



**HAL**  
open science

# Cours de Mécanique - Agrégation externe de Sciences Physiques - Option Chimie

Kenneth Maussang

► **To cite this version:**

Kenneth Maussang. Cours de Mécanique - Agrégation externe de Sciences Physiques - Option Chimie. Master. Mécanique, Montrouge, France. 2013, pp.55. hal-04183802

**HAL Id: hal-04183802**

**<https://cel.hal.science/hal-04183802>**

Submitted on 21 Aug 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0  
International License

---

# Mécanique

---

*Kenneth Maussang*  
kenneth.maussang@ens.fr

## Table des matières

1	Présentation des interactions et éléments de statique (BCPST 1)	1
2	Cinématique	4
3	Éléments de dynamique	12
4	Aspects énergétiques	16
5	Moment cinétique - dynamique d'un solide indéformable	23
6	Problème à deux corps - Forces centrales	27
7	Référentiel terrestre - pesanteur	33
8	Collisions en mécanique classique	39
9	Introduction à la relativité	44



# 1 Présentation des interactions et éléments de statique (BCPST 1)

---

## 1.1 Forces

### 1.1.1 Principe des actions réciproques

**Énoncé** On considère deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$ , dont les forces d'interactions sont respectivement notées  $\vec{f}_{12}$  (force exercée par 2 sur 1) et  $\vec{f}_{21}$ .

*Le principe des actions réciproques stipule que l'on a*

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21},$$

*et que les forces  $\vec{f}_{12}$  et  $\vec{f}_{21}$  sont portées par la droite passant par  $M_1M_2$ .*

### 1.1.2 Centre de masse (ou centre d'inertie)

On considère un système de points matériels de masse  $m_i$  situés à la position  $M_i$ . On définit le centre de masse du système  $G$  comme le barycentre des points  $M_i$  pondérés par leur masse  $m_i$ , c'est-à-dire

$$\left(\sum_i m_i\right) \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM}_i.$$

Pour un système formé par un milieu continu, de masse volumique  $\rho(M)$ ,  $G$  est défini selon

$$\left(\int \rho(\overrightarrow{OM}) d^3OM\right) \overrightarrow{OG} = \int \rho(\overrightarrow{OM}) \overrightarrow{OM} d^3OM.$$

### 1.0.1 Exemples de forces

**Force gravitationnelle** Considérons deux masses  $m_1$  et  $m_2$  situées en  $M_1$  et  $M_2$  respectivement. Il existe alors une force gravitationnelle de  $m_1$  sur  $m_2$  selon

$$\vec{f}_{m_1 \rightarrow m_2} = \mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}, \quad (1.1)$$

avec  $\vec{u} = \overrightarrow{M_1 M_2} / r$ ,  $r = M_1 M_2$  et  $\mathcal{G} = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$  est la constante de gravitation universelle.

**Force électrostatique de Coulomb** Considérons deux charges ponctuelles  $q_1$  en  $M_1$  et  $q_2$  en  $M_2$ , on a alors

$$\vec{f}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}, \quad (1.2)$$

où  $\epsilon_0$  est la permittivité absolue.

**Poids d'une particule** Le poids  $\vec{P}$  d'une particule de masse  $m$  est lié au champ de pesanteur  $\vec{g}$  selon

$$\vec{P} = m\vec{g}. \quad (1.3)$$

Dans le cas de la Terre, une particule à l'altitude  $z$  est soumise à la pesanteur comme résultante de l'interaction gravitationnelle de la Terre, soit

$$\vec{P} = -G \frac{M_T m}{R_T^2} \frac{\vec{u}_z}{(1 + z/R_T)^2}, \quad (1.4)$$

où  $\vec{u}_z$  est la direction de la verticale locale,  $R_T$  le rayon terrestre, et  $M_T$  la masse de la Terre. Pour des points aux voisinages du sol, *i.e.*  $z \ll R_T \approx 6400$  km, on aura donc

$$g = G \frac{R_T}{R_T^2} \approx 9.8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}. \quad (1.5)$$

**Force de rappel d'un ressort** Soit un ressort de masse négligeable, de longueur au repos  $l_0$ , suivant un axe de direction  $\vec{u}$ . Dans le régime linéaire, la force de rappel élastique suite à une élongation ou contraction de longueur  $l$  a pour expression

$$\vec{f} = -k(l - l_0)\vec{u}, \quad (1.6)$$

où  $\vec{u}$  est toujours dirigé suivant le sens de l'allongement du ressort.

**Tension d'un fil** La tension d'un fil est dirigée selon la direction définie par ce fil, tant que le fil est tendu. Sa valeur est arbitraire, dans la limite où le fil ne casse pas.

## 1.0.2 Forces réparties en volume

On considère un système  $\mathcal{S}$  de volume  $\mathcal{V}$  délimité par une surface  $\Sigma$ . Ce dernier est soumis à des actions mécaniques réparties en volume. Soit un élément de volume  $d\tau$  de  $\mathcal{S}$ , de masse  $dm$ . Ce dernier est soumis à une force élémentaire  $d\vec{f}$  telle que

$$d\vec{f} = \vec{f}_v d\tau,$$

où  $\vec{f}_v$  est la densité volumique de force. La résultante  $\vec{F}$  est alors

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{V}} \vec{f}_v d\tau$$

**Exemple :** soit  $\rho$  la masse volumique du système  $\mathcal{S}$ , et  $\vec{g}$  le champ de pesanteur supposé uniforme. La force de gravitation élémentaire est alors

$$d\vec{f} = \vec{g} dm = \rho \vec{g} d\tau.$$

*Dans le cas d'un système  $\mathcal{S}$  de masse  $m$ , la résultante des forces de pesanteur est appelée son poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ . Le poids s'applique au centre de masse  $G$  du système matériel.*

### 1.1.3 Forces réparties en surface

Soit une paroi  $\Sigma$  séparant un fluide d'un milieu extérieur. Cette dernière va subir l'action de forces pressante. En un point  $M$  de cette surface, l'action mécanique peut être caractérisée par la pression  $p(M)$ . L'élément de surface  $d\Sigma$  en  $M$  est alors soumis à la force élémentaire

$$d\vec{f} = p(M)\vec{n}d\Sigma,$$

où  $\vec{n}$  est le vecteur unitaire normal, orienté vers l'extérieur du système fluide. La résultante des forces pressantes s'obtient comme la somme sur  $\Sigma$  des forces élémentaires

$$\vec{f} = \int_{\Sigma} p(M)\vec{n}d\Sigma.$$

Remarque : D'après le principe des actions réciproques, la paroi exerce sur le fluide une force opposée.

## 1.2 Moment d'une force par rapport à un axe

Soit un point matériel  $M$ , un axe  $\Delta$  de vecteur directeur  $\vec{u}_{\Delta}$ . Une force  $\vec{f}$  quelconque est appliqué en ce point  $M$ . On la décompose en une composante parallèle à  $\Delta$  ( $\vec{f}_{\parallel} = (\vec{f} \cdot \vec{u}_{\Delta})\vec{u}_{\Delta}$ ) et une composante orthogonale à  $\Delta$  ( $\vec{f}_{\perp} = \vec{f} - \vec{f}_{\parallel}$ ). Dans le programme de BCPST1, on admet le résultat suivant concernant le moment d'une force  $\vec{f}$

- la composante  $\vec{f}_{\parallel}$  exerce un moment nul par rapport à l'axe  $\Delta$ ,
- la valeur absolue du moment vaut  $|\mathcal{M}_{\Delta}| = d|\vec{f}_{\perp}|$ , où  $d$  est le bras de levier, c'est-à-dire la distance entre  $\Delta$  et  $M$  ( $d = \|\vec{HM}\|$  où  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$ ,
- $\mathcal{M}_{\Delta}$  est une grandeur algébrique, son signe est donnée par le règle du tire-bouchon de Maxwell,
- le moment selon un axe est une grandeur additive :  $\mathcal{M}_{\Delta} = \sum_k \mathcal{M}_{k,\Delta}$ .

Au-delà du programme de BCPST, le moment d'une force en  $M$  par rapport à un point  $O$  est un vecteur défini par

$$\vec{\mathcal{M}}(O) = \vec{OM} \wedge \vec{f}.$$

## 1.3 Équilibre d'un solide

Les deux conditions nécessaires d'équilibre d'un solide, soumis à l'action des forces extérieures  $\vec{f}_k$ , sont la nullité de la force totale, ainsi que la nullité du moment total pour tout axe  $\Delta$

$$\vec{F} = \sum_k \vec{f}_k = \vec{0} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\Delta} = \sum_k \mathcal{M}_{k,\Delta}.$$

## 1.1 Statique des fluides

*Cf.* TD d'hydrodynamique

# 2 Cinématique

## 2.1 Repère et bases de projection

### 2.1.1 Définitions

- On appelle solide tout système matériel  $\mathcal{S}$  si la distance entre deux points quelconques est constante au cours du temps

$$\forall N, P \in \mathcal{S}, \|\overrightarrow{NP}\| = C^{te}.$$

- Un système de coordonnées est dit lié à un solide lorsque l'origine et les axes de ce système sont fixes par rapport à ce dernier.

### 2.1.2 Systèmes usuels de coordonnées

**Coordonnées cartésiennes** Dans un système d'axe orthogonaux  $Oxyz$ , d'origine  $O$ , et de vecteurs unitaires  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ , le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  est défini par

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

**Coordonnées cylindriques** Si le problème considéré présente une symétrie cylindrique d'axe  $Oz$ , les coordonnées cylindriques sont appropriées. Soit  $H$  le projeté orthogonal de  $M$  dans le plan  $xOy$ . On pose  $OH = r$  et  $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH})$ . Le vecteur  $\vec{u}_r$  tel que  $\overrightarrow{OH} = r\vec{u}_r$  est appelé vecteur unitaire radial. Le vecteur dit orthoradial  $\vec{u}_\theta$  s'obtient par une rotation de  $+\pi/2$  de  $\vec{u}_r$  autour de l'axe  $Oz$ . Dans la base orthonormée **locale**  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , dépendante du point  $M$ , le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  s'écrit

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z.$$

**Coordonnées sphériques** Dans le cas d'une symétrie sphériques (invariance par rotation autour de  $O$ ), on repère le point  $M$  par ses coordonnées sphériques  $r, \theta$  et  $\varphi$

$$r = OM, \theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM}), \varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH}),$$

$H$  étant le projeté de  $M$  sur le plan  $xOy$ . Alors que  $\theta$  varie seulement entre 0 et  $\pi$ ,  $\varphi$  varie entre 0 et  $2\pi$ . La base orthonormée locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  est définie par

- $\vec{u}_r$  est unitaire selon  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ ,
- $\vec{u}_\theta$  est orthogonal dans le plan  $zOM$ ,
- $\vec{u}_\varphi$  est orthogonal au plan  $zOM$ , la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  étant directe.

## 2.2 Notion de référentiel

### 2.2.1 Définition

*On appelle référentiel  $\mathcal{R}$  lié à un solide  $\mathcal{S}$  de référence, la donnée d'un point solide de  $\mathcal{S}$  ainsi que 3 directions définissant un système d'axes solide du solide, ainsi que d'une horloge.*

Un référentiel est un système physique servant de "référence" pour la description du mouvement d'un point matériel. Par exemple, on peut étudier le mouvement d'une balle par rapport à la Terre, qui est alors considérée comme un objet immobile. En ce sens, la Terre est une référence, et on parle de référentiel terrestre.

## 2.2.2 Principe d'inertie

Principe d'inertie (Newton, 1686) :

*On postule l'existence d'un ensemble de référentiels  $\mathcal{R}_g$ , dit galiléens ou d'inertie, en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, dans lesquels une particule matérielle mécaniquement isolée (c'est-à-dire soumise à aucune force) est en translation rectiligne uniforme. Une particule au repos reste au repos.*

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport à  $\mathcal{R}_i$ .

## 2.2.3 Exemples de référentiels

**Référentiel de Copernic** Il a pour origine le centre de masse du système solaire (attention, ce n'est pas exactement le centre de masse du Soleil), et ses axes sont définis par la direction de 3 étoiles. Il forme la meilleure approximation de référentiel galiléen.

**Référentiel héliocentrique** Il a pour origine le centre de masse du Soleil, et ses axes sont définis par la direction de 3 étoiles "fixes".

**Référentiel géocentrique** Il a pour origine le centre de masse de la Terre, et ses axes sont définis par la direction de 3 étoiles "fixes". Il forme une bonne approximation de référentiel galiléen pour des expériences "courtes" devant la rotation de la Terre autour du Soleil.

**Référentiel terrestre** Il a pour origine un point quelconque de la Terre, et ses axes sont définis localement, **liés à la rotation de la Terre**. Il forme une bonne approximation de référentiel galiléen pour des expériences "courtes" devant la rotation de la Terre sur elle-même.

## 2.2.4 Centre de masse et référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$

Le référentiel barycentrique  $\mathcal{R}^*$  est le référentiel en **translation par rapport à un référentiel galiléen**  $\mathcal{R}_g$ , où le centre de masse du système est immobile.

Le vecteur instantané de rotation du référentiel barycentrique par rapport à un référentiel galiléen est donc toujours nul

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}_g) = \vec{0}.$$

## 2.3 Éléments de cinématique

Il convient de préciser par rapport à quel référentiel on effectue une dérivée.

### 2.3.1 Expression des vitesses et des accélérations

Coordonnées cartésiennes

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$



## Coordonnées cylindriques

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z,$$

On se place dans la base localement associée au point  $M$   $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , et on a

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{v}_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{a}_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

ces expressions étant obtenues en utilisant les relations suivantes (**uniquement en cylindrique**)

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r.$$

**Coordonnées sphériques** On définit une base locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  telle que  $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ . L'expression de la vitesse et de l'accélération en sphérique sont très compliquées dans le cas général. On se contentera de les calculer à chaque fois, les coordonnées sphériques permettant de simplifier le problème en utilisant les symétries.

★ **Repère de Frenet** ★ Soit  $M_0$  la position du point matériel étudié à l'instant  $t = 0$ . On définit

$$s(t) = \widehat{M_0M}$$

l'abscisse curviligne et la base locale  $(\vec{u}_t, \vec{u}_n, \vec{u}_B)$  où  $\vec{u}_t$  est le vecteur tangent à la trajectoire,  $\vec{u}_n$  le vecteur directeur du centre de courbure et  $\vec{u}_B$  complétant la base directe. Avec  $R \geq 0$  le rayon de courbure, on peut montrer que

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{s} = v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \frac{v^2}{R} \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'accélération normale est toujours dirigée vers le centre de courbure.

### 2.3.2 ★ Champ de vitesse d'un solide ★

**Définition** Un solide est un ensemble de points dont les distances restent constantes : c'est un système indéformable.

On se place dans un référentiel  $\mathcal{R}$  donné. Soit  $\mathcal{S}$  un solide,  $P$  et  $Q$  deux points appartenant à  $\mathcal{S}$ . On peut montrer que, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , il existe un vecteur particulier,  $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$ , vecteur rotation instantanée de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{R}$ . On peut montrer que

$$\boxed{\left( \frac{d\overrightarrow{PQ}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{PQ}.}$$

On peut en déduire immédiatement, en introduisant un point fixe de  $\mathcal{R}$  dans la relation précédente, la relation suivante sur le champ de vitesse du solide en  $P$  et  $Q$

$$\boxed{\vec{v}_{\mathcal{R}}(Q) = \vec{v}_{\mathcal{R}}(P) + \vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{PQ}.}$$

Comment déterminer  $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R})$  ?

– *Mouvement de translation* : alors  $\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \vec{0}$ .

- *Rotation d'un solide autour d'un axe fixe dans  $\mathcal{R}$ .* Tout les points de l'axe restent fixent sur cet axe. Soit  $H$  la projection orthogonale de  $P$  sur  $Oz$ .  $P$  décrit un cercle. Le mouvement du solide est donc déterminer par la donnée de  $\theta(t)$ . Dès lors que le sens positif de  $\theta$  est lié par l'orientation du trièdre direct, on aurait

$$\vec{\Omega}(\mathcal{S}/\mathcal{R}) = \dot{\theta} \vec{u}_z.$$

Valable uniquement si l'axe de rotation est fixe.

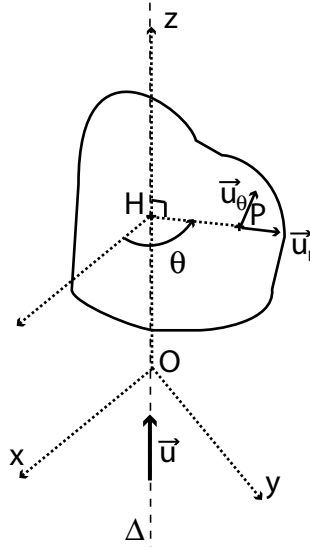


FIGURE 2.1 – Rotation d'un solide autour d'un axe fixe.

On peut montrer que le mouvement le plus général d'un solide peut être considéré comme la superposition d'un mouvement de rotation et d'un mouvement de translation. L'axe de rotation, dépendant du temps, est appelé axe instantané de rotation.

### 2.3.3 Notion de point coïncident

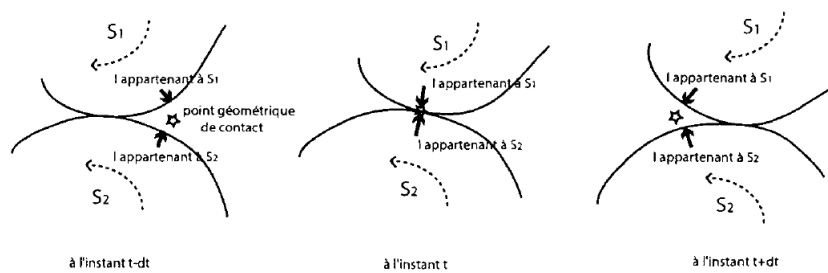


FIGURE 2.2 – Notion de point coïncident.

