



HAL
open science

Travaux Dirigés de Mécanique - Agrégation externe de Physique-Chimie option Chimie

Kenneth Maussang

► **To cite this version:**

Kenneth Maussang. Travaux Dirigés de Mécanique - Agrégation externe de Physique-Chimie option Chimie. Master. Mécanique, Montrouge, France. 2014, pp.73. hal-04183819

HAL Id: hal-04183819

<https://cel.hal.science/hal-04183819v1>

Submitted on 21 Aug 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TD1 Cinématique

26/09/2014



I. PRINCIPE D'INERTIE – NOTION DE RÉFÉRENTIELS

1. Donner l'énoncé du principe de l'inertie, ou première loi de Newton (1687). Quelle relation existe-t-il entre les référentiels galiléens ? Rappeler les caractéristiques des référentiels suivants : référentiel de Copernic, référentiel géocentrique, référentiel terrestre. Préciser les conditions pour lesquelles ces référentiels peuvent être considérés galiléens.

2. Donner des exemples de forces rencontrées usuellement en physique. Quelle est l'unité de force dans le système international ? Rappeler la loi fondamentale de la dynamique, ou deuxième loi de Newton.

3. Énoncer le principe des actions réciproques, ou troisième loi de Newton. Exemples.

II. CINÉMATIQUE

On considère un point M de l'espace. Donner, dans le cas général, l'expression de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques puis sphériques.

III. LE PENDULE SIMPLE (1)

On accroche une bille de masse m à un fil inextensible de longueur l , de masse négligeable, d'extrémité fixe O . On note θ l'angle entre le fil et la verticale, T la tension du fil.

Donner en fonction de θ (ainsi que ses dérivées temporelles), l'expression des composantes de la vitesse et de l'accélération de la bille.

IV. AGREG B 2006 : ASTRONEFS ET AÉRONEFS

partie A, 1.1 et 1.2.

V. ★ MANÈGE ★

On considère un référentiel \mathcal{R} muni du repère absolu $OXYZ$ galiléen. Un plateau de manège de rayon R tourne dans \mathcal{R} autour de OZ à vitesse angulaire constante, on la notera Ω . Soit \mathcal{R}' le référentiel lié au plateau et auquel on associe le repère absolu $Oxyz$. Un élément du manège, repéré par le point $M(m)$, se déplace sur un segment de droite OA et est animé d'un mouvement sinusoïdal de pulsation ω_0 , d'amplitude $R/2$ centré en I milieu de OA . On précise qu'à $t = 0$, M se trouve en I et sa vitesse \vec{v} est dirigée vers A .

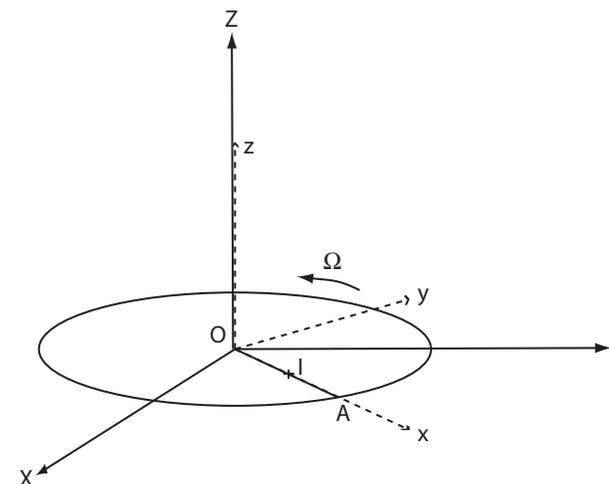


Figure 1: Manège tournant

1. Ecrire les expressions des forces d'inertie d'entraînement et de coriolis, notées respectivement \vec{f}_{ie} et \vec{f}_{ic} , subies par M dans \mathcal{R}' . On donnera leurs expressions en fonction de Ω , m , ω_0 , R et t .

2. Indiquer soigneusement la direction et le sens de ces forces lorsque M va de O vers A puis l'inverse.

3. Indiquer la valeur de ces forces en fonction du temps, pour $t \in [0, \frac{2\pi}{\omega_0}]$.

ASTRONEFS ET AERONEFS

Données :	Masse de la Terre	$M_T = 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$
	Rayon de la Terre	$R_T = 6,38 \times 10^6 \text{ m}$
	Masse du Soleil	$M_S = 333 \times 10^3 \times M_T$
	Constante universelle de gravitation	$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ S.I.}$
	Valeur du champ de pesanteur au niveau du sol	$g = 9,81 \text{ m/s}^2$
	Masse volumique de l'air au niveau de la mer, à 15 °C	$\rho_0 = 1,2 \text{ kg.m}^{-3}$
	Constante des gaz parfaits	$R = 8,314 \text{ S.I.}$
	Masse molaire de l'air	$M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$
	Densité de l'Hélium	$d_{\text{He}} = 0,138$

Les vecteurs sont notés en gras

Les parties A, B et C sont indépendantes.

A. MOUVEMENTS ET TRAJECTOIRES

1. Lois de la mécanique

1.1. Cinématique du point

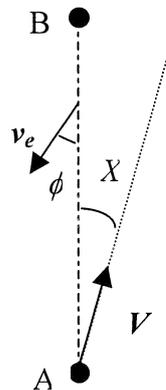
1.1.a. Donner la définition :

- d'un référentiel R ,
- de la vitesse \mathbf{v}_R et de l'accélération \mathbf{a}_R d'un point matériel M dans ce référentiel.

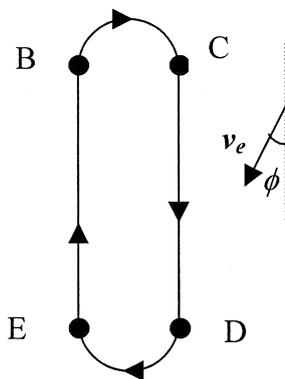
1.1.b. Donner les expressions de \mathbf{v}_R et de \mathbf{a}_R en coordonnées cartésiennes, cylindriques et dans la base de Frénet.

1.1.c. La vitesse et l'accélération de M sont notées respectivement $\mathbf{v}_{R'}$ et $\mathbf{a}_{R'}$ dans un référentiel R' en mouvement par rapport à R . Donner les expressions de \mathbf{v}_R en fonction de $\mathbf{v}_{R'}$ et de \mathbf{a}_R en fonction de $\mathbf{a}_{R'}$ dans le cas où R' est en translation par rapport à R puis dans le cas où il est en rotation à une vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe dans R .

1.1.d. Un avion doit se déplacer en ligne droite d'un point A vers un point au sol B. Il subit un vent contraire de vitesse v_e . Le vecteur \mathbf{v}_e fait un angle ϕ avec la trajectoire AB. L'avion vole à une vitesse constante V par rapport à l'air. Cette vitesse fait un angle X avec la route au sol AB.



- 1) A quelles conditions l'avion peut-il se déplacer en ligne droite de A vers B ? Calculer l'angle de correction X que le pilote doit afficher dans le cas où $V = 445 \text{ km.h}^{-1}$, pour contrer un vent de vitesse $v_e = 56 \text{ km.h}^{-1}$ et $\phi = 20^\circ$.
- 2) L'avion doit faire un aller-retour entre les deux points A et B distants de 500 km, dans les conditions de la question précédente. Calculer la durée t_{ar} du trajet aller-retour. On négligera le temps du demi-tour. Comparer cette durée avec le temps t'_{ar} qu'aurait mis l'avion pour faire le même trajet en l'absence de vent. Est-il possible que $t_{ar} < t'_{ar}$? Commenter cette maxime de l'aéronautique : « *le temps perdu ne se rattrape jamais* ».
- 3) En B, l'avion arrive au-dessus d'une balise au sol à une date prise pour origine des temps. Le contrôleur demande alors au pilote de réaliser à altitude constante un circuit d'attente BCDE constitué de deux parties semi-circulaires BC et DE et de deux parties rectilignes CD et EB. Il lui indique à quelle date t_B l'avion doit se présenter à nouveau au-dessus de la balise B.



Le pilote adapte l'inclinaison de l'appareil et donc le rayon des tronçons semi-circulaires BC et DE de manière à ce que ceux-ci durent 1 minute chacun. Durant cette attente, la vitesse V de l'avion est supposée constante et égale à 222 km.h^{-1} , tandis que la vitesse du vent est toujours $v_e = 56 \text{ km.h}^{-1}$, et $\phi = 20^\circ$.

A quelle date t_v le pilote doit-il entreprendre le virage DE si la date de passage au dessus du point B, imposée par le contrôleur, est $t_B = 4$ minutes ?

1.2. Lancement d'un satellite

On étudie le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point O de la surface terrestre.

1.2.a. Établir l'expression de la vitesse du point O dans le référentiel géocentrique R_g (assimilé ici à un référentiel galiléen) en fonction de la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles Ω , du rayon terrestre R_T et de la latitude du lieu λ .

1.2.b. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tirs suivants, lequel choisir de préférence ?

- Baïkonour au Kazakhstan $\lambda = 46^\circ$;
- Cap Canaveral aux USA $\lambda = 28,5^\circ$;
- Kourou en Guyane française $\lambda = 5,23^\circ$.

1.3. Champ de gravitation

On considère que la Terre de masse M_T et de rayon R_T a une répartition de masse sphérique et une densité volumique ρ .

1.3.a. Énoncer la loi de la gravitation universelle.

1.3.b. Montrer qu'en un point situé à une distance r du centre de la Terre, ($r > R_T$), le

Tournez la page S.V.P.

I Principe d'inertie

- 1) - Principe d'inertie :
 → 3 critères à mentionner.

On postule l'existence d'un ensemble de référentiels R_g , dits galiléens ou d'inertie, en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres, dans lesquels une particule matérielle mécaniquement isolée (c'est-à-dire soumise à aucune force) est en translation rectiligne uniforme. Une particule au repos reste au repos.

- Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

- Référentiel de Copernic :
- origine : centre de masse du système solaire (ce n'est pas le centre de masse du soleil).
 - ses axes sont définis par la direction de trois étoiles ("supposées fixes")
 - Il forme la meilleure approximation de référentiel galiléen.

Référentiel géocentrique :

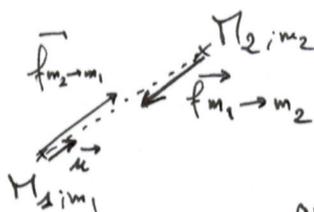
- origine : centre de masse de la Terre.
- ses axes sont définis par la direction de trois étoiles "fixes"
- Il forme une bonne approximation de référentiel galiléen pour des expériences "courtes" devant la période de rotation de la Terre autour du Soleil.

Référentiel terrestre :

- origine : un point quelconque de la Terre.
- ses axes sont définis localement, et sont liés à la rotation de la Terre.
- Il forme une bonne approximation de référentiel galiléen pour des expériences "courtes" devant la période de rotation de la Terre sur elle-même.

2) Exemples de forces :

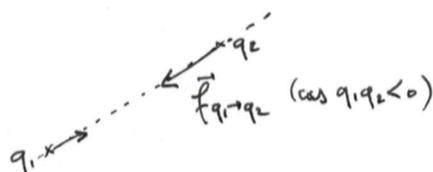
- force gravitationnelle : 2 masses m_1 et m_2 , situées en Π_1 et Π_2 ; la masse m_1 exerce la force $\vec{f}_{m_1 \rightarrow m_2}$ sur la masse m_2 selon :



$$\vec{f}_{m_1 \rightarrow m_2} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{\Pi}_1 \Pi_2}{\|\vec{\Pi}_1 \Pi_2\|^3}$$

avec $\vec{u} = \frac{\vec{\Pi}_1 \Pi_2}{r}$, $r = \|\vec{\Pi}_1 \Pi_2\|$ et $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ la constante de gravitation universelle

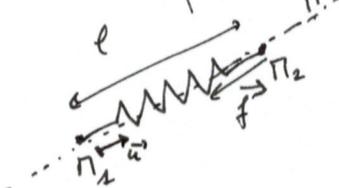
- force électrostatique de Coulomb : 2 charges ponctuelles q_1 et q_2 ; la force $\vec{f}_{q_1 \rightarrow q_2}$ exercée par la charge q_1 sur q_2 est :



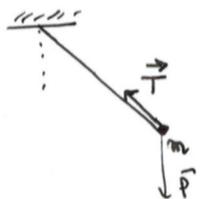
$$\vec{f}_{q_1 \rightarrow q_2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\|\vec{\Pi}_1 \Pi_2\|^3} \vec{\Pi}_1 \Pi_2$$

- force de rappel d'un ressort : soit un ressort de masse négligeable, de longueur au repos l_0 , de direction d'allongement \vec{u} . La force de rappel élastique \vec{f}_{el} exercée sur le point Π_2 est :

$$\vec{f} = -k(l - l_0)\vec{u}$$



- Tension d'un fil : La tension T d'un fil est dirigée selon la direction définie par ce fil, tant que le fil est tendu.



Sa valeur est arbitraire, dans la limite où le fil ne casse pas.

- Dans le système d'unités international, l'unité de force est le Newton (symbole N).
[Sa définition est la suivante : un newton est la force capable de communiquer à une masse de 1kg une accélération de 1 m/s^2 .]

• Principe fondamental de la dynamique :

Pour un système fermé dans un référentiel galiléen R_g , on a

$$\left(\frac{d\vec{p}_{R_g}}{dt} \right)_{R_g} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

où \vec{F}_{ext} est l'ensemble des forces extérieures et $\vec{p}_{R_g} = m\vec{v}_{R_g}$ est la quantité de mouvement dans R_g .

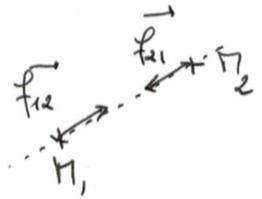
R_g : Les forces intérieures n'intervenant pas, la définition du système devient fondamentale.

3) Principe des actions réciproques :

Soit deux points matériels M_1 et M_2 , dont les forces d'interactions sont respectivement notées \vec{f}_{12} (force exercée par 2 sur 1) et \vec{f}_{21} .

Le principe des actions réciproques stipule que l'on a $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$

et que les forces \vec{f}_{12} et \vec{f}_{21} sont portées par la droite passant par M_1, M_2 .

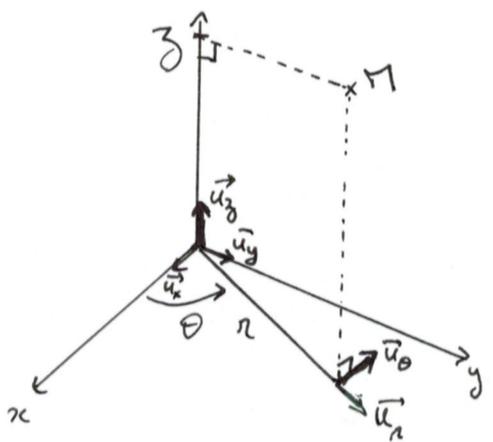


II Cinématique

• En coordonnées cartésiennes : $\vec{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ (repère $(O; \vec{u}_x; \vec{u}_y; \vec{u}_z)$)

Alors $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$ et $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$

• En coordonnées cylindriques : $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$. (repère $(O; \vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{u}_z)$)



Alors $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (r\vec{u}_r + z\vec{u}_z)$

Mais comme $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta)$ est lié au point courant M , on a implicitement une dépendance en temps des vecteurs de base \vec{u}_r et \vec{u}_θ .

d'où $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\frac{d\vec{u}_r}{dt} + \dot{z}\vec{u}_z$.

A SAVOIR, EN POLAIRE, $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$.

et donc $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$

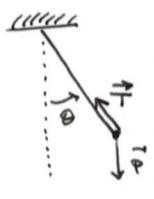
De même, pour l'accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z) = \ddot{r} \vec{u}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ddot{z} \vec{u}_z$$

soit $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$

En sphérique, le calcul général est très complexe : on procède en pratique au cas par cas en exploitant les symétries du problème.

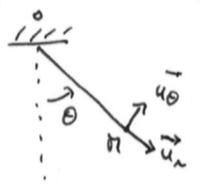
III Le pendule simple



\vec{T} : tension du fil
 \vec{P} : poids du fil.

R : référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

Système de coordonnées adapté : polaire (base locale $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta)$)



Avec $\vec{or} = r \vec{u}_r = l \vec{u}_r$

Le fil est inextensible donc $l = \text{cste}$

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{or}}{dt} \right)_R = l \frac{d\vec{u}_r}{dt} = l \dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{v} = l \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Ensuite, $\vec{a} = \left(\frac{d^2\vec{or}}{dt^2} \right)_R = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)_R = \frac{d}{dt} (l \dot{\theta} \vec{u}_\theta) = l \ddot{\theta} \vec{u}_\theta + l \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{u}_r)$

soit $\vec{a} = -l \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + l \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$

IV Extrait Agreg B 2006 : Astronefs et aéronefs

A. 1.1. a.

- Un référentiel R lié à un solide J de référence, est la donnée d'un point solidaire de J ainsi que 3 directions définissant un système d'axes solidaires du solide, et est muni d'une horloge.
- Soit O l'origine d'un repère associé à R. On a alors, par définition,

$$\vec{V}_R(t) = \left(\frac{d\vec{or}}{dt} \right)_R \quad \text{et} \quad \vec{a}_R(t) = \left(\frac{d^2\vec{or}}{dt^2} \right)_R$$

Rq : pour une dérivée temporelle, il faut toujours préciser par rapport à quel référentiel on dérive.

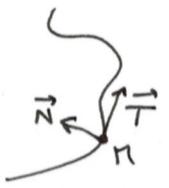
- En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{or} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z ; \quad \vec{V}_R = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z ; \quad \vec{a}_R = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

En coordonnées cylindriques :

$$\vec{or} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z ; \quad \vec{V}_R = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z ; \quad \vec{a}_R = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + 2 \dot{r} \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

Base de Frenet



\vec{T} : vecteur tangent à la trajectoire

\vec{N} : vecteur normal à la trajectoire, dirigé vers le centre de courbure.

$$\begin{cases} \vec{v} = v \vec{T} \\ \vec{a} = \dot{v} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N} \end{cases} \quad \text{où } R \text{ est le rayon de courbure de la trajectoire.}$$

1.1.c loi de composition des vitesses :

$$\vec{v}_R = \vec{v}_{R'} + \vec{v}(R'/R)$$

toujours vrai.

avec \vec{v}_R vitesse du point M dans le référentiel R

$\vec{v}_{R'}$ vitesse du point M dans le référentiel R'

et $\vec{v}(R'/R)$ est la vitesse de R' par rapport à R (vitesse d'entraînement).

loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}_R = \vec{a}_{R'} + \vec{a}_e(R'/R) + \vec{a}_c(R'/R)$$

\vec{a}_e accélération d'entraînement de R' par rapport à R = accélération du point coïncident immobile dans R'

\vec{a}_c accélération de Coriolis ($\vec{a}_c(R'/R) = 2 \vec{\omega}_e \wedge \vec{v}_{R'}$)

vecteur rotation d'entraînement $\vec{\omega}_e = \vec{\omega}(R'/R)$

vitesse relative (ie dans R')

Cas d'une translation :

$$\vec{a}_R = \vec{a}_{R'}$$

$$\vec{v}_R = \vec{v}_{R'} + \vec{v}(R'/R)$$

↳ vitesse de translation de R'/R.

Cas d'une rotation à vitesse angulaire ω autour d'un axe fixe dans R :

On prend un point $O \in \Delta$ axe de rotation fixe comme origine de repère ; $\vec{\omega}$ vecteur rotation instantanée.

Soit M un point fixe dans R' (sous-entendu le point coïncident).

Soit H son projeté orthogonal sur Δ .

On a $\vec{OM} = \vec{OH} + \vec{HM}$, alors $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$

Rappel : pour un solide J en rotation à $\vec{\omega}$, les champs de vitesse en O et M sont reliés par la relation suivante.

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

Dans le cas considéré, $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{HM}$ car $H \in \Delta$ donc est immobile (car Δ fixe dans R).

Accélération du point coïncident

$$\vec{a}_e(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} \Big|_R \text{ pour M fixe dans R'}$$

$$\vec{a}_e(M) = \frac{d}{dt} (\vec{\omega} \wedge \vec{HM}) = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{HM} + \vec{\omega} \wedge \frac{d(\vec{HM})}{dt} \Big|_R$$

Or, par définition du vecteur instantané de rotation pour un solide indéformable J :

$$\forall (A;B) \in J, \left(\frac{d\vec{AB}}{dt} \right) \Big|_R = \vec{\omega} \wedge \vec{AB} \text{ où } \vec{\omega} \text{ est le vecteur instantané de rotation.}$$

$$\text{d'où } \vec{a}_e(M) = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{HM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{HM})$$

De plus : $\forall (\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}) \in (\mathbb{R}^3)^3$, on a la relation suivante : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$\text{donc } \vec{a}_e(M) = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{HM} + \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{HM})\vec{\omega}} - \omega^2 \vec{HM} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{HM} - \omega^2 \vec{HM}$$

= 0 car H projeté orthogonal

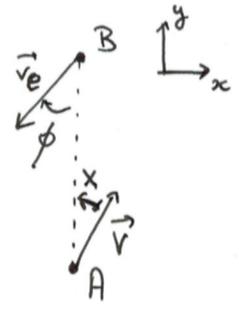
Donc dans le cas général $\vec{a}_e(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{HM} - \omega^2 \vec{HM}$

Cas important : $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$ (rotation constante) $\vec{a}_e(M) = -\omega^2 \vec{HM}$

(Intervient dans les forces dites centrifuges...)

Et enfin, par définition, $\vec{a}_c(M) = 2 \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M/R')$

1. 1. d.]



① Soit R le référentiel lié au sol, et R' le référentiel "lié au vent".
Le vent se déplace à la vitesse \vec{v}_e dans R, c'est-à-dire que R' est en translation à la vitesse \vec{v}_e dans R.
L'avion se déplace à la vitesse \vec{V} dans R'.
Soit \vec{V}_R la vitesse de l'avion dans R.

Loi de composition des vitesses : $\vec{V}_R = \vec{V}_{R'} + \vec{v}_e = \vec{V} + \vec{v}_e$

Définissons la base cartésienne $(\vec{u}_x; \vec{u}_y)$, voir schéma :

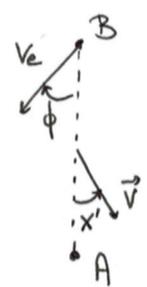
$$\vec{V}_R = \begin{pmatrix} -v_e \sin \phi + V \sin X \\ -v_e \cos \phi + V \cos X \end{pmatrix}$$
 L'avion se déplacera en ligne droite si $\vec{V}_R \cdot \vec{u}_x = 0$
d'où la condition $v_e \sin \phi = V \sin X$

On a donc $X = \text{Arcsin} \left(\frac{v_e}{V} \sin \phi \right)$. A.N. : $X = 25^\circ (\approx 0,43 \text{ rad})$.

② Dans le référentiel R, la trajectoire est une ligne droite à la vitesse \vec{V}_R portée par \vec{u}_y .

Sans vent : $t_{A-B}^{(0)} = \frac{2AB}{V}$ pour faire un aller-retour.

Avec le vent : 1^{ère} phase : Aller de A vers B : $\vec{V}_R = (V \cos X - v_e \cos \phi) \vec{u}_y$
donc $t_{A \rightarrow B} = \frac{AB}{V \cos X - v_e \cos \phi}$



2^{ème} phase : Retour de B vers A : nouvel angle X'

En appliquant le même raisonnement que précédemment :

$$\vec{V}'_R = \begin{pmatrix} -v_e \sin \phi + V \sin X' \\ -v_e \cos \phi - V \cos X' \end{pmatrix}$$
 La condition de déplacement en ligne droite devient alors
 $+v_e \sin \phi = V \sin X'$ soit $X' = X$ (avec les conventions de signes choisies).

Alors $\vec{V}'_R = -(v_e \cos \phi + V \cos X) \vec{u}_y$ et $t_{B \rightarrow A} = \frac{AB}{v_e \cos \phi + V \cos X}$, d'où t_{AB} le temps pour effectuer l'aller-retour :

$$t_{A-B} = AB \left(\frac{1}{V \cos X - v_e \cos \phi} + \frac{1}{V \cos X + v_e \cos \phi} \right) = 2AB \frac{V \cos X}{V^2 \cos^2 X - v_e^2 \cos^2 \phi}$$

$$t_{A-B} = \frac{2AB}{V} \frac{V^2 \cos X}{V^2 \cos^2 X - v_e^2 \cos^2 \phi}$$

A.N. : Sans vent : $t_{AB}^{(0)} = 2,247 \text{ h} = 2 \text{ heures, } 14 \text{ minutes et } 49 \text{ secondes}$

Avec du vent : $t_{AB} = 2,281 \text{ h} = 2 \text{ heures, } 16 \text{ minutes et } 52 \text{ secondes}$.

Montrons que $t_{A-B} \geq t_{A-B}^{(0)}$:

$$t_{A-B} - t_{A-B}^{(0)} = \frac{2AB}{V} \left(\frac{V^2 \cos X}{V^2 \cos^2 X - v_e^2 \cos^2 \phi} - 1 \right) \quad \text{Or } \sin X = \frac{v_e}{V} \sin \phi$$

et $\cos^2 X = 1 - \sin^2 X = 1 - \frac{v_e^2}{V^2} \sin^2 \phi$

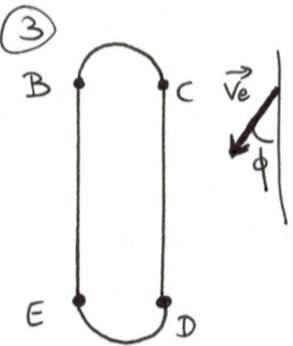
D'où $\sqrt{V^2 \cos^2 X - v_e^2 \cos^2 \phi} = V^2 - v_e^2 \sin^2 \phi - v_e^2 \cos^2 \phi = V^2 - v_e^2$.

soit $t_{A-B} - t_{A-B}^{(0)} = \frac{2AB}{V} \left(\frac{V^2 \cos X - V^2 + v_e^2}{V^2 - v_e^2} \right)$.

Or $\cos X = \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{V^2} \sin^2 \phi} > \sqrt{1 - \frac{v_e^2}{V^2}} = \frac{1}{V} \sqrt{V^2 - v_e^2}$

donc $V^2 \cos X - V^2 + v_e^2 > \sqrt{V^2 - v_e^2} - (V^2 - v_e^2) = \underbrace{(V - \sqrt{V^2 - v_e^2})}_{>0} \sqrt{V^2 - v_e^2} > 0$

Donc, tant que $|V| > |v_e|$, on aura toujours $t_{A-B} > t_{A-B}^{(0)}$



On doit calculer t_{CD} et t_{BE} afin que $t_{BC} + t_{CD} + t_{DE} + t_{EB} = 4$ minutes.

La vitesse de l'avion a changée, il faut donc calculer le nouvel angle de compensation $X' = \text{Arcsin} \left(\frac{v_e}{V} \sin \phi \right)$ avec $V = 222 \text{ km/h}$.

On obtient $X' = 4,94^\circ$ donc $\cos X' \approx 1$.

Avec un raisonnement identique à la question précédente, le temps d'aller-retour (hors virages) est

$$t_{BE} + t_{CD} = \frac{2V \cdot BE}{V^2 - v_e^2 \cos^2 \phi} \quad \text{en faisant l'approximation } \cos X' \approx 1.$$

$$t_{BE} = \frac{BE}{V - v_e \cos \phi} \quad t_{CD} = \frac{BE}{V + v_e \cos \phi} \quad \text{car } BE = CD$$

On a $t_B = \underbrace{t_{BC} + t_{DE}}_{2 \text{ min}} + t_{BE} + t_{CD} = 4 \text{ min}$. Le problème revient donc à imposer $t_{BE} + t_{CD} = 2 \text{ min} \stackrel{\text{def}}{=} T$.

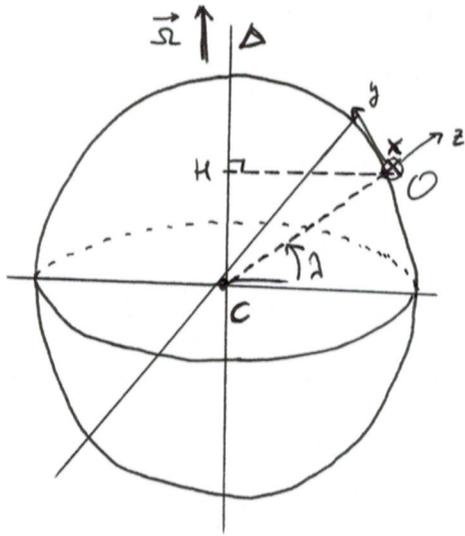
or $t_{BE} = \frac{V + v_e \cos \phi}{V - v_e \cos \phi} t_{CD} \rightarrow t_{CD} \left(1 + \frac{V + v_e \cos \phi}{V - v_e \cos \phi} \right) = T$

D'où $t_{CD} = \frac{T}{2V} (V - v_e \cos \phi)$ et $t_{BE} = \frac{T}{2V} (V + v_e \cos \phi)$.

A.N. : $t_{CD} = 45 \text{ secondes}$

1.2) Lancement d'un satellite

1.2.a) Soit O un point à la surface de la Terre, de centre C.



