



**HAL**  
open science

## Cours de Mécanique Analytique et Vibratoire

Mabrouk Benhamou

► **To cite this version:**

Mabrouk Benhamou. Cours de Mécanique Analytique et Vibratoire: Mécanique Analytique et Vibratoire. Licence. Module: Mécanique Analytique et Vibration, Maroc. 2023, pp.154. hal-04553630

**HAL Id: hal-04553630**

**<https://cel.hal.science/hal-04553630>**

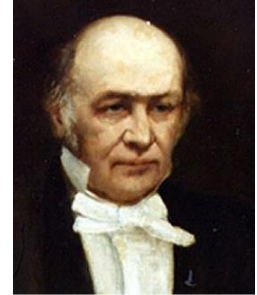
Submitted on 21 Apr 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Joseph-Louis  
Lagrange**



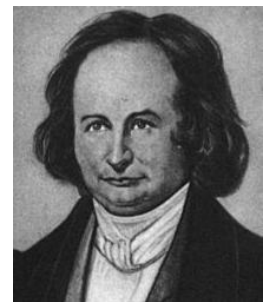
**Sir William Rowan Hamilton**

# MÉCANIQUE ANALYTIQUE ET VIBRATOIRE

**Cours destiné aux étudiants de  
Licence de Physique, aux  
étudiants de Master de Physique  
et aux élèves-ingénieurs**



**Pierre Louis Moreau  
de Maupertuis**



**Charles Gustave Jacob  
Jacobi**

**Professeur Mabrouk BENHAMOU**  
**Faculté des Sciences – Meknès, Maroc**

# Table des matières

<b>Avant-propos.</b>	<b>5</b>
<b>Introduction générale.</b>	<b>7</b>
<b>1 Mécanique de Lagrange.</b>	<b>14</b>
1.1 Coordonnées généralisées. . . . .	14
1.1.1 Contraintes ou liaisons. . . . .	14
1.1.2 Coordonnées généralisées. . . . .	16
1.2 Forces de contraintes et déplacements virtuels. . . . .	19
1.2.1 Forces de contraintes. . . . .	19
1.2.2 Déplacements virtuels. . . . .	20
1.2.3 Principe de d'Alembert. . . . .	22
1.3 Équations de Lagrange. . . . .	23
1.3.1 Cas des systèmes conservatifs. . . . .	23
1.3.2 Cas des systèmes non conservatifs. . . . .	27
1.3.3 Applications élémentaires. . . . .	28
1.4 Principe de Moindre Action. . . . .	35
1.4.1 Lien à la dynamique de Newton. . . . .	35
1.4.2 Équations d'Euler-Lagrange. . . . .	36
1.4.3 Un exemple du Principe de Moindre Action : La brachistochrone. . . . .	41
1.4.4 Extension aux systèmes contraints. . . . .	45
1.5 Formalisme Lagrangien dans des référentiels non galiléens. . . . .	48

1.5.1	Cas des référentiels non galiléens en translation rectiligne. . . . .	48
1.5.2	Cas des référentiels non galiléens tournants. . . . .	50
<b>2</b>	<b>Mécanique d'Hamilton.</b>	<b>52</b>
2.1	Énergie du système. . . . .	52
2.2	Moments conjugués. . . . .	53
2.3	Fonction de Hamilton. . . . .	55
2.3.1	Transformée de Lengrendre. . . . .	56
2.3.2	Fonction de Hamilton. . . . .	57
2.4	Équations d'Hamilton. . . . .	59
2.5	Évolution temporelle des grandeurs physiques. . . . .	60
2.6	Transformations canoniques. . . . .	62
2.6.1	Définition et propriétés. . . . .	62
2.6.2	Fonction génératrice. . . . .	64
2.6.3	Quelques transformations canoniques remarquables. . . . .	67
2.7	Équation d'Hamilton-Jacobi. . . . .	67
<b>3</b>	<b>Lois de conservation.</b>	<b>71</b>
3.1	Variables cycliques. . . . .	72
3.2	Conservation de l'énergie mécanique totale. . . . .	73
3.2.1	Démonstration à travers le Lagrangien. . . . .	73
3.2.2	Démonstration à travers le formalisme canonique. . . . .	74
3.2.3	Démonstration à travers le Lagrangien. . . . .	74
3.2.4	Démonstration à travers le formalisme canonique. . . . .	75
3.3	Conservation du moment cinétique total. . . . .	76
3.3.1	Démonstration à travers le Lagrangien. . . . .	76
3.3.2	Démonstration à travers le formalisme canonique. . . . .	78
3.4	Lois d'échelle et similitude. . . . .	80
3.5	Théorème de viriel. . . . .	82
3.6	Brisure de symétrie. . . . .	83