La figure (2.2) représente aux instants  $t - dt$ ,  $t$  et  $t + dt$ , deux solides  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ , tous deux en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  et restant en contact l'un sur l'autre. On assimile la région de contact à un point de l'espace  $I = I(t)$  (point dit **géométrique**) et on suppose les surfaces assez régulières pour qu'existent en  $I$  un plan tangent commun et une normale commune à  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$ . À l'instant  $t$ , on constate qu'il y a trois points au même endroit :

- le point géométrique du référentiel  $\mathcal{R}$  où a lieu le contact,

- le point  $I \in \mathcal{S}_1$  qui est le point du solide  $\mathcal{S}_1$  qui coïncide avec  $I$  à l'instant  $t$ ,
- le point  $I \in \mathcal{S}_2$  qui est le point du solide  $\mathcal{S}_2$  qui coïncide avec  $I$  à l'instant  $t$ .

Ces trois points sont représentés par des flèches et une étoile sur le schéma ci-dessus : ils ne coïncident qu'à l'instant  $t$ .

### 2.3.4 ✿ Composition des vitesses pour deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre ✿

**Loi de composition des vitesses** On considère deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Soit  $M$  le point matériel considéré. On note  $M_c$  le point coïncident avec  $M$  mais fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . On note  $\vec{v}$  la vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{v}'$  la vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}'$  et  $\vec{v}_e$  la vitesse du point coïncident  $M_c$  dans  $\mathcal{R}$ , alors on obtient

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e}.$$

$\vec{v}_e$  est appelée vitesse d'entraînement.

**Loi de composition des accélérations** Selon le programme de BCPST, "La loi de composition des accélérations est strictement hors programme mais on pourra montrer que l'accélération est la même dans deux référentiels qui sont en translation rectiligne et uniforme, l'un par rapport à l'autre."

### 2.3.5 ★ Lois de composition des vitesses et accélérations (cas général) ★

**Composition des vitesses** On considère deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$ . Soit  $M$  le point matériel considéré. On note  $M_c$  le point coïncident avec  $M$  mais fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ . On note  $\vec{v}$  la vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{v}'$  la vitesse de  $M$  dans  $\mathcal{R}'$  et  $\vec{v}_e$  la vitesse du point coïncident  $M_c$  dans  $\mathcal{R}$ , alors on obtient

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e}.$$

$\vec{v}_e$  est appelée vitesse d'entraînement. De même, on note

$$\vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{\Omega}_e,$$

et  $\vec{\Omega}_e$  est appelé vecteur rotation instantané d'entraînement. Soit  $O'$  un point fixe dans  $\mathcal{R}'$ , on a alors

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{v}(O') + \vec{\Omega}_e \wedge \overrightarrow{O'M}}.$$

**Composition des accélérations** On a de même

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_e + \vec{a}_c}$$

où  $\vec{a}$  est l'accélération dans  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{a}'$  est l'accélération dans  $\mathcal{R}'$ ,  $\vec{a}_e$  est l'accélération dans  $\mathcal{R}$  du point coïncident (accélération d'entraînement). Un troisième terme apparaît,  $\vec{a}_c$ , appelé accélération de Coriolis, et définit selon

$$\boxed{\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}_e \wedge \vec{v}'}$$

**On prendra garde à bien retenir que l'accélération de Coriolis fait intervenir le vecteur rotation instantané d'entraînement et la vitesse dans  $\mathcal{R}'$ .**

**Cas des solides** Pour caractériser le mouvement d'un solide, il suffit de se donner la vitesse d'un point et le vecteur rotation instantané de ce solide (torseur cinématique). On peut montrer aisément la relation suivante

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\Omega}' + \vec{\Omega}_e}$$

## 2.4 Actions de contact

### 2.4.1 Glissement, roulement et pivotement (Hors-Programme)

Le mouvement relatif d'un solide  $\mathcal{S}_1$  par rapport à un solide  $\mathcal{S}_2$  est défini par la donnée du vecteur instantané de rotation de  $\mathcal{S}_1$  par rapport à  $\mathcal{S}_2$  et de la vitesse d'un point du solide (ici le point  $I$  de contact).

Le glissement est associé à la vitesse de glissement  $\vec{v}_g(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2)$  : il a y glissement si cette vitesse est non nulle.

Le vecteur instantané de rotation se décompose suivant la normale à la surface de contact en  $I$  et sur le plan tangent selon

$$\vec{\Omega}(\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_2) = \vec{\Omega}_N + \vec{\Omega}_T.$$

$\vec{\Omega}_N$  correspond au mouvement de pivotement et  $\vec{\Omega}_T$  correspond au mouvement de roulement.

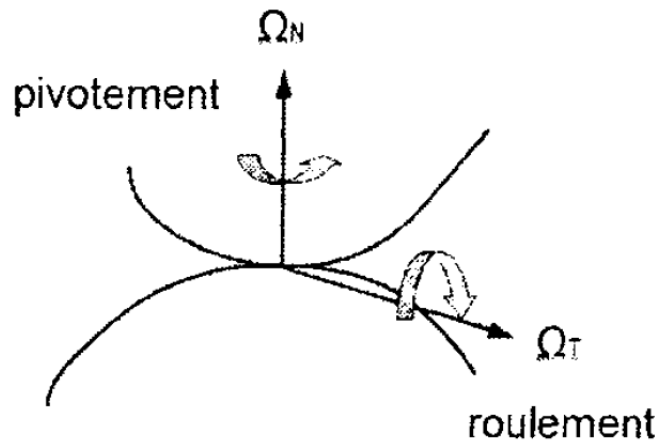


FIGURE 2.3 – Roulement et pivotement de deux solides en contact.

### 2.4.2 Action de contact entre solides

Au niveau du contact entre deux solides, il peut exister un moment de force s'opposant au pivotement par sa composante normale et au roulement par sa composante tangentielle. L'étude des phénomènes correspondants, appelés respectivement frottement de pivotement et frottement de roulement sort du cadre du programme. Nous nous restreindrons donc ici à déterminer la résultante  $\vec{R}$  appelée action de contact ou réaction de  $\mathcal{S}_1$  sur  $\mathcal{S}_2$ . En décomposant suivant la normale et le plan tangent, on écrit

$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T.$$

On appelle  $\vec{R}_N$  composante normale de l'action de contact, action de contact normale ou réaction normale. De même,  $\vec{R}_T$  est appelée composante tangentielle de l'action de contact ou, pour des raisons qui vont apparaître, "force de frottement" ou "force de résistance au glissement".

## 2.5 Lois de frottements

### 2.5.1 Lois de Coulomb pour le frottement solide

Les lois ci-dessus, également dites lois du frottement solide, par opposition aux lois du frottement fluide, décrivent la résistance à l'avancement d'un solide.

## Loi du frottement en présence de glissement

Si les deux solides glissent, la force de frottement possède les propriétés suivantes

- $\vec{R}_T$  est colinéaire à la vitesse de glissement (i.e. à la direction du glissement),
- $\vec{R}_T$  est opposé au glissement,
- $\|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\|$ ,

où  $f_d$  est appelé coefficient de frottement dynamique.

Ce qui peut se reformuler par : la force de frottement  $\vec{R}_T$  est opposé au glissement et de norme égale à celle de l'action de contact normale  $\vec{R}_N$  multipliée par une constante  $f$  caractéristique de la nature des surfaces de contact.

De façon intuitive, cette loi exprime le fait que la force de frottement tend à s'opposer au glissement et ce, d'autant plus que l'appui des deux surfaces (mesuré par la norme de  $\vec{R}_N$ ) est intense.

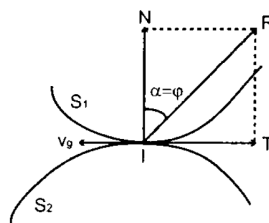


FIGURE 2.4 – Frottement de glissement

Le coefficient de frottement dynamique est caractéristique des matériaux en contact ainsi que de la rugosité des surfaces.

Ordres de grandeur :

- contact bois-bois,  $f \sim 0.4$ ,
- contact acier-garniture de frein,  $f \sim 0.35$ ,
- contact métal-métal,  $f \sim 0.2$ .

En posant  $\alpha = (\vec{R}_N, \vec{R}_T)$  et en introduisant l'angle de frottement (ou angle de glissement)  $\varphi$  défini par

$$f = \tan \varphi,$$

la loi de Coulomb du frottement cinétique a pour conséquence  $\alpha = \varphi$ , soit encore, en appelant cône de frottement le cône d'axe porté par la normale à la surface et de demi-angle au sommet  $\varphi$  : **en présence de glissement, l'action de contact  $\vec{R}$  est située sur le cône de frottement.**

## Loi du frottement "statique" (en l'absence de glissement)

S'il n'y a pas de glissement, les normes de la force de frottement et de l'action de contact satisfont

$$\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|,$$

où  $f_s$  est appelé coefficient de frottement statique.

Cette propriété peut aussi se traduire par  $\alpha \leq \varphi$ , en l'absence de glissement, l'action de contact  $\vec{R}$  est intérieure au cône de frottement.

En pratique, on a souvent  $f_s \geq f_d$ .

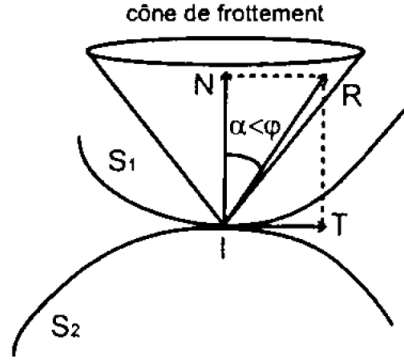


FIGURE 2.5 – Frottement statique

### 2.5.2 Cas des frottements fluides

Lorsqu'un solide est soumis à l'écoulement d'un fluide, on peut écrire la résultante de la force de frottement sous la forme

$$\vec{f}_{\text{frott}} = -\frac{1}{2}\rho\vec{v}^2 C_x S \frac{\vec{v}}{v},$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $\vec{v}$  la vitesse relative de l'objet par rapport au fluide,  $S$  la surface apparente de l'objet et  $C_x$ , appelé coefficient de trainée, un coefficient sans dimension **dépendant a priori** de  $\vec{v}$ , du fluide et de la géométrie. Le cas le plus courant correspond au frottement dit "visqueux", pour un écoulement laminaire, où l'on peut montrer que

$$\vec{f}_{\text{visqueux}} = -\alpha\vec{v},$$

où  $\alpha$  est une constante dépendant de la géométrie et du fluide. Le cas d'une sphère de rayon  $R$  dans un écoulement uniforme à la vitesse  $\vec{v}$  est calculable analytiquement, et on a

$$\vec{f}_{\text{visqueux}} = -6\pi\eta R\vec{v},$$

où  $\eta$  est la viscosité dynamique du fluide. Ceci constitue la formule de Stokes.

## 2.6 ★ Notion de vitesse de glissement ★

On définit la vitesse de glissement du solide  $S_1$  par rapport à  $S_2$  à l'instant  $t$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$  selon

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I \in S_1/\mathcal{R}) - \vec{v}(I \in S_2/\mathcal{R}).$$

On peut vérifier que

$$\vec{v}_g(S_1/S_2) = \vec{v}(I \in S_1/S_2),$$

où  $S_2$  est le référentiel lié au solide  $S_2$ .

Pour calculer la vitesse du point  $I$  du solide  $S_1$ , il suffit de considérer un point quelconque (noté  $O_1$ ) du solide  $S_1$  et de lui appliquer la formule classique du champ de vitesse d'un solide

$$\vec{v}(I \in S_1/\mathcal{R}) = \vec{v}(O_1/\mathcal{R}) + \vec{\Omega}(S_1/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O_1I}.$$

Noter que le point  $O_1$  est un point lié au solide  $S_1$  défini une bonne fois pour toutes alors que le point  $I$  change à chaque instant.

# 3 Éléments de dynamique

## 3.1 Éléments de dynamique

### 3.1.1 Principe des actions réciproques

**Énoncé** On considère deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$ , dont les forces d'interactions sont respectivement notées  $\vec{f}_{12}$  (force exercée par 2 sur 1) et  $\vec{f}_{21}$ .

*Le principe des actions réciproques stipule que l'on a*

$$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21},$$

*et que les forces  $\vec{f}_{12}$  et  $\vec{f}_{21}$  sont portées par la droite passant par  $M_1M_2$ .*

### 3.1.2 Théorème de la résultante dynamique

Aussi appelé loi de Newton, ou principe fondamental de la dynamique (PFD).

**Énoncé**

*Pour un système fermé dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$*

$$\left( \frac{d\vec{p}_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{F}_{\text{ext}},$$

*où  $\vec{F}_{\text{ext}}$  est l'ensemble des forces **extérieures** et  $\vec{p}_{\mathcal{R}_g} = m\vec{v}_{\mathcal{R}_g}$  est la quantité de mouvement dans  $\mathcal{R}_g$ . Les forces intérieures n'intervenant pas, la définition du système devient fondamentale.*

### 3.1.3 ★ PFD dans un référentiel non galiléen ★

On considère le mouvement d'un point matériel dans un référentiel  $\mathcal{R}$  non galiléen. Le PFD n'est applicable que dans un référentiel galiléen. On se place dans un référentiel galiléen et appliquons le PFD

$$\vec{f} = \left( \frac{d\vec{p}_{\mathcal{R}_g}}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = m\vec{a}_{\mathcal{R}_g}.$$

Or, d'après les relations de composition des accélérations,

$$\vec{f} = m\vec{a}_{\mathcal{R}_g}(M) = m(\vec{a}_{\mathcal{R}} + \vec{a}_e + \vec{a}_c),$$

d'où

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}} = \vec{f} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c.$$

Ainsi, le PFD dans un référentiel  $\mathcal{R}$  quelconque s'écrit

$$\left( \frac{d\vec{p}_{\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic},$$

avec

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e, \quad \vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c.$$

Même si ce ne sont pas des forces, et traduisent le caractère non galiléen, on appelle ces deux quantités forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

### 3.1.4 ★ Cas d'un référentiel en rotation uniforme autour d'un axe fixe ★

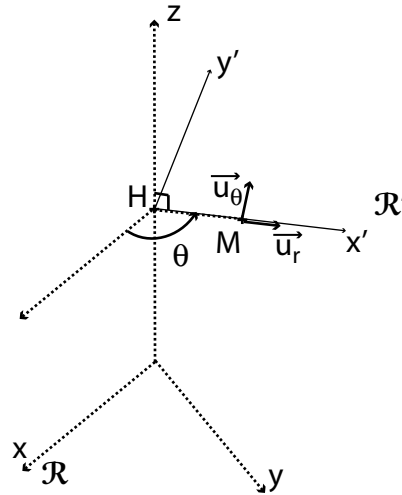


FIGURE 3.1 – Référentiel en rotation autour d'un axe fixe.

Soit un référentiel  $\mathcal{R}$ . On considère  $\mathcal{R}'$  en rotation uniforme autour d'un axe fixe  $\Delta$  à la vitesse angulaire  $\Omega$ . Soit  $M$  un point n'appartenant pas à  $\Delta$ . Soit  $H$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $\Delta$ . On peut alors montrer que l'accélération d'entraînement dans  $\mathcal{R}$  vaut

$$\boxed{\vec{a}_e = -\Omega^2 \overline{HM}}$$

et on en déduit l'expression de la force d'inertie d'entraînement

$$\boxed{\vec{f}_{ie} = m\Omega^2 \overline{HM}}$$

DÉMONSTRATION :

On considère la géométrie de la figure (3.1). On se place en coordonnées cylindrique, de vecteur de base locale  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . Soit  $M$  le point matériel considéré en mouvement dans  $\mathcal{R}'$ . On note  $M_c$  le point coïncident à l'instant  $t$  et donc immobile dans  $\mathcal{R}'$ . On note  $H$  la projection orthogonale de  $M$  sur l'axe de rotation de  $\mathcal{R}'$  (supposé fixe). Soit  $\vec{v}_e$  la vitesse d'entraînement de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .

$$\vec{v}_e = \left( \frac{d\overline{OM}_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d\overline{OH}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} + \left( \frac{d\overline{HM}_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}}.$$

On se place en cylindrique

$$\left( \frac{d\overline{HM}_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \frac{d}{dt} (r\vec{u}_r)_{\mathcal{R}} = \underbrace{\dot{r}\vec{u}_r}_{=0 \text{ } M_c \text{ fixe dans } \mathcal{R}'} + r \left( \frac{d\vec{u}_r}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta,$$

soit, pour  $\omega = \dot{\theta}$  la vitesse angulaire instantanée,

$$\boxed{\vec{v}_e = r\omega\vec{u}_\theta}.$$

On en déduit l'accélération d'entraînement, en tenant compte que  $\dot{r} = 0$  pour le point coïncident,

$$\vec{a}_e = \left( \frac{d\overline{OM}_c}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = r\dot{\omega}\vec{u}_\theta - r\omega^2\vec{u}_r,$$

et donc dans le cas d'un axe fixe,

$$\boxed{\vec{a}_e = r\dot{\omega}\vec{u}_\theta - r\omega^2\vec{u}_r}.$$

Dans le cas particulier d'une rotation uniforme,

$$\boxed{\vec{a}_e = -r\omega^2\vec{u}_r = -\omega^2\overline{HM}}$$



### 3.1.5 ★ Généralisation à un système matériel ★

Par définition, on appelle quantité de mouvement d'un point matériel la quantité  $\vec{p} = m\vec{v}$ . On généralise cette notion pour un système de points de masse  $m_i$  selon

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i.$$

Dans le cas d'un système continue, on généralise suivant

$$\vec{P} = \int \vec{v}(M) dm(M).$$

En notant  $M$  la masse totale du système, et  $G$  sont centre de masse, on peut montrer que

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{V}(G)}$$

**Cas du RCM  $\mathcal{R}^*$**  Le RCM est un référentiel particuliers possédant quelques propriétés à connaître. Le RCM étant en translation par rapport à un référentiel galiléen, il est donc aussi nécessairement en translation par rapport au référentiel d'étude initial  $\mathcal{R}$ , et donc on a

$$\boxed{\vec{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \vec{0}}.$$

Remarque : la définition du RCM est dépendante du référentiel initial (car on n'impose qu'une translation).