1) la latitude est un angle orienté à partir de l'équateur.
base locale $(\vec{u}_x; \vec{u}_y; \vec{u}_z)$ en O

$\vec{\Omega}$ vecteur rotation de la Terre sur elle-même

R_g : on est dans $R_g =$ référentiel géocentrique donc C est fixe
 R_g est supposé galiléen -

Rotation autour d'un axe fixe Δ : $\vec{v}(O) = \Omega H o \vec{u}_x$
avec H projeté orthogonal sur l'axe Δ ; abus en introduisant la latitude λ

$H o = R_T \cos \lambda$. D'où $\boxed{\vec{v} = \Omega R_T \cos \lambda \vec{u}_x}$

$\lambda = 46^\circ \rightarrow \|\vec{v}\| = 323 \text{ m/s}$

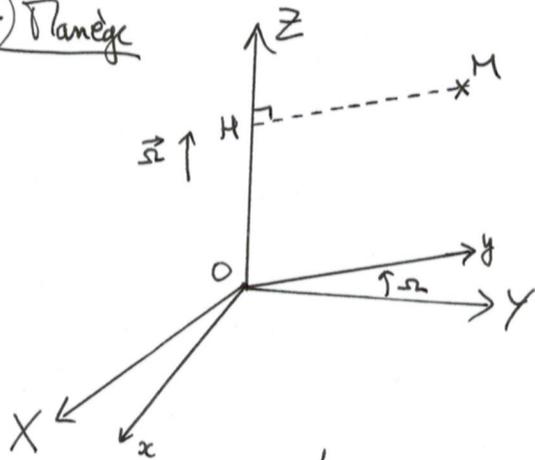
$\lambda = 48,5^\circ \rightarrow \|\vec{v}\| = 409 \text{ m/s}$

$\lambda = 5,23^\circ \rightarrow \|\vec{v}\| = 463 \text{ m/s}$

R_g : $\frac{\Omega}{2\pi} = \frac{1 \text{ tour}}{24 \text{ h}} = \frac{1 \text{ tour}}{24 \times 60 \times 60} = 1,157 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \Rightarrow \underline{\underline{\Omega = 7,27 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}}}$

Il est préférable d'être le plus près possible de l'équateur pour bénéficier d'une vitesse initiale la plus importante possible afin d'économiser du carburant.

(V) Planège



1) Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe OZ.

On a $\begin{cases} \vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e \\ \vec{f}_{ic} = -m\vec{a}_c \end{cases}$

avec \vec{a}_e accélération du point coïncident et \vec{a}_c accélération de Coriolis -

Pour une rotation uniforme: $\boxed{\vec{a}_e = -\Omega^2 \vec{HM}}$

Ici, on considère que M reste dans le plan xOy donc $H \equiv O$ soit $\boxed{\vec{a}_e = -\Omega^2 \vec{OM}}$

Accélération de Coriolis $\boxed{\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_R}$

$\vec{\Omega}(R/R)$ vitesse relative ($\vec{v}(M/R')$).

On a $\vec{OM} = \frac{R}{2} (1 + \sin \omega_0 t) \vec{u}_x \Rightarrow \vec{v}_{R'} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right)_{R'} = \frac{d}{dt} \left(\frac{R}{2} (1 + \sin \omega_0 t) \vec{u}_x \right)_{R'} = \frac{R}{2} \omega_0 \cos \omega_0 t \vec{u}_x$

d'où $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'} = 2\vec{\Omega} \wedge \left(\frac{R}{2} \omega_0 \cos \omega_0 t \vec{u}_x \right)$ soit $\boxed{\vec{a}_c = R \Omega \omega_0 \cos \omega_0 t \vec{u}_y}$

$\boxed{\vec{a}_e = -\Omega^2 \frac{R}{2} (1 + \sin \omega_0 t) \vec{u}_x}$

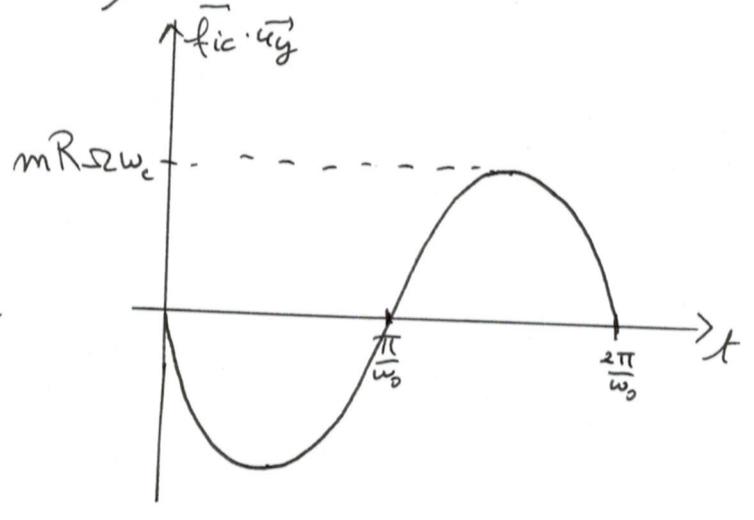
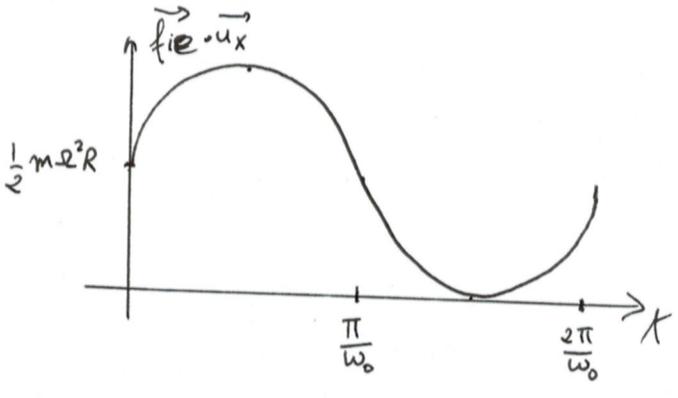
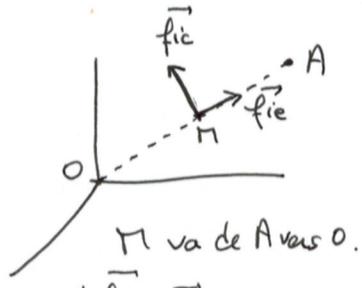
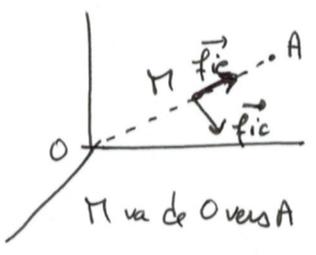
d'où $\boxed{\vec{f}_{ie} = m \Omega^2 \frac{R}{2} (1 + \sin \omega_0 t) \vec{u}_x}$

$\boxed{\vec{f}_{ic} = -m R \Omega \omega_0^2 \cos \omega_0 t \vec{u}_y}$

2) Si M va de O vers A, \vec{v}_r est dirigé selon \vec{OA} et donc \vec{a}_c selon $+\vec{u}_y$; donc \vec{f}_{ic} est dirigée selon $-\vec{u}_y$.

Si M va de A vers O, \vec{v}_r est dirigé selon $-\vec{OA}$ et donc \vec{a}_c selon $-\vec{u}_y$; donc \vec{f}_{ic} est dirigée selon $+\vec{u}_y$.

\vec{f}_{ic} est toujours centrifuge, dirigée selon $+\vec{u}_x$.



TD2 Principe Fondamental de la Dynamique



I. LE PENDULE SIMPLE (2)

On accroche une bille de masse m à un fil inextensible de longueur l , de masse négligeable, d'extrémité fixe O. On note θ l'angle entre le fil et la verticale, T la tension du fil.

Question préliminaire : On note $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$. Quelles est la dimension de ω_0 ?

1. Effectuer le bilan des actions mécaniques sur la bille.

2. En utilisant la loi fondamentale de la dynamique, donner deux équations liant θ , $d\theta/dt$ et T d'une part, $d^2\theta/dt^2$ et θ d'autre part.

3. Donner l'équation du mouvement dans le cas général.

4. Dans le cas des "petites oscillations" donner la solution la plus générale du mouvement, puis dans le cas particulier où $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

5. Dans le cas des plus grandes amplitudes, on développe le terme en $\sin \theta$ à l'ordre 3 selon

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6}.$$

5.1. Que devient l'équation du mouvement ?

5.2. On cherche une solution de la forme

$$\theta = \theta_0 \cos \omega t + \varepsilon \theta_0 \cos 3\omega t.$$

Quelle est, dans cette solution, la pulsation fondamentale ? Commenter.

II. GLISSEMENT SUR UNE SPHÈRE

On considère une sphère de centre O, de rayon ρ , sur le sommet de laquelle on pose une masse m de faibles dimensions. La masse m glisse alors sans frottements sur la sphère. Déterminer l'angle θ_d pour lequel la masse m décolle de la sphère.

III. MOUVEMENT D'UNE FUSÉE BALISTIQUE [EXTRAIT AGREG B 2006]

A la date $t = 0$, une fusée balistique, assimilée à un point matériel M de masse m constante, est lancée à partir d'un point O de la surface terrestre avec une vitesse initiale \mathbf{v}_0 inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale.

1. Établir l'équation de la trajectoire de la fusée dans le champ de pesanteur terrestre considéré comme uniforme. On néglige les frottements avec l'air. Quelle est la nature de la trajectoire obtenue ?

2. Calculer en fonction de v_0 , g et α les coordonnées du point S d'altitude maximale atteinte ainsi que la portée de la fusée. Pour quel angle α cette portée est-elle maximale ?

3. La vitesse initiale v_0 de la fusée étant fixée, on peut faire varier l'angle α dans un plan vertical donné. Établir l'équation de la courbe dite "parabole de sûreté" qui sépare les points du plan vertical pouvant être atteints par la fusée de ceux qui ne peuvent pas l'être.

On donne : $1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$.

IV. FUSÉE À UN ÉTAGE [EXTRAIT AGREG B 2006]

Une fusée, de masse totale initiale M , contient au départ un mélange combustible de masse $m_c = 0.8M$. Elle est lancée verticalement à la date $t = 0$. On note m la masse de la fusée à une date t . La propulsion est assurée par un dispositif à réaction. Les gaz émis sont éjectés de la tuyère avec un débit massique constant D_m à la vitesse relative u par rapport à la fusée. On néglige la résistance de l'air.

1. Donner l'expression de la quantité de mouvement des gaz éjectés par la fusée entre les instants t et $t + dt$. En déduire la variation de la quantité de mouvement de la fusée entre les instants t et $t + dt$.

2. Établir la relation

$$m(t) \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = m(t)\mathbf{g} - D_m \mathbf{u}.$$

En déduire l'expression de la force propulsive exercée par la réaction des gaz sur la fusée. A quelle condition la fusée peut-elle décoller du sol verticalement ?

3. Exprimer l'accélération de la fusée en fonction du temps. A quelle date t_e le carburant est-il épuisé ? A.N. Données : $M = 12 t$; $u = 2400 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $D_m = 120 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

4. Déterminer l'expression de la vitesse de la fusée en fonction du temps. Quelle est la vitesse maximale de la fusée ? A quelle date t_1 est-elle atteinte ? L'altitude z_1 atteinte à cette date est d'environ 83 km (ne pas justifier). Au vu de ce résultat, critiquer l'approximation $g \approx \text{constante}$ qui a été faite.

5. A quelle date t_2 la fusée atteint-elle son altitude maximale z_2 ? Déterminer z_2 . A.N.

6. La fusée étudiée peut-elle communiquer à un satellite une vitesse qui lui permette de se libérer de l'attraction terrestre ?

V. PROJECTILE (D'APRÈS CAPES INTERNE 1996)

Un point matériel de masse m est lancé en O, origine d'un repère (O, x, y, z) avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec l'axe Ox .

1. On lance avec la même vitesse initiale vers le haut ($\alpha = \pi/2$) le même objet, d'abord dans le vide, puis dans l'air où il subit des frottements non négligeables. Comparer dans ces deux cas : la hauteur maximale atteinte par l'objet, et le temps au bout duquel il l'atteint.

2. On revient au cas général (α quelconque), et on se place dans le vide. Déterminer les caractéristiques de la trajectoire : équation cartésienne, portée horizontale,

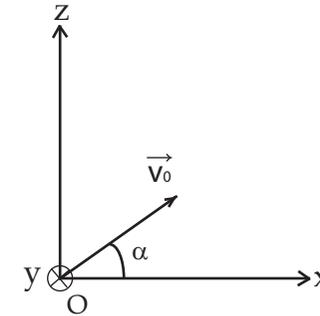
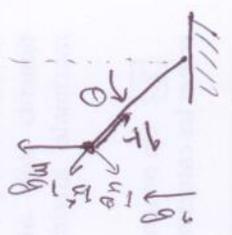


Figure 1: Lancé d'un projectile avec une vitesse initiale \vec{v}_0

angles de tir possibles pour atteindre un même point $D(d, 0, 0)$. Pour une vitesse initiale de norme v_0 donnée, montrer qu'un point P au sol ne peut être atteint que s'il se trouve dans une certaine région de l'espace.

I) Le pendule simple (2) (d'après Argyris)



1) points \vec{P} , tension \vec{T}
 2) $\vec{n} = n\vec{u}_r = f\vec{u}_r$
 $\vec{n} = f\vec{e}_\theta$
 $\vec{n} = f\vec{e}_\theta - f\vec{e}_r$

PFD: $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$
 $-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$
 $\rightarrow \begin{cases} \theta'' + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \\ T = mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2 \end{cases}$

3) $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ petites oscillations: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$
 $\dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \sin(\omega_0 t)$
 (A, B) et (θ_0, φ) déterminés par les conditions initiales.

5/ $\sin\theta \approx \theta - \frac{\theta^3}{6} \Rightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta - \frac{\omega_0^2}{6} \theta^3 = 0$ (1)

On cherche une solution $\theta = \theta_0 \cos \omega t + \varepsilon \theta_0 \cos 3\omega t$ ou ε est petit.
 $\ddot{\theta} = -\theta_0 \omega^2 \sin \omega t + \varepsilon \theta_0 (-3\omega) \sin 3\omega t$
 $\ddot{\theta} = -\theta_0 \omega^2 \cos \omega t - 9\varepsilon \theta_0 \omega^2 \cos 3\omega t$

On injecte dans (1):

$-\theta_0 \omega^2 \cos \omega t - 9\varepsilon \theta_0 \omega^2 \cos 3\omega t + \omega_0^2 \theta_0 \cos \omega t + \omega_0^2 \varepsilon \theta_0 \cos 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \left(\cos \omega t + \varepsilon \cos 3\omega t \right)^3 = 0$

On ne garde que les termes d'ordre 1 en ε

$(\cos \omega t + \varepsilon \cos 3\omega t)^3 \approx \cos^3 \omega t + 3\varepsilon \cos^2 \omega t \cos 3\omega t$
 soit

$-\theta_0 \omega^2 \cos \omega t - 9\varepsilon \theta_0 \omega^2 \cos 3\omega t + \omega_0^2 \theta_0 \cos \omega t + \omega_0^2 \varepsilon \theta_0 \cos 3\omega t - \frac{\omega_0^2}{6} \theta_0^3 \cos^3 \omega t - \frac{\omega_0^2}{2} \theta_0^3 \varepsilon \cos^2 \omega t \cos 3\omega t$

Or, $\cos^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t)$

$\cos^3 \omega t = \frac{1}{4} (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t)$

On obtient:
 $-\theta_0 \omega^2 [\cos \omega t + 3\varepsilon \cos 3\omega t] + \theta_0 \omega_0^2 [\cos \omega t + \varepsilon \cos 3\omega t] - \frac{\theta_0^3}{6} \omega_0^3 \left[\frac{3}{4} \cos \omega t + \frac{1}{4} \cos 3\omega t + \varepsilon \left(\frac{3}{2} \cos 3\omega t + \frac{3}{2} \cos 2\omega t \cos 3\omega t \right) \right] = 0$

On regroupe les termes en $\cos \omega t$ (ou 2^{ème} harmonique) et le terme en $\varepsilon \cos \omega t$ est négligeable devant $\cos \omega t$.
 Il vient alors $(-\theta_0 \omega^2 + \theta_0 \omega_0^2 - \frac{1}{8} \theta_0^3 \omega_0^2) \cos \omega t$

$+ (-\theta_0 \omega^2 9\varepsilon + \theta_0 \omega_0^2 \varepsilon - \frac{\theta_0^3}{24} \omega_0^2 - \frac{\theta_0^3}{4} \varepsilon \omega_0^2) \cos 3\omega t = 0$
 AT

donc, en annulant chaque terme:

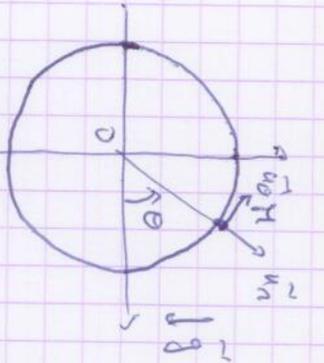
(*) $\cos \omega t = 0 \Rightarrow$

$\omega^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\theta_0^2}{8} \right)$

periode d'oscillation dépendante de l'amplitude.

(**) $\cos 3\omega t = 0 \Rightarrow \varepsilon = -\frac{\theta_0^2}{192 - \frac{\theta_0^2}{3}}$

III Glissement sur une sphère



Aspect cinématique: les coordonnées polaires sont les plus adaptées.

$$\vec{O} \dot{\vec{r}} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{O} \dot{\vec{r}}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d^2 \vec{O} \dot{\vec{r}}}{dt^2} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (R \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta$$

Aspect dynamique: bille sur la sphère sans frottement \Rightarrow

\vec{R} réaction de la sphère $\forall \theta \quad \vec{R} = R \vec{u}_r$ avec $R > 0$

à la limite du détachement, $R = 0$ on se place avant cette limite, donc $\dot{r} = 0$ car sur la sphère

on applique le PFD: $\frac{d^2 \vec{O} \dot{\vec{r}}}{dt^2} = m \vec{g} + \vec{R}$ soit

$$\left. \begin{aligned} -m r \dot{\theta}^2 &= R - m g \sin \theta \\ m r \ddot{\theta} &= -m g \cos \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{\theta}^2 &= -\frac{g}{r} \cos \theta & (1) \\ R &= m g \sin \theta - m r \dot{\theta}^2 & (2) \end{aligned} \right.$$

$$(1) \times \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r} \dot{\theta} \cos \theta \rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^3 = -\frac{g}{r} (\sin \theta - 1)$$

ou $\theta(0) = \pi/2, \dot{\theta}(0) = 0$

donc $\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r} (1 - \sin \theta)$

injectés dans (2), on obtient $R = m g (3 \sin \theta - 2)$

(1)

$R > 0$

ssi

$$\sin \theta > 2/3$$

ssi

$$\cos(\pi/2 - \theta) > 2/3$$

\Leftrightarrow

$$\pi/2 - \theta < \arccos(2/3)$$

\Leftrightarrow

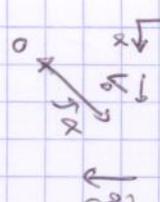
$$\theta > \pi/2 - \arccos(2/3) = \arcsin(2/3)$$

$$\boxed{\theta_1 = \arcsin(2/3)}$$

avec les conventions de la figure.

(2)

2) Trouverment d'une fusée (exercice Physique (calcul) p. 32006)



1) PFD: $m \frac{dv}{dt} = +mg$

Projection: $\int m \frac{dx}{dt} = 0$
 $\int m \frac{dz}{dt} = -mg$

$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha$
 $\frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha$

$x(t) = v_0 \cos \alpha t$
 $z(t) = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$

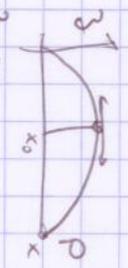
Δ l'équation de la trajectoire est demandée, il faut éliminer t.

$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ donc $z = x \tan \alpha - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$

$z = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$ (1)

2) altitude max en x_0 tq $\frac{dz}{dx} \Big|_{x_0} = 0$

$\frac{dz}{dx} = \tan \alpha - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x_0 = 0 \implies x_0 = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$
 $z_0 = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha$



P point ($x_P; 0$) de portée:

Solution de $z_P = 0 = x_P \left(\tan \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_P \right)$

soit $x_P = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha$

portée max $\iff \sin 2\alpha \text{ max} \iff 2\alpha = \frac{\pi}{2}$ soit $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$v_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{g}$

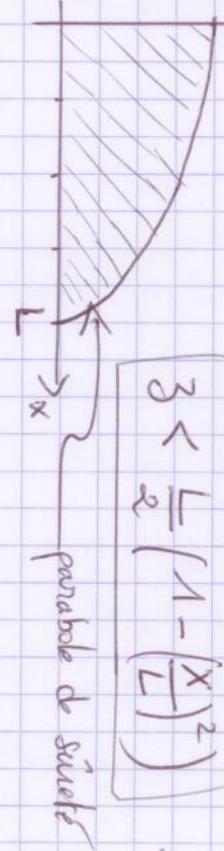
3) Le seul paramètre libre est α . Pour $(x; z)$ un point de l'espace donné, existe-t-il α tel que:

$z = x \tan \alpha - \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2$
 $z = x \xi - \frac{g x^2}{2v_0^2} (1 + \xi^2)$

On pose $\xi = \tan \alpha$ alors $z = x \xi - \frac{g x^2}{2v_0^2} (1 + \xi^2)$

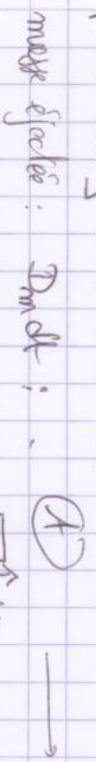
soit $\xi^2 - \frac{2L}{x} \xi + 1 + \frac{2Lz}{x^2} = 0$
 solution Δx $\frac{L^2}{x^2} - 1 - \frac{2Lz}{x^2} > 0$

soit $z < \frac{x^2}{2L} \left(-1 + \frac{L^2}{x^2} \right)$
 $z < \frac{L}{2} \left(1 - \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right)$



FUSÉE À UN ETAGE [Exercice n° 3 2006]

1) Raison de quantité de mouvement du système q fusée + gaz éjectés pendant dt entre t et t+dt



$$\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t)$$

$$\vec{p}(t+dt) = m(t+dt)\vec{v}(t+dt) + D_m dt \vec{u}$$

$$d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = m(t+dt)\vec{v}(t+dt) + D_m dt(\vec{u} + \vec{v}) - m(t)\vec{v}(t)$$

$$= m(t)\vec{v}(t) + m(t) d\vec{v} + D_m dt(\vec{u} + \vec{v}) - m(t)\vec{v}(t)$$

donc $\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m (\vec{u} + \vec{v})$ car $\frac{dm}{dt} = -D_m$

donc $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u}}$

ici, on cherche à appliquer le PFD dans un référentiel galiléen (ici Réserve). Mais \vec{u} est la vitesse d'éjection dans le référentiel de la fusée. D'après la composition des vitesses, $\vec{u} + \vec{v}$ est la vitesse d'éjection dans Réserve.

2) PFD dans Réserve galiléen:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m(t)\vec{g}$$

donc le résultat immédiat

(1)

$$\boxed{m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = m(t)\vec{g} - D_m \vec{u}}$$

Si elle décolle verticalement, il faut $\frac{dv}{dt} > 0$ initialement

$$\boxed{mg < D_m u}$$
 (poussée supérieure au poids)

3/ $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{D_m}{m(t)} \vec{u}$

Or $m(t) = M - D_m t$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \vec{g} - \frac{D_m}{M - D_m t} \vec{u}}$$

Carburant épuisé quand $m(t) = M - m_c = M - D_m t_c$

$$\boxed{t_c = \frac{m_c}{D_m}}$$
 AN: $t_c = \frac{28 \times 12}{0,120}$

$$\boxed{t_c = 80 \text{ s}}$$

4/ $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt = \vec{g}t - \left(\int \frac{D_m dt}{M - D_m t} \right) \vec{u}$

$$= \vec{g}t - \left(\int \frac{dx}{1-x} \right) \vec{u} \quad (\alpha = \frac{D_m t}{M})$$

$$= \vec{g}t + \int \frac{dx}{x} \vec{u}$$

$$= \vec{g}t + \left(\ln \left(1 - \frac{D_m t}{M} \right) \right) \vec{u}$$

(2)

Donc

$$\vec{v}(t) = \vec{g}t + \ln\left(1 - \frac{Dm t^2}{H}\right) \vec{u}$$

(3)

$$\vec{a} \cdot \vec{u}_g = -g + \frac{Dm t}{m(t)} \quad m(t) < H$$

Donc si la fusée se déplace, on a toujours $\frac{Dm t}{m} > \frac{Dm t}{H} > g$

L'accélération est toujours non nulle, temps qu'il y a du carburant.

à t_e , la fusée est soumise à la pesanteur locale et ne peut que ralentir. On a donc $t_{A1} = t_e$

On a $g = \frac{GM}{R^2}$ où R est la distance au centre de la Terre.

$$R = R_T + z \quad \text{avec } R_T = 6400 \text{ km}$$

On a $z \ll R_T$

$$\text{donc } g(z) = \frac{GM}{R_T^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2} = g_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_T}\right)^2}$$

avec g_0 pesanteur à la surface de la Terre.

$$g(z) \approx g_0 \left(1 - \frac{2z}{R_T}\right) \rightarrow \text{correction de } \frac{2z}{R_T} = 26\%$$

Correction faible de 99% - Approximation pertinente.

5) Après t_1 , mouvement de chute libre avec vitesse initiale

$$v_{\text{max}} = -g t_e - \ln\left(1 - \frac{Dm t_e}{H}\right) u.$$

$$v(t) = v_{\text{max}} - g(t - t_1)$$

(4)

Alt. v_{max} (minimum pour $v(t) = 0 \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{v_{\text{max}}}{g}$

$$t_2 = t_e - \frac{g t_e^2}{g} - \frac{\ln\left(1 - \frac{Dm t_e}{H}\right)}{g} u.$$

$$t_e = \frac{m c}{Dm}$$

$$t_2 = -\frac{H}{g} \ln\left(1 - \frac{m c}{H}\right)$$

De même $z(t) = z_1 + v_{\text{max}}(t - t_1) - \frac{1}{2} g (t - t_1)^2$

$$\text{alors } z_2 \approx z_1 + \frac{v_{\text{max}}^2}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_{\text{max}}^2}{g^2}$$

$$z_2 = z_1 + \frac{v_{\text{max}}^2}{2g}$$

$$z_2 = z_1 + \frac{1}{2g} \left(\frac{g m c}{Dm} + \ln\left(1 - \frac{m c}{H}\right) u \right)^2$$

$$z_2 = 566 \text{ km}$$

6) $z_2 < R_T$ donc le champ de pesanteur est encore notable, la vitesse de libération n'est pas atteinte.

en effet $v_{\text{max}} = 3,1 \text{ km/s}$

alors que $v_{\text{libération}} = 11,2 \text{ km/s}$.

TD3 Aspects énergétiques



I. LE PENDULE SIMPLE (3)

On accroche une bille de masse m à un fil inextensible de longueur l , de masse négligeable, d'extrémité fixe O. On note θ l'angle entre le fil et la verticale, T la tension du fil.

1. Retrouver l'équation différentielle précédente en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

2. Retrouver l'équation différentielle régissant le mouvement en utilisant la conservation de l'énergie mécanique (que l'on justifiera au passage).

3. Montrer qu'il existe deux régimes qualitativement différents pour le mouvement du pendule suivant la valeur de son énergie mécanique. Que vaut l'énergie critique de transition entre ces deux régimes ? Commenter la valeur obtenue.

4. Tracer le portrait de phase du pendule simple.

II. STABILITÉ D'UN ÉQUILIBRE

Un point matériel M, de masse m , est soumis à une force

$$\vec{f} = k_1 \frac{\vec{OM}}{r^{13}} - k_2 \frac{\vec{OM}}{r^7}$$

lorsqu'il se trouve à la position $\vec{OM} = r\vec{u}_r$; k_1 et k_2 sont deux constantes positives.

1. Déterminer l'énergie potentielle $U(r)$ dont dérive \vec{f} . Ce potentiel est souvent appelé potentiel de Lennard-Jones, et modélise de manière semi-empirique l'interaction entre deux molécules non polaires. Expliquer l'origine des deux termes.

2. Déterminer la position d'équilibre de M. En déduire les paramètres k_1 et k_2 pour deux atomes d'argon sachant que la distance à l'équilibre est 0,382 nm et la profondeur du puits de potentiel vaut 120 K.

3. Étudier la stabilité de l'équilibre en fonction de r .

III. MOUVEMENT D'UNE CHAÎNE

Une chaîne métallique AB, de longueur 1m et de masse m , est constituée d'un ensemble de maillons assimilés à des points matériels reliés les uns aux autres. On la pose sur une table horizontale en laissant pendre une partie de la chaîne (OB) verticalement. On note O le point du coin de la table et x la distance OB (voir figure 1).

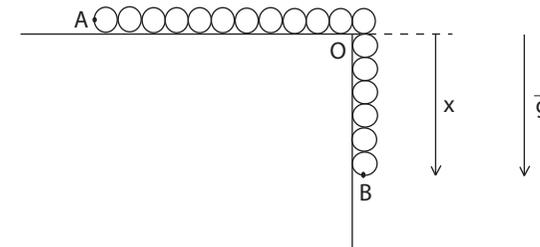
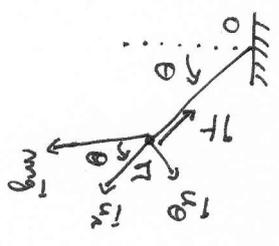


Figure 1: Chaîne métallique en mouvement autour d'un coin de table

1. On néglige le frottement solide, établir l'équation différentielle vérifiée par $x_B(t)$. On veillera à bien préciser le ou les systèmes considérés.

2. Quelle est la nature du mouvement ? Au bout de combien de temps a-t-on $x=1$ m si la condition initiale est $x=1$ cm ?

I) Le pendule simple (3)



1) Théorème de l'énergie cinétique :
 pour un déplacement $d\vec{r}$, la variation dE_c de l'énergie cinétique est liée au travail élémentaire des forces δW selon : $dE_c = \delta W$
 $\vec{T} \perp \vec{v}$ donc ne travaille pas.

