



HAL
open science

Initiation aux structures et à la symétrie : groupes, tables, matrices et espaces vectoriels

Bruno Bêche

► **To cite this version:**

Bruno Bêche. Initiation aux structures et à la symétrie : groupes, tables, matrices et espaces vectoriels. Licence. Structures mathématiques (Licence 1), Université de Rennes, France. 2024, pp.44. hal-04353716v1

HAL Id: hal-04353716

<https://cel.hal.science/hal-04353716v1>

Submitted on 19 Dec 2023 (v1), last revised 18 Mar 2024 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

- INITIATION AUX GROUPES, AUX MATRICES, AUX ESPACES VECTORIELS -

Introduction, Histoire et Personnages

(ou « Découverte pour une première fois en année Licence 1 de sciences physiques »)

La notion de **groupes** est une notion très riche, qui peut sous-entendre des **relations** de **symétries**, **les axiomes**, **entre des objets mathématiques** ou concepts de sciences physiques (grandeurs, lois, causes, effets...) faisant émerger **des conséquences logiques**. Un groupe peut se définir comme une **structure** ou un **ensemble d'éléments**¹ muni d'une **loi de composition** sur ces éléments : *au sens* « **chaque composition d'éléments du groupe donnera un élément du dit groupe** ». Ainsi cette théorie et concept pourra s'appliquer à plusieurs sortes d'objets qui vérifieront ces **axiomes** ou **règles** traduisant l'essence de la **symétrie**.

Historiquement, les groupes sont apparus à partir de versions abstraites (à savoir, non pas des éléments nombres et leurs lois de composition associées comme l'addition, la multiplication), mais plutôt en tant que **transformations** d'éléments basiques de transformations géométriques : translations, rotations, inversions, symétries axiales... La notion de groupe n'est pas apparue du jour au lendemain, il a fallu du temps pour faire émerger cette idée et surtout les définitions associées. **Les historiens considèrent que l'initiateur de la théorie des groupes est le mathématicien Evariste Galois (1811-1832)**². Les éléments qu'il cherchait à classer ou 'regrouper' portaient sur des équations algébriques ; E. Galois a raisonné par permutation (deux permutations pouvaient être combinées pour donner une troisième) ou réarrangement géométrique de manière à passer d'une solution de l'équation à une autre, mais aussi par subdivision en sous-groupes indivisibles pour savoir si l'équation pouvait être résolue ou pas³. A ce titre, il faudra d'ailleurs attendre l'année 1870 avec la parution du « Traité des substitutions et des équations algébriques » écrit par Camille Jordan (1838-1922) pour que l'apport de E. Galois soit enfin reconnu⁴. Suite aux travaux pionniers de E. Galois, de nombreux mathématiciens et mathématiciennes ont étendu la notion de groupe en dehors du cadre géométrique, **permettant d'associer des idées a priori fort différentes** issues respectivement de l'algèbre, de la géométrie, de l'analyse : comme **Arthur Cayley (1821-1895)**⁵ avec ses groupes/tables, voir tableau de type matrices, mettant l'accent sur les propriétés de la loi de composition et permettant d'analyser avec aisance les groupes de symétries en se focalisant sur les interactions des permutations ; mais aussi **Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)**, avec ses théorèmes sur les groupes finis et les combinaisons, **Niels Henrik Abel (1802-1829)**, avec les notions de groupes abélien, présentant une loi de composition interne commutative. Bien d'autres ensuite développeront ces théories de groupe 'catégorie/relation' tout comme Joseph Liouville (1809-1882), Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), Leopold Kronecker (1823-1891), Ludwig Sylow (1832-1918), Sophus Lie (1842-1899), Christian Félix Klein (1849-1925), William Burnside (1852-1927), Otto Ludwig Hölder (1859-1937), Emmy Noether (1882-1935), Samuel Eilenberg (1913-1998), Saunders Mac Lane (1909-2005), Alexandre Grothendieck (1928-2014), le programme d'Erlangen de Félix Klein (1849-1925), le collectif de Nicolas Bourbaki, le groupe de

¹ L'ordre du groupe étant les nombres d'éléments.

² Même si Platon (-428/427 -348/347) évoqua avant notre ère un groupe de solides de cinq polyèdres réguliers convexes, appelés solides de Platon, représentant les cinq éléments (terre, eau air, feu et le dernier qu'Aristote (-384-322) qualifia d'aether en latin ou éther).

³ A titre d'exemple les trois nombres complexes qui sont solutions d'équations cubiques respectent des lois précises et présentent un certain nombre de symétries (permutations dans le raisonnement de E. Galois) qui préservent ces lois ; le groupe de symétrie s'est avéré le même groupe de symétries que possède un triangle. De plus E. Galois montre qu'il n'existe 'en général' pas de formules analytiques pour déterminer les solutions des équations de degré 5 et plus, et il arrive à savoir pour quels polynômes de degré $n \geq 5$ il est possible de résoudre ou pas.

⁴ Alain Connes (né en 1947), mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et médaillé Fields en 1982, a écrit récemment que : « *Les travaux de Galois inaugurent une ère nouvelle des mathématiques, où les calculs font place à la réflexion sur leur potentialité et où les concepts [...] occupent le devant de la scène* ».

⁵ A. Cayley publiera en 1858 un mémoire intitulé 'A Memoir on the Theory of Matrice'. Au-delà de ceci, l'étendue de ses contributions est phénoménale des géométries non-euclidiennes jusqu'aux algèbres. A titre d'exemple, son langage a fourni le moyen d'exprimer le fait que le groupe de symétrie d'un triangle est le même que le groupe de symétries que l'on obtient en permutant les trois solutions d'une équation cubique, mais aussi en généralisant pour les permutations des quatre solutions d'une équation quartique, les symétries d'un tétraèdre ou les redistributions de quatre cartes...

l'Atlas (cinq mathématiciens écrivant le Livre « Atlas of Finite Groups » dans les années 1970)... Toutes et tous continuèrent de faire avancer ce concept et théorie des groupes. L'ensemble de ces mathématiciens et mathématiciennes ont ainsi démontré que certains **êtres mathématiques fonctionnent, voir se comportent, de la même manière** (notion d'isomorphie⁶) par cette **notion et approche de groupes**. Ce faisant au fil des années et siècles les mathématiciens ont d'ailleurs développé des notions permettant de fragmenter ces groupes en des objets plus 'petits et/ou compréhensibles' dénommés sous-groupes, groupes quotients, groupes simples, indivisibles, irréductibles, tout en élaborant une **classification**.

La **théorie des groupes**, son langage, ses concepts unificateurs d'**interactions entre les symétries**, peuvent permettre de classer les **objets mathématiques** en fonction de leurs symétries ou **opérations de symétries**⁷ propres, et donc de les regrouper pour mieux les discerner ; le monde de la symétrie obtient alors son langage algébrique abstrait. Le groupe incarne les qualités et propriétés intrinsèques de la symétrie d'un objet mathématique.

Actuellement la notion de groupes transcende les mathématiques et les sciences. Henri Poincaré (1854-1912) a d'ailleurs déclaré à l'époque en citations :

- « *Les mathématiques ne sont qu'une histoire de groupes* », (1882).
- « *Le concept de groupe préexiste dans notre esprit, au moins en puissance. Il s'impose à nous, non comme une forme de notre sensibilité, mais comme forme de notre entendement* », ouvrage 'La science et l'Hypothèse', (1902).
- « *La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes* », livre 'Science et Méthode', (1908).

Puis, les applications se développèrent, comme Claude Lévi-Strauss (1908-2009) qui utilisa les groupes en ethnologie de manière à modéliser des relations de parenté au sein de populations ; d'autres en arts comme la littérature (Italo Giovanni Calvino Mameli (1923-1985)) et la poésie (Jacques Roubaud (né en 1932)) avec les mots, d'autres enfin en art décoratif (mosaïques et carrelages sur surfaces à deux dimensions, passage à trois dimensions en architecture...), d'autres en musique, et aussi en biologie, en cryptologie/cryptographie pour les transmissions sécurisées... En sciences physiques, la notion de groupe intervient fortement en **crystallographie** pour les **cristaux** ou les **molécules** possédant des **axes ou centres de symétries** ; à ce titre il existe 32 groupes ponctuels (classes de symétrie cristalline) répertoriées dans l'espace à 3 dimensions correspondant à 230 groupes d'espace des **systèmes cristallins** (notions de motifs, réseaux, mailles). Il existe historiquement deux nomenclatures, celle de Georges Friedel (1865-1933) basée sur la notion de groupes qui dépend de la symétrie du réseau de Bravais (14 réseaux dits de Bravais), puis celle de Paul Heinrich von Groth (1843-1927) basée quant à elle sur la classification $\{hkl\}$ des indices de Miller relatifs aux plans cristallographiques des **cristaux** ou **agencements**. Au-delà de ceci, ce sont les **propriétés physiques et leurs effets existant ou non suivant la symétrie considéré qui peuvent se classer en groupes** (les permittivités ou indices optiques, les effets électro-optiques et acousto-optiques, la mécanique des contraintes/déformations, la thermique/thermodynamique couplée aux autres effets physiques (matrices et tenseurs)...)⁸, sans oublier le principe de Curie qui stipule que « les effets sont au moins aussi symétriques que la cause qui les a engendrés »⁹, ou encore l'idée de la 'détection à la correction' en télécommunication (table/tableau binaire de 0 et 1) par Richard Hamming (1915-1998) de l'industrie 'Bell Telephone Laboratories', les exemples transcendent les sciences. En plus de la cristallographie en **matière condensée**, une

⁶ Relation qui existe entre deux ensembles ou structures (différents dans les faits) mais possédant des mêmes aspects (combinatoire, loi de composition interne).

⁷ Rotations successives, réflexions, inversions, notion de symétries axiales, de miroir...

⁸ Voir le livre 'Propriétés physiques des cristaux : Leur représentation par des tenseurs et des matrices' ou 'Physical properties of crystals', par John Frederick Nye (1961) qui classe ces propriétés par groupes.

⁹ Les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

application importante de la théorie des groupes se positionne avec la classification des niveaux d'énergie, en particulier l'analyse de la levée de dégénérescence causée par l'introduction d'une perturbation ou brisure de symétrie. A noter enfin que plus récemment, la notion de groupes (issue des travaux précurseurs de S. Lie) est utilisée en **physique des particules**.

En conclusion de cette introduction historique succincte, il existe d'autres **structures mathématiques** 'cousines' de celle de base dénommée groupe qui sert de fondement : comme les corps, les anneaux¹⁰, ou encore les **espaces vectoriels** ou **espaces de vecteurs** (d'ailleurs introduits par le même A. Cayley, puis Hermann Günther Grassmann (1809-1877) et enfin Giuseppe Peano (1858-1932) qui le premier exposa la définition axiomatique rigoureuse), ou **l'algèbre matriciel** ou des **matrices** (James Sylvester, 1814-1897, qui a d'ailleurs collaboré avec A. Cayley au barreau de Londres) qui peuvent se comporter comme des **opérateurs** s'appliquant sur les vecteurs en sciences physiques (optique et champs électromagnétiques, physique quantique¹¹...). Le concept de groupes est très important en théorie quantique ; ce concept classe les symétries des interactions en physique elles-mêmes liées aux propriétés des particules¹². La notion d'espace vectoriel s'est affinée pour devenir le socle indispensable de nombreuses théories. A titre d'exemple non-exhaustif, le célèbre compositeur Yannis Xenakis (1922-2001) a introduit en 1963 une sorte d'arithmétique de la composition musicale qui repose sur la notion de structure mathématique et d'espace vectoriel. L'ensemble de ces notions groupes, matrices et espaces vectoriels apparaîtront naturellement ces prochaines années en sciences dont les sciences physiques suivant le discipline considéré.

Bruno BÊCHE, Pr.
Université de Rennes - IETR CNRS



L'auteur remercie ses deux collègues Jean-Luc Aufran puis Sergio Di Matteo professeurs à l'Université de Rennes pour leurs discussions.

¹⁰ Avec deux lois de composition internes, puis abandonnant l'existence d'un élément inverse.

¹¹ Les physiciens théoriciens E. Wigner (1902-1995) et J. von Neumann (1903-1957) ont fait un large usage de la théorie des représentations des groupes (rotations, permutations) de manière à mettre en évidence les propriétés de l'équation de E. Schrödinger (1887-1961).

¹² Les physiciens de la physique des noyaux atomiques ou nucléaires (interaction forte) parlent d'invariance de la symétrie interne ou isospin (opérations du groupe SU(2)) pour les hadrons (protons et neutrons du noyau). Selon cette symétrie, le proton et le neutron sont les deux composantes d'un champ de nucléon. Cette symétrie fait passer d'une composante à une autre du champ. Il existe aussi d'autres groupes en sciences physiques comme U(1) relatifs aux changements de phases de la fonction d'onde suite à une transformation de jauge électromagnétique, ou encore SU(3) pour la classification des quarks...

SOMMAIRE

Introduction, Histoire et Personnages p. 1

I) Groupes : Définitions et Propriétés, Applications par les *nombres* p. 5

II) Groupes : Géométrie et Symétries, Transformations, représentations en Tables, Matrices p. 8

II. 1) Géométrie et Symétries planaires, Transformations associées p. 8

II. 2) Symétries et représentations en Tables, Matrices associées aux *transformations pour les sciences* p. 10

II.3) Symétries, groupes et représentation matricielle *en sciences physiques et chimiques* p. 19

II.4) Opérations sur les matrices, déterminants, traces, valeurs et vecteurs propres, matrice de passage, relation de commutation : *utilisation en sciences physiques* p. 22

II.5) Pour aller plus loin : matrices pour la *physique des matériaux et les composants* : représentation des systèmes anisotropes, propriétés physiques simples et couplées p. 25

III) Groupes : Applications en détection d'erreurs, *transmission, information* p. 31

IV) Espaces vectoriels, bases et changements pour la *physique* p. 33

ANNEXE I : Matériaux et Propriétés

« Matrices représentatives (Tableau 10 x 10) des principaux tenseurs par rapport à leurs symétries cristallines » p. 39

ANNEXE II : Complémentaire

Autres exercices pour approfondir, autres définitions et propositions p. 43

• QUELQUES REFERENCES (liste non exhaustive):

Livre tout public : « La Symétrie ou les maths au clair de lune », de **M. du Sautoy**, Oxford (2012).

Magazines « Tangente l'aventure mathématique » : n° (hors-série) 80 (2021), 65 (2017) et 44 (2012) sur respectivement Les groupes, Les espaces vectoriels puis Les matrices.

Toutes parties de chapitres de livres de prépa mathématique (ex- MP/MP*) portant sur « les groupes ».

Tout article de [Wikipédia](https://fr.wikipedia.org/), encyclopédie collaborative en ligne.

Livre de lecture plus avancée : « Physical properties of Crystals », Oxford University Press, de **J.F. Nye** (1985) ; « Physique des matériaux : Systèmes anisotropes, représentation, propriétés physiques simples et couplées », Ed. Ellipses, de **M. Rousseau, A. Desert, M. Henry** (2012) ; « Les Tenseurs en Physique : Vers une représentation effective des propriétés physiques anisotropes par une méthode analytique matricielle de discrétisation des inclusions englobant les propriétés tensorielles physico-géométriques et les conditions de continuité des effets physique étudiés », de **B. Bêche** (2021) <https://hal.science/ce1-01259672/>; « La symétrie en mathématiques, physique et chimie », Presse Universitaire de Grenoble, de **J. Sivardière** (1995) ;

{Hors programme : Livre de niveau Master d'ici plusieurs années « La théorie des groupes en physique et chimie quantiques », Ed. Masson, de **J. Hladik** (1995)}.

- INITIATION AUX GROUPEs, AUX MATRICES, AUX ESPACES VECTORIELS -

{ Découverte pour l'année de Licence 1 en sciences physiques ou « pour la 1^{ère} fois » }

Quelques définitions, les Relations et leurs représentations en Tables, le lien avec la Géométrie, les Symétries, leurs représentations Matricielles, Matrices puis Espaces vectoriels.

I) Groupes : Définitions et Propriétés, Applications par les nombres

--

• Définitions (notion de groupes)

Un **groupe** est un couple $(G, *)$ dont le premier terme est un ensemble G et le second une **opération** ou **loi de composition** $*$ (lire étoile) sur cet ensemble vérifiant :

- i) $\forall x, y \in G$ (que l'on note aussi $\forall (x, y) \in G^2$), alors $x * y \in G$ (* loi de composition interne)
- ii) $\forall x, y, z \in G$, alors $(x * y) * z = x * (y * z)$ (loi associative)
- iii) $\exists e \in G / \forall x \in G, x * e = e * x = x$ (e élément neutre)
- iv) $\forall x \in G, \exists x' \in G / x * x' = x' * x = e$ (x' symétrique par $*$ de x , noté *inverse* x^{-1})

Ces quatre propriétés et axiomes font de G muni de la loi de composition interne $*$ un groupe

- De plus $(G, *)$ sera qualifié un groupe **commutatif** ou '**abélien**' si de plus $\forall x, y \in G, x * y = y * x$ (loi ** commutative*)

(Dans les exercices les symboles étoile $*$ ou composition \circ ont la même signification théorique générale)

--

L'**ordre** g d'un **groupe** est par définition le *nombre d'éléments distincts* de G (ou encore l'ordre d'un groupe est le cardinal de son ensemble sous-jacent). Si g est un entier fini le groupe est dit *fini* ou *discret*, sinon le groupe est dit *infini*.