Ainsi, comme la vitesse rotation instantanée d'entraînement est nulle, l'accélération de Coriolis l'ai aussi et donc

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}^* + \vec{v}(G)},$$

car la vitesse d'entraînement est celle de  $G$ . De même, pour les accélérations

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}^* + \vec{a}(G) + \underbrace{\vec{a}_c}_{=\vec{0}}}.$$

De plus il est trivial de montrer que

$$\boxed{\vec{P}^* = \vec{0}},$$

par définition de  $\mathcal{R}^*$ .

## 3.2 Loi de gravitation universelle et théorème de Gauss

Analogies entre l'électrostatique et la gravitation.

Électrostatique	Gravitation
2 particules chargées	2 particules massives
$\vec{f}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{21}$	$\vec{f}_{21} = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{21}$
Champ électrique	Champ de gravitation
$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{r^2} \vec{u}$	$\vec{G} = -\mathcal{G} \frac{m_0}{r^2} \vec{u}$

Par conséquent, on faisant l'analogie formelle

$$\boxed{q \leftrightarrow m} \quad \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \leftrightarrow -\mathcal{G}},$$

on obtient des résultats équivalents sur la structure des champs.

*circulation conservative*

<b>Électrostatique</b>	<b>Gravitation</b>
------------------------	--------------------

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$\oint \vec{G} \cdot d\vec{l} = 0$$

$\vec{E}$  dérive d'un potentiel électrostatique

$\vec{G}$  dérive d'un potentiel gravitationnel

charge ponctuelle :  $V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

masse ponctuelle :  $V(r) = -\mathcal{G} \frac{m}{r}$

*flux non conservatif*

$$\oint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}}/\epsilon_0$$

$$\boxed{\oint_{\Sigma} \vec{G} \cdot d\vec{S} = -4\pi\mathcal{G}M_{\text{int}}}$$

Exemple d'application la plus courante : calcul du champ de gravitation à l'intérieur de la Terre, cette dernière étant considérée comme homogène.

### 3.3 Cas des systèmes ouverts : exemple de la fusée

*Cf.* TD.

# 4 Aspects énergétiques

## 4.1 Travail d'une force

### 4.1.1 Définitions

Soit un point matériel  $M$  soumis à une force  $\vec{F}$ . Au cours d'un déplacement  $d\vec{l}$ , la force **fournit** un travail élémentaire  $\delta W$  selon

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

dans un référentiel  $\mathcal{R}$  donné.

Au cours d'un déplacement de  $A$  vers  $B$ , on a un travail  $W$

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

où  $C$  est le chemin suivi. A priori, le travail dépend du chemin suivi.  $W$  a la dimension d'une énergie, et donc son unité USI est le Joule ( $J$ ).

La puissance  $\mathcal{P}$  d'une force  $\vec{F}$ , appliquée sur un point matériel  $M$  de vitesse  $\vec{v}$ , **dans un référentiel  $\mathcal{R}$**  est définie par

$$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \vec{v},$$

dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . La puissance s'exprime en Watts ( $W$ ) en USI.

Remarque :  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{W}$  sont des grandeurs algébriques, si  $\mathcal{P} > 0$ , on parle de travail moteur, et si  $\mathcal{P} < 0$ , on parle de travail résistant.

### 4.1.2 Lien en $\mathcal{P}$ et $\mathcal{W}$

On a

$$\mathcal{P} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt},$$

d'où

$$\delta W = \mathcal{P} \delta t.$$

## 4.2 Théorème de l'énergie cinétique

### 4.2.1 Énoncé

*On considère un point  $M$  se déplaçant de  $M_1$  à  $M_2$  entre les instants  $t_1$  et  $t_2$ . On a alors la variation d'énergie cinétique donnée selon, dans un référentiel galiléen,*

$$\Delta E_{c21} = E_{c2} - E_{c1} = W_{1 \rightarrow 2}.$$

### 4.2.2 Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen, on a le PFD  $\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ , et donc

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right),$$

soit, par rapport à  $\mathcal{R}_g$ ,

$$\mathcal{P} = \frac{dE_c}{dt}.$$

### 4.2.3 Généralisation à un solide

Soit  $(\Sigma)$  un système matériel en mouvement par rapport à un référentiel  $\mathcal{R}$  et soumis à un champ de forces réparties  $\{d\vec{f}(M)\}$ . On appelle puissance de ce champ de forces la somme des puissances des forces élémentaires exercées en chacun des points de  $(\Sigma)$  soit

$$\mathcal{P} = \iiint_{\Sigma} d\vec{f}(M) \cdot \vec{v}(M).$$

$\mathcal{P}$  est additive par construction pour les partitions de  $\Sigma$  ou les champs de force. Elle dépend du référentiel.

On définit de même  $\delta W$  le travail élémentaire entre  $t$  et  $t + dt$  pour un déplacement élémentaire  $d\vec{M}$

$$\delta W = \mathcal{P} dt = \iiint_{\Sigma} d\vec{f}(M) \cdot d\vec{M}.$$

### 4.2.4 ★ Théorème de l'énergie cinétique pour un solide ★

Soit  $(\Sigma)$  un système **fermé**, dans un référentiel **galiléen**  $\mathcal{R}$

$$E_c = \iiint_{\Sigma} \frac{1}{2} dm v^2(M),$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{dE_c}{dt} &= \iiint_{\Sigma} \frac{1}{2} dm 2v(M) \cdot \frac{dv(M)}{dt}, \\ &= \iiint_{\Sigma} dm \vec{a}(M) \cdot \vec{v}(M). \end{aligned}$$

Or,  $\vec{a}(M) dm = d\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} + d\vec{F}_{\text{int} \rightarrow M}$ , d'où

$$\frac{dE_c}{dt} = \iiint_{\Sigma} d\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M} \cdot \vec{v}(M) + \iiint_{\Sigma} d\vec{F}_{\text{int} \rightarrow M} \cdot \vec{v}(M).$$

Soit

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}.$$

En intégrant la relation précédente, on obtient le théorème de l'énergie cinétique

$$E_{c2} - E_{c1} = W_{\text{ext } 1 \rightarrow 2} + W_{\text{int } 1 \rightarrow 2}.$$

On obtiendrait le même résultat pour un système de particules. **On retiendra qu'il faut tenir compte du travail des forces intérieures.**

## 4.3 Énergie potentielle

### 4.3.1 Définition

Lorsqu'une force  $\vec{f}$ , appliquée sur un point matériel, ne dépend que de  $M$ , on dit que le point se trouve sur un champ de forces, indépendant du temps  $\vec{f} = \vec{f}(M)$ . Soit un point matériel  $M$  soumis à l'action d'un champ de force  $\vec{f}(M)$  et se déplaçant de  $d\vec{l} = d\overrightarrow{OM}$  entre  $t$  et  $t + dt$  dans un référentiel **galiléen** d'origine  $O$ .

Si le travail élémentaire  $\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{l}$  peut se mettre sous la forme  $\delta W = -dE_p$ , on dit que la force  $\vec{f}(M)$  dérive de la fonction énergie potentielle  $E_p$ . L'expression de  $E_p$  est obtenue, à une constante près, par l'intégration de la relation locale

$$dE_p = -\delta W = -\vec{f} \cdot d\vec{l}.$$

Remarque : l'énergie potentielle est définie à une constante près.

### 4.3.2 ✿ Exemples ✿

#### Énergie potentielle de pesanteur

Pour une particule de masse  $m$ , soumise à un champ de pesanteur  $\vec{g} = g\vec{u}_z$ , on a

$$E_p = mgz + E_0,$$

où  $E_0$  est une constante.

#### Énergie potentielle élastique

Une particule est soumise à une force de rappel élastique de la forme

$$\vec{f} = -k(l - l_0)\vec{u}_x.$$

À cette force, on peut associer une énergie potentiel élastique

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + E_0.$$

#### Énergie potentielle d'un champ newtonien de forces

On considère une interaction dite newtonienne dont l'intensité varie en  $1/r^2$ , i.e. de la forme

$$\vec{f} = -\frac{k}{r^2}\vec{u}_r,$$

où le coefficient  $k > 0$  pour une interaction attractive, et  $k < 0$  pour une interaction répulsive. Par exemple,  $k = \mathcal{G}m_1m_2$  pour une interaction gravitationnelle, alors que  $k = -\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0}$  dans le cas de la force électrostatique de Coulomb. Alors l'énergie potentielle associée a pour expression

$$E_p = -\frac{k}{r} + E_0.$$

### ★ Un cas très fréquent ★

On considère un référentiel  $\mathcal{R}$  tournant à  $\Omega$  constant par rapport à  $\mathcal{R}_g$  galiléen. Dans le référentiel tournant, il faut tenir compte de la force d'inertie du point  $M$  de projection orthogonal  $H$  sur l'axe de rotation

$$\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\Omega^2\overrightarrow{HM}.$$

En se plaçant en cylindrique

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{u}_r + z\vec{u}_z, \\ d\overrightarrow{OM} &= dr\vec{u}_r + r d\vec{u}_r + dz\vec{u}_z.\end{aligned}$$

Or,  $d\vec{u}_r$  est orthogonal à  $\vec{u}_r$ . On calcul alors le travail élémentaire

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{f}_{ie} \cdot d\vec{OM}, \\ &= m\Omega^2 r \vec{u}_r \cdot (dr\vec{u}_r + r d\vec{u}_r + dz\vec{u}_z), \\ &= m\Omega^2 r dr, \\ &= -d\left(-\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2\right).\end{aligned}$$

On peut donc, **dans ce cas**, associer une énergie potentielle aux forces d'inertie d'entraînement selon

$$E_{p_{\text{inertie}}} = -\frac{1}{2}m\Omega^2 r^2.$$

## 4.4 Énergie mécanique

Soit un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , décrivant une trajectoire  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{R}_g$  sous l'action de différentes forces

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{des forces conservatives, telles que } dE_p = -\delta W_p, \\ \text{des forces non conservatives, ne dérivant pas d'une énergie potentielle.} \end{array} \right.$$

Pour un déplacement élémentaire  $d\vec{l}$  du point matériel  $M$  dans  $\mathcal{R}_g$ , le théorème de l'énergie cinétique conduit à

$$dE_c = \delta W = \underbrace{\delta W_p}_{-dE_p} + \delta W_d,$$

soit

$$d(E_c + E_p) = \delta W_d.$$

On définit l'énergie mécanique  $E_m$  selon

$$E_m = E_c + E_p.$$

Si les forces agissant sur la particule dérivent d'une énergie potentielle, alors  $E_m$  est **conservée**.

### 4.4.1 Intégrale 1<sup>re</sup> du mouvement

La conservation de  $E_m$  donne une équation supplémentaire pour l'étude du mouvement, mais elle n'apporte pas d'informations supplémentaires par rapport aux théorèmes généraux. Elle fait intervenir des dérivées premières par rapport au temps des positions, contrairement aux théorèmes généraux (TMC, TRD) faisant intervenir des dérivées secondes. En quelque sorte, la conservation de l'énergie mécanique est obtenue en "intégrant" une fois les équations du mouvement, la constante d'intégration étant la valeur de l'énergie, obtenue via les conditions initiales. C'est pour cela que l'on parle d'intégrale première du mouvement.

### 4.4.2 Conditions de stabilité d'une position d'équilibre

La donnée de  $E_p(\{x_i\})$  en fonction des coordonnées  $\{x_i\}$  permet de prédire des résultats sur la nature de la trajectoire en fonction de  $E_m$ , c'est-à-dire les conditions initiales. En effet, on a  $E_c > 0$ , donc en vertu de  $E_m = \text{Cte} = E_p + E_c < E_p$ , donc les trajectoires sont contraintes à vérifier

$$E_p(\{x_i\}) < E_m.$$

## 4.5 Voisinage de l'équilibre; systèmes conservatifs unidimensionnels

### 4.5.1 Conditions de stabilité d'une position d'équilibre

La donnée de  $E_p(\{x_i\})$  en fonction des coordonnées  $\{x_i\}$  permet de prédire des résultats sur la nature de la trajectoire en fonction de  $E_m$ , c'est-à-dire les conditions initiales. En effet, on a  $E_c > 0$ , donc en vertu de  $E_m = \text{Cte} = E_p + E_c < E_p$ , donc les trajectoires sont contraintes à vérifier

$$\boxed{E_p(\{x_i\}) < E_m}.$$

#### Cas d'un seul degré de liberté

On considère un système 1D d'énergie potentiel  $E_p(x)$ . Une position  $x = x_0$  est une position d'équilibre si elle vérifie la condition

$$\boxed{\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_0} = 0}.$$

Ces positions d'équilibre sont stables si elles vérifient de plus

$$\boxed{\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0}.$$

#### Cas de plusieurs degrés de liberté

On considère un système 1D d'énergie potentiel  $E_p(\{x_i\})$ . Une position  $\{x_i\} = \{x_i^0\}$  est une position d'équilibre si elle vérifie la condition

$$\boxed{\forall i, \left(\frac{\partial E_p}{\partial x_i}\right)_{\{x_i\}=\{x_i^0\}} = 0}.$$

Ces positions d'équilibre sont stables si elles vérifient de plus

$$\boxed{\forall i, \left(\frac{\partial^2 E_p}{\partial x_i^2}\right)_{\{x_i\}=\{x_i^0\}} > 0}.$$

### 4.5.2 Cas des petites oscillations autour de l'équilibre

On considère un potentiel  $E_p(x)$  unidimensionnel, dont  $x_0$  est une position d'équilibre stable, *i.e.*

$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_0} = 0, \quad \text{et} \quad \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0.$$

Pour les petits mouvements autour de  $x_0$ , on peut faire un développement limité du potentiel

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \dots$$

En posant  $m\omega_0^2 = \left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0$ , on obtient donc

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2}m\omega_0^2(x - x_0)^2,$$

c'est l'énergie potentielle élastique d'un oscillateur harmonique (voir l'expression de l'énergie potentielle d'un ressort). D'où l'importance de l'étude des oscillateurs harmoniques.

## 4.6 Relation entre force et énergie potentiel

### 4.6.1 Opérateur gradient

Soit  $U(\vec{r})$  une fonction scalaire de la position d'un point  $M$  de l'espace. Lors d'un déplacement de  $M$  de  $d\vec{r}$ , la fonction  $U(\vec{r})$  varie de

$$dU(\vec{r}) = U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(\vec{r}) = \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot d\vec{r},$$

où  $\overrightarrow{\text{grad}}U$ , également noté  $\vec{\nabla}U$ , est l'opérateur vectoriel gradient appliqué à la fonction scalaire  $U(\vec{r})$ .

### 4.6.2 Expression en coordonnées cartésiennes

On montre aisément que

$$\overrightarrow{\text{grad}}U(\vec{r}) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z.$$

### 4.6.3 Cas simples

#### Symétrie axiale

Si  $U$  est une fonction de la seule variable  $x$ , alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}U(x) = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x.$$

#### Symétrie cylindrique

La grandeur  $U$  ne dépend que de la distance  $r = HM$  du point  $M$  à l'axe de révolution  $Oz$  du système. On obtient alors

$$\overrightarrow{\text{grad}}U(r) = \frac{dU}{dr}\vec{u}_r,$$

avec  $\vec{u}_r = \overrightarrow{HM}/r$ .

#### Symétrie sphérique

Dans ce cas, en coordonnées sphériques d'origine  $O$ , avec  $r = OM$ , on a

$$\overrightarrow{\text{grad}}U(r) = \frac{dU}{dr}\vec{u}_r,$$

avec  $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/r$ .

## 4.7 Relation entre force et énergie potentielle

On dit que le champ de force  $\vec{f}(M)$  dérive de la fonction énergie potentielle  $E_p(M)$  à condition que

$$\vec{f}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}E_p(M).$$



## 4.8 Analogie entre potentiel gravitationnel et potentiel électrostatique

On considère une particule de masse  $m$  située en  $O$ . Elle exerce sur une particule de masse  $m'$  située en  $M$  une force gravitationnelle qui dérive d'une énergie potentielle  $E_p$  qu'on obtient (à une constante près) selon

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{mm'}{r}.$$

On peut alors introduire un potentiel gravitationnel  $V_g$  tel que  $E_p = m'V_g$

$$V_g = -\mathcal{G} \frac{m}{r}.$$

On a alors  $\vec{f} = -m' \overrightarrow{\text{grad}} V_g = m' \vec{g}$ , où  $\vec{g}$  est le champ de pesanteur local. En électromagnétisme, on a le champ électrique  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V_e$ , où  $V_e$  est le potentiel électrostatique. Dans le cas d'un champ résultant d'une charge ponctuelle  $q$  en  $O$ , on a

$$V_e = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Une charge  $q'$  sera soumise à une force  $q'\vec{E}$ . On a donc une analogie formelle entre électrostatique et gravitation, à condition d'opérer les substitutions suivantes

$$\vec{g} \leftrightarrow \vec{E}, \quad m \leftrightarrow q, \quad V_g \leftrightarrow V_e,$$

$$-4\pi\mathcal{G} \leftrightarrow \frac{1}{\epsilon_0}.$$

En particulier, le théorème de Gauss est également applicable au cas du potentiel gravitationnel.

# 5 Moment cinétique - dynamique d'un solide indéformable

---

## 5.1 Définition

### 5.1.1 Cas d'un point matériel

Soit  $m$  un point matériel de masse  $m$ , on définit le moment cinétique en  $O$  selon

$$\boxed{\vec{L}(O) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}},$$

où  $\vec{p} = m\vec{v}$  est l'impulsion.

