

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

LICENCE DE PHYSIQUE - DEUXIÈME ANNÉE

# Mécanique : notes de cours

*Rédigé par* MARCO ROMANELLI

February 7, 2023



# Contents

<b>Préface</b>	<b>5</b>
<b>1 Référentiels non inertiels</b>	<b>7</b>
1.1 Cinématique . . . . .	7
1.1.1 Positions . . . . .	8
1.1.2 Vitesses . . . . .	8
1.1.3 Accélérations . . . . .	13
1.2 Dynamique . . . . .	13
1.2.1 Train qui freine avec une accélération $\vec{a}_0$ . . . . .	14
1.2.2 Ascenseur en chute libre . . . . .	15
1.2.3 Référentiel tournant . . . . .	15
1.2.4 Effets de la rotation de la Terre . . . . .	16
1.2.5 La force de Coriolis . . . . .	19
1.2.6 Deux exemples de calcul de la force de Coriolis . . . . .	23
<b>2 Dynamique des systèmes de N points matériels</b>	<b>29</b>
2.1 Equations fondamentales de la dynamique . . . . .	30
2.1.1 Première équation fondamentale : théorème de mouvement du centre de masse . . . . .	30
2.1.2 Deuxième équation fondamentale : théorème du moment cinétique . . . . .	32
2.1.3 Travail fourni par le moment d'une force . . . . .	37
2.2 Théorèmes de Koenig . . . . .	38
2.2.1 Énergie cinétique . . . . .	38
2.2.2 Moment cinétique . . . . .	39
2.3 Énergie d'un système de N points matériels . . . . .	39
2.4 Résultante, moment et énergie potentielle d'un champ uniforme (champ de pesanteur) . . . . .	41
<b>3 Dynamique des solides indéformables</b>	<b>43</b>
3.1 Solides indéformables . . . . .	44

3.2	Énergie cinétique - moment d'inertie . . . . .	45
3.2.1	Cinématique . . . . .	45
3.2.2	Énergie cinétique . . . . .	46
3.3	Travail des forces externes sur un solide indéformable . . . . .	47
3.4	Rotations d'un solide indéformable . . . . .	48
3.4.1	Rotations autour d'un axe fixe . . . . .	48
3.4.2	Effet d'une force appliquée sur l'axe de rotation . . . . .	49
3.4.3	Rotations autour d'un point fixe . . . . .	51
3.4.4	Axes principaux d'inertie - Équations d'Euler . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Chocs</b>	<b>61</b>
4.1	Généralités . . . . .	61
4.2	Chocs unidimensionnels . . . . .	63
4.3	Chocs à deux dimensions . . . . .	64

# Préface

Ces notes de cours correspondent au programme de mécanique de l'U.E. de L2 "Mécanique avancée et Relativité". C'est du *work in progress* : ces notes vont sans doute continuer à évoluer, en tout cas elles n'ont pas vocation à remplacer la lecture d'un texte plus complet. Par exemple, un livre que je trouve excellent, et dont je me suis largement inspiré, est le Kibble and Berkshire, *Classical Mechanics* (Imperial College Press). Je remercie les collègues qui s'occupent de cette U.E. avec moi ; en particulier Sergio Di Matteo pour m'avoir aidé avec L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, et Andrea Simoni et Sergio Di Matteo pour leurs commentaires bien inspirés sur certaines parties de ces notes.



# Chapter 1

## Référentiels non inertiels

Ce chapitre contient :

1.1	Cinématique . . . . .	7
1.1.1	Positions . . . . .	8
1.1.2	Vitesses . . . . .	8
1.1.3	Accélérations . . . . .	13
1.2	Dynamique . . . . .	13
1.2.1	Train qui freine avec une accélération $\vec{a}_{O'}$ . . . . .	14
1.2.2	Ascenseur en chute libre . . . . .	15
1.2.3	Référentiel tournant . . . . .	15
1.2.4	Effets de la rotation de la Terre . . . . .	16
1.2.5	La force de Coriolis . . . . .	19
1.2.6	Deux exemples de calcul de la force de Coriolis . . . . .	23

---

*Buts du chapitre* - Dans ce chapitre, nous verrons comment décrire la cinématique et la dynamique d'un point matériel dans un référentiel non inertiel.

### 1.1 Cinématique

Considérons la Fig. 1.1.  $\mathcal{R} = \{0xyz\}$  et  $\mathcal{R}' = \{0'x'y'z'\}$  sont deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre.  $\mathcal{R}'$  effectue un mouvement quelconque par rapport à  $\mathcal{R}$  : son origine  $O'$  se déplace librement, et les directions des trois axes  $x'$ ,  $y'$  et  $z'$  peuvent changer au cours du temps. On souhaite obtenir les relations entre les positions, vitesses et accélérations mesurées dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$ , pour pouvoir décrire le mouvement dans un référentiel ou dans l'autre, à notre convenance.

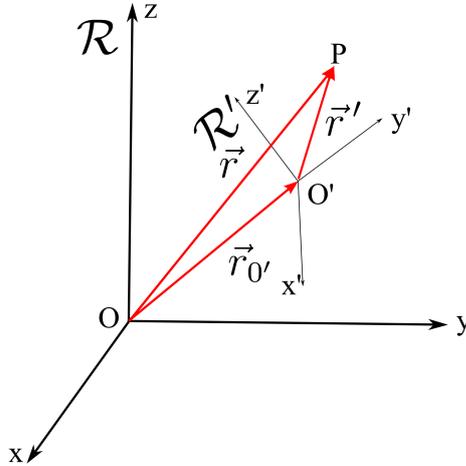


Figure 1.1: Deux référentiels  $\mathcal{R} = \{0xyz\}$  et  $\mathcal{R}' = \{0'x'y'z'\}$ .  $\mathcal{R}'$  est en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ .

### 1.1.1 Positions

La relation entre les vecteurs positions est immédiate : par rapport à la Fig. 1.1 on a

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} \quad (1.1)$$

ou encore

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}' \quad (1.2)$$

$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$  est le vecteur position d'un point  $P$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , et  $\vec{r}' = \overrightarrow{O'P}$  le vecteur position dans  $\mathcal{R}'$ . On pourra aussi écrire en composantes cartésiennes :

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = x_O\hat{i} + y_O\hat{j} + z_O\hat{k} + x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}', \quad (1.3)$$

où l'on a introduit pour  $\mathcal{R}$  les vecteurs unitaires  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  and  $\hat{k}$  alignés suivant  $x, y$  et  $z$  respectivement, et de même pour  $\mathcal{R}'$ .

### 1.1.2 Vitesses

Plaçons-nous maintenant dans  $\mathcal{R}$  et dérivons l'éq. 1.2 par rapport au temps :

$$\vec{v} = \vec{v}_{0'} + \frac{d}{dt} \vec{r}' \quad (1.4)$$

Le calcul de  $\frac{d}{dt} \vec{r}'$  nécessite d'une certaine prudence, car les vecteurs de base  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  et  $\hat{k}'$  dépendent eux-mêmes du temps. On obtient:

$$\frac{d}{dt} \vec{r}' = \dot{x}' \hat{i}' + \dot{y}' \hat{j}' + \dot{z}' \hat{k}' + x' \dot{\hat{i}}' + y' \dot{\hat{j}}' + z' \dot{\hat{k}}' \quad (1.5)$$

Il nous reste à exprimer les dérivées des vecteurs de base  $\dot{\hat{i}}'$ ,  $\dot{\hat{j}}'$  et  $\dot{\hat{k}}'$ .

Tout vecteur ayant trois composantes, on pourrait écrire, en toute généralité :

$$\dot{\hat{i}}' = \alpha \hat{i}' + \beta \hat{j}' + \gamma \hat{k}' \quad (1.6)$$

$$\dot{\hat{j}}' = \delta \hat{i}' + \epsilon \hat{j}' + \eta \hat{k}' \quad (1.7)$$

$$\dot{\hat{k}}' = \lambda \hat{i}' + \mu \hat{j}' + \nu \hat{k}' \quad (1.8)$$

Cependant, ce serait oublier que les trois vecteurs de base  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  et  $\hat{k}'$  satisfont à tout instant  $t$  des multiples contraintes : leur norme est toujours unitaire, et de plus ils restent toujours mutuellement orthogonaux. En équations, cela donne les 6 contraintes suivantes :

$$\hat{i}' \cdot \hat{i}' = 1 \quad \hat{j}' \cdot \hat{j}' = 1 \quad \hat{k}' \cdot \hat{k}' = 1 \quad (1.9)$$

$$\hat{i}' \cdot \hat{j}' = 0 \quad \hat{j}' \cdot \hat{k}' = 0 \quad \hat{k}' \cdot \hat{i}' = 0 \quad (1.10)$$

En dérivant par exemple l'éq.  $\hat{i}' \cdot \hat{i}' = 1$  on obtient  $\dot{\hat{i}}' \cdot \hat{i}' = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ . De la même manière on trouve  $\epsilon = \nu = 0$ . Les autres équations donnent des relations entre les 6 coefficients restants. Par exemple  $\hat{i}' \cdot \hat{j}' = 0 \Rightarrow \dot{\hat{i}}' \cdot \hat{j}' = -\hat{i}' \cdot \dot{\hat{j}}' \Leftrightarrow \delta = -\beta$ .

On aboutit donc à

$$\dot{\hat{i}}' = \beta \hat{j}' + \gamma \hat{k}' \quad (1.11)$$

$$\dot{\hat{j}}' = -\beta \hat{i}' + \eta \hat{k}' \quad (1.12)$$

$$\dot{\hat{k}}' = -\gamma \hat{i}' - \eta \hat{j}' \quad (1.13)$$

Afin d'écrire les trois dérivées  $\dot{\hat{i}}'$ ,  $\dot{\hat{j}}'$ ,  $\dot{\hat{k}}'$ , la connaissance de trois nombres ( $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\eta$ ) suffit. Si on définit un vecteur  $\vec{\omega}$  ainsi :

$$\vec{\omega} = \eta \hat{i}' - \gamma \hat{j}' + \beta \hat{k}', \quad (1.14)$$

on peut écrire

$$\dot{\hat{i}}' = \vec{\omega} \wedge \hat{i}' \quad (1.15)$$

$$\dot{\hat{j}}' = \vec{\omega} \wedge \hat{j}' \quad (1.16)$$

$$\dot{\hat{k}}' = \vec{\omega} \wedge \hat{k}' \quad (1.17)$$

On peut maintenant revenir à l'éq. 1.5, et écrire

$$\frac{d}{dt} \vec{r}' = \dot{x}' \hat{i}' + \dot{y}' \hat{j}' + \dot{z}' \hat{k}' + x' \dot{\hat{i}}' + y' \dot{\hat{j}}' + z' \dot{\hat{k}}' = \quad (1.18)$$

$$= \dot{x}' \hat{i}' + \dot{y}' \hat{j}' + \dot{z}' \hat{k}' + x' \vec{\omega} \wedge \hat{i}' + y' \vec{\omega} \wedge \hat{j}' + z' \vec{\omega} \wedge \hat{k}' = \quad (1.19)$$

$$= \dot{x}' \hat{i}' + \dot{y}' \hat{j}' + \dot{z}' \hat{k}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' \quad (1.20)$$

Si on pose  $\vec{v}' = \dot{x}' \hat{i}' + \dot{y}' \hat{j}' + \dot{z}' \hat{k}'$ , on a donc

$$\frac{d}{dt} \vec{r}' = \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{v}' \quad (1.21)$$

Nous pouvons enfin écrire la relation entre la vitesse  $\vec{v}$  mesurée par un observateur qui utilise le repère  $\mathcal{R}$  et la vitesse  $\vec{v}'$  mesurée par un observateur en  $\mathcal{R}'$ :

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_O' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{v}'} \quad (1.22)$$

### Signification des différents termes de la (1.22)

- $\vec{v}' = \dot{x}' \hat{i}' + \dot{y}' \hat{j}' + \dot{z}' \hat{k}'$ , comme déjà dit, est la **vitesse du point P mesurée dans le référentiel  $\mathcal{R}'$** .
- Supposons maintenant  $\vec{v}' = 0$ , i.e. le point P est immobile dans  $\mathcal{R}'$ . Posons aussi  $\vec{\omega} = 0$ . On a alors  $\vec{v} = \vec{v}_O'$ , c'est-à-dire que la vitesse de P dans  $\mathcal{R}$  est égale à la vitesse  $\vec{v}_O'$  de l'origine  $O'$ . Cela est vrai pour n'importe quel point P immobile dans  $\mathcal{R}'$  :  $\vec{v}_O'$  décrit donc un **mouvement de translation** global de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ .
- Prenons maintenant  $O = O'$  et  $\vec{v}_O' = 0$ . A nouveau, supposons  $\vec{v}' = 0$ , donc que le point P est immobile dans  $\mathcal{R}'$ . Le vecteur position  $\vec{r}$  coïncide avec  $\vec{r}'$  et d'après la (1.22) on a

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (1.23)$$

Considérons le cas  $\vec{\omega} = \omega_0 \hat{k}$ . L'équation (1.23) est alors simple à résoudre en coordonnées cylindriques. En posant  $\vec{r} = \rho \hat{e}_\rho + z \hat{e}_z$  on obtient :

$$\dot{\rho} = 0 \Rightarrow \rho = \text{const.} \quad (1.24)$$

$$\rho \dot{\phi} = \rho \omega_0 \Rightarrow \phi = \omega_0 t \quad (1.25)$$

$$\dot{z} = 0 \Rightarrow z = \text{const.} \quad (1.26)$$

Le point P effectue donc, dans  $\mathcal{R}$ , un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire  $\omega_0$  autour de l'axe  $z$ . Vu que, dans  $\mathcal{R}'$ , P est immobile, on en déduit que  $\mathcal{R}'$  aussi est en rotation par rapport à  $\mathcal{R}$ . Le vecteur  $\vec{\omega}$  décrit donc une **rotation** des axes de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . La direction du vecteur  $\vec{\omega}$  coïncide avec l'axe de rotation, le signe de  $\omega_0$  renseigne sur le sens de rotation ( $\omega_0 > 0 \Rightarrow$  rotation antihoraire).

En définitive : la vitesse  $\vec{v}$  dans  $\mathcal{R}$  s'écrit

$$\vec{v} = \vec{v}_{0'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{v}' = \vec{v}_e + \vec{v}' \quad (1.27)$$

Elle est la somme de deux vecteurs : la **vitesse d'entraînement**  $\vec{v}_e$  du référentiel  $\mathcal{R}'$ , plus la vitesse  $\vec{v}'$  du point P relative au référentiel  $\mathcal{R}'$ . A son tour, la **vitesse d'entraînement** est en général la somme de deux termes : la **vitesse de translation**  $\vec{v}_{0'}$  et la **vitesse de rotation**  $\vec{\omega} \wedge \vec{r}'$ . On a donc trouvé que l'état cinématique le plus général de  $\mathcal{R}'$  peut être décrit à tout instant comme la somme d'une translation et d'une rotation des axes. (Évidemment, en général ni le mouvement de translation ni celui de rotation ne sont uniformes; i.e. les vecteurs  $\vec{v}_{0'}$  et  $\vec{\omega}$  peuvent dépendre du temps).

### Remarque : dérivée d'un vecteur dans un référentiel mobile

L'équation (1.21) est valable non seulement pour les vitesses, mais pour n'importe quel vecteur. En effet, considérons un vecteur quelconque  $\vec{L}$ . Dans

un référentiel  $\mathcal{R}$ ,  $\vec{L}$  s'écrit  $\vec{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j} + L_z \hat{k}$ . Dans  $\mathcal{R}$ , sa dérivée par rapport au temps s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \left( \frac{d}{dt} \vec{L} \right)_{\mathcal{R}} = \dot{L}_x \hat{i} + \dot{L}_y \hat{j} + \dot{L}_z \hat{k} \quad (1.28)$$

La nouvelle notation  $\left( \frac{d}{dt} \vec{L} \right)_{\mathcal{R}}$  a été introduite pour rappeler de manière explicite que la dérivée temporelle est calculée “dans  $\mathcal{R}$ ”, c'est-à-dire en considérant que les vecteurs  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , et  $\hat{k}$  n'évoluent pas au cours du temps (par définition,  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ , et  $\hat{k}$  sont fixes dans  $\mathcal{R}$ ).