Seule poids travaille : $\delta W = d\vec{r} \cdot m\vec{g} = (l\dot{\theta}\vec{u}_\theta dt) m\vec{g}$

$$= m l \dot{\theta} dt \vec{g} \cdot \vec{u}_\theta = m l g \dot{\theta} dt (-\sin\theta)$$

$$\text{et } dE_c = d\left(\frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2\right) = m l^2 \dot{\theta} d\dot{\theta}$$

$$dE_c = \delta W \Rightarrow m l^2 \dot{\theta} d\dot{\theta} = -m l g \sin\theta d\theta$$

$$d'ou \quad \boxed{\dot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0}$$

On retrouve bien l'équation du mouvement.

2) Actions mécaniques :

- \vec{T} ne travaille pas ;

- $\vec{P} = m\vec{g}$, force conservative ($E_p = mgz + Cte$)

avec z ascendant

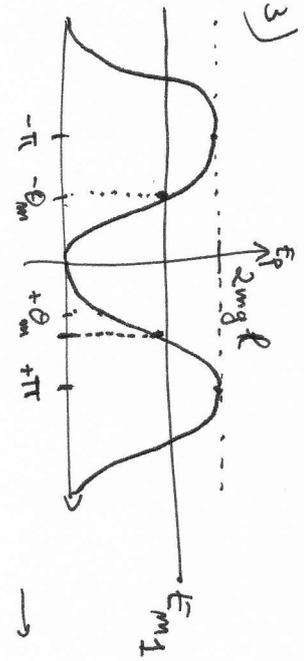
Conservation de l'énergie mécanique : $E_m = E_p + E_c$

$$E_m = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + m g l (1 - \cos\theta) + Cte = 0$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow m l^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + m g l (-\sin\theta) \dot{\theta} = 0$$

$$d'ou \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0}$$

3)



On prend l'origine des énergies telle que :
 $E_p = mgl(1 - \cos\theta)$
 $0 \leq E_p \leq 2mgl$

• Si $E_m = E_{m1} < 2mgl$, la trajectoire est bornée. Le pendule oscille entre $- \theta_m$ et $+ \theta_m$

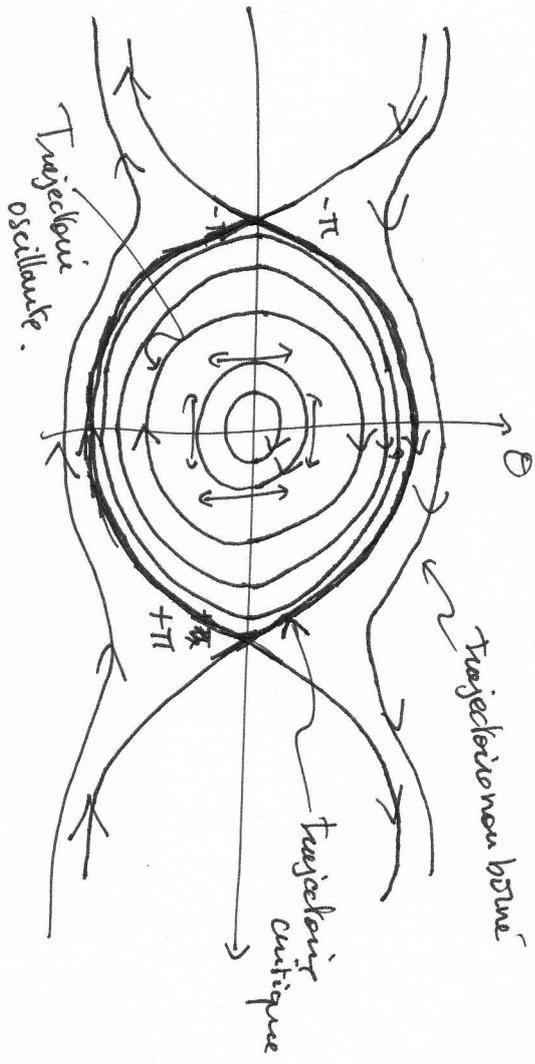
• Si $E_m > 2mgl$, la trajectoire n'est pas bornée. Le pendule oscille entre $- \theta_m$ et $+ \theta_m$.

• Si $E_m = 2mgl$: énergie critique pour retrouver le pendule (période d'oscillation infinie).

(période d'oscillation infinie).

4) Pour les petits angles : $l\ddot{\theta} = -g\sin\theta \approx -g\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}$

($\omega_0^2 = g/l$). Le point de phase est la représentation du mouvement dans le plan $(\dot{\theta}; \theta)$ ou parfois $(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}; \theta)$ suivant les conventions.



→ on trouve toujours dans le sens horaire : si $\dot{\theta} > 0 \rightarrow \theta$
 $\dot{\theta} < 0 \rightarrow \theta$

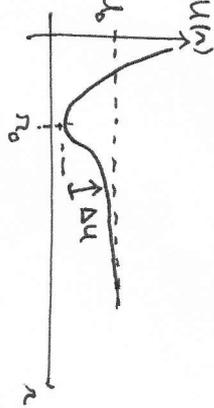
II) Stabilité d'un équilibre

1) Si \vec{F} dérive d'un potentiel $U(\vec{r})$, alors $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r})$

La force \vec{F} ne dépend que de r , on cherche donc une solution à symétrie sphérique $U(r)$. Alors $\vec{\nabla}U(r) = \frac{dU}{dr} \vec{u}_r$ soit $\frac{dU}{dr} = -\frac{k_1}{r^3} + \frac{k_2}{r^2}$

d'où $U(r) = \frac{1}{12} \frac{k_1}{r^{12}} - \frac{1}{6} \frac{k_2}{r^6} + U_0$

répulsif: $\left(\frac{k_1}{12 r^{12}} \right)$ attractif: $\left(-\frac{k_2}{6 r^6} \right)$
(répulsion à courte distance) (Van der Waals)



2) Equilibre $\Rightarrow U(r)$ minimal en r_0

$$\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r_0} = 0 \Rightarrow -\frac{k_1}{12 r_0^{12}} + \frac{k_2}{6 r_0^6} = 0 \Rightarrow r_0 = \left(\frac{k_1}{2k_2} \right)^{1/6}$$

Prendre du potentiel ΔU :

$$\Delta U = U(r_0) - U_0 = \frac{1}{12} k_1 \left(\frac{k_2}{k_1} \right)^2 - \frac{1}{6} k_2 \frac{k_2}{k_1} = -\frac{1}{12} \frac{k_2^2}{k_1}$$

$$\Delta U = -\frac{1}{12} \frac{k_2^2}{k_1} \quad \text{Or } k_1 = k_2 r_0^6 ; \text{ donc } |\Delta U| = \frac{k_2}{12 r_0^6}$$

soit $\begin{cases} k_1 = 12 r_0^6 |\Delta U| \\ k_2 = 12 r_0^6 |\Delta U| \end{cases}$

$$|\Delta U| = 120 \text{ K} \Rightarrow |\Delta U| = k_B \times 120 \text{ K} = 166 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= 5,37 \cdot 10^{-52} \text{ J} \cdot \text{m}^6 \\ k_1 &= 1,67 \cdot 10^{-108} \text{ J} \cdot \text{m}^{12} \end{aligned}$$

3) L'équilibre sera stable si $\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r_0} > 0$

$$\frac{d^2U}{dr^2} = +13 \frac{k_1}{12 r^{14}} - 7 \frac{k_2}{r^8}$$

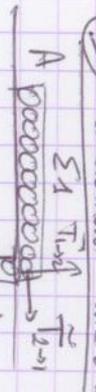
$$\left. \frac{d^2U}{dr^2} \right|_{r_0} = \frac{1}{r_0^8} \left(13 \frac{k_1}{r_0^6} - 7 k_2 \right) = \frac{1}{r_0^8} (13 k_2 - 7 k_2) = \frac{6}{r_0^8} k_2 > 0$$

$$r_0^6 = \frac{k_1}{k_2}$$

donc l'équilibre est bien stable.

Rq : en physique, on garde traditionnellement des unités correspondant à une "molécule" (i.e un couple d'atomes). Mais il est également possible d'exprimer ces grandeurs énergétiques par moles ...

IV) Travailleur d'une chaîne



1/ On considère les deux sous-systèmes Σ_1 et Σ_2 de longueurs L et x

$$E_{m1} = \frac{1}{2} \left(\frac{L-x}{L} \right) m \dot{x}^2$$

$$E_{m2} = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right) m \dot{x}^2 + E_p$$

$$dE_p = -dm g x$$

$$dm = \frac{dx}{L} m$$

$$dE_p = -m g x \frac{dx}{L} \rightarrow E_p = -\frac{m g}{L} \int_0^x x dx = -\frac{m g x^2}{2L}$$

$$d'où \quad E_{m2} = \frac{1}{2} \frac{x}{L} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \frac{m g}{L} x^2$$

L'énergie du système $\Sigma = \{ \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \}$ est conservée

(pas de frottements)

$$E_m = E_{m1} + E_{m2} = Cte$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} \frac{m g}{L} x^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 \rightarrow m \dot{x} \ddot{x} - \frac{1}{2} \frac{m g}{L} 2 x \dot{x} = 0$$

Soit $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & -\frac{g}{L} x \end{bmatrix} x = 0$

On pose $\tau = \sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow x = A \cosh\left(\frac{t}{\tau}\right) + B \sinh\left(\frac{t}{\tau}\right)$

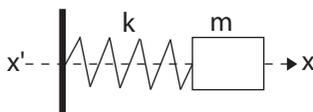
$x(t=0) = x_0 \Rightarrow \ddot{x}(t=0) = 0 \Rightarrow \boxed{x = x_0 \cosh\left(\frac{t}{\tau}\right)}$

TD4 L'oscillateur harmonique



I. OSCILLATEUR HARMONIQUE LIBRE

1. On considère une masse m soumise à une force de rappel horizontale exercée par un ressort de raideur k et de longueur à vide x_0 .

Figure 1: Masse m reliée à un ressort de raideur k

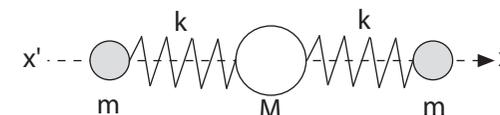
1.1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la position x de m (x est à définir). En déduire $x(t)$, si l'on suppose qu'à l'instant $t = 0$, on abandonne m sans vitesse initiale, après avoir tiré sur le ressort d'une longueur a .

1.2. Vérifier que la période des oscillations ne dépend pas de a .

1.3. Calculer la moyenne sur une période de l'énergie cinétique de m et de l'énergie potentielle associée à la force de rappel. Vérifier que l'énergie mécanique se conserve, et qu'elle est également répartie entre énergie cinétique et énergie potentielle.

2. On considère plus généralement une masse m soumise à l'action d'une force dérivant d'une énergie potentielle $E_p(x)$. On suppose que cette énergie potentielle admet un minimum local en x_0 . Montrer qu'on peut modéliser le mouvement de m autour de x_0 par celui d'un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation en fonction des données du problème.

3. On considère le système suivant, formé de trois masses dont les deux extrêmes sont identiques, et qui sont reliées par deux ressorts identiques :

Figure 2: Système de trois masses couplées par des ressorts de raideur k

On néglige la pesanteur, et on ne considère que le déplacement suivant l'axe x .

3.1. Déterminer les équations différentielles vérifiées par les centres de gravités x_1 , x_2 et x_3 des trois masses, où les x_i désignent l'écart à la position d'équilibre.

3.2. On cherche des solutions des équations du mouvement où les trois masses oscillent à la même fréquence, c'est-à-dire les modes propres. Déterminer les deux fréquences possibles pour des mouvements de ce type. Comment oscillent les masses pour chacun des deux modes propres ? Que modélise ce système ?

II. OSCILLATEUR HARMONIQUE AMORTI PAR FROTTEMENT VISQUEUX

Expérimentalement, on constate que l'amplitude d'un oscillateur comme celui décrit en A.1. décroît en fonction du temps. On ajoute alors au modèle une force de frottement visqueux s'écrivant $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ agissant sur m et qui permet de rendre compte du phénomène.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la position x de m .

2. Écrire l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle et distinguer trois types de mouvements selon un critère à préciser.

3. Étudier le régime faiblement amorti : définir la pseudo-pulsation du mouvement et sa pseudo-période, donner l'expression de $x(t)$ si l'on suppose que $x(0) = x_0$ (x_0 étant la position d'équilibre du ressort) et que la vitesse initiale vaut v_0 . Déterminer les extrema de la position. Faire un croquis.

4. Définir le décrement logarithmique δ , le relier à la pseudo-période et à $\tau = 2m/\alpha$.

5. Évaluer la dépendance de l'énergie totale de l'oscillateur en temps, la perte d'énergie par unité de temps, puis sur une période dans le cas d'un amortissement très faible.

6. Étudier le régime très amorti : expression de $x(t)$ avec les mêmes conditions initiales que dans la question 3. Faire un croquis.

7. Étudier le régime critique : expression de $x(t)$ avec les mêmes conditions initiales que dans la question 3. Faire un croquis. Quel est son intérêt par rapport au régime très amorti ?

III. OSCILLATEUR HARMONIQUE EXCITÉ

On considère une masse m soumise à une force de rappel due à un ressort (constante de raideur k , longueur à vide x_0), à une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ et à une force excitatrice sinusoïdale $\vec{F} = F \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

1. Donner l'équation différentielle vérifiée par la position x de m . On posera $\omega_0^2 = k/m$ et $\tau = 2m/\alpha$.

2. Résoudre cette équation : mettre en évidence un régime transitoire, et donner la solution forcée en utilisant la notation complexe. En déduire l'amplitude X_0 des oscillations de m et le déphasage ϕ de l'oscillateur par rapport à la force excitatrice.

3. Mettre en évidence une "résonance en amplitude" pour une valeur de ω à déterminer. Cette résonance existe-t-elle toujours ?

4. Déterminer la vitesse de m en régime forcé, on notera V_0 l'amplitude de la vitesse des oscillations et ψ son déphasage par rapport à la force excitatrice. Mettre en évidence une "résonance en vitesse". Est-elle située à la même fréquence que la résonance en amplitude ? Existe-t-elle toujours ?

5. Les différentes définitions du facteur de qualité Q :

5.1. Définitions en régime libre :

5.1.a) Définition dimensionnelle : Q peut être défini comme le rapport entre deux temps caractérisant l'oscillateur et le milieu dans lequel il se déplace. Quels sont ces deux temps et à quoi correspondent-ils respectivement ?

5.1.b) Dans le cas où $Q \gg 1$, quelle est la relation qui existe entre le facteur de qualité Q et δ , le décrement logarithmique qui caractérise la décroissance de l'amplitude des oscillations en régime pseudo-périodique (voir TD *Oscillateur harmonique libre avec ou sans frottements*) ?

5.1.c) Définition énergétique : dans le cas où $Q \gg 1$, écrire le facteur de qualité Q comme le rapport de deux énergies que l'on précisera.

5.2. Définitions en régime forcé :

5.2.a) Résonance en amplitude : quand celle-ci existe, on définit usuellement Q par : $Q = \omega_r / \Delta\omega$ où ω_r est la valeur de la pulsation à la résonance et $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ où ω_+ et ω_- sont définies par $X_0(\omega_+) = X_0(\omega_-) = X_r / \sqrt{2}$ (avec $X_r = X_0(\omega_r)$). Montrer que, lorsque cette résonance est de bonne qualité ($\omega_0 \tau \gg 1$) on retrouve l'expression habituelle de Q .

5.2.b) Résonance en vitesse : on peut définir Q de la même manière par : $Q = \omega_r / \Delta\omega$ (ici $\omega_r = \omega_0$) avec $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$, où ω_+ et ω_- sont définies par $V_0(\omega_+) = V_0(\omega_-) = V_r / \sqrt{2}$ (avec $V_r = V_0(\omega_r)$). Montrer que, cette fois, aucune approximation n'est nécessaire pour retrouver l'expression habituelle de Q .

6. Faire le lien entre les différents comportements de l'oscillateur en régimes libre et forcé, notamment en fonction de la valeur de Q .

IV. OSCILLATEUR VERTICAL

On considère un ressort vertical de masse négligeable et de longueur naturelle $\ell_0 = 20$ cm.

1. Le ressort s'allonge de $\Delta\ell = 3.0$ cm lorsqu'on lui suspend une masse $m = 10$ g dans le champ de pesanteur.

1.1. Déterminer la longueur $\ell_{\text{éq}}$ à l'équilibre ainsi que la tension exercée par le ressort.

1.2. En déduire la valeur de la constante de raideur k du ressort.

2. L'extrémité supérieure A du ressort reste fixe. L'extrémité inférieure, solidaire de la masse m est à la position M telle que $\overrightarrow{AM} = z\vec{u}_z$ où \vec{u}_z est le vecteur unitaire de l'axe vertical descendant.

2.1. Déterminer l'expression de la tension $\vec{T}(z)$ exercée par le ressort dans cette position.

2.2. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $z(t)$.

2.3. Déterminer la solution indépendante du temps $z_{\text{éq}}$ de l'équation précédente et la comparer à la longueur $\ell_{\text{éq}}$ trouvée ci-dessus.

3. La masse m est écartée vers le bas de $a = 4.0$ cm à partir de sa position d'équilibre, puis lâchée avec une vitesse initiale nulle.

3.1. Donner la solution générale de l'équation différentielle en $Z(t)$.

3.2. Déterminer les constantes d'intégrations à partir des conditions initiales.

3.3. Déterminer les constantes d'intégrations à partir des conditions initiales.

3.4. Déterminer la longueur la plus courte du ressort ainsi que les dates auxquelles elle est obtenue et la vitesse à ces dates. Faire les applications numériques.

3.5. Déterminer les dates pour lesquelles

- la norme de la vitesse est maximale ;
- la coordonnée de la vitesse est maximale.

V. OSCILLATEUR AMORTI PAR FROTTEMENT SOLIDE

On considère à nouveau le système étudié en I.1. auquel on ajoute un frottement solide.

1. Introduction : énoncer les lois de Coulomb du frottement solide.

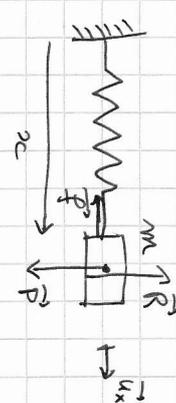
2. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de m . On introduira un coefficient $\epsilon = \pm 1$ si nécessaire.

3. Résoudre cette équation en prenant $x(0) = x_0 + a > 0$ et la vitesse initiale nulle. Tracer approximativement $x(t)$. La masse m s'arrête-t-elle en $x = 0$?

II) Oscillateur harmonique libre

à l'équilibre, $x(t) = x_0$

1.1/ On néglige les frottements



- réaction du support \vec{R}
- poids \vec{P}
 $\vec{P} + \vec{R} = 0$

PFD projeté sur \vec{u}_x $m \ddot{x} = -k(x-x_0)$

donc $\ddot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} x_0$. On pose $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Alors la solution générale est :

$x(t) = x_0 + A \cos(\omega_0 t + \varphi)$

solution particulière } solution générale
sans second membre

Avec les conditions aux limites

$x(t=0) = 0 = -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = -A \omega_0 \sin \varphi \Rightarrow \varphi = 0$

$x(t=0) = x_0 + A = 0 \Rightarrow A = -x_0$
 $x(t) = x_0 + a \cos \omega_0 t$

1.2) Évident car $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (isochronisme des oscillations pour un oscillateur harmonique).

1.3) $E_c = \frac{1}{2} m v^2$ avec $v(t) = -a \omega_0 \sin \omega_0 t$

$E_c(t) = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t \rightarrow \langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \langle \sin^2 \omega_0 t \rangle$

soit $\langle E_c \rangle = \frac{1}{4} m a^2 \omega_0^2$

Rappel : la moyenne sur une période de \cos^2 ou \sin^2 vaut $\frac{1}{2}$

démo : $\langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \langle \cos^2(2\pi \frac{t}{T}) \rangle$
 $= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2(2\pi \frac{t}{T}) dt$
 $= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{+T/2} \cos^2(2\pi u) du = \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{+1/2} (1 + \cos(4\pi u)) du$
 $= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{+1/2} \cos(4\pi u) du = \frac{1}{2}$

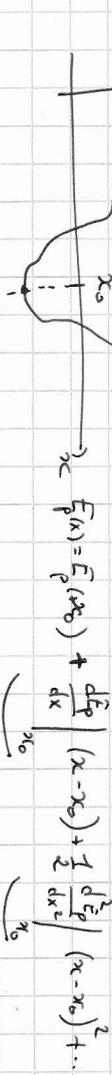
de même, $E_p = \frac{1}{2} k (x-x_0)^2 + \mathcal{E}^0$ (on prend la constante C nulle par choix de l'origine de l'énergie)

$E_p = \frac{1}{2} k a^2 \cos^2 \omega_0 t$; et $\langle E_p \rangle = \frac{1}{2} k a^2 \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{1}{4} k a^2$

et $k = m \omega_0^2$ d'où $\langle E_p \rangle = \frac{1}{4} m a^2 \omega_0^2$ d'où $\langle E_p \rangle = \langle E_c \rangle$

Donc en valeur moyenne, l'énergie mécanique est équilibrée entre énergie potentielle et énergie cinétique

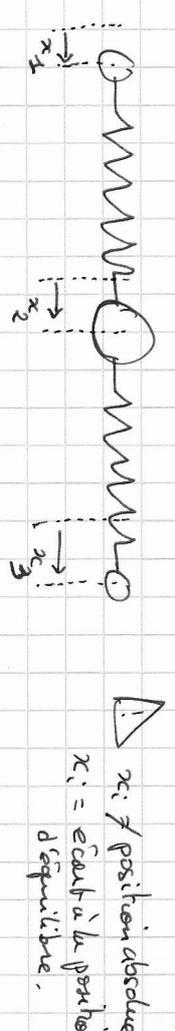
2) On fait un développement limité du potentiel autour de x_0 , position d'équilibre



On pose $k = \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_0} > 0$, alors $E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{1}{2} k (x-x_0)^2 + \text{corrections d'ordre 3 ou plus}$

$\hookrightarrow E_p$ d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m} \left. \frac{d^2 E_p}{dx^2} \right|_{x_0}}$

3.1/ Mo désintégration du molécule type CO2 à géométrie linéaire ($\angle O=C=O$)



On note x_i l'écart à l'équilibre du centre de masse i .

PFD à chaque masse :

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1) \\ m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k(x_3 - x_2) - k(x_2 - x_1) \\ m \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -k(x_3 - x_2) \end{cases}$$

2)

On cherche les modes propres, sur toutes les grandeurs oscillent à ω
 Pour cela, on passe en notation complexe:

On pose $x_i = \text{Re}(x_i e^{-i\omega t})$, et le système précédent devient

$$\begin{cases} -\omega^2 x_1 = \omega_0^2 (x_2 - x_1) \\ -\omega^2 x_2 = \Omega^2 (x_3 - x_2) - \Omega^2 (x_2 - x_1) \\ -\omega^2 x_3 = -\omega_0^2 (x_3 - x_2) \end{cases}$$

avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, $\Omega^2 = \frac{k}{M}$, on obtient alors, sans prime matricielle

$$(A) \begin{pmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \Omega^2 & \omega^2 - 2\Omega^2 & \Omega^2 \\ 0 & \omega_0^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = N$$

On aura une solution non triviale ssi $\det N = 0$

$$\Rightarrow (\omega^2 - \omega_0^2) [(\omega^2 - 2\Omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - \Omega^2 \omega_0^2] - \omega_0^2 \Omega^2 (\omega^2 - \omega_0^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega^2 - \omega_0^2) [(\omega^2 - 2\Omega^2)(\omega^2 - \omega_0^2) - 2\Omega^2 \omega_0^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega^2 - \omega_0^2) (\omega^2 (\omega^2 - \omega_0^2) - 2\Omega^2 \omega^2 + 2\Omega^2 \omega_0^2 - 2\Omega^2 \omega_0^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega^2 - \omega_0^2) \omega^2 (\omega^2 - (\omega_0^2 + 2\Omega^2)) = 0$$

3 solutions : $\omega = 0 \rightarrow$ pas intéressant

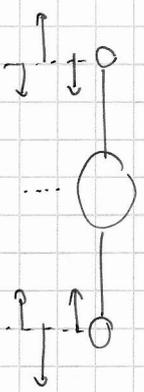
$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_0 \\ \omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + 2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} \end{cases}$$

mode 1 mode 2

Mode 1 : $\omega = \omega_0$. En réinjectant dans (1); on obtient

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 \end{cases}$$

MODE SYMETRIQUE

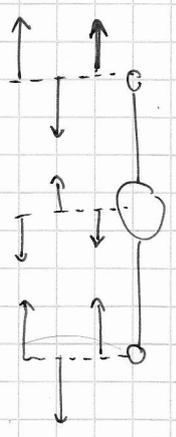


Mode 2 : $\omega = \omega_0 \sqrt{1 + 2\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 + 2\frac{m}{M}}$

alors on obtient :

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -2\frac{m}{M} x_1 \end{cases}$$

MODE ANTI SYMETRIQUE



II) Oscillateur harmonique amorti par frottement visqueux

(1)

1) ED: $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-x_0) - \alpha \frac{dx}{dt}$
 projection sur Ox $m \ddot{x} = -k(x-x_0) - \alpha \dot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{\alpha}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = \frac{k}{m} x_0$

On pose $\frac{\alpha}{m} = \frac{2}{\tau}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$
 $\Rightarrow (1) \ddot{x} + \frac{2}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_0$

2) Eq caractéristique de (1): $r^2 + \frac{2}{\tau} r + \omega_0^2 = 0$
 (cf TD elec) $\Delta = 4 \left(\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 \right)$

1) Si $\frac{1}{\tau} > \omega_0$ solutions réelles: $r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2}$
 soit $x(t) = A e^{r_+ t} + B e^{r_- t} + x_0$ d'ou

$x(t) = x_0 + e^{-t/\tau} \left(A \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2} t \right) + B \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2} t \right) \right)$
 Régime aperiodique $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

2) Si $\frac{1}{\tau} = \omega_0$ $r = -\frac{1}{\tau}$
 $x(t) = x_0 + (A+Bt) e^{-t/\tau}$
 Régime critique $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

3) Si $\frac{1}{\tau} < \omega_0$ $r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$
 Régime pseudo-periodique

On pose $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$
 $\Rightarrow r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm i \omega$

Absc $x(t) = x_0 + (A \sin \omega t + B \cos \omega t) e^{-t/\tau}$ $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
 Régime pseudo-periodique

(2)

3) Cas d'un frottement avec faible amortissement

(2)

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$ pseudo-pulsation, $\frac{1}{\tau} \ll \omega_0$
 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}}$ pseudo-période

$x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$

$x(t) = x_0 + (A \sin \omega t + B \cos \omega t) e^{-t/\tau}$

$x(0) = x_0 + B \rightarrow B = x_0$

$\dot{x}(t) = -A e^{-t/\tau} + \omega (A \cos \omega t - B \sin \omega t) e^{-t/\tau}$

Or $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow \dot{x}(t) \approx A \omega \cos \omega t e^{-t/\tau}$

$\dot{x}(0) = A \omega = v_0$

$x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) e^{-t/\tau}$

Extrema: $\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow A e^{-t/\tau} \left(\omega \cos \omega t - \frac{1}{\tau} \sin \omega t \right) = 0$

$t_n = \frac{\pi}{\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) + \delta_n, n \in \mathbb{N}, \delta_n \ll \frac{2\pi}{\omega}$

$\cos \omega t_n \approx \cos \left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \delta_n \right) \approx (-1)^{n+1} \sin \delta_n \approx (-1)^{n+1} \delta_n$

$\sin \omega t_n \approx \sin \left(\pi n + \frac{\pi}{2} + \delta_n \right) = (-1)^n \cos \delta_n \approx (-1)^n$
 à l'ordre 1

Donc à l'ordre 1, t_n sera un extremum si

$(-1)^n \left(-\omega \delta_n - \frac{1}{\tau} \right) = 0 \Rightarrow \delta_n = -\frac{1}{\omega \tau}$

extrema en $t_n = \frac{\pi}{\omega} \left(n + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\omega \tau}$

$n \in \mathbb{N}$

4) Dérivée logarithmique $S = \ln \left(\frac{x(t) - x_0}{x(t+\tau) - x_0} \right)$ on τ est la pseudo-période

$$x(t) = x_0 + \left(A \sin \left(2\pi \frac{t}{\tau} \right) + B \cos \left(2\pi \frac{t}{\tau} \right) \right) e^{-t/\tau}$$

$$\frac{x(t) - x_0}{x(t+\tau) - x_0} = e^{+T/\tau} \Rightarrow \boxed{S = \frac{T}{\tau}}$$

5) $E = E_p + E_c$

$$E_p = \frac{1}{2} k (x - x_0)^2 = \frac{1}{2} k \left(A \sin \omega t + B \cos \omega t \right)^2 e^{-2t/\tau}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left[\omega \left(A \cos \omega t - B \sin \omega t \right) - \frac{1}{\tau} \left(A \sin \omega t + B \cos \omega t \right) \right]^2 e^{-2t/\tau}$$

$$x \ll \omega \Rightarrow \frac{1}{2} \Rightarrow E_c \approx \frac{1}{2} m \omega^2 \left(A \cos \omega t + B \sin \omega t \right)^2 e^{-2t/\tau}$$

$$\text{donc } E = \frac{1}{2} k \left(A \sin \omega t + B \cos \omega t \right)^2 + \left(A \cos \omega t - B \sin \omega t \right)^2 e^{-2t/\tau} = A^2 + B^2$$

On pose $E_0 = E(t=0)$, alors $E(t) \approx E_0 e^{-2t/\tau}$ décroissance exponentielle

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{\tau} E(t) \quad \Delta E = E(t+\tau) - E(t) = E_0 e^{-2t/\tau} (e^{-2\tau/\tau} - 1)$$

soit $\frac{\Delta E}{E} \approx -\frac{2\tau}{\tau} = -2\delta$ perte d'énergie relative sur une période

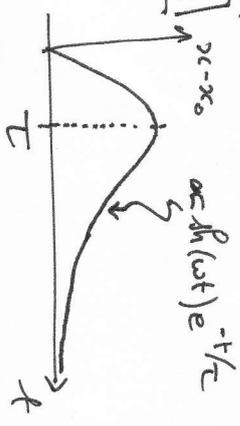
6) Régime très amorti: $x(t) = x_0 + e^{-t/\tau} \left(A \cosh \omega t + B \sinh \omega t \right)$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow A = 0; \quad x(t) = x_0 + B \sinh(\omega t) e^{-t/\tau}$$

$$\dot{x}(t) = B e^{-t/\tau} \left(\omega \cosh \omega t - \frac{1}{\tau} \sinh \omega t \right)$$

$$\dot{x}(0) = \omega B = v_0 \Rightarrow B = v_0 / \omega$$

$$\text{donc } x(t) = x_0 + \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t) e^{-t/\tau}$$



$x_{\max} ? \rightarrow \frac{dx}{dt} = 0 = \frac{v_0}{\omega} \left(\omega B \cosh \omega t - \frac{1}{\tau} \sinh \omega t \right) e^{-t/\tau}$

$$\Rightarrow \omega B \cosh \omega t_m = \omega \tau \ll 1$$

$$\boxed{t_m \approx \tau}$$

7) Régime critique

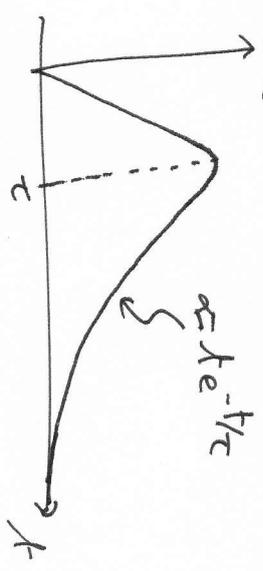
$$x(t) = (A+Bt) e^{-t/\tau} + x_0$$

$$x(0) = x_0 \Rightarrow A = 0$$

$$\dot{x}(t) = \left(-\frac{A}{\tau} - Bt + B \right) e^{-t/\tau} = B \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) e^{-t/\tau}$$

$$\dot{x}(0) = B = v_0 \quad \text{donc } x(t) = x_0 + v_0 t e^{-t/\tau}$$

$$x_{\max} \text{ en } t_m : \frac{dx}{dt} = 0 = B \left(1 - \frac{t_m}{\tau} \right) e^{-t_m/\tau} \Rightarrow \boxed{t_m = \tau}$$



Temps de retour minimal \Rightarrow application aux amortisseurs.

en effet :

$$\frac{(x(t) - x_0)_{\text{amorti}}}{(x(t) - x_0)_{\text{critique}}} = \frac{\frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t) e^{-t/\tau}}{v_0 t e^{-t/\tau}} = \frac{\sinh \omega t}{\omega t} > 1 \quad \forall t$$

Le régime critique est le régime de retour à l'équilibre le plus rapide.