**Il important de garder à l'esprit que le moment cinétique est un champ de vecteur, et qu'on le calcul en un point de l'espace.**

Une conséquence est que l'on peut calculer le moment cinétique en  $O'$  connaissant  $\vec{p}$  et  $\vec{L}(O)$  selon

$$\vec{L}(O') = \vec{L}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{p}.$$

### 5.1.2 Cas d'un ensemble de points matériels et d'un solide

On généralise cette notion par extensivité, pour le système de points matériels selon

$$\vec{L}(O) = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i \vec{v}(m_i),$$

et dans le cas d'un solide

$$\vec{L}(O) = \int \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) dm$$

**Changement de point  $O$  pour le moment cinétique** Soit  $O$  et  $O'$  deux points distincts. On a

$$\begin{aligned} \vec{L}(O') &= \iiint \overrightarrow{O'M} \wedge \vec{v}(M) dm, \\ &= \underbrace{\iiint \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{v}(M) dm}_{\overrightarrow{O'O} \wedge m\vec{v}(G)} + \underbrace{\iiint \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) dm}_{\vec{L}(O)}, \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\vec{L}(O') = \vec{L}(O) + \overrightarrow{O'O} \wedge \vec{P}}.$$

**Cas du RCM** Dans le RCM, on a  $\vec{P}^* = \vec{0}$ , et donc par conséquent le moment cinétique est indépendant du point où on le calcul dans  $\mathcal{R}^*$

$$\forall O, \vec{L}^*(O) = \vec{L}^*.$$

De plus, par composition des vitesses, dans le référentiel initial  $\mathcal{R}$

$$\boxed{\vec{L}(G) = \vec{L}^*}.$$

### 5.1.3 Solide en rotation autour d'un axe $\Delta$

On se place dans un référentiel quelconque  $\mathcal{R}$ . Soit  $O$  un point de l'axe de rotation. A priori, il n'y a aucune raison pour que  $\vec{L}(O)$  soit porté par l'axe  $\Delta$ . Soit  $\vec{u}$  le vecteur directeur de  $\Delta$ . On a le vecteur rotation instantané  $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}$ . Soit  $L_\Delta$  la projection de  $\vec{L}(O)$  sur  $\Delta$ . On montre que

$$\boxed{L_\Delta = J_\Delta \omega},$$

avec  $J_\Delta$  le moment d'inertie du solide selon l'axe  $\Delta$

$$J_\Delta = \int_{\text{solide}} r_\Delta^2 dm.$$

où  $r_\Delta$  est la distance à  $\Delta$  du point courant.

## 5.2 Théorème du moment cinétique

### 5.2.1 Énoncé

*Pour  $\mathcal{S}$  un système fermé dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , on a*

$$\left( \frac{d\vec{L}_{\mathcal{R}_g}(O)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O),$$

*le point  $O$  étant un point fixe dans le référentiel galiléen.*

### 5.2.2 Cas du RCM

Dans le cas particuliers du RCM, on peut montrer que

$$\left( \frac{d\vec{L}^*(G)}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G),$$

et d'après  $\vec{L}(G) = \vec{L}^*$ , on en déduit que l'on peut appliquer le TMC en  $G$  sans faire intervenir les forces d'inertie

$$\boxed{\left( \frac{d\vec{L}_{\mathcal{R}_g}(G)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G) \Leftrightarrow \left( \frac{d\vec{L}^*(G)}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G)}.$$

### 5.2.3 Généralisation à un système matériel

#### Cas d'un ensemble de points matériels

On considère un système physique noté  $\Sigma$  constitué d'un ensemble de points  $\{i\}$  de masse  $m_i$ , vitesse  $\vec{v}_i$  et de position  $M_i$ . On a alors

$$\boxed{\left( \frac{d\vec{L}(O)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_i(O)},$$

où  $O$  est un point fixe dans  $\mathcal{R}_g$ , référentiel galiléen, et  $\mathcal{M}_i(O)$  moment en  $O$  exercé sur la particule  $i$ .

## 5.3 Théorèmes de Koenig

### 5.3.1 1<sup>er</sup> théorème de Koenig

Soit  $P$  un point quelconque de l'espace, un système matériel de masse totale  $M$  et de centre de masse  $G$

$$\vec{L}(P) = \vec{L}^*(G) + \overrightarrow{PG} \wedge M\vec{V}(G).$$

### 5.3.2 2<sup>e</sup> théorème de Koenig

Soit un système matériel de masse totale  $M$  et de centre de masse  $G$ . On peut aisément montrer que

$$E_c = E_c^* + \frac{1}{2}M\vec{V}(G)^2.$$

## 5.4 Théorème généraux de la mécanique des solides

### 5.4.1 TRD : théorème de la résultante cinétique

Dans un référentiel galiléen,

$$m\vec{a}(G) = \vec{F}_{\text{ext}}.$$

Dans le cas d'un référentiel non galiléen, il faut tenir compte des forces d'inertie.

### 5.4.2 TMC : théorème du moment cinétique et TMC\*

Pour  $\mathcal{S}$  un système fermé dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , on a

$$\left( \frac{d\vec{L}_{\mathcal{R}_g}(O)}{dt} \right)_{\mathcal{R}_g} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(O),$$

le point  $O$  étant un point fixe dans le référentiel galiléen.

Dans le référentiel barycentrique, on a

$$\left( \frac{d\vec{L}^*}{dt} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{\mathcal{M}}_{\text{ext}}(G).$$

$\vec{L}^*$  étant indépendant du point dans le RCM.

Remarque : le RCM n'est pas galiléen mais

- $\vec{f}_{ic} = \vec{0}$  car  $\mathcal{R}^*$  est en translation par rapport à un référentiel galiléen,
- $\vec{f}_{ie} \neq \vec{0}$  mais  $\vec{\mathcal{M}}_{ie}(G) = \vec{0}$  (translation).

### 5.4.3 Contacts entre les solides

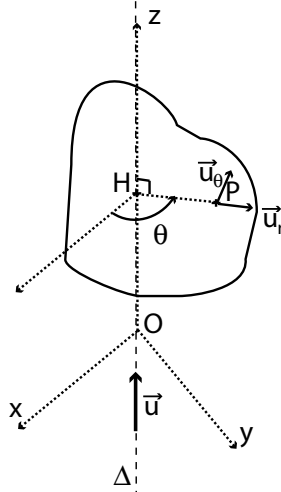
Lorsqu'un solide intervient dans un problème, il convient d'étudier les actions de liaison de ce solide. Deux cas peuvent se présenter :

- la vitesse de glissement est nulle au point de contact, alors l'écriture de la condition de non glissement fournit une équation supplémentaire,
- la vitesse de glissement est non nulle, alors les lois du frottements donne une relation entre les deux composantes de la réaction  $\vec{R}_N$  et  $\vec{R}_T$ , et donc une équation supplémentaire.

Dans les deux cas, l'étude du contact donne donc une équation supplémentaire. Exemple d'application : l'effet rétro (Cf. TD).

## 5.5 Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe $\Delta$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$

Soit un solide ( $\mathcal{S}$ ) en rotation autour d'un axe fixe  $\Delta = (O; \vec{u})$ . Soit  $\vec{\Omega} = \dot{\theta}\vec{u}$  son vecteur instantané de rotation. On cherche à calculer la composante de  $\vec{L}(O)$ ,  $O \in \Delta$ , selon Oz. A priori,



il n'y a aucune raison pour que  $\vec{L}(O)$  soit dans la même direction que  $\vec{u}$ . On a

$$\vec{v}(M) = r\Omega\vec{u}_\theta.$$

On a donc

$$\begin{aligned} d\vec{L}(O) &= dm(M)\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M) = dm(M)(r\vec{u}_r + z\vec{u}_z) \wedge (r\Omega\vec{u}_\theta), \\ &= dm(M)r^2\Omega\vec{u}_z - dmrz\Omega\vec{u}_r. \end{aligned}$$

Donc on obtient  $L_\Delta(O) = \vec{L}(O) \cdot \vec{u}$

$$L_\Delta(O) = \iiint dm(M)r^2\Omega = \Omega \underbrace{\iiint r^2 dm(M)}_{I_\Delta} = I_\Delta\Omega.$$

On remarque que  $L_\Delta(O)$  est indépendant de  $O$ , et est noté désormais  $L_\Delta$ .  $I_\Delta$  est le moment d'inertie du solide selon l'axe  $\Delta$ . Conséquence,

$$\boxed{L_\Delta = I_\Delta\Omega}.$$

Du théorème du moment cinétique, on en déduit aisément

$$I_\Delta\ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta,$$

où  $\mathcal{M}_\Delta$  est la projection de  $\vec{M}(0)$  sur  $\Delta$ , indépendant de  $O$ .

# 6 Problème à deux corps - Forces centrales

---

## 6.1 Problème à deux corps

On considère un système isolé de deux points matériels  $A_1$  (de masse  $m_1$ ) et  $A_2$  ( $m_2$ ) dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ . On peut décomposer le mouvement de l'ensemble en

- Mouvement du centre d'inertie  $G$  de  $(A_1, A_2)$  dans  $\mathcal{R}_g$ .
- Mouvement autour de  $G$  dans le référentiel du centre de masse (ou barycentrique)  $\mathcal{R}^*$ .

On pose

$$\vec{r} = \overrightarrow{A_1 A_2} = r\vec{u}, \quad \vec{f} = \vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12},$$

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{G A_1}, \quad \vec{r}_2 = \overrightarrow{G A_2}.$$

Par définition du centre de masse  $G$ , on a

$$m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = \vec{0},$$

et par définition de  $\vec{r}$ ,

$$-\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}.$$

On en déduit alors les relations suivantes

$$\vec{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}. \quad (6.1)$$

Le système étant isolé, le  $\mathcal{R}^*$  est galiléen, et le PFD appliqué à  $A_2$  donne

$$m_2 \left( \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}^*} = \vec{f} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}.$$

Si on pose

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (\text{masse réduite}),$$

cette équation devient

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f},$$

et décrit le mouvement d'un point matériel de masse  $\mu$  et de position  $\vec{r}$  (dans le  $\mathcal{R}^*$ ). Ce point est appelé **mobile fictif**.

On est donc ramené à l'étude du mouvement d'un point matériel unique (le mobile fictif), les équations (7.1) permettant ensuite d'en déduire le mouvement de  $A_1$  et  $A_2$ . On peut ensuite vérifier que le moment cinétique et l'énergie cinétique du système sont les mêmes que ceux du mobile fictif (de masse  $\mu$ ).

$$\begin{aligned} \vec{L}^* &= m_1 \vec{r}_1 \wedge \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \vec{r}_2 \wedge \dot{\vec{r}}_2 = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}, \\ E_c^* &= \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2. \end{aligned}$$

## 6.2 Mouvements à force centrale

Dans  $\mathcal{R}^*$ , le mobile fictif  $M(\mu)$  est soumis à la **force centrale**  $\vec{f}$  dont le support passe constamment par  $G$  (fixe dans  $\mathcal{R}^*$ ). On suppose que cette force dérive de l'énergie potentielle  $E_p(r)$  telle que

$$f(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr}.$$

Pour une force centrale, le théorème du moment cinétique donne immédiatement

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0,$$

car le moment en  $G$  d'une force centrale est nul.

Il est alors intéressant de remarquer qu'il existe 2 intégrales premières du mouvement :

- Intégrale première de l'énergie :  $E_p + E_c = E$ ,
- Intégrale première des aires :  $\vec{L} = \overrightarrow{Cte}$ .

On considère désormais le mouvement général d'un mobile  $M$ , soumis à une force centrale passant par  $O$ .

### 6.2.1 Loi des aires

Comme  $\vec{M}_{\text{ext}}(O) = \vec{0}$ ,  $\vec{L} = \overrightarrow{Cte}$  et comme  $\vec{r}$  est orthogonal à  $\vec{L}$  par définition,  $\overrightarrow{OM}$  est dans le plan fixe perpendiculaire à  $\vec{L}$ , passant par  $O$ . **Le mouvement est donc plan.**

Le mouvement étant étudié dans  $\mathcal{R}^*$ , on reprend les notations habituelles :

$$\left\{ \begin{array}{l} O \text{ pour le point fixe de } \mathcal{R}^*, \text{ i.e. } G, \\ M \text{ (de masse } m) \text{ pour le mobile fictif,} \\ \text{coordonnées polaires dans le plan du mouvement : } r \text{ et } \theta. \end{array} \right.$$

On désigne par  $\mathcal{R}$  le repère  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . On a

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\dot{\vec{r}} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z.$$

$r^2\dot{\theta}$  représente le double de la vitesse aréolaire (aire balayé par le rayon vecteur  $\overrightarrow{OM}$  par unité de temps).

On pose

$$\frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{C}{2},$$

$C$  est la **constante des aires**, directement liée au moment cinétique.

### 6.2.2 Equation radiale de l'énergie

On exprime l'intégrale première de l'énergie en coordonnées polaires avec  $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et donc  $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ , soit

$$E = E_p(r) + \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Utilisant l'intégrale première des aires

$$\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2},$$

il vient

$$E = E'_p(r) + E'_c(r),$$

avec

$$E'_p(r) = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2} \quad \text{et} \quad E'_c(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2.$$

$E'_c(r)$  n'est autre que l'énergie cinétique dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}$ .  $E'_p(r)$  est l'énergie potentielle dans  $\mathcal{R}$  où il faut tenir compte des forces d'inertie. En effet, dans  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{f} = f(r)\vec{u}_r + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$ , et comme les forces de Coriolis ne travaillent pas, on aura pour un déplacement  $\delta W = (f(r) + mr\dot{\theta}^2) dr$ , ce qui correspond à une énergie potentielle

$$- \int f(r)dr - \int mr\dot{\theta}^2 dr = E_p(r) + \frac{L^2}{2mr^2} + Cte,$$

car  $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$ , CQFD.

Cette énergie  $E'_p(r)$  est appelée *énergie potentielle effective*.

### 6.2.3 Lois du mouvement

Il faut raisonner à partir des intégrales premières du mouvement

$$r^2\dot{\theta} = \frac{L}{m} \tag{6.2}$$

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 = 2\frac{E}{m} - 2\frac{E_p}{m}, \tag{6.3}$$

et ensuite, on peut obtenir différentes grandeurs selon

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Élimination de } \theta \longrightarrow r(t), \\ \text{Élimination de } r \longrightarrow \theta(t), \\ \text{Élimination de } t \longrightarrow r(\theta). \end{array} \right.$$

Ces méthodes sont générales.

### 6.2.4 Formule de Binet

Cette formule est surtout utilisée dans le cas des forces en  $\frac{1}{r^2}$  (potentiels newtonniens). En éliminant  $t$  des équations (7.3) en utilisant

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}.$$

On effectue ensuite le changement de variable

$$u(\theta) = \frac{1}{r(\theta)},$$

et on pose

$$u'(\theta) = \frac{du}{d\theta}.$$

On dérive enfin l'expression obtenue par rapport à  $\theta$  pour éliminer la constante  $E$ . Il vient alors,

$$\boxed{f = -\frac{L^2}{m}u^2(u'' + u) = -mC^2u^2(u'' + u)}.$$

Cette relation permet de déterminer la loi de force  $f(r)$  (ou  $f(u)$ ) lorsque l'on connaît la trajectoire  $r(\theta)$ , ou réciproquement de déterminer la trajectoire correspondant à une loi de force donnée.

## 6.3 Interaction Newtonienne

Il s'agit d'une loi de force en  $f(r) = \frac{K}{r^2}$ , ce qui correspond à une énergie potentielle  $E_p(r) = \frac{K}{r}$ , si l'on choisit la constante de façon à ce que  $E_p(\infty) = 0$ .



### 6.3.1 Formules sur les cônes

Équation polaire d'une cône : avec le pôle au foyer, et l'axe focal pour axe polaire, on a

$$r = \frac{p}{1 \pm e \cos \theta},$$

où  $p$  est le **paramètre** de la cône, le signe  $\pm$  dépend du foyer choisi comme pôle et  $e$  est l'excentricité. Si  $e > 1$ , on a une hyperbole, si  $e = 1$  on a une parabole, et si  $e < 1$ , on a une ellipse.

Cas de l'ellipse : pour  $a$  le demi grand axe,  $b$  le demi petit axe et  $2c$  la distance entre les foyers, on a

$$e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad a^2 = b^2 + c^2, \quad S = \pi ab.$$

### 6.3.2 Mouvement dans le cas attractif

$$f = -\frac{k}{r^2}, \quad E_p = -\frac{k}{r}, \quad k > 0.$$

A partir de la formule de Binet, dans laquelle on reporte  $f = -kr^{-2} = -ku^2$ , on obtient

$$u'' + u = \frac{mk}{L^2} \quad \text{soit} \quad u(\theta) = A \cos(\theta + \varphi) + \frac{mk}{L^2}.$$

Par choix correct de l'axe polaire (conditions initiales), on peut prendre  $\varphi = 0$ , ce qui donne

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

avec  $p = \frac{L^2}{mk}$ , et  $e = \frac{AL^2}{mk} = Ap$ . Pour déterminer  $e$ , et donc la nature de la trajectoire, on peut utiliser

- les conditions initiales :  $E$  et  $L$ ,
- l'énergie : en reportant l'équation de la trajectoire dans l'expression de l'énergie, et après avoir éliminé  $t$ , il vient

$$e = \sqrt{1 + \frac{2mp^2}{L^2} E}.$$

Si  $E > 0$ , on a une hyperbole, si  $E = 0$  une parabole et si  $E < 0$  ellipse.

- utiliser l'énergie effective.

$$E = E'_p(r) + E'_c(r) \quad \text{avec} \quad E'_p = E_p + \frac{L^2}{2mr^2} = -\frac{k}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}.$$

Comme  $E'_c > 0$ , les seuls mouvements possibles vérifient  $E'_p \leq E$  et donc, si  $E \geq 0$ , cette condition permet à la particule de s'éloigner à l'infini (**états libres** : hyperbole ou parabole).

En revanche, si  $E < 0$ , la particule doit rester à distance finie (**états liés** : ellipses ou bien cercle pour  $E = E_{\min}$ ).

Une dernière méthode consiste en l'utilisation du vecteur excentricité, mais hors programme des classes préparatoires.