En introduisant un référentiel  $\mathcal{R}'$  en mouvement par rapport à  $\mathcal{R}$ , nous pouvons écrire aussi :

$$\vec{L} = L_{x'} \hat{i}' + L_{y'} \hat{j}' + L_{z'} \hat{k}' \quad (1.29)$$

La dérivée de  $\vec{L}$  par rapport au temps s'écrira alors, dans le référentiel  $\mathcal{R}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \vec{L} \right)_{\mathcal{R}} &= \dot{L}_{x'} \hat{i}' + \dot{L}_{y'} \hat{j}' + \dot{L}_{z'} \hat{k}' + L_{x'} \dot{\hat{i}}' + L_{y'} \dot{\hat{j}}' + L_{z'} \dot{\hat{k}}' \\ &= \left( \frac{d}{dt} \vec{L} \right)_{\mathcal{R}'} + L_{x'} \dot{\hat{i}}' + L_{y'} \dot{\hat{j}}' + L_{z'} \dot{\hat{k}}'. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Les termes de type  $L_{x'} \dot{\hat{i}}'$  apparaissent car, dans  $\mathcal{R}$ , les vecteurs  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  et  $\hat{k}'$  ne sont pas fixes. En procédant comme au paragraphe 1.1.2, on obtient alors :

$$\boxed{\left( \frac{d}{dt} \vec{L} \right)_{\mathcal{R}} = \left( \frac{d}{dt} \vec{L} \right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{L}} \quad (1.31)$$

$\vec{\omega}$  étant la vitesse angulaire de rotation de  $\mathcal{R}'$  par rapport à  $\mathcal{R}$ . Cette formule nous sera utile notamment pour les solides indéformables (chap. 3). Il est à noter que, au niveau de la cinématique, aucun référentiel n'a un rôle privilégié par rapport à l'autre. Les axes de  $\mathcal{R}$  sont mobiles dans  $\mathcal{R}'$ , et ceux de  $\mathcal{R}'$  le sont dans  $\mathcal{R}$ . La formule (1.31) peut aussi s'écrire  $\left( \frac{d}{dt} \vec{L} \right)_{\mathcal{R}'} = \left( \frac{d}{dt} \vec{L} \right)_{\mathcal{R}} - \vec{\omega} \wedge \vec{L}$ , qui s'interprète aisément : si  $\mathcal{R}'$  tourne par rapport à  $\mathcal{R}$  avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ , alors  $\mathcal{R}$  tourne par rapport à  $\mathcal{R}'$  avec une vitesse angulaire  $-\vec{\omega}$ . A ce stade, rien ne privilégie un référentiel par rapport à l'autre. C'est uniquement en passant à la dynamique qu'un référentiel peut acquérir un statut “privilégié”. Par exemple, si nous postulons que  $\mathcal{R}$  est inertiel, alors le principe fondamental de la dynamique y est vérifié, alors qu'il ne le sera pas dans  $\mathcal{R}'$ .

### 1.1.3 Accélérations

Dérivons à nouveau l'éq. 1.22 :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{0'}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}') + \frac{d}{dt}\vec{v}' \quad (1.32)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{v}'] + \vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{a}' \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}_{0'} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge \vec{r}'] + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{a}'} \quad (1.34)$$

On définit l'**accélération d'entraînement**  $\vec{a}_e$

$$\vec{a}_e = \vec{a}_{0'} + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}' + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge \vec{r}'] \quad (1.35)$$

et l'**accélération complémentaire ou de Coriolis**  $\vec{a}_c$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'. \quad (1.36)$$

$\vec{a}$  est l'accélération en  $\mathcal{R}$ , tandis que  $\vec{a}' = \ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}' + \ddot{z}'\hat{k}'$  est l'accélération mesurée par un observateur en  $\mathcal{R}'$ .

On a alors

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}'} \quad (1.37)$$

## 1.2 Dynamique

Commençons par multiplier l'éq. 1.37 par la masse  $m$  :

$$m\vec{a} = m\vec{a}_e + m\vec{a}_c + m\vec{a}' \quad (1.38)$$

Supposons maintenant que  $\mathcal{R}$  soit un référentiel **inertiel**. Cela revient à affirmer que, dans  $\mathcal{R}$ , le Principe Fondamental de la Dynamique s'applique. On peut donc écrire  $m\vec{a} = \vec{F}$ ,  $\vec{F}$  étant la somme vectorielle de toutes les forces réelles (gravité, frottements, électriques etc.) agissant sur le point matériel P.

Quant à lui, un observateur qui utilise le référentiel  $\mathcal{R}'$  mesure l'accélération  $\vec{a}'$ . Pour un tel observateur, l'équation suivante s'applique :

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c \quad (1.39)$$

$$\Leftrightarrow m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c \quad (1.40)$$

On voit donc que, dans  $\mathcal{R}'$ ,  $m\vec{a}' \neq \vec{F}$ , donc le PFD n'est pas valable tel quel, ce qui ne devrait pas nous surprendre car en général  $\mathcal{R}'$  n'est pas inertiel. On peut cependant définir une **force d'entraînement**  $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$  et une **force de Coriolis**  $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$ , et écrire

$$\boxed{m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c} \quad (1.41)$$

L'éq. 1.41 nous dit qu'on peut malgré tout utiliser le PFD dans  $\mathcal{R}'$ , à **condition de rajouter aux forces réelles la “force” d'entraînement et la “force” de Coriolis**.  $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e$  et  $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c$  sont appelées **forces d'inertie** (ou forces apparentes, forces fictives, pseudoforces etc.). Ce ne sont pas des vraies forces, mais rendent compte de l'effet de l'accélération de  $\mathcal{R}'$ . Si on connaît l'accélération de translation  $\vec{a}_O'$ , la vitesse et l'accélération angulaire  $\vec{\omega}$  et  $\dot{\vec{\omega}}$ , on peut calculer les forces apparentes et étudier le mouvement dans  $\mathcal{R}'$  grâce à l'éq. 1.41. Dans la suite, nous verrons quelques exemples d'application.

### 1.2.1 Train qui freine avec une accélération $\vec{a}_O'$



Figure 1.2: Les forces fictives ont des effets bien réels !

Lorsqu'un train freine avec une accélération  $\vec{a}_O' = -a_O'\hat{i}'$ , les passagers, ainsi que leurs bagages, font l'expérience d'une force qui le pousse vers l'avant. Dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  solide du wagon, Dupond et Dupont observent que leurs valises sont accélérées vers l'avant (Fig. 1.2), et, s'ils veulent continuer à utiliser la loi de Newton  $\vec{F} = m\vec{a}'$  dans leur référentiel, sont bien obligés d'attribuer cette accélération à une force. En effet, d'après l'éq. 1.41, nous

savons que dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  apparaît la force d'inertie  $\vec{F}_e = -m\vec{a}_{O'} = +ma_{O'}\hat{i}'$ . C'est bien cette "force" qui pousse vers l'avant les passagers et leurs valises.

Quelle est la description du phénomène donnée par un observateur dans un référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , solidaire avec les rails ? Dans  $\mathcal{R}$ , il n'y a aucune force qui agit sur les passagers ou sur leur valises. Ces dernières continuent donc leur trajectoire rectiligne uniforme dans la direction des  $x$  positives. Leur position relative au wagon change car c'est ce dernier qui ralentit, à cause de l'action des freins.

### 1.2.2 Ascenseur en chute libre

Considérons un ascenseur. A l'instant  $t = 0$ , le câble qui le maintenait au repos se casse. Sous l'effet de la gravité, l'ascenseur chute vers le sol avec une accélération constante  $\vec{g} = -g\hat{j}$ . D'après l'éq. 1.41, dans le référentiel  $\mathcal{R}'$  de l'ascenseur apparaît la force fictive  $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = +mg\hat{j}'$ . Un passager à l'intérieur de l'ascenseur est assujéti à la force de gravité, et aux forces d'inertie. Dans  $\mathcal{R}'$ , son équation de mouvement est

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_e = -mg\hat{j}' + mg\hat{j}' = 0 \quad (1.42)$$

Cela signifie que l'occupant de l'ascenseur est en "apesanteur", il ne ressent plus l'effet de la gravité. S'il monte sur une balance, cette dernière indiquera un poids de 0 kg. S'il saute vers le plafond, il ne retombera jamais, mais continuera à flotter en direction du plafond à vitesse constante (tant que l'ascenseur n'atteint pas le sol ...).

Dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  il n'y a pas  $\vec{F}_e$ . Le passager, l'ascenseur et la balance tombent tous les trois avec la même vitesse, donc il n'y a pas d'accélération relative entre l'ascenseur et le passager, en accord avec la (1.42).

### 1.2.3 Référentiel tournant

Considérons un référentiel  $\mathcal{R}'$  en rotation autour de son origine  $O'$ , coïncidente avec l'origine  $O$  d'un référentiel inertiel.  $\mathcal{R}'$  tourne autour de l'axe  $z$ , i.e. sa vitesse angulaire est  $\vec{\omega} = \omega\hat{k} = \omega\hat{k}'$ . On se restreint ici au cas où  $\vec{\omega}$  est constant en direction et module. La force d'entraînement  $\vec{F}_e$  qui apparaît dans  $\mathcal{R}'$  s'écrit alors

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = -m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge \vec{r}'] = -m\omega\hat{k}' \wedge [\omega\hat{k}' \wedge (\rho'\hat{e}_{\rho'} + z'\hat{k}')] = +m\omega^2\rho'\hat{e}_{\rho'} \quad (1.43)$$

Il s'agit dans ce cas de la **force centrifuge**. Elle est proportionnelle à la distance par rapport au centre et au carré de la fréquence de rotation. Au signe près, l'expression de la force centrifuge est identique à celle de la force élastique exercée par un ressort  $\vec{F}_{el} = -kx = -m\omega_0^2 x$ . A cause du signe “-”, la force centrifuge pousse dans la direction du déplacement, au contraire de la force élastique qui est une force de rappel. Tout comme la force élastique, la force centrifuge admet une énergie potentielle proportionnelle au carré du déplacement  $U = -\frac{1}{2}m\omega^2 \rho'^2$ .

### 1.2.4 Effets de la rotation de la Terre

Considérons un référentiel  $\mathcal{R}'$  fixe par rapport à la Terre, et dont l'origine  $O'$  est sur la surface terrestre (référentiel “du laboratoire”, voir Fig. 1.3).

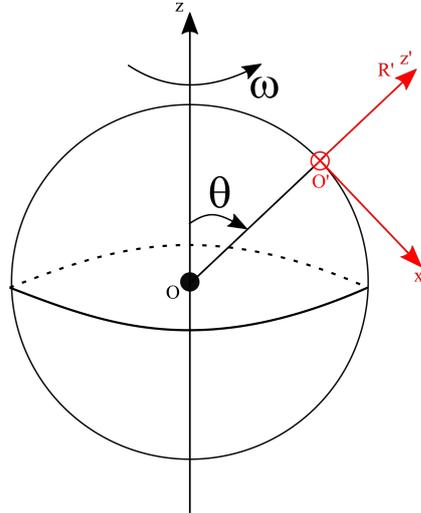


Figure 1.3: Un référentiel  $\mathcal{R}'$  fixe par rapport à la surface terrestre (référentiel “du laboratoire”). L'axe  $y'$  rentre dans le plan de la feuille.

Un observateur dans  $\mathcal{R}'$  fait l'expérience des forces d'inertie dues à la rotation de la Terre autour de son axe. Le référentiel  $\mathcal{R}$  “de référence” est centré en  $O$  centre de la Terre, et ses axes  $x, y, z$  pointent dans la direction des étoiles fixes. On considère que ce référentiel, dit **géocentrique**, est inertielle, ce qui revient à ignorer la rotation de la Terre autour du Soleil (ainsi que le mouvement de ce dernier par rapport au centre de masse de notre galaxie, ainsi que la rotation de cette dernière, etc. . . .!) Si la vitesse angulaire de la Terre dans  $\mathcal{R}$  est  $\omega = \omega_0 \hat{k}$ , alors la force d'entraînement dans  $\mathcal{R}'$  est

$$\vec{F}_e = -m\vec{a}_{O'} - m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge \vec{r}'] \quad (1.44)$$

Or, le point  $O'$  décrit une rotation uniforme autour de l'axe  $z$ . Sa vitesse est:

$$\vec{v}_{O'} = \frac{d}{dt} \vec{r}_{O'} = \omega \wedge \vec{r}_{O'} \quad (1.45)$$

et son accélération

$$\vec{a}_{O'} = \frac{d}{dt} \vec{v}_{O'} = \omega \wedge [\omega \wedge \vec{r}_{O'}] \quad (1.46)$$

On trouve donc

$$\vec{F}_e = -m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (\vec{r}_{O'} + \vec{r}^i)] \quad (1.47)$$

$$= -m\vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge \vec{r}^i] \quad (1.48)$$

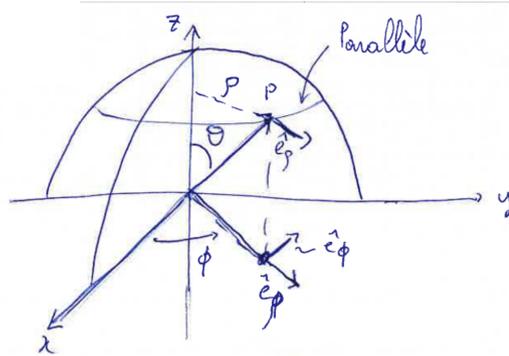


Figure 1.4: Coordonnées cylindriques.

En coordonnées cylindriques, cela donne :

$$\vec{F}_e = -m\omega_0 \hat{k} \wedge [\omega_0 \hat{k} \wedge (\rho \hat{e}_\rho + z \hat{k})] = +m\omega_0^2 \rho \hat{e}_\rho = +m\omega_0^2 r \sin \theta \hat{e}_\rho \quad (1.49)$$

Dans le référentiel terrestre est donc présente une **force centrifuge**, qui s'exprime ainsi :

$$\boxed{\vec{F}_e = +m\omega_0^2 r \sin \theta \hat{e}_\rho} \quad (1.50)$$

La force centrifuge est nulle aux pôles, et maximale à l'équateur. Calculons la valeur numérique de l'accélération centrifuge (dans la pratique, on pourra confondre  $r$  avec  $R_T$  le rayon terrestre) :

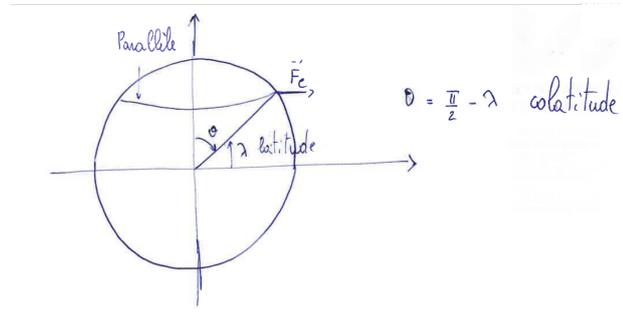


Figure 1.5: Force centrifuge due à la rotation terrestre.

$$a_e = \omega_0^2 R_T = \left( \frac{2\pi}{24h} \right)^2 \times 6,37 \cdot 10^6 m \simeq 0,034 m s^{-2} \quad (1.51)$$

Il s'agit d'un effet petit, mais mesurable. En effet, déjà en 1672 Jean Richer, envoyé par l'Observatoire de Paris à Cayenne afin d'y effectuer des mesures, s'était rendu compte que l'horloge qu'il avait emporté avec lui battait le temps plus lentement qu'à Paris, et accumulait un retard d'environ 2 minutes et demi par jour. L'explication du phénomène fut donnée par Christiaan Huygens (à qui on devait également la conception des horloges les plus précis de l'époque), qui introduisit la notion de force centrifuge. Il s'agit de la première mise en évidence de la rotation terrestre par une expérience mécanique<sup>1</sup>.

Par ailleurs, on trouve que l'accélération de gravité à l'équateur est inférieure qu'aux pôles de  $0,052 m s^{-2}$ , une valeur plus élevée que celle donnée par l'éq. 1.51. Cela vient du fait que la Terre n'est pas parfaitement sphérique, mais légèrement aplatie aux pôles. Donc, même en absence de rotation, l'accélération de gravité aux pôles serait un peu plus grande qu'à l'équateur. D'ailleurs, la forme légèrement aplatie de la Terre est aussi une conséquence de la rotation de la Terre autour de son axe.

En définitive, la force de pesanteur  $\vec{P}$  dont nous faisons l'expérience est en réalité la somme vectorielle de la gravité terrestre et de la force centrifuge:

$$\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}_e = m\vec{g}^* \quad (1.52)$$

$$\vec{g}^* = \vec{g} - \vec{a}_e = -\frac{GM_T}{R_T^2} \hat{k}' - \vec{a}_e \quad (1.53)$$

<sup>1</sup>Voir S. Haroche, "La lumière révélée: de la lunette de Galilée à l'étrangeté quantique", Odile Jacob, 2020, p. 120.

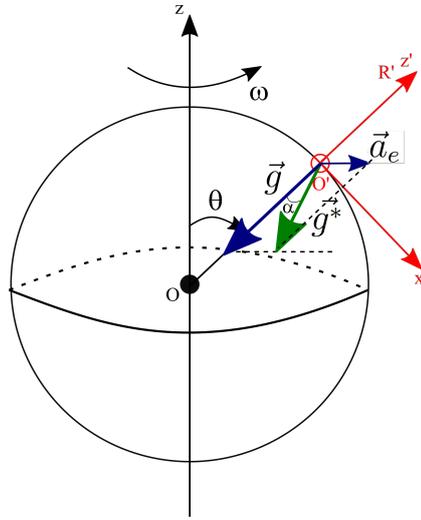


Figure 1.6: La force de pesanteur est la résultante de la gravité et de la force centrifuge.