Oscillateur harmonique excité

1) $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x - x_0) - \alpha \frac{dx}{dt} + F \cos \omega t$ $\Rightarrow \ddot{x} + \frac{2}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 (x - x_0) = \frac{F}{m} \cos \omega t$

pour $\tau = \frac{2m}{\alpha}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ $\rightarrow \ddot{x} + \frac{2}{\tau} \dot{x} + \omega_0^2 (x - x_0) = \frac{F}{m} \cos \omega t$ (1)

2) Passage en complexe : $x = \text{Re}(x_0 e^{-i\omega t}) + x_0$

(1) devient $-\omega^2 x + \frac{2}{\tau} (-i\omega) x + \omega_0^2 x = \frac{F}{m}$

$x_0 = \frac{F/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\omega/\tau}$

$X_0 = |x_0| \Rightarrow X_0 = \frac{F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}$

$\phi = \text{Arg } x = -\text{Arg } \frac{1}{x_0}$

$\sin \phi = \frac{2\omega/\tau}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}$
 $\cos \phi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}$

3) X_0 est max $\Leftrightarrow X_0^2$ est max $\Leftrightarrow (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}$ est min

On pose $u = \omega^2 \rightarrow f(u) = (u - u_0)^2 + 4u/\tau^2$ est minimum.

Donc $\frac{df}{du} = 0 = 2(u - u_0) + \frac{4}{\tau^2} \Rightarrow u = u_0 - 2/\tau^2$

Il y a une résonance en $\omega^2 = \omega_0^2 - 2/\tau^2$ amplitude seulement si $\omega_0^2 > 2/\tau^2$

$\Leftrightarrow \omega_0 \tau > \sqrt{2}$

condition d'existence d'une résonance en amplitude.

Alors on aura la fréquence de résonance : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2}{(\omega_0 \tau)^2}}$

4) $V = -i\omega x \rightarrow V = \frac{-i\omega F/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\omega/\tau}$

$V_0 = \frac{\omega F/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}$

Résonance en vitesse :

$\sin \psi = \frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}$
 $\cos \psi = \frac{2\omega/\tau}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{4\omega^2}{\tau^2}}}$

$V_0 \text{ max} \Leftrightarrow f(u) \text{ max}$
 avec $u = \omega^2$, $u_0 = \omega_0^2$ et $f(u) = \sqrt{(u_0 - u)^2 + \frac{4u}{\tau^2}}$

$\frac{df}{du} = 0 \Rightarrow (u_0 - u)^2 + \frac{4u}{\tau^2} - u(-2(u_0 - u) + \frac{4}{\tau^2}) = 0$

$\Leftrightarrow (u_0 - u)^2 + \frac{4u}{\tau^2} + 2(u_0 - u)u = 0$

$\Leftrightarrow (u_0 - u)(u_0 - u + 2u) = 0 \Rightarrow |u = u_0|$

On a donc résonance en vitesse à $\omega_r = \omega_0$

5.1 FACTEUR DE QUALITÉ EN RÉGIME LIBRE

(3)

a/ $\tau \ll \omega_0^{-1} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{2} \tau \omega_0}$ (régime du facteur Q, voir c/)

b/ $S = \frac{T}{C} = \frac{2\pi T}{\omega_0 T} \rightarrow \boxed{S = \frac{\pi}{Q}}$

c/ $Q \gg 1 \Rightarrow \frac{\Delta E}{E} = -\frac{2T}{C} = -\frac{2\pi}{Q}$ énergie relative perdue par période

$\frac{\Delta E}{E} = -\frac{2T}{C}$ d'où $Q = E \times \frac{2\pi}{\Delta E}$

5.2/ Régime libre $Q = \frac{\omega_0 T}{\Delta \omega} \Rightarrow \omega_0 T \gg 1$

$X_0 = \frac{F}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \tau^2} \frac{1}{2}$ max en $\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{2}{(\omega_0 T)^2}\right)$

On pose $\omega = \omega_0^2 \tau^2$

On a alors $\boxed{\omega_0 = \omega_0 - 2}$ On pose $\mu = \omega_0 - 2 + S$

On a alors $|X_0|^2 = \frac{F^2 \tau^4}{m^2} \frac{1}{4\mu + (\mu - \omega_0)^2}$

$|X_0|^2 = \frac{F^2 \tau^2}{m^2} \frac{1}{S^2 + 4(\omega_0 - 1)}$

$|X_0|^2 = |X_1|^2 \Rightarrow \frac{1}{S^2 + 4(\omega_0 - 1)} = \frac{1}{S^2 + 4(\omega_0 - 1)}$

$\Rightarrow \boxed{S_2 = \pm 2\sqrt{\omega_0 - 1}}$ $S \approx \pm 2\sqrt{\omega_0}$ car $\omega_0 \gg 1$

soit $S = \pm 2\omega_0 T$

$\omega_0^2 \tau^2 = \omega_0^2 \tau^2 - 2 + 2\omega_0 T$

$\omega_0^2 = \omega_0^2 \left(1 \pm \frac{2}{\omega_0 T} \pm \frac{2}{(\omega_0 T)^2}\right)$

$\omega_0 \approx \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{\omega_0 T}\right)$

donc

$\Delta \omega = \frac{2}{\tau}$

d'où $\frac{2\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{1}{2} \omega_0 T$ (4)

soit $\boxed{Q = \frac{1}{2} \omega_0 T}$

5.2.b/ $\omega_0 = \frac{F}{m} \frac{\omega_0}{\sqrt{4\omega_0^2 \tau^2}} = \frac{F}{m} \frac{1}{2\tau}$

$V(\omega_F)^2 = \frac{V_0^2}{2} \Leftrightarrow \frac{T^2}{2 \cdot 4} = \frac{\omega_F^2}{(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + \frac{4\omega_F^2}{\tau^2}}$

(=1) $(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 + \frac{4}{\tau^2} \omega_F^2 = \frac{8}{\tau^2} \omega_F^2 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega_F^2 = 0$

(=) $(\omega_0^2 - \omega_F^2)^2 = \frac{4}{\tau^2} \omega_F^2 \Rightarrow \omega_0^2 - \omega_F^2 = \pm \frac{2}{\tau} \omega_F$

$\Rightarrow \omega_F^2 \pm \frac{2}{\tau} \omega_F - \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{4}{\tau^2} + 4\omega_0^2$

$\omega_F = \pm \frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2}$

relations positives : $\omega_+ = \frac{1}{\tau} + \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{1}{\tau}\right)^2}$

donc $\Delta \omega = 2\tau$

soit $\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta \omega} = \frac{1}{2} \omega_0 T}$

6/ Q cours

Oscillateur vertical

1/ force exercée par le ressort:

$$\vec{F} = -k(z - l_0) \vec{u}_z$$

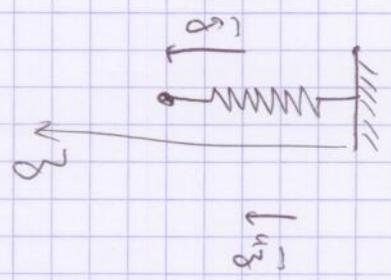
$\Delta l = 3 \text{ cm}$ compense le poids $m\vec{g}$.

donc $k \Delta l = m g$

$$k = \frac{m g}{\Delta l}$$

A.N. $k = \frac{10 \cdot 10}{3 \cdot 10^{-2}}$

$$k = 3,3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$



2/ PFD à la masse m:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = + m g - k(z - l_0)$$

La solution indépendante du temps z_{eq} : $m g - k(z_{eq} - l_0) = 0$.

$$z_{eq} = l_0 + \frac{m g}{k}$$

Puis $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -k(z - z_{eq}) \Rightarrow$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega_0^2 (z - z_{eq}) = 0$$

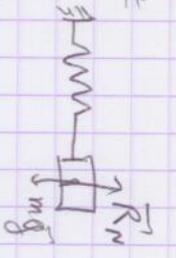
avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + z_{eq}$$

(A, φ) déterminés par les conditions initiales

II Oscillateur amorti par perturbation soite

1/ cf cours



2/ $m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x-x_0) + f_{\text{prot}}$

on pose $\varepsilon = \sin(x)$ si $\dot{x} > 0$, $f_{\text{prot}} = -\mu mg = -\varepsilon \mu mg$
 si $\dot{x} < 0$, $f_{\text{prot}} = +\mu mg = -\varepsilon \mu mg$

d'ou $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{r}{m}x_0 + \varepsilon \mu g$ pour $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{r}{m}x_0 + \varepsilon \left(\frac{\mu g}{\omega_0^2} \right)$$

3/ solution générale : $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_0 + \varepsilon \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

$x(0) = x_0 + a > 0$ $\dot{x}(0) = 0$

cas phase : $\varepsilon \leq 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + \frac{\mu g}{\omega_0^2} + \left(a - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t$
 pour $0 < t < t_1$

avec $t_1 = \frac{\pi}{\omega_0}$, $\dot{x}(t_1) = 0$; $x(t_1) = x_0 + \frac{\mu g}{\omega_0^2} - a$

cas $t_1 > 0$ $x(t) = A \cos \omega_0 t + x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

$x(t_1) = x_0 + \frac{2\mu g}{\omega_0^2} - a = -A + x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$
 $\Rightarrow A = a - \frac{3\mu g}{\omega_0^2}$

$x(t) = \left(a - \frac{3\mu g}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$
 et ce jusqu'à $t_2 = \frac{2\pi}{\omega_0}$

etc...

(1)

Résultat général

on obtient une suite de la forme :

$x_m = n \frac{\mu g}{\omega_0^2}$ $m \in \mathbb{N}$, $A_n = a - (2n-1) \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$ si m est pair, $\varepsilon < 0$

donc $\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left(x_0 + \frac{\mu g}{\omega_0^2} \right)$

$x(t) = a_{n+1} \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_0 + \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

$\dot{x}(t_n) = 0$ $x(t_n) = a_{n+1} x_0 - a$ $+ a_{n+1} + x_0 + \frac{\mu g}{\omega_0^2} = a_n + x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

puis, pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$ $\varepsilon > 0$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \left(x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2} \right)$

$x(t) = a_{n+2} \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

$x(t_{n+1}) = -a_{n+2} + x_0 - \frac{\mu g}{\omega_0^2} = -a_{n+1} + x_0 + \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

etc...

donc $a_{n+1} = a_n - \frac{2\mu g}{\omega_0^2} \Rightarrow a_n = a - (2n-1) \frac{\mu g}{\omega_0^2}$

On obtient pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$, $n \in \mathbb{N}$,

$$x(t) = \left(a - (2n-1) \frac{\mu g}{\omega_0^2} \right) \cos \omega_0 t + x_0 + (-1)^n \frac{\mu g}{\omega_0^2}$$

Remarque $a - (2n-1) \frac{\mu g}{\omega_0^2} > 0 \Rightarrow M_{\text{max}}$

où M_{max} la masse m va s'arrêter une fois arrêtée

car les frottements sont trop importants.

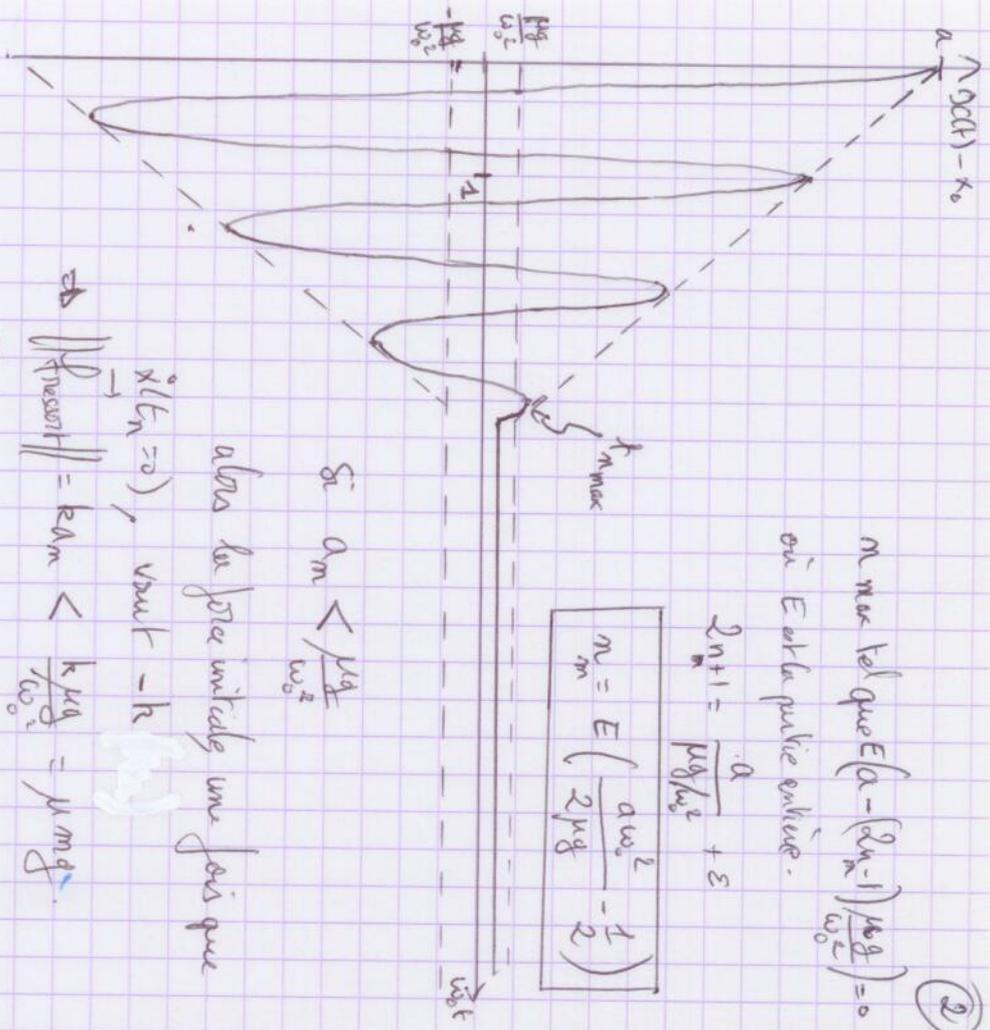
(2)

②

m_{max} tel que $E(a - (2n-1)\frac{mg}{\omega_0^2}) = 0$
 où E est la partie entière.

$$2n+1 = \frac{a}{\frac{mg}{\omega_0^2}} + \varepsilon$$

$$n = E\left(\frac{a\omega_0^2}{2mg} - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$



Si $a_m < \frac{\mu A}{\omega_0^2}$

alors la force unitaire une fois que

$\dot{x}(t_n = 0)$, vaut $-k$

$\Rightarrow \|\vec{f}_{ressort}\| = k a_m < \frac{k \mu g}{\omega_0^2} = \mu m g$

Donc si $\|\vec{f}_{ressort}\| < \mu m g \Rightarrow$ pas de mouvement

(presquelement stopé)

(Rappel, si $\mu m g > \|\vec{R}_T\| = \mu m g$)

une fois arrêté, le mobile ne bougea plus.

★ TD5 Moment cinétique ★



I.

QUELQUES RAPPELS

I. CAS D'UN POINT MATÉRIEL

1. Théorème du moment cinétique

Donner la définition du moment cinétique en un point fixe O , associé à un point mobile M de masse m dans \mathcal{R} . Expliciter et démontrer le théorème du moment cinétique appliqué à ce point M . Ce théorème fournit-il plus d'informations que la Loi Fondamentale de la Dynamique ? Quand est-il utile ?

2. Cas d'un mouvement à force centrale

Dans le cas où la particule M subit une force centrale, c'est-à-dire que la force s'exerçant sur M s'écrit $\vec{f} = K(r)\vec{u}_r$, avec $\vec{u}_r = \overrightarrow{OM}/\|\overrightarrow{OM}\|$, montrer que le mouvement de M a lieu dans un plan. En déduire l'expression de la constante des aires C et la loi des aires. En donner une interprétation.

II. SYSTÈME DE POINTS MATÉRIELS, SOLIDE

1. Théorème du moment cinétique pour un système de points matériels et pour un solide

Énoncer le théorème du moment cinétique dans le cas d'un système de points matériels et d'un solide.

2. Comparaison du TMC et du TRC

Y a-t-il encore redondance entre le théorème du moment cinétique et le théorème de la résultante cinétique (ou de la quantité de mouvement) pour ces systèmes ? Quelles informations permettent-ils, chacun, d'obtenir ?

3. Cas d'un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ dans le référentiel d'étude \mathcal{R} galiléen

Définir le moment cinétique d'un solide par rapport à cet axe fixe, on le note σ_Δ . On définira pour cela le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ , on le notera J_Δ . En déduire le théorème scalaire du moment cinétique par rapport à l'axe fixe Δ . Rappeler comment s'écrit l'énergie cinétique totale d'un solide en rotation autour d'un axe fixe en fonction de J_Δ et $\dot{\theta}$.

II.

PROBLÈMES DE STATIQUE

I. ÉQUILIBRE D'UNE BALANCE

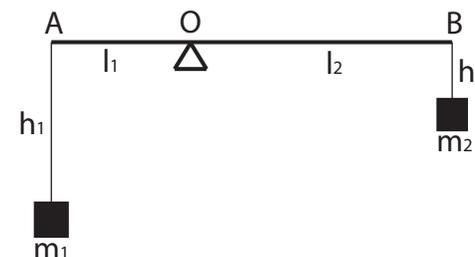


Figure 1: Équilibre d'une balance

Une balance est formée d'une tige s'appuyant en un point O . En A et B sont suspendues deux masses m_1 et m_2 (m_1 différent de m_2). On suppose également les distances $l_1 = OA$ et $l_2 = OB$ différentes, ainsi que les longueurs h_1 et h_2 des deux fils.

1. Le fait que les distances l_1 et l_2 soient différentes a-t-il une importance vis-à-vis de l'équilibre de la balance ? Qu'en est-il de h_1 et h_2 ?

2. Ecrire la (les) condition(s) d'équilibre de la balance. En déduire la force s'exerçant au point O et le rapport m_1/m_2 .

II. ÉQUILIBRE D'UNE ÉCHELLE

Une échelle de longueur $L = 4\text{m}$ et de masse $m = 20\text{kg}$ s'appuie sans frottement en B sur un mur vertical et en A sur un sol horizontal (de coefficient de frottement statique $\mu = 0.4$). Le centre de masse de l'échelle est situé au tiers inférieur de sa hauteur.

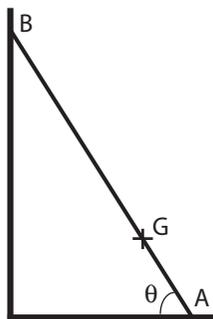


Figure 2: Équilibre d'une échelle

1. Jusqu'à quelle inclinaison peut-elle rester en équilibre ?

2. Jusqu'où un homme de masse M peut-il monter sur l'échelle inclinée de $\theta = 60^\circ$ par rapport à l'horizontale ? Pour quelles valeurs de θ peut-il atteindre le haut de l'échelle ? Application numérique : $M = 80\text{kg}$.

III.

PROBLÈMES DE DYNAMIQUE

I. LE PENDULE SIMPLE (4)

On accroche une bille de masse m à un fil inextensible de longueur l , de masse négligeable, d'extrémité fixe O . On note θ l'angle entre le fil et la verticale, T la tension du fil.

Retrouver l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique.

II. SOLIDE EN ROTATION AUTOUR D'UN AXE FIXE

On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ orienté, le solide ayant un moment d'inertie J (à définir) par rapport à cet axe. Supposons que la vitesse de rotation du solide est nulle à $t=0$, puis que celui-ci est soumis pour $t > 0$ à un couple moteur constant $C > 0$ (avec les conventions d'orientation choisies). Supposons également que des frottements fluides s'exercent, dont le moment par rapport à Δ s'écrit $-h\dot{\theta}$. On suppose le centre de masse confondu avec Δ .

1. On suppose que \vec{g} est colinéaire avec l'axe Δ . Trouver l'expression de $\omega(t) = \dot{\theta}$, la vitesse angulaire instantanée du solide par rapport à Δ .

2. On considère le cas où le couple moteur est nul $C = 0$. On note G la position du centre de masse du solide, désormais distant de $a \neq 0$ de l'axe de rotation Δ . Établir l'équation du mouvement, et étudier les petites oscillations autour de la position d'équilibre.

III. EXPÉRIENCE DE TP

On considère une masse m , attachée à une corde sans raideur de masse négligeable, elle-même enroulée autour d'un cylindre de moment d'inertie J selon l'axe de rotation Δ (perpendiculaire au plan de la feuille). On note R le rayon du cylindre, et θ son angle de rotation orienté selon l'axe Δ . Le mouvement se fait sans glissement de la corde sur le cylindre. On néglige dans un premier temps les frottements.

1. Effectuer le bilan des actions mécaniques exercées sur la masse m .

2. Établir successivement les équations du mouvement de la masse m , puis du cylindre.

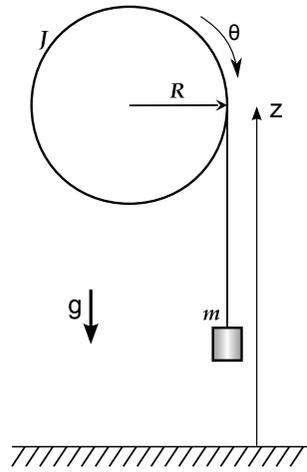


Figure 3: Étude du mouvement d'un cylindre

3. En déduire l'équation horaire de l'ordonnée $z(t)$.

IV. MOUVEMENT D'UNE ROUE MOTRICE

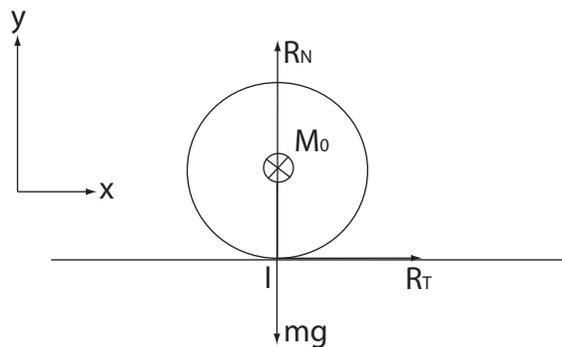


Figure 4: Mouvement d'une roue motrice

On considère une roue motrice de rayon a et de masse m . A partir de $t = 0$, on lui

applique un couple moteur \vec{M}_0 constant. Le plan exerce sur la roue une force $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$ au point I de contact. On suppose que la roue roule sans glisser sur le plan. Trouver les caractéristiques du mouvement de la roue. Quel est le rôle joué par la force de frottement ?

V. EFFET RÉTRO

Un disque plan (M,R) est posé sur un plan horizontal avec un coefficient de frottement f . En $t = 0$, $\vec{v}(G) = V_0 \vec{u}_x$ et $\vec{\Omega} = \omega_0 \vec{u}_z$. Étudier le mouvement du disque et discuter suivant les valeurs de V_0 et ω_0 . On se bornera ici au cas de l'effet rétro, où $V_0 > 0$ et $\omega_0 > 0$.

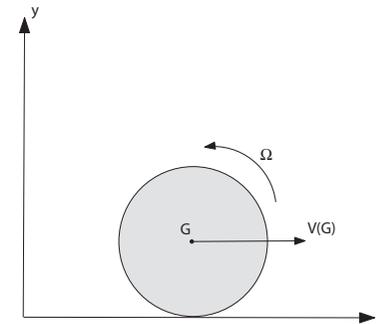
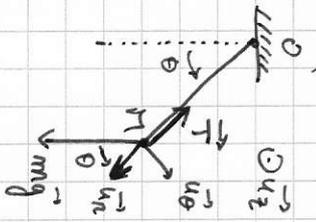


Figure 5: Effet rétro.

I) Le pendule simple (4)



On évalue le moment cinétique et les moments mécaniques en O.

Intéressé: $\vec{M}_O(\dot{\omega}) = \vec{OH} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ car $\vec{OH} \parallel \vec{T}$

$$\vec{M}_{\frac{mg}{m}}(\dot{\omega}) = \vec{OH} \wedge m\vec{g}$$

$$\text{Or } \vec{OH} = l\vec{u}_1 ; m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{u}_1 - \sin\theta\vec{u}_2)$$

$$\vec{M}_{\frac{mg}{m}}(\dot{\omega}) = mlg(-\sin\theta)\vec{u}_2. \text{ Et } \vec{L}(\dot{\omega}) = \vec{OH} \wedge m\vec{v} = l\vec{u}_1 \wedge m l\dot{\omega}\vec{u}_2 = ml^2\dot{\theta}\vec{u}_2$$

D'où, en appliquant le théorème du Moment Cinétique (TMC)

$$\frac{d\vec{L}(\dot{\omega})}{dt} = \vec{M}_{\frac{mg}{m}}(\dot{\omega}) + \vec{M}_{\frac{mg}{m}}(\dot{\omega}) \Rightarrow m l^2 \ddot{\theta} \vec{u}_2 = -m l g \sin\theta \vec{u}_2$$

$$\text{d'où rebrousse } \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0$$

II) Solide en rotation autour d'un axe fixe

1) Dans le cas a), le solide est soumis à trois actions mécaniques:

- Les forces de pesanteurs. Leur moment est nul: $M_{\text{pes}, \Delta} = 0$.
- Le moment moteur: $M_{\text{mot}, \Delta} = +C$
- Le moment de frottement fluide: $M_{\text{frot}, \Delta} = -R\omega$

Moment d'inertie I_{Δ} ; par définition: $L_{\Delta} = I_{\Delta}\omega$

TMC projeté sur Δ : $\frac{dL_{\Delta}}{dt} = M_{\Delta} \Rightarrow I_{\Delta}\dot{\omega} = C - R\omega$

soit $\dot{\omega} + \frac{R}{I_{\Delta}}\omega = \frac{C}{I_{\Delta}}$. On pose $T = I_{\Delta}/R$ et $\omega_{\infty} = \frac{C}{R}$

alors $\dot{\omega} + \frac{\omega_{\infty}}{T} = \omega_{\infty}$

Rappel: Eq. diff. : $y' + ay = b$; $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

solution de l'équation sans second membre: $y' + ay = 0$

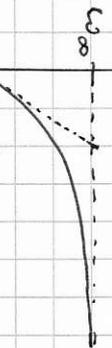
solution particulière: $y = b/a$. \rightarrow solution $y(t) = y_0 e^{-at}$

\rightarrow solution générale: $y(t) = \frac{b}{a} + y_0 e^{-at}$

y_0 est déterminé par les conditions initiales.

Dans notre cas: $\omega(t) = A e^{-t/T} + \omega_{\infty}$; $A \in \mathbb{R}$. Or $\omega(0) = 0$

D'où $A = -\omega_{\infty}$ soit $\omega(t) = \omega_{\infty}(1 - e^{-t/T})$



Semblable formellement à la charge d'un condensateur

2) Dans la géométrie b). Le solide est soumis à 3 actions mécaniques.