<b>4</b>	<b>Oscillations des systèmes linéaires.</b>	<b>86</b>
4.1	Systèmes linéaires libres. . . . .	86
4.1.1	Équation du mouvement. . . . .	86
4.1.2	Diagramme de phase position-vitesse. . . . .	89
4.1.3	Bilan énergétique. . . . .	89
4.1.4	Ressorts. . . . .	90
4.1.5	Pendule simple. . . . .	92
4.1.6	Oscillateurs électriques. . . . .	93
4.2	Oscillateurs non harmoniques. . . . .	94
4.3	Oscillations amorties. . . . .	98
4.3.1	Équation du mouvement. . . . .	99
4.3.2	Analogie électrique. . . . .	99
4.3.3	Résolution de l'équation du mouvement. . . . .	100
4.3.4	Bilan énergétique. . . . .	104
4.4	Oscillations forcées sans frottements. . . . .	105
4.4.1	Équation du mouvement. . . . .	105
4.4.2	Analogie électrique. . . . .	106
4.4.3	Solution de l'équation du mouvement. . . . .	106
4.4.4	Bilan énergétique. . . . .	109
4.5	Oscillations forcées avec frottements. . . . .	109
4.5.1	Équation du mouvement. . . . .	110
4.5.2	Analogie électrique. . . . .	110
4.5.3	Résolution de l'équation du mouvement. . . . .	111
4.5.4	Cas d'une force extérieure oscillante. . . . .	112
4.5.5	Bilan énergétique. . . . .	115
<b>5</b>	<b>Oscillations des systèmes couplés.</b>	<b>116</b>
5.1	Oscillations libres. . . . .	116
5.1.1	Fonction de Lagrange. . . . .	116

5.1.2	Fonction d'Hamilton. . . . .	119
5.1.3	Équations du mouvement. . . . .	120
5.1.4	Résolution des équations du mouvement. . . . .	121
5.1.5	Bilan énergétique. . . . .	125
5.2	Oscillations forcées sans frottements. . . . .	129
5.2.1	Équations du mouvement. . . . .	129
5.2.2	Bilan énergétique. . . . .	132
5.3	Oscillations amorties. . . . .	133
5.3.1	Bilan énergétique. . . . .	136
5.4	Oscillations amorties et forcées. . . . .	136
5.4.1	Bilan énergétique. . . . .	138

# Avant-propos.

Le présent cours porte sur les fondements les plus généraux de la *Mécanique Analytique* (MA). Il s'agit d'une élégante approche pour l'étude des systèmes mécaniques en mouvement, et surtout pour l'étude des systèmes dits *contraints*. Un bel exemple est fourni par le corps humain qu'on peut regarder comme un ensemble de ressorts (filaments du lactine) et d'amortisseurs (articulations). Les systèmes mécaniques rencontrés en industrie en constituent également des exemples. La MA analytique intervient aussi pour l'étude du mouvement des astres l'un par rapport à l'autre.

La MA qui est une alternative de la Mécanique Newtonienne, et est basé sur le *Principe de d'Alembert* ou encore *Théorème de Travaux Virtuels*. Mais, généralement, cette nouvelle mécanique se base sur le fameux *Principe de Moindre Action*, qui est une généralisation du *Principe de Fermat* rencontré en Optique Géométrique, et formulé en faisant usage du calcul variationnel largement développé par le Grand Mathématicien prusse Euler.

La MA compte trois formalismes équivalents pour la description de la Physique, à savoir le *formalisme Lagrangien*, le *formalisme Hamiltonien* et le *formalisme d'Hamilton-Jacobi*. Le premier formalisme se base sur les *équations d'Euler-Lagrange*, le second, sur les *équations d'Hamilton*, alors que le dernier, sur l'*équation d'Hamilton-Jacobi*. Ces diverses équations expriment simplement les équations du mouvement issues du *Principe Fondamental de la Dynamique*, formulé par Newton.

Signalons que l'étude du mouvement des systèmes vibratoires ou oscillants est facilitée si l'on adopte le formalisme de la MA.

En outre, la MA facilite grandement le passage de la Mécanique Classique à la Mécanique Quantique, en utilisant le *Principe de Correspondance*, et elle est également utile

pour l'élaboration de la Théorie Quantique du Champ.

Ce cours est le *fruit* de mes longues années d'enseignement en Licence de Physique. Il ne prétend pas remplacer les cours existant en la matière, mais son originalité réside dans la façon pédagogique d'appréhender les multiples questions intrigant les étudiants. La bonne assimilation du présent cours avait permis aux étudiants sortants d'avoir les éléments nécessaires pour bien réussir dans leurs études de troisième cycle.

Enfin, j'espère que cet ouvrage sera d'une grande utilité, non seulement pour les étudiants de Licence ou de Master de Physique ou des élèves-ingénieurs, mais aussi pour ceux qui veulent se familiariser avec les fondements de la MA. ■

Meknès, Avril, 2024.

Mabrouk Benhamou.

Professeur de l'Enseignement Supérieur.



# Introduction générale.

**La quintessence de la Physique.** C'est une science ayant comme objectif la *compréhension*, la *modélisation* et l'*explication* des phénomènes naturels se déroulant dans l'Univers.

Cette branche de la science est partiquement derrière toutes les innovations et les révolutions technologiques, depuis l'avènement de l'Homme.

Pour la description des phénomènes naturels, la physique utilise des *concepts* et part des *principes* et des *postulats*.

La physique repose sur l'*observation*, puis l'*analyse*, et ceci par utilisation de dispositifs, comme l'oeil, divers