--

- **Exercice** : Soit $(G, *)$ un groupe les éléments de G sont réguliers pour la loi $*$. Démontrer simplement ces deux implications (\Rightarrow) en utilisant certains axiomes précédents :

$$\forall x : \begin{cases} x * y = x * z \Rightarrow y = z \\ y * x = z * x \Rightarrow y = z \end{cases}$$

Remarques :

La loi de composition interne $*$ sera souvent noté de façon additive (+) pour les groupes abéliens et donc l'élément symétrique $x^{-1}=(-x)$ sera l'élément opposé à x et l'élément neutre $e=0_G=0$. Ainsi l'axiome iv) précédent s'écrira :

$$x + (-x) = (-x) + x = 0_G \equiv 0$$

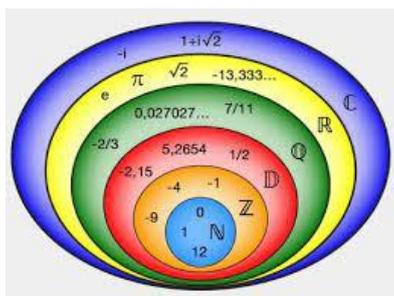
La loi de composition interne $*$ sera souvent noté de façon multiplicative (\times) pour les groupes en général ; l'élément symétrique $x^{-1}=(x^{-1})$ sera l'élément inverse à x et l'élément neutre $e=1_G=1$. Ainsi l'axiome iv) précédent s'écrira :

$$x \times x^{-1} = x^{-1} \times x = 1_G \equiv 1$$

- **Exercices** : Des ensembles que vous connaissez déjà ont une structure de groupe.

- En reprenant point par point les axiomes des définitions précédentes, démontrer que (\mathbb{R}^*, \times) est un groupe abélien ou commutatif ; pour rappel $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ et \mathbb{R} ensemble des réels.

- En reprenant point par point les axiomes des définitions précédentes, démontrer que $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe abélien ou commutatif ; pour rappel \mathbb{Z} ensemble des entiers relatifs.



\mathbb{N} vient de l'appellation 'Naturale' attribuée à Peano.
 \mathbb{Z} vient de l'allemand 'Zahlen' qui signifie compter.
 \mathbb{Q} pour l'ensemble des nombres rationnels a été défini par Peano ('Quoziente', la fraction).
 \mathbb{R} a été défini par l'allemand Richard Dedekind (1831-1916) pour 'Real'.

(propriété : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)

De même, il peut être démontré que les groupes suivants $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ et (\mathbb{C}^*, \times) sont des groupes commutatifs, avec \mathbb{C} ensemble des nombres complexes.

• **Exercices :** Démontrer que (\mathbb{Z}^*, \times) puis que $(\mathbb{N}, +)$ ne sont pas des groupes.

--

• Définition (notion de sous-groupe)

Une partie H d'un groupe $(G, *)$ est un sous-groupe de G si et seulement si :

- i) H contient l'élément e neutre de G
- ii) $\forall (x, y) \in H^2$, alors $x*y \in H$
- iii) $\forall y \in H$, y' (symétrique de y) $\in H$

Le sous-groupe H est aussi un groupe $(H, *)$ avec $*$ la loi de composition de G

--

• **Exercice :** En pratique, pour prouver que H est un sous-groupe de G , démontrer que l'on peut utiliser la caractérisation suivante en partant de la définition précédente:

- i) $H \neq \emptyset$ ou (H ensemble non vide)
- ii) $\forall (x, y) \in H^2$, alors $x*y' \in H$

Puis, inversement, démontrer qu'en partant de cette caractérisation il est possible de d'obtenir la définition précédente.

• **Remarque - méthode :** Pour montrer qu'un ensemble G muni d'une loi interne est un groupe, vous pouvez revenir à la définition d'un groupe ou bien montrer que G est un sous-groupe d'un groupe connu.

• **Exercice :** Soit (G, \cdot) un groupe muni d'une loi interne multiplicative ' \cdot ' et $C(G)$ le centre de G défini par $C(G) = \{x \in G ; \forall a \in G, ax = xa\}$; montrer de $C(G)$ est un sous-groupe de G .

• Définition (centre d'un groupe)

En algèbre et mathématique, le centre d'une structure algébrique est l'ensemble des éléments de cette structure qui commutent avec tous les autres éléments. On notera $C(G)$ le centre d'un groupe G représentant l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G .

$$C(G) = \{x \in G ; \forall a \in G, ax = xa\}$$

$C(G)$ est un groupe commutatif (ou abélien) et normal.

• Définition (classe d'un groupe)

Soient H un sous-groupe d'un groupe G et g un élément de G . On appelle classe à gauche de g suivant H l'ensemble gH défini par :

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

On appelle classe à droite de g suivant H l'ensemble Hg défini par : $Hg = \{hg \mid h \in H\}$.

L'ensemble des classes à gauche suivant H de tous les éléments de G se note G/H , et celui des classes à droite, $H \backslash G$.

• Il est ainsi possible d'effectuer une partition d'un groupe en **classes d'éléments conjugués**, c'est-à-dire de 'même nature géométrique associée et jouant dans le groupe concerné des rôles équivalents. L'**opération de conjugaison** est définie dans ce but :

Si a élément fixe de G et x un autre élément, alors l'élément formé par $x a x^{-1}$ est appelé **conjugué** de a par x . Ainsi si x décrit un groupe G , les conjugués de a par x engendrent un sous-ensemble de G appelé **classe** C_a de a . On démontre que deux classes d'un même groupe sont disjointes (aucun éléments communs) et forment ainsi une véritable partition de ce groupe.

• **Définition (stabilité par conjugaison, aspect normal et invariant)**

Un sous-groupe H est dit **normal (ou invariant, auto-conjugué ou encore distingué, pivot)** à un groupe G , si H est stable par conjugaison c'est-à-dire :

$$\forall h \in H, \forall x \in G, xhx^{-1} \in H$$

Une manière équivalente de définir un sous-groupe normal est de mentionner que les *classes* à droite et à gauche de H dans G coïncident :

$$\forall x \in G, xH = Hx$$

• **Définition (groupe simple)**

Un **groupe simple** est un groupe non réduit à son élément neutre e et qui n'a que l'ensemble $\{e\}$ et lui-même comme sous-groupes distingués/normaux. Ainsi, **un groupe qui n'a pas de sous-groupes est dit simple**.

• **Exercice** : Classe, modulo $[\]$, congruence des entiers ou relations entre deux entiers, groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Rappel sur la division euclidienne et l'écriture modulo, notations : après avoir posé la division de 16 par 5 comme à l'école, on peut dire que $16 = 1 \text{ mod } 5$; 16 congru à 1 modulo 5 ou $16 \equiv 1 [5]$. Le monde des 'modulo' s'intéresse au reste/résidu de la division et moins au quotient (ici 3 dans l'exemple). Les chiffres 28 et 58 sont congrus modulo 10 ('ils ont les mêmes unités' ou le reste/résidu de la division sera 8). A noter aussi que vous connaissez déjà la notation modulo pour les angles modulo 2π ou $[2\pi]$.

Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé. Répondre par oui/non aux affirmations suivantes :

- L'ensemble $n\mathbb{Z}$, qui représente les entiers relatifs multiples de n , forme un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$? ($\pm n$ générateur de $n\mathbb{Z}$ par définition).

- Avec la loi précédente additive précédente $+$, la notation $n\mathbb{Z} + r = \{nq + r \mid q \in \mathbb{Z}\}$ forme une classe droite du sous-groupe $n\mathbb{Z}$?

La signification se note/lit, l'ensemble des entiers $u = (nq + r)$ congru à r modulo n , ou le dividende $u = r + nq$ avec le quotient q , n le diviseur et r le reste, ou en notant $u \equiv r[n]$, ou encore $(u - r)$ est multiple de n , ou bien $u = r \text{ mod } n$, ou r est le résidu/reste de la division de u par n .

Remarque : la classe gauche sera égale à la classe droite puisque l'addition $+$ est commutative. L'ensemble de toutes ces classes est le groupe quotient noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \hat{u} = \{r + nq \mid q \in \mathbb{Z}\} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$. Le signe $\hat{}$ est ici pour spécifier que ce sont d'autres types de nombres (imaginez une succession de rubans de $\{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{n-1}\}$ qui recommencent en cyclique l'un après l'autre ; on aura ainsi $\hat{n} \equiv \hat{0}$).

- On considère le groupe $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \dots, \widehat{20}\}$ où la loi interne $+$ est définie par : $(x \text{ mod } 21) + (y \text{ mod } 21) \equiv \hat{x} + \hat{y} = (x + y) \text{ mod } 21 \equiv \widehat{x + y}$. Démontrer et comprendre que dans $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$, $\widehat{10} + \widehat{33} = 10 + 12 = \widehat{22} = \hat{1}$. Vérifier aussi en utilisant la propriété que $\widehat{10} + \widehat{33} = \widehat{43} = \hat{1}$. Muni de cette loi, $\mathbb{Z}/21\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif (ou abélien).

- On considère le groupe $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}$ où la loi interne produit \times . Démontrer que $\hat{4} \times \hat{4} = \hat{1}$ ou que $\hat{3} \times \hat{2} = \hat{1}$.

Remarque : Les nombres des ensembles $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont essentiels pour le calcul et les algorithmes liés à la cryptologie (ex : le chiffrement RSA utilisé en commerce électronique).

• **Propriétés (règles de calculs et puissances d'éléments du groupe)**

Soit un groupe $(G, *)$. Le calcul et propriétés/règles de puissances (n entier positif) d'éléments du groupe G muni de la loi de composition interne $*$ sont les suivantes (x un élément du groupe) :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}^0 &= \mathbf{e} \quad (\text{avec par définition } \mathbf{e} \text{ élément neutre du groupe}) \\
 \mathbf{x}^n &= \mathbf{x} * \mathbf{x} * \mathbf{x} * \dots * \mathbf{x} \quad (n \text{ fois}) \\
 \mathbf{x}^{-n} &= \mathbf{x}^{-1} * \mathbf{x}^{-1} * \mathbf{x}^{-1} * \dots * \mathbf{x}^{-1} \quad (n \text{ fois}) \\
 \mathbf{x}^n * \mathbf{x}^m &= \mathbf{x}^{n+m} \\
 (\mathbf{x}^n)^m &= \mathbf{x}^{n \cdot m} \\
 (\mathbf{x} * \mathbf{y})^{-1} &= \mathbf{y}^{-1} * \mathbf{x}^{-1} \quad (\text{attention à l'ordre})
 \end{aligned}$$

A titre d'exemple ($G, *$) peut représenter le groupe *non commutatif* (GL_2, \times) des matrices carré d'ordre 2 (ou 2×2 , de déterminant non nul) qui sera muni de la loi produit \times des dites matrices ou éléments x .

- **Exercice :** Soit deux éléments a et b d'un groupe $(G, *)$ qui vérifient $ab=ba$. Démontrer que $ba^2=a^2b$. Obtiens-on alors $a^2b^{-1}=b^{-1}a^2$?
- **Exercice :** Soit $(G, *)$ un groupe et e son élément neutre, avec $a, b \in G / ab=b^2a$. Montrer que $a^3b=b^8a^3$.
- **Exercice :** Soit $(G, *)$ un groupe et e son élément neutre, avec $a, b \in G / ab=b^2a$ et $ba=ab^2$. Calculer ab^2a de deux façons, en déduire que $ab^2=e$. Montrer que $a=b=e$.

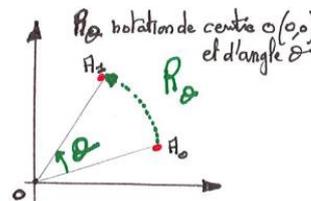
II) Groupes : Géométrie et Symétries, Transformations, représentations en Tables, Matrices

II. 1) Géométrie et Symétries planaires, Transformations associées

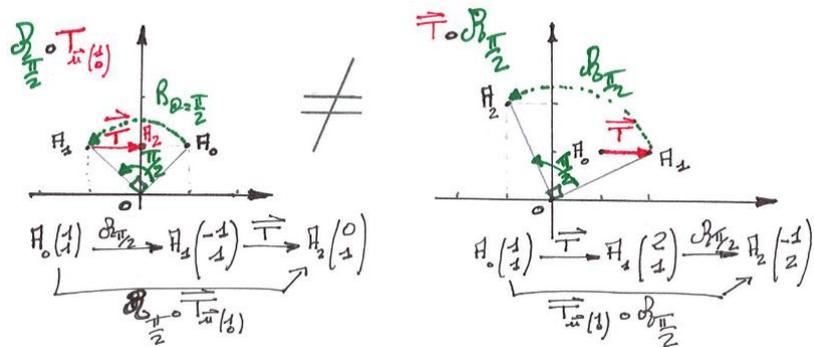
Il est considéré connu quelques connaissances de base en géométrie euclidienne et analytique. Pour rappel, revoir les notions d'applications (ou fonctions) Identité, les Symétries axiales, de centre, les Translations \vec{T} de vecteur fixé, et les Rotations \mathcal{R}_θ d'angle θ fixé, réflexions par rapport à des droites, ainsi que toutes leurs compositions (au sens du symbole de la loi de composition \circ des fonctions) de ces transformations : Isométries et Similitudes du plan plus généralement.

• **Exercice :**

En partant de la définition et représentation d'une rotation de centre $O(0,0)$ et d'angle θ fixé (voir figure), vérifier que l'ensemble des rotations du plan $\mathcal{R}_{\forall \theta}$ constitue un groupe (\mathcal{R}, \circ) commutatif ou abélien (\circ représente le symbole de composition en mathématique).¹³



- **Exercice :** Soit \mathcal{J} l'ensemble des **Isométries du plan (translations, rotations, réflexions et compositions \circ de ces transformations)**. En admettant que (\mathcal{J}, \circ) est un groupe, démontrer que ce groupe (\mathcal{J}, \circ) est non commutatif. Pour ceci, prendre l'exemple particulier d'une isométrie \mathcal{J} composée d'une rotation \mathcal{R} de centre $O(0,0)$ et d'angle $\theta=\pi/2$ avec une translation \vec{T} de vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

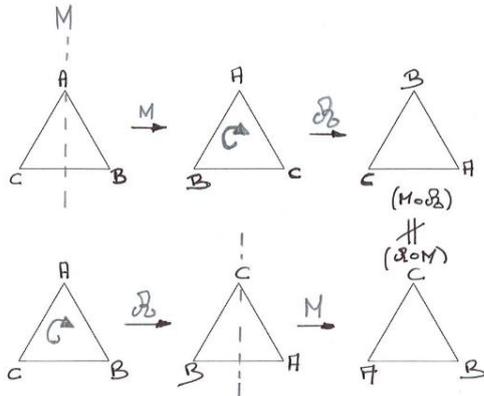


¹³ L'expression générale d'une matrice de rotation en deux dimensions avec un repère orthonormé direct s'écrit $\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$; elle sera utilisée dans de prochains exercices.

En conclusion, dans ce cas particulier, les images du point A_0 notées A_2 sont distinctes par $\mathcal{R} \circ \vec{T}$ et $\vec{T} \circ \mathcal{R}$. Le groupe des isométries du plan (\mathcal{J}, O) est donc non commutatif.

Là encore attention donc à l'ordre de composition pour les groupes non commutatifs !

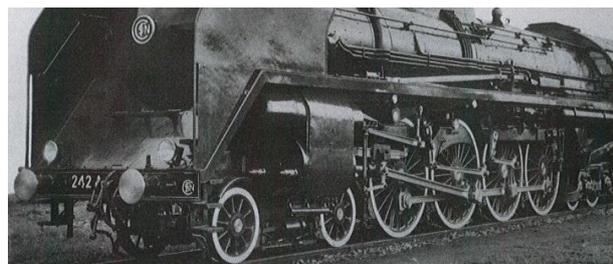
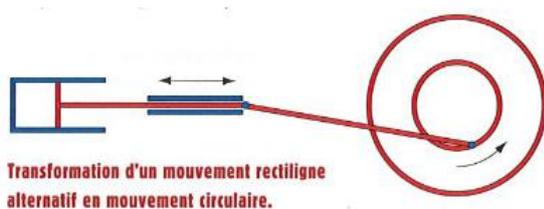
▪ **Autre exemple :**



Considérons un triangle équilatéral *en repérant* ses trois sommets, points A, B et C de manière à visualiser les effets de transformations composées et résultantes. Alors, nous remarquons que la réflexion (M'miroir') suivie/composée d'une rotation \mathcal{R} est différente de la même rotation suivie/composée de la même réflexion.

$$M \circ \mathcal{R} \neq \mathcal{R} \circ M$$

▪ Il existe de nombreux **dispositifs mécaniques transformant** par exemple un **mouvement rectiligne en rotation**. Historiquement les anciennes locomotives utilisaient ce principe (un piston poussé par la vapeur possédait un mouvement rectiligne alternatif qui géométriquement se transformait en rotation des roues).



▪ **Exercice :**

Partant de **raisonnements géométriques de symétries**, construisons une **table des transformations**. Considérons un segment $[AB]$ dans le plan. Quelles sont les deux transformations géométriques planes (autre que l'Identité) qui laisse ce segment invariant ? Finaliser le schéma en notant S_1 et S_2 les deux symétries concernées.



Une symétrie que l'on notera S_1 laisse $[AB]$ invariant point par point. L'autre notée S_2 échange ses points (dont $A \leftrightarrow B$) et le laisse *globalement* invariant. En étudiant ce qui se passe lorsque l'on enchaîne ces deux transformations, remplir la table suivante en calculant le résultat des quatre compositions $S_i \circ S_j = S_k$ (i, j et $k = 1$ ou 2).

Opérations lignes / colonne guide

$\vec{I} \circ$	S_1	S_2
S_1		
S_2		

Opérations colonnes / ligne guide

Considérons maintenant les nombres entiers (\mathbb{N}) pairs et impairs avec la loi interne d'addition $+$. Remplir la table relative aux résultats entier + entier = entier.

$\vec{I} +$		Pair	Impair
Pair			
Impair			

Conclure les deux tables et sur les objets mathématiques $\{S_1, S_2\}$ et $\{\text{entiers pairs, entier impairs}\}$.

▪ **Définition et vocabulaire :** Sur chaque ligne et chaque colonne de la table de la loi apparaît tous les éléments du groupe **une et une seule fois** (théorème dit du réarrangement). On parlera d'**isomorphisme** entre ces deux groupes et tables associées.

On appellera **éléments générateurs**, les éléments du groupe qui permettent de construire tous les autres éléments par la loi interne. Ainsi un groupe peut se définir par la donnée d'un **jeu de générateurs** (éléments de symétrie et relations entre ces éléments traduisant leurs positions/liens dans le groupe). Un groupe sera **monogène** si il possède un seul générateur.