\rightarrow Le moment de la force de pesanteur: $M_{\text{pes}, \Delta} = -mgl \sin\theta$

\rightarrow le moment de la liaison pivot de l'axe de rotation: nul
 \rightarrow le moment de frottement fluide: $M_{\text{frot}, \Delta} = -R\dot{\theta}$

TMC $\frac{dL_{\Delta}}{dt} = I_{\Delta} \ddot{\theta} = I_{\Delta} \dot{\theta} = -R\dot{\theta} - mgl \sin\theta$, d'où

$$\ddot{\theta} + \frac{R}{I_{\Delta}} \dot{\theta} + \frac{mga}{I_{\Delta}} \sin\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{T} \dot{\theta} + \omega_{\infty}^2 \sin\theta = 0$$

soit petites oscillations autour de $\theta = 0$: $\sin\theta \approx \theta$

Equilibre: $\sum M_{\Delta} = 0 \Rightarrow \theta_{\text{eq}} = 0$

et $T = \frac{2I_{\Delta}}{R}$

On pose $\omega_{\infty}^2 = \frac{mga}{I_{\Delta}}$

d'où $\ddot{\theta} + \frac{2}{T} \dot{\theta} + \omega_{\infty}^2 \theta = 0$ \rightarrow oscillations harmoniques de pulsation ω_{∞} et d'amplitude propre

(Cf TD4 sur les osc. harmoniques)

I) Equilibre d'une balance

1/ oui, car le moment est proportionnel à l (un petit poids peut compenser un grand poids si les distances sont convenablement choisies)

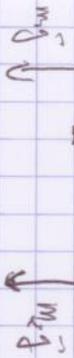
R_1 et R_2 n'interviennent pas (c'est uniquement le bras de levier).

2/ $R_1 m_1 = l m_2$ $\left[\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1} \right]$

PFD: $0 = R \neq m_1 \vec{g} + m_2 \vec{g} \Rightarrow |R| = (m_1 + m_2)g$

$R = m_2 g \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)$

$R = m_2 g \frac{l_2}{l_1}$



(1)

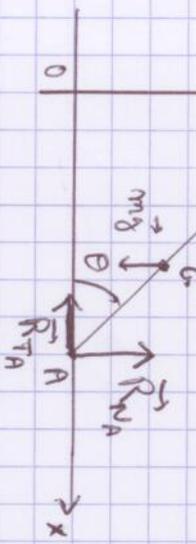
II) Equilibre d'une échelle

1/ $\vec{R}_B \perp \vec{O}_y$ car pas de frottements.

hyp: échelle en équilibre.

on pose $AG = xL$ et appliquons

les théorèmes généraux de la mécanique:



PFD: $\begin{cases} R_B + R_{TA} = 0 \\ -mg + R_{NA} = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow |R_{NA}| = mg$

TTC en A: $-mgxL \cos \theta + R_B L \sin \theta = 0$

$\Rightarrow R_B = mgx \frac{1}{\tan \theta}$

$\Rightarrow R_{TA} = -mgx \frac{1}{\tan \theta}$

Donc équilibre possible ssi: $mgx \frac{1}{\tan \theta} < \mu mg$

soit $\theta > \arctan \left(\frac{x}{\mu} \right)$ ici $x = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta > \arctan \left(\frac{1}{3\mu} \right)$

2/ Théorème raisonnement en tenant compte de l'action mécanique (2)

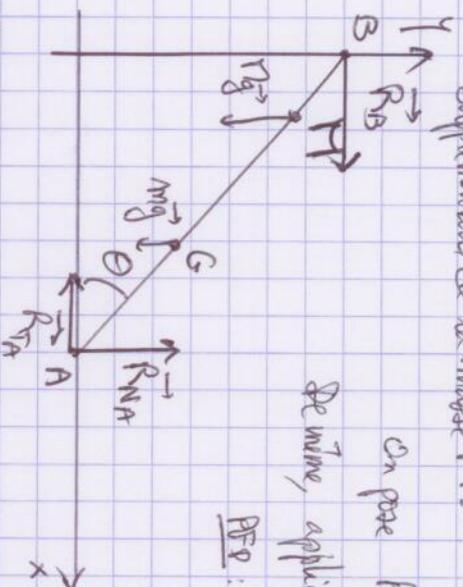
supplémentaire de la masse M.

on pose $AG = xL$ et $AT = yL$

De même, appliquons les théorèmes généraux

PFD: $\begin{cases} R_B + R_{TA} = 0 \\ -(m+M)g + R_{NA} = 0 \end{cases}$

soit $|R_{NA}| = (m+M)g$



TTC en A: $-mgxL \cos \theta - MyyL \cos \theta + R_B L \sin \theta = 0$

$\Rightarrow R_B = (mx + My)g \frac{1}{\tan \theta}$

$\Rightarrow R_{TA} = -(mx + My)g \frac{1}{\tan \theta}$

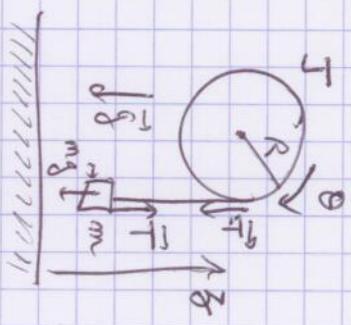
Donc équilibre possible ssi: $(mx + My)g \frac{1}{\tan \theta} < \mu (m+M)g$

soit

$\theta > \arctan \left(\frac{mx + My}{\mu(m+M)} \right)$

EXPERIENCE DE TP

1) La masse m est soulevée à son poids $\vec{p} = m\vec{g}$ et la tension du fil \vec{T}



2) PFD à la masse m :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg + T$$

$$I \frac{d^2 \theta}{dt^2} = RT$$

Condition de non glissement de la corde $R\theta = -z$

Donc $T = \frac{I}{R} \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{I}{R^2} \frac{d^2 z}{dt^2}$

à au $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg - \frac{I}{R^2} \frac{d^2 z}{dt^2}$

soit $(m + \frac{I}{R^2}) \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg$

$$\boxed{\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{m}{m + I/R^2} g}$$

à au $z(t) = \dots$
 $\theta(t) = \dots$

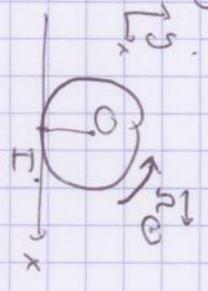
III) MOUVEMENT D'UNE ROUE RIGIDE

Condition de roulement sans glissement (RSG) :

$$\vec{V}_G(I) = \vec{0} = \vec{V}(I \text{ en roue}) - \vec{V}(I \text{ en sol})$$

$$= \vec{V}(I_0) + \vec{\omega} \wedge \vec{OI}$$

$$= \dot{x} \vec{u}_x + \dot{\omega} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} = (\dot{x} + a\dot{\omega}) \vec{u}_x \rightarrow \boxed{\dot{x} = -a\dot{\omega}}$$



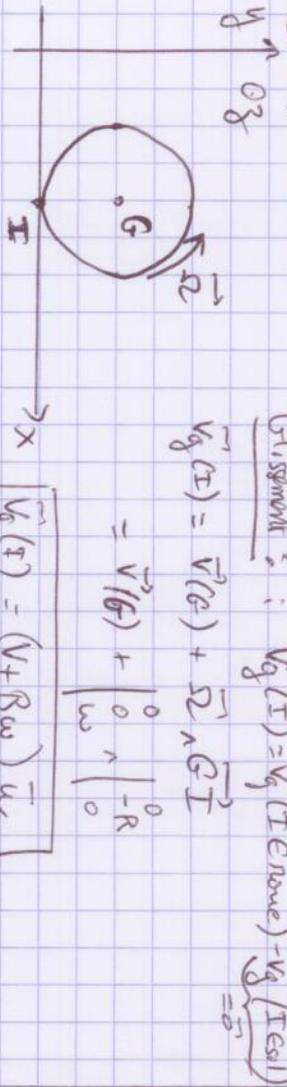
Théorème : $M_G(I) = 0$ car R^* est en translation

$$\frac{dL_G^*}{dt} = M_G(I) + M_G(I) \text{ or } L^* = I \vec{\omega}$$

PFID selon x : $m \ddot{x} = R_T = -m a \dot{\omega} \Rightarrow I \dot{\omega} = I_0 - m a \dot{\omega}$

Pour un cylindre, $I = \frac{1}{2} m a^2$ d'où finalement $\boxed{\dot{\omega} = \frac{2}{3} \frac{I_0}{m a^2}}$

IV) Effet RSTRO



à $t=0$, $V_G = V_0 + R\dot{\omega}_0 > 0$. Il y a donc glissement initial.

(1) Phase de glissement : on a alors $\|R_T\| = f \|R_N\|$ et R_T s'oppose au mouvement

PFID : $\begin{cases} m \dot{v} = R_T \\ 0 = -mg + R_N \end{cases} \Rightarrow R_N = mg \Rightarrow \|R_T\| = f mg$

(1)

d'où $m \dot{v} = -f mg \Leftrightarrow \boxed{\dot{v} = -fg}$

d'où $v(t) = v_0 - fgt$

Théorème : $I \dot{\omega} = -f mg R \Rightarrow \boxed{\dot{\omega} = -\frac{2fg}{R}}$

$\omega(t) = \omega_0 - \frac{2fg}{R} t$

Phase de glissement :

$V_G(I) = (V + R\dot{\omega}) \vec{u}_x$

$V_G(I)(t) = (v_0 + \omega_0 R - 3fgt) \vec{u}_x$

le glissement prend fin à $t_0 = (v_0 + \omega_0 R) / 3fg$

(2) Phase de roulement sans glissement

Aug : $V_G(I) = 0 \Rightarrow \boxed{V = -R\dot{\omega}}$

PFID : $m \dot{v} = R_T$

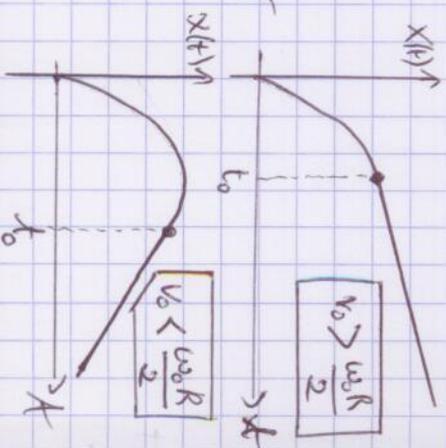
Théorème : $\frac{1}{2} m R^2 \dot{\omega} = R_T R \Rightarrow R_T = -\frac{1}{2} m \dot{v} \Rightarrow \boxed{\dot{v} = 0}$

d'où $v = v(t_0)$ et $\omega = \omega(t_0)$ $V > 0 \Rightarrow t_0$ car entrée la condition de RSG et toujours vérifiée

On a donc $v(t_0) = \frac{2v_0 - \omega_0 R}{3}$

* si $v_0 > \frac{\omega_0 R}{2} \rightarrow v(t_0) > 0$

* si $v_0 < \frac{\omega_0 R}{2} \rightarrow v(t_0) < 0 \rightarrow$ effet de frein



(2)

TD5 Mécanique stellaire



I. LE SYSTÈME TERRE-SATELLITE

Données :

Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$

Masse de la Terre : $M_T = 6.00 \times 10^{24} \text{ kg}$

Rayon de la Terre : $R_T = 6400 \text{ km}$

On souhaite ici étudier le mouvement d'un satellite dans le champ gravitationnel terrestre. Ce satellite est considéré comme un objet ponctuel de masse m_S . La Terre est assimilée à une répartition sphérique de masse. On considère que la masse de la Terre est grande devant la masse de satellite, et que le référentiel géocentrique peut être considéré comme galiléen. On note O le centre de la Terre.

1. Dans l'approximation d'une répartition de masse sphérique pour la Terre, donner l'expression du champ de gravitation terrestre \vec{g} à une distance r ($r > R_T$) du centre de la Terre. Commentaires. On notera par la suite $g_0 = g(R_T)$.

2. Montrer que

- $\vec{L}(O)$ est conservé,
- la trajectoire de la particule fictive est plane.

Dans le plan de la trajectoire, orienté par le moment cinétique, on note (r, θ) les coordonnées polaires de \vec{OM} .

3. Montrer que $C = r^2\dot{\theta}/2$ est une constante. Justifier le nom de constante des aires donnée à cette grandeur, en retrouvant la 2^e loi de Képler.

4. Écrire l'expression de l'énergie mécanique E_m du système.

5. L'expression de E_m établie précédemment peut se mettre sous la forme

$$E_m = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r),$$

où $U_{\text{eff}}(r)$ est l'énergie potentielle d'interaction effective d'un problème unidimensionnel.

Donner l'expression de $U_{\text{eff}}(r)$. Discuter, en fonction des conditions initiales, le type de trajectoire décrite par le satellite. On distinguera 3 cas.

II. CAS D'UNE INTERACTION NEWTONIENNE ATTRACTIVE (D'APRÈS CAPES 2002)

Nous entendons par interaction newtonienne, une force inversement proportionnelle au carré de la distance au centre de force, comme les interactions coulombiennes et gravitationnelles.

1. Satellisation sur une orbite circulaire :

1.1. Exprimer la vitesse $v(r)$, évaluée dans le référentiel géocentrique, d'un satellite terrestre en orbite circulaire de rayon r . On l'exprimera en fonction de \mathcal{G} , M_T et r .

1.2. En déduire la période $T(r)$ du mouvement du satellite.

1.3. Comparer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle de gravitation d'un satellite en orbite circulaire.

1.4. On désigne par orbite basse une orbite dont l'altitude est faible devant le rayon terrestre. Évaluer numériquement la période et la vitesse d'un satellite décrivant une telle orbite. Que peut-on penser de la durée de vie d'un tel satellite ?

1.5. Qu'appelle-t-on satellite géostationnaire ?

1.6. Dans quel(s) domaine(s) d'application les satellites géostationnaires sont-ils particulièrement utiles ?

1.7. Déterminer l'orbite et calculer le rayon r_g de l'orbite d'un satellite géostationnaire.

1.8. Peut-on lancer un satellite géostationnaire à la verticale de Paris ?

1.9. Que peut-on répondre à un élève qui affirme :

- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est nulle car il est immobile.
- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est infinie parce qu'il est immobile.
- la période de révolution d'un satellite géostationnaire est égale à 1 jour, soit $24\text{h}=86400\text{s}$.
- j'ai lu dans un site internet que la période de révolution d'un satellite géostationnaire vaut 86164s , mais je ne comprends pas pourquoi.

2. Vitesse de libération ou vitesse parabolique :

2.1. Calculer la vitesse minimale, notée v_p , laquelle il faudrait lancer un satellite soumis à la seule gravitation à partir de la surface de la Terre pour que celui-ci puisse aller à l'infini. Cette vitesse v_p est appelée vitesse de libération, ou vitesse parabolique ou encore seconde vitesse cosmique. Faire l'application numérique.

2.2. Comparer v_p à la vitesse de satellisation en orbite basse. Commenter l'influence d'une modification de la vitesse sur la trajectoire du satellite. Faire un schéma représentant l'allure des trajectoires du satellite par rapport au centre de la Terre en fonction des valeurs de la vitesse initiale du satellite.

2.3. Calculer la vitesse quadratique moyenne de l'oxygène et de l'azote de l'air pris à 293K et justifier le fait que l'atmosphère reste en grande partie piégée autour de la Terre.

III. ORBITE DE TRANSFERT (D'APRÈS CAPES 2002)

1. Problème du transfert : on admettra que l'énergie mécanique d'un satellite en orbite elliptique est de la forme

$$E_m = -\frac{K}{a},$$

où a est le demi-grand axe de l'ellipse trajectoire et K une constante dépendant de la masse de la Terre, de la masse du satellite et de \mathcal{G} .

1.1. En identifiant cette expression avec celle de l'énergie d'un satellite en orbite circulaire, déterminer K .

On souhaite faire passer un satellite d'une orbite circulaire basse ($r \approx R_T$) dans le plan équatorial de la Terre à une orbite géostationnaire. Pour cela, on communique une brusque variation de vitesse $\Delta \vec{v}_B$ du satellite en un point B de l'orbite basse, afin que le satellite se trouve sur une orbite elliptique (orbite de transfert de Hohmann) tangente en B à l'orbite basse et tangente en un point H à l'orbite géostationnaire.

1.2. Faire un schéma soigné sur lequel on placera le centre de la Terre, les trajectoires circulaires basse et géostationnaire et l'orbite de transfert.

1.3. Déterminer le demi-grand axe a de l'orbite de transfert.

1.4. Déterminer la variation de vitesse $\Delta \vec{v}_B$ (norme et direction) convenable.

1.5. Lorsque le satellite parvient au point H , on lui communique une nouvelle brusque variation de vitesse $\Delta \vec{v}_H$ afin qu'il puisse passer de l'orbite de transfert à l'orbite géostationnaire. Déterminer la variation de vitesse $\Delta \vec{v}_H$ (norme et direction) convenable.

1.6. Les variations de vitesse Δv_B et Δv_H sont obtenues par la mise en action d'un moteur qui éjecte des produits de combustion avec une vitesse relative d'éjection u et un débit massique D . Si m_B , m_H et m_G sont respectivement la masse du satellite en orbite basse, sur l'orbite de transfert et sur l'orbite géostationnaire, on montre que

$$\Delta v_B = u \ln \left(\frac{m_B}{m_H} \right) \text{ et } \Delta v_H = u \ln \left(\frac{m_H}{m_G} \right).$$

Déterminer le rapport $\frac{m_G}{m_B}$.

Application numérique : $m_G = 1000 \text{ kg}$; $u = 3000 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Quelle masse m_B faut-il satelliser en orbite basse ?

1.7. En pratique, l'orbite elliptique de transfert fait passer d'une orbite circulaire d'altitude 200km à l'orbite géostationnaire. Pourquoi ne choisit-on pas une orbite circulaire basse d'altitude inférieure ?

2. Frottements.

2.1. Pour un satellite en orbite basse elliptique, justifier que c'est au voisinage du périégée que les frottements sont les plus intenses.

2.2. On modélise les effets des frottements par une diminution de vitesse au passage au périégée. Montrer qualitativement que ce modèle conduit à une circularisation progressive de la trajectoire elliptique.

2.3. Pour un satellite en orbite quasi-circulaire, montrer par un bilan énergétique que les frottements aérodynamiques ont pour effet paradoxal d'accroître la vitesse.

2.4. N'y a-t-il pas contradiction entre ce résultat et celui de la question **8.2.** ? Commenter.

IV. MÉCANIQUE STELLAIRE (D'APRÈS AGREG B 2006)**1. Lancement d'un satellite**

On étudie le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point O de la surface terrestre.

1.1. Établir l'expression de la vitesse du point O dans le référentiel géocentrique \mathcal{R}_g (assimilé ici à un référentiel galiléen) en fonction de la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe de ses pôles Ω , du rayon terrestre R_T et de la latitude du lieu λ .

1.2. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tirs suivants, lequel choisir de préférence ?

- Baïkonour au Kazakhstan $\lambda = 46^\circ$;
- Cap Canaveral aux USA $\lambda = 28.5^\circ$;
- Kourou en Guyane française $\lambda = 5.23^\circ$.

2. Champ de gravitation

On considère que la Terre de masse M_T et de rayon R_T a une répartition de masse sphérique et une densité volumique ρ .

2.1. Énoncer la loi de la gravitation universelle.

2.2. Montrer qu'en un point situé à une distance r du centre de la Terre ($r > R_T$), le champ de gravitation peut se mettre sous la forme

$$\mathbf{G} = -\mathcal{G} \frac{M_T}{r^2} \mathbf{e}_r.$$

Définir le vecteur \mathbf{e}_r .

3. Lancement d'un satellite artificiel

3.1. Établir l'expression de l'énergie potentielle de gravitation du système {Terre-satellite} en fonction de l'altitude z du satellite par rapport au sol. On prend pour référence une énergie potentielle nulle à l'infini. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur sa base de lancement dans le référentiel géocentrique.

3.2. On appelle ici vitesse de libération v_l , la vitesse verticale minimale qu'il faut communiquer initialement au satellite par rapport au sol, pour qu'il puisse se libérer de l'attraction terrestre. Donner l'expression de v_l . Calculer sa valeur numérique dans le cas où le satellite est lancé de la base de Kourou.

4. Satellite artificiel en orbite

On considère un satellite artificiel de masse m en mouvement circulaire autour de la Terre.

4.1. Montrer que le mouvement du satellite est uniforme. Établir l'expression de la vitesse du satellite en fonction de son altitude ainsi que la troisième loi de Kepler liant la période T du satellite au rayon r de sa trajectoire.

4.2. Calculer le rayon de l'orbite d'un satellite géostationnaire et définir son plan de révolution.

4.3. Quelle énergie cinétique minimale faut-il communiquer au satellite pour qu'il échappe à l'attraction terrestre s'il est initialement en orbite autour de la Terre à l'altitude z ? A.N. : $z = 360\,000$ km ; $m = 6t$.

4.4. Soit un satellite d'énergie initiale E_{m0} . Son orbite est relativement basse et il subit donc les frottements des couches hautes de l'atmosphère. Il s'ensuit que l'énergie mécanique du satellite varie selon la loi

$$E_m = E_{m0}(1 + bt),$$

b étant un coefficient constant positif. On suppose que la trajectoire reste approximativement circulaire.

Préciser le signe de E_{m0} . Établir l'expression du rayon r et de la vitesse v du satellite en fonction du temps. Comparer les évolutions de r et de v ainsi que celles des énergies potentielles et cinétiques. Que devient l'énergie perdue ?

5. Sonde solaire

On cherche à positionner une sonde spatiale de masse m en un point P de manière à ce que, abandonnée en ce point, la sonde reste immobile par rapport au système {Terre-Soleil}. Les positions correspondant à cette situation sont appelées "points de Lagrange". Soient

- P_1 et P_2 les positions de Lagrange pour lesquelles le point P est aligné avec le centre T de la Terre et avec le centre S du Soleil, T et P se trouvant du même côté du Soleil ;
- x la distance entre la sonde et la Terre ;
- d la distance Terre-Soleil ;
- $k = M_S/M_T$.

La masse de la sonde est négligée par rapport aux masses de la Terre et du Soleil. On tiendra compte de la rotation de la Terre autour du Soleil.

5.1. Déterminer les valeurs des distances SP correspondant à ces positions. Faire un schéma. On considère que $x/d \ll 1$.

5.2. Quel est l'intérêt de placer un satellite en l'un de ces points ? Donner un exemple de ces satellites particuliers.

V. INTERACTIONS TERRE-LUNE ; PHÉNOMÈNES DE MARÉES [EXTRAIT AGREG B 1999]

On se propose dans cette partie d'étudier quelques phénomènes liés à l'action de la Lune sur la Terre. On note \mathcal{G} la constante de gravitation universelle. La Lune est considérée comme un objet ponctuel L de masse m , en interaction avec la Terre, sphère de rayon R . La distance de la Lune au centre de la Terre est notée d . Un point P sur la Terre est caractérisé par $CP = r$; $\text{angle}(\mathbf{CL}, \mathbf{CP}) = \theta$.

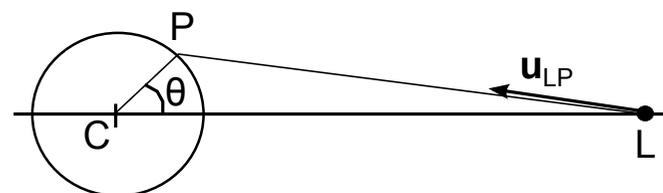


Figure 1: Système Terre-Lune

1. Exprimer le champ de gravitation \mathbf{g} exercé par la Lune au point P, en fonction de la masse de la Lune, de la distance LP, à l'aide du vecteur unitaire \mathbf{u}_{LP} dirigé de L vers P et à l'aide de la constante de gravitation universelle G .

2. En déduire le potentiel de gravitation Φ exercé par la Lune au point P, en fonction de la masse de la Lune, de la distance LP, et à l'aide de la constante de gravitation universelle G .

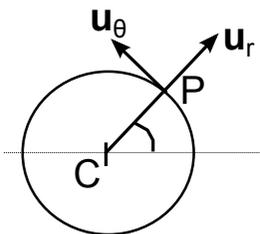
3. Exprimer LP en fonction de d , r , et de l'angle θ .

4. d étant très supérieur à r , établir une expression développée à l'ordre 2 en r/d du potentiel gravitationnel, sous la forme

$$\Phi = \Phi_0 + a(\theta) \frac{r}{d} + b(\theta) \frac{r^2}{d^2},$$

où $a(\theta)$ et $b(\theta)$ sont des fonctions de θ que l'on explicitera.

5. On définit sur la sphère Terre un vecteur unitaire radial \mathbf{u}_r porté par CP et un vecteur unitaire orthoradial \mathbf{u}_θ . Quel est le champ de gravitation \mathbf{g}_1 qui dérive du potentiel $a(\theta)r/d$? Montrer que ce champ est uniforme. Quelle est sa signification physique ?



6. Exprimer sur la base $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta$ le champ de gravitation \mathbf{g}_2 qui dérive du potentiel $b(\theta)r^2/d^2$; représenter le champ \mathbf{g}_2 pour $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$; comment cette figure permet-elle d'expliquer le fait qu'on observe, en première approximation, en une journée terrestre, 2 marées hautes et 2 marées basses ?

Quelle interaction supplémentaire faudrait-il prendre en compte pour expliquer les grandes marées (ou marées de vives eaux) et les petites marées (ou marées de mortes eaux) ?

Quelques conséquences des phénomènes de marées

7. La durée du jour terrestre a augmenté au cours des âges ; elle valait 22.2 heures il y a 300 millions d'années. Comment les phénomènes de marées peuvent-ils en être responsables ?

8. Les Romains avaient observé que le débit des sources varie journalièrement ; de même, le faisceau du grand collisionneur électron-positon (LEP) du CERN, laboratoire européen de physique des particules à Genève, a une énergie qui varie journalièrement ; quel type de marée est-il responsable de ce phénomène ?

MECANIQUE STELAIRE

① Le problème à deux corps

1.1/ Particule M_1 : $m_1 \frac{d^2 \vec{O}T_1}{dt^2} = \vec{f}_{2 \rightarrow 1}$

Particule M_2 : $m_2 \frac{d^2 \vec{O}T_2}{dt^2} = \vec{f}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{f}_{2 \rightarrow 1} = \vec{f}$

\rightarrow $m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -\vec{f}$ $m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = +\vec{f}$

1.2/ $\vec{O}G = \frac{1}{m_1+m_2} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2) \Rightarrow \frac{d^2 \vec{O}G}{dt^2} = \frac{1}{m_1+m_2} (m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}) = 0$

$\Rightarrow \frac{d^2 \vec{O}G}{dt^2} = \vec{0}$ Mouvement de translation rectiligne uniforme dans R de G.

Le mouvement d'ensemble du système de particules est un mouvement de translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{v}_R(G)$.

1.3/ $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \vec{f}$ On définit μ la masse réduite selon

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$

Ainsi \vec{r} vérifie $\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{f}$

1.4/ Cette expression a du sens car on se l'approprierait le PFD dans R^* à une particule fictive de masse μ , de position $\vec{r} = \vec{O}T$, subissant une force \vec{f} de la part de G.

1.5/ R^* n'est pas galiléen dans le cas général. Cependant, dans le cas présent, G est en translation rectiligne uniforme dans R galiléen, dans R^* , l'art aussi et donc est galiléen.

1.6/ $\vec{O}T_i = \vec{O}G + \vec{G}T_i$

de plus $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$
 $\left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ m_1 \vec{O}T_1 + m_2 \vec{O}T_2 = \vec{0} \text{ par définition de G} \end{array} \right.$

②

Ponc $\vec{O}T_1 = \vec{O}T_2 + \vec{T}_2T_1 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{O}T_1 - \vec{r}$
 De même, $\vec{O}T_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}$

D'où le résultat:

$\vec{O}T_1 = \vec{O}G - \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}(t)$
 $\vec{O}T_2 = \vec{O}G + \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}(t)$ (A)

Quantité de mouvement de la particule fictive

$\vec{p}^* = \mu \vec{v}(R^*) \rightarrow \vec{p}^* = \mu \dot{\vec{r}}$

où la dérivée s'opère par rapport à R^*

Torment cinétique: $\vec{L}^*(G) = \mu \vec{O}G \wedge \frac{d\vec{O}T}{dt}$

$\vec{L}^*(G) = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$ dans R^*

Energie cinétique dans R^* $E_c^* = \frac{1}{2} \mu v(R^*)^2 \rightarrow E_c^* = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2$

1.7/ $r(t)$ est supposé connu, et G est en translation rectiligne uniforme, donc en utilisant (A) le problème est résolu par homothétie par rapport à G.

ex: $\vec{O}T_1 = \vec{O}G - \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}(t)$

$\mu v t$ d'ensemble mouvement relatif.

1.8/ Si $m_1 \gg m_2$, le mouvement de G s'identifie à celui de M_1 la particule la plus massive dans R, tandis que dans R^* , le mobile fictif s'identifie à M_2 et M_1 est immobile.