Lorsque nous mesurons l'accélération de gravité, par exemple avec un pendule, en réalité nous ne mesurons pas  $g$  mais  $g^*$ . Cela implique que le vecteur  $\vec{P}$ , dont la direction est matérialisée par un fil à plomb, ne pointe pas exactement vers le centre de la Terre. En partant de l'éq. 1.53 on trouve

$$\vec{g}^* = -g\hat{k}' + \omega^2 R_T \sin \theta \hat{e}_\rho \quad (1.54)$$

$$= -g\hat{k}' + \omega^2 R_T \sin \theta (\cos \theta \hat{i}' + \sin \theta \hat{k}') \quad (1.55)$$

On en déduit que la déviation angulaire de la verticale par rapport à la direction  $\hat{k}'$  est

$$\alpha \simeq \frac{\omega^2 R_T \sin \theta \cos \theta}{g} \quad (1.56)$$

$\alpha$  est maximale pour  $\theta = 45$ , et on a  $\alpha(45) = 1,7 \cdot 10^{-3} = 6'$ .

### 1.2.5 La force de Coriolis

Si un point matériel se déplace dans un référentiel non galiléen en rotation, il est soumis à la force de Coriolis :

$$\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' \quad (1.57)$$

A titre d'exemple, considérons un référentiel  $\mathcal{R}'$  solide d'une plateforme horizontale en rotation (Fig. 1.7).

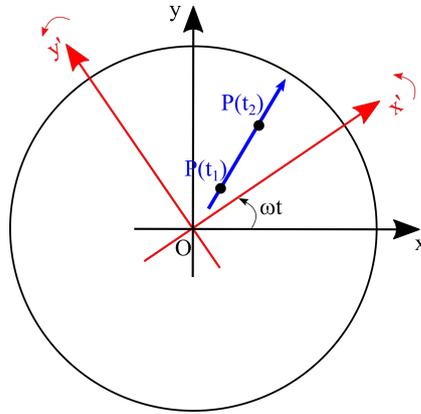


Figure 1.7: Un point  $P$  en mouvement de translation libre.

Imaginons un point  $P$  qui se déplace sans frottement du centre vers le bord de la plateforme. Dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ , dont les axes sont fixes, sa trajectoire est une droite. Comment apparaît cette trajectoire à un observateur dans  $\mathcal{R}'$ ? Il est facile de se convaincre qu'un observateur en  $\mathcal{R}'$  voit le point  $P$  tourner vers la droite (Fig. 1.8 (a)). Il est à noter que, si le point  $P$  se déplace du bord vers le centre, sa trajectoire a une concavité opposée (Fig. 1.8 (b)). Dans les deux cas,  $P$  tourne vers la droite.

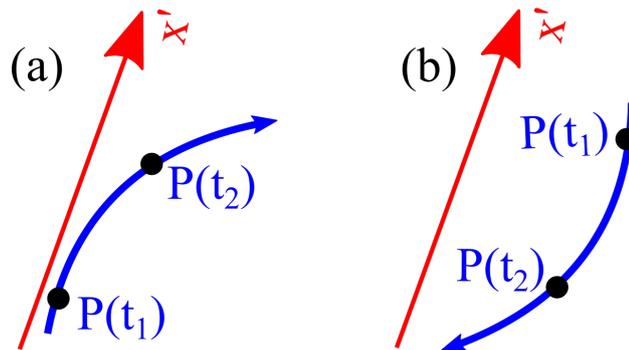


Figure 1.8: Trajectoire du point  $P$ , telle qu'elle apparaît dans  $\mathcal{R}'$ .

On peut démontrer ce résultat par un simple calcul. Considérons pour simplicité un mouvement rectiligne uniforme dans  $\mathcal{R}$  le long de l'axe  $x$  :  $\vec{r}(t) = vt\hat{i}$ . Le vecteur de base  $\hat{i}$  se décompose ainsi sur la base en rotation

:  $\hat{i} = \cos(\omega t)\hat{i}' - \sin(\omega t)\hat{j}'$ . Le vecteur position dans  $\mathcal{R}'$  est donc :  $\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) = vt \cos(\omega t)\hat{i}' - vt \sin(\omega t)\hat{j}'$ . Un observateur utilisant le référentiel  $\mathcal{R}'$  voit donc un mouvement en spirale, alors qu'un observateur dans  $\mathcal{R}$  voit un mouvement rectiligne uniforme (Fig. 1.9).

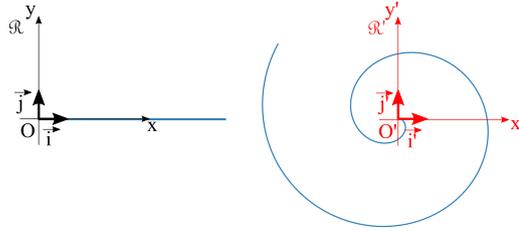


Figure 1.9: La même trajectoire observée dans  $\mathcal{R}$  et dans  $\mathcal{R}'$ .

L'observateur en  $\mathcal{R}'$  observe donc une trajectoire courbée. S'il veut continuer à utiliser le PFD, il doit introduire une force  $\perp \vec{v}'$  pour rendre compte du mouvement observé. Il s'agit de la force de Coriolis.

Cet effet est responsable de nombreux phénomènes : la rotation du plan d'oscillation d'un pendule dans un référentiel non inertiel (pendule de Foucault), la légère déviation vers l'est des corps en chute libre, le sens de rotation des cyclones (anti-horaire dans l'hémisphère nord, horaire dans l'hémisphère sud), la direction des alizés etc.

### LES DEUX ALIZES DE L'ATLANTIQUE

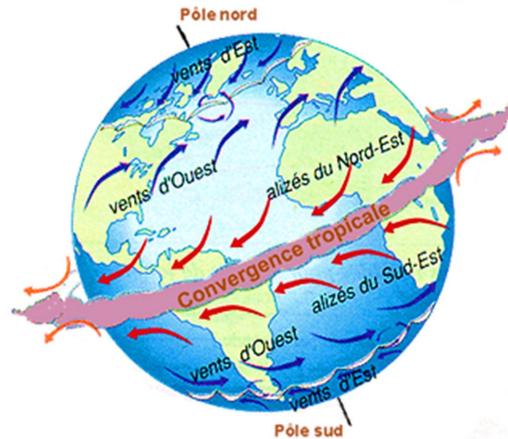


Figure 1.10: Les alizés, vents réguliers des régions intertropicales (indiqués par les flèches rouges).

En ce qui concerne les alizés (*trade winds* en anglais), leur origine est la suivante. L'air près de l'équateur est réchauffé par le rayonnement solaire et tend à monter, ce qui génère des flux d'air plus frais des zones subtropicales vers l'équateur. A cause de la rotation terrestre, ces masses d'air frais sont déviées vers l'ouest lorsqu'elles s'approchent de l'équateur. On a ainsi des vents de nord-est dans l'hémisphère nord, et des vents de sud-est dans l'hémisphère sud (Fig. 1.10). On voit ainsi apparaître, dans le référentiel terrestre, une force fictive, la force de Coriolis, responsable de cette déviation vers l'ouest.

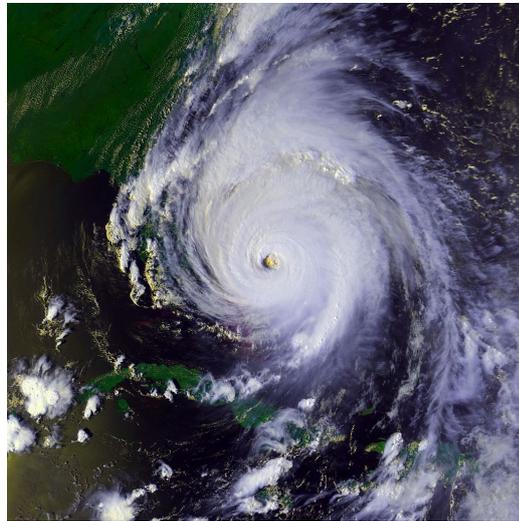


Figure 1.11: L'ouragan Floyd passant sur les Bahamas en 1999.

La force de Coriolis explique aussi les sens de rotation des cyclones. Imaginons qu'une zone de basse pression se forme dans l'hémisphère nord. A cause du gradient de pression, des masses d'air vont être attirées des zones avoisinantes. A cause de la rotation terrestre, ces masses d'air sont déviées vers la droite lorsqu'elles s'approchent de la zone de basse pression. Une circulation en sens anti-horaire s'instaure ainsi autour de la dépression, résultant de l'équilibre entre le gradient de pression qui attire l'air vers l'intérieur, et les forces de Coriolis et centrifuge qui le repoussent vers l'extérieur (Fig. 1.11). La déviation est vers la gauche dans l'hémisphère sud, produisant une rotation en sens horaire.

### 1.2.6 Deux exemples de calcul de la force de Coriolis

#### Déviations vers l'est d'un corps en chute libre

Considérons un corps  $P$  de masse  $m$ , que l'on laisse tomber d'une hauteur  $h$ , avec une vitesse initiale  $\vec{v}' = 0$ . Dans le référentiel du laboratoire  $\mathcal{R}'$ ,  $P$  est soumis à la force de gravité, et aux forces d'inertie  $\vec{F}_e$  et  $\vec{F}_c$ . Écrivons d'abord  $\vec{F}_c$ , en toute généralité :

$$\begin{aligned}\vec{F}_c &= -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}' = -2m\omega_0(\cos\theta\hat{k}' - \sin\theta\hat{i}') \wedge (\dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}') \\ &= 2m\omega_0 \cos\theta \dot{y}'\hat{i}' - 2m\omega_0(\cos\theta \dot{x}' + \sin\theta \dot{z}')\hat{j}' + 2m\omega_0 \sin\theta \dot{y}'\hat{k}' \quad (1.58)\end{aligned}$$

Quant à la force d'entraînement, nous avons vu dans la partie 1.2.4 qu'elle donne origine à une correction  $\vec{a}_e$ , petite en module et en direction, à l'accélération de gravité  $\vec{g}$ . Le point essentiel ici est que cette correction est en très bonne approximation indépendante de la position de  $P$  (au moins tant que celui-ci ne se déplace pas sur des distances comparables au rayon terrestre). Nous pouvons donc tenir compte de la force d'entraînement tout simplement en remplaçant  $\vec{g}$  par  $\vec{g}^* = \vec{g} - \vec{a}_e = -\frac{GM_T}{R_T^2}\hat{k}' - \vec{a}_e$ . Nous allons de plus supposer que l'axe vertical  $\hat{k}'$  est parallèle à  $\vec{g}^*$  (ce qui s'obtient aisément en pratique avec un fil à plomb, qui au repos est bien parallèle à l'accélération de gravité "effective"  $\vec{g}^*$ ).

Dans ces conditions, l'équation du mouvement de  $P$  est :

$$m\vec{a}' = -m\vec{g}^* + \vec{F}_c. \quad (1.59)$$

Cela correspond aux trois équations suivantes :

$$\ddot{z}' = -g^* + 2\omega_0 \sin\theta \dot{y}' \quad (1.60)$$

$$\ddot{y}' = -2\omega_0(\cos\theta \dot{x}' + \sin\theta \dot{z}') \quad (1.61)$$

$$\ddot{x}' = 2\omega_0 \cos\theta \dot{y}' \quad (1.62)$$

On peut résoudre le système ci-dessus par approximations successives. A l'ordre zéro, c'est-à-dire en négligeant Coriolis, on a :

$$\ddot{z}' = -g^* \Rightarrow \dot{z}'(t) = -g^*t \quad (1.63)$$

$$\ddot{y}' = 0 \Rightarrow \dot{y}'(t) = \text{const.} = 0 \quad (1.64)$$

$$\ddot{x}' = 0 \Rightarrow \dot{x}'(t) = \text{const.} = 0 \quad (1.65)$$

On peut maintenant insérer  $\dot{z}'(t) = -g^*t$  dans l'équation pour  $\dot{y}'$  :

$$\begin{aligned}\ddot{y}' &= +2\omega_0 \sin \theta g^* t + O(\omega_0^2) \\ &\simeq +2\omega_0 \sin \theta g^* t\end{aligned}\quad (1.66)$$

Dans l'éq. 1.66, on a négligé le terme  $-2\omega_0 \cos \theta \dot{x}'$ . En effet, l'éq. 1.65 nous dit que, à l'ordre 0 en  $\omega_0$ ,  $\dot{x}'(t) = 0$ . Donc, en développant  $\dot{x}'(t)$  en puissances de  $\omega_0$ , on aura :

$$\dot{x}'(t) = 0 + \omega_0 f_1(t) + \omega_0^2 f_2(t) + \dots$$

Le terme  $-2\omega_0 \cos \theta \dot{x}'$  est alors  $\propto \omega_0^2$  et pourra être négligé à l'ordre 1 d'approximation.

L'éq. 1.66 peut se résoudre :

$$\dot{y}'(t) = \omega_0 g^* \sin \theta t^2 \Rightarrow y'(t) = \frac{\omega_0 g^*}{3} \sin \theta t^3 \quad (1.67)$$

En utilisant 1.63, on a :

$$z'(t) = h - \frac{1}{2} g^* t^2 \Rightarrow t_f = \sqrt{\frac{2h}{g^*}} \quad (1.68)$$

En remplaçant dans l'équation pour  $y'(t)$  on obtient enfin

$$y'(t_f) = \frac{\omega_0}{3} \sqrt{\frac{8h^3}{g^*}} \sin \theta \quad (1.69)$$

A titre d'exemple, pour une hauteur  $h = 100 \text{ m}$ , et  $\theta = 45^\circ$ , on a  $y'(t_f) = 1,6 \text{ cm}$ .

On peut donc constater que, si on laisse tomber un corps sans vitesse initiale, ce corps n'atterrit pas à la verticale, mais un peu à l'est. En principe un physicien à l'intérieur d'un laboratoire, équipé d'un fil à plomb, peut prouver par une expérience de chute libre que la terre est en rotation.

Cet effet se comprend aisément dans le référentiel inertiel  $\mathcal{R}$ . En effet (Fig. 1.12) un corps situé au point B possède une vitesse tangentielle  $v_B = \omega_0(R_T + h)$  supérieure à la vitesse  $v_A = \omega_0 R_T$  du point A au sol à la verticale de B. Si le corps est lâché à partir du point B, il va atterrir à l'est de A.

### Le pendule de Foucault

Commençons d'abord par considérer un pendule dans un référentiel inertiel (Fig. 1.13).

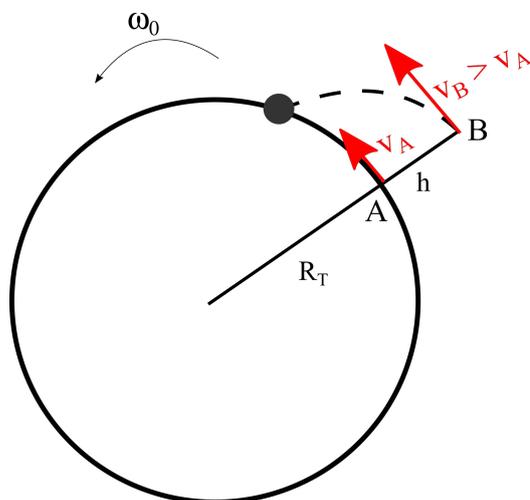


Figure 1.12: Déviation vers l'est d'un corps en chute libre.

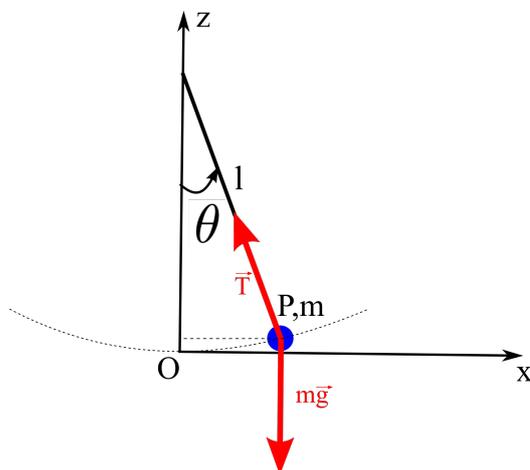


Figure 1.13: Un pendule.

Les équations du mouvement sont :

$$m\ddot{x} = -T \sin \theta \quad (1.70)$$

$$m\ddot{z} = -mg + T \cos \theta \quad (1.71)$$

Or, si les oscillations sont de petite amplitude, la coordonnée  $z$  ne change pratiquement pas. En effet

$$(l - z)^2 + (l \sin \theta)^2 = l^2 \Rightarrow z \simeq \frac{l}{2} \sin^2 \theta \simeq \frac{l}{2} \theta^2 \quad (1.72)$$

Au premier ordre en  $\theta$ ,  $z$  reste constante au cours des oscillations. L'éq. 1.71 nous dit alors  $T = mg$  et l'équation du mouvement en  $x$  devient celle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \frac{g}{l}x = 0, \quad (1.73)$$

ou, en forme vectorielle :

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{g}{l}\vec{r} = 0 \quad (1.74)$$

Plaçons-nous maintenant dans le référentiel non-inertiel du laboratoire, et laissons le pendule libre d'évoluer dans le plan  $\{x' y'\}$  (Fig.1.14).