### 6.3.3 Application au mouvement des planètes

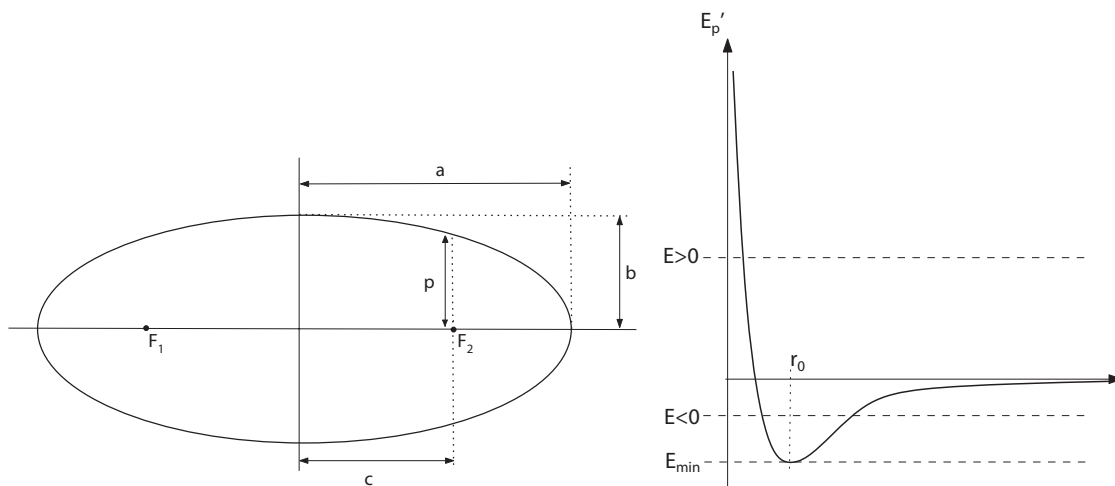
Lois de Képler

**1<sup>er</sup>loi** : les trajectoires des planètes sont des ellipses dont le soleil occupe l'un des foyers,

**2<sup>e</sup>loi** : leur mouvement obéit à la loi des aires,

**3<sup>e</sup>loi** : les carrés des périodes de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes.

Conséquences



- Le mouvement est plan et suit la loi des aires : *le champ de forces qui s'exerce sur les planètes est central.*
- Les trajectoires sont des ellipses :  $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p} = \frac{1}{p}(1 + e \cos \theta) \implies u + u'' = \frac{1}{p}$ .
- On reporte dans la formule de Binet,

$$f = -\frac{L^2}{m} \frac{u^2}{p} \quad \text{mais} \quad \frac{L}{m} = r^2 \dot{\theta} = 2 \frac{dS}{dt} = \frac{2\pi ab}{T},$$

Donc

$$f = -\frac{4m\pi^2 a^2 b^2}{pT^2 r^2},$$

et comme  $p = b^2/a$ ,

$$f = -4\pi \frac{a^3}{T^2} \frac{m}{r^2}.$$

En appliquant la 3<sup>e</sup> loi de Képler et en faisant apparaître la masse  $M$  du soleil pour symétriser, il vient

$$f = -\mathcal{G} \frac{mM}{r^2}.$$

C'est la loi de la gravitation de Newton avec  $\mathcal{G} \approx 6.67 \cdot 10^{-11}$  USI (constante de gravitation).

### 6.3.4 Mouvement dans le cas répulsif

Il suffit, formellement, de remplacer  $k$  par  $-k$ . Le problème type est la diffusion de Rutherford de particules  $\alpha$  par les noyaux d'une feuille d'or que l'on prend suffisamment mince pour ne pas absorber les particules  $\alpha$ . On rappelle qu'en toute rigueur, il faut raisonner sur le mobile fictif affecté de la masse réduite, avant d'en déduire le mouvement de chaque particule.

Il est ici facile d'expliciter les conditions initiales

- $L = mbv_0$ ,
- $E = \frac{1}{2}mv_0^2$  (car lorsque  $M$  est très éloigné,  $E_p = 0$ ).

Deux des problèmes qui se posent concernent les déterminations de la distance minimale d'approche  $r_1$  et de l'angle de diffusion  $\varphi$ .

Pour déterminer l'équation de la trajectoire, on utilise la formule de Binet qui donne

$$r = \frac{p}{-1 + e \cos \theta}.$$

C'est l'équation d'une hyperbole, avec  $p = \frac{L^2}{mK}$  et  $e = \frac{AL^2}{mK}$ , où  $A$  est une constante d'intégration. Pour le calcul de  $r_1$ , on écrit dans l'intégrale première de l'énergie que  $\dot{r} = 0$  en  $r = r_1$ , ce qui

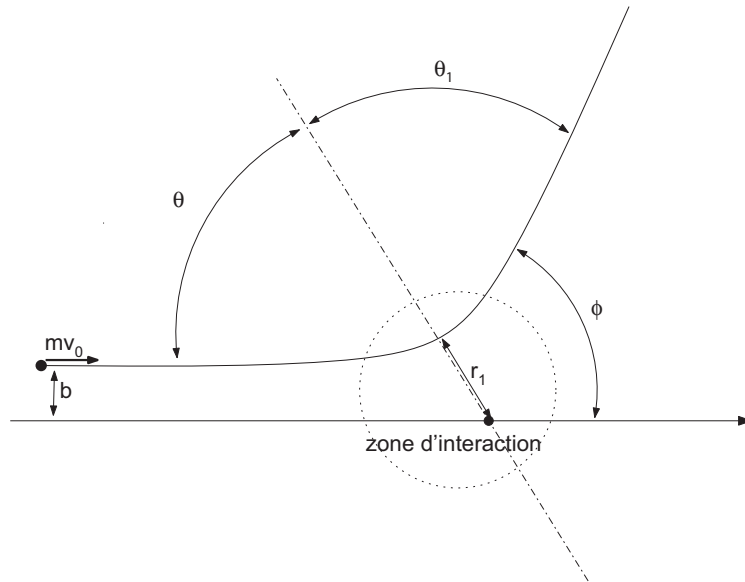


FIGURE 6.1 – Géométrie considérée pour la diffusion de Rutherford.  $b$  est le paramètre d'impact.

conduit à

$$r_1 = \frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mv_0^2}\right)^2 + b^2}.$$

Pour le calcul de l'angle de diffusion  $\varphi = \pi - 2\theta_1$ , on écrit

$$\cos \theta_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \cos \theta = \frac{1}{e},$$

donc  $\tan^2 \theta_1 = e^2 - 1$ , avec  $e = \sqrt{1 + 2\frac{L^2}{mk^2}E}$ . On en déduit

$$\tan \theta_1 = \frac{mbv_0^2}{k},$$

et comme  $\varphi = \pi - 2\theta_1$ , il vient finalement

$$\boxed{\cot \frac{\varphi}{2} = \frac{mbv_0^2}{k}}$$

où  $\cot$  désigne la cotangente. C'est la formule de Rutherford.

# 7 Référentiel terrestre - pesanteur

Les lois de la mécanique (théorèmes généraux et théorème de l'énergie cinétique) peuvent continuer à être appliquées dans un référentiel non galiléen à condition de rajouter aux forces d'interaction les forces d'inertie (d'entraînement et de Coriolis).

En introduisant le **poide** qui contient des termes d'inertie, il constitue une très bonne approximation d'un référentiel galiléen.

## 7.1 Champ de pesanteur terrestre

### 7.1.1 Poids d'un corps

Pour maintenir un point matériel **en équilibre** à la surface de la Terre, il faut lui appliquer une force  $\vec{F}$  (tension d'un fil, réaction du support, effort musculaire,...). On pose *par définition*

$$\boxed{\vec{P} = -\vec{F}},$$

$\vec{P}$  est le poids du point matériel. Pour un système matériel, on généralise selon (pour  $N$  particules par exemple)

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i.$$

### 7.1.2 Champ de pesanteur

On définit le champ de pesanteur  $\vec{g}$  par la relation

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Un point matériel de masse  $m$  en équilibre à la surface de la Terre est soumis aux interactions gravitationnelles  $m\vec{G}_A$  (surtout de la part de la Terre, mais également de la part des autres astres (lune, soleil,...), à la force  $\vec{F}$  qui le maintient et à la force d'inertie d'entraînement  $\vec{f}_e$  (la force de Coriolis est nulle à l'équilibre).

Condition d'équilibre

$$m\vec{G}_A + \vec{F} + \vec{f}_e = \vec{0},$$

donc

$$\boxed{m\vec{g} = \vec{P} = -\vec{F} = m\vec{G}_A + \vec{f}_e}. \quad (7.1)$$

Il est donc important d'avoir conscience du fait que

**La force d'inertie d'entraînement de la Terre est prise en compte dans le poids.**

Si l'on veut maintenant déterminer le mouvement du point  $M$  lorsqu'il est soumis à une force supplémentaire quelconque  $\vec{F}$ , on écrira

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{F} + m\vec{G}_A + \vec{f}_e + \vec{f}_c,$$

où  $\mathcal{R}_T$  désigne le référentiel terrestre. Mais compte tenu de la rotation très lente de la Terre, la force de Coriolis est en générale négligeable, sauf dans les expériences fines<sup>1</sup>, et en utilisant (7.1) il vient

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{F} + \vec{P}.$$

**À condition de faire intervenir le poids et de pouvoir négliger les forces de Coriolis,  $\mathcal{R}_T$  se comporte comme un référentiel galiléen.**

1. comme par exemple le pendule de Foucault ou la déviation vers l'Est

## 7.2 Étude sommaire des marées

Soit  $M$  un point à la surface de la Terre, de centre  $C$ . Faisons les hypothèses suivantes

- Tous les astres sont à symétrie sphérique et donc le champ gravitationnel qu'ils créent est celui d'un point de masse  $M_A$  situé en son centre,
- $\vec{\Omega}(\text{Terre}/\mathcal{R}_T) = \vec{\text{Cte}}$ .

Considérant un point matériel de masse  $m$ , soumis à  $\vec{F}$ , en équilibre par rapport à la Terre, écrivons en séparant les champs gravitationnels de la Terre  $\vec{\mathcal{G}}_T$  et celui des autres astres  $\vec{\mathcal{G}}_A$

- le PFD pour  $M$  dans  $\mathcal{R}_T$

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) = \vec{0} = \vec{F} + m\vec{\mathcal{G}}_T(M) + m\vec{\mathcal{G}}_A(M) + \vec{f}_e,$$

- le PFD pour **la Terre** dans  $\mathcal{R}_C$  (référentiel de Copernic, considéré comme galiléen)

$$M_T\vec{a}_{\mathcal{R}_C}(C) = M_T\vec{\mathcal{G}}_A(C),$$

- calculons l'accélération d'entraînement pour  $M$

$$\vec{a}_e = \left( \frac{d\vec{v}_e}{dt} \right)_{\mathcal{R}_C} = \left( \frac{d}{dt} \left( \vec{v}_{\mathcal{R}_C}(C) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{\text{CM}} \right) \right)_{\mathcal{R}_C} = \vec{a}_{\mathcal{R}_C}(C) - \Omega^2 \overrightarrow{\text{HM}},$$

où  $H$  est la projection orthogonal de  $M$  sur l'axe de rotation de la Terre. On en déduit

$$-\frac{F}{m} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \Omega^2 \overrightarrow{\text{HM}} + (\vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(C)).$$

Comme  $M$  est au repos,  $\vec{P} = m\vec{g} = -\vec{F}$  par définition, d'où finalement

$$\vec{g} = \vec{\mathcal{G}}_T(M) + \Omega^2 \overrightarrow{\text{HM}} + (\vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(C)).$$

Le terme entre parenthèses est un terme dit *différentiel*, traduisant une inhomogénéité du champ gravitationnel des astres autres que la Terre (surtout la Lune et le Soleil) qui est responsable d'une légère variation du champ de pesanteur. Cet effet est en général négligeable, sauf lorsqu'il concerne de grandes masses déformables (eau des océans). Évaluons (*Cf. fig.(??)*) ce terme différentiel

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\mathcal{G}}_A(M) - \vec{\mathcal{G}}_A(C) = GM_a \left( \frac{\overrightarrow{\text{MA}}}{\text{MA}^3} - \frac{\overrightarrow{\text{CA}}}{\text{CA}^3} \right),$$

où  $G$  est la constante de gravitation universelle.

De plus,

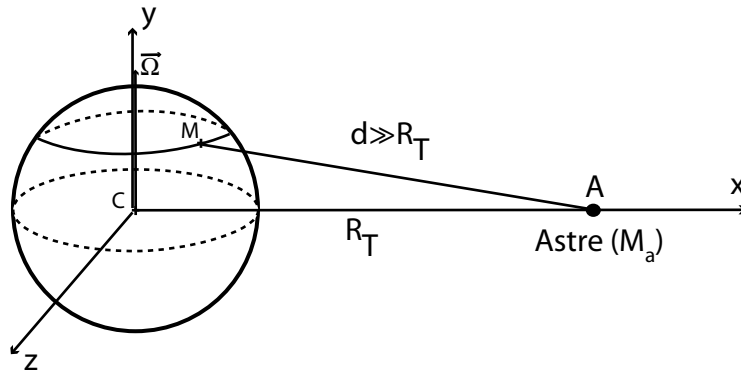
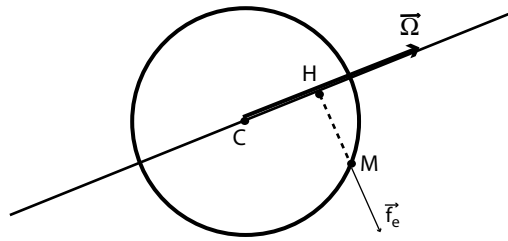
$$\overrightarrow{\text{MA}} = (d-x)\vec{u}_x + (-y)\vec{u}_y + (-z)\vec{u}_z, \quad \overrightarrow{\text{CA}} = d\vec{u}_x,$$

$$\text{MA}^3 = ((d-x)^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \approx (d^2 - 2xd)^{3/2} \approx d^3 \left( 1 - 3\frac{x}{d} \right), \quad \text{CA}^3 = d^3,$$

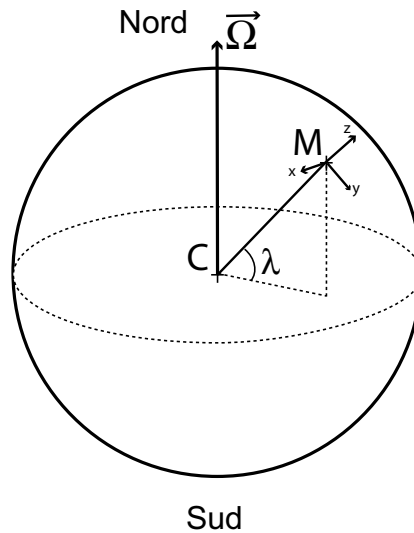
d'où

$$\vec{\varepsilon} \approx \frac{GM_a}{d^3} \left( \overrightarrow{\text{MA}} \left( 1 + 3\frac{x}{d} \right) - \overrightarrow{\text{CA}} \right) = \frac{GM_a}{d^3} \left( \overrightarrow{\text{MC}} + 3x\vec{u}_x \right).$$

- Dans une unité arbitraire, le terme  $\frac{GM_a}{d^3}$  vaut environ 1.3 pour la Lune, 0.6 pour le Soleil,  $0.7 \cdot 10^{-5}$  pour Jupiter,... On voit donc que la Lune a une influence 2 fois plus importante que celle du Soleil et que les autres planètes n'interviennent pratiquement pas.
- À cause de la rotation de la Terre dans  $Cxyz$ ,  $x = x(M)$  varie sinusoidalement et présente deux extrêmes par jour (marées biquotidiennes).
- Les marées peuvent être plus ou moins importantes suivant que le Soleil et la Lune (selon leur position relative) ajoutent leurs effets (vives-eaux) ou se contrarient (mortes-eaux).
- Il faudrait compléter l'étude précédente par des considérations dynamiques qui montreraient la possibilité de phénomènes de résonance (les masses d'eau des océans sont des oscillateurs excités par les marées périodiques) ce qui peut expliquer l'observation de marées très importante.



### 7.3 Mise en évidence de la rotation de la Terre



Nous avons vu que si l'on fait intervenir le poids, on tient compte des forces d'inertie d'entraînement et donc, dans ces conditions, la seule différence entre  $\mathcal{R}_T$  et un référentiel galiléen provient de l'existence de forces de Coriolis. Mais ces forces sont très faibles à cause de la petite vitesse de rotation de la Terre

$$\Omega = \vec{\Omega}_{\text{Terre}/\mathcal{R}_T} \approx \frac{1 \text{ tour}}{1 \text{ jour}} \approx 7 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Par exemple, pour une vitesse  $V_{\mathcal{R}_T} \sim 180 \text{ km/h} = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,

$$\frac{f_c}{mg} \sim \frac{2\Omega V_{\mathcal{R}_T}}{g} \sim 7 \cdot 10^{-4}.$$

Deux expériences classiques permettent de mettre en évidence l'existence de ces forces de Coriolis (et donc le caractère non galiléen de la Terre)

- la déviation vers l'est au cours d'une chute libre,
- le pendule de Foucault.

### 7.3.1 Déviation vers l'est

Le point matériel  $M$  est lâché, sans vitesse initiale en un point de latitude  $\lambda$  situé à la surface de la Terre. Ecrivons le PFD pour le point  $M$  en faisant l'approximation que  $\vec{g}$  passe par  $C$  et que  $\vec{\Omega}$  est porté par NS (Nord-Sud)

$$m\vec{a}_{\mathcal{R}_T}(M) = m\vec{g} + (-2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{\mathcal{R}_T}(M)),$$

(point matériel soumis à son poids en tenant compte de la force de Coriolis), d'où

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\Omega \cos \lambda \\ \Omega \sin \lambda \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\Omega(\dot{z} \cos \lambda + \dot{y} \sin \lambda) \\ -2\Omega\dot{x} \sin \lambda \\ -g - 2\Omega\dot{x} \cos \lambda \end{pmatrix}.$$

En considérant  $\Omega$  comme un infiniment petit d'ordre 1, on voit qu'il n'y a que  $z(t)$  qui soit d'ordre 0. La méthode perturbative consiste à calculer la solution à l'ordre 0, pour ensuite la réinjecter dans les équations du mouvement et obtenir l'ordre 1. Soit une grandeur  $X$ , que l'on peut développer selon

$$X = X^{(0)} + X^{(1)} + \dots + X^{(n)} + \dots,$$

où  $X^{(n)}$  est le n<sup>e</sup> ordre de  $X$  en  $\Omega$  (formellement,  $X^{(n)} = \mathcal{O}(\Omega^n)$ ). Le principe de la méthode perturbative est de calculer  $X^{(0)}$  en négligeant  $\Omega$ . Une fois cette solution obtenue, on pose

$$X = X^{(0)} + \delta X.$$

En injectant cette solution, l'ordre 0 en  $\Omega$  dans les équations va s'annuler (à cause du terme en  $X^{(0)}$ ). En ne gardant que les termes à l'ordre 1 en  $\Omega$ , on obtient une équation sur  $\delta X$  dont la solution va donner  $X^{(1)}$ , c'est à dire que l'on obtient un développement limité de  $X$  à l'ordre 1. On peut continuer ce processus jusqu'à l'ordre voulu.