Ex: Terre-Soleil, T Soleil $\gg M$ Terre
 Neutron-électron, m Neutron $\gg M_e$

2/ Torment cinétique

2.1/ $\vec{L}^*(A) = \vec{A}T_1 \wedge m_1 \frac{d\vec{O}T_1}{dt} + \vec{A}T_2 \wedge m_2 \frac{d\vec{O}T_2}{dt}$

$= \vec{A}G \wedge (m_1 \frac{d\vec{O}T_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{O}T_2}{dt}) + \vec{O}T_1 \wedge m_1 \frac{d\vec{O}T_1}{dt} + \vec{O}T_2 \wedge m_2 \frac{d\vec{O}T_2}{dt}$

③

$$\vec{L}^*(A) = \vec{L}^*(G) + \vec{AG} \wedge \frac{d}{dt} (m_1 \vec{GT}_1 + m_2 \vec{GT}_2) = \vec{S} \text{ par définition de } G.$$

$$\Rightarrow \forall A, \boxed{\vec{L}^*(A) = \vec{L}^*(G)}$$

\vec{L}^* est indépendant du point considéré.

$$\vec{L}^* = \vec{GT}_1 \wedge m_1 \frac{d\vec{GT}_1}{dt} + \vec{GT}_2 \wedge m_2 \frac{d\vec{GT}_2}{dt}$$

On a $\vec{GT}_1 = -\frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{r}$ et $\vec{GT}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{r}$. On obtient alors

$$\boxed{\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}}$$

Le moment cinétique barycentrique du système est égal au moment cinétique de la particule fictive dans R^*

2.2) La particule fictive subit dans R^* une force \vec{f} centrée en G :
mouvement à force centrale donc

$$\frac{d\vec{L}^*(G)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{L}^* = C \vec{e}_z}$$

De plus, $\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{r} \in \pi$ plan \perp à $\vec{L}^* = C \vec{e}_z$.

Donc la particule se déplace dans un plan contenant



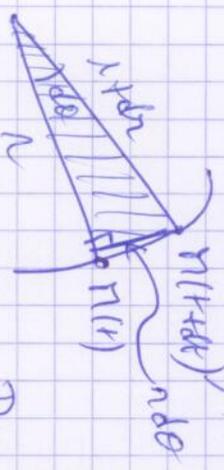
2.3) En coordonnées polaires, $\vec{L}^* = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$

$$\vec{L}^* = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \Rightarrow \mu r^2 \dot{\theta} = \mu C = C'$$

$$\Rightarrow \vec{L}^* = \mu r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\text{On } \vec{L}^* = C' \vec{e}_z \Rightarrow \mu r^2 \dot{\theta} = \mu C = C'$$

$$\boxed{C = r^2 \frac{d\theta}{dt}} \text{ constante des aires}$$



$$dS = \frac{1}{2} (r d\theta) r = \frac{C}{2} dt$$

$$\boxed{\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}}$$

(3)

Dans un mouvement à force centrale, le rayon vecteur balaye des aires égales pendant des durées égales

(4)

3 Approche énergétique

$$3.1/ E_C^* = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{d\vec{GT}_1}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{d\vec{GT}_2}{dt} \right)^2$$

et compte tenu de l'expression de \vec{GT}_1 et \vec{GT}_2 en fonction de \vec{r} , on a

$$E_C^* = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} \right)^2 \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2} \right)^2 \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2$$

soit

$$\boxed{E_C^* = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2}$$

L'énergie cinétique du système combinée par les particules dans R^* est égale à celle de la particule fictive associée, calculée également dans le référentiel barycentrique.

On se place en polaires: $\dot{\vec{r}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

Donc $E_C^* = \frac{1}{2} \mu (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$, Or $r^2 \dot{\theta}^2 = C'^2 = \frac{C^*}{\mu}$,

par conservation du moment cinétique. Donc $\boxed{\dot{\theta} = \frac{C^*}{\mu r^2}}$

soit pour $C = \frac{L^*}{\mu}$ (constante des aires)

$$E_C^* = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + \frac{L^{*2}}{\mu^2 r^2} \right) \text{ soit } \boxed{E_C^* = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right)}$$

on obtient immédiatement

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} \mu \left(\dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2} \right) + U(r)}$$

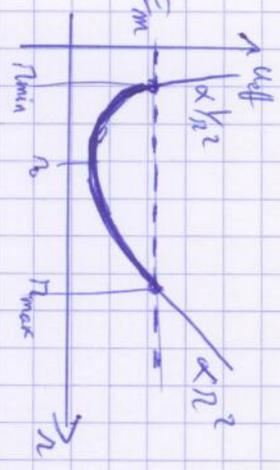
3.2/ $E_m = E_C^* + U(r)$ dans R^* soit

$$\text{Soit } \boxed{W_{eff}(r) = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r)}$$

soit

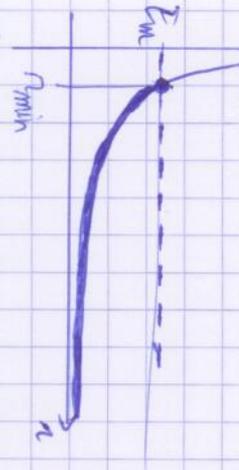
On se ramène à un mouvement 1D selon r dans un potentiel effectif $W_{eff}(r)$. Remarquons l'énergie mécanique totale E_m et l'allure du $W_{eff}(r)$, on peut discuter du caractère borné ou non de la trajectoire.

ex 1: $U(r) \propto \frac{1}{r^2}$ (att. élastique) (5)



Trajectoire bornée
↳ **ÉTAT LIÉ**

ex 2: $U(r) \propto \frac{1}{r}$ interaction répulsive



Trajectoire non bornée ($r \geq r_{min}$)
↳ **ÉTAT LIBRE**

3.4/ L'énergie mécanique est conservée $E_m = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r)$

d'où $\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu} (E_m - U(r))}$

Alors $\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E_m - U(r))}} = \pm \int dt$ donne accès à $r(t)$

La conservation du moment cinétique donne

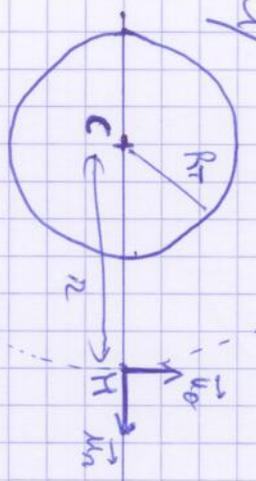
$\Theta(t) = \int_{t_0}^t \frac{C}{r^2} dt + \Theta(t_0)$
 $\dot{\Theta} = \frac{C}{r^2}$ d'où

3.5/ Une fois (r, Θ) obtenu, on a \vec{r} donc \vec{r}_1 et \vec{r}_2 selon les équations de la question 1.7.1.

$\vec{\partial} \Pi_1 = \vec{\pi}_1 = \vec{\partial} G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{\pi}(t)$
 $\vec{\partial} \Pi_2 = \vec{\pi}_2 = \vec{\partial} G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{\pi}(t)$

Ces transformations sont ligne impaire

II) Cas d'une interaction newtonienne attractive (1 point CHES 2002)



hyp: répartition sphérique des masses
Par symétrie, $\vec{g} = g(r) \vec{u}_n$

Théorème de Gauss à une sphère de rayon $r > R_T$ notée S_1

$$\oint_{S_1} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi r^2 g_{int} = -4\pi r^2 g$$

← masse dans S_1

$$\oint_{S_1} \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} g(r) dS = 4\pi r^2 g(r) = -4\pi r^2 g_{int}$$

soit $g(r) = -g_0 \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$. On note $g_0 = g(R_T)$

On obtient alors

$$g(r) = -g_0 \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$$

2) $R_{géo}$ est un référentiel en translation par rapport au référentiel de Copernic à vitesse \vec{v} et celle de la Terre. Il n'est pas en mouvement rectiligne uniforme par rapport à Copernic, et donc $R_{géo}$ n'est pas galiléen.

Dans les situations où les effets de la rotation de la Terre autour du Soleil peuvent être négligés, c'est une bonne approximation de référentiel galiléen.

On a $\vec{T} \rightarrow \vec{m}g$ donc le barycentre du système {Terre - Satellite} coïncide approximativement avec le centre de la Terre et la particule fictive associée se confond avec le satellite. On peut alors confondre $R_{géo}$ avec R .

$$\vec{f}_{T \rightarrow S} = -G \frac{M_T m_S}{r^2} \vec{u}_n = -\frac{\partial}{\partial n} \left(-G \frac{M_T m_S}{n} \right) \vec{u}_n = -\vec{\nabla} E_p$$

avec $E_p = -G \frac{M_T m_S}{n} + C$ $C \in \mathbb{R}$

Avec les relations de l'énergie:

$$U(r) = -G \frac{M_T m_S}{r} \quad (U(\infty) = 0)$$

1

2

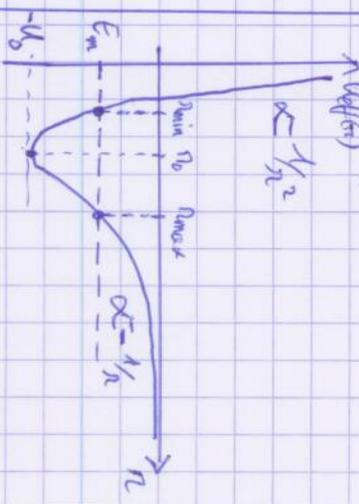
D'où $E_m = E_c + U(r) = \frac{1}{2} m_S \left(\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \dot{\theta}^2 \right) + U(r)$.

$$= \frac{1}{2} m_S \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U_{eff}(r)$$

avec l'énergie effective:

$$U_{eff}(r) = \frac{1}{2} m_S \frac{C^2}{r^2} - G \frac{M_T m_S}{r}$$

allure du potentiel



4) * $E_m = -U_0$, $r = r_0 = C^2$
trajectoire circulaire

* si $-U_0 < E_m < 0$, trajectoire bornée et liée

* si $E_m > 0$ état libre, la trajectoire n'est pas bornée

5/1) orbite circulaire. P.D: $m_S \vec{a}(M) = m_S \frac{v^2}{r} (-\vec{u}_n)$

$$= m_S g(r) = -m_S g_0 \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$$

$$v(r) = R_T \sqrt{g_0/r}$$

5.2/ Trouver une orbite circulaire uniforme $\Rightarrow T(r) = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \frac{r}{R_T} \sqrt{\frac{r}{g_0}}$

$$T(r) = 2\pi \left(\frac{r}{R_T^2 g_0} \right)^{3/2}$$

Rq: on retrouve la 3^{ème} loi de Kepler

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{R_T^2 g_0}$$

5.3/ Energie cinétique, $E_c = \frac{1}{2} m_S v(r)^2 = \frac{1}{2} m_S g_0 \frac{r}{R_T^2}$

Energie potentielle de gravitation $E_p = -m_S g_0 \frac{R_T^2}{r} = -2E_c$

$$E_p = -2E_c$$

5.4/ En orbite basse, $r = R_T + h$ avec $R \ll R_T$.
 Au premier ordre en $\frac{h}{R_T}$

$$v(h) = R_T \sqrt{\frac{g_0}{R_T + h}} = \sqrt{g_0 R_T} \left(1 - \frac{h}{2R_T}\right)$$

$$\text{et } T(h) = 2\pi \left(\frac{R_T + h}{R_T}\right) \sqrt{\frac{R_T + h}{g_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g_0}} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{h}{R_T}\right)$$

A l'ordre le plus bas, l'ordre 0, v et T sont indépendants de h et

$$v = \sqrt{g_0 R_T} = 7926 \text{ m/s}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g_0}} = 5082 \text{ s} = 1 \text{ h } 24 \text{ min } 42 \text{ s}$$

avec une telle vitesse, il aura une durée de vie limitée.

5.5/ Un satellite géostationnaire est un satellite fixe dans le référentiel terrestre. En particulier, sa période de révolution vaut $T = 24 \text{ h}$ dans le référentiel géocentrique.

5.6/ - GPS, télécommunication.

5.7/ loi de composition des vitesses entre $R_{géo}$ et $R_{terrestre}$

$$\vec{v}(M/R_{géo}) = \vec{v}(M/R_T) + \vec{\omega}_R \otimes \vec{r}$$

où O est le centre de la Terre, $\vec{\omega}$ vecteur rotation instantané de rotation de la Terre, T position du satellite.

$$\vec{v}(M/R_T) = \vec{v} \Rightarrow \vec{v}(M/R_{géo}) = \vec{v}_R \otimes \vec{e}_T \quad \text{donc } \boxed{\vec{v} \perp \vec{\omega}}$$

Le plan de la trajectoire devrait contenir le centre de la Terre, on voit que le satellite doit se trouver dans le plan équatorial.

Rayon de l'orbite : $r_g = \left(\frac{g_0 R_T^2 T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$ où $T = 24 \text{ h}$.

A.N. : $r_g = 42300 \text{ km}$ soit $h = 35900 \text{ km}$.

altitude $\neq r_g$.

(3)

5.8/ Non car Paris n'est pas dans le plan équatorial.

(4)

5.9/ Toutes ces affirmations sont potentiellement fausses ou incohérentes tant qu'on ne précise pas le référentiel d'observation.

Pour rapport au référentiel terrestre, un satellite géostationnaire n'est pas en mouvement (puisque il est immobile) et définit une période de révolution du satellite n'a donc aucun sens. \mathcal{C}_P et premières affirmations) Par rapport au référentiel géocentrique, la période de révolution du satellite correspond à un jour sidéral (86164 s) et non pas à un jour solaire moyen (86400 s).
 L'avant dernier affirmation est donc une approximation.

6.1/ Un pont dans un champ newtonien en h^2 peut aller à l'infini si son énergie mécanique peut être supérieure à $v(\infty) = 0$.

Le cas limite correspond à l'énergie minimale nécessaire pour aller à $r \rightarrow +\infty$ et se "libérer" du potentiel attractif, se pour $E_m = 0$ ($v=0, r \rightarrow +\infty$)

Vitesse v_0 nécessaire pour que $E_m = 0$ à la surface de la Terre

$$E_m = \frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{M_T m}{R_T} \geq 0, \quad \text{et } \gamma \frac{M_T}{R_T} \approx g_0 R_T^2$$

Donc $v_0 \geq v_p = \sqrt{2g_0 R_T}$ vitesse de libération.

v_p est indépendant de la direction de lancement.

A.N. : $v_0 = 11,2 \text{ km/s}$

6.2/ Soit v_0 la vitesse en orbite basse
 on a donc $v_0 = \sqrt{2} v_p$

La marge est faible entre v_0 et v_p ; une modification de la vitesse doit avoir une influence importante sur la trajectoire.



6.3/ $u = \sqrt{\frac{3R_T}{h}}$

\mathcal{M} masse molaire
 u vitesse quadratique moyenne
 (\mathcal{C}_P thermus)

Azote : $\mu_{N_2} = 511 \text{ m/s}$

Oxygène : $\mu_{O_2} = 478 \text{ m/s}$

ces vitesses sont très inférieures à $V_E \rightarrow$ atmosphère stable.

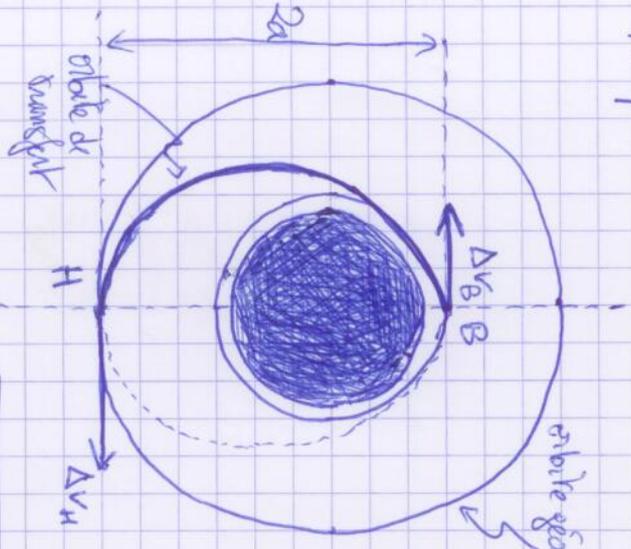
7.1/ En orbite circulaire $E_m = E_p + E_c = -\frac{1}{2} \mu v^2 + \mu \phi = \frac{1}{2} \mu v^2$

$$= -m g_0 R_T^2 \frac{R_T^3}{h^2}$$

d'où $K = \frac{1}{2} m g_0 R_T^2$ par identification, soit

$$K = \frac{m_s g_0^2 R_T^2}{2}$$

7.2/



orbite géostationnaire

L'orbite de transfert est demi-elliptique tangente aux orbites circulaires et géostationnaires.

7.3/ Le demi-grand axe de l'orbite de transfert vaut

$$2a = R_B + R_T$$

$$a = \frac{1}{2} (R_B + R_T)$$

7.4/ $\Delta \vec{v}_B = ?$

Sur la trajectoire circulaire $v_B = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{R_T}}$

$E_m = -\frac{K}{a}$ sur l'elliptique, donc

$$v_B' = \sqrt{-\frac{g_0 R_T}{a} + \frac{2g_0 R_T}{R_T}}$$

(5)

$$v_B' = \sqrt{\frac{2g_0 R_T}{R_T} \left(1 - \frac{1}{1 + R_T/R_B}\right)}$$

(6)

A.N. $\Delta v_B' = 2515 \text{ m/s}$ et $\Delta v_B'$ est tangent à la trajectoire.

7.5/ En H, sur la trajectoire circulaire, $v_H' = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{R_T}}$

Sur la trajectoire elliptique ($\eta = R_T$ et $a = \frac{1}{2} (R_T + R_B)$)

$$\rightarrow v_H = \sqrt{\frac{2g_0 R_T}{R_T} \left(1 - \frac{1}{1 + R_T/R_B}\right)}$$

$$|\Delta v_H| = v_H' - v_H = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{R_T} \left(1 - \frac{2R_T}{R_T + R_B}\right)} \rightarrow |\Delta v_H| = 1580 \text{ m/s}$$

7.6/ On a $\Delta v_B + \Delta v_H = u \ln \left(\frac{m_B}{m_C}\right)$

$$\Delta v_B + \Delta v_H = \sqrt{\frac{g_0 R_T}{R_T} \left(1 - \frac{2R_T}{R_T + R_B}\right)} + \sqrt{\frac{g_0 R_T}{R_T} \left(\frac{2R_T}{R_T + R_B} - 1\right)}$$

$$\text{A.N.} : u \ln \left(\frac{m_B}{m_C}\right) = 4015 \text{ m/s} \rightarrow \frac{m_B}{m_C} = 926 \text{ soit } m_B = 38 \text{ tonnes}$$

7.7/ Sur une orbite de 230 km d'altitude, on peut s'affranchir des problèmes liés à l'atmosphère (frottements, ...).

8.1/ Au périapsis (point le plus proche du foyer ~~de la structure~~ apogée) la vitesse du satellite est la plus élevée :

$$v = \sqrt{2g_0 R_T \left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{2a}\right)}$$

On prendrait ainsi l'importance des frottements (point le plus proche de l'atmosphère de surface).

8.2/ Cette diminution de vitesse revient, en ce lieu, à ce même gain de raisonnement qu'en 7/, au transfert d'une trajectoire elliptique vers circulaire.

8.3/ Pour une arête quasi-circulaire, $E_m = E_c + E_p =$

$$= -2E_c + E_c = -E_c$$



Donc si $E_m \searrow$, $E_c \nearrow$ donc $\nabla \nearrow$,

8.4/ Le raisonnement précédent tient du fait que $E_p = -2E_c$ de sorte

que la dérivée de E_p l'emporte sur l'augmentation de E_c .

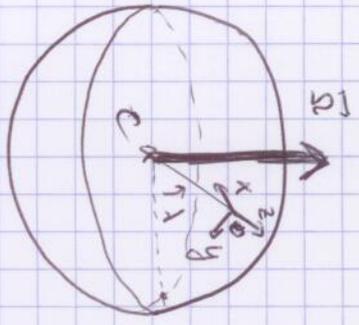
Cela ne peut pas se transformer directement pour une trajectoire elliptique où E_c dépend du point de la trajectoire. $E_c \nearrow$ en moyenne.

III) MECANIQUE STELLAIRE

1) Lancement d'un satellite

On considère le superieur (0; x; y; z)

Soit C le centre de la Terre
 \vec{r} vecteur position instantané de Terre/Rg



Cinématique: $\vec{V}_{Rg}(0) = \vec{V}_{Rg}(0) + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_C(0)$

or $\vec{V}_{Rg}(0) = 0$

$$\vec{\Omega} \wedge \vec{r}_C(0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\Omega \cos \lambda & \Omega \sin \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega R_T \sin \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\Omega R_T \sin \lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

d'où $\vec{V}_{Rg}(0) = -\Omega R_T \sin \lambda \vec{u}_z$

2) Champ de gravitation

2.1) Loi de gravitation universelle:

Énergie: Il existe une force gravitationnelle d'attraction entre deux masses ponctuelles m et m', distantes de $r = r(H')$

$$\vec{F}_{M-H} = -G \frac{m m'}{r^2} \frac{\vec{u}}{r}$$

\vec{u} vecteur unitaire, $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$

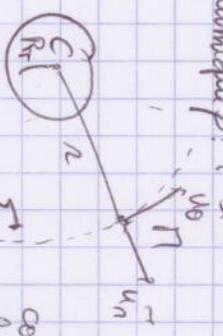
G est la constante de gravitation universelle
 $G \approx 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$

2.2) Théorème de Gauss pour le champ de gravité

$$\oint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$$

où M_{int} est la masse totale contenue dans la surface fermée Σ

Cas du champ de gravitation de la Terre supposée homogène de masse volumique ρ :



$\vec{C}H = r \vec{u}_n$

Si $r < R_T$ on considère la surface Σ

constituée par la sphère de centre C (centre de la Terre) et de rayon r. La symétrie: $\vec{g}(r) = g(r) \vec{u}_n$

On applique le théorème de Gauss

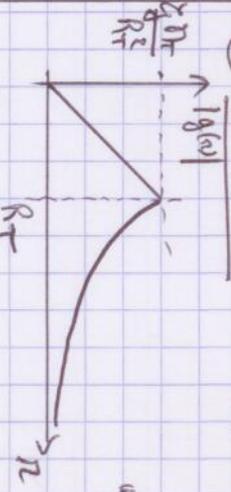
$$\oint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d\vec{S} = g(r) \oint_{\Sigma} \vec{u}_n \cdot d\vec{S} = g(r) 4\pi r^2 = -G 4\pi M_{int}$$

$M_{int} = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$ et $\rho = \frac{M_T}{\frac{4}{3} \pi R_T^3}$ ← masse de la Terre

Donc $M_{int} = \left(\frac{r}{R_T}\right)^3 M_T$ soit $g(r) = -G \frac{M_T}{R_T^2} \frac{r}{R_T}$

Si $r > R_T$ $M_{int} = M_T$ donc $g(r) = -G \frac{M_T}{r^2}$

alors $\vec{g}(r) = -G \frac{M_T}{r^2} \vec{u}_n$



3) Lancement d'un satellite artificiel

3.1) Système: Terre-Satellite

Actions Mécaniques: force de gravitation: \vec{g} appliqué, r distance au centre de la Terre.

$r = R_T + z$

en sphériques, $\vec{F}(r) = -g \frac{M_T m_s}{r^2} \vec{u}_r$

$$\vec{F}(r) = -g \frac{M_T m_s}{(R_T+z)^2} \vec{u}_r = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-g \frac{M_T m_s}{(R_T+z)} \right) \vec{u}_r$$

soit $\vec{F} = -\vec{\nabla} \left(-g \frac{M_T m_s}{R_T+z} \right)$ où $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z$ on confondrons.

Donc \vec{F} dérive d'une énergie potentielle $E_p (\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p)$

$$E_p(z) = -g \frac{M_T m_s}{R_T+z} + C$$

On prend arbitrairement la constante telle que $E_p(z=+\infty) = 0$.

L'énergie mécanique $E_m = E_p + E_c$, avec $E_c = \frac{1}{2} m_s v^2$

Dans le référentiel géocentrique, pour le satellite sur Terre, $v = \Omega R_T \cos \lambda$ d'où l'énergie mécanique initiale en $z=0$:

$$E_m = \frac{1}{2} m_s \Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda - g \frac{M_T m_s}{R_T}$$

3.2) La vitesse de libération est définie par rapport au sol, donc dans le référentiel terrestre. Il faut donc appliquer la composition des vitesses

$$\vec{v}_{\text{gés}} = \Omega R_T \cos \lambda \vec{u}_\theta + v \vec{u}_z$$

où v est la vitesse dans le référentiel

Energie mécanique au décollage

$$E_m = \frac{1}{2} m_s (\Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda + v^2) - g \frac{M_T m_s}{R_T}$$

La vitesse de libération est telle que l'on puisse atteindre $z=+\infty$

(3)

La vitesse minimum est telle que $v=0$ quand $z=+\infty$ (minimum d'énergie pour atteindre $z=+\infty$). Alors $E_m = E_c + E_p = 0$ car $v_0 = 0$ et $E_p(+\infty) = 0$.

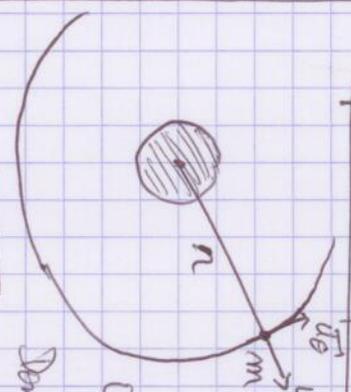
Par conservation de l'énergie mécanique $E_m(z=0) = 0$

où v_0 vitesse de libération: $v_0^2 = 2g \frac{M_T}{R_T} - \Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2gM_T}{R_T} - \Omega^2 R_T^2 \cos^2 \lambda}$$

Rq: la vitesse de libération est indépendante de la masse du satellite.

4) Satellite artificiel en orbite



4.1) Mouvement circulaire autour de la Terre. Dans la base de Frenet

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{u}_r + \frac{dv}{dt} \vec{u}_t$$

$$D_t, m \vec{a} = \vec{F} = m \vec{g} \rightarrow \text{or } \vec{g} = g \vec{u}_r$$

Donc il n'y a pas d'accélération tangentielle

donc $\frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow$ mouvement uniforme

$$\|\vec{a}\| = \frac{v^2}{r} = |g| = \frac{g M_T}{r^2} \text{ d'où } v^2 = \frac{g M_T}{r}$$

Rq: on peut retrouver cela en se plaçant en cylindrique en utilisant l'énergie mécanique (Frenet)

Période: $v T = 2\pi r \rightarrow v^2 T^2 = 4\pi^2 r^2 \Rightarrow \frac{g M_T}{r} T^2 = 4\pi^2 r^2$

soit $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g M_T}$

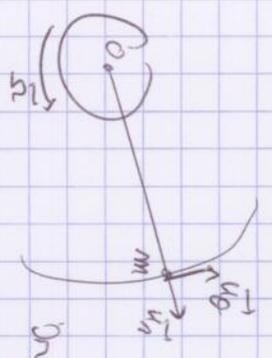
On retrouve la 3^e loi de Kepler.

(4)

4.2) Orbite géostationnaire

Def: Le satellite ^{sat} muvchibi dans le référentiel terrestre

(5)



Sort R_g le rayon de l'orbite géostationnaire

(≠ altitude), on a $\vec{v} = \Omega R_g \vec{u}_\theta$

$r, a = v^2 = \frac{g R^2}{r^2}$, d'où $r^3 = \frac{g R^2}{\Omega^2}$

Sort $R_{geo} = \left(\frac{g R^2}{\Omega^2} \right)^{1/3}$

AN: $R_{geo} = 42\,230 \text{ km}$

Sort $h = 37\,850 \text{ km}$

4.3) $E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{g R^2 m}{r} = \frac{1}{2} m \frac{g R^2}{R_{geo}^2} - \frac{g R^2 m}{R_{geo}}$

$E_m = -\frac{1}{2} \frac{g R^2 m}{R_{geo}}$

On communique par parallaxe au satellite: $E_m \rightarrow E'_m = E_m + \Delta E_c$
 On change E'_m $r \rightarrow r_0$, $E'_m > 0$ cas limite $E'_m = 0 = E_m + \Delta E_c$

Sort $\Delta E_c = \frac{1}{2} \frac{g R^2 m}{R_{geo}}$

AN: $\Delta E_c = 33.10^3 \text{ J}$

4.4) $E_m = E_{m0} (1+bt)$

ici le satellite s'en orbite donc $E_{m0} < 0$

$E_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{g R^2 m}{r} = E_{m0} (1+bt)$

Orbite circulaire: $E_{m0} = -\frac{1}{2} \frac{g R^2 m}{R}$ $\rightarrow v^2 = \frac{g R}{R}$

Sort $E_{m0} (1+bt) = -\frac{1}{2} \frac{g R^2 m}{R(t)}$

Sort

$r(t) = -\frac{1}{2} \frac{g R^2 m}{E_{m0} (1+bt)}$

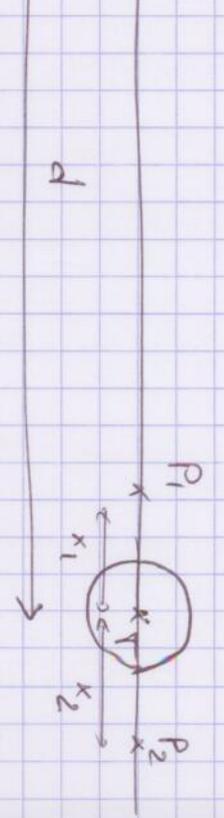
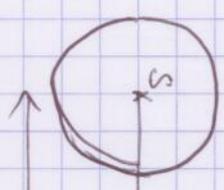
$v(t) = \int \frac{-2 E_{m0} (1+bt)}{m}$

(6)

Donc $r(t) \rightarrow$ mais $v(t) \rightarrow$ ($E_c = -\frac{1}{2} E_0$)

L'énergie perdue est dissipée par frottements.

5/ Sonda solaire



On se place dans le référentiel géocentrique. Le dernier n'est pas forcément si fait sans compte des pôles d'inertie.

Bien des actions mécaniques sur P:

- force d'inertie d'entraînement
- force gravitationnelle du Soleil
- force gravitationnelle de la Terre

La force d'inertie d'entraînement de Coriolis est nulle si \vec{P} est immobile.

$\vec{\Omega} \times \vec{r}_S =$ vitesse angulaire de la Terre dans le référentiel géocentrique (RR).