▪ **Définition (groupe cyclique)**

Un groupe qui est monogène et fini est dit cyclique. En terme de notation, C_n désigne le groupe cyclique d'ordre n .

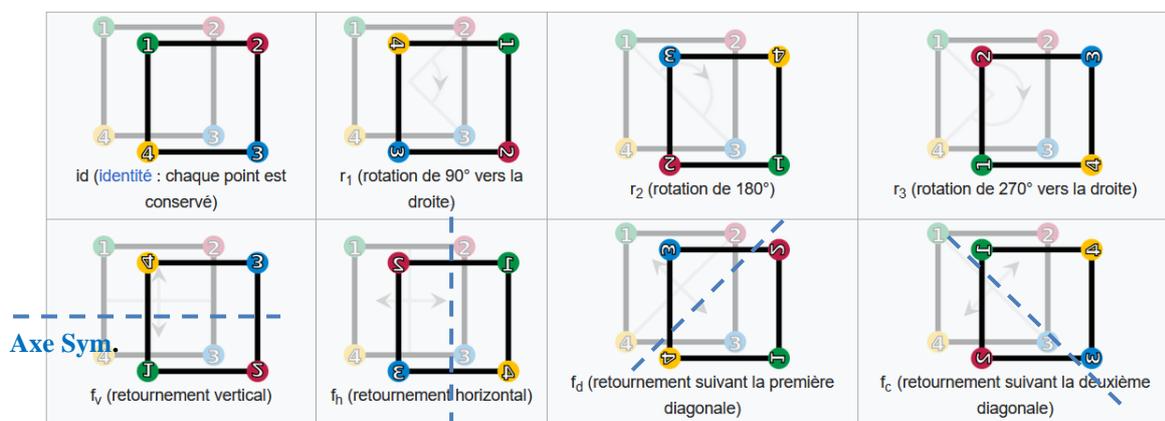
C'est-à-dire qu'il existe un élément a (nommé générateur) de ce groupe tel que tout élément du groupe puisse s'exprimer sous forme d'un multiple de a (en notation additive, ou comme puissance en notation multiplicative).

II. 2) Symétries et représentations en Tables, Matrices associées aux transformations pour les sciences

Concernant les matrices, les lois d'additions et de multiplications (**aspect non commutatif**) de ces êtres mathématiques sont considérés connus. **Les matrices 2×2 et la loi multiplicative interne forme ainsi un groupe non abélien dit groupe linéaire GL_2 .** Les matrices seront très utiles pour représenter les rotations et les transformations spatiales en sciences physiques, rotations d'objets, de champs et de concepts plus abstraits.

▪ **Exercice :**

Le but de cet exercice est de remplir la table, dite de Arthur Cayley, associée à un groupe que l'on nommera D_8 caractérisant un carré qui possède un ensemble de 8 symétries le laissant globalement invariant ; voir description infra (les sommets sont colorés et numérotés uniquement pour visualiser les transformations et éléments de symétries).



L'application identité Id laisse inchangé chaque point du carré, les transformations $r_{n=1 \text{ à } 3}$ sont des rotations de respectivement d'angles $n \times \frac{\pi}{2}$, puis les réflexions avec axes les deux médiatrices des côtés du carré et ces deux diagonales seront notées (f_h et f_v) puis (f_d et f_c).

En tenant des compositions de chaque couple de transformations, remplir la table de Cayley associée au groupe D_8 du carré qui représentera ses axiomes et relations internes.

Quel est l'élément neutre e qui laisse tout élément x ($\forall x \in D_8$) invariant (rappel : $e \circ x = x \circ e = x$) ?

Vérifier que chacune des transformations Id, f_h, f_v, f_d, f_c et r_2 sont leurs propres symétriques / $x \circ x^{-1} = e$, c'est-à-dire que leur application deux fois de suite laisse parfaitement invariant le carré (ou encore que la seconde transformation peut 'défaire' la première). De même vérifier que les deux rotations r_1 et r_3 sont symétriques l'une de l'autre.

Ligne guide

	o	Id	r₁	r₂	r₃	f_v	f_h	f_d	f_c
Colonne guide	Id								
	r₁								
	r₂								
	r₃								
	f_v								
	f_h								
	f_d								
	f_c								

Vérifier l'hypothèse d'associativité sur cette loi de composition et table en prenant en exemple trois éléments. Ce groupe D_8 est-il commutatif (abélien) ?

• Exercice :

Préliminaire : un ensemble de n termes $G = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$ muni de l'opération *addition modulo n* appartient aux groupes cycliques d'ordre n , C_n .

L'opération « addition modulo n » (ou loi interne $a * b$), signifie que $a * b = (a + b) \bmod n$.

- On considère un ensemble caractérisé par un groupe cyclique de la catégorie C_3 ou d'ordre 3 ; cet ensemble de type groupe cyclique C_3 contient trois termes et se note $G = \{0, 1, 2\}$ (ou encore = 'mod 3') car muni de la loi additive modulo 3. Dresser la table dite de A. Cayley de G ou 'mod 3'. Le signe $\hat{}$ est ôté pour simplifier.

Indication : $(1+0) \bmod 3 = (0+1) \bmod 3 = 1$

+ mod3	0	1	2
0		1	
1	1		
2			

- Considérons un autre 'avatar' du groupe cyclique C_3 avec le groupe et ensemble des rotations $G = \{\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(\frac{2\pi}{3}), \mathcal{R}(\frac{4\pi}{3})\}$, avec la notation $\mathcal{R}(\theta)$ rotation d'angle θ ; on remarque évidemment que cet angle θ est défini à modulo $[2\pi]$ en géométrie et trigonométrie. Que représente l'opération $\mathcal{R}(0)$ dans le groupe puis le plan ?
- Définir un lien, avec la loi interne \circ , entre les trois opérations $\mathcal{R}(\theta)$, $\mathcal{R}(\phi)$ et $\mathcal{R}(\theta + \phi)$, à modulo $[2\pi]$ toujours.
- Dresser la table ou tableau de ce groupe $G = \{\mathcal{R}(0), \mathcal{R}(\frac{2\pi}{3}), \mathcal{R}(\frac{4\pi}{3})\}$.

Ligne guide

	o	$\mathcal{R}(0)$ = Id =neutre	$\mathcal{R}(\frac{2\pi}{3})$	$\mathcal{R}(\frac{4\pi}{3})$
Colonne guide	$\mathcal{R}(0)$ = Id =neutre	Id = neutre		
	$\mathcal{R}(\frac{2\pi}{3})$			
	$\mathcal{R}(\frac{4\pi}{3})$			

En terme d'analogie, dénommé **isomorphisme** en mathématique, comparer les deux tables obtenues de l'exercice (celle de la théorie des nombres puis celles des transformations de rotations), puis conclure.

▪ **Exercice :**

On considère un ensemble caractérisé par un **groupe cyclique de la catégorie C_4** ou d'ordre 4 ; cet ensemble de type groupe C_4 contient trois termes et se note $G = \{0, 1, 2, 3\}$ (ou encore = 'mod 4') car muni de la loi additive modulo 4. La table de A. Cayley de G ou 'mod 4' se remplira de manière suivante que vous vérifierez :

Ligne guide *Indication : $(1+3) \bmod 4 = (3+1) \bmod 4 = 0$*

+	0	1	2	3
Mod4	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Colonne guide

Remarque : On notera quand terme de cycle, avec l'ordre croissant des éléments $\{0, 1, 2, 3\}$ sur colonne et ligne guide, alors au niveau du résultat du tableau (par cette loi + modulo) on passe d'une ligne à la suivante (ou d'une colonne à la suivante) par un décalage cyclique du résultat : c'est d'ailleurs pour ceci de l'on a bien $(1 + 3) \bmod 4 = 0$ (d'ailleurs, la table du groupe cyclique de type C_3 de l'exercice précédent présentait cette même spécificité).

- Ecrire la table de son sous-groupe. On remarquera bien que l'ensemble des éléments colonne guide (ou ligne guide) du sous-groupe concerné se retrouvent en résultat dans la table du sous-groupe et pas d'autres (sinon ne serait pas un groupe d'après la définition d'un groupe axiome i) en début de chapitre). A ce tire l'on peut formuler ces quelques propriétés à ressentir et à détecter pour conclure.

▪ **Exercice :**

On considère un ensemble caractérisé par un **groupe cyclique de la catégorie C_6** ou d'ordre 6. Remplir sa table d'opération interne additive + 'mod 6' agissant sur $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

Indication : $(1+3) \bmod 6 = (3+1) \bmod 6 = 4$ et $(4+4) \bmod 6 = 2$

Ligne guide

+	0	1	2	3	4	5
Mod6	0	1	2	3	4	5
0						
1				4		
2						
3		4				
4					2	
5						

Colonne guide

Quel sont les deux sous-groupes de C_6 qui seront respectivement isomorphe à C_3 et C_2 ?

▪ **Définition**

Le **groupe de Klein** (Félix Klein 1849-1925) est l'un des deux groupes (avec le groupe cyclique C_4) possédant quatre éléments et surtout le plus petit groupe non cyclique défini en 1884. Il est noté K_4 (ou V comme 'Viererguppe' ou encore V_4) et est défini en utilisant que le produit de deux éléments distincts (non élément

neutre) est égal au troisième puis que tout élément est son propre symétrique. Vérifier alors que sa table est définie comme suit :

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Le **groupe de Klein** possède ainsi une table symétrique, c'est un groupe commutatif (ou abélien).

▪ **Exercice :**

Le groupe de Klein est-il simple ? Si non, alors identifier ses sous-groupes (dits distingués ou invariant ou encore normaux) tous isomorphes à C_2 .

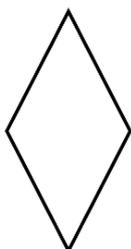
▪ **Définition (ordre d'un élément d'un groupe)**

Si un élément x d'un groupe G engendre dans G un sous-groupe (monogène) fini d'ordre d , on dit que x est d'ordre d (fini).

▪ **Exercice :**

Démontrons que le **groupe de Klein** est isomorphe au groupe des isométries du plan laissant globalement invariant un rectangle ou un losange (qui sont non carrés). En plus de la symétrie laissant invariant Id, quelles sont les trois autres opérations de symétries que l'on va définir que l'on notera S_x , S_y puis S_o .

Les représenter sur le schéma infra, puis remplir la table des opérations $S_i \circ S_j$:

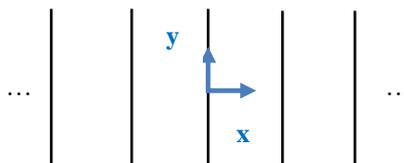


o	Id	S_x	S_y	S_o
Id				
S_x				
S_y				
S_o				

Cette étude est un avatar du groupe de Klein.

▪ **Exercice :**

Comme nous l'avons présenté un groupe de symétrie est un groupe d'opérations qui laissent une figure 'inchangée' globalement. En considérant la figure géométrique suivante (série de lignes infinies dans le plan et parallèles à l'axe y) :



- Vérifier/démontrer que les deux opérations respectivement la symétrie /axe y notée $S_{/y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis la rotation d'un angle $\theta=\pi$, représentée par la matrice $\mathcal{R}_\pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont deux éléments du groupe de symétries. Si besoin redémontrer l'expression générale d'une matrice de rotation en deux dimensions avec un repère

orthonormé direct : $\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ ¹⁴. Bien visualiser l'action de ces deux opérations $S_{/y}$ et \mathcal{R}_π sur la figure par exemple en calculant le transformé (x', y') d'un point ou d'un vecteur (x, y) par celles-ci.

- Calculer le produit des matrices $S_y \cdot \mathcal{R}_\pi$ et conclure. Que représente cette nouvelle opération de symétrie ?
- Lister ainsi tous les éléments du groupe sans oublier l'opération identité Id ! A quel groupe ce groupe de symétrie est-il isomorphe ?

• **Exercice :**

L'expression générale d'une **matrice de rotation** en deux dimensions avec un repère orthonormé direct se note

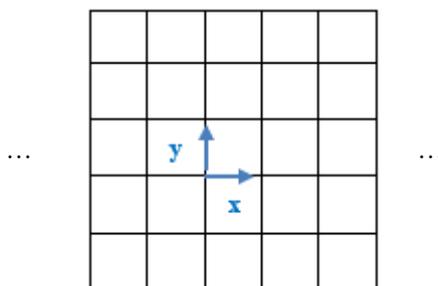
$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Démontrer que le déterminant $\det(\mathcal{R}_\theta) = 1$, puis que les deux relations et produits matriciels suivant (avec $t =$ transposée, lignes \Leftrightarrow colonnes) sont valables :

$${}^t\mathcal{R}_\theta \cdot \mathcal{R}_\theta = \mathcal{R}_\theta, \quad {}^t\mathcal{R}_\theta = \text{Id}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• **Exercice :**

On considère la figure géométrique suivante :



Lister l'ensemble des opérations de symétrie la laissant globalement inchangée puis représenter leur matrice 2×2 . Etablir des liens par l'opérations produits des matrices entre ces opérations de symétrie.

• **Mémo / remarque : Liste de propriétés communes aux groupes / sous-groupes**

- i) Chaque table/tableau traite d'un certain ensemble d'objets qui est identique à l'ensemble figurant dans la colonne et la ligne guide.
- ii) Chaque paire d'objets dans l'ensemble/groupe a exactement un produit.
- iii) Les produits, résultats de la table, sont membres de l'ensemble/groupe.
- iv) Chaque membre de l'ensemble/groupe dans la table apparait une fois dans chaque colonne et ligne.
- v) Il y a une colonne qui apparait exactement comme la colonne guide.
- vi) Il y a une ligne qui apparait exactement comme la ligne guide.
- vii) Les produits ont la propriété d'associativité, pour tous les éléments, dénommés x, y et z de l'ensemble groupe, alors $(x * y) * z = x * (y * z)$.

• **Exercice :**

Expliquer pourquoi les tables suivantes ne sont pas celles de groupes.

*	A	B
A	A	A
B	A	A

*	A	B	B
A	B	A	C
B	A	C	B
C	C	B	A

*	A	B	B
A	A	B	C
B	B	C	D
C	C	D	E

¹⁴ Les groupes des rotations à respectivement 2D et 3D se nomment $SO(2)$ et $SO(3)$.

Les tables de A. Cayley (présentées en 1854) sont des tableaux à double entrée représentant la loi de composition de symétries. Lorsqu'un ensemble fini E est muni d'une loi de composition interne $*$, il est possible de créer un tableau qui présente les résultats obtenus par cette loi interne $*$ pour tous les éléments x et $y \in E$; A l'intersection de la ligne représentant x et de la colonne y se trouve l'élément $x * y$, soit x s'appliquant sur y . Les tables de Cayley permettent de faciliter l'étude des groupes finis. La donnée d'une telle table équivaut à celle de la structure du groupe qu'elle représente. On peut se référer à cette table pour effectuer/simplifier les calculs dans le groupe ; de plus certaines propriétés (comme la commutativité) sont immédiatement visibles dans la table.

▪ **Exercice :**

Arthur Cayley réalisa qu'il était possible de traduire les résultats d'Evariste Galois par ces table de manière à faire ressortir l'essence de la symétrie et les relations internes du groupe. A titre d'exemple, il y a six permutations (3!) des trois solutions d'une équation cubique, et il est possible de nommer les six opérations, Id la symétrie qui laisse tout en place, X et Y qui intervertissent les trois solutions en cyclique en orienté (Y en sens horaire par exemple, $1^{\text{ère}} \Rightarrow 2^{\text{ème}} \Rightarrow 3^{\text{ème}} \Rightarrow 1^{\text{ère}}$, puis X permutation en sens anti-horaire par exemple; la troisième permutation étant inutile Id existant déjà avec ordre $1^{\text{ère}}, 2^{\text{ème}}, 3^{\text{ème}}$), tandis que R, S et T échangent deux solutions sans toucher à la troisième (et donc trois symétries R, S et T car trois possibilités de laisser une solution fixe, soit la $1^{\text{ère}}$, soit la $2^{\text{ème}}$, soit la $3^{\text{ème}}$). A titre d'exemple R permute les solutions $1^{\text{ère}} \Leftrightarrow 2^{\text{ème}}$ maintenant la $3^{\text{ème}}$ fixe, S et T les autres. Ainsi, A. Cayley dressa historiquement la table correspondante :

Ligne guide

	*	Id	X	Y	R	S	T
Id	Id	X	Y	R	S	T	
X	X	Y	Id	T	R	S	
Y	Y	Id	X	S	T	R	
R	R	S	T	Id	X	Y	
S	S	T	R	Y	Id	X	
T	T	R	S	X	Y	Id	

Colonne guide

- Analyser cette table et comprendre sa formation.

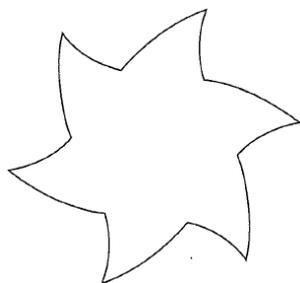
Remarque : Vous pouvez raisonner élément par élément genre $X * Y = Id = Y * X$ ou encore $R * S$ revient à X. Mais quelque fois, vous pouvez aussi raisonner par groupes d'éléments ou bien bout de vecteurs *colonne guide* * *ligne guide* ; par exemple vu que [R S T] (lignes 4, 5, 6 du vecteur colonne) et ce même [R S T] (colonnes 4, 5, 6 du vecteur ligne) interagissent (loi *) pour donner trois Id en diagonale (voir encadrement pointillé vert dans table) ; en effet, permuter deux solutions (soit R, soit S, soit T) sur trois puis repermutter les deux mêmes solutions donnera l'équivalence Identité (ou équivalence 'rien n'a été fait').

De même par exemple Y ou X (permutation orientée dans un sens ou l'autre agissant sur) * les éléments [R S T] se transformeront en [S T R] rotation horaire par Y ou bien en [T R S] anti-horaire par X (voir encadrement pointillé bleu dans table) . Ce qui revient à visualiser $Y * [R S T] = [S T R]$ et $X * [R S T] = [T R S]$.