Donc notre cas, à l'ordre 0, l'équation selon  $\vec{u}_z$  nous donne

$$\ddot{z} \approx -g \Rightarrow \dot{z} \approx -gt \text{ et donc } z \approx R - \frac{1}{2}gt^2.$$

En reportant dans les équations selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  et en ne gardant que l'ordre 1

$$\ddot{y} \approx 0 \Rightarrow \dot{y} \approx 0 \text{ et } \ddot{x} \approx 2\Omega(-gt) \cos \lambda \Rightarrow \dot{x} \approx -\Omega g \cos \lambda t^2 \Rightarrow x \approx -\frac{1}{3}\Omega g \cos \lambda t^3.$$

Pour une hauteur de chute  $h$ , le temps de chute est

$$T \approx \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

et donc

$$\delta x \approx -\frac{1}{3}\Omega g \cos \lambda \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Le signe (–) correspond bien à une déviation vers l'est par rapport à la verticale qui serait suivie si  $\mathcal{R}_T$  était galiléen.

### 7.3.2 Pendule de Foucault

Par rapport au cas précédent,  $M$  est soumis en plus à la tension du fil

$$\vec{T} = T \frac{\overrightarrow{MA}}{L},$$

où  $A$  est le point d'attache,  $M$  le point mobile et  $L$  la longueur du fil. Comme pour de petites oscillations,

$$\overrightarrow{MA} \approx -x\vec{u}_x - y\vec{u}_y + L\vec{u}_z,$$

on trouve alors

$$\vec{T} = \frac{T}{L}(-x\vec{u}_x - y\vec{u}_y + L\vec{u}_z).$$

En reportant dans les calculs précédents, on obtient

$$\ddot{x} = -\frac{T}{mL}x + 2\Omega(\dot{z} \cos \lambda + \dot{y} \sin \lambda), \quad (7.2)$$

$$\ddot{y} = -\frac{T}{mL}y - 2\Omega\dot{x} \sin \lambda, \quad (7.3)$$

$$\ddot{z} = -\frac{T}{m} - g - 2\Omega\dot{x} \cos \lambda. \quad (7.4)$$

En traitant  $\Omega$  comme un infiniment petit d'ordre 1, l'équation (7.4) nous permet d'écrire (puisque  $z \approx 0$ ) que  $\frac{T}{m} \approx -g$  et donc les équations restantes (7.3) et (7.4) fournissent, en posant

$$\omega^2 = \sqrt{\frac{g}{L}},$$

d'où

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + 2\Omega\dot{y} \sin \lambda, \quad (7.5)$$

$$\ddot{y} = -\omega^2 y - 2\Omega\dot{x} \sin \lambda. \quad (7.6)$$

Pour résoudre ce système, on peut passer en complexes on posant

$$\xi = x + iy.$$

Alors (7.5)+(7.6) donne

$$\ddot{\xi} + 2i\Omega \sin \lambda \dot{\xi} + \omega^2 \xi = 0.$$

Les racines de l'équation caractéristique s'écrivent

$$r = -i(\Omega \sin \lambda \pm \omega'),$$

en posant

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 + \Omega^2 \sin^2 \lambda}.$$

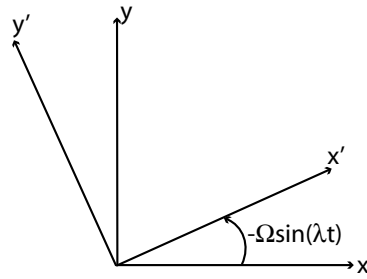
D'où la solution générale

$$\xi(t) = e^{-i\Omega \sin \lambda t} (Ae^{i\omega' t} + Be^{-i\omega' t}).$$

Considérons alors le repère  $Ox'y'z$ , tournant dans  $Oxyz$  autour de  $Oz$  à la vitesse angulaire  $-\Omega \sin \lambda$

$$\begin{aligned} x' &= x \cos(\Omega \sin \lambda t) - y \sin(\Omega \sin \lambda t), \\ y' &= x \sin(\Omega \sin \lambda t) + y \cos(\Omega \sin \lambda t), \end{aligned}$$





soit

$$\begin{aligned}
 \xi' &= x' + iy' \\
 &= (x + iy) (\cos(\Omega \sin \lambda t) + i \sin(\Omega \sin \lambda t)) \\
 &= \xi e^{i\Omega \sin \lambda t},
 \end{aligned}$$

d'où

$$\xi' = Ae^{i\omega' t} + Be^{-i\omega' t}.$$

Il est facile de voir que ces équations déterminent (dans  $Ox'y'z$ ) une trajectoire elliptique et donc que les axes de cette ellipse tournent dans  $Oxyz$  (le sol) à la vitesse angulaire  $-\Omega \sin \lambda$ .

Si  $\mathcal{R}_T$  était galiléen, les axes de la trajectoire resteraient fixes dans  $\mathcal{R}_T$ .

*La rotation de la trajectoire du pendule pour un observateur terrestre est une preuve de la rotation diurne de la Terre.*

# 8 Collisions en mécanique classique

## 8.1 Généralités sur les collisions en mécanique

Considérons un système mécanique soumis<sup>1</sup> à une force extérieure  $\vec{F}$  et un moment  $\vec{\mathcal{M}}(O)$  en  $O$  agissant pendant une durée  $\Delta t$ .  $\vec{F}$  et  $\vec{\mathcal{M}}(O)$  contiennent les forces d'inertie si le référentiel d'observation n'est pas galiléen.

Pour calculer les variations  $\Delta\vec{p}$  et  $\Delta\vec{L}(O)$  de la quantité de mouvement du système et de son moment cinétique en  $O$  pendant  $\Delta t$ , on utilise

- le théorème de la résultante cinétique (PFD)

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \implies \Delta\vec{p} = \int_t^{t+\Delta t} \vec{F} dt,$$

- le théorème du moment cinétique en  $O$

$$\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}(O) \implies \Delta\vec{L}(O) = \int_t^{t+\Delta t} \vec{\mathcal{M}}(O) dt.$$

Si  $\vec{F}$  et  $\vec{\mathcal{M}}(O)$  sont suffisamment grands pour que les intégrales précédentes tendent vers une limite non nulle lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$  (en réalité  $\Delta t$  doit être très petit devant le temps caractéristique d'évolution du système), on observera une modification brusque des vitesses sans changement de la position du système.

*Lorsqu'on observe une telle "discontinuité" des vitesses, on dit que le système est le siège d'une **collision** (ou d'un **choc**).*

Les forces de champ (pesanteur,...) ainsi que les forces d'inertie restent finies et n'apportent donc aucune contribution aux intégrales précédentes.

Lorsqu'il y a choc, c'est qu'il existe d'autres forces (en général à courte portée comme par exemple des forces de contact) qui prennent des valeurs très grandes pendant des durées très faibles : ce sont les "forces de choc".

- *En l'absence de forces de choc, la vitesse de tous les points du système reste continue, et ceci dans tout référentiel.*
- *Si les forces de choc sont intérieures à un système alors la quantité de mouvement et le moment cinétique de ce système restent continus dans tous référentiel.*

---

1. On parle aussi de torseur de forces extérieures

$$[\vec{F}] = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{\mathcal{M}}(O) \end{array} \right\}.$$

Le formalisme des torseurs est adapté à la mécanique, et se révèle être très puissant. Il n'est cependant pas utile à l'agrégation de chimie. Un torseur est un *champ de vecteurs*  $\vec{M}$

$$P, t \longrightarrow \vec{M}(P, t)$$

qui présente la propriété fondamentale suivante : il existe un vecteur  $\vec{R}(t)$  tel que

$$\forall P, Q, t \quad \vec{M}(Q, t) = \vec{M}(P, t) + \vec{R}(t) \wedge \overrightarrow{PQ},$$

où  $\vec{M}(P, t)$  est le *moment* du torseur en  $P$  et  $\vec{R}(t)$  est la *résultante* du torseur.

## 8.2 Lois des collisions, définitions

Deux particules matérielles (ou plus) considérées comme ponctuelles rentrent en interaction *intense* (force de choc), pendant une durée *très brève* dans une région *peu étendue* de l'espace.

Le problème général est alors le suivant : supposant connues toutes les vitesses  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots$  *immédiatement* avant l'interaction (avant le choc), quelles sont les vitesses  $\vec{v}'_1, \vec{v}'_2, \dots$  *immédiatement* après le choc ?

*Remarque* : Si l'on connaît pas de façon précise la nature de l'interaction, on ne pourra pas, en général, résoudre complètement le problème : **c'est ce que l'on appelle l'indétermination du choc.**

### 8.2.1 Lois du choc

En prenant comme système la *totalité* des particules qui interagissent, les forces de choc deviennent *intérieures* et il ne subsiste dans les forces extérieures que des forces permanentes dont la contribution à la variation de la quantité de mouvement est nulle.

D'un point de vue énergétique, en admettant que les forces de choc soient conservatives (elles dérivent d'une énergie potentielle  $E_p$ ), la variation de l'énergie totale du système  $E = E_c + E_p + U$  est égal au travail des forces extérieures autres que celles du choc qui est nul car le déplacement des particules est nul pendant le choc. Pour la même raison, il n'y a, au cours du choc, aucune variation d'énergie potentielle.

- On a donc pour le système, au cours de la collision, et ceci dans tout référentiel
- conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique en tout point,
  - conservation de l'énergie totale ou encore de la quantité  $E_c + U$ .

**Ce sont les lois du choc.**

### 8.2.2 Les référentiels utilisés

**référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}_L$**

C'est celui dans lequel une particule mobile (1) vient "heurter" une particule cible *au repos* (2).

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + \vec{0} &= m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2, \\ E_1 + E_2 &= E'_1 + E'_2. \end{aligned}$$

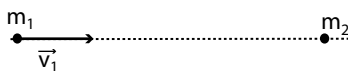


FIGURE 8.1 – Dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}_L$ .

**référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$**

C'est celui dans lequel la quantité de mouvement du système (ensemble de particules) est nulle immédiatement avant le choc ; elle est donc nulle également immédiatement après le choc.

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* &= m_1 \vec{v}'_1^* + m_2 \vec{v}'_2^*, \\ E_1^* + E_2^* &= E_1'^* + E_2'^*. \end{aligned}$$

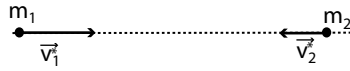


FIGURE 8.2 – Dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ .

### 8.2.3 Nature du choc

**Choc élastique** Lorsque les particules après le choc sont identiques aux particules initiales (même nature, même énergie interne,...), la conservation de l'énergie totale implique la *conservation de l'énergie cinétique dans tous les référentiels*. On dit que la collision est élastique

$$E'_c = E_c.$$

Dans le cas contraire, on dit que la collision est *inélastique*. Il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique.

**Choc direct** Lorsque toutes les vitesses (avant et après le choc) sont colinéaire, on dit que la collision est *directe*; elle est *indirecte* dans le cas contraire.

## 8.3 Collisions élastiques

### 8.3.1 Choc direct

**Détermination des vitesses après le choc dans  $\mathcal{R}_L$**  Les lois du choc fournissent deux équations scalaires qui permettent (dans ce cas particulier) de résoudre complètement le problème

$$\begin{cases} m_1 v_1 &= m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 &= \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{cases} \iff \begin{cases} m_1 (v'_1 - v_1) &= -m_2 v'_2 \\ m_1 (v_1'^2 - v_1^2) &= -m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

En divisant membre à membre, il vient

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \text{ et } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1.$$

**Perte d'énergie cinétique  $Q$  de la particule 1**

$$Q = -\Delta E_{c1} = \Delta E_{c2} = \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_{c1}.$$

Pour une particule incidente donnée ( $m_1$  et  $E_{c1}$  données), la perte d'énergie cinétique de la particule 1 (donc le transfert d'énergie à la particule 2) est maximum lorsque  $m_2 = m_1$ .

### 8.3.2 Diffusion élastique d'une particule incidente par une cible immobile

Le nombre d'inconnues est maintenant trop grand si l'on ignore la loi d'interaction et il y a une indétermination.

**Étude dans le RCM  $\mathcal{R}^*$**  On peut écrire

– conservation de  $p^* = 0$

$$m_1 \vec{v}_1'^* + m_2 \vec{v}_2'^* = m_1 \vec{v}_1^* + m_2 \vec{v}_2^* = 0,$$

soit en norme

$$m_1 v_1'^* = m_1 v_2'^* \text{ et } m_1 v_1^* = m_1 v_2^*$$

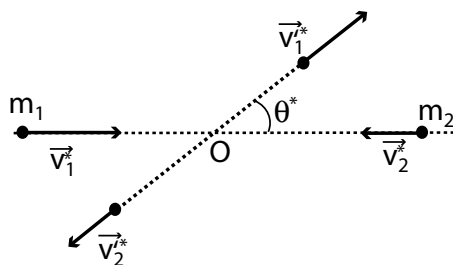


FIGURE 8.3 – Dans le référentiel du centre de masse  $\mathcal{R}^*$ .

– conservation de  $E^*$  (le terme d'énergie potentielle étant nul)

$$m_1 \vec{v}_1'^{*2} + m_2 \vec{v}_2'^{*2} = m_1 \vec{v}_1^{*2} + m_2 \vec{v}_2^{*2}$$

soit

$$m_1 (\vec{v}_1'^{*2} - \vec{v}_1^{*2}) = m_2 (\vec{v}_2^{*2} - \vec{v}_2'^{*2}),$$

et on en déduit facilement que  $v_1'^* = v_1^*$  et  $v_2'^* = v_2^*$ .

*Dans  $\mathcal{R}^*$ , chaque particule conserve sa vitesse.*

L'indétermination concerne l'angle de diffusion  $\theta^*$ .

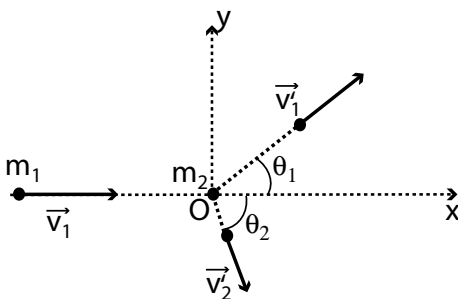


FIGURE 8.4 – Dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}_L$ .

**Retour dans  $\mathcal{R}_L$**  Si  $\vec{U}$  désigne la vitesse de  $\mathcal{R}^*$  par rapport à  $\mathcal{R}_L$ , on doit toujours avoir  $\vec{p}^* = 0$  soit (composition des vitesses)

$$m_1(\vec{v}_1 - \vec{U}) + m_2(\vec{v}_2 - \vec{U}) = 0,$$

or  $v_2 = 0$ , donc

$$\vec{U} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1$$

On en déduit par exemple  $\vec{v}_1'$

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1^* + \vec{U}.$$

Pour obtenir la relation entre l'angle de diffusion  $\theta^*$  dans  $\mathcal{R}^*$  et les angles  $\theta_1$  (angle de diffusion) et  $\theta_2$  (angle de recul) dans  $\mathcal{R}_L$ , il suffit de projeter la relation précédente sur  $Ox$  et  $Oy$

$$\begin{cases} v_1' \cos \theta_1 = v_1^* \cos \theta^* + U \\ v_1' \sin \theta_1 = v_1^* \sin \theta^* \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' \cos \theta_1 = v_1^* \cos \theta^* + U \\ v_1' \sin \theta_1 = v_1^* \sin \theta^* \end{cases}$$

soit

$$\tan \theta_1 = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \frac{U}{v_1^*}} = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \frac{U}{v_1 - U}} = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* + \frac{m_1}{m_2}}.$$

On trouverait de même en projetant la relation  $\vec{v}'_2 = \vec{v}'_2^* + \vec{U}$

$$\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta^*}{\cos \theta^* - 1},$$

car  $v_2^* = \|\vec{v}_2^*\| = \|\vec{v}_2 - \vec{U}\| = U$ .

Dans le cas particuliers où  $m_1 = m_2$ , il vient immédiatement  $\tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2 = -1$  soit

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{\pi}{2}.$$

*Les trajectoires des particules après le choc sont perpendiculaires.*

## 8.4 Collisions inélastiques

Il n'y a plus, par définition, conservation de l'énergie cinétique. Avec  $E'_c = E'_{c1} + E'_{c2}$  et  $E_c = E_{c1} + E_{c2}$ ,  $E'_c \neq E_c$ .

Dans le cas où les particules sont "liées" après le choc, on parle de *choc mou*. Elles forment alors un troisième objet et donc ont la même vitesse.

*Cas particuliers : choc mou sur une cible au repos* On a alors, dans  $\mathcal{R}_L$

$$\vec{v}_2 = \vec{0}, \vec{v}'_2 = \vec{v}'_1 = \vec{v}'.$$

Écrivons la conservation de la quantité de mouvement

$$m_1 \vec{v}_1 = (m_1 + m_2) \vec{v}'.$$

On en déduit les vitesses après le choc

$$\vec{v}' = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_1.$$

Calculons la variation relative d'énergie cinétique de l'ensemble

$$\frac{\Delta E_c}{E_c} = \frac{E'_c - E_c}{E_c} = \frac{(m_1 + m_2)v'^2 - m_1 v_1^2}{m_1 v_1^2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

- si  $m_2 \ll m_1$ , la variation d'énergie cinétique est faible : la vitesse après le choc est importante,
- si  $m_2 \gg m_1$ , la variation d'énergie cinétique est grande : la vitesse après le choc est faible.