L'équation 1.74 devient  $\ddot{\vec{r}}' + \frac{g^*}{l}\vec{r}' = 0$ , avec  $g^*$  à la place de  $g$  pour prendre en compte l'accélération centrifuge. On voit que cette dernière ne fait pas changer le plan d'oscillation du pendule, mais a un effet uniquement sur sa fréquence d'oscillation, qui est maximale au pôle Nord et décroît en allant vers l'équateur. Comme rappelé plus haut, le phénomène du ralentissement d'un horloge à pendule près de l'équateur avait été remarqué dès 1672. Pour obtenir les équations complètes du mouvement, il faut inclure la force de Coriolis 1.58. Cela donne :

$$\ddot{x}' + \frac{g^*}{l}x' = 2\omega_0 \cos \theta \dot{y}', \quad (1.75)$$

$$\ddot{y}' + \frac{g^*}{l}y' = -2\omega_0 \cos \theta \dot{x}' \quad (1.76)$$

Pour résoudre les équations du mouvement, on peut introduire une variable complexe  $z = x' + iy'$  avec  $i$  l'unité imaginaire ( $i^2 = -1$ ). En multipliant 1.76 par  $i$  et en sommant avec 1.75 on obtient une équation pour  $z$  :

$$\ddot{z} + 2i\Omega\dot{z} + \omega_m^2 z = 0 \quad (1.77)$$

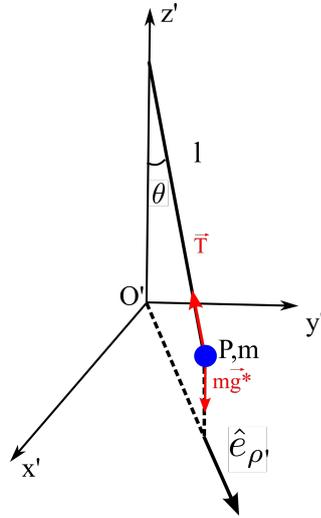


Figure 1.14:

avec  $\Omega = \omega_0 \cos \theta$  et  $\omega_m = \sqrt{\frac{g^*}{l}}$ .

On cherche une solution de la forme  $z(t) = Ae^{pt}$ . En insérant cette solution dans 1.77 on a :

$$\begin{aligned} p^2 + 2i\Omega p + \omega_m^2 &= 0 \\ \Rightarrow p &= -i\Omega \pm i\sqrt{\omega_m^2 + \Omega^2} = -i(\Omega \pm \omega_1) \end{aligned} \quad (1.78)$$

La solution générale est donc  $z(t) = Ae^{-i(\Omega-\omega_1)t} + Be^{-i(\Omega+\omega_1)t}$ . Les constantes  $A$  et  $B$  sont fixées par les conditions initiales. Admettons de lâcher le pendule, à l'instant  $t = 0$ , de la position  $(x'(0) = a, y'(0) = 0)$  avec une vitesse nulle. Cela donne

$$\begin{aligned} A + B &= a \\ A - B &= \frac{\omega_1}{\Omega} a \ll a \end{aligned} \quad (1.79)$$

En faisant l'approximation  $A - B = 0$  (justifiée car la fréquence de précession  $\omega_1$  est bien plus petite que la fréquence d'oscillation  $\Omega$ ), on obtient  $A = B = a/2$ . La solution est donc  $z(t) = Ae^{-i\Omega t} \cos(\omega_1 t)$ , et, en utilisant encore l'identité d'Euler  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$  :

$$x'(t) = a \cos(\Omega t) \cos(\omega_1 t) \quad (1.80)$$

$$y'(t) = -a \sin(\Omega t) \cos(\omega_1 t) \quad (1.81)$$

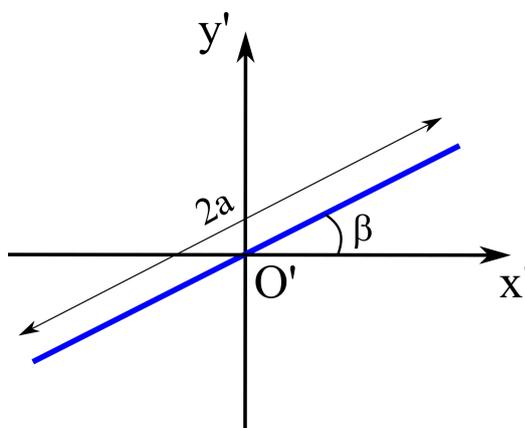


Figure 1.15:

Imaginons un pendule  $P$  dont le plan d'oscillation fait un angle  $\beta$  avec l'axe  $x'$  (Fig.1.15). Les coordonnées  $x'$  et  $y'$  oscillent entre  $\pm a \cos \beta$  et  $\pm a \sin \beta$ , donc suivent les lois horaires

$$x'(t) = a \cos(\beta) \cos(\omega_1 t) \quad (1.82)$$

$$y'(t) = a \sin(\beta) \cos(\omega_1 t) \quad (1.83)$$

En comparant avec les 1.80 - 1.81, on voit que dans le cas du pendule de Foucault  $\beta = -\Omega t$ , c'est-à-dire que le plan d'oscillation du pendule tourne avec une vitesse angulaire  $-\Omega = \omega_0 \cos \theta$ .

# Chapter 2

## Dynamique des systèmes de $N$ points matériels

Ce chapitre contient :

2.1	Equations fondamentales de la dynamique . . . . .	30
2.1.1	Première équation fondamentale : théorème de mouvement du centre de masse . . . . .	30
2.1.2	Deuxième équation fondamentale : théorème du moment cinétique . . . . .	32
2.1.3	Travail fourni par le moment d'une force . . . . .	37
2.2	Théorèmes de Koenig . . . . .	38
2.2.1	Énergie cinétique . . . . .	38
2.2.2	Moment cinétique . . . . .	39
2.3	Énergie d'un système de $N$ points matériels . . . . .	39
2.4	Résultante, moment et énergie potentielle d'un champ uniforme (champ de pesanteur) . . . . .	41

---

### *Buts du chapitre*

Dans ce chapitre, les systèmes de  $N$  points sont abordés dans toute leur généralité. On établit d'abord les deux équations fondamentales de la dynamique, qui permettent de déterminer l'évolution au cours du temps de la quantité de mouvement totale et du moment cinétique totale d'un système. On verra en particulier que cette évolution est déterminée uniquement par les forces externes au système. On verra aussi les deux théorèmes de Koenig, qui permettent d'écrire l'énergie cinétique et le moment cinétique, et comment il est possible de définir, dans le cas de forces (internes et externes) conservatives, l'énergie totale, qui est constante au cours du mouvement.

## 2.1 Equations fondamentales de la dynamique

### 2.1.1 Première équation fondamentale : théorème de mouvement du centre de masse

Considérons  $N$  points matériels  $P_1, P_2, \dots, P_N$ , de masses  $m_1, m_2, \dots, m_N$ , repérés par les vecteurs positions  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{OP_1}$ ,  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{OP_2}$ , et ainsi de suite. Pour chaque point, l'équation de Newton (PFD) est valable :

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2.1)$$

Dans (2.1),  $\vec{F}_i$  représente la somme vectorielle de toutes les forces qui agissent sur le point matériel  $P_i$ .

Nous pouvons faire la somme de toutes les équations dynamiques :

$$\sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i \quad (2.2)$$

Définissons la quantité de mouvement totale du système :

$$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \quad (2.3)$$

Nous nous apercevons que le membre de gauche de l'éq. 2.2 n'est rien d'autre que  $\dot{\vec{P}}$ , la dérivée temporelle de la quantité de mouvement totale du système.

Quant aux forces, on peut les séparer en forces externes au système  $\vec{F}_{iext}$ , et forces internes  $\vec{F}_{ij}$ . Pour un point  $P_i$ , une force interne est une force  $\vec{F}_{ij}$  appliquée par un autre point  $P_j$ . Par exemple, considérons deux points en chute libre, liés par un ressort.  $P_1$  est soumis à une force de rappel élastique  $\vec{F}_{12}$ , et de même  $P_2$  ressent la force  $\vec{F}_{21}$  exercée par  $P_1$  à travers le ressort. De plus, tant  $P_1$  que  $P_2$  sont soumis à la force externe  $\vec{F}_{iext} = m_i \vec{g}$  (Fig. 2.1).

Or, le **principe des actions réciproques** stipule que

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (2.4)$$

En général, pour chaque force  $\vec{F}_{ij}$  appliquée par un point  $P_j$  sur un point  $P_i$ , il existe en vertu du principe des actions réciproques la force  $\vec{F}_{ji}$  égale et opposée. Donc :

$$\sum_i \vec{F}_i = \sum_i (\vec{F}_{iext} + \sum_j \vec{F}_{ij}) = \sum_i \vec{F}_{iext} + \sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = \sum_i \vec{F}_{iext} = \vec{F}_{ext} \quad (2.5)$$

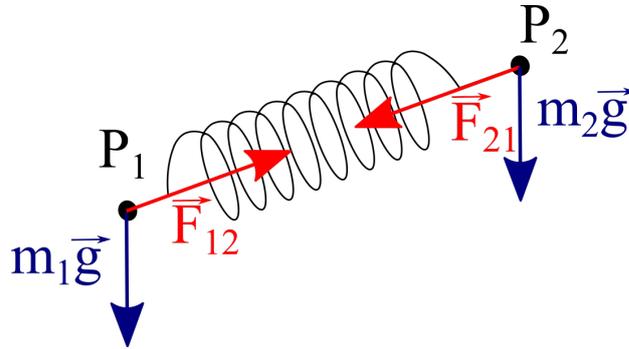


Figure 2.1: Forces externes et forces internes pour un système de 2 points.

car  $\sum_{i,j} \vec{F}_{ij} = 0$  (la résultante des forces internes est nulle, par conséquence du principe des actions réciproques).

En définitive, l'éq. 2.2 s'écrit:

$$\boxed{\dot{\vec{P}} = \vec{F}_{ext}} \quad (2.6)$$

L'éq. 2.6 est dite **première équation fondamentale de la dynamique**.

La forme de l'éq. 2.6 suggère d'introduire un point fictif  $C$ , le **centre de masse**, dont la position est définie ainsi :

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{M} \quad (2.7)$$

où  $M$  est la masse totale du système.

La vitesse du centre de masse est alors

$$\vec{v}_C = \frac{d}{dt} \vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} = \frac{\vec{P}}{M}, \quad (2.8)$$

et son accélération est

$$\vec{a}_C = \frac{d}{dt} \frac{\vec{P}}{M} = \frac{\vec{F}_{ext}}{M}. \quad (2.9)$$

La première équation fondamentale de la dynamique (2.6) peut alors se réécrire ainsi :

$$M \vec{a}_C = \vec{F}_{ext}, \quad (2.10)$$

et s'interpréter comme l'**équation de mouvement du centre de masse**. On remarque que l'éq. 2.10 est formellement identique au PFD pour un point matériel. Donc, *le centre de masse  $C$  se comporte comme un point matériel, où serait concentrée toute la masse  $M$  du système, soumis à une force égale à la résultante des forces externes*. Dans la forme (2.10), la première éq. fondamentale est appelée **théorème de mouvement du centre de masse**<sup>1</sup>.

### 2.1.2 Deuxième équation fondamentale : théorème du moment cinétique

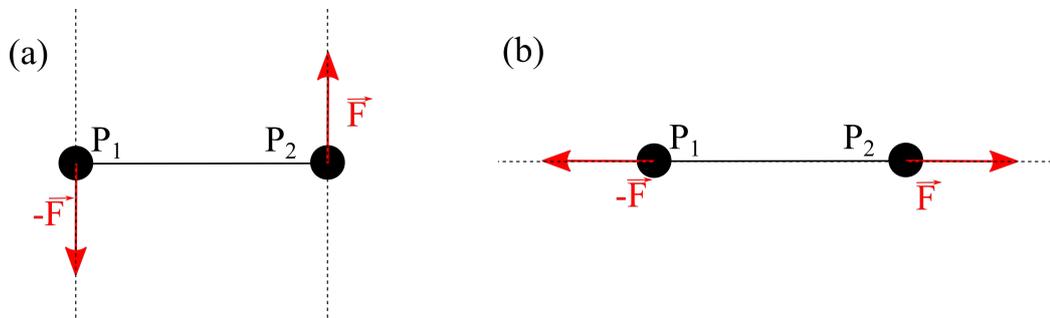


Figure 2.2: (a) Deux forces égales et opposées, de moment non nul. (b) Deux forces égales et opposées, de moment total nul.

La première équation fondamentale de la dynamique nous renseigne sur l'accélération du centre de masse, mais l'information qu'elle offre est incomplète. Considérons en effet le cas (a) de la Fig. 2.2 : deux points  $P_1$  et  $P_2$ , liés par une tige rigide, à repos à l'instant  $t = 0$ , sont soumis à deux forces égales et opposées  $\vec{F}$  et  $-\vec{F}$ . La résultante des forces externes est nulle, et en effet le centre de masse du système reste immobile, en accord avec la première équation fondamentale ; cependant, nous savons que les deux forces ont quand même un effet, celui de mettre en rotation le système. Cette rotation n'est pas prise en compte par la (2.6). De plus, on peut remarquer que les deux forces  $\vec{F}$  et  $-\vec{F}$  peuvent impartir un mouvement de rotation au système uniquement si elles sont portées par deux droites distinctes. Si elles sont portées par une même droite (Fig. 2.2 (b)), le système reste immobile.

<sup>1</sup>La ressemblance de l'éq. 2.10 au PFD ne doit pas induire en erreur. A différence du PFD pour un point matériel, l'éq. 2.10 n'est pas une équation fermée. En effet, pour écrire le terme de droite  $\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{i,ext}(\vec{r}_i)$  on a en général besoin de connaître les positions de tous les points  $P_i$  à tout instant ; la connaissance de la position  $\vec{r}_C$  du centre de masse ne suffit pas (voir aussi le paragraphe 2.4).

Suite aux considérations précédentes, définissons le **moment cinétique**  $\vec{L}_{(R)}$  (appelé aussi moment de la quantité de mouvement, ou moment angulaire) par rapport à un point  $R$  quelconque, appelé *centre de réduction* :

$$\vec{L}_{(R)} = \sum_i (P_i - R) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_R) \wedge \vec{p}_i \quad (2.11)$$

Calculons la dérivée temporelle de  $\vec{L}_{(R)}$  :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{L}_{(R)} &= \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_R) \wedge \vec{p}_i + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_R) \wedge \vec{F}_i \\ &= -\vec{v}_R \wedge \vec{P} + \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_R) \wedge \vec{F}_i = -\vec{v}_R \wedge \vec{P} + \sum_i \vec{M}_{(R)i} \end{aligned} \quad (2.12)$$

où l'on a défini le **moment**  $\vec{M}_{(R)i}$  **par rapport au centre de réduction**  $R$  **de la force**  $\vec{F}_i$  appliquée en  $P_i$  :

$$\vec{M}_{(R)i} = (\vec{r}_i - \vec{r}_R) \wedge \vec{F}_i \quad (2.13)$$

Or, le moment total des forces internes s'annule. En effet, pour chaque force interne  $\vec{F}_{ij}$  appliquée au point  $P_i$ , il existe en vertu du principe des actions réciproques la force interne  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$  appliquée au point  $P_j$ .

La contribution au moment total de cette paire de forces est :

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_R) \wedge \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_j - \vec{r}_R) \wedge \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{F}_{ij} \quad (2.14)$$

Or  $\vec{F}_{ij}$  est parallèle au vecteur  $\vec{r}_i - \vec{r}_j$  et donc le moment s'annule. Ceci étant vrai pour chaque paire de forces internes séparément, on en déduit que le moment total des forces internes est nul:

$$\vec{M}_{(R)i}^{int} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_R) \wedge \vec{F}_i^{int} = 0 \quad (2.15)$$

L'éq. 2.12 devient donc :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{(R)} = -\vec{v}_R \wedge \vec{P} + \vec{M}_{(R)}^{ext} \quad (2.16)$$

$\vec{M}_{(R)}^{ext} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_R) \wedge \vec{F}_i^{ext}$  étant le moment des forces externes uniquement. Les moments peuvent être définis par rapport à un centre de réduction  $R$  arbitraire, et on voit qu'on a tout intérêt à choisir un centre de réduction immobile, ce qui permet d'annuler le terme  $-\vec{v}_R \wedge \vec{P}$ . On voit toutefois qu'un

autre choix aussi est toujours possible : en effet, si l'on choisit comme centre de réduction le centre de masse  $C$ , on a  $-\vec{v}_C \wedge \vec{P} = 0$  car  $\vec{P} = M\vec{v}_C$ , et cela quel que soit l'état cinématique du centre de masse. L'éq. 2.16 se réduit donc à :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_{(R)} = \vec{M}_{(R)}^{ext} \quad (2.17)$$

**pourvu que le centre de réduction  $R$  soit immobile ou bien qu'il coïncide avec le centre de masse.** L'équation (2.17) (ou sa version plus générale 2.16, qui en pratique n'est presque jamais utilisée) constitue le **théorème du moment cinétique**. Le choix le plus naturel du centre de réduction est l'origine  $O$  du repère cartésien. C'est le choix que nous ferons dorénavant, et nous écrirons simplement

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \vec{M}^{ext} \quad (2.18)$$

en sous-entendant que les moments sont calculés par rapport à l'origine. Dans les rares cas où un choix différent sera fait, cela sera précisé explicitement.