- Quelle forme géométrique planaire simple peut-être associée à cette table avec toujours X rotation de la forme en anti-horaire, Y en horaire , et avec R, S, T correspondant aux réflexions par rapport à trois droites de symétries des points/sommets de la dite forme ? En nommant des points, vérifier quelques relations de la table par cette géométrie.

• **Exercice (suite) :**

On considère cette fois la forme géométrique planaire ci-dessous.



En considérant cette fois-ci les lettres Id, X, Y, R, S et T comme représentant les rotations (de 0, 1/6 à 5/6 de tour respectivement, soit $2k\pi/6$, $k=0$ à 5), remplir la nouvelle table de Cayley associée à cette figure.

*	Id	X	Y	R	S	T
Id						
X						
Y						
R						
S						
T						

Ces deux dernières tables constituent les deux groupes à six symétries.

• **Remarque :** C'est en comparant les deux tables associées à deux décors et motifs d'apparences différentes sur les murs de l'Alhambra (Grenade, en Espagne) que l'on comprit qu'ils étaient deux expressions différentes d'un même groupe (et donc présentait la même table !). A ce titre seulement 17 groupes différents de symétries existent et sont envisageables à deux dimensions, pas un de plus.

• **Exercice :**

Le but de cet exercice est d'étudier la notion de **produit de deux groupes** puis d'établir la table de Cayley de ce nouveau groupe produit. On rappelle les deux tables de Cayley associées aux groupes de la catégorie cyclique d'ordre 2 noté C_2 (ou 'mod 2' d'opération interne additive +) et C'_2 (muni de l'opération interne '.').

+	0	1
Mod2		
0	0	1
1	1	0

.	e	a
e	e	a
a	a	e

On considère ainsi le groupe produit $C_2 \times C'_2$ qui s'appuiera sur l'extension et couplage des deux opérations internes '+' et '.' en $(0, e) +/ (1, a) = (0 + 1, e \cdot a)$.

Quels sont les quatre couples d'éléments de ce groupe produit $C_2 \times C'_2$?

Donner le tableau/table de Cayley de ce groupe produit $C_2 \times C'_2$.

+/.	(0, e)	(0, a)	(1, e)	(1, a)
(0, e)				
(0, a)				
(1, e)				
(1, a)				

Ce groupe est-il isomorphe au groupe cyclique C_4 ou bien au groupe de Klein ? Etablir la correspondance entre les couples résultats de la table et les éléments du groupe auquel il est isomorphe.

- Evaluer $E * B$ et conclure sur la commutativité du groupe.
- En déduire que la table représentant les relations de compositions de ce groupe s'écrira :

*	A	B	C	D	E	F
A	A	B	C	D	E	F
B	B	C	A	E	F	D
C	C	A	B	F	D	E
D	D	F	E	A	C	B
E	E	D	F	B	A	C
F	F	E	D	C	B	A

- Trouver toutes les tables qui représentent les sous-groupes du 'groupe 2' précédent ou permutations/arrangements de trois livres (aide il y en a six différents du groupe précédent ou sept si on le compte aussi). Ecrire les six autres ci-dessous :

*	A
A	A

...

Remarques : on pourra appeler le groupe précédent étudié 'groupe 2' dans ce type d'exercice permutations/arrangements de livres car le 'groupe 1' est défini par la permutation de deux livres (exercice plus simple) avec une table d'opération de type :

*	A	B
A	A	B
B	B	A

Et d'ailleurs un (son) sous-groupe sera :

*	A
A	A

La dimension du 'groupe 3' associé quant à lui aux permutations/arrangements de quatre livres est plus impressionnante les éléments colonne guide (respectivement ligne guide) pouvant se noter $\{A, B, C, D, \dots, U, V, W, X\}$ représentant ainsi vingt-quatre réarrangements possibles.

▪ Exercice :

Démontrer que la formation d'un nouveau groupe $C_2 + C_2$ induira alors les éléments couples suivants puis une loi additive du nouveau groupe $C_2 + C_2$ représentée par la table suivante :

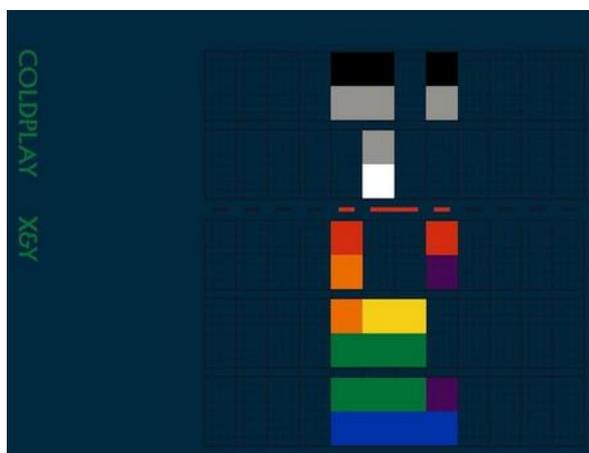
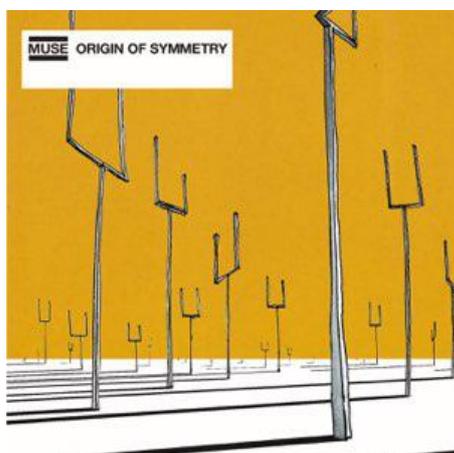
+	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(1, 0)	(0, 1)	(1, 1)
(1, 0)	(1, 0)	(0, 0)	(1, 1)	(0, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(1, 1)	(0, 0)	(1, 0)
(1, 1)	(1, 1)	(0, 1)	(1, 0)	(0, 0)

On rappelle que la table du groupe cyclique C_2 (ou 'mod 2') est :

\oplus Mod2	0	1
0	0	1
1	1	0

(le signe $\hat{}$ est ôté pour simplification sur les éléments $\{0, 1\}$)

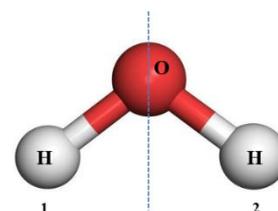
Après le rangement de livres et tables des opérations associées, on peut souligner que certains artistes se sont intéressés à la symétrie et notion de groupes, en littérature et poésie (suite de vers par contrainte linguistique), en décoration et mosaïques 2D, en musique (certains par les partitions musicales et sonorité, d'autres par le dessin...). A titre d'exemple la pochette de disque de 2001 « Origin of Symmetry » du groupe anglais de rock MUSE (gauche, infra). Enfin, concernant la pochette de disque du troisième album studio nommé « X&Y » du groupe britannique Coldplay, influencé par la musique électronique, on peut se demander si les artistes n'ont pas inscrit en colonne leur titre en blocs de couleurs (que l'on codera 1) et de non couleur (codé 0 si vide de couleurs). En effet la première colonne se coderait ainsi 10111 (le X en code Baudot¹⁵) puis 10101 (le Y) en dernière colonne ?



II.3) Symétries, groupes et représentation matricielle en sciences physiques et chimiques

• Exercice :

Si une molécule coïncide avec elle-même après avoir subi une opération de symétrie par rapport à un élément, on dit qu'elle admet cet élément comme élément de symétrie. Ce croquis représente la molécule d'eau. On remarque qu'une symétrie axiale permet d'opérer une réflexion R de la structure moléculaire de telle manière qu'elle reste essentiellement inchangée, laquelle ? Il est aussi possible d'allouer l'opération Id. Ecrire la table produit définie uniquement par ces deux symétries/opérations R et Id successives. En se limitant à ces deux symétries, est-ce la table d'un groupe ?



Par la suite, pour ces symétries/groupes ponctuels, on notera l'axe de symétrie axiale comme un axe de rotation d'angle $\theta = 2\pi/q = \pi$, noté axe $A_{q=2}$ ou axe A_2 ou axe binaire 2, on parle d'un axe de symétrie d'ordre 2 (notations correspondantes aux symboles et classification de Hermann-Mauguin pour les cristaux que l'on utilisera ensuite pour les symétries des effets physiques couplés ou non)¹⁶. La molécule d'eau H_2O (de forme triangle isocèle avec un angle proche de 105° entre les deux liaisons O-H) appartient à un groupe dénommé $2mm$ dans ce type de classification. Le symbole 'm' représente une symétrie 'miroir' ou 'plan de réflexion'. Spécifier sur le schéma moléculaire les deux miroirs laissant globalement la molécule d'eau inchangée. On remarque que la molécule d'eau n'est pas centro-symétrique.

¹⁵ Le code Baudot (1874) est historiquement un des premiers codages des caractères binaires (plus ancien que ASCII).

¹⁶ En chimie moléculaire utilise d'autres notations de type axe C_q (pour les axes A_q) d'autres notés U, puis $\sigma_{h,v}$ pour les symétries de plans horizontaux ou verticaux (pour le miroir/plan de réflexion 'm'), etc.

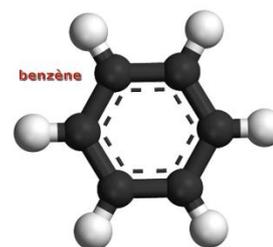
▪ Exercice :

Comprendre avec un schéma que les molécules HCl (non centro-symétrique) puis H₂ (centro-symétrique) présentent les symétries ∞m puis ∞/m respectivement.

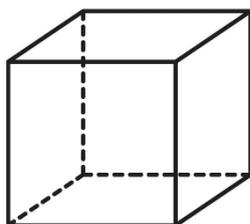
▪ Exercice :

Lister toutes ou plusieurs des opérations de symétries de rotations A_q, axes de symétrie et réflexion par rapport à un plan miroir m de la molécule de benzène (on considèrera les six liaisons C-H identiques).

Remarque : son groupe pourra se noter 6/mmm en notation de Hermann-Mauguin et sa molécule est d'ailleurs centro-symétrique.



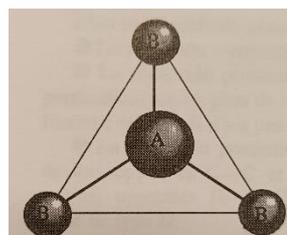
▪ Exercice :



On considère un cube et ses éléments de symétries. Toujours avec classification de Hermann-Mauguin, représenter/visualiser les axes de symétries de ce cube à savoir trois axes quaternaires ou A₄, quatre axes ternaires ou A₃ puis six axes binaires ou A₂. Seriez-vous capable de visualiser des symétries 'miroir' ou plan de symétrie ?

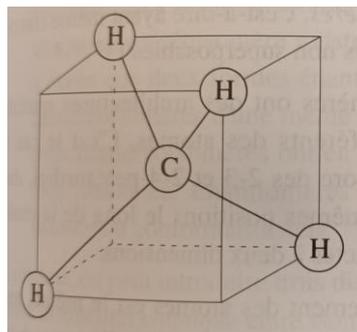
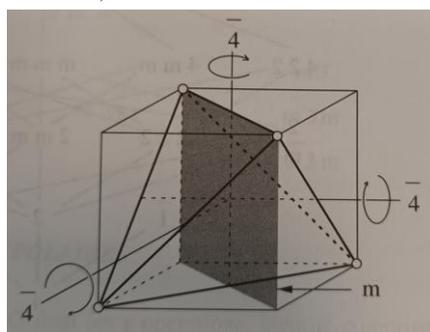
▪ Exercice :

On considère une molécule plane que l'on notera AB₃, avec l'atome A au centre d'un triangle équilatéral dont les sommets sont occupés par les atomes B. Déterminer les éléments de symétrie de cette molécule. Etudier/déterminer les transformations de ces symétries (exemple : molécule BF₃)

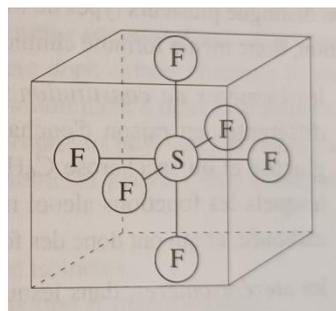


▪ Exercice :

On considère la symétrie du tétraèdre régulier inscrit dans le cube de la figure gauche infra (à titre d'exemple les trois axes \bar{A}_4 ou $\bar{4}$ perpendiculaires aux faces du cube et un des six miroirs 'm' est représenté (chaque miroir contient chacun une arête).



Quel autre type d'axes A_q ou q n'a pas été représenté sur la figure de gauche bien qu'étant axe de symétrie (q = ?). Combien y a-t-il de tels axes? En déduire alors le groupe de symétrie de la molécule CH₄ (figure de droite supra).

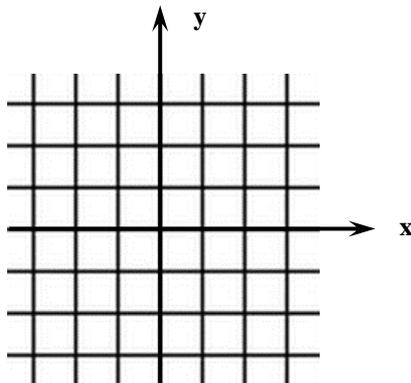


▪ Exercice :

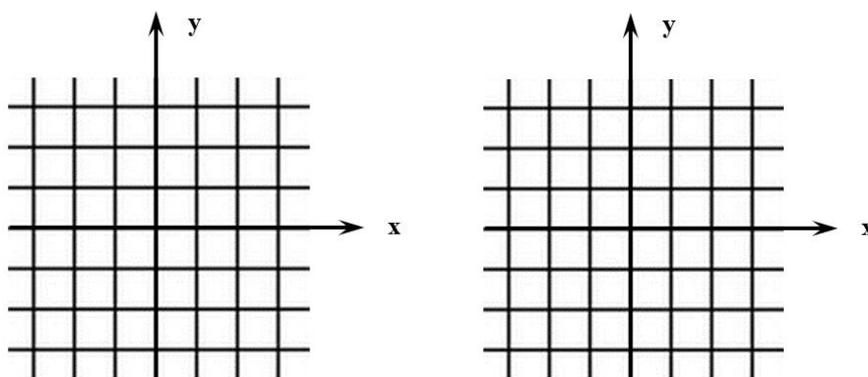
Quelle est la symétrie de la molécule octaédrique SF₆ inscrite dans cette géométrie cube ?

• **Exercice :**

On considère la matrice diagonale $S_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ainsi que les vecteurs du plan $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ puis $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Représenter les quatre vecteurs ; calculer les quatre nouveaux vecteurs chacun produit de type $S_1 \cdot \vec{v}_i$ ($i=1$ à 4), puis les représenter aussi ci-dessous. Quelle est l'action géométrique de la transformation représentée par la matrice S_1 ?



On considère la **matrice antidiagonale** $\mathcal{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ puis la matrice $\mathcal{R}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Répondre aux mêmes questions que précédemment pour les deux matrices.



Calculer le produit matriciel $(\mathcal{R}_2)^2 = \mathcal{R}_2 \cdot \mathcal{R}_2$. Conclure.

Calculer le produit matriciel $(\mathcal{R}_2)^4 = (\mathcal{R}_2)^2 \cdot (\mathcal{R}_2)^2$. Quelle symétrie représente le résultat final ?

Calculer le produit matriciel $(\mathcal{R}_2)^8 = (\mathcal{R}_2)^4 \cdot (\mathcal{R}_2)^4$. Quelle opération représente le résultat final ?

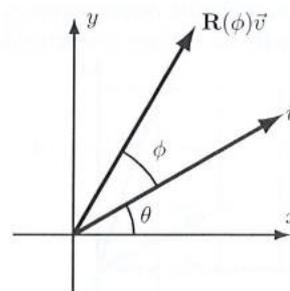
• **Exercice :**

On s'intéresse à la **matrice rotation**, d'angle ϕ , que l'on notera $\mathcal{R}_\phi = \mathcal{R}(\phi)$. Le but est d'étudier son application sur un vecteur \vec{v} puis de déterminer les composantes de cette matrice $\mathcal{R}_\phi = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{xx} & \mathcal{R}_{xy} \\ \mathcal{R}_{yx} & \mathcal{R}_{yy} \end{pmatrix}$ de dimension 2×2 . On remarquera que l'abscisse x et l'ordonnée y ont bien le rôle de ligne et colonne en indice.

A partir du schéma, écrire les composantes de ce vecteur \vec{v} fonction de sa norme $\|\vec{v}\| = v$ et de l'angle θ , ainsi que les composantes du vecteur $\mathcal{R}_\phi \cdot \vec{v}$ en fonction de la norme v et de l'angle $(\theta + \phi)$.

On cherchera à déterminer les quatre composantes \mathcal{R}_{xx} , \mathcal{R}_{xy} , \mathcal{R}_{yx} , \mathcal{R}_{yy} de la matrice \mathcal{R}_ϕ . Pour ceci effectuer et calculer le produit \mathcal{R}_ϕ par \vec{v} puis l'égaliser avec le résultat précédent $(\mathcal{R}_\phi \vec{v})$. En déduire, en les identifiant précisément que les quatre composantes de la matrice \mathcal{R}_ϕ ne dépendent que de l'angle ϕ (et pas de v et θ).

Vous utiliserez les deux identités trigonométriques :



$$\sin(\theta + \phi) = \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi$$

$$\cos(\theta + \phi) = \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi$$

▪ **Exercice :** Considérons les matrices carrées 2×2 suivantes : $\text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Que donne les produits de deux matrices parmi A, B et C ? A quel groupe appartiennent ces éléments matrices muni de la loi multiplication \times ? Ce groupe est d'ailleurs défini par le produit cartésien de C_2 par lui-même.

Remarque : ces matrices étant diagonales, vous auriez pu considérer les quatre couples $(1 \ 1)$, $(-1 \ 1)$, $(1 \ -1)$, $(-1 \ -1)$ munis de la multiplication en loi interne.