# 9 Introduction à la relativité

---

Ce chapitre est très largement inspiré du cours de L3 d'Électromagnétisme et Relativité de Jean-Michel Raimond, dispensé au Magistère de Physique de l'ENS. Le polycopié complet de ce cours est téléchargeable sur <http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/electromagnetisme.htm>.

## 9.1 Nécessité du principe de relativité

### 9.1.1 Rappels de relativité galiléenne

La notion centrale de la cinématique est celle de référentiel. Un référentiel, c'est un ensemble d'observateurs, immobiles les uns par rapports aux autres. Ces observateurs peuvent constater le passage du mobile à leur position. La connaissance de la position des observateurs concernés permet alors de déterminer la trajectoire du mobile. On peut bien sûr convenir d'un repère pour repérer ces positions au moyen de trois coordonnées d'espace. Chaque observateur est muni d'une horloge, permettant de noter l'instant auquel le mobile passe en face d'eux. Nous supposons que toutes les horloges de tous les observateurs d'un même référentiel sont synchronisées (indiquent la même valeur au même instant).

En cinématique classique, cette synchronisation ne pose aucune difficulté, puisque temps et espace sont complètement découplés. Il suffit, par exemple, que tous les observateurs se retrouvent en un même point pour faire le zéro de leurs horloges à un moment commun.

Un mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est alors défini par les trois fonctions  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  représentant la position en fonction du temps commun des observateurs. Le mouvement serait décrit dans un autre référentiel  $\mathcal{R}'$ , en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ , par trois autres fonctions du temps commun des observateurs de  $\mathcal{R}'$  :  $x'(t')$ ,  $y'(t')$ ,  $z'(t')$ . En mécanique classique, on admet sans restrictions l'identité des temps des observateurs de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  (cette hypothèse était déjà faite explicitement par Newton dans ses *Principia*). Il est alors possible de donner la transformation qui fait se correspondre les mouvement vus dans deux référentiels différents.

Dans le cas le plus simple, où les deux référentiels sont en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, cette transformation est la transformation dite de Galilée. Sans restreindre du tout la généralité, on peut choisir les axes dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  (voir fig. 9.1) de telle manière que :

- les axes  $Ox$  et  $O'x'$  coïncident à tout instant et sont parallèles à la vitesse  $\mathbf{u}$  de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ ,
- les origines  $O$  et  $O'$  sont confondues à l'instant  $t = 0$ ,
- les axes  $Oy$  et  $O'y'$ , d'une part, et les axes  $Oz$  et  $O'z'$ , d'autre part, sont constamment parallèles et coïncident à  $t = 0$ .

La loi de transformation de Galilée s'écrit alors trivialement

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t) - ut, \\y'(t) &= y(t), \\z'(t) &= z(t).\end{aligned}$$

### 9.1.2 Difficulté des la cinématique classique

La loi de composition des vitesses, telle que nous venons de la rappeler, est difficilement compatible avec l'électromagnétisme de Maxwell. La conséquence la plus importante des équations de Maxwell est en effet la prédiction de l'existence d'ondes se propageant à la vitesse  $c$ . Le problème qui apparaît immédiatement est celui du référentiel dans lequel cette vitesse est définie, le seul donc dans lequel les équations de Maxwell seraient directement applicables.

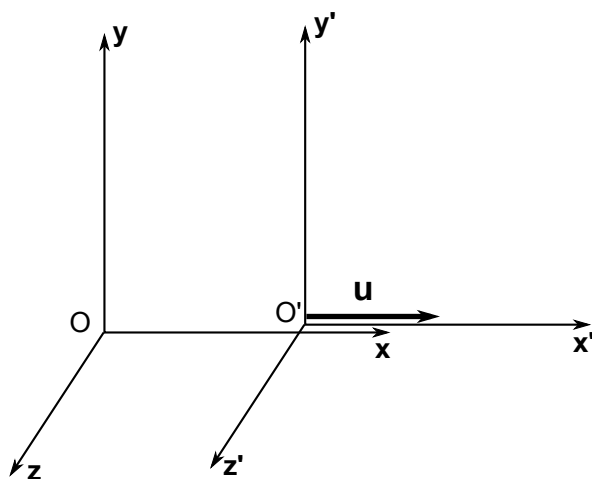


FIGURE 9.1 – Choix des axes dans deux référentiels  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  en mouvement relatif.

Le sentiment le plus naturel, qui prédominait très largement à la fin du siècle dernier, était que les ondes électromagnétiques se propageaient dans un milieu baignant l'univers entier : *l'éther*. L'analogie entre ondes électromagnétiques et ondes sonores était en effet présente à tous els esprits. Les difficultés apparaissent toutefois très vite dès qu'on examine les propriétés de cet hypothétique éther. Il foit en effet être omniprésent et infiniment rigide pour propager des ébranlement transverses à grande vitesse. Mais il doit, dans le même temps, être impondérable et infiniment perméable au mouvement des corps matériels (puisque, par exemple, l'étude sur quelques siècles de la rotation terrestre ne révèle aucun frottement).

Enfin, des difficultés expérimentales ont joué un rôle majeur dans la gênève de la théorie de la relativité, particulier l'expérience de Michelson-Morley qui aurait dû mettre en évidence le mouvement relatif de l'éther par rapport à la Terre mais n'y parvint jamais.

C'est en 1905 qu'Einstein ouvrit la voie d'une nouvelle théorie dans son célèbre article "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement". Le principe fondamental de cette nouvelle physique, le "principe de relativité" est exxposé dans la prochaine section.

### 9.1.3 Principe de relativité

#### Énoncé

*Il existe une classe de référentiels privilégiés, en translation uniforme les uns par rapport aux autres (que nous continuerons à appeler "référentiels galiléens"), dans lesquels toutes les lois de la physique prennent la même forme.*

En particulier, si toutes les lois de la physique prennent la même forme, les équations de Maxwell sont valides dans tous les référentiels et la vitesse de la lumière  $c$  est la même dans tous les référentiels.

### 9.1.4 Expériences mettant en évidence l'invariance de la vitesse de la lumière

**Expérience du prisme mobile d'Arago (1810)** En 1810, François Arago présente à l'Académie des Sciences un compte-rendu sur le vitesse de la lumière. L'expérience consiste à mesurer une variation de la déviation de la lumière dans un prisme. Pour cela, il observait les étoiles pendant la nuit. Selon l'heure d'observation, en raison du mouvement relatif de la Terre par rapport aux étoiles, la déviation devait varier et correspondre à une augmentation ou une diminution relative de  $1/10000$  de la vitesse de la lumière. La sensibilité du dispositif était suffisante pour détecter une telle variation mais il n'en observa aucune.



**Expérience de Michelson Morley (1887)** On supposait à l'époque que la vitesse de la lumière par rapport à l'"éther", un milieu hypothétique, était égale à  $c$ . Le but de l'expérience était de mettre en évidence le mouvement relatif de la Terre par rapport à l'éther. Le mouvement de la Terre sur son orbite par rapport au Soleil s'effectue à  $30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . Ainsi, suivant la manière dont s'effectue la composition des vitesses avec la lumière (ou l'éther), la vitesse de la lumière devrait être soit plus grande soit plus faible de  $30 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$  dans le référentiel terrestre. Les variations relatives de la vitesse seraient alors de l'ordre de  $10^{-4}$ . Michelson proposa une méthode optique, interférométrique pour mesurer une telle variation.

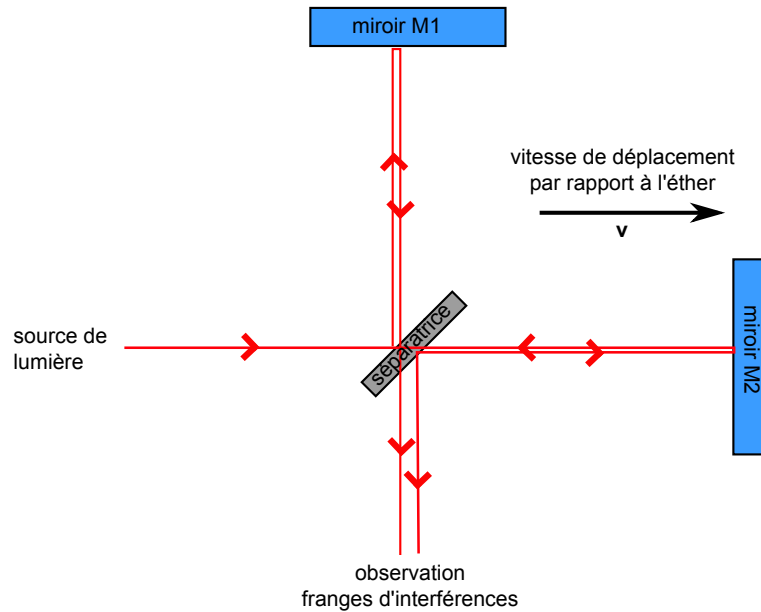


FIGURE 9.2 – Interféromètre de Michelson. Un des deux bras est supposé être aligné avec le vecteur vitesse de déplacement de la Terre par rapport au Soleil.

Un interféromètre de Michelson fut alors construit (voir fig. 9.2). Suivant la différence de marche entre les deux bras de l'interféromètre (*cf.* TD optique), on obtient de franges d'interférence à la sortie de l'interféromètre. Si la lumière suit les lois de la mécanique classique, le temps mis par la lumière pour parcourir un aller-retour dans un bras va dépendre de la vitesse de la lumière dans ce bras et donc de l'alignement ou non du bras avec la direction de la vitesse de la Terre par rapport au Soleil. Donc, si on fait tourner l'interféromètre, on s'attend à voir un défilement des franges. Le dispositif était placé sur un bloc de pierre, elle même reposant sur une pièce en bois placé dans un bain de mercure (taille de l'ordre du mètre pour chaque bras). On peut montrer que, si on note  $v$  la vitesse du laboratoire par rapport à l'éther, la différence des durées de parcours de la lumière dans les deux bras est de

$$\Delta t \approx \frac{v^2}{c^3} (L_1 + L_2),$$

où  $L_1$ , resp.  $L_2$ , est la longueur du bras du miroir  $M_1$ , resp.  $M_2$ . En utilisant un repliement astucieux des rayons, la longueur des bras était de l'ordre de 1 mètre, et pour une longueur d'onde de 550nm, on s'attend à un défilement de 0,4 frange en faisant tourner le dispositif. Si la sensibilité permettait de détecter une variation de l'ordre de 0,01 frange, ils n'ont jamais observé de défilement de franges.

C'est à partir de cet échec que les physiciens se ont sérieusement commencé à douter de l'existence de l'éther.

**Expérience d'Alväger (1964)** Cette expérience est plus récente, et a été effectuée au CERN en utilisant un faisceau de particules, des pions neutres  $\Pi^0$ . Ils sont produits par l'entrée en collision

de protons de haute énergie sur une cible en Béryllium. Ces pions ont une énergie de 6 GeV, et une vitesse voisine de  $0.99975c$ . Cette particule instable a une durée de vie de l'ordre de  $0.84 \cdot 10^{-16}$  s. Elle se désintègre en deux photons  $\gamma$  selon  $\Pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ . On dispose ainsi d'une source de lumière qui se déplace à une vitesse de  $0.99975c$  par rapport au référentiel du laboratoire.

Les expérimentateurs ont mesuré le temps mis par des "paquets" de photons pour parcourir la distance entre deux détecteurs A et B ( $31.450 \pm 0.0015$  mètres). ils trouvèrent 104.9 ns, et ont donc constaté que la vitesse de ces photons est la même (à  $10^{-4}$  près) que ceux issus d'une source immobile, c'est-à-dire l'invariance relativiste de la vitesse de la lumière.

## 9.2 Temps propre et dilatation des durées

### 9.2.1 Temps propre et dilatation des durées

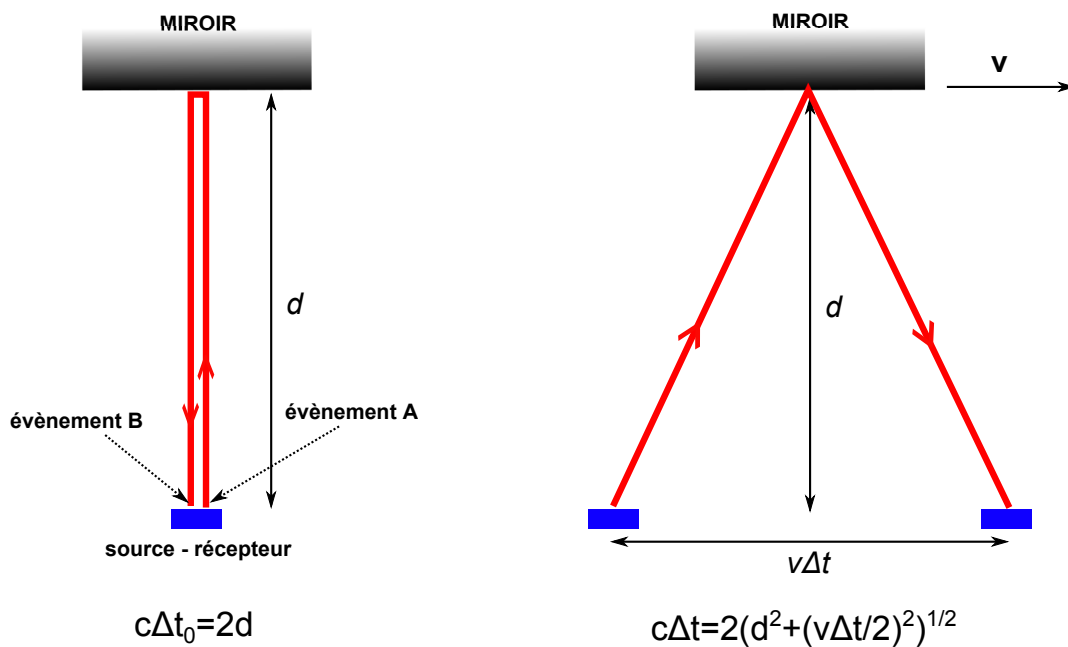


FIGURE 9.3 – "Horloges de lumière". On considère une source émettrice d'impulsion lumineuses, solidaire d'un miroir se déplaçant à la vitesse  $v$  par rapport à un référentiel galiléen. On considère cette expérience du point de vue d'un observateur dans le référentiel du système { miroir-émetteur-récepteur }. La durée entre émission et réception est de  $\Delta t_0 = 2d/c$ . Dans le référentiel du laboratoire, on obtient en revanche  $c\Delta t = 2\sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}$ . On en déduit aisément la relation illustrant la dilatation des temps par rapport au temps propre :  $\Delta t = \gamma\Delta t_0$  avec  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ .

Considérons deux référentiels en mouvement relatif, avec la géométrie de la figure 9.1. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , un émetteur de pulses lumineux très courts est immobile, avec un miroir en face de lui à une distance  $d$ . Cet émetteur peut également fonctionner comme détecteur de ces pulses lumineux. Dans  $\mathcal{R}'$ , l'impulsion lumineuse est détectée après un temps  $T' = 2d/c$ .

Considérons la même expérience dans le référentiel  $\mathcal{R}$ . Si on suppose la mécanique classique valide. La vitesse du pulse lumineux dans  $\mathcal{R}$  a une composante  $\pm c$  selon  $Oy$  et une composante  $u$  selon  $Ox$ . Son module est donc de  $\sqrt{c^2 + u^2}$ . La durée du parcours  $OM$  étant  $d/c$ , on a  $OH = ud/c$  et donc  $OM = L\sqrt{c^2 + u^2}/c$ . La durée de l'expérience est donc  $T = 2d/c$ . On retrouve le postulat d'universalité du temps en cinématique classique.

Admettons désormais le postulat de relativité. Le temps de parcours de  $OM$  est  $OM/c$ . On en

déduit que  $OH = uOM/c$ . Et comme  $OM^2 = d^2 + OH^2$ , on obtient finalement

$$T = \gamma T', \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Le facteur  $\gamma$  est toujours supérieur à 1. La conséquence immédiate du postulat de relativité est que le temps n'est pas une notion universelle.

Par ailleurs, le facteur  $\gamma$  n'existe que si la vitesse relative des deux référentiels est plus petite que  $c$ . Si ce n'était pas le cas, l'impulsion lumineuse qui se réfléchit normalement sur le miroir dans  $\mathcal{R}'$  n'arriverait jamais à rattraper ce miroir dans  $\mathcal{R}$ . Deux référentiels galiléens ne peuvent donc être animés l'un par rapport à l'autre d'une vitesse supérieure (ou même égale) à  $c$ . Comme on peut attacher un référentiel galiléen à tout objet en translation uniforme,  $c$  apparaît aussi comme une vitesse limite pour tous les objets matériels.

**Le temps propre correspond au temps dans le référentiel où l'"horloge" (une particule) est immobile. Le temps mesuré dans un autre référentiel sera toujours supérieur ou égal au temps temps. C'est pour cela qu'on parle de dilatation des durées.**

### 9.2.2 Définition de la seconde

D'après le BIPM (Bureau Internationale du Poids et des Mesures), la seconde est définie de la manière suivante :

*La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental.*

Cette définition se réfère à un atome de césium au repos, à une température de 0K. Pour la réalisation pratique de la définition de l'unité de temps, une annexe précise que pour l'horloge atomique, "La définition de la seconde doit être comprise comme la définition de **l'unité de temps propre** : elle s'applique dans un petit domaine spatial qui accompagne l'atome de césium dans son mouvement". Les corrections de relativité restreinte sont explicitement évoquées dans la définition de la seconde.

### 9.2.3 Notion d'évènement

Comme nous venons de le voir, le temps n'est plus universel et n'est plus séparable des coordonnées spatiales. Il faudra décrire les expériences en termes d'évènements, *i.e.* il s'est passé quelque chose quelque part. Un évènement, c'est par exemple l'allumage du signal A ou la réflexion de la lumière sur le miroir dans notre expérience de pensée. On peut caractériser un évènement par quatre nombres : les coordonnées spatiales de l'observateur et le temps, *i.e.* la donnée d'un quadruplet de nombres  $(ct, x, y, z)$ , où le facteur  $c$  est rajouté pour avoir un objet homogène. Les coordonnées spatio-temporelles du même évènement dans un autre référentiel sont différentes, et le lien entre elles est donné par une transformation qui remplace la transformation de Galilée.