En définitive : les deux équations

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{ext} \quad (2.19)$$

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext} \quad (2.20)$$

sont les **équations fondamentales de la dynamique** d'un système de N points matériels. Une conséquence immédiate des (2.19-2.20) est que, pour un système isolé ( $\vec{F}^{ext} = 0$ ,  $\vec{M}^{ext} = 0$ ) :

$$\vec{P} = \text{const.} \quad (2.21)$$

$$\vec{L} = \text{const.} \quad (2.22)$$

Donc, **la quantité de mouvement et le moment cinétique d'un système isolé se conservent**. Ces lois de conservation viennent s'ajouter à la conservation de l'énergie d'un système isolé. La conservation de l'énergie, du moment linéaire et du moment angulaire sont de très grande généralité et importance en physique. Ces lois de conservation n'ont jamais été remises en cause et restent valables en relativité et en mécanique quantique<sup>a</sup>.

<sup>a</sup>La formulation lagrangienne de la mécanique montre que l'origine profonde de ces lois de conservation est liée en fait aux différentes *propriétés d'invariance* (qu'on appelle *symétries* dans le jargon consacré) des lois physiques : l'invariance des lois physiques par translation dans le temps mène à la conservation de l'énergie, l'invariance par translation dans l'espace à la conservation de la quantité de mouvement, et l'invariance par rotation dans l'espace à la conservation du moment cinétique. Pour une présentation rapide mais très claire de ce point, on peut consulter l'excellent "Le minimum théorique : tout ce que vous avez besoin de savoir pour commencer à faire de la physique", de L. Susskind & G. Hrabovsky.

**Remarque** Nous avons dérivé les équations fondamentales de la dynamique en faisant les hypothèses

1.  $\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}$  (principe des actions réciproques)
2.  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \wedge \vec{F}_{ij} = 0$  (forces internes centrales)

Si les forces internes entre particules ne satisfont pas ces hypothèses, les équations fondamentales ne s'appliquent pas telles quelles. En particulier, les forces électromagnétiques entre deux charges ponctuelles en mouvement ne satisfont ni l'hypothèse 1, ni l'hypothèse 2 ! Par conséquent, *ni la quantité de mouvement total, ni le moment cinétique total d'un système de particules chargées en mouvement ne sont conservés*. La solution de ce "paradoxe" est trouvée lorsqu'on se rend compte que les champs électromagnétiques générés par les particules en mouvement possèdent non seulement de l'énergie, mais aussi de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Les particules et les champs peuvent donc échanger de la quantité de mouvement et du moment cinétique. Lorsqu'on fait le bilan de la quantité de mouvement *totale* (quantité de mouvement des particules + quantité de mouvement des champs) et du moment cinétique *total*, on trouve que ces deux quantités sont globalement conservées.

En définitive : pour un système isolé de particules chargées en mouvement, la quantité de mouvement et le moment cinétique *mécaniques*, i.e. des particules seules, ne sont pas conservés. Mais la quantité de mouvement des particules et des champs, et le moment cinétique des particules et des champs le sont.<sup>2</sup>

---

<sup>2</sup>Voir J. D. Griffiths, "Introduction to Electrodynamics", IV ed., chap. 8, p. 360. Voir aussi "The Feynman lectures on physics", vol. 2, par. 17-4 [https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II\\_17.html](https://www.feynmanlectures.caltech.edu/II_17.html)

### 2.1.3 Travail fourni par le moment d'une force

Considérons un point soumis à une force  $\vec{F}$ , et lié à l'origine par une tige rigide (Fig. 2.3). Le travail fourni par  $\vec{F}$  lors d'un déplacement élémentaire  $d\vec{r}$  est :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2.23)$$

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent,  $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ . On a donc

$$\begin{aligned} \delta W &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dt = (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \cdot \vec{F} dt \\ &= \vec{\omega} \cdot (\vec{r} \wedge \vec{F}) dt = \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt \end{aligned}$$

Donc, la puissance  $P$  fournie par  $\vec{F}$  s'écrit :

$$\boxed{P = \frac{\delta W}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}} \quad (2.24)$$

Cette formule est à rapprocher de la formule générale de la puissance fournie par une force  $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$ . On voit que, dans le cas d'un mouvement de rotation, le moment  $\vec{M}$  par rapport au centre de rotation remplace  $\vec{F}$ , et la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  remplace la vitesse  $\vec{v}$ .

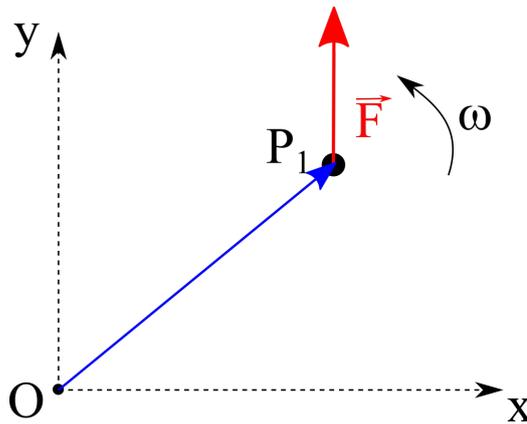


Figure 2.3: Point  $P_1$  soumis à une force  $\vec{F}$ , et contraint à rester à distance fixe de l'origine  $O$ .

## 2.2 Théorèmes de Koenig

### 2.2.1 Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un système de N points matériels est :

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \quad (2.25)$$

Nous pouvons exprimer les positions et les vitesses des points  $P_i$  par rapport au centre de masse  $C$ . Pour les positions, on a :

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i^* \quad (2.26)$$

où  $\vec{r}_i^* = \vec{r}_i - \vec{r}_C$  est le vecteur position de  $P_i$  relativement au centre de masse du système. En dérivant l'équation précédente on a

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i^* \quad (2.27)$$

Si on utilise l'éq. 2.27 dans l'expression de l'énergie cinétique on obtient :

$$\begin{aligned} T &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_i^*)^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2} + \vec{v}_C \cdot \left( \sum_i m_i \vec{v}_i^* \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$= \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2} \quad (2.29)$$

En effet,  $\sum_i m_i \vec{v}_i^* = \sum_i m_i (\vec{v}_i - \vec{v}_C) = \sum_i m_i \vec{v}_i - (\sum_i m_i) \vec{v}_C = M \vec{v}_C - M \vec{v}_C = 0$ .

En définitive, on a le **théorème de Koenig de l'énergie cinétique**:

$$\boxed{T = T_C + T^* = \frac{1}{2} M v_C^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^{*2}} \quad (2.30)$$

L'énergie cinétique est donc, en toute généralité, la somme de deux termes : un premier terme qu'il est naturel d'interpréter comme l'**énergie cinétique du centre de masse**, et un deuxième terme, qu'on appelle **énergie cinétique propre**, qui contient les vitesses des points matériels relativement au centre de masse du système. On verra que, dans le cas des solides indéformables, l'énergie cinétique propre est associée à la rotation du système autour du centre de masse.

### 2.2.2 Moment cinétique

Le moment cinétique par rapport à un centre de réduction  $R$  est:

$$\vec{L}_{(R)} = \sum_i (P_i - R) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_R) \wedge \vec{p}_i \quad (2.31)$$

A nouveau, introduisons les vitesses relatives au centre de masse  $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i^*$ . On trouve :

$$\begin{aligned} \vec{L}_{(R)} &= \sum_i (P_i - R) \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_R) \wedge m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_i^*) \\ &= \sum_i (\vec{r}_C + \vec{r}_i^* - \vec{r}_R) \wedge m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_i^*) \\ &= (\vec{r}_C - \vec{r}_R) \wedge M \vec{v}_C + \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^* \\ &= \vec{L}_{C(R)} + \vec{L}^* \end{aligned} \quad (2.32)$$

En définitive, on a le **théorème de Koenig du moment cinétique**:

$$\boxed{\vec{L}_{(R)} = \vec{L}_{C(R)} + \vec{L}^* = (\vec{r}_C - \vec{r}_R) \wedge M \vec{v}_C + \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^*} \quad (2.33)$$

Tout comme l'énergie cinétique, le moment cinétique total d'un système de  $N$  points se sépare naturellement en deux termes : le **moment cinétique du centre de masse**  $\vec{L}_{C(R)} = (\vec{r}_C - \vec{r}_R) \wedge M \vec{v}_C$  et le **moment cinétique propre**  $\vec{L}^* = \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^*$ . On remarquera que l'expression du moment cinétique propre est indépendante du choix du centre de réduction.

## 2.3 Énergie d'un système de $N$ points matériels

Considérons un système, qui évolue d'une configuration A à une configuration B. On peut calculer le travail effectué par les forces agissantes sur chaque point  $P_i$  :

$$\begin{aligned}
W_{AB} &= \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \int_A^B m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i dt \\
&= \sum_i \int_A^B \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) dt = \int_A^B \sum_i d \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \right) \\
&= \int_A^B \sum_i dT_i = \int_A^B dT = T_B - T_A.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Il reste donc vrai que le travail fourni est égale à la variation de l'énergie cinétique totale  $T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$ .

Considérons le cas où toutes les forces, internes et externes, sont conservatives.

$$\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \underbrace{\vec{F}_{iext} \cdot d\vec{r}_i}_{\text{forces externes}} + \underbrace{\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i}_{\text{forces internes}} \tag{2.35}$$

Pour les forces externes :

$$\vec{F}_{iext} \cdot d\vec{r}_i = -\vec{\nabla} V_{iext} \cdot d\vec{r}_i = -dV_{iext}. \tag{2.36}$$

Passons aux forces internes. A nouveau, il faut tirer profit du fait que les forces internes sont égales et opposées par paires.<sup>3</sup>

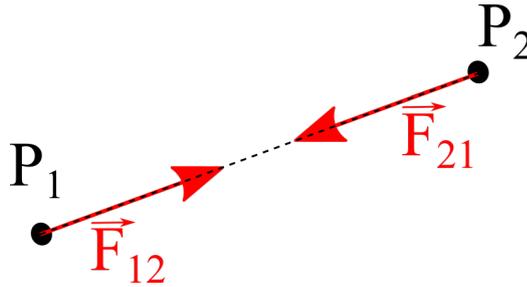


Figure 2.4: Forces internes entre deux points  $P_1$  et  $P_2$ .

<sup>3</sup>Ici aussi, ce qui suit ne s'applique pas aux forces de Lorentz, d'origine magnétique, qui dépendent de la vitesse et ne peuvent se déduire d'un potentiel scalaire. Dans ce cas, pour écrire l'énergie il faut introduire (en plus du potentiel scalaire lié à l'interaction coulombienne) un *potentiel vecteur*  $\vec{A}$ , lié au champ magnétique  $\vec{B}$  par la relation  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ .

## 2.4. RÉSULTANTE, MOMENT ET ÉNERGIE POTENTIELLE D'UN CHAMP UNIFORME (CHA)

$$\vec{F}_{12} \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_{21} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F}_{12} \cdot (d\vec{r}_1 - d\vec{r}_2) \quad (2.37)$$

Or, la force  $\vec{F}_{12}$  ne peut que dépendre de la position relative de  $P_1$  et  $P_2$ , donc  $\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ . On a alors :

$$\vec{F}_{12}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{F}_{12}(\vec{r}_{rel}) \cdot d(\vec{r}_{rel}) = -dV_{12}(r_{rel}) = -dV_{12}(r_{12}) \quad (2.38)$$

En définitive :

$$\begin{aligned} W_{AB} &= T_B - T_A = \sum_i \int_A^B (-dV_{iext}) + \int_A^B \sum_i \sum_{j>i} (-dV_{ij}) \\ &= -[V_{ext}(B) - V_{ext}(A)] - [-V_{int}(B) - V_{int}(A)]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Il est donc possible de définir une **énergie totale**  $E$  qui est conservée :

$$\boxed{E = T + V = T + V_{ext} + V_{int}} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} V_{ext} &= \sum_i V_{iext} \\ V_{int} &= \sum_i \sum_{j>i} V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} V_{ij} \end{aligned}$$

Pour chaque paire  $(P_i, P_j)$  de particules, on a un seul terme qui apparaît dans l'énergie potentielle interne. Par exemple, pour le système en Fig. 2.1, on a :

$$\begin{aligned} V_{ext} &= \sum_i V_{iext} = mgy_1 + mgy_2 \\ V_{int} &= \frac{1}{2}k \left( \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0 \right)^2 \end{aligned}$$

## 2.4 Résultante, moment et énergie potentielle d'un champ uniforme (champ de pesanteur)

Considérons  $N$  points dans un champ de pesanteur uniforme. La résultante des forces externes est :

$$\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{F}_{iext} = - \sum_i m_i g \hat{j} = -Mg \hat{j} \quad (2.41)$$

Le moment des forces externes par rapport à l'origine est :

$$\vec{M}_{(O)}^{ext} = \sum_i \vec{r}_i \wedge (-m_i g \hat{j}) = \left( \sum_i m_i \vec{r}_i \right) \wedge (-g \hat{j}) = M \vec{r}_C \wedge (-g \hat{j}) = \vec{r}_C \wedge (-Mg \hat{j}) \quad (2.42)$$

Enfin, l'énergie potentielle totale  $V_{ext}$  s'écrit :

$$V_{ext} = \sum_i V_{iext} = - \sum_i m_i y_i g = -Mgy_C \quad (2.43)$$

On voit donc que tout se passe comme si toute la masse du système était effectivement concentrée dans le centre de masse. Bien entendu, cela n'est vrai que si le champ est uniforme, et donc la force subie par les différents points  $P_i$  est la même. En général, si les forces externes dépendent du point,  $\sum_i \vec{F}_{iext}(\vec{r}_i) \neq \vec{F}_{ext}(\vec{r}_C)$ .

## Chapter 3

# Dynamique des solides indéformables



**Ce chapitre contient :**

3.1	Solides indéformables . . . . .	44
3.2	Énergie cinétique - moment d'inertie . . . . .	45
3.2.1	Cinématique . . . . .	45
3.2.2	Énergie cinétique . . . . .	46
3.3	Travail des forces externes sur un solide indéformable . . . . .	47
3.4	Rotations d'un solide indéformable . . . . .	48
3.4.1	Rotations autour d'un axe fixe . . . . .	48
3.4.2	Effet d'une force appliquée sur l'axe de rotation . . . . .	49
3.4.3	Rotations autour d'un point fixe . . . . .	51
3.4.4	Axes principaux d'inertie - Équations d'Euler . . . . .	55

*Buts du chapitre*

Dans ce chapitre, on appliquera les notions générales établies au chapitre précédent au cas des solides indéformables. Ces systèmes, bien que pouvant être constitués d'une infinité de points, présentent dans tous les cas six degrés de liberté au plus. Les deux équations fondamentales de la dynamique, qui fournissent six équations dynamiques, sont alors suffisantes pour résoudre le problème du mouvement des corps rigides. Nous verrons que l'énergie cinétique d'un solide indéformable se sépare naturellement en une énergie cinétique de translation et une énergie cinétique de rotation, qui fait apparaître la notion de moment d'inertie par rapport à un axe donné. Ensuite, nous étudierons les différentes rotations d'un solide (autour d'un axe fixe, ou d'un point fixe). Nous verrons que tout solide possède trois axes principaux d'inertie, qui ont la propriété d'être des axes de rotation libre.

**3.1 Solides indéformables**

Un solide indéformable est caractérisé par les relations

$$|\overrightarrow{P_i P_j}| = |\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij} \quad \forall i, j \quad (3.1)$$

qui expriment le fait que la distance entre 2 points quelconques du solide reste constante au cours du temps. Le solide a donc uniquement 6 degrés de liberté : sa configuration spatiale est connue si l'on donne les 3 coordonnées spécifiant la position d'un point quelconque du solide (par exemple son centre de masse), et les 3 angles donnant son orientation dans l'espace.

L'énergie potentielle interne  $V_{int}$  d'un solide indéformable ne varie jamais au cours du mouvement. Cela est évident physiquement, car les interactions internes ne dépendent que des distances entre les points, qui restent toujours constantes. On peut le démontrer formellement, en observant que les forces

internes d'un solide fournissent toujours un travail global nul. En effet en dérivant l'éq. 3.1 on a

$$\frac{d}{dt} [(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] = (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0. \quad (3.2)$$

Or, le travail fourni par un couple de forces internes est

$$W = \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i dt + \vec{F}_{ji} \cdot \vec{v}_j dt = \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j) dt = 0 \quad (3.3)$$

car la force interne  $\vec{F}_{ij}$  exercée par le point  $P_j$  sur le point  $P_i$  est parallèle au vecteur  $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ .

## 3.2 Énergie cinétique - moment d'inertie

### 3.2.1 Cinématique

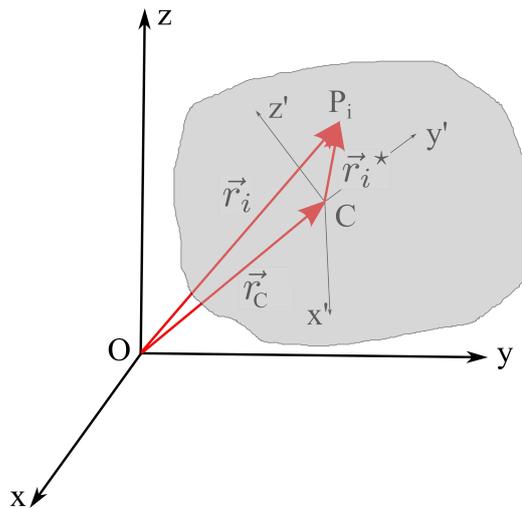


Figure 3.1: Vecteurs position dans un solide indéformable.

En se référant à la figure 3.1, on peut écrire pour tout point  $P_i$  du solide

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i^* \quad (3.4)$$

On peut considérer un référentiel  $\{Cx'y'z'\}$  solidaire avec le solide et centré sur le centre de masse  $C$ . Le vecteur  $\vec{r}_i^*$  exprime la position de  $P_i$  dans ce référentiel. En se rappelant la formule de changement de référentiel 1.22

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' + \vec{v}' \quad (3.5)$$

et en observant que pour un solide  $\vec{v}' = 0$  ( $P_i$  est fixe dans le référentiel du solide), on obtient la formule pour les vitesses d'un solide :

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^* \quad (3.6)$$

L'éq. 3.6 nous dit que la vitesse de n'importe quel point est connue si l'on connaît les vecteurs  $\vec{v}_C$  (vitesse de translation du centre de masse) et  $\vec{\omega}$  (vitesse angulaire de rotation du solide) : on retrouve le fait que la connaissance de 6 nombres, correspondant à 6 degrés de liberté, décrit complètement le système.

### 3.2.2 Énergie cinétique

Le théorème de Koenig permet d'écrire :

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^{*2} \quad (3.7)$$

En utilisant la 3.6 on a

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^*|^2 \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^{*2} \sin^2 \phi_i \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i d_i^2 \right) \omega^2 \end{aligned}$$

donc en définitive

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta C} \omega^2} \quad (3.8)$$

$d_i = r_i^* \sin \phi_i$  est la distance du point  $P_i$  de l'axe  $\Delta$  parallèle à  $\vec{\omega}$  et passant par  $C$ . La quantité

$$I_{\Delta C} = \sum_i m_i d_i^2 \quad (3.9)$$

est le **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe  $\Delta$  parallèle à  $\vec{\omega}$  et passant par  $C$ . Le moment d'inertie par rapport à un axe donné est

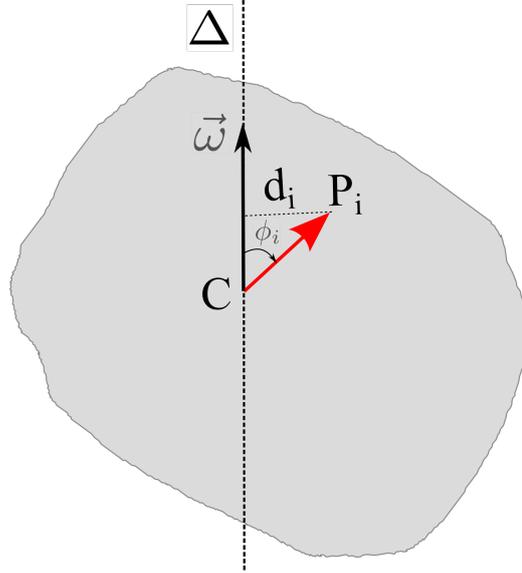


Figure 3.2: Illustration des distance  $d_i$  intervenant dans le calcul du moment d'inertie autour d'un axe donné.

une caractéristique d'un solide, déterminée uniquement par la géométrie des masses.

L'énergie cinétique d'un solide indéformable est donc la somme de deux termes, l'**énergie cinétique du centre de masse**  $T_C = \frac{1}{2}Mv_C^2$ , liée au mouvement de translation de l'ensemble du système, et l'**énergie cinétique de rotation**  $T^* = \frac{1}{2}I_{\Delta C}\omega^2$ , liée à la rotation du système.

### 3.3 Travail des forces externes sur un solide indéformable

En toute généralité, on peut écrire

$$\delta W = \sum_i \vec{F}_{iext} \cdot d\vec{r}_i = \sum_i \vec{F}_{iext} \cdot \vec{v}_i dt \quad (3.10)$$

En utilisant  $\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^*$  on obtient

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_i \vec{F}_{iext} \cdot \vec{v}_i dt \\ &= \sum_i \vec{F}_{iext} \cdot \vec{v}_C dt + \sum_i \vec{F}_{iext} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^*) dt \end{aligned} \quad (3.11)$$

Dans le deuxième terme, on peut écrire  $\vec{F}_{iext} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^*) = (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^*) \cdot \vec{F}_{iext} = \vec{\omega} \cdot \vec{r}_i^* \wedge \vec{F}_{iext}$ . La 3.11 devient ainsi

$$\boxed{\delta W = \vec{F}_{ext} \cdot \vec{v}_C dt + \vec{M}_C^{ext} \cdot \vec{\omega} dt} \quad (3.12)$$

$\vec{F}_{ext}$  étant la résultante des forces externes et  $\vec{M}_C^{ext} = \sum_i \vec{r}_i^* \wedge \vec{F}_{iext}$  le moment total des forces externes par rapport au centre de masse  $C$ .

### 3.4 Rotations d'un solide indéformable

#### 3.4.1 Rotations autour d'un axe fixe

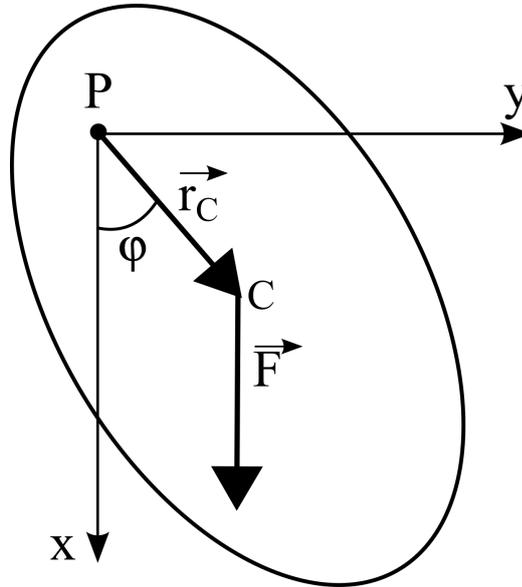


Figure 3.3: Solide en rotation autour d'un axe fixe.

Considérons le solide de la figure 3.3, pouvant tourner autour d'un axe parallèle à  $\hat{e}_z$  et passant par le point fixe  $P$ . Afin d'obtenir l'équation de mouvement du système, écrivons le moment cinétique. Le point  $P$  étant fixe, il est avantageux de le choisir comme origine et centre de réduction. Écrivons le moment cinétique :

$$\vec{L}_{(P)} = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) \quad (3.13)$$

Sans perte de généralité, on prend  $\vec{\omega} = \omega \hat{k}$ . Dans la suite, pour alléger la notation, on va omettre l'indice ( $P$ ), étant sous-entendu que tous les moments sont calculés par rapport à  $P$ , qui de plus coïncide avec l'origine  $O$  du repère. Considérons  $L_z$ , la composante de  $\vec{L}$  suivant  $z$  :

$$\begin{aligned} L_z &= \vec{L} \cdot \hat{k} = \sum_i \hat{k} \cdot \vec{r}_i \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) \\ &= \omega \sum_i \hat{k} \wedge \vec{r}_i \cdot m_i (\hat{k} \wedge \vec{r}_i) \\ &= \omega \sum_i m_i d_i^2 = \omega I_z. \end{aligned}$$

En définitive

$$\boxed{L_z = I_z \omega} \quad (3.14)$$

On peut projeter le théorème du moment cinétique sur  $\hat{k}$ :

$$\dot{L}_z = M_z^{ext} \quad (3.15)$$

Or, si l'axe de rotation est fixe,  $I_z$  est constant dans le temps, donc  $\dot{L}_z = I_z \dot{\omega} = I_z \ddot{\phi}$ . On obtient alors :

$$\boxed{I_z \ddot{\phi} = M_z^{ext}} \quad (3.16)$$

L'éq. 3.16 donne l'évolution de la vitesse angulaire de rotation au cours du temps, sous l'effet des forces externes ; il s'agit de l' **équation de mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe**.

### 3.4.2 Effet d'une force appliquée sur l'axe de rotation

Considérons le disque représenté dans la figure 3.4. Dans tout ce qui suit, nous ignorerons le mouvement du centre de masse, pour nous concentrer sur la dynamique rotationnelle (nous avons vu au chapitre précédent que la dynamique rotationnelle autour du centre de masse est indépendante du mouvement de ce dernier). Imaginons de pousser légèrement le bout de l'axe de rotation dans la direction  $-\hat{e}_x$ , en exerçant, pendant une durée  $\Delta t$ , une force  $\vec{F}^{ext} = -F \hat{e}_x$ . Que va-t-il se passer?

Considérons d'abord le cas  $\vec{\omega} = 0$ . Dans ce cas, l'effet de la force  $\vec{F}^{ext}$  est de faire tourner le disque autour de l'axe  $z$ . Si, par la suite, le système est parfaitement isolé et ne subit donc aucune force externe, il continuera à tourner indéfiniment autour de l'axe  $z$ , avec une vitesse angulaire constante.

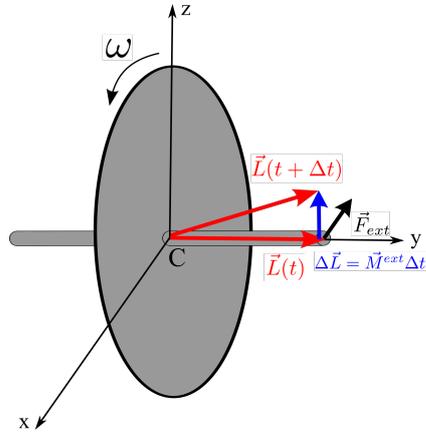


Figure 3.4: Effet d'une force sur l'axe de rotation d'un solide.

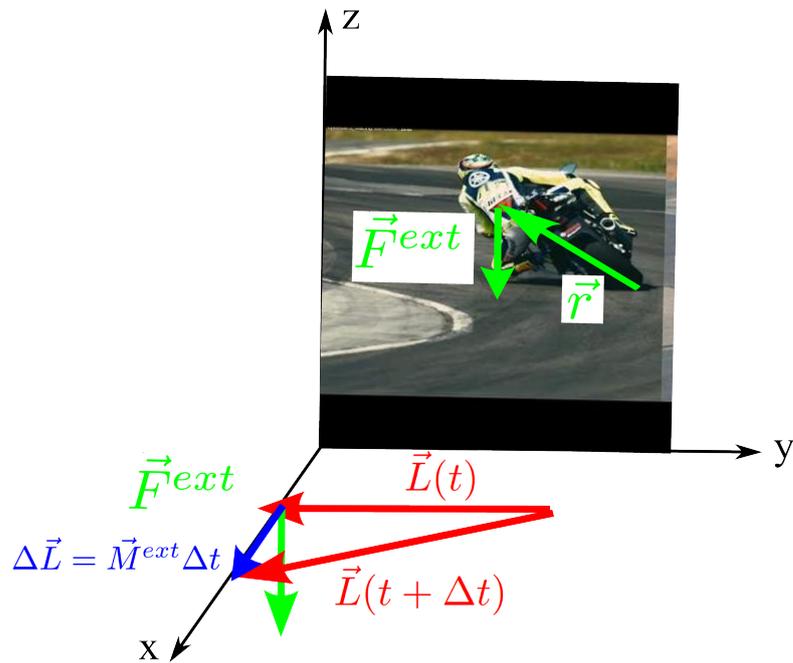


Figure 3.5: Effet d'une force sur l'axe de rotation d'un solide.

Imaginons maintenant que, avant l'action de la force  $\vec{F}^{ext}$ , le disque soit en rotation autour de l'axe  $y$ , avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_y$ . Quel est l'effet de la force  $\vec{F}^{ext} = -F \hat{e}_x$  dans ce cas ?

Le moment de la force externe (par rapport au centre  $C$  du disque)  $\vec{M}^{ext} = \vec{r} \wedge \vec{F}^{ext}$  est orienté suivant  $z$  :  $\vec{M}^{ext} = rF \hat{e}_z$ . En appliquant le théorème du moment cinétique avec le centre de masse  $C$  comme centre de réduction

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext} \quad (3.17)$$

on s'aperçoit que le moment cinétique acquiert une composante

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}(t + \Delta t) - \vec{L}(t) \simeq \vec{M}^{ext} \Delta t \quad (3.18)$$

dans la direction  $z$ . De manière un peu surprenante, l'axe de rotation se soulève, en se déplaçant dans une direction orthogonale à celle de la force externe (voir figure 3.4)! Cet effet est exploité par les pilotes de moto : lorsqu'ils se plient vers la gauche par exemple, le moment de la force de pesanteur fait tourner l'axe de rotation des roues dans le plan horizontal (voir figure 3.5).

### 3.4.3 Rotations autour d'un point fixe

Considérons la toupie sur la figure 3.6.

Elle est soumise à son propre poids ; le pivot  $\mathcal{O}$  est fixe. Supposons d'abord que  $\vec{\omega} = 0$ , donc que la toupie ne tourne pas. Dans ce cas, bien évidemment elle va tomber sur l'effet de la force de pesanteur, dirigée vers le bas.

Que se passe-t-il lorsque la toupie est en rotation autour de son axe? Utilisons à nouveau le théorème du moment cinétique

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext} \quad (3.19)$$

en prenant le point  $\mathcal{O}$  comme centre de réduction. La réaction en  $\mathcal{O}$  n'exerçant pas de moment, la seule force externe qui contribue au moment total est la pesanteur :

$$\vec{M}^{ext} = \vec{r}_C \wedge M\vec{g} = (\rho_C \hat{e}_\rho + z_C \hat{e}_z) \wedge (-Mg \hat{e}_z) = \rho_C Mg \hat{e}_\phi \quad (3.20)$$

avec  $\vec{r}_C$  le vecteur position du centre de masse du système.

Entre les instants  $t$  et  $t + \Delta t$ , la variation  $\Delta \vec{L}$  du moment cinétique vaut

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}(t + \Delta t) - \vec{L}(t) \simeq \vec{M}^{ext} \Delta t = \rho_C Mg \Delta t \hat{e}_\phi \quad (3.21)$$

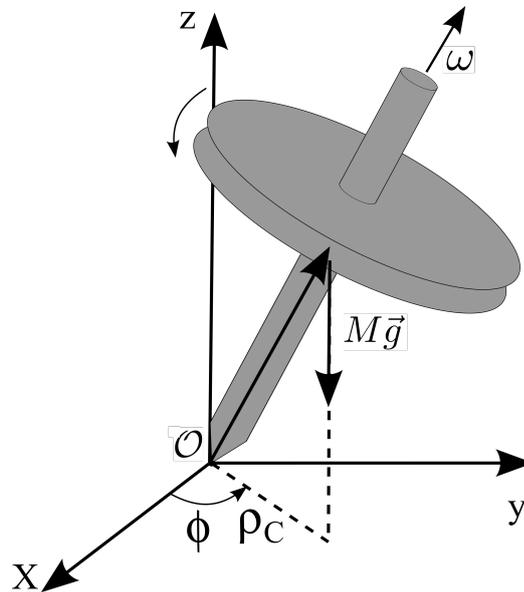


Figure 3.6: Solide en rotation autour d'un point fixe.

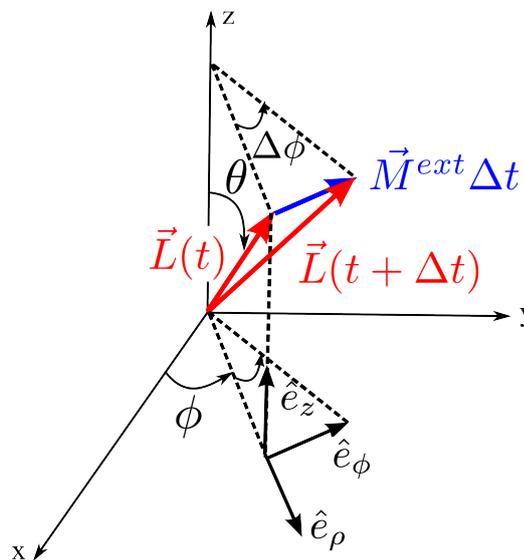


Figure 3.7: Solide en rotation autour d'un point fixe.

On retrouve l'effet discuté précédemment : l'axe de rotation se déplace dans une direction orthogonale à celle de la force externe. La toupie ne tombe donc pas, mais effectue un mouvement de *précession* autour de l'axe  $z$ .