II.4) Opérations sur les matrices, déterminants, traces, valeurs et vecteurs propres, matrice de passage, relation de commutation : utilisation en sciences physiques

Il est considéré connu à ce stade l'addition et la multiplication des matrices ainsi que le calcul de l'inverse d'une matrice¹⁷. Revoir aussi le calcul de déterminants (G. Cramer, règle de P. Sarrus).

▪ **Exercice en guise de vérification :** Soit A la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ et B la matrice de $M_{2,3}(\mathbb{R})$ définies par : $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Si elles ont un sens, calculer les matrices AB, BA, A^2 , B^2 et $A+2.\text{Id}$.

▪ **Exercice en guise de vérification :** Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $AC = -2.\text{Id} = CA$. En partant de ces deux égalités, en déduire que l'inverse de A, noté $A^{-1} = -\frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. De même calculer l'inverse C^{-1} .

▪ **Exercice en guise de vérification :** Soit M la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le déterminant de M, sa comatrice et en déduire que l'inverse de M noté $M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

▪ Exercice :

Les **matrices de Pauli** développées par Wolfgang Pauli (1900-1958), forment au facteur i près (avec $i^2 = -1$) une base de l'algèbre de Lie du groupe $SU(2)$. Ces matrices complexes de dimensions 2×2 sont utilisées pour représenter la **notion de 'spin' en physique quantique**. Elles s'écrivent :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

▪ Démonstration de quelques identités et propriétés :

- Calculer $(\sigma_1)^2$, $(\sigma_2)^2$ puis $(\sigma_3)^2$. Conclure en fonction de la matrice identité $\text{Id}_{2 \times 2}$.
- Démontrer que $\sigma_i \sigma_j = i.\sigma_k$ pour respectivement $(i, j, k) = (1, 2, 3)$ en permutation circulaire.
- Démontrer que $\sigma_i \sigma_j = -\sigma_j \sigma_i$ pour $i \neq j$ de valeurs parmi 1, 2 ou 3.

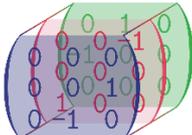
▪ Vérifier ces deux propriétés, $\forall i = 1, 2, 3$:

- $\det(\sigma_i) = -1$
- $\text{Tr}(\sigma_i) = 0$

▪ Valeurs et vecteurs propres :

¹⁷ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot {}^t\text{com} A$, avec $\det =$ déterminant, $t =$ transposée et $\text{com} =$ comatrice.

- Démontrer que les valeurs propres de chaque matrice de Pauli sont ± 1 .
- Calculer les vecteurs propres associés à ces valeurs propres pour chaque matrice de Pauli. Démontrer que ceux-ci sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ pour σ_1 , puis $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ pour σ_2 , et enfin $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour σ_3 .
- Relation de commutation (pour rappel le commutateur $[A,B] = AB - BA$)
- Vérifier sur quelques exemples (i, j, k) que $[\sigma_i, \sigma_j] = 2 \cdot i \cdot \sigma_k \cdot \epsilon_{ijk}$, avec ϵ_{ijk} le symbole de Levi-Civita.

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i. \end{cases}$$


i profondeurs, j lignes, k colonnes

En physique quantique, il existe aussi les matrices de Dirac proposées par Paul A.M. Dirac (1902-1984) qui sont hermitiques/hermitiennes (c'est-à-dire la matrice est égale à sa propre transposée conjuguée), de propriétés anti-commutantes et de carré égal à 1. Elles sont utilisées entre autre pour l'équation d'onde relativiste de l'électron. Ces matrices de Pauli forment une base de l'espace vectoriel des matrices hermitiennes complexes (2x2) ; cet espace vectoriel est aussi équivalent à l'ensemble des quaternions¹⁸. Le groupe des quaternions est l'un des deux groupes non abéliens d'ordre 8, mais il admet une représentation irréductible de degré 4 qui s'identifie au corps des quaternions de Hamilton.

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

L'approche par les quaternions et sa programmation associée sont utilisées pour simuler et optimiser les rotations dans l'espace (applications en simulateurs, jeux).

• Exercice :

Lire cet extrait de texte (Hors-série n°44 thématique du journal Tangente « Matrices ») sur la notion de matrice de changement de base.

• Théorème (matrice de passage, changement de bases)

◦ Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux bases d'un espace dit vectoriel et P la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' .

$$\begin{matrix} \mathcal{B}' & \xrightarrow{P} & \mathcal{B} \\ \mathcal{B}' & \xleftarrow{P^{-1}} & \mathcal{B} \end{matrix}$$

Si pour tout endomorphisme noté f de E , l'on note A (respectivement A') la matrice de f dans la base \mathcal{B} (respectivement \mathcal{B}'), alors on a $A' = P^{-1}AP$.

Les deux matrices A et A' sont alors dites *semblables* si P existe.

De manière à retenir la convention, **la matrice de passage P donne les anciennes coordonnées X en fonction des nouvelles X' , soit $P \cdot X' = X$** , ou encore la matrice de passage P contient en colonne les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base exprimées dans l'ancienne base.

Le même vecteur, exprimé dans deux bases différentes \mathcal{B} et \mathcal{B}' , s'écrit de deux façons :

$$\vec{v} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \text{ et } \vec{v} = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + \dots + x'_n e'_n.$$

Pour exprimer les coordonnées dans l'une des bases en fonction des coordonnées dans l'autre base, on va construire la matrice de changement de base. Voici un exemple en dimension 3.

On exprime les éléments de la base \mathcal{B}' dans la base \mathcal{B} :

$$\begin{aligned} e'_1 &= a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + a_{31} e_3 \\ e'_2 &= a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + a_{32} e_3 \\ e'_3 &= a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + a_{33} e_3 \end{aligned}$$

La matrice de changement de base associée est :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Exprimons alors le vecteur $\vec{v} = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3$.

$$\begin{aligned} \vec{v} &= x'_1 (a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + a_{31} e_3) + x'_2 (a_{12} e_1 + a_{22} e_2 + a_{32} e_3) \\ &\quad + x'_3 (a_{13} e_1 + a_{23} e_2 + a_{33} e_3) \\ \vec{v} &= (a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + a_{13} x'_3) e_1 + (a_{21} x'_1 + a_{22} x'_2 + a_{23} x'_3) e_2 \\ &\quad + (a_{31} x'_1 + a_{32} x'_2 + a_{33} x'_3) e_3 \end{aligned}$$

Cette dernière expression est à comparer à : $\vec{v} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$. La décomposition dans la base \mathcal{B} étant unique, on peut identifier les coefficients.

On reconnaît le produit matriciel :

$$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}.$$

¹⁸ En mathématiques, les quaternions sont des nombres qui englobent les nombres réels et complexes dans un système de nombres 'hypercomplexes' plus vaste où la multiplication n'est cette fois-ci plus une loi commutative. Les quaternions furent introduits par William Rowan Hamilton (1805-1865).

• **Exercice :**

Soit un système (S) d'équations qui s'écrit sous forme matricielle dans la base \mathcal{B} en $Y_{\mathcal{B}} = M.X_{\mathcal{B}}$, avec M une matrice diagonalisable à valeurs propres réelles, puis sous forme matricielle dans la base \mathcal{B}' en $Y_{\mathcal{B}'} = D.X_{\mathcal{B}'}$. Dire que M est diagonalisable signifie qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D (celle des valeurs propres). Le schéma est le suivant :

$$\begin{array}{ccc} X_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{M} & Y_{\mathcal{B}} \\ \uparrow P & & \uparrow P \\ X_{\mathcal{B}'} & \xrightarrow{D} & Y_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

Ecrire plusieurs relations matricielles issues du schéma supra... En partant de ces relations, par exemple de $Y_{\mathcal{B}} = P.Y_{\mathcal{B}'}$, démontrer la relation $M = P.D.P^{-1}$.

• **Définitions (valeurs propres et vecteurs propres associés)**

Comme mentionné précédemment, la **matrice D diagonale**, représentant l'endomorphisme dans la base \mathcal{B}' , sera un choix intéressant pour traiter le problème mathématique ou de sciences physiques (comme les propriétés physiques anisotropes de matériaux) car ce choix de base apportera une simplicité dans les calculs pour les objets, les propriétés et les lois considérées. On peut d'ailleurs imaginer tous les coefficients de la matrice M se modifier lorsque l'on effectue une rotation dans l'espace considéré ou encore que l'on regarde les propriétés sous un autre « angle de vue » (dans d'autres bases) puis d'imaginer enfin une base spéciale \mathcal{B}' qui simplifie la matrice fortement en l'a rendant tout simplement diagonale (des zéros 'partout' sauf sur la diagonale où les dites valeurs propres émergent).

Il est ainsi nécessaire de savoir calculer la matrice D (base \mathcal{B}') à partir de la matrice M (base \mathcal{B}). Ensuite à **chaque valeur propre scalaire λ sera associée à au moins un vecteur propre colonne X par la relation matricielle** ($i=1$ à n avec un espace de dimension n) :

$$M.X_i = \lambda_i X_i$$

Le sous-espace propre (vectoriel) pourra se noter par exemple : $E_{\lambda} = \{X / M.X = \lambda X\}$. La somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à la dimension n de l'espace total. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes formeront une famille libre.

Le calcul des valeurs propres se fera précédemment par le déterminant $|M - \lambda.Id| = 0$. Le développement de cette expression se nomme le polynôme caractéristique et λ sont les racines de celui-ci. De plus, ce déterminant vaut aussi : $\det |M - \lambda.Id| = \lambda^2 - \text{tr}(M).\lambda + \det|M|$. Voir de plus le théorème de Cayley-Hamilton liant le polynôme caractéristique précédent au polynôme minimal (annulation lorsque λ remplacée par M).

Remarque : il y a plusieurs 'possibilités', si l'on change l'ordre des vecteurs propres de la matrice de passage P on change alors l'ordre des coefficients diagonaux ou valeurs propres de D .

• **Exercice**

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme caractéristique, montrer que l'on peut l'écrire $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 3)$; le polynôme caractéristique de M est dit scindé en produit de deux polynômes de degré un avec ces deux racines simples ; comme la dimension de l'espace est deux ($M_{2 \times 2}$) alors M peut-être diagonalisable (la multiplicité de chaque racine étant 1). Vérifier que $M^2 - \text{tr}(M).M + \det|M|.Id_{2 \times 2} = 0_{2 \times 2}$. Le polynôme provoque bien l'annulation de cet endomorphisme (ou de cette matrice M).

En déduire les racines et donc que les valeurs propres sont respectivement -1 et 3 de la matrice M . Ecrire D .

• **Exercice**

Soit la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres associés. En déduire la matrice diagonale D et de passage P .

• Exercice

La **molécule d'ammoniac** NH_3 est constituée de trois atomes d'hydrogène formant la base d'un tétraèdre dont l'atome d'azote occupe le sommet. On se propose de décrire le phénomène de passage des trois atomes d'hydrogène de part et d'autre de l'atome d'azote appelé inversion de l'ammoniac. Dans un but simplificateur, on ignore tous les états de la molécule d'ammoniac autres que les deux états de *même énergie* E_0 correspondant à l'atome d'azote d'un côté ou de l'autre du plan des atomes d'hydrogène. Faire un schéma des atomes de la molécule NH_3 dans les deux positions¹⁹ (on appellera [Ox) un axe passant par exemple l'atome d'azote N et perpendiculaire au plan défini par les trois atomes d'hydrogène H) L'enseignant fera un parallèle avec la notion de double puit de potentiel $V(x)$ correspondant aux deux possibles états de la molécule s'inversant.

• On en rend compte, de façon phénoménologique, en introduisant un élément non diagonal noté A dans la matrice H représentant l'hamiltonien²⁰ de la molécule d'ammoniac. Celui-ci s'écrit donc dans la base considérée :

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & -A \\ -A & E_0 \end{pmatrix}$$

- Calculer les valeurs propres qui représenteront les nouvelles énergies E_S et E_A (Symétrique et Anti-symétrique) du système décrit par H. On montera que $E_A = E_0 + A$ et $E_S = E_0 - A$.

- Démontrer, par la méthode précédente définie des calculs des vecteurs propres, que la recherche du vecteur propre $X \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre d'énergie E_A impose $a = -b$; on pourra aussi montrer que le vecteur propre $Y \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre d'énergie E_S impose $a' = b'$.

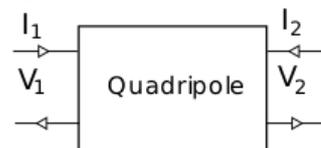
• Cette molécule d'ammoniac est plongée dans un champ électrique ξ statique et uniforme. On montre alors en physique quantique qu'en représentation matricielle de l'Hamiltonien (nouvelle interaction de la molécule d'ammoniac avec le champ électrique ξ il est nécessaire d'ajouter la nouvelle matrice $H'(\xi)$ avec μ qui représente ici et se nomme le moment dipolaire.

$$H'(\xi) = \begin{pmatrix} -\mu \xi & 0 \\ 0 & +\mu \xi \end{pmatrix}$$

Ecrire la matrice du nouveau Hamiltonien total $H_T = H + H'(\xi)$. Calculer les nouvelles énergies notée E_+ et E_- (ou valeurs propres) de la matrice H_T représentant le système molécule d'ammoniac pouvant s'inverser sous application d'un champ électrique ξ . On montrera que $E_{\pm} = E_0 \pm \sqrt{\mu^2 \xi^2 + A^2}$.

• Culture générale

En **électrocinétique et électronique**, les **quadripôles** (deux ports électriques) sont représentés sous forme de matrices reliant les courants et tensions, dont les termes dépendent éventuellement de la fréquence. A partir de ce formalisme, les fonctions de transfert des éléments successifs, les coefficients d'amplifications (gains) peuvent ainsi être calculés. Cette formulation matricielle permet un paramétrage de la ligne en impédances, admittances ou autres paramètres hybrides pour les transistors. Enfin, si l'on raisonne en ondes de courant et de tension (ondes incidentes et réfléchies), un autre formalisme existe basée sur la matrice de diffusion et ses paramètres S.



II.5) Pour aller plus loin : matrices pour la physique des matériaux et les composants: représentation des systèmes anisotropes, propriétés physiques simples et couplées

L'origine de l'anisotropie (le caractère non isotrope d'une propriété physique) vient tout d'abord du microscopique et de la cristallographie, science chimique et physique qui classe comment les atomes vont s'agencer dans l'espace en cristallisant lors de leur lis en forme, ou en croissant par des techniques modernes de déposition en réacteurs...

¹⁹ En physique quantique, cette inversion est qualifiée de *passage tunnel* des atomes d'hydrogène de part et d'autre de l'atome d'azote.

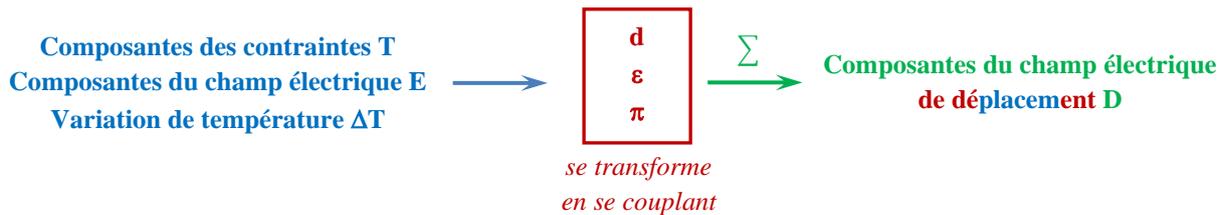
²⁰ L'Hamiltonien est un opérateur mathématique qui a de nombreuses applications en physique, il est lié à l'énergie totale d'un système.

Comme nous l'avons mentionné en introduction, il existe **32 groupes ponctuels (classes de symétrie cristalline)** répertoriées dans l'espace à 3 dimensions correspondant à 230 groupes d'espace des systèmes cristallins (notions de motifs, réseaux, mailles). Suivant quel type d'atomes est considéré et comment ils s'agencent pourra faire émerger telle ou telle propriété en sciences physiques au niveau macroscopique, comme la permittivité ou les propriétés diélectriques des matériaux (l'indice optique aux fréquences du visible), la conductivité de ceux-ci, leurs propriétés piézoélectriques (couplant la mécanique et l'électricité), leurs réponses thermiques comme la dilatation, puis pyroélectrique (couplant la thermique et l'électricité), les réponses mécaniques des matériaux et leurs résistances (rigidité, contraintes et déformations, élasticité), leurs propriétés thermodynamiques (entropie)...

Dans l'ouvrage de J.F. Nye nommé « Physical properties of Crystals » (voir bibliographie en fin d'introduction), il est possible de représenter ces propriétés physiques anisotropes simples ou couplées en des tableaux/matrices 10 x 10 et de les classer suivant les symétries et groupes utilisés en cristallographie. Ces matrices 10x10 prennent la forme générale infra, permettant de lier les propriétés physiques (et aussi les grandeurs, champs ou autre) entre elles. Comprendre avec l'enseignant comme fonctionne ce Tableau.

