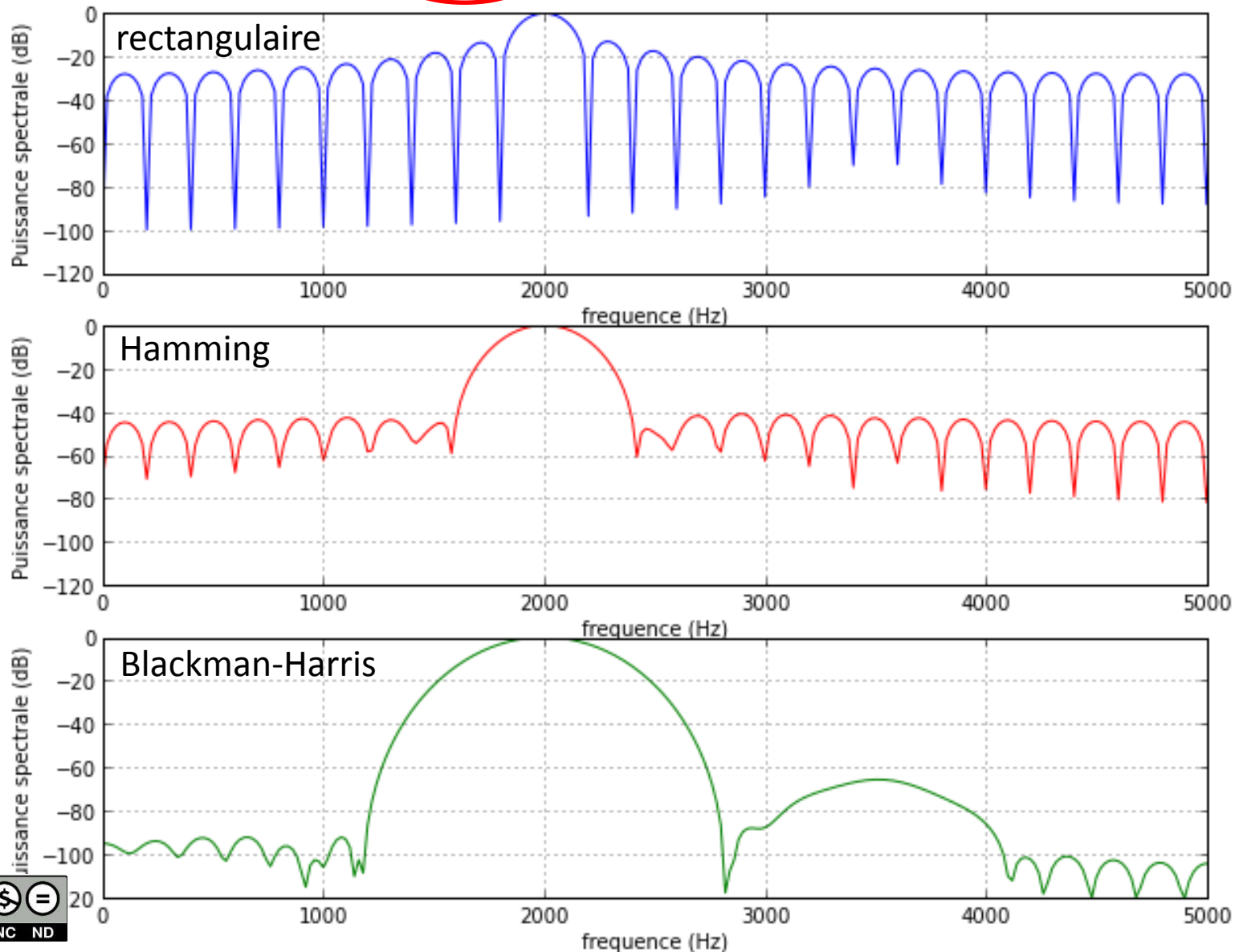
Quelques exemples pratiques

Signal : $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 0.05 \times \cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_1 = 2\text{kHz}$ et $f_2 = 2.8\text{kHz}$.



Cas des très faibles signaux : fenêtre de Blackman-Harris

Signal : $x(t) = \cos(2\pi f_1 t) + 0.0005 \times \cos(2\pi f_2 t)$ avec $f_1 = 2\text{kHz}$ et $f_2 = 3.5\text{kHz}$.





This work is licensed under a Creative Commons “Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International” license.

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>