Dans RR, \vec{P} est immobile: $\sum \vec{F} = \vec{0}$ sort

$\vec{0} = \vec{F}_e + \vec{F}_{S \rightarrow P} + \vec{F}_{T \rightarrow P}$

$\vec{F}_e = -m \vec{a}_e = + m \Omega_T^2 \vec{SP}$
 $\vec{F}_{S \rightarrow P} = -\frac{g_{SM} m}{r^2} \vec{SP}$
 $\vec{F}_{T \rightarrow P} = -\frac{g_{TM} m}{r^2} \vec{TP}$

Cas de P1 : $0 = m \frac{\Omega^2}{r_s} (d-x) - G \frac{M_{\text{em}}}{(d-x)^2} + G \frac{M_{\text{Tm}}}{x^2}$ (2)

3 = loi de Kepler : $\Omega^2 r_s = \frac{G M_{\text{S}}}{d^3}$

d'ou $\frac{G M_{\text{Tm}}}{x^2} - \frac{G M_{\text{em}}}{(d-x)^2} + \frac{G M_{\text{S}}}{d^3} (d-x) = 0$

$\rightarrow \frac{1}{k x^2} - \frac{1}{(d-x)^2} + \frac{d-x}{d^3} = 0$

DL : $-\frac{1}{d^2} (1 + \frac{2x}{d}) + \frac{1}{k x^2} + \frac{d-x}{d^3} = 0 \Leftrightarrow -\frac{3x^3}{d^3} + \frac{1}{k} = 0$

d'ou $x_1 = \left(\frac{1}{3k}\right)^{1/3} d$

AN : $d = 150 \text{ Tkm} = 150 \cdot 10^6 \text{ km}$
 $x_1 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ km}$

Cas de R2 : $0 = m \Omega^2 r_s (d+x) - \frac{G M_{\text{em}}}{(d+x)^2} - \frac{G M_{\text{Tm}}}{x^2}$

ou $x_e = \left(\frac{1}{3k}\right)^{1/3} d$

P2 est le symétrique de P1 par rapport à la Terre

5.2) Arrangement des points de Lagrange :

Il y a 5 points de Lagrange, mais on peut montrer que ce sont des positions d'équilibre instables. Mais cela permet à un satellite de rester immobile en dépassant un minimum d'énergie pour maintenir sa position.

Rq : Il existe 5 points de Lagrange pour un système binaire dont 2 sont des positions d'équilibre stable.

ex : Sonde Soho en L1 \rightarrow étudier le soleil

Sonde Rap en L2 \rightarrow Microsonde Amisheky Probe (température de l'univers)

Interactions TERRE-LUNE: le phénomène de marées (extraire Ayeg B 1984)

1) Loi de gravitation universelle $\Rightarrow \vec{g} = -\gamma \frac{m_L}{d^2} \vec{u}_P$

2) Potentiel de gravitation ϕ tel que $\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi \Rightarrow \phi = -\gamma \frac{m_L}{d}$

3) LP = $\sqrt{(\vec{g} - c\vec{t})^2} = (\eta^2 + d^2 - 2\eta d \cos\theta)^{1/2}$

4) $d \gg \eta \Rightarrow LP = d \left(1 + \frac{2\eta}{d} \cos\theta - \frac{2\eta^2}{d^2} \cos^2\theta \right)^{1/2}$

Developpement à l'ordre 2: $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2$

Donc LP $\approx d \left(1 + \frac{2}{d} \left(\frac{\eta}{d} \right) \cos\theta - \frac{1}{d} \left(\frac{\eta}{d} \right)^2 \cos^2\theta \right)$

LP $\approx d \left(1 - \left(\frac{\eta}{d} \right) \cos\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{d} \right)^2 \sin^2\theta \right)$

Soit LP $\approx \frac{1}{d} \left(1 - \left(\frac{\eta}{d} \right) \cos\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{d} \right)^2 \sin^2\theta \right)^{-1}$

$\approx \frac{1}{d} \left(1 + \left(\frac{\eta}{d} \right) \cos\theta + \left(\frac{\eta^2}{d^2} \cos^2\theta - \frac{1}{2} (1 - \cos^2\theta) \right) \right)$

$\approx \frac{1}{d} \left(1 + \left(\frac{\eta}{d} \right) \cos\theta + \frac{1}{2} \left(\frac{\eta}{d} \right)^2 (3\cos^2\theta - 1) \right)$

$\phi = -\gamma \frac{m_L}{d} - \gamma \frac{m_L^2}{d^2} \cos\theta + \gamma \frac{m_L}{2d^3} \eta^2 (1 - 3\cos^2\theta)$

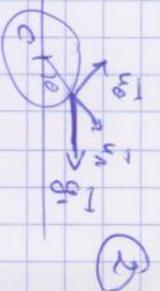
soit $a(\theta) = \phi_0 \cos\theta$; $b(\theta) = -\frac{\phi_0}{2} (1 - 3\cos^2\theta)$

avec $\phi_0 = -\gamma \frac{m_L}{d}$

5) $\vec{g}_1 = -\vec{\nabla} (a(\theta) \frac{\eta}{d}) = -\frac{\partial(a(\theta) \frac{\eta}{d})}{\partial r} \vec{u}_r$

$-\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (a(\theta) \frac{\eta}{d}) \right) \vec{u}_\theta$

$\vec{g}_1 = \gamma \frac{m_L}{d^2} \cos\theta \vec{u}_r - \gamma \frac{m_L}{d^2} \sin\theta \vec{u}_\theta$



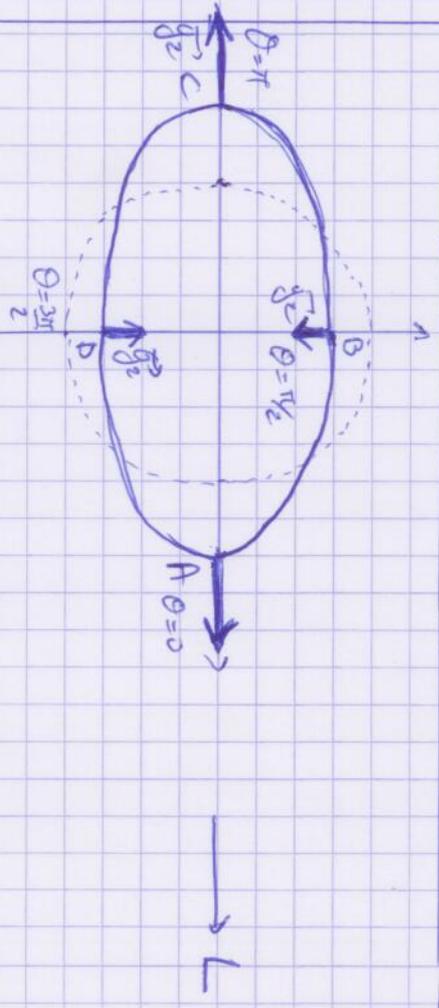
\vec{g}_1 est un vecteur de norme $\gamma \frac{m_L}{d^2}$, passe par le pôle de $c\vec{t}$.

Interprétation physique:

\vec{g}_1 est le champ de pesanteur moyen créé par la lune (le champ crée en C).

6) De même, on a $\vec{g}_2 = -\vec{\nabla} (b(\theta) \frac{\eta^2}{d^2})$ soit

$\vec{g}_2 = -\gamma \frac{m_L}{d^3} \eta (1 - 3\cos^2\theta) \vec{u}_r - \gamma \frac{m_L}{d^3} \eta 3\cos\theta \sin\theta \vec{u}_\theta$



On a: $\|\vec{g}_2(C)\| = \|\vec{g}_2(A)\| = 2\|\vec{g}_2(B)\| = 2\|\vec{g}_2(D)\|$

Les champs $\vec{g}_2(A)$ et $\vec{g}_2(C)$ produisent un gonflement de la surface des océans (marées hautes); les champs $\vec{g}_2(B)$ et $\vec{g}_2(D)$ tendent à abaisser le niveau des océans (marées basses);

La Terre fait un tour sur elle-même en un jour, un point de la Terre se trouve en position A, puis C chaque jour.

\Rightarrow deux marées hautes par jour.

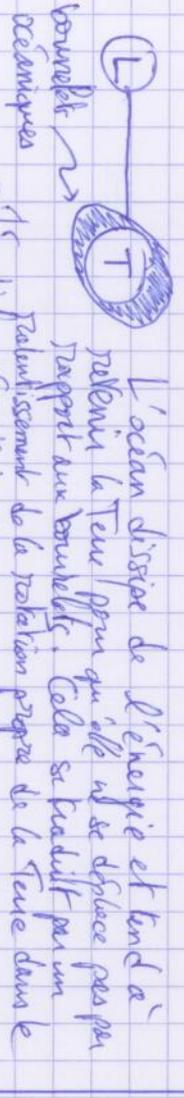
idem pour B et D \Rightarrow deux marées basses par jour.

3) Q6 Il faudrait en toute rigueur tenir compte du frottement des fluides et de l'inertie des masses d'eau qui tendent à ralentir la rotation de la Terre, ainsi que de l'interaction Terre-Soleil.

Un alignement Terre-Lune-Soleil produit des grandes marées (le Soleil renforce l'effet de la Lune).
 Soit la Lune, la Terre et le Soleil sont à 90° les effets s'annulent, partiellement, et on a de petites marées.
 (3) Q7



7) La Terre s'appuie sur frottements fluides au mouvement relatif de l'océan en rapport à elle.
 Le mouvement des boucles océaniques qui suivent en premier approximation l'axe Terre-Lune, avec un léger angle θ dû à l'inertie des masses d'eau.



8) Nous avons approximé la Terre comme un solide indéformable mais d'un point vu géophysique la Terre elle-même se déforme sous l'action d'un champ gravitationnel différentiel.
 L'amplitude de cette déformation est de quelques cm.

9) Nous avons approximé la Terre comme un solide indéformable mais d'un point vu géophysique la Terre elle-même se déforme sous l'action d'un champ gravitationnel différentiel.
 L'amplitude de cette déformation est de quelques cm.

Résonance Magnétique Nucléaire

I.

EXTRAIT AGREG B 2010

Notations et données numériques :

Constante de Boltzmann : $k_B = 1.381 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$,

Constante de Planck réduite : $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$,

Charge élémentaire : $e = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$,

Masse du proton : $m_p = 1.673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

PARTIE III

Spectroscopie par résonance magnétique nucléaire

Dans toute la suite, (R_0) désigne le référentiel du laboratoire, assimilé à un référentiel galiléen. (Ox, Oy, Oz) est un système d'axes orthogonaux, fixes dans (R_0) ; la base associée, orthonormée directe, est notée $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

On ne prendra pas en compte l'effet du champ de pesanteur.

Dans (R_0) chaque noyau possède, du fait de son spin, un moment cinétique intrinsèque noté ici $\vec{\sigma}$, et peut être assimilé à un dipôle magnétique de moment magnétique noté \vec{M} .

Pour chaque noyau, les moments cinétiques $\vec{\sigma}$ et magnétique \vec{M} sont liés par la relation $\vec{M} = \gamma\vec{\sigma}$, dans laquelle γ désigne le rapport gyromagnétique du type de noyau étudié.

Les seuls noyaux étudiés dans ce problème sont les noyaux ^1H , constitués d'un unique proton.

Dans ce cas, le rapport gyromagnétique vaut $\gamma = 2.675 \cdot 10^8 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{T}^{-1}$.

III-A Obtention d'un signal RMN dans un circuit d'antenne

On considère un grand nombre N de protons soumis à un champ magnétique intense $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$ supposé uniforme et permanent dans (R_0) .

En l'absence de précision contraire, les interactions entre noyaux ne seront pas prises en compte ; en particuliers, on négligera dans une première approche le champ magnétique qu'ils créent.

III-A.1a) En quoi l'utilisation de bobines supraconductrices permet la création de champs magnétiques très intenses ?

III-A.1b) Quel est l'ordre de grandeur de la valeur maximale de B_0 qu'on produit actuellement dans les appareils de résonance magnétique nucléaire (RMN) ?

III-A.2 Effet gyroscopique

On soumet un proton de moment magnétique $\vec{M} = \gamma\vec{\sigma}$, placé en O , à un champ magnétique uniforme et permanent dans (R_0) : $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$ ($B_0 > 0$).

III-A.2.1) Si on assimile ce dipôle magnétique à une petite boucle fermée de courant, que peut-on dire de la résultante des forces magnétiques subies par ce dipôle ?

III-A.2.2) On rappelle l'expression de l'énergie potentielle du dipôle dans le champ \vec{B}_0 : $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$. En déduire quels doivent être la direction et le sens de \vec{M} pour qu'il y ait équilibre stable.

Dans la suite, la direction de \vec{M} est supposée a priori quelconque.

On rappelle l'expression de moment des actions exercées par un champ magnétique \vec{B} sur un dipôle : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$.

Par ailleurs, le théorème du moment cinétique stipule que

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\Gamma}.$$

III-A.2.3.a) Montrer que $\|\vec{M}\|$ est une constante.

III-A.2.3.b) Montrer que $M_z = \vec{M} \cdot \vec{u}_z$ est une constante.

III-A.2.3.c) En déduire la constante de l'angle θ entre \vec{M} et \vec{B}_0 (θ est compris entre 0 et π).

III-A.2.3.d) Montrer que l'extrémité du vecteur \vec{M} décrit un cercle d'axe Oz , et déterminer le rayon de ce cercle en fonction de $\|\vec{M}\|$ et de l'angle θ .

III-A.2.4) Montrer que le vecteur rotation $\vec{\omega}_0$ associé à la précession de \vec{M} autour du champ \vec{B}_0 (donc au mouvement circulaire introduit ci-dessus) a pour expression littérale : $\vec{\omega}_0 = -\gamma\vec{B}_0$; on pourra, au besoin, écrire le système différentiel vérifié par les deux composantes $M_x = \vec{M} \cdot \vec{u}_x$ et $M_y = \vec{M} \cdot \vec{u}_y$, en déduire, par combinaison, équation différentielle vérifiée par la quantité $\underline{M} = M_x + jM_y$ (avec $j^2 = -1$) et montrer enfin que \underline{M} peut s'écrire sous la forme $Ae^{j(-\omega_0 t + \alpha)}$, A et α étant deux constantes réelles d'intégration (avec $A > 0$).

Dans toute la suite, on posera $\vec{\omega}_0 = -\omega_0\vec{u}_z$, où $\omega_0 = \gamma B_0$ est une constante positive, nommée vitesse angulaire (ou pulsation) de précession.

III-A.2.5) Calculer la valeur de la fréquence de précession des protons $f_0 = \omega_0/2\pi$ lorsque $B_0 = 4.70$ T.

III-A.3 Etude du phénomène d'aimantation paramagnétique associée aux noyaux

On rappelle que la composante σ_z du moment cinétique $\vec{\sigma}$ de spin du proton ne peut prendre que les valeurs $\pm\hbar/2$, \hbar étant la constante de Planck réduite : $\hbar = h/2\pi$.

Cette composante σ_z et la composante M_z du moment magnétique du proton sont liées par la relation : $M_z = \gamma\sigma_z$.

L'étude porte sur un ensemble de protons identiques discernables, d'interactions mutuelles très faibles, soumis au champ $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$ et peuplant, selon la loi statistique de Maxwell-Boltzmann correspondant à la température T , les 2 états correspondant aux deux valeurs possibles de σ_z .

On rappelle à nouveau l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique dans le champ \vec{B}_0 : $E_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0$.

III-A.3.1.) Exprimer l'écart d'énergie entre les deux états de spins ; que remarque-t-on sur la pulsation d'une transition radiative entre ces deux états ?

On note N le nombre **total, très grand**, de protons étudiés, N^+ (respectivement N^-) celui des protons de σ_z égal à $\hbar/2$ (respectivement $-\hbar/2$).

III-A.3.2) Déterminer le quotient N^+/N^- en fonction des quantités B_0 , γ , T , de \hbar , et de la constante de Boltzmann k_B .

III-A.3.3) En déduire les expressions des N^+ et de N^- en fonction de N et de $x' = \beta\gamma\hbar B_0$, avec $\beta = 1/k_B T$. Tester la pertinence de ces deux expressions dans deux cas limites.

Dans toute la suite, \vec{M} désigne la somme des moments magnétiques des N protons, et \vec{M}_0 désigne désormais sa valeur à l'équilibre thermodynamique à la température T , en présence du champ magnétique $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$.

III-A.3.4) Montrer que $\vec{M}_0 = N\gamma\frac{\hbar}{2} \tanh\left(\frac{x'}{2}\right)\vec{u}_z$, où la notation "tanh" désigne la fonction tangente hyperbolique.

III-A.3.5a) On donne $T = 300$ K et $B_0 = 4.70$ T. Evaluer numériquement la quantité x' .

III-A.3.5b) Commenter ce résultat, et en déduire une expression simplifiée de \vec{M}_0 en fonction de N , γ , \hbar , x' et de \vec{u}_z , puis de N , γ , \hbar , B_0 , k_B , T et \vec{u}_z ; on rappelle que, lorsque $|\varepsilon| \ll 1$, $\tanh(\varepsilon) \sim \varepsilon$.

Dans toute la suite, seule cette expression simplifiée de \vec{M}_0 sera utilisée.

III-A.3.6a) Comment \vec{M}_0 dépend-t-il de γ ?

III-A.3.6b) Comment \vec{M}_0 dépend-t-il de B_0 ?

III-A.3.6c) Comment \vec{M}_0 dépend-t-il de la température T ?

III-A.3.6d) Commenter physiquement ces deux dernières réponses.

III-A.3.7) \vec{M}_0 est-il affecté par la précession décrite précédemment - dans la partie "effet gyroscopique" - autour du champ permanent $\vec{B}_0 = B_0\vec{u}_z$? Justifier.

III-A.4. Prise en compte de la relaxation dans l'étude de la résonance magnétique

On note \vec{M}_0 sous la forme $\vec{M}_0 = M_0\vec{u}_z$.

Partant de l'équilibre thermodynamique précédent, et grâce à une impulsion qui sera étudiée dans la partie III-C, on fait "basculer" rapidement le moment total \vec{M} sur une direction du plan xOy ; on admet que, lors de ce basculement, la norme de \vec{M} est conservée.

On suppose pour simplifier l'étude ultérieure, qu'à la date $t = 0$, **juste après l'impulsion**, le moment \vec{M} vaut : $\vec{M}(t = 0) = -M_0\vec{u}_y$, valeur qu'on veillera à ne pas confondre avec $\vec{M}_0 = M_0\vec{u}_z$.

Lorsque $\vec{M}(t)$ diffère, à un instant t , de la valeur d'équilibre $\vec{M}_0 = M_0\vec{u}_z$, $\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{R_0}$ est la somme de deux contributions :

- l'une déjà mentionnée qui vaut, après l'impulsion, $\omega_0 \wedge \vec{M}$ avec $\vec{\omega}_0 = -\gamma\vec{B}_0 = -\omega_0\vec{u}_z$;
- l'autre, due aux phénomènes de relaxation, dont l'expression est :

$$\frac{\vec{M}_0 - M_z\vec{u}_z}{T_1} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2},$$

$M_z\vec{u}_z$ et \vec{M}_\perp représentent ici les composantes de \vec{M} respectivement parallèle et orthogonale à l'axe Oz , tandis que T_1 et T_2 désignent les constantes de temps des relaxations respectivement longitudinale et transversale.

III-A.4.1) Ecrire l'équation différentielle vérifiée par $M_z(t)$.

III-A.4.2) Résoudre cette équation différentielle, sachant qu'à la date $t = 0$, juste après l'impulsion, le moment \vec{M} vaut : $-M_0\vec{u}_y$.

III-A.4.3) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la composante \vec{M}_\perp s'écrit :

$$\left(\frac{d\vec{M}_\perp}{dt}\right)_{R_0} = -\left(\omega_0\vec{u}_z \wedge \vec{M}_\perp\right) - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}.$$

III-A.4.4) On pose : $\vec{M}_1 = \vec{M}_\perp(t)e^{+t/T_2}$. Montrer que

$$\left(\frac{d\vec{M}_1}{dt}\right)_{R_0} = -\left(\omega_0\vec{u}_z \wedge \vec{M}_1\right).$$

III-A.4.5a) Ecrire le système différentiel vérifié par les deux composantes $M_{1x} = \vec{M}_1 \cdot \vec{u}_x$ et $M_{1y} = \vec{M}_1 \cdot \vec{u}_y$.

III-A.4.5b) En déduire, par combinaison, l'équation différentielle vérifiée par la quantité $\underline{M}_1 = M_{1x} + jM_{1y}$ (avec $j^2 = -1$).

III-A.4.5c) En tenant compte des conditions initiales, montrer que $\underline{M}_1 = -jM_0e^{j(-\omega_0 t)}$.

III-A.4.5d) En déduire M_1 et montrer que $M_x = -M_0 \sin(\omega_0 t) e^{-t/T_2}$.

On suppose que tous les protons de l'échantillon étudié se trouvent sur l'axe d'une bobine (souvent nommée "antenne") fixe dans (R_0) . L'axe orienté de la bobine est supposé confondu avec l'axe Ox . Cette bobine est un des éléments d'un circuit série (dit "de détection"), également fixe dans (R_0) , et dont l'étude est détaillée plus loin, à la question III-A.5).

On admet que, dans ces conditions, le flux du champ magnétique créé par les N protons à travers l'ensemble des spires orientées de la bobine est donné par la relation : $\Phi_{\text{prot} \rightarrow \text{bob}} = k \cdot M_x$, dans laquelle k est une constante positive dont la valeur ne dépend que de la géométrie de l'échantillon étudié, de celle de la bobine, et de leur disposition relative.

Dans toute la suite, la constante k est supposée connue.

III-A.4.6) On admet que les dimensions du circuit de détection sont inférieures au décimètre. La fréquence de précession f_0 étant voisine de 200 MHz, les conditions de validité de l'approximation des états quasi-stationnaire sont-elles remplies pour ce circuit ?

III-A.4.7) On rappelle que $M_x = -M_0 \sin(\omega_0 t) e^{-t/T_2}$. Du fait de la variation de M_x au cours du temps, $\Phi_{\text{prot} \rightarrow \text{bob}} = k \cdot M_x$ dépend du temps et une force électromotrice apparaît dans le circuit orienté de la bobine. A quel phénomène physique correspond cette force électromotrice, notée $e(t)$ dans la suite ?

III-A.4.8) Déterminer $e(t)$ en fonction de k , M_0 , ω_0 , T_2 et de t .

En pratique, $f_0 = \omega_0/2\pi$ est de l'ordre de la centaine de mégahertz, et T_2 est de l'ordre de la seconde.

III-A.4.9) Montrer que dans ces conditions, on peut considérer que $e(t)$ obéit à la relation

$$e(t) = kM_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) e^{-t/T_2};$$

cette relation sera retenue dans toute la suite.

III-A.4.10)a) Dédurre de ce résultat, en remplaçant ω_0 par sa valeur et M_0 par son expression simplifiée trouvée à la question III-A.3.5., la façon dont l'amplitude de $e(t)$ dépend de la valeur de B_0 et de celle de γ .

III-A.4.10)b) Quel est l'intérêt d'opérer avec des valeurs importantes de B_0 ?

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International" license.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

Résonance Magnétique Nucléaire

I.

EXTRAIT AGREG B 2010

PARTIE III

Spectroscopie par résonance magnétique nucléaire

III-A Obtention d'un signal RMN dans un circuit d'antenne

III-A.1)a) Bobines supraconductrices : résistance "nulle" et donc permettent d'utiliser des courants plus fort, *i.e.* des champs magnétiques plus élevés.

III-A.1)b) Pour les RMN médicales, les champs sont de l'ordre du Tesla.

III-A.2 Effet gyroscopique

III-A.2.1) Par symétrie, la résultante des forces de Laplace est nulle.

III-A.2.2) L'équilibre est stable si E_p est minimal, *i.e.* \vec{M} est aligné avec \vec{B}_0 .

III-A.2.3)a) Si $|\vec{M}| = C^{\text{te}}$, alors

$$\frac{d|\vec{M}|}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d|\vec{M}|^2}{dt} = 0 \Leftrightarrow \vec{M} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = 0.$$

Or

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \gamma \vec{\Gamma} = \gamma \vec{M} \times \vec{B},$$

donc

$$\vec{M} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \cdot (\vec{M} \times \vec{B}) = 0.$$

Donc $\frac{d|\vec{M}|}{dt} = 0$, et donc $|\vec{M}|$ est une constante du mouvement.

III-A.2.3)b)

$$\frac{dM_z}{dt} = \vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{u}_z \cdot \vec{\Gamma} = \gamma \vec{u}_z \cdot (\vec{M} \times \vec{B}) = 0.$$

Donc

$$\boxed{\frac{dM_z}{dt} = 0}.$$

III-A.2.3)c) On a $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = |\vec{M}| B_0 \cos \theta$. Donc, étant donné que $|\vec{M}|$ et B_0 sont constants, on a

$$\frac{d(\vec{M} \cdot \vec{B}_0)}{dt} = |\vec{M}| B_0 \frac{d(\cos \theta)}{dt}.$$

Or, $\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = B_0 M_z$ et M_z est une constante du mouvement. On en déduit que

$$\frac{d \cos \theta}{dt} = 0.$$

D'où, θ est constant au cours du temps.

III-A.2.3)d) On considère le point décrit par le vecteur \vec{M} . $|\vec{M}|$ est constant, donc ce point se trouve sur une sphère de rayon $|\vec{M}|$. M_z est constant : ce point se trouve donc également sur un plan perpendiculaire à \vec{u}_z , distant de M_z à O . Ces deux surfaces ont un domaine commun formé par un cercle. Géométriquement, le rayon de ce cercle est

$$\boxed{r = |\vec{M}| \sin \theta}.$$

III-A.2.4) On pose $\underline{M} = M_x + jM_y$. Les équation du mouvement sont

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \times \vec{B}_0,$$

soit, en projection sur x et y ,

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma B_0 M_y \quad \text{et} \quad \frac{dM_y}{dt} = -\gamma B_0 M_x.$$

On obtient alors

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = -j\gamma B_0 \vec{M},$$

que l'on résout pour obtenir $\vec{M}(t) = A e^{j(\gamma B_0 t + \alpha)}$. Avec les notations de l'énoncé, cela devient

$$\vec{M}(t) = A e^{j(-\omega_0 t + \alpha)},$$

avec A et α des constantes d'intégration. Interprétation : on a une précession de \vec{M} à la pulsation ω_0 .

III-A.2.5)

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{\gamma B_0}{2\pi} = 200 \text{ MHz.}$$

III-A.3 Etude du phénomène d'aimantation paramagnétique associée aux noyaux

III-A.3.1)

$$\Delta E = +\frac{\hbar}{2}\gamma B_0 - \left(-\frac{\hbar}{2}\gamma B_0\right) = \hbar\gamma B_0 = \hbar\omega_0.$$

La pulsation de la transition radiative correspond à la pulsation de Larmor.

III-A.3.2) Loi statistique de Boltzmann : à l'équilibre thermique à T , la probabilité d'être dans un état d'énergie E est proportionnel à $e^{-\beta E}$ avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Donc

$$N^+ = A \exp\left(+\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right) \text{ et } N^- = A \exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right),$$

d'où

$$\frac{N^+}{N^-} = \exp\left(\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}\right).$$

Cas limites :

- $T \rightarrow 0 \text{ K}$, tous les spins s'alignent, $\frac{N^+}{N^-} \rightarrow +\infty$,
- $T \rightarrow +\infty$, mélange équiprobable, $\frac{N^+}{N^-} \rightarrow 1$,

III-A.3.4) A l'équilibre thermodynamique, la statistique de Maxwell-Boltzmann s'applique. On a

$$N = N^+ + N^- = A \left(\exp\left(+\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right) + \exp\left(-\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right) \right) = 2A \cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right).$$

Donc

$$A = \frac{N}{2 \cosh\left(\frac{\beta\hbar\omega_0}{2}\right)}.$$

Or, $\vec{M} = N^+ \left(+\frac{\hbar}{2}\gamma\vec{u}_z\right) + N^- \left(-\frac{\hbar}{2}\gamma\vec{u}_z\right)$. En utilisant les expressions de A , N^+ et N^- , on obtient

$$\vec{M} = N\gamma\frac{\hbar}{2} \tanh\left(\frac{x'}{2}\right) \vec{u}_z \text{ avec } x' = \beta\hbar\omega_0.$$

III-A.3.5)a)

$$x' = 2 \cdot 10^{-4} \ll 1.$$

III-A.3.5)b) On peut faire un DL $\tanh(x'/2) \approx x'/2$ soit

$$\vec{M}_0 = N\gamma\frac{\hbar^2\omega_0}{4k_B T} \vec{u}_z.$$

III-A.3.6) On a $M_0 \propto \gamma^2$, $M_0 \propto B_0$ et $M_0 \propto 1/T$. On aura une aimantation importante pour un champ important, et une faible température. On a une compétition entre l'énergie thermique et l'énergie d'aimantation. L'aimantation est proportionnelle au champ, c'est une substance paramagnétique.

III-A.3.7) Non, à l'équilibre, \vec{M}_0 est aligné avec \vec{B}_0 donc ne précesse pas.