Grandeurs couplées Couplage de la Physique	Contraintes T	Champ Electrique \vec{E}	Température ΔT
Déformations S	Mécanique Elasticité <i>Matrice rigidité $C_{(6 \times 6)}$</i> <i>(contraction d'un tenseur d'ordre 4)</i>	Piézo-électricité inverse' <i>Matrice $d_{(6 \times 3)}$</i> <i>(contraction d' un tenseur d' ordre 3)</i>	Dilatation <i>Matrice $\alpha_{(6 \times 1)}$</i>
Champ Electrique \vec{D}	Piézo-électricité 'directe' <i>Matrice $d_{(3 \times 6)}$</i> <i>(contraction d'un tenseur d'ordre 3)</i>	Permittivité Diélectrique <i>Matrice $\epsilon_{(3 \times 3)}$</i>	Pyro- électricité <i>Vecteur $\pi_{(3 \times 1)}$</i>
Entropie ΔS	Thermodynamique couplée...	au reste de la	physique

En tenseur (notation non contractées) la ligne jaune du tableau 10 x 10 exprime le vecteur déplacement électrique \vec{D} (3x1) couplé et créé à diverses effets physiques : en fonction de la variation de polarisation \vec{P} (3 x1) créée par les contraintes T (effet piézoélectricité $P_i = d_{i\alpha} T_\alpha$), en fonction du champ électrique \vec{E} (3 x1) (permittivité diélectrique) puis en fonction de la variation de température ΔT . La relation complète s'écrit après une opération de contraction (en utilisant les notations de Voigt) sur les tenseurs piézoélectriques et contraintes : $D_i = d_{i\alpha} T_\alpha + \epsilon_{ij} E_j + \pi_i \Delta T$, avec tous les symboles i, j variant de 1 à 3 ou encore {1,2,3} puis α variant de 1 à 6 ou {1,2,3,4,5,6}. En pur électromagnétisme vous verrez tout d'abord cette relation sous la forme des deux premier terme $D = \epsilon E + P$, à savoir le nouveau champ électrique D de déplacement est fonction du champ électrique E appliqué sur le matériau de permittivité ϵ plus la polarisation P de ce matériau (ce dernier s'étant polarisé sous l'action de E) On peut représenter la relation tensorielle précédente et ses couplages multi-physiques par un schéma de type :



• Exercice

Comprendre que la relation précédente liant ces grandeurs (voir aussi ligne jaune du Tableau) s'écrit en notation matricielle sous la forme :

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{pmatrix}_{3 \times 6} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{pmatrix}_{6 \times 1} + \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}_{3 \times 3} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} + \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}_{3 \times 1} \Delta T$$

Vérifier les dimensions des matrices lignes/colonnes pour que les produits des matrices soient bien possibles.

• Ainsi les matrices puis les tenseurs seront des êtres mathématiques utilisés pour représenter les propriétés physiques anisotropes des matériaux. Chaque coefficient constituant ces matrices et tenseurs représente la valeur de la propriétés dans une direction donnée de l'espace. Par exemple, la permittivité (et donc l'indice optique au carré aux 'fréquences optiques') est un tenseur d'ordre deux : il sera ainsi représenté par une matrice 3×3 avec 9 termes pour un espace de dimension trois²¹.

• Exercice

- Ecrire cette matrice en spécifiant ses termes un numéro de lignes/colonnes.

- Sur cette exemple de matrice des permittivités en optique *anisotrope* (= propriétés optiques non identiques suivant les directions 1, 2, 3 ou x, y, z en repère cartésien 3D), expliciter le sens physique des notions valeurs propres et des vecteurs propres relatives à cette matrice de permittivité en physique (ou matrice d'indice optique aux 'fréquences optiques' comme les UVs, le visible, les infrarouges) ; s'aider des notions mathématiques relatives aux calculs des valeurs et vecteurs propres d'une matrice.

Remarques (hors programme) : En physique les contraintes T et les déformations S sont aussi représentées par des tenseurs d'ordre deux ; la rigidité d'un matériau par un tenseur d'ordre quatre car ce dernier fera les liens entre les contraintes et les déformations (tous deux tenseurs d'ordre deux) ; les propriétés électro-optique d'un matériau sont représentées par un tenseur d'ordre trois (comme un rubik's cube : objet 3×3×3 avec 27 termes toujours pour un espace de dimension trois) qui pourra se contracter en notation matrice 6x3 (comme le tenseur piézoélectrique du Tableau précédent). Ainsi lorsque l'ordre des tenseurs augmente, il existe des techniques de contractions de ceux-ci en terme de notation de manière à les écrire et les décrire plus facilement²² sur un support 2D une feuille ou un tableau en cours ! L'enseignant vous expliquera cette technique de contraction (notations de Voigt) transformant les indices lettres latines i, j, ou k variant de 1 à 3 (dans un espace en 3 dimensions spatiales) en indices lettres grecques α, β ou γ variant de 1 à 6.

• Exercice

A partir de l'expression de la loi de Hooke généralisée ou tensorielle reliant les contraintes T aux déformations S, à savoir $T_{ij} = C_{ijkl} S_{kl}$ (avec tous ces indices variant de 1 à 3), T_{ij} représentant une contrainte sur la « face j » (ou face perpendiculaire à l'axe x_j) dans la direction i (ou x_i). Ecrire cette loi en notation contractée avec deux symboles

²¹ Un tenseur d'ordre un est un vecteur, d'ordre 0 un scalaire.

²² Les indices des tenseurs i, j, k, l ... ne varieront plus de 1 à 3 (dimensions de notre espace), mais les nouveaux indices des tenseurs contractés α, β, γ ... de 1 à 6.

α et β (variant quant à eux de 1 à 6). En déduire en écrire matricielle associée la dimension (ligne/colonne) et forme de la relation/loi de Hooke en notation matricielle.

• Exercice

Même exercice que le précédent à partir de la loi traduisant l'effet piézoélectrique direct $P_i = d_{ijk} T_{jk}$, à savoir la susceptibilité d'un matériau à se polariser (ou polarisation induite) sous l'action d'une contrainte.

• Exercice

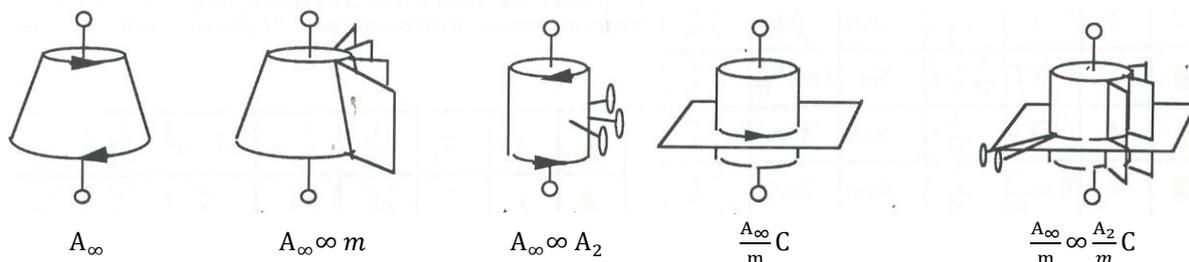
Dans cet exercice, nous raisonnons au sein d'un espace à trois dimensions spatiales. Une propriété scalaire possède $3^0 = 1$ composante/terme, un scalaire peut être vu comme un tenseur d'ordre 0 ; donner un exemple de champ scalaire en physique. Un vecteur possèdera $3^1=3$ composantes/termes ; donner trois exemples de champs vectoriels en physique. Un tenseur d'ordre 2 se représentera par une matrice carré de $3^2 = 9$ termes ; donner un exemple de tenseur d'ordre deux en physique. Comme nous l'avons mentionné un tenseur d'ordre 3 présentera possiblement 27 termes, combien de termes peut contenir un tenseur d'ordre 4 ? Citer un tenseur d'ordre 4 en science physique. A noter que l'ensemble de ces nombres de termes représentent *une propriété physique en un seul point de l'espace*.

• **Suivant la symétrie cristalline (agencement des atomes à l'échelle microscopique) ou moléculaires, les matrices et tenseurs relatifs à l'ensemble des propriétés physiques macroscopiques des matériaux présenteront plus ou moins de termes non nuls. A ce titre voir l' [Annexe I « Matériaux »](#) classant les matrices (ou tableau 10 x 10 précédent) représentatives des principaux tenseurs par rapport à leurs symétries cristallines ou science de la cristallographie.**

On remarque que suivant les classes de symétries des matériaux tous ne présentent pas les mêmes formes ou termes de matrices/tenseurs non nuls et nuls ; ainsi certains seront siégent d'un effet physique dans la direction concernée alors que pas d'autres²³ ; enfin les valeurs plus ou moins grandes des éléments des matrices/tenseurs régleront 'la puissance' de l'effet associé. **Les possibles effets physiques (couplés ou non) et les propriétés des matériaux découlent ainsi directement des symétries cristalline des cristaux (voir vos cours) qui définit des axes de rotations d'ordre q notés « A_q » pour les rotations d'angle $(2\pi/q)$, les symétries miroirs notés « m » qui peuvent aussi se coupler « $A_q m$ » correspondant au miroir passant par l'axe A_q ou encore « A_q/m » correspondant à un miroir perpendiculaire à l'axe A_q de symétrie, C des points centre d'inversion ; enfin la notation « \overline{A}_q » représente l'association d'un axe A_q avec un centre de symétrie C , encore appelé axe de roto-inversion. La valeur de q peut tendre et être notée ∞ pour des symétrie de type cylindrique, cône d'objets ou d'effets. A noter que dans certains livres les symétries « A_q » peuvent se noter « q » (voir Annexe I). Ces notations correspondent *aux symboles de Hermann-Mauguin*²⁴ pour ces groupes ponctuels.**

• Exercice

Amusez-vous à comprendre la notation globale des symétries de ces 'représentations/objets orientés'.



²³ En optique anisotrope et télécommunication optiques, les matériaux dits « centro-symétriques » ne présenteront pas d'effet électro-optique Pockels ; celui-ci est nul ou n'existe pas. Par contre tous les matériaux « non centro-symétriques » en auront un et il sera possible par cette effet de moduler/changer la valeur d'un indice optique par l'application d'un champ électrique \vec{E} . Les opticiens parlent de biréfringence. On 'imprimera' ainsi sur de la lumière (sur son amplitude, sur sa phase, sur sa cohérence...), lumière qui est passée dans le cristal, l'information ou le dit signal modulé à transmettre en télécommunications.

²⁴ Il existe aussi une autre notation Schoenflies (ou Schönflies voir Schönflies) utilisée en cristallographie et spectroscopie. En physique spectroscopique, il existera des règles à utiliser basées sur la théorie des groupes des matériaux, molécules...

En physique, il existe les lois de Curie (1881) qui gère *la symétrie des phénomènes et des causes/effets* : les effets ont ‘au moins’ les symétries des causes.

▪ **Exercice** (utilisation des symétries associées à l’annexe I pour étudier l’existence ou non d’un effet physique)

◦ L’**Arséniure de Gallium** (composé chimique **GaAs**, colonne III-V du tableau de présentant 3 et 5 électrons de valence) est un **matériau semi-conducteur dit de la famille « III-V » utilisé par exemple pour la réalisation de diode laser émettant dans le visible** (longueur d’onde rouge), des composants optoélectroniques, des cellules photovoltaïques... Il cristallise en cubique face centrée (CFC) et présente donc une symétrie cubique dite $\bar{4}3m$.

- Quelle est la particularité de sa matrice de permittivité ?

- Est-ce un cristal isotrope ou anisotrope ? Pourquoi.

- On applique un champ électrique $\vec{E} \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur ce matériau GaAs, en utilisant la relation constitutive $D_i = \epsilon_{ij}E_j$

sous forme matricielle (ou tensorielle) en déduire quelle(s) composante(s) de champ électrique de déplacement \vec{D} est créée ?

- Même question en appliquant cette fois-ci un champ électrique $\vec{E} \begin{pmatrix} 0 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$.

▪ **Exercice** (utilisation des symétries associées à l’annexe I pour étudier l’existence ou non d’un effet physique)

◦ On considère un matériau de symétrie cristalline quadratique $\bar{4}2m$.

- Que pouvez-vous dire pour sa matrice de permittivité comparée à l’exercice précédent ? Les matériaux présentant cette symétrie quadratique sont-ils anisotropes d’un point de vue électromagnétique, hyperfréquence et optique ? Expliquer.

- Ecrire la relation constitutive de l’effet piézoélectrique direct. La formuler sous forme matricielle pour les matériaux de symétrie quadratique $\bar{4}2m$.

- L’application d’une contrainte T_2 (contraction de T_{22}) provoque t’elle l’apparition d’une composante P_i de polarisation (et donc d’un vecteur déplacement électrique \vec{D}) ?

- L’application d’une contrainte T_4 (contraction de T_{23} et T_{32}) provoque t’elle l’apparition d’une composante P_i de polarisation induite, si oui laquelle ? Quel coefficient de la matrice $d_{i\alpha}$ a permis ce couplage et effet ?

- L’application d’une contrainte T_5 (contraction de T_{13} et T_{31}) provoque t’elle l’apparition d’une composante P_i de polarisation induite, si oui laquelle ? Cette polarisation est-elle égale à la question précédente ?

- L’application d’une contrainte T_6 (contraction de T_{12} et T_{21}) provoque t’elle l’apparition d’une composante P_i de polarisation induite, si oui laquelle ? Quel coefficient de la matrice $d_{i\alpha}$ a permis ce couplage et effet ? Cette polarisation est-elle égale à la question précédente ?

Remarque : Lors de la conception d’un composant pour telle ou telle application il est donc crucial de tenir compte des symétries cristallines des matériaux utilisés pour sa réalisation, avec en plus l’étude des valeurs des coefficients matriciels maximisant l’effet physique recherché/utilisé.

▪ **Exercice**

Donner des exemples de composants et/ou de technologies utilisant l’effet piézoélectrique (direct $P = d.T$ ou bien inverse $S = d'.E$) ou les deux.

▪ **Culture générale**

La montre à quartz a besoin d’un système oscillant pour pouvoir compter les secondes. Historiquement, le balancier d’un pendule oscille par gravité, une montre mécanique utilise l’oscillation d’une roue dentée sur un ressort spirale et enfin la montre à quartz utilise quant à elle les vibrations entretenues d’un *cristal de quartz*, dont l’oscillation est rendue possible par **effet piézoélectrique** ; c’est le **cristal de quartz** qui se charge de vibrer avec une fréquence très précise et très stable. L’ensemble constitue un *système auto-asservi* et est assuré de fonctionner

sur la *fréquence propre du cristal de quartz* constituant le *diapason*. Il est nécessaire d'utiliser une fréquence suffisamment élevée pour que l'oscillateur puisse être mis dans une montre (lien inversement proportionnel de la dimension d'un objet et des fréquences de vibration, taille du **diapason** assez petit par rapport à la dimension de la montre), une fréquence supérieure à 20 kHz (inaudible pour l'oreille humaine et que votre montre ne provoque point un bourdonnement aigu pour l'utilisateur) puis de puissance de 2 car toute l'électronique et traitement des signaux est numérique (ou binaire 0 et 1). La première puissance de 2 qui satisfait ceci est $2^{15} = 32768$ Hz. Les cristaux de quartz sont donc taillés précisément en diapason vibrant ainsi à leur fréquence propre soit exactement de 32,768 kHz. Alors un compteur binaire sur 15 bit permettra par 15 divisions successives par 2, de transformer la fréquence d'oscillation du quartz en un signal dont la fréquence est de 1 Hz soit la seconde en temps ; un petit moteur relié à un compteur électronique fait bouger la trotteuse chaque fois que le compteur compte 32768 oscillations.



Remarque : Les systèmes de cristaux en vibrations sont partout. C'est un cristal qui produit le signal de 2,4 GHz ou 5GHz du Wi-Fi²⁵ ou du Bluetooth. Et plus généralement, ce sont des cristaux qui permettent d'obtenir les fréquences d'émission et de réception dans n'importe quel système de télécommunication. Les ordinateurs intègrent plusieurs cristaux vibrant: il faut bien compter la fréquence du processeur, la fréquence de la puce WiFi, le débit de l'USB et même tout simplement compter les secondes.

▪ Exercice

En vous documentant si besoin, tenter d'expliquer comment fonctionne une balance à quartz.

▪ Exercice

Le **phosphate de monopotassium ou dihydrogénophosphate de potassium (KDP ou KH_2PO_4)** cristallise dans le système quadratique de symétrie $\bar{4}2m$. La matrice des coefficients piézoélectriques est définie par sa matrice (voir Annexe I Tableaux) puis par $d_{14} = 0.17 \times 10^{-11}$ C/N et $d_{36} = 5.17 \times 10^{-11}$ C/N.

- Peut-on polariser (création d'une polarisation induite) le KDP en exerçant des contraintes normales T_{11} , T_{22} ou T_{33} ?

- Quelle contrainte faut-il exercer pour polariser le KDP selon l'axe Oz ?

▪ Culture générale

Le **niobate de lithium (LiNbO_3)** a été choisi comme matériau de base en photonique intégrée principalement à cause de ses qualités électro-optiques pour les transmissions télécoms en optique. Les composants développés sur ce matériau fonctionnent, pour leur très grande majorité, sur le principe de l'interaction et le couplage électro-optique. Pour cet effet l'application d'un champ électrique module l'inverse de la permittivité $(1/\epsilon_{ij}) = (1/n_{ij}^2)$ avec n_{ij} la matrice des indices optiques. L'effet mis en jeu pour cet effet électro-optique est principalement l'effet Pockels linéaire. En utilisant le tenseur d'ordre 2 appelé d'imperméabilité $[B_{ij}]_{3 \times 3}$ qui représente l'inverse du tenseur de permittivité du matériau, nous allons étudier les conséquences de l'effet électro-optique sur ce cristal, c'est à dire la brisure de symétrie de la matrice $[B_{ij}]_{3 \times 3}$ par l'application d'un champ électrique \vec{E} . En effet, l'application d'un champ électrique \vec{E} via le tenseur d'ordre 3 r_{ijk} (contracté en matrice 6×3 notée $r_{\alpha k}$) des coefficients/propriétés électro-optiques du matériau va induire une variation de l'inverse de la permittivité et donc provoquer l'apparition de nouveaux termes dans la matrice d'imperméabilité, ou de permittivité (ou d'indices optiques) du cristal/matériau. Il sera alors judicieux de diagonaliser la nouvelle matrice (avec ses valeurs propres selon cette diagonale) de manière ensuite à calculer la base des vecteurs propres associés.

²⁵ En France, la fréquence WiFi 2,4GHz compte 13 canaux allant de 2400 à 2483,5MHz. La largeur de chaque canal est donc approximativement de 20 à 22MHz. Celle du WiFi 5GHz compte quant à elle 22 canaux (du numéro 32 au numéro 140) allant de 5150 MHz à 5710 MHz ; la largeur de chaque canal est de 20MHz.

Remarque : Pour une classe de matériau donnée, la symétrie de la matrice électro-optique $r_{\alpha k}$ est la même que celle de la matrice du tenseur piézoélectrique inverse noté $d^t = d_{\alpha k}$, c'est d'ailleurs la seule matrice 6x3 des tableaux 10x10 en Annexe I.

▪ Exercice

Le **niobate de lithium** est un cristal appartenant à la classe cristallographique rhomboédrique 3m (voir Annexe I).