Calculons la vitesse angulaire de précession. Par rapport à la figure 3.7, on a

$$|\vec{L}| \sin \theta \Delta \phi = |\vec{M}^{ext}| \Delta t \quad (3.22)$$

$$I\omega \sin \theta \Delta \phi = r_C \sin \theta Mg \Delta t \quad (3.23)$$

dont on peut déduire la vitesse angulaire de précession  $\Omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$  :

$$\Omega = \frac{r_C Mg}{I\omega} \quad (3.24)$$

On remarque que  $\Omega$  ne dépend pas de l'angle d'inclinaison  $\theta$  de la toupie par rapport à la verticale. De plus,  $\Omega$  est inversement proportionnelle à  $I\omega = L$  ; donc, plus  $|\vec{L}|$  est important, moindre sera l'effet d'une force externe.

**Remarque importante** La formule (3.24) n'est valable que dans l'approximation  $\Omega \ll \omega \Leftrightarrow r_C Mg \ll I\omega^2$ , c'est-à-dire que les variations de l'énergie potentielle gravitationnelle sont petites par rapport à l'énergie cinétique de rotation (approximation gyroscopique). Si cette condition n'est pas vérifiée, la formule (3.24) cesse d'être valable. En effet, on voit que, si  $\omega \rightarrow 0$ , (3.24) prévoit une vitesse de précession infinie, alors qu'évidemment, la toupie va tout simplement tomber.

Plus précisément, si nous écrivons exactement le théorème du moment cinétique

$$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{ext}, \quad (3.25)$$

nous obtenons pour le membre de gauche :

$$\dot{\vec{L}} = \dot{L}_r \hat{e}_r + \dot{L}_\theta \hat{e}_\theta + \dot{L}_\phi \hat{e}_\phi + L_r \frac{d}{dt} \hat{e}_r + L_\theta \frac{d}{dt} \hat{e}_\theta + L_\phi \frac{d}{dt} \hat{e}_\phi \quad (3.26)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \dot{\vec{L}} = & (\dot{L}_r - L_\phi \dot{\phi} \sin \theta - L_\theta \dot{\theta}) \hat{e}_r + \\ & (\dot{L}_\theta + L_r \sin \theta \dot{\phi} + L_\theta \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}_\theta + \\ & (\dot{L}_\phi + L_r \dot{\theta} - L_\phi \dot{\phi} \cos \theta) \hat{e}_\phi. \end{aligned}$$

Les équations de mouvement sont donc:

$$\dot{L}_r - L_\phi \dot{\phi} \sin \theta - L_\theta \dot{\theta} = 0 \quad (3.27)$$

$$\dot{L}_\phi + L_r \sin \theta \dot{\phi} + L_\theta \dot{\phi} \cos \theta = Mg r_C \sin \theta \quad (3.28)$$

$$\dot{L}_\theta + L_r \dot{\theta} - L_\phi \dot{\phi} \cos \theta = 0 \quad (3.29)$$

Ce sont ces équations qu'il faudrait résoudre dans le cas général (en exprimant  $L_r$ ,  $L_\theta$  et  $L_\phi$  en fonction de  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  et  $\omega$ ). Si on rajoute "à la main" les hypothèses supplémentaires  $\theta = \text{const.}$ ,  $L_r = \text{const.}$ , on obtient

$$L_r \sin \theta \dot{\phi} + L_\theta \dot{\phi} \cos \theta = Mgr_C \sin \theta \quad (3.30)$$

Enfin, on néglige  $L_\theta$  devant  $L_r$  et on aboutit à  $L_r \dot{\phi} = Mgr_C$ , qui donne  $\dot{\phi} = \frac{Mgr_C}{L_r}$ . Toutes ces approximations n'auront de sens que si la composante  $L_r$  du moment cinétique est très grande devant toutes les autres, ce qui veut dire d'un point de vue intuitif que le gyroscope doit "tourner très vite". Plus précisément sa vitesse de rotation  $\omega$  autour de son propre axe doit être très grande devant  $\dot{\phi}$ :

$$\omega \gg \dot{\phi} \Rightarrow I\omega^2 \gg Mgr_C \quad (3.31)$$

L'éq. 3.31 exprime le fait que l'énergie cinétique de rotation doit être très grande devant l'énergie potentielle de la force de pesanteur (*approximation gyroscopique*).

De manière générale, le moment cinétique  $\vec{L}$  a un effet de stabilisation : une toupie en rotation rapide ne tombe pas, mais reste quasiment à la verticale, du moins tant que les frottements ne ralentissent pas sa rotation ; pour la même raison, il est facile de tenir en équilibre sur un vélo en mouvement, alors que cela est presque impossible si le vélo est immobile.

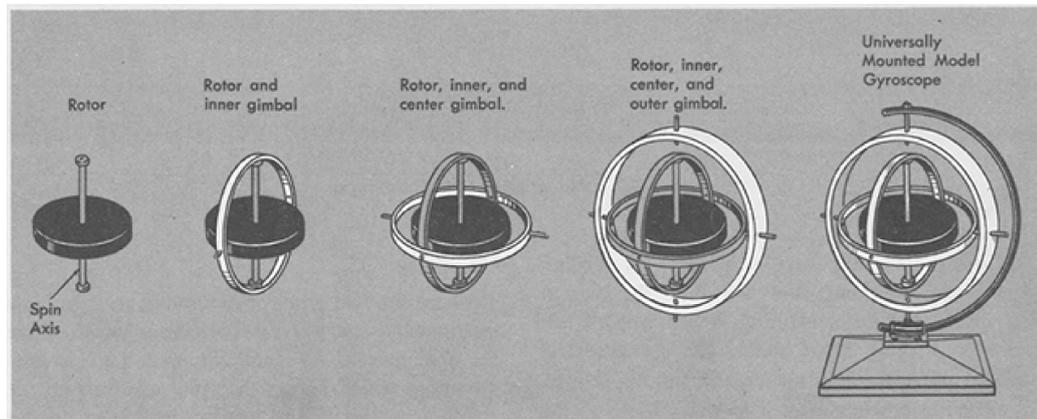


Figure 3.8: Gyroscope monté avec trois *suspensions à cardan* (*gimbal* en anglais), utilisé pour la navigation inertielle.

Le gyroscope peut être utilisé pour la navigation inertielle. En effet, s'il est monté dans un support qui rend impossible l'application d'un moment de force extérieur (voir la figure 3.8), son moment cinétique  $\vec{L}$  reste constant et pointe toujours dans la même direction de l'espace, indépendamment du

mouvement du support. La direction de l'axe de rotation reste fixe et peut donc servir comme référence pour diriger un avion ou un bateau.

### 3.4.4 Axes principaux d'inertie - Équations d'Euler

En général, pour un solide en rotation, le moment angulaire  $\vec{L}$  n'est pas parallèle à la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ . Considérons par exemple les deux situations dans la figure 3.9.

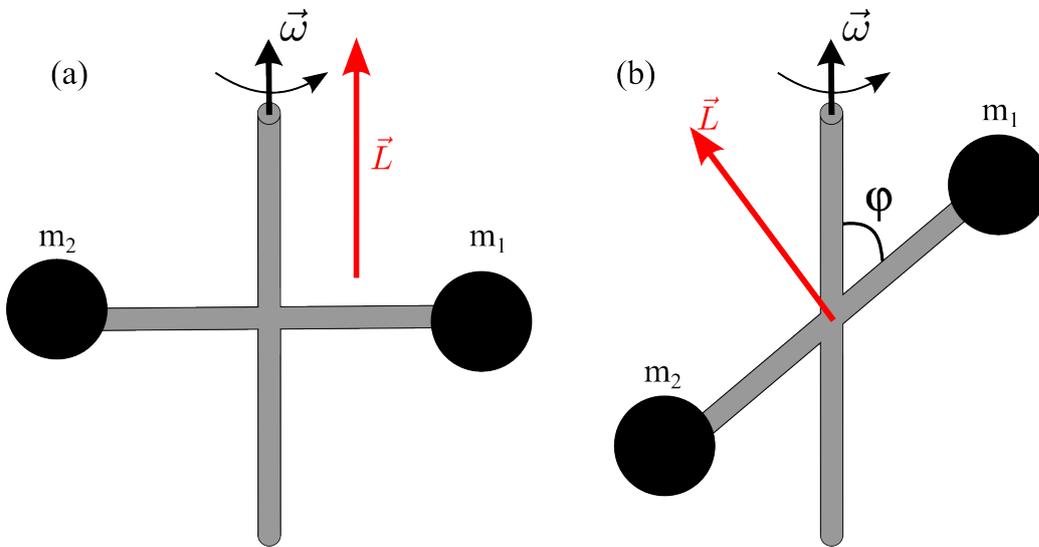


Figure 3.9: (a) Le moment cinétique  $\vec{L}$  est parallèle à la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ , et l'axe de rotation (axe vertical) est un axe de rotation libre (axe principal d'inertie). (b) Le moment cinétique  $\vec{L}$  n'est pas parallèle à la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ , et l'axe de rotation (axe vertical) n'est pas un axe de rotation libre (axe principal d'inertie).

Deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont contraintes à se déplacer autour d'un axe fixe, qu'on peut identifier avec l'axe  $z$ . Le vecteur  $\vec{\omega}$  est donc  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_z$ . Dans le cas (a),  $\vec{L}$  est parallèle à la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ . Au cours du temps, si la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  est constante,  $\vec{L}$  demeure également constant, en module et direction. Donc, en l'absence de forces externes (y compris les forces de frottement, que l'on ne parviendra jamais à éliminer complètement dans la réalité), le système continuera à tourner indéfiniment, avec une vitesse angulaire constante, autour de l'axe  $z$ . L'axe de rotation coïncide ici avec un **axe principal d'inertie**, qui a la propriété d'être un **axe de rotation libre** : une rotation uniforme autour d'un tel axe est possible sans

**aucune force externe.** Par contre, dans le cas (b), où le vecteur position de  $m_1$  et  $m_2$  fait un angle  $\varphi$  fixe avec l'axe de rotation, on a que  $\vec{L}$  n'est pas parallèle à  $\vec{\omega}$ . Dans ce deuxième cas, la direction de  $\vec{L}$  change au cours du temps : en vertu de l'équation fondamentale du moment cinétique, il sera nécessaire d'appliquer un moment de forces opportun sur l'axe de rotation, afin de maintenir fixe ce dernier.

Afin de préciser ces notions, écrivons le moment cinétique propre (référé au centre de masse  $C$ )  $\vec{L}^*$  en toute généralité :

$$\begin{aligned}\vec{L}^* &= \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^* = \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^*) = \sum_i \vec{r}_i^* \wedge m_i \vec{v}_i^* \\ &= \sum_i m_i (r_i^{*2} \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i^*) \vec{r}_i^*)\end{aligned}\quad (3.32)$$

En décomposant les vecteurs dans un référentiel  $\{Cx'y'z'\}$  solidaire avec le solide en rotation

$$\vec{r}_i^* = x'_i \hat{e}'_x + y'_i \hat{e}'_y + z'_i \hat{e}'_z \quad (3.33)$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \hat{e}'_x + \omega_y \hat{e}'_y + \omega_z \hat{e}'_z \quad (3.34)$$

on obtient les expressions suivantes pour les trois composantes du moment cinétique :

$$L_x^* = \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2) \omega_x - \sum_i m_i x'_i y'_i \omega_y - \sum_i m_i x'_i z'_i \omega_z \quad (3.35)$$

$$L_y^* = - \sum_i m_i y'_i x'_i \omega_x + \sum_i m_i (x_i'^2 + z_i'^2) \omega_y - \sum_i m_i y'_i z'_i \omega_z \quad (3.36)$$

$$L_z^* = - \sum_i m_i z'_i x'_i \omega_x - \sum_i m_i z'_i y'_i \omega_y + \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2) \omega_z \quad (3.37)$$

On peut écrire ces relations dans une forme compacte en introduisant le tenseur d'inertie  $\mathbb{I}$  :

$$\vec{L}^* = \mathbb{I} \vec{\omega} \quad (3.38)$$

avec

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

où les éléments du tenseur sont

$$\begin{aligned}
 I_{xx} &= \sum_i m_i (y_i'^2 + z_i'^2) & I_{xy} &= I_{yx} = \sum_i m_i x_i' y_i' & I_{xz} &= I_{zx} = \sum_i m_i x_i' z_i' \\
 I_{yy} &= \sum_i m_i (x_i'^2 + z_i'^2) & I_{yz} &= I_{zy} = \sum_i m_i y_i' z_i' \\
 & & & & I_{zz} &= \sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)
 \end{aligned}$$

Le tenseur d'inertie  $\mathbb{I}$  est symétrique ( $I_{ij} = I_{ji}$ ). Il est alors diagonalisable (théorème spectral) : on peut toujours trouver trois vecteurs unitaires  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$ , et  $\hat{e}_3$ , formant un nouveau repère orthonormé direct, dans lequel  $\mathbb{I}$  s'exprime ainsi :

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Les axes repérés par les vecteurs unitaires  $\hat{e}_i$  sont dits *axes principaux d'inertie* et ont des propriétés intéressantes. Dans ce nouveau repère on peut écrire

$$\vec{L}^* = I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \quad (3.41)$$

L'équation (3.41) montre que, si  $\vec{\omega}$  est orienté suivant un axe principal d'inertie, par exemple si  $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ , alors  $\vec{L}^*$  est proportionnel à  $\vec{\omega}$  :

$$\vec{L}^* = I_3 \vec{\omega} \quad (3.42)$$

Écrivons maintenant le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}^* = \vec{M}_C^{ext} \quad (3.43)$$

Dans la dérivée de  $\vec{L}^* = I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3$ , il ne faut pas oublier que les  $\hat{e}_i$  sont solidaires du solide, et donc évoluent au cours du temps. La dérivée de  $\vec{L}^*$  est donc (voir eq. 1.31) :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}^* = I_1 \dot{\omega}_1 \hat{e}_1 + I_2 \dot{\omega}_2 \hat{e}_2 + I_3 \dot{\omega}_3 \hat{e}_3 + \vec{\omega} \wedge \vec{L}^* = \vec{M}_C^{ext} \quad (3.44)$$

Si on projette l'éq. (3.44) sur les trois axes principaux, on obtient les équations d'Euler :

$$I_1 \dot{\omega}_1 + \omega_2 \omega_3 (I_3 - I_2) = M_1^{ext} \quad (3.45)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + \omega_3 \omega_1 (I_1 - I_3) = M_2^{ext} \quad (3.46)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + \omega_1 \omega_2 (I_2 - I_1) = M_3^{ext} \quad (3.47)$$

En général ces équations sont compliquées à étudier. On peut toutefois en déduire facilement une conséquence importante, dans le cas d'absence de forces externes :

$$I_1 \dot{\omega}_1 = \omega_2 \omega_3 (I_2 - I_3) \quad (3.48)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = \omega_3 \omega_1 (I_3 - I_1) \quad (3.49)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = \omega_1 \omega_2 (I_1 - I_2) \quad (3.50)$$

Supposons par exemple que, à l'instant  $t = 0$ , on ait  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . On voit alors que  $\dot{\omega}_1 = \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_3 = 0$  : la vitesse angulaire restera toujours constante et égale à sa valeur initiale  $\vec{\omega} = \omega_3 \hat{e}_3$ , ce qui prouve que **les axes principaux d'inertie sont des axes de rotation libre**.

### Retour sur l'énergie cinétique d'un solide indéformable

On peut exprimer l'énergie cinétique propre, c'est-à-dire l'énergie cinétique de rotation, d'un solide en termes de son moment cinétique propre :

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{2} \sum_i m_i |\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i^*|^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i [\omega^2 r_i^{*2} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i^*)^2] \\ &= \frac{1}{2} \vec{L}^* \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2 \end{aligned} \quad (3.51)$$

Cette expression est complètement équivalente à celle trouvée au paragraphe (3.2.2). L'apparente différence vient du fait qu'ici on a utilisé comme repère les axes principaux d'inertie, qui ne sont pas forcément alignés avec  $\vec{\omega}$ . En définitive, l'expression la plus générale de l'énergie cinétique d'un solide indéformable est :

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$$

ou encore

$$\boxed{T = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{v}_C + \frac{1}{2} \vec{L}^* \cdot \vec{\omega}} \quad (3.52)$$

Cette dernière expression souligne les similitudes formelles entre l'énergie cinétique de translation et celle de rotation. La différence principale est que  $\vec{P}$  et  $\vec{v}_C$  sont toujours parallèles car la masse  $M$  est un scalaire, indépendant de la direction de  $\vec{v}_C$ . Au contraire,  $\vec{L}^*$  et  $\vec{\omega}$  ne sont pas forcément parallèles car le tenseur d'inertie a des propriétés directionnelles.



# Chapter 4

## Chocs

Ce chapitre contient :

4.1 Généralités . . . . .	61
4.2 Chocs unidimensionnels . . . . .	63
4.3 Chocs à deux dimensions . . . . .	64

---

### 4.1 Généralités

Un choc est une interaction entre deux corps, de durée finie  $\Delta t$ , et “de très grande intensité”. Par cette dernière expression, on entend que la force d’interaction est beaucoup plus grande que toutes les autres forces mises en jeu, qui peuvent par conséquent être négligées pendant le choc.

Pour illustrer ce point, considérons par exemple un coup joué au golf, et évaluons l’ordre de grandeur de la force exercée sur la balle.

Les équations du mouvement après le coup de club sont :

$$\begin{aligned}\ddot{y} &= -g \\ \ddot{x} &= 0\end{aligned}$$

d’où  $x(t) = v_{0x}t$ ,  $y(t) = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ . Prenons  $\theta_0 = 45 \Rightarrow v_{0x} = v_{0y}$ . La balle touche le sol à l’instant  $t_f = \frac{2v_{0y}}{g}$ , et la distance parcourue  $l$  est  $l = \frac{2v_{0x}^2}{g}$ . Or

$$v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 = 2v_{0x}^2 \Rightarrow l = \frac{v_0^2}{g}$$

L’énergie cinétique qui a été transférée à la balle par le club est donc  $T = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mgl$ . Admettons pour simplifier que le club exerce une force

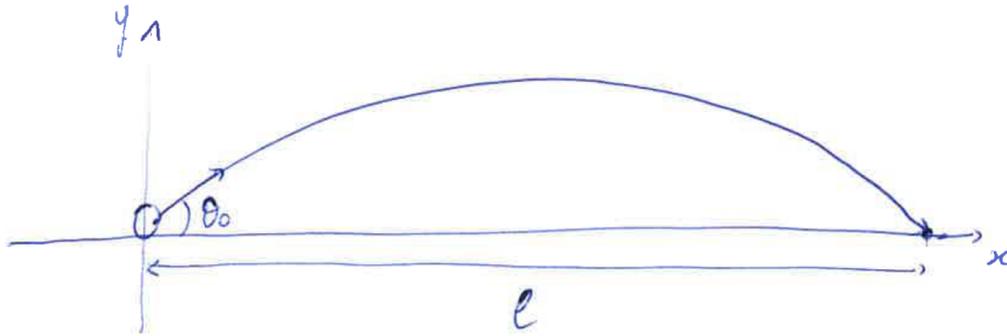


Figure 4.1: Trajectoire d'une balle de golf.

constante  $F$ , et reste en contact avec la balle sur une distance  $d \sim 2$  cm (correspondant au rayon d'une balle de golf). On a alors :

$$Fd = T = \frac{1}{2}mgl \Rightarrow F = \frac{mgl}{2d} \quad (4.1)$$

Si la balle est envoyée à une distance  $l = 200$  m, l'accélération  $a$  impartie par la force d'interaction entre le club et la balle est :

$$a = g \frac{l}{2d} \simeq 5000g \quad (4.2)$$

On voit donc que la force exercée par le club pendant le choc est plus intense que la gravité de plusieurs ordres de grandeur. Pendant le choc, l'effet de la gravité pourra alors être négligé. En général, on qualifie de choc toute situation dans laquelle les forces d'interaction entre les parties du système sont beaucoup plus intenses que les forces externes. Dans ce cas, les forces externes étant négligeables, on pourra considérer le système comme isolé pendant le choc. Par conséquent, **la quantité de mouvement totale est conservée** (ainsi que l'énergie totale).

Dans le cas d'un choc entre deux particules, on pourra écrire :

$$\boxed{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2} \quad (4.3)$$

$\vec{p}_i$  étant la quantité de mouvement de la  $i$ -ème particule juste avant le choc, et  $\vec{q}_i$  la quantité de mouvement juste après le choc. Dans certaines situations, par exemple lors d'un choc entre deux balles très dures, on a **conservation de l'énergie cinétique**. On parle alors de **chocs élastiques**. Dans ce cas, on peut écrire aussi :

$$T_i = T_f$$

$$\frac{1}{2} \frac{p_1^2}{m_1} + \frac{1}{2} \frac{p_2^2}{m_2} = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{m_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{m_2} \quad (4.4)$$

## 4.2 Chocs unidimensionnels

Dans le cas unidimensionnel, les lois de conservation (4.3) et (4.4) suffisent. En projetant sur l'axe  $x$  on a :

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (4.5)$$

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \quad (4.6)$$

En utilisant  $v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = (v_{1i} + v_{1f})(v_{1i} - v_{1f})$  et en divisant (4.6) par (4.5) on a :

$$(v_{2f} - v_{1f}) = -(v_{2i} - v_{1i}) \quad (4.7)$$

L'éq. 4.7 nous dit que la **vitesse relative des deux corps s'inverse suite au choc**. D'ailleurs, on peut généraliser heuristiquement l'éq. 4.7 aux **chocs inélastiques**, en introduisant le **coefficient de restitution**  $e$  :

$$(v_{2f} - v_{1f}) = -e(v_{2i} - v_{1i}) \quad (4.8)$$

$0 \leq e \leq 1$ . Pour  $e = 1$  on retrouve le choc parfaitement élastique, alors que, pour  $e = 0$ , on a un choc mou (les deux corps restent "collés" après le choc).

En combinant (4.8) avec (4.5), on peut déterminer les vitesses après le choc :

$$v_{1f} = \frac{m_1 - em_2}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2(1+e)}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (4.9)$$

$$v_{2f} = \frac{m_1(1+e)}{m_1 + m_2} v_{1i} + \frac{m_2 - em_1}{m_1 + m_2} v_{2i} \quad (4.10)$$

### Quelques exemples de chocs élastiques ( $e = 1$ )

- $m_1 = m_2$

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{2i} \\ v_{2f} = v_{1i} \end{cases} \Rightarrow \text{les deux particules échangent leur vitesses}$$

- $m_1 \gg m_2, v_{2i} = 0$

$$\begin{cases} v_{1f} \simeq v_{1i} \\ v_{2f} \simeq 2v_{1i} \end{cases}$$

- $m_1 \ll m_2, v_{2i} = 0$

$$\begin{cases} v_{1f} \simeq -v_{1i} \\ v_{2f} \simeq 2\frac{m_1}{m_2}v_{1i} \ll v_{1i} \end{cases} \quad (\text{mais } \neq 0 !)$$

### 4.3 Chocs à deux dimensions

Nous allons considérer uniquement des chocs élastiques, avec conservation de l'énergie cinétique. Les deux équations (4.3-4.4) sont donc valables. Il est avantageux d'utiliser le référentiel  $\mathcal{R}'$  du centre de masse  $C$ , dont l'origine coïncide avec le centre de masse  $C$  ( $\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ ) et les axes  $\{x'y'z'\}$  sont parallèles aux axes  $\{xyz\}$  du référentiel inertiel  $\mathcal{R}$  (référentiel du laboratoire). En l'absence de forces externes, le centre de masse effectue une translation rectiligne uniforme  $\Rightarrow \mathcal{R}'$  est un référentiel inertiel.

On a :

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{r}_C + \vec{r}_1^* \Rightarrow \vec{r}_1^* = \vec{r}_1 - \vec{r}_C \\ \vec{r}_2 = \vec{r}_C + \vec{r}_2^* \Rightarrow \vec{r}_2^* = \vec{r}_2 - \vec{r}_C \end{cases}$$

Dans  $\mathcal{R}'$ , la quantité de mouvement totale est nulle (car  $C$  est par définition immobile dans  $\mathcal{R}'$ ), on a donc

$$\vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* = 0 \quad (4.11)$$

Il en va évidemment de même pour les quantités de mouvement  $\vec{q}_i^*$  après les chocs :

$$\vec{q}_1^* + \vec{q}_2^* = 0 \quad (4.12)$$

L'énergie cinétique avant le choc s'écrit alors :

$$T_i^* = \frac{p_1^{*2}}{2m_1} + \frac{p_2^{*2}}{2m_2} = \frac{1}{2} \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} p_1^{*2} = \frac{1}{2} \frac{p_1^{*2}}{\mu} \quad (4.13)$$

où  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  est la *masse réduite*. L'énergie cinétique après le choc est

$$T_f^* = \frac{1}{2} \frac{q_1^{*2}}{\mu} \quad (4.14)$$

et dans le cas d'un choc élastique on a par conséquence

$$|q_1^*| = |p_1^*| \quad (4.15)$$

On peut représenter la situation comme en Fig. 4.2.

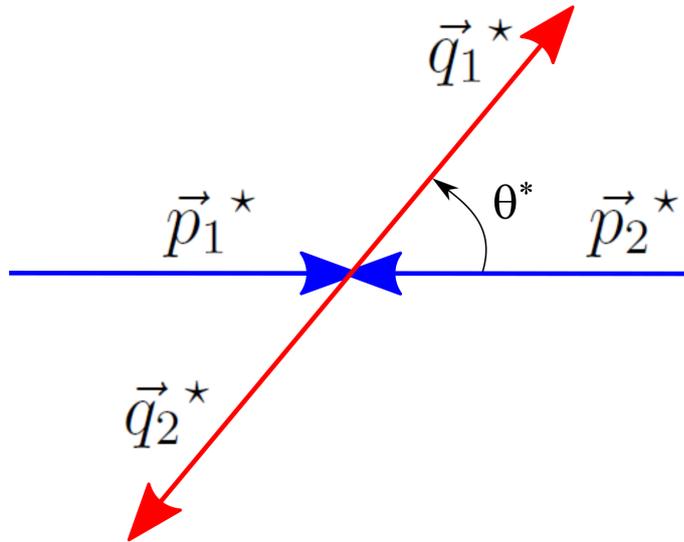


Figure 4.2: Configuration des quantités de mouvement dans un choc élastique.

Les lois de conservation ne permettent pas de déterminer l'angle  $\theta^*$  : pour cela, il faut s'intéresser aux détails de l'interaction entre les deux corps. En pratique, souvent  $\theta^*$  est déterminé expérimentalement. Pour ce faire, il faut relier  $\theta^*$  à l'angle de diffusion  $\theta$  (*scattering angle*) mesuré dans le référentiel du laboratoire.

Un cas assez commun est celui avec le corps 2 à repos dans le référentiel  $\mathcal{R}$  du laboratoire (par exemple, en physique des particules on envoie souvent des "projectiles" sur des cibles fixes). Dans  $\mathcal{R}$  on a alors :

$$\vec{p}_1 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \quad (4.16)$$

Cette situation est représentée dans la Fig. 4.3, où apparaissent l'angle de diffusion  $\theta$  et l'angle de recul  $\alpha$ .

On peut déterminer une relation entre  $\vec{p}_1$  et  $\vec{p}_1^*$  :

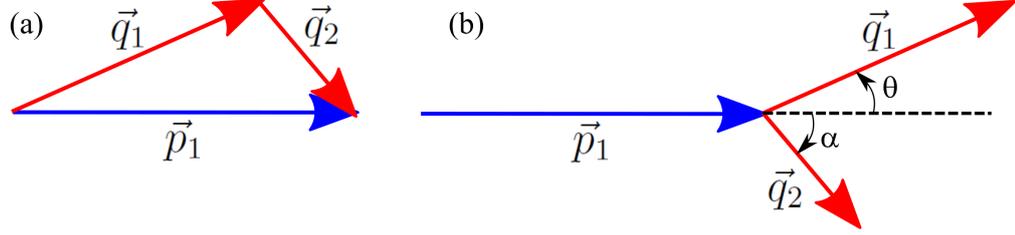


Figure 4.3: Configuration des quantités de mouvement dans un choc avec une cible fixe.

$$\begin{aligned}
 \vec{p}_1^* &= m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_C) = \vec{p}_1 - m_1 \frac{\vec{p}_1}{M} = \frac{m_2}{M} \vec{p}_1 \\
 \Rightarrow \vec{p}_1 &= \vec{p}_1^* + \frac{m_1}{m_2} \vec{p}_1^*
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

On peut aussi exprimer  $\vec{q}_1$  en termes des quantités avec  $*$  :

$$\begin{aligned}
 \vec{q}_1^* &= m_1(\vec{v}_{1f} - \vec{v}_C) = \vec{q}_1 - m_1 \frac{\vec{p}_1}{M} = \vec{q}_1 - \frac{m_1}{m_2} \vec{p}_1^* \\
 \Rightarrow \vec{q}_1 &= \vec{q}_1^* + \frac{m_1}{m_2} \vec{p}_1^*
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ces relations peuvent se représenter graphiquement comme en Fig. 4.4. La Fig. 4.4 permet de trouver toutes les relations souhaitées entre les quantités de mouvement, les angles de diffusion et de recul, et les énergies. Par la suite, on va montrer explicitement quelques cas particuliers importants.

Par exemple, on peut déterminer l'angle de diffusion  $\theta$  dans le laboratoire en fonction de l'angle  $\theta^*$ .

Par rapport à la Fig. 4.4, on a

$$OM = q_1^* \sin \theta^* \tag{4.19}$$

D'autre part

$$OM = \left( \frac{m_1}{m_2} p_1^* + q_1^* \cos \theta^* \right) \tan \theta \tag{4.20}$$

d'où :

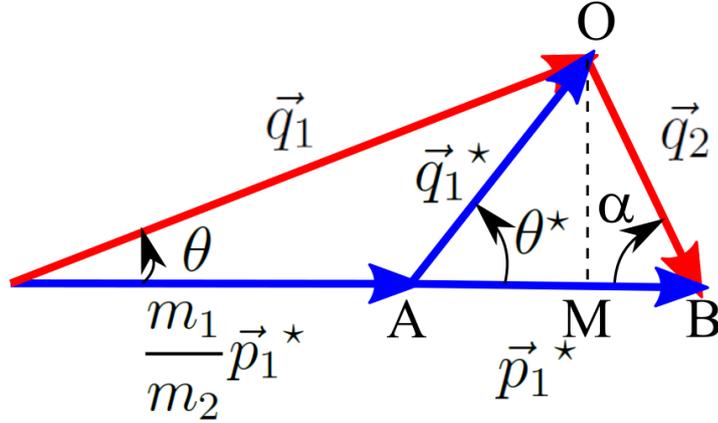


Figure 4.4: Configuration des quantités de mouvement dans un choc avec une cible fixe.

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta^*}{\frac{m_1}{m_2} + \cos \theta^*} \quad (4.21)$$

Il est à remarquer que la relation (4.21) est indépendante des vitesses, et fait intervenir uniquement le rapport des masses  $\frac{m_1}{m_2}$ .

Considérons en particulier le cas  $m_1 > m_2$  (cible plus légère que le projectile). Il existe alors une valeur maximale  $\theta_{max}$  pour l'angle de diffusion :

$$q_1^* = \frac{m_1}{m_2} p_1^* \sin \theta_{max} \quad (4.22)$$

d'où

$$\theta_{max} = \arcsin \frac{m_2}{m_1} \quad (4.23)$$

Ainsi, en connaissant la masse d'une particule et en mesurant  $\theta_{max}$ , on peut remonter à la masse de l'autre.

Une autre relation intéressante est celle de l'énergie cinétique transférée. Le triangle  $OAB$  de la Fig. 4.4 est isocèle, donc

$$\alpha = \frac{1}{2}(\pi - \theta^*) \quad (4.24)$$

$$\Rightarrow q_2 = 2p_1^* \sin \frac{\theta^*}{2} \quad (4.25)$$

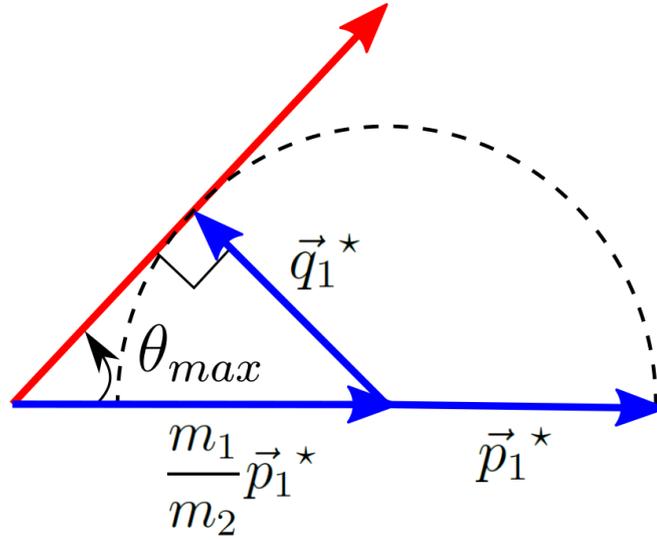


Figure 4.5: Angle de diffusion maximale.

L'énergie cinétique du corps 2 après le choc est

$$T_2 = \frac{1}{2m_2} 4p_1^{*2} \sin^2 \frac{\theta^*}{2} \quad (4.26)$$

et vaut au maximum

$$T_{2max} = \frac{2}{m_2} p_1^{*2} \quad (4.27)$$

D'autre part  $T_i = \frac{p_1^2}{2m_1} = \frac{M^2 p_1^{*2}}{2m_2^2 m_1}$  d'où :

$$\boxed{\frac{T_{2max}}{T_i} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}} \quad (4.28)$$

L'énergie cinétique transférée dépend du rapport des masses  $f = \frac{m_1}{m_2}$  :

$$\frac{T_{2max}}{T_i} = \frac{4f}{(1+f)^2} \quad (4.29)$$

Elle est maximale lorsque  $\frac{d}{df} \frac{T_{2max}}{T_i} = 0 \Rightarrow f = 1$ . Alors  $\frac{T_{2max}}{T_i} = 1$  et  $m_1 = m_2 \Rightarrow$  on retrouve le cas de choc frontal entre deux particules de même masse, avec échange des vitesses.