III-A.4. Prise en compte de la relaxation dans l'étude de la résonance magnétique

III-A.4.1) Appliquons le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{\omega}_0 \times \vec{M} + \frac{\vec{M}_0 - M_z \vec{u}_z}{T_1} - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}, \quad (1)$$

qui donne, projeté sur \vec{u}_z ,

$$\boxed{\frac{dM_z}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T_1}}$$

III-A.4.2) On a

$$\frac{dM_z}{dt} + \frac{M_z}{T_1} = \frac{M_0}{T_1},$$

soit $M_z(t) = M_0 + A \exp(-t/T_1)$. En tenant compte de $M_z(t=0) = 0$, donc

$$\boxed{M_z(t) = M_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right)}$$

III-A.4.3) On pose $\vec{M} = M_z \vec{u}_z + \vec{M}_\perp$. Injecté dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} + \frac{dM_z}{dt} \vec{u}_z = \vec{\omega}_0 \times \vec{M} + \frac{M_0 - M_z}{T_1} \vec{u}_z - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}.$$

Or,

$$\frac{dM_z}{dt} \vec{u}_z = \frac{M_0 - M_z}{T_1} \vec{u}_z,$$

donc on obtient immédiatement

$$\boxed{\frac{d\vec{M}_\perp}{dt} = -\left(\omega_0 \vec{u}_z \times \vec{M}_\perp\right) - \frac{\vec{M}_\perp}{T_2}}$$

III-A.4.4) On a $\vec{M}_1 = \vec{M}_\perp e^{t/T_2}$, et donc

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}_1}{dt} &= \left(\frac{d\vec{M}_\perp}{dt}\right) e^{t/T_2} + \frac{\vec{M}_1}{T_2}, \\ &= -\omega_0 \vec{u}_z \times \vec{M}_\perp e^{t/T_2}. \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{\frac{d\vec{M}_1}{dt} = -\omega_0 \vec{u}_z \times \vec{M}_1}$$

III-A.4.5) De manière similaire à III-A.2.4), on obtient

$$\frac{dM_{1x}}{dt} = \omega_0 M_{1y} \quad \text{et} \quad \frac{dM_{1y}}{dt} = -\omega_0 M_{1x},$$

soit

$$\boxed{\frac{dM_1}{dt} = -j\omega_0 M_1}$$

III-A.4.5)c) On obtient immédiatement $M_1 = A e^{-j\omega_0 t + j\varphi}$, où A et φ sont des constantes d'intégration. Conditions initiales : $M_1(t=0) = -jM_0$ (car $M_x = 0$ et $M_y = -M_0$). Donc, finalement, on obtient

$$\boxed{M_1(t) = -jM_0 e^{-j\omega_0 t}}$$

III-A.4.5)d) On a $M_x = e^{-t/T_2} \text{Re}(M_1(t))$ soit

$$\boxed{M_x(t) = -M_0 \sin(\omega_0 t) e^{-t/T_2}}$$

III-A.4.6) Cf. Electromagnétisme: dans l'ARQS, on néglige le temps de propagation. En pratique, $\lambda \gg D$, où D est la taille caractéristique du circuit. A des fréquences de l'ordre de 200 MHz, $\lambda = c/\nu \sim 1.5 \text{ m} \gg$ quelques dizaines de cm \Rightarrow OK!

III-A.4.7) Phénomène d'induction électromagnétique.

III-A.4.8) On a la loi de Faraday

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = -k\frac{dM_x}{dt},$$

d'où

$$e(t) = +kM_0\omega_0 e^{-t/T_2} \left(\cos \omega_0 t - \underbrace{\frac{1}{\omega_0 T_2} \sin \omega_0 t}_{\text{2nd terme}} \right).$$

III-A.4.9) On a $\omega_0 T_2 \sim 6 \cdot 10^8 \gg 1$, donc on peut négliger le second terme ;
d'où

$$e(t) \approx kM_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) e^{-t/T_2}.$$

III-A.4.10)a)

$$e(t) \approx kN\gamma^3 \frac{\hbar^2 B_0^2}{4k_B T} \cos(\gamma B_0 t) e^{-t/T_2}.$$

III-A.4.10)b) Signal quadratique avec B_0 + pas d'effets de champs magnétiques parasites.

This work is licensed under a Creative Commons "Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International" license.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.fr>

Quelques notions sur la RMN

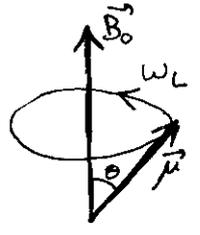
I) Approche classique chaque noyau possède un moment magnétique associé à son spin nucléaire.

1) Généralités moment de spin nucléaire (cinétique) \vec{I} avec $\boxed{\vec{\mu} = \gamma \vec{I}}$
 où $\vec{\mu}$ est le moment magnétique
 et γ est le rapport gyromagnétique

Si ce moment magnétique est plongé dans \vec{B}_0 statique : TMC dans R galiléen

$\left(\frac{d\vec{L}(G)}{dt}\right)_R = \vec{\mu} \wedge \vec{B}_0$ où G est le centre de masse de $\vec{\mu}$. Alors on obtient immédiatement $\boxed{\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\right)_R = \vec{\omega}_L \wedge \vec{\mu}}$
 où $\boxed{\vec{\omega}_L = -\gamma \vec{B}_0}$

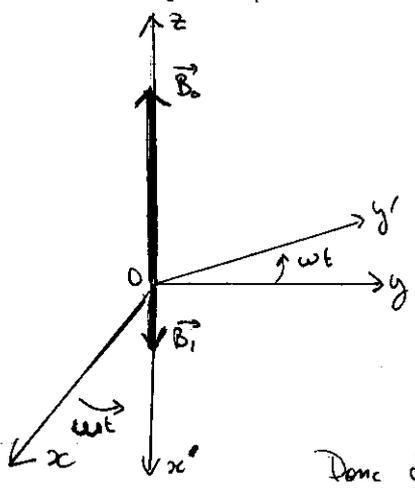
→ Mouvement de précession à la pulsation de Larmor $\vec{\omega}_L$ autour de \vec{B}_0 .



en effet : $\vec{\mu} \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\|\vec{\mu}\| = \text{cte}}$
 si $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_z$; $\vec{u}_z \cdot \frac{d\vec{\mu}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\mu_z = \text{cte}} \Rightarrow \boxed{\theta = \text{cte}}$

Dans le cas de ^1H : $\boxed{\frac{\gamma}{2\pi} = 42,58 \text{ MHz/T}}$

On ajoute désormais un champ \vec{B}_1 oscillant à ω autour de \vec{B}_0 , et transverse à ce dernier. Dans R galiléen, on a :



$\left(\frac{d\vec{L}(G)}{dt}\right)_R = \vec{\mu} \wedge (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) = -\gamma (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \wedge \vec{L}(G)$.

On définit R' de repère $(0; x'; y'; z')$ le référentiel tournant à ω selon l'axe z défini par \vec{B}_0 . Dans R' , \vec{B}_0 et \vec{B}_1 sont stationnaires. On choisit $\vec{u}_{x'}$ tel que $\vec{B}_1 = B_1 \vec{u}_{x'}$.

Cinématique : $\forall \vec{V}$ vecteur, $\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_R + \vec{V} \wedge \vec{\omega}$

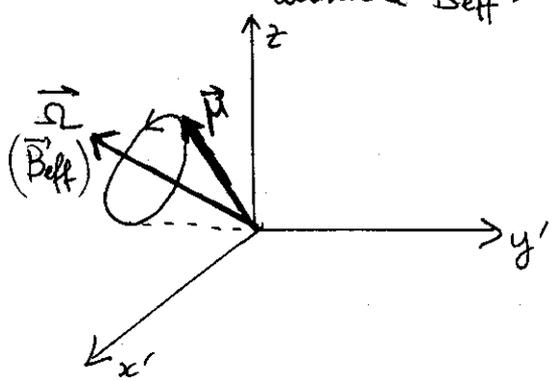
Donc $\left(\frac{d\vec{L}(G)}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\vec{L}(G)}{dt}\right)_R + \vec{L}(G) \wedge \vec{\omega} = -\gamma (\vec{B}_0 + \vec{B}_1) \wedge \vec{L}(G) - \vec{\omega} \wedge \vec{L}(G)$

Donc dans R' , pour $\vec{\mu} = \gamma \vec{L}(G)$, $\boxed{\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\right)_{R'} = -(\gamma \vec{B}_0 + \gamma \vec{B}_1 + \vec{\omega}) \wedge \vec{\mu}}$ dans R'

et \vec{B}_1 est constant dans R' .

On pose $\boxed{\vec{\Omega} = -(\gamma \vec{B}_0 + \gamma \vec{B}_1 + \vec{\omega}) = \vec{\omega}_L + \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}}$ avec $\begin{cases} \vec{\omega}_L = -\gamma \vec{B}_0 \\ \vec{\omega}_1 = -\gamma \vec{B}_1 \end{cases}$

$\left(\frac{d\vec{\mu}}{dt}\right)_{R'} = \vec{\Omega} \wedge \vec{\mu} \rightarrow$ précession à $\vec{\Omega}$. Ainsi, dans le référentiel tournant, tout se passe comme si on avait un champ statique \vec{B}_{eff} et donc une précession à $\vec{\Omega}$ autour de \vec{B}_{eff} .



CHAMP EFFECTIF DANS LE RÉFÉRENTIEL TOURNANT

$\boxed{\vec{B}_{\text{eff}} = \frac{(\omega_L - \omega)}{-\gamma} \vec{u}_z + \frac{\omega_1}{-\gamma} \vec{u}_{x'}}$

Précession (dans R') autour de \vec{B}_{eff} à Ω .

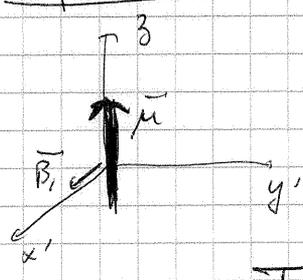
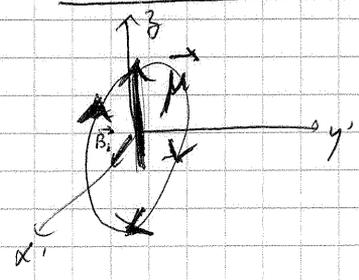
$\Omega = \sqrt{(\omega_L - \omega)^2 + \omega_1^2}$

Conclusion : en choisissant correctement le temps d'interaction avec le champ oscillant, ainsi que sa fréquence, on peut manipuler $\vec{\mu}$, et sa direction.

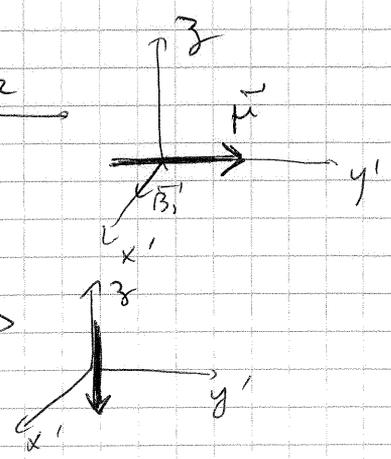
ex : si la résonance est satisfaite : $\omega = \omega_L$, alors $\vec{B}_{eff} = B_1 \vec{u}_x'$

Précession autour de \vec{u}_x'

Impulsion $\pi/2, \pi$ rotation de $\pi/2, \pi$



$T_{\pi/2}$



T_{π}

Rq : - Nul besoin pour B_1 d'être important pour basculer les spins.

- la durée d'une impulsion $T_{\pi/2}, T_{\pi}$ dépend de ω , ie de l'amplitude de B_1

2/ Relaxation

Description empirique de la relaxation : moment magnétique dans un champ \vec{B}_0 statique :

~~La relaxation~~ La relaxation tend à aligner $\vec{\mu}$ avec \vec{B}_0 , énergétiquement favorable ($E_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$)

On note $\vec{\mu}_0$ l'aimantation à l'équilibre (dirigée selon \vec{B}_0)

On note $\vec{\mu}_{\parallel}$ l'aimantation longitudinale (selon \vec{B}_0) et $\vec{\mu}_{\perp}$ l'aimantation transverse (\perp à \vec{B}_0)

On a alors :

$$\frac{d\vec{\mu}_{\parallel}}{dt} = -\frac{1}{T_1} (\vec{\mu}_{\parallel} - \vec{\mu}_0)$$

temps T_1

$$\frac{d\vec{\mu}_{\perp}}{dt} = -\frac{1}{T_2} \vec{\mu}_{\perp}$$

temps T_2

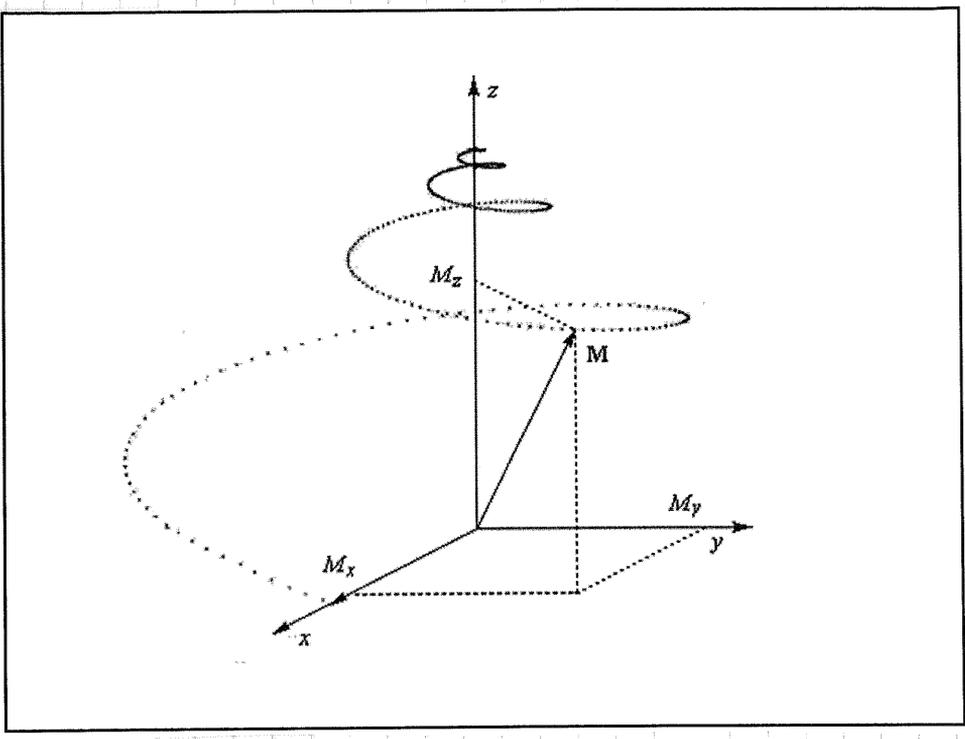
Pour un champ \vec{B}_0 qui ne serait pas parfaitement homogène dans l'épave, la relaxation de $\vec{\mu}_{\perp}$ est plus rapide \rightarrow on introduit $T_2^* < T_2$ selon

$$\frac{d\vec{\mu}_{\perp}}{dt} = -\frac{1}{T_2^*} \vec{\mu}_{\perp}$$

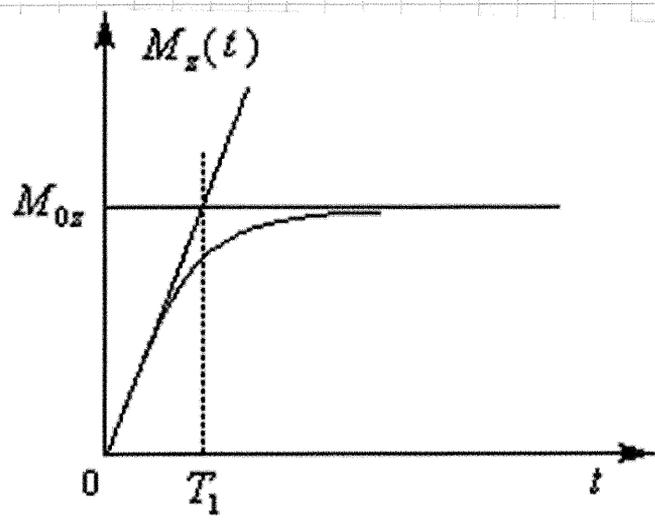
qui tient compte de ces inhomogénéités.

Rq : on raisonne désormais sur la valeur moyenne de $\vec{\mu}$ sur un ensemble de moments magnétiques

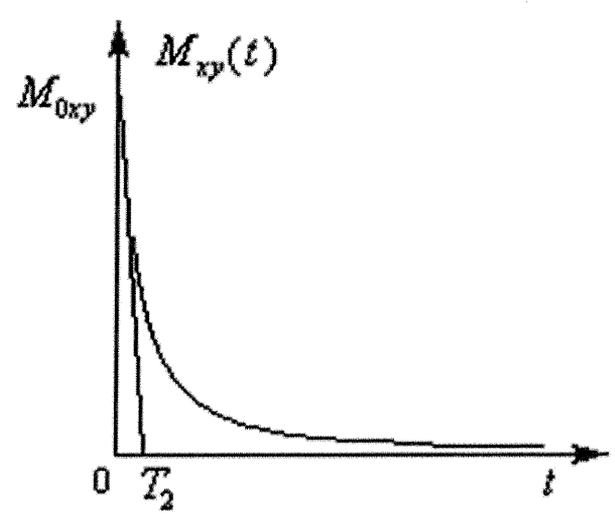
Ex: Si après une impulsion $\pi/2$ le spin est préparé selon Ox par exemple, on a une relaxation du spin sous forme de spirale dans R le référentiel du laboratoire (le spin précesse toujours autour de Oz):



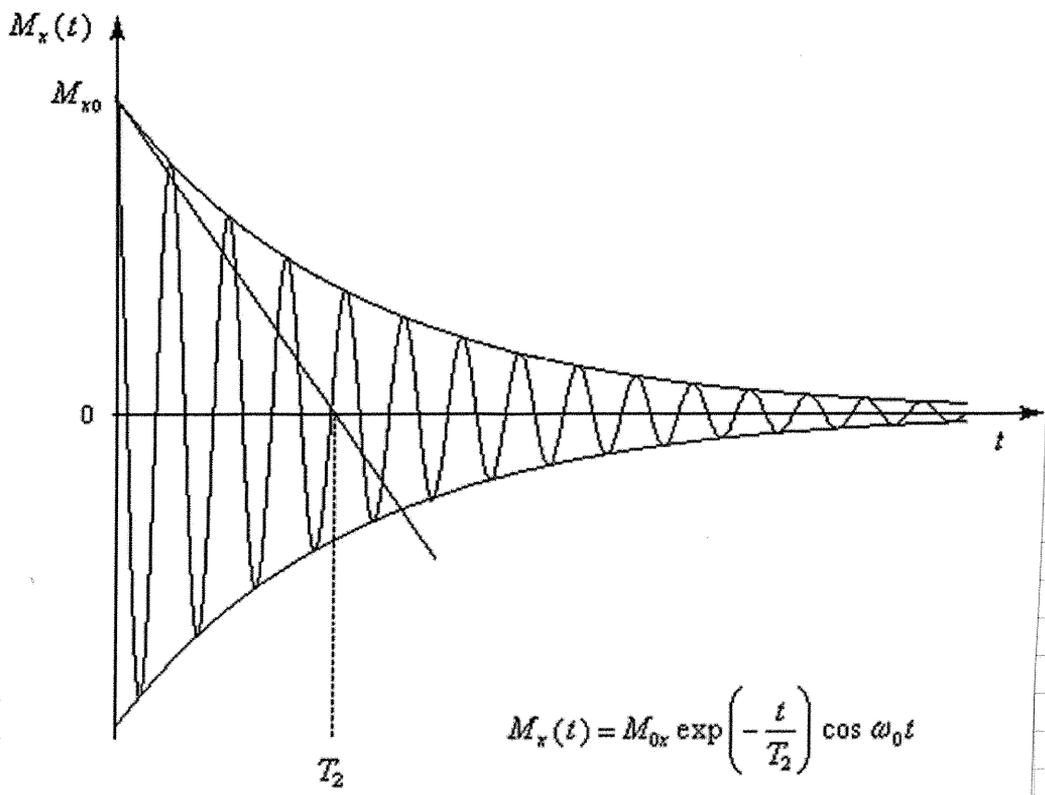
en même temps, μ_{\perp} subit une décroissance exponentielle. Cependant, dans le référentiel R initial, il continue de précesser à ω_L . On a donc les caractéristiques suivantes:



$$M_z(t) = M_{0z} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_1}\right) \right]$$

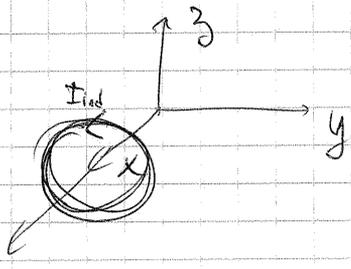


$$M_{xy}(t) = M_{0xy} \exp\left(-\frac{t}{T_2}\right)$$



3/ Signal FID - Signal intégré

Si on place une petite bobine sur l'axe Ox cette dernière va voir un champ oscillant généré par la rotation de $\vec{\mu}$ durant la relaxation, et induire un courant dans la bobine. On peut montrer que ce courant est proportionnel à la dérivée de M_x .



De plus, en pratique $T_2 \gg \frac{1}{\omega_0}$ donc $\frac{\partial M_x}{\partial t} \approx -M_{0x} \exp(-\frac{t}{T_2}) \omega_0 \sin \omega_0 t$.

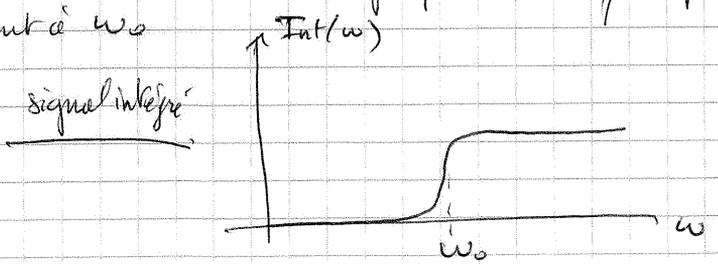
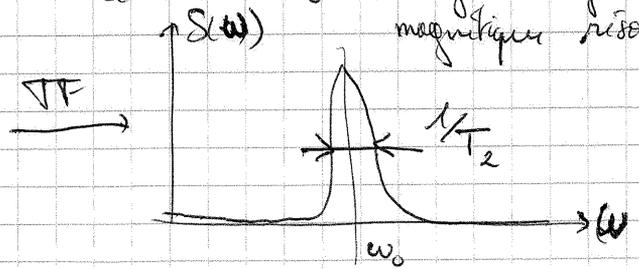
Donc on aura un signal sur la bobine de la forme

$$S(t) = S_0 \exp(-\frac{t}{T_2}) \sin \omega_0 t$$

signal dit FID (Free Induction Decay).

En prenant l'enveloppe de ce signal, on peut remonter à $T_2 \rightarrow$ imagerie pondérée en T_2

En faisant la transformée de Fourier on obtient le spectre, ie une mesure de la fréquence de Larmor ω_0 . Le signal intégré permet de remonter à la proportion relative de protons magnétiques résonant à ω_0



De même, avec une bobine sur l'axe Oz , on peut remonter à $T_1 \rightarrow$ imagerie pondérée en T_2 .

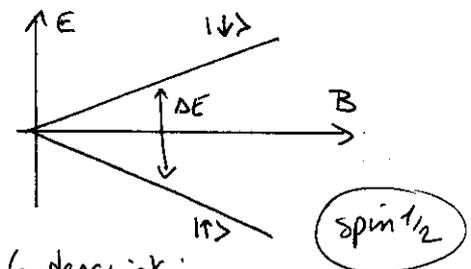
II) Approche quantique

1) Hamiltonien Zeeman

On considère un noyau de moment magnétique de spin \hat{I} . Cet opérateur peut prendre des valeurs entières ou demi-entières de \hbar : $I_z = m\hbar$ avec $m \in \{-I; -I+1; \dots; I\}$ soit $2I+1$ valeurs.

ex: $^1H; ^{13}C \rightarrow$ spin $1/2$. Moment magnétique associé: $\vec{\mu} = \gamma \vec{I}$

Effet Zeeman: $E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\hbar \gamma m B$



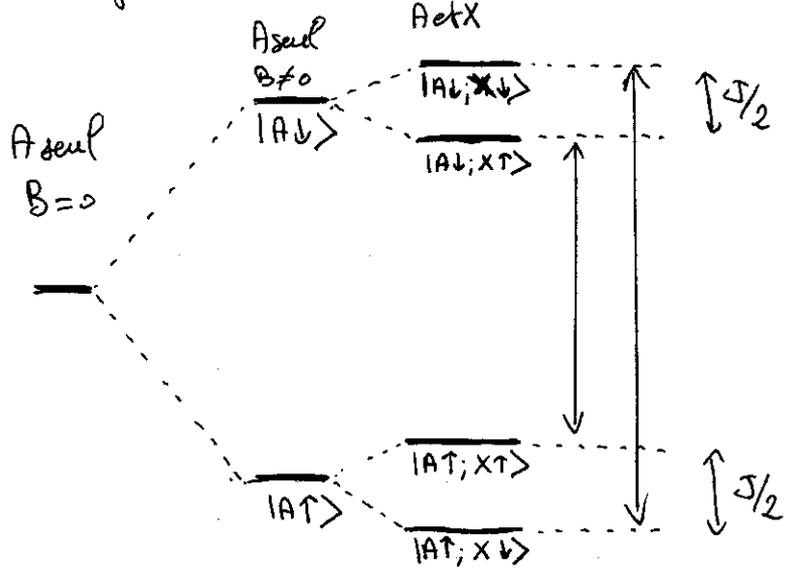
Cas d'un spin $1/2$: $\Delta E = \hbar \gamma B$

L'onde RF induit des transitions entre $\pm \frac{1}{2}$. Formellement, la description statistique de l'aimantation totale quantique revient à la description classique (Eq. de Bloch) moyenne

2) Couplage de type AX

On étudie la transition RF d'un proton de type A par RMN (ie les transitions entre les états $|↑\rangle$ et $|↓\rangle$ de A). On étudie l'influence d'un voisin X de A.

X et A sont en interaction, caractérisée par un couplage J, suppose faible. Sans couplage, les niveaux $|A↑; X↓\rangle$ et $|A↑; X↑\rangle$ sont dégénérés. Le couplage J lève la dégénérescence selon le schéma de niveaux suivant:

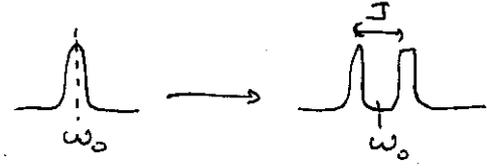


Les transitions modifient l'état de spin de A uniquement (celui de X est conservé).

On a donc seulement deux transitions possibles:

$$\begin{cases} |A↑; X↑\rangle \leftrightarrow |A↓; X↑\rangle \\ |A↓; X↓\rangle \leftrightarrow |A↑; X↓\rangle \end{cases}$$

Si A est couplé à 1 seul proton X, on passe d'un signal singulet à un doublet



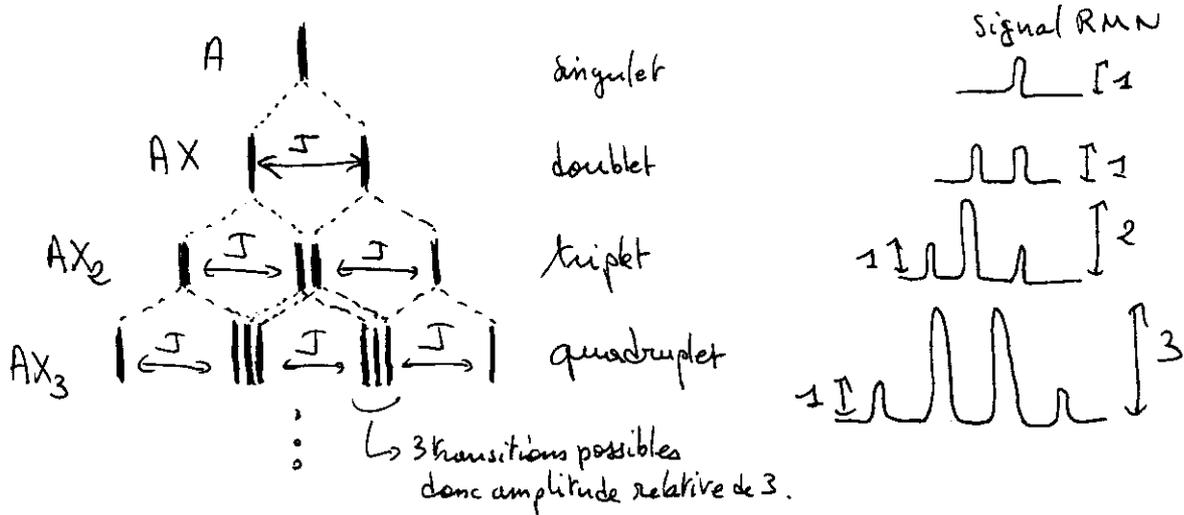
→ traitement perturbatif de l'interaction spin-spin.

Le couplage provient de l'interaction scalaire spin-spin H_J (ou couplage indirect, ou couplage J)

→ interaction via les interactions des spins nucléaires avec les spins électroniques $H_J = J_{12} \vec{I}_1 \cdot \vec{I}_2$

3) Multiplicité supérieure

Le raisonnement se généralise aisément à un couplage type AX_m :



- Rq :
- On a montré comment accéder à la fréquence de Larmor ω_L . La mesure de ω_L par rapport à une référence (TMS) permet de mesurer les déplacements chimiques, ie l'environnement électronique des protons en analyse chimique.
 - La structure en M-uplets permet de remonter à l'environnement spinoriel des protons voisins.
 - En imagerie, le corps est plongé dans un gradient spatial de champ magnétique - La fréquence étant fixe, on sélectionne ainsi une coupe résonante avec l'onde RF.
 - Il est alors possible de mesurer soit T_1 (imagerie pondérée en T_1), soit T_2^* (imagerie pondérée en T_2^*), car les inhomogénéités de champ réduisent la durée de vie transverse.
- Cependant, une technique dite d'écho de spin permet de s'affranchir de ces problèmes, et de remonter directement à T_2 -

References :

- La RMN : concepts, méthodes et applications, Daniel CANET (Dunod)
- Disponible en bibliothèque : Qu'est-ce que l'IRM? (descriptif, peu de formalisme) -
- Mécanique Quantique Cohen-Tannoudji et al. → un complément sur la RMN -