- Montrer que pour un cristal de **LiNbO₃**, le tenseur d'imperméabilité diélectrique non perturbé $[B_{ij}^0]_{3 \times 3}$ (c'est-à-dire non soumis à l'application d'un champ électrique \vec{E}) et la matrice $[r_{\alpha k}]_{6 \times 3}$ associée au tenseur électro-optique sont de la symétrie/forme suivante dans le repère noté R(O,x₁,x₂,x₃), avec les indices i, j, k = 1 à 3 puis $\alpha = 1$ à 6 :

$$[B_{ij}^0]_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{11}(=B_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad [r_{\alpha k}]_{6 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & -r_{12} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{42} & 0 \\ r_{42} & 0 & 0 \\ 2r_{12} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Sous l'action d'un champ électrique \vec{E} de nouvelles variations (ΔB_{ij}) égalent à $\Delta B_{\alpha} = r_{\alpha k} E_k$ sont à ajouter à la nouvelle matrice d'imperméabilité soit : $[B_{ij}^n]_{3 \times 3} = [B_{ij}^0 + \Delta B_{ij}]$. Lorsque l'on applique un champ électrique dirigé selon la direction x₃ du cristal, que l'on notera de composante E₃, donner l'expression de la nouvelle matrice $[B_{ij}^n]_{3 \times 3}$. On notera l'apparition de nouveaux termes induits.

- Calculer les valeurs propres de cette matrice $[B_{ij}^n]$, la diagonaliser.

- Calculer les vecteurs propres \vec{X}_i associés (i=1 à 3). Cette nouvelle base sera plus appropriée et simple pour de futurs calculs sur le cristal/matériau soumis à ce champ électrique (E₃).

▪ Culture générale

- Plusieurs paramètres, phénomènes peuvent provoquer ce que l'on appelle une **brisure de symétrie** en sciences. Par exemple à température élevée (T>573-575°C), le **cristal de quartz** (dit α , polymorphe à basse température) se transforme en quartz β (polymorphe de haute température) et n'est plus vraiment piézoélectrique (voir exercice précédent sur la montre à quartz), ainsi le diapason ne fonctionnera plus à ces températures élevées! La transformation du quartz est dite 'displacive' dans ce cas précis. L'étude des transitions et brisures de symétries est donc importante en sciences.

- Les matrices (représentations des tenseurs) décrivant les propriétés des matériaux, classées par leurs symétries cristallines, sont exprimées dans leur base propre ou le cristal est coupé, polit scié, clivé pour la réalisation de composants... Si le cristal est utilisé pour telle ou telle application selon une orientation différente que les axes x₁, x₂, x₃ (ou x, y, z), alors il sera nécessaire d'utiliser les nouvelles matrices des propriétés qui s'obtiennent comme vous le verrez les années suivantes en multipliant les matrices d'origines par les matrices de rotations (au sens de la mathématique et étudié précédemment). Ainsi le produit matriciel pourra créer de nouveaux termes dans la nouvelle matrice (nouvelle valeur du coefficient voir nouvelle existence et donc non nullité, apparition d'un terme).

III) Groupes : Applications en détection d'erreurs, transmission, information

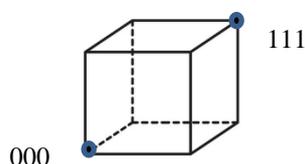
▪ Comme nous l'avons mentionné en introduction, la notion de groupes est fortement transverse à des disciplinaires variés, les mathématiques, les sciences (physiques, chimiques, biologiques toutes avec des séquences codées, des symétries, des groupes), l'art (musique, poésie, décoratif et motifs 2D, sculptures 3D)... La symétrie et donc ses groupes associés sont aussi importants dans le domaine de l'information, en particulier ils peuvent être intéressants en outil pour caractériser l'intégrité des messages, leurs sécurités, science de la cryptologie... Le sens technique du mot 'code' porte d'ailleurs à l'origine sur la notion d'un système protégeant un message et contribuant

ainsi à sa communication/transmission numérique. Le développement des communications numériques²⁶ au 20^{ème} siècle que ce soit pour le son, l'image et les autres informations (par supports/formats/canaux divers CD²⁷, DVD, MP3&4, les liaisons fibres optiques, les liaisons satellitaires puis en spatiales plus lointaines) a nécessité le besoin de préserver en terme d'intégrité les messages et les informations à transmettre. Le pouvoir des mathématiques peut ainsi permettre de détecter les erreurs de transmission voir de restituer le bon message sans erreur avec correction. **Mini-Exercice** : « Asns duoet ovtre cevraeu set caaplbe ed el fiare uassi ». Les mathématiciens se sont rendu compte que des raisonnements sur la symétrie (et ses groupes) peuvent ainsi servir à détecter des erreurs qui se sont glissées dans un message.

▪ Exercice - jeu :

Le signal à transmettre est une image pixelisée considérée noire et blanche. Les pixels seront transmis en succession temporelle (multiplexage temporel), un pixel noir représenté par 0 et un pixel blanc par 1. Imaginons ensuite que le protocole pour assurer la transmission de la couleur du pixel soit d'avoir choisi la répétition trois fois de suite du chiffre associé au pixel concerné.

Représentons ce principe sur une géométrie et symétrie cubique (structure de dimensions 3D car le protocole retenu a été de répéter trois fois le chiffre). Sans erreurs les deux uniques sommets 000 et 111 sont les seules localisations possibles sur le cube.



Représenter les autres sommets et leurs coordonnées associées.

Le code reçu est alors : 000 111 000 001 111 000 110 111 000 010 111 111 000. Il inclut des accidents et en admettant par simplicité que sur les répétitions (trois fois le même chiffre, soit le 0 soit le 1) une statistique d'une seule erreur est intervenue, vérifier que le bon code binaire à transmettre sans erreur et sans répétition était à l'origine : 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0.

Enfin, avec cette représentation géométrique et symétrie cubique, en relisant le code précédent reçu (trois répétitions par avec erreurs, visualiser sur le schéma précédent vos positions successives sur le cube... il vous sera facile de détecter/réaliser lorsque vous ne passez plus uniquement par les deux uniques sommets permis diamétralement opposés ce qui sera synonyme d'une erreur détectée !

Les codes peuvent être visualisés par des géométries et symétries de dimensions variées²⁸; un code consiste alors en un choix de sommets qui constituent les mots codés acceptables. Vous pouvez à titre d'exemple retracer sur la figure précédente un tétraèdre défini uniquement par les sommets 000, 011, 110 et 101 (et donc inséré dans le cube). On pourra par exemple associer ce tétraèdre à des codes qui ont un nombre impair de 0. Une erreur dans le code et l'on s'échappe du tétraèdre ! Il existe évidemment actuellement des structures et principes plus sophistiqués pour ce type de détection d'erreurs.

▪ En 1947, Richard Hamming (1915-1998), travaillant aux 'Bell Telephone Laboratories' et ayant obtenu le prix Turing en 1968, s'intéressa à la possible détection d'erreur (l'endroit du bit) suivi ainsi d'une possible correction. Il eut par exemple l'idée d'ajouter aux séries de bits binaires des chiffres de contrôle (évidemment binaires 0 ou

²⁶ Les communications numériques (binaires) sont ainsi une succession de chiffres 0 et 1. Un ingénieur français Emile Baudot dès 1874 réalisa une transmission de lettres et mots par le code binaire et le télégraphe de l'époque. Le code Baudot était né avec à titre d'exemple X=10111, Y=10101... Vous avez sans doute entendu parler du code ASCII (American Standard Code for Information Interchange) ensuite historiquement avec les ordinateurs pour l'encodage de caractères. ASCII est un code de 7 bits définissant ainsi 2⁷=128 caractères. On rappelle que le bit est la plus petite unité de donnée ; un bit a une valeur binaire soit 0 soit 1.

²⁷ Un CD en sortie de production pouvait présenter un demi-million d'erreurs dans ses données numériques codées (on peut multiplier par deux lorsque le CD est rayé, abîmé par l'utilisation ensuite ; même si ces chiffres sont un faible pourcentage de l'ensemble des données, la nécessité d'un encodage ou protocole peut ainsi permettre de détecter les erreurs mais aussi de les corriger avant l'écoute !

²⁸ Dans les années 1970-80 Robert Griess (né en 1945) et Bernd Fischer (1936-2020) ont découvert le plus grand groupe monstre dénommé ('Friendly Giant'), qui avait été prédit d'ailleurs par Arunas Rudvalis (né en 1945), groupe existant dans un espace de 196 833 dimensions ou groupe dit 'sporadique' d'ordre 145 926 144 000 = 2¹⁴.3³.5³.7.13.29. John Horton Conway (1937-2020) et David Wales ont très fortement contribué à la découverte de ces groupes monstrueusement immense.

1) par exemple de la parité de chaque ligne et colonne des bits constituant le message (que l'on présentera en tables dans l'exercice suivant).

• **Exercice - jeu :**

On considère que la partie du message sans erreur constituée de quatre bits 0 1 1 1 dans la table suivante :

0	1	
1	1	

Dans les quatre cases concernées, inscrire/ajouter les bits de contrôle qui représente la *parité* ou *nombre pair/impair* de bit 1 (chiffre de contrôle 1 pour nombre impair de 1 et 0 pour nombre pair de 1) sur chaque ligne et colonne.

Sur ce même principe, détecter/localiser 'où' se situe précisément l'erreur dans le message suivant (corps central du message constitué de quatre bits en gras) avec les chiffres de contrôle adjoints sur la parité ?

1	0	1
1	0	0
1	0	

Lorsque qu'une erreur se situe dans le corps central combien de bits de contrôles ne correspondent pas dans ce cas précis ?

De plus, il semble possible de savoir si les erreurs se glissent sur les bits du corps du message ou bien sur les bits adjoints mesurant la parité ! Expliquez pourquoi.

En conclusion et à titre d'exemple non exhaustif un tel code/protocole généralisé permet ainsi de signaler si erreurs il y a et de les localiser dans la table (par n° ligne/colonne). Claude Shannon (1916-2001), collègue de R. Hamming, comprit aussi les potentiels de remplacement des ondes électromagnétiques par les nombres et le numérique dans la théorie de l'information.

IV) Espaces vectoriels, Bases et changements pour la physique

• **Définition (espace vectoriel)**

Un espace vectoriel sur \mathbb{K} (avec \mathbb{K} désignant \mathbb{R} ou bien \mathbb{C}) ou \mathbb{K} -espace vectoriel est un ensemble non vide E muni de deux lois (les éléments de E sont appelés des *vecteurs* et les éléments de \mathbb{K} sont appelés des *scalaires*) :

- i) une loi interne, notée $+$, telle que $(E,+)$ soit un groupe commutatif. L'élément nul est noté 0_E .
- ii) une loi externe, notée \cdot , qui est une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E vérifiant :

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}_2, \forall x \in E, (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E_2, \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}_2, \forall x \in E, \alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$$

$$\forall x \in E, 1 \cdot x = x.$$

On remarque ainsi que ce sont les deux opérations qui permettent d'ouvrir la voie aux familles de combinaisons linéaires.

▪ Par exemples, l'ensemble des suites numériques étudiées au lycée, satisfaisant une certaine *relation de récurrence linéaire*, est un espace vectoriel réel. Les matrices à n lignes et p colonnes puis coefficients dans \mathbb{K} , forment quant à elles l'espace vectoriel que l'on pourra noter $M_{n,p}(\mathbb{K})$. L'espace vectoriel nul comportera quant à lui un unique élément qui est le vecteur nul $\vec{0}$, il constitue en quelque sorte l'objet initial.

▪ Ainsi en algèbre linéaire, un espace vectoriel est un ensemble d'objets appelés vecteurs que l'on peut additionner, multiplier par un scalaire pour physiquement comme effets les 'faire tourner', les 'étirer/rétrécir' ou tout autre structure de combinaison linéaire de ces effets.

▪ Axiomes de l'espace vectoriel (V)

	Axiomes de l'addition vectorielle « + »	Axiomes de la multiplication scalaire « · »
1. Stabilité	$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \mathbb{V}$	$\mathbf{a} \in \mathbb{R} \vec{v} \in \mathbb{V} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \vec{v} \in \mathbb{V}$
2. Associativité	$\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V},$ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$	$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{V},$ $\mathbf{a}(\mathbf{b}\vec{v}) = (\mathbf{a}\mathbf{b}) \cdot \vec{v}$
3. Elément neutre	$\exists \vec{0} \in \mathbb{V}, \forall \vec{v} \in \mathbb{V},$ $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$	$\forall \vec{v} \in \mathbb{V},$ $1\vec{v} = \vec{v}$
4. Symétrie / Distributivité	$\forall \vec{v} \in \mathbb{V}, \exists -\vec{v} \in \mathbb{V}$ $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$	$\forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}, \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V},$ $\mathbf{a}(\vec{u} + \vec{v}) = \mathbf{a}\vec{u} + \mathbf{a}\vec{v}$
5. Commutativité / Distributivité	$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{V},$ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	$\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{V},$ $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \vec{v} = \mathbf{a}\vec{v} + \mathbf{b}\vec{v}$

▪ Définitions (indépendance linéaire et base)

- Une **famille de vecteurs** de E est dite **libre** (sur \mathbb{K}) ou encore les vecteurs de cette famille sont **dits linéairement indépendants**, si la seule combinaison linéaire égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls. Ainsi, toute famille contenant le vecteur nul est liée (ou non libre), le vecteur nul étant une combinaison de n'importe quels vecteurs.
- Une famille de vecteurs de E forme une **base B** si elle est **libre et génératrice** ; ainsi tout vecteur s'exprimera de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de B.

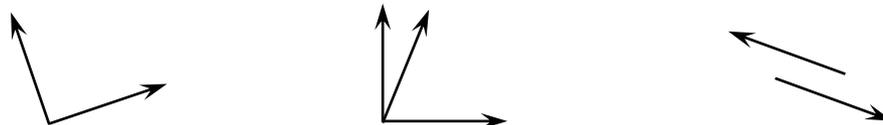
▪ Exercice :

Décomposer en combinaison linéaire les êtres mathématiques suivants :

- Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction $f(x) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4$, en fonction de $f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2$ et $f_3(x) = x^3$.
- Dans l'espace vectoriel 'plan vectoriel' (de dimension 2), le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ en fonction de la base $\{\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$.
- Dans l'espace vectoriel des matrices $M_{2,3}(\mathbb{R})$, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ en combinaison linéaire de matrices élémentaires (à savoir des 0 partout sauf un seul 1).

▪ Exercice :

Parmi les ensembles de vecteurs suivant du plan, lesquels forment une base du plan vectoriel ?



▪ Exercice :

Soit une base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ puis deux vecteurs quelconques (non vecteurs nuls) de l'espace \vec{u} et \vec{v} ne faisant pas partie de cette base B. Ces deux derniers peuvent se projeter sur la base B et s'écrire : $\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}_{\text{base B}}$ puis : $\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}_{\text{base B}}$. Exprimer les composantes du vecteur \vec{u} dans la base $B' = \{\vec{b}_1, \vec{v}\}$. Cependant, pour certaines composantes de \vec{v} , la base B' ne sera plus une base définie par deux vecteurs comme B, précisez (en effet toutes les bases d'un même espace vectoriel auront le même nombre d'éléments vecteurs).

En conclusion, il est ainsi possible de construire une nouvelle base B' en remplaçant un des deux vecteurs de la base B . Ce théorème se généralise en mathématique à N dimensions.

• **Exercice :**

De la discussion finale précédente découle un théorème mathématique spécifiant que les bases d'un même espace vectoriel auront le même nombre d'éléments vecteurs. Démontrons ceci par l'absurde sur un cas particulier.

La base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ est une base de l'espace vectoriel plan de dimension 2 ; ainsi tout vecteur \vec{v} se décomposera de manière *unique* sur cette base $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, à savoir $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j})}$.

'Imaginons' que la base $\{\vec{u}\}$ qui ne possède qu'un seul élément vecteur \vec{u} (différent de \vec{i} et \vec{j}) soit une base du plan vectoriel, dans ce cas les vecteurs \vec{i} et \vec{j} doivent pouvoir s'exprimer en fonction de \vec{u} (car \vec{i} et \vec{j} sont deux vecteurs appartenant à l'espace (plan) vectoriel et que $\{\vec{u}\}$ est considéré comme une base de cet espace vectoriel !) : soit $\vec{i} = a\vec{u}$ et $\vec{j} = b\vec{u}$. Considérant ceci former une combinaison linéaire de \vec{i} et \vec{j} égale au vecteur nul $\vec{0}$. Démontrer que ceci implique $\vec{j} = \frac{b}{a}\vec{i}$! Conclure sur la base $\{\vec{u}\}$.

• **Exercice :**

De manière similaire, en supposant que la base $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ soient deux bases du même espace vectoriel impliquant $\vec{u} = a_u\vec{i} + b_u\vec{j}$, $\vec{v} = a_v\vec{i} + b_v\vec{j}$, puis $\vec{w} = a_w\vec{i} + b_w\vec{j}$, il est possible de montrer par l'absurde cette incompatibilité sur la considération de bases de dimensions différentes (ici $2 \neq 3$) d'un même espace vectoriel.

• **Exercice :**

On considère une application linéaire $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + 3y, x + y)$. Calculer son inverse et démontrer que $f^{-1}(x', y') = (-x' + 3y', x' - 2y')$.

Soit A une matrice de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ qui est inversible. En prenant les notations vecteurs et matricielles $f(X) = A \cdot X$ ou $f^{-1}(X) = A^{-1} \cdot X$, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en déduire l'expression de la matrice A et son inverse A^{-1} relatif à l'exemple précédent.

• **Exercice :**

Soient S et T deux *endomorphismes* (morphisme d'un objet dans lui-même) de \mathbb{R}^2 ou $\forall (x, y)$ définis par :

$$S(x, y) = (2x - 5y, -3x + 4y) \text{ et } T(x, y) = (-8y, 7x + y)$$

- Déterminer les matrices A et B associées à S et T dans la base canonique de \mathbb{R}^2 . Vérifier que $S = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ puis $T = B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

- Déterminer les applications linéaires $S + T$, $S \circ T$, $T \circ S$ puis $S \circ S$, avec \circ le symbole de loi de composition. Vérifier ensuite que les matrices associées à ces applications sont respectivement $A + B$, AB , BA , puis A^2 .

• **Exercice :**

Soit \mathbb{R}^3 , \mathbb{R}^2 puis \mathbb{R} munis des bases respectives : $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ puis $\{1\}$. On définit les applications

linéaires $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par leurs matrices respectives : $M_u = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M_v = \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Exprimer l'image du vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par la composée $v \circ u$ en calculant $M_v M_u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Vérifier ensuite que le produit matriciel seul redonne les coefficients 1, 6 et 1.

▪ **Exercice :**

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et une application $f: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ définie pour toute matrice M par $f(M) = A \cdot M$.

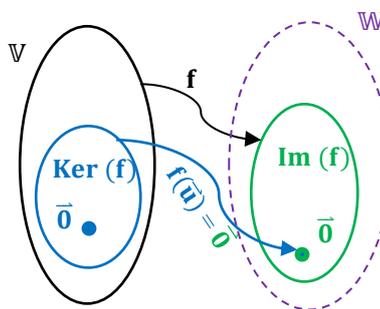
- Déterminer la matrice associée à l'application f dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$.

On rappelle que la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ est la base $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ avec $E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

▪ **Définitions (noyau et image)**

▪ Si f est une application linéaire d'un espace vectoriel \mathbb{V} dans un espace vectoriel \mathbb{W} , alors le noyau²⁹ de f est défini par : $\text{Ker}(f) = \{\vec{u} \in \mathbb{V} / f(\vec{u}) = \vec{0}_{\mathbb{W}}\}$. Le noyau est un sous-espace de l'espace vectoriel \mathbb{V} .

▪ Les vecteurs $f(\vec{u})$ forment un sous-espace vectoriel appelé image de f et noté $\text{Im}(f)$ avec pour aspect dimensionnel: $\dim \text{Im}(f) = \dim \mathbb{V} - \dim \text{Ker}(f)$.



▪ **Exercice :**

Comprendre que le noyau de l'ensemble des nombres complexes z tel que $e^z - 1 = 0$ (ou $e^z = 1$, avec $e =$ fonction exponentielle) est $\text{Ker}(\exp) = i2\pi\mathbb{Z}$. En effet, $e^{x+iy} = 1 = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow x = 0$ et $y = 0 [2\pi]$.

▪ **Exercice :**

On considère l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 ou $\forall (x, y, z)$ dont la matrice A dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- Calculer le noyau de f ou $\text{Ker}(f)$. Démontrer qu'il s'agit de l'équation paramétrique de la droite vectorielle de vecteur directeur $(-4, 1, 3)$.

- Quelle est la dimension de $\text{Im}(f)$?

▪ **Exercice :**

Montrer que la partie $E = \{A \in M_2(\mathbb{R}) / {}^tA = A\}$ est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

On utilisera simplement les propriétés de la transposée d'une matrice pour démontrer que si deux matrices A et $B \in E$, alors $(A + B) \in E$ et $\lambda A \in E$ ($\lambda \in \mathbb{R}$); ensuite en composant ces deux appartenances, les axiomes se déclinent.

▪ **Définition (sous-espace vectoriel)**

▪ **Théorème :**

F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

- **F est une partie non vide de E.**
- **$\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (\lambda x + y) \in F$**

²⁹ Kern en allemand.

Exemples :

- Les seuls sous-espace de \mathbb{R} sont $\{0\}$ et \mathbb{R} .
- L'ensemble des fonctions polynomiales (ou polynômes) à coefficients réels, noté $\mathbb{R}[X]$, est un sous-espace vectoriel des applications définies sur \mathbb{R} .

▪ Exercices familles de vecteurs, matrices, familles génératrices, bases, commutativité
▪ Exercice :

On donne $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$.

▪ Exercice :

Dans l'espace vectoriel E des matrices symétriques d'ordre 2 à coefficients réels, on donne :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que la famille (A, B, C) est une base de E en montrant qu'elle est à la fois libre et génératrice de E .

▪ Exercice :

Soit $F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que F est un sous-espace de $M_3(\mathbb{R})$. Conclure en donnant ainsi une famille génératrice de F .

▪ Exercice :

Soit A une matrice donnée de $M_2(\mathbb{R})$.

- Soit F l'ensemble des matrices réelles \mathcal{M} qui commutent avec A . Ecrire cette phrase en langage mathématique (remplir) : $F = \{\mathcal{M} \dots M_2(\mathbb{R}) / \dots \dots \}$. Montrer que l'ensemble F est un espace vectoriel (on utilisera le théorème supra).

- On suppose que $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer explicitement les matrices $\mathcal{M} \in F$, c'est-à-dire tel que $\mathcal{M}A = A\mathcal{M}$? En déduite une famille génératrice de F .

▪ Exercice :

Dans l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 , on considère les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, par exemple une certaine base fixée.

- Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est aussi une base de \mathbb{R}^3 . Pour ceci on formera une combinaison linéaire de ces trois vecteurs et l'on montrera qu'ils sont dits linéairement indépendants (libres ou non liés) car leur seule combinaison linéaire égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls.

- On considère le vecteur $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, déterminer les coordonnées de \vec{t} dans la base \mathcal{B} précédente.

▪ Exercice :

Dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

- Montrer que la que la famille $\mathcal{B} = (A, B, C, D)$ est une base de $M_2(\mathbb{R})$. Pour ceci on formera une combinaison linéaire de ces quatre matrices et l'on montrera qu'elles sont dites linéairement indépendantes (libres ou non liées) car leur seule combinaison linéaire égale à une matrice nulle est celle dont tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls.

- On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$; déterminer les coordonnées de M sur la base \mathcal{B} précédente.

• **Exercice :**

Dans l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$, on considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre deux telles que $A.M = M.D$.

- Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. On utilisera le théorème précédemment vu.

- Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $M_2(\mathbb{R})$; montrer que $M \in E$ si et seulement si $z = 0$ et $y = t$.

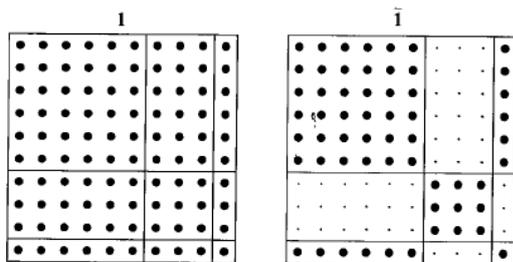
- Montrer que la base $\mathcal{B} = (U, A)$ est une base de E . Pour ceci re-écrire la matrice type M précédente et la décomposer sur U et A générant ainsi ce type de matrice M .

ANNEXE I : MATERIAUX ET PROPRIETES

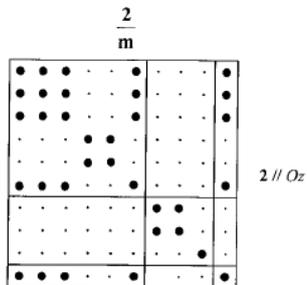
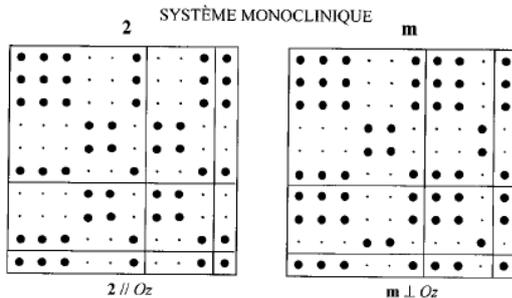
« MATRICES REPRESENTATIVES (TABLEAU 10 x 10) DES PRINCIPAUX TENSEURS PAR RAPPORT A LEUR SYMETRIES CRISTALLINES »

{ Pour de plus amples renseignements et explications : voir l'enseignant et/ou les livres « Physical properties of Crystals », Oxford University Press, de J.F. Nye (1985) ; « Physique des matériaux : Systèmes anisotropes, représentation, propriétés physiques simples et couplées », Ed. Ellipses, de M. Rousseau, A. Desert, M. Henry(2012) }

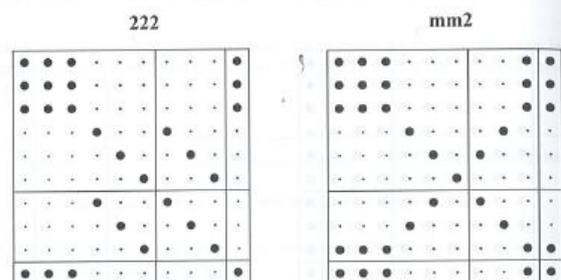
SYSTÈME TRICLINIQUE



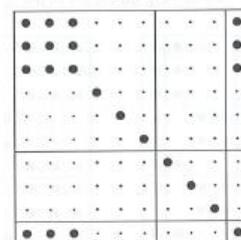
SYSTÈME MONOCLINIQUE



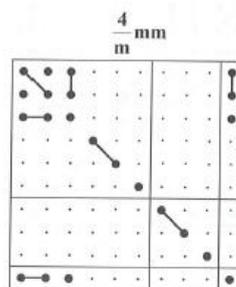
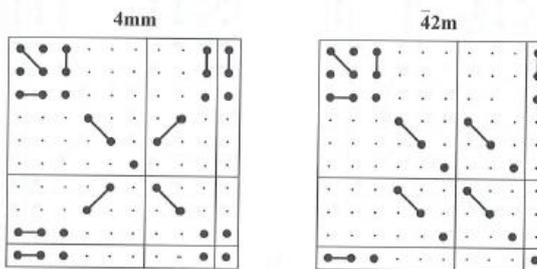
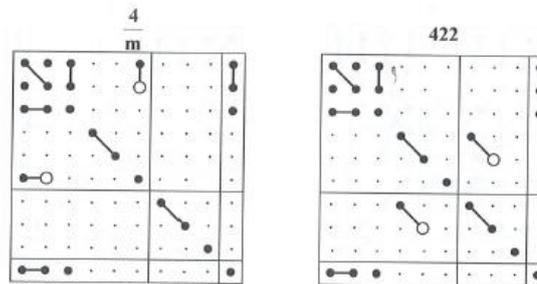
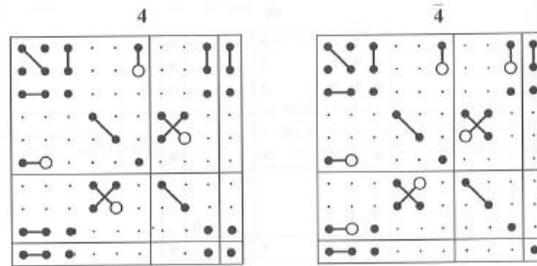
SYSTÈME ORTHORHOMBIQUE



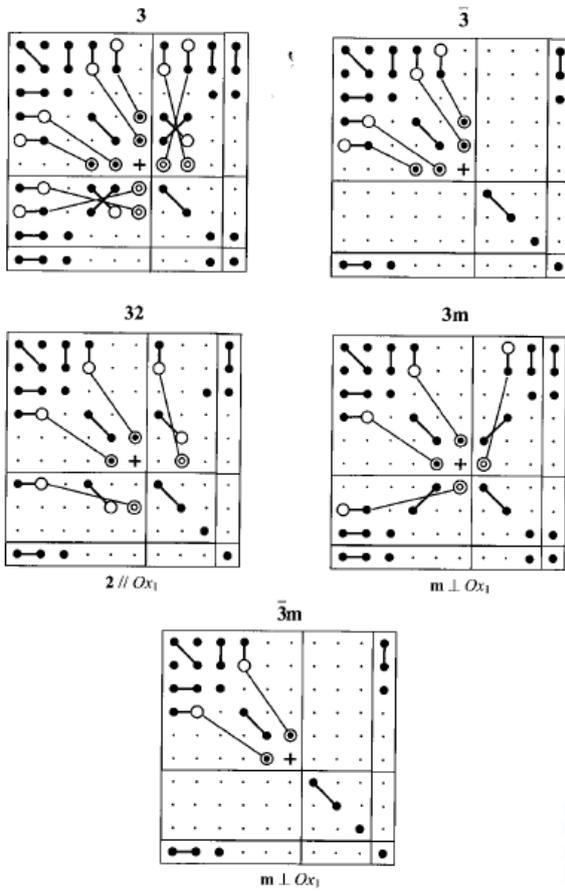
mmm



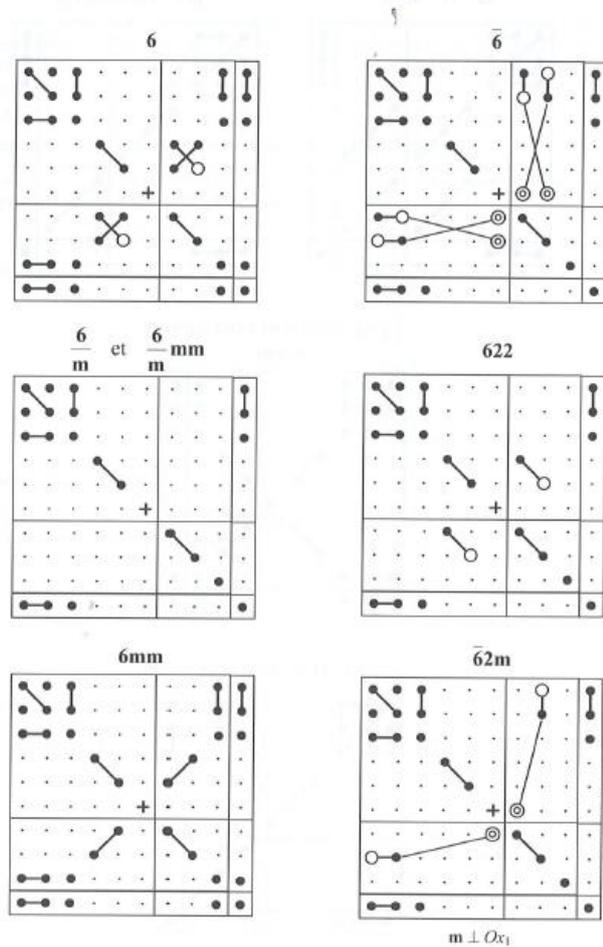
SYSTÈME QUADRATIQUE



SYSTÈME RHOMBOËDRIQUE

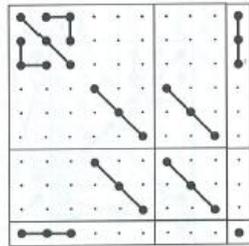


SYSTÈME HEXAGONAL

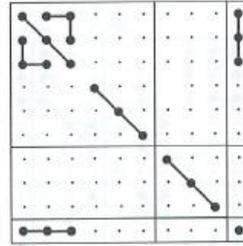


SYSTÈME CUBIQUE

23 et $\bar{4}3m$

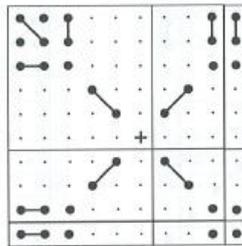


$m\bar{3}, 432$ et $m\bar{3}m$

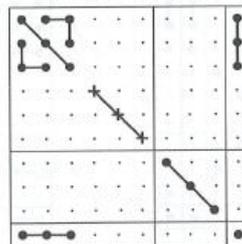


SYMÉTRIE DE RÉVOLUTION

$\infty \infty m$



SYSTÈME ISOTROPE



ANNEXE II : COMPLEMENTAIRE

Autres exercices pour approfondir, autres définitions et propositions

▪ **Exercice :**

Soit (G, \cdot) un groupe, e son élément neutre et $x, y \in G$ tel que : $x \cdot x = x^2 = e$, $y \cdot y = y^2 = e$, $x \cdot y = y \cdot x$, puis $x \neq e$, $y \neq e$, et $x \cdot y \neq e$.

Démontrer que $(xy) \cdot (xy) = e$. Ecrire la table de l'ensemble $L = \{e, x, y, xy\}$ muni de l'opération ' \cdot '

\cdot	e	x	y	xy
e				
x				
y				
xy				e

En déduire que L est un sous-groupe de G (son cardinal est 4).

Ressentir ou démontrer que le groupe L est isomorphe au groupe des isométries du plan euclidien (repère orthonormé) formé par les opérations/symétries respectivement Identité (Id), réflexions par rapport à l'axe des abscisses puis des ordonnées et enfin symétrie centrale par rapport à O origine.

▪ **Définition (groupe quotient)**

Soient G un groupe fini et H un sous-groupe normal/invariant de G . L'ensemble des classes d'éléments de G suivant H est désigné par G/H . Le groupe obtenu en munissant G/H de la loi de composition $X * Y = XY$, loi qu'on peut encore caractériser par $xH * yH = (xy)H$, est appelé le groupe quotient de G par H .

▪ **Propositions :**

Soit G un groupe fini d'ordre n . Pour tout élément x de G , $x^n = 1$

Soient G un groupe cyclique d'ordre n , et d , un diviseur naturel de n . Le sous-groupe d'ordre d de G est l'ensemble des éléments x de G tels que $x^d = 1$.

▪ **Exercice :**

Différentes paires de lunettes 'magiques' transforment la lumière vue de manières suivantes :

Les lunettes dorées notées D ont la particularité qu'une fois chaussées, le rouge apparaît bleu, le bleu apparaît jaune puis le jaune apparaît rouge. A travers les lunettes argentées notées A , le rouge semble jaune, le jaune semble bleu puis le bleu semble rouge. Quant aux lunettes translucides, elles ne 'changent' pas les couleurs. Il est possible de superposer deux paires de lunettes et dans ce cas leurs effets se *composent*. Compléter la table des lunettes magiques ci-dessous.

$*$	T	D	A
T	T		
D			
A			

▪ **Exercice :**

Pensez-vous que la table suivante forme un groupe ? Rationnez avec l'existence des inverses des éléments, des conjugués...

Mentionner les trois classes respectivement d'ordre 1, 2 et 3 constituants de la table.

o	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

• **Exercice :**

Sur le schéma infra et les symétries mentionnées des objets concernés, comprendre les passages (brisures de symétries) d'un objet à l'autre.