On utilise souvent des représentations géométriques des évènements. On peut représenter un évènement comme un point dans un espace à quatre dimensions. Par simplicité, on se limitera à une dimension d'espace. On représente alors un évènement comme sur la figure 9.4. Pour des raisons de commodité, l'axe vertical porte le produit  $ct$  et les deux coordonnées ont ainsi la même dimension. On peut alors considérer le mouvement d'un point dans un référentiel comme une suite d'évènements. Une telle suite forme dans l'espace-temps une ligne, appelée "ligne d'univers". La ligne d'univers d'une particule qui se déplacerait à la vitesse de la lumière serait parallèle, à la première ou à la deuxième bissectrice. Dans l'espace à quatre dimensions, l'ensemble des lignes d'univers partant d'un point et correspondant à un mouvement à  $c$  forme le "cône de lumière" de cet évènement. Les évènements antérieurs à l'évènement de référence forment le passé du cône de

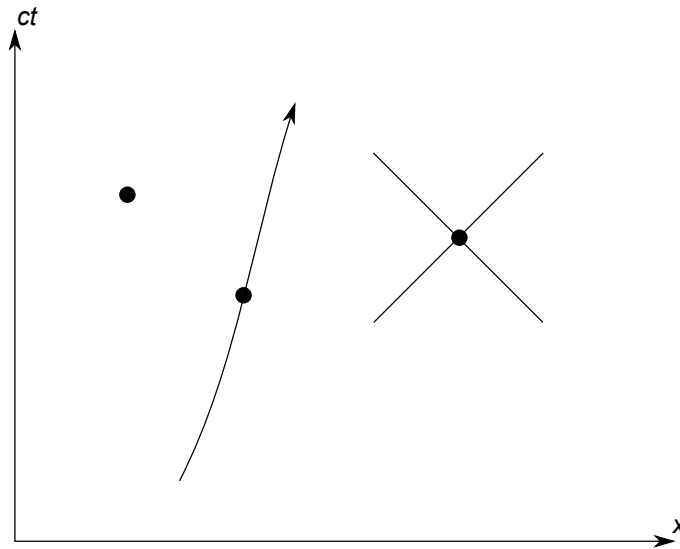


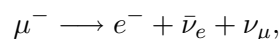
FIGURE 9.4 – Un événement, une ligne d'univers et un cône de lumière. Un événement est représenté par un point dans un espace  $x, ct$ . Une ligne d'univers est l'ensemble des événements correspondant aux positions successives d'une particule. Le cône de lumière d'un événement est constitué des lignes d'univers d'un signal lumineux passant par cet événement.

lumière, les autres le futur. Comme  $c$  est une vitesse limite, toutes les lignes d'univers passant par un événement donné doivent être à l'intérieur du cône de lumière. Deux événements ne pourront être reliés par un signal ou une relation causale, que s'ils sont dans le cône de lumière l'un de l'autre.

## 9.3 Mise en évidence expérimentale de la dilatation des durées

### 9.3.1 Muons cosmiques : expérience de D.H. Frisch et J.H. Smith

Les muons sont des particules instables qui se désintègrent en un électron ou un positron en produisant des neutrinos. Par exemple, pour un muon négatif, on peut écrire la réaction sous la forme suivante :



où  $\mu^-$  désigne le muon négatif,  $e^-$  l'électron,  $\bar{\nu}_e$  l'anti-neutrino électronique et  $\nu_\mu$  le neutrino muonique. La durée de vie des muons au repos vaut  $\tau_0 = 2.2 \mu\text{s}$ . Il s'agit de la durée de vie dans le référentiel où les muons sont au repos, se désintégrant selon une loi exponentielle  $N(t) = N_0 e^{-t/\tau_0}$ .

Les muons cosmiques sont produits par les rayons cosmiques, essentiellement des protons, qui rentrent en collision avec les molécules de la haute atmosphère, ce qui crée des particules en cascade. L'expérience de Frisch et Smith, réalisée en 1963, consiste à compter les muons qui se désintègrent dans un détecteur conçu pour sélectionner des muons de vitesses comprises dans une tranche fixée au voisinage de  $0.993c$ , pendant une durée déterminée. Deux capteurs sont installés respectivement au sommet du mont Washington à une altitude de  $h = 1900\text{m}$  environ et d'autre part à Cambridge au niveau de la mer. En effectuant des comptages pendant une durée d'une heure, Frisch et Smith ont mesuré au sommet du mont Washington  $N_1 = 563 \pm 10$  désintégrations et au niveau de la mer  $N_2 = 408 \pm 9$  désintégrations. La vitesse moyenne des muons sélectionnés est de  $0.993c$ , ce qui donne un coefficient  $\gamma = 8.4 \pm 2$  (Pour plus de détails, voir *American Journal of Physics*, **31**, 342 (1963)).

Soit  $\tau$  la durée de vie des muons cosmiques mesurée dans le référentiel du laboratoire. La durée mise pour parcourir une distance  $h$  est égale à  $h/0.993c$ . On peut effectuer une détermination de  $\tau$  à

partir des valeurs de  $N_1$  et  $N_2$ , pour obtenir  $\tau \approx 19.8 \mu\text{s}$ . L'utilisation de la formule de dilatation des durées  $\tau = \gamma\tau_0$  permet une seconde détermination de  $\gamma$  à environ 9 (plus précisément  $\gamma = 8.8 \pm 0.8$ ).

Cette valeur est compatible avec la première et constitue une preuve de la dilatation des durées.

### 9.3.2 Horloges atomiques embarquées : expérience de Hafele et Keating

En 1971, Hafele et Keating ont fait voler quatre horloges au Césium à bord d'avions commerciaux et comparé leurs indications avec celle d'une référence au repos à l'Observatoire naval de Washington. Deux parcours ont été empruntés par les quatre horloges : le premier vers l'est a duré 65.4 heures et le second vers l'ouest et a duré 41.2 heures. La durée totale de l'observation du rythme des quatre horloges atomiques s'est étendue sur plus de 600 heures.

Ils ont obtenus les écarts à la référence sur Terre suivants :

	$\Delta\tau$ (ns) mesuré	$\Delta\tau$ (ns) calculé
voyage vers l'est	$-59 \pm 10$	$-40 \pm 23$
voyage vers l'ouest	$+273 \pm 7$	$+275 \pm 21$

Le signe négatif indique que les horloges voyageant vers l'est ont pris du retard par rapport à celle restée sur Terre.

### 9.3.3 GPS et relativité

Le principe du GPS repose sur un ensemble de 24 satellites, chacun muni d'une horloge précise. Pour se repérer, il faut être en mesure de réceptionner le signal envoyé par au moins trois de ces satellites.

Pour simplifier le problème, considérons le problème à une dimension. On considère un observateur désirent se localiser, disposant d'une horloge précise mais pas forcément synchronisée avec les horloges de deux balises entre lesquelles il se situe. On note A et B ces deux balises. Ces balises définissent un axe sur lequel se trouve l'observateur, à la distance  $d_A$  de la balise A. Les deux balises sont distantes de  $d$ , et ont été préalablement synchronisées.

A l'instant  $t_A$ , la balise A émet un signal lumineux qui est reçu par le promeneur à une date  $t'_{AM}$  mesuré par l'horloge locale du promeneur qui peut être en retard ou en avance de  $\tau$  par rapport au temps des balises : on a  $t' = t + \tau$ . On définit de même les dates  $t_B$  et  $t'_{BM}$  pour la balise B. On obtient alors la valeur de  $d_A$

$$d_A = \frac{d}{2} + \frac{c}{2} (\tau_{AM} - \tau_{BM}),$$

et donc l'observateur peut déterminer sa position en mesurant des durées. A la surface de la Terre, il est nécessaire d'utiliser quatre balises donc quatre satellites et un récepteur portatif pour déterminer sa position dans l'espace et disposer aussi de l'heure. C'est le principe utilisé pour le positionnement GPS.

Placés à une altitude de plus de 20 000 km, les satellites ont une vitesse de 3.87 km/s : ils ne constituent pas un réseau de balises fixes, ils sont mobiles par rapport au promeneur dont on désire obtenir la position. Pour évaluer les distances, il faut disposer à chaque instant des temps qu'indiqueraient des horloges fictives fixes par rapport au sol et se trouvant au même endroit que les satellites. C'est ici qu'intervient le phénomène de dilatation des durées : si un observateur terrestre mesure la période de l'horloge atomique d'un satellite, il mesurera une période toujours plus grande.

Si l'on souhaite se positionner au mètre près, il faut faire des mesures à moins de 30 ns près, ce qui impose d'utiliser des horloges très précises. Les corrections relatives, liées au phénomène de dilatation des durées, sont de l'ordre de  $\frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$ , ce qui représente par exemple 83 ps par seconde, et donc les horloges embarquées retardent de 7.2  $\mu\text{s}$  par jour, ce qui, exprimé en terme de distance, représente une dérive de positionnement de plus de deux kilomètres par jour. On note bien que cette dérive doit impérativement être corrigée.

Il est nécessaire de prendre en compte un autre effet décrit par la relativité générale. Pour les horloges des satellites, la gravité est plus faible qu'au niveau du sol. Les horloges des satellites ont un rythme augmenté et donc avancent par rapport à celles situées au niveau du sol. Cette avance est de l'ordre de  $45.7 \mu\text{s}$  par jour.

Si l'on combine les deux effets précédents, on constate que les horloges des satellites avancent de  $47.7 - 7.2 = 38.5 \mu\text{s}$  par jour. En pratique, un synthétiseur de fréquence permet de compenser cette avance.

## 9.4 Une deuxième expérience de pensée : la simultanéité

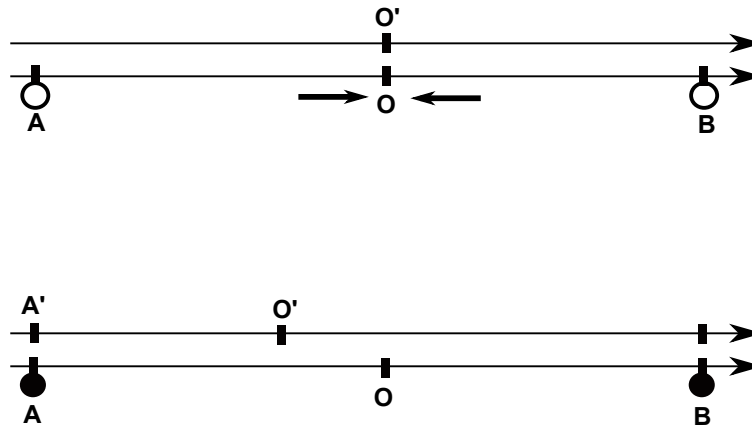


FIGURE 9.5 – Deuxième expérience de pensée illustrant le postulat de relativité. En haut, vue de la situation au moment où le chef de gare, situé en  $O$ , et le contrôleur, en  $O'$  voient arriver simultanément les signaux lumineux émis par  $A$  et  $B$ . En bas, situation au moment où les signaux se sont allumés.  $O'$  n'est pas encore arrivé en  $O$ . Les signaux s'allument en face des observateurs  $A'$  et  $B'$ .

On considère un train qui se déplace sur un axe donnée. Sur le quai, deux balises  $A$  et  $B$  peuvent émettre des impulsions lumineuses, et le chef de gare se situe à mi-chemin entre les deux balises en  $O$ . Le quai forme alors un référentiel  $\mathcal{R}$ . Dans le train, le contrôleur se situe en  $O'$ , immobile dans le train, formant le référentiel  $\mathcal{R}'$  se déplaçant à la vitesse  $u$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . A l'instant  $t = 0$ , le chef de gare voit les deux signaux  $A$  et  $B$  s'allumer simultanément. S'il fait, ou s'il mesure, que la même distance  $L$  le sépare des deux signaux, il en déduira qu'ils se sont allumés simultanément à l'instant  $t = -L/c$ . Au même instant  $t = t' = 0$ , le contrôleur, situé en  $O'$ , passe devant le chef de gare. Il voit donc, à cet instant précis, les deux signaux  $A$  et  $B$  s'allumer. Comment peut-il en déduire l'instant auquel ils se sont allumés (dans son échelle de temps, bien sûr) ? Il faut d'abord déterminer où les deux signaux se sont allumés dans son référentiel. Pour cela, il peut parcourir son train et rechercher les deux voyageurs  $A'$  et  $B'$  (les observateurs) qui étaient juste en face des signaux quand ils se sont allumés. Il pourra ensuite leur demander à quel instant cet événement s'est produit ou utiliser leur position et la vitesse de la lumière pour calculer cet instant.

Supposons d'abord que la cinématique classique s'applique. Le temps étant universel, les deux signaux s'allument dans  $\mathcal{R}'$  au même instant  $t' = -L/c$ . A cet instant  $O'$  est à une abscisse  $-uL/c$  par rapport à  $O$ . Les passagers  $A'$  et  $B'$  sont alors situés respectivement en  $x' = -L + uL/c$  et  $x' = L + uL/c$ . La distance  $A'O' = L(c - u)/c$  est donc inférieure à la distance  $B'O' = L(c + u)/c$ . En appliquant la procédure décrite ci-dessus, le contrôleur établira donc que les deux signaux se sont allumés au même instant. L'un était plus proche, mais la vitesse de l'autre impulsion était plus grande.

Que se passe-t-il maintenant si nous appliquons le principe de relativité ? La vitesse des deux impulsions lumineuses est la même. Nous ne pourrions pas, pour le moment, déterminer la position des observateurs A' et B' (il faut connaître la transformation de Lorentz). Nous pouvons, en revanche, comprendre que la distance A'O' est nécessairement inférieure à celle de l'autre. Le contrôleur en déduira que le signal A s'est allumé *après* le signal B. Deux événements peuvent être vus comme simultanés ou non par des observateurs appartenant à des référentiels différents.

### 9.4.1 Notion d'intervalle

Considérons deux événements repérés, dans un référentiel donné, par  $(ct_1, x_1, y_1, z_1)$  et  $(ct_2, x_2, y_2, z_2)$ . Si ces deux événements sont sur le cône de lumière l'un de l'autre, ils peuvent être reliés par un signal lumineux se propageant à la vitesse  $c$ . On a donc dans ce cas

$$c^2(t_1 - t_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

On définit alors *l'intervalle*  $s_{1,2}$  entre ces deux événements selon

$$s_{1,2}^2 = c^2(t_1 - t_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2.$$

L'intervalle joue le rôle d'une distance dans l'espace-temps. L'intervalle s'annule quand les deux événements sont sur le cône de lumière l'un de l'autre. Cette propriété est indépendante du référentiel : le fait pour deux événements d'être ou non reliés par un signal lumineux ne dépend pas de la description du mouvement. Un intervalle nul est donc un invariant dans un changement de référentiel.

- Si  $s_{1,2}^2 > 0$ , les deux événements peuvent être reliés par un signal se propageant moins vite que la lumière, il peut y avoir un lien de causalité entre eux. On parle d'intervalle du genre *temps*.
- Si  $s_{1,2}^2 < 0$ , aucun signal ne peut relier ces deux événements, ce qui exclut tout lien de causalité. On parle d'intervalle du genre *espace*.
- Si  $s_{1,2}^2 = 0$ , les deux événements peuvent être reliés par un signal se propageant à la vitesse de la lumière. On parle d'intervalle du genre *lumière*.

Pour deux événements infiniment proches, on définit un intervalle infinitésimal, dans le référentiel  $\mathcal{R}$

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

**On peut montrer que l'intervalle infinitésimal est invariant par changement de référentiel.**

Considérons un intervalle de temps  $dt$  dans  $\mathcal{R}$ , où une particule se déplace de  $d\mathbf{l} = \mathbf{v}dt$ . L'intervalle entre les deux événements correspondant vaut

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  où la particule est au repos, on a  $ds^2 = ds'^2 = c^2 dt'^2$ . On appelle alors "temps propre" l'intervalle de temps s'écoulant dans  $\mathcal{R}'$  et nous le noterons  $d\tau = dt'$ . On obtient alors

$$\boxed{dt = \gamma d\tau, \text{ avec } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

On retrouve ainsi, de manière très générale, la dilatation des temps par rapport au temps propres, temps de référence dans le référentiel où la particule est au repos.

## 9.5 Dynamique relativiste

On peut montrer que, en relativité restreinte, une particule possède une énergie

$$\mathcal{E} = \gamma mc^2$$

et une quantité de mouvement

$$\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}.$$

**A faible vitesse**, on obtient  $\mathbf{p} \approx m\mathbf{v}$  et  $\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ . A une constante près, nous retrouvons bien l'énergie cinétique galiléenne. Si les énergies sont toujours définies à une constante additive près en mécanique classique, il n'en est pas de même en relativité (on ne fera pas la démonstration ici). L'énergie mécanique d'une particule au repos,  $\mathcal{E}_0 = mc^2$  a une signification physique. Si une masse au repos possède de l'énergie, cela indique qu'on peut, au moins sur un plan pur de bilan d'énergie, transformer une certaine quantité de masse en énergie ou une certaine quantité d'énergie en masse. Les applications les plus spectaculaires de ces conversions sont les créations et annihilations de particules élémentaires. Quand deux antiparticules s'annihilent en émettant de l'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique, on a conversion totale d'une certaine quantité de masse en énergie. Le phénomène réciproque, la création d'une paire particule/antiparticule à partir d'un rayonnement suffisamment énergétique, correspond à la conversion d'énergie en masse. Pour créer, par exemple, une paire électron/positron, il faudra au moins fournir une énergie  $2mc^2$ , soit 2 fois 511 keV. Cette notion de seuil de réaction joue un rôle essentiel pour l'analyse des collisions de particules. Enfin, compte-tenu de l'équivalence entre masse et énergie, il est courant de donner la valeur de la masse d'une particule en unité d'énergie par son énergie de masse. Par exemple, un électron a une masse de 511 keV signifie que  $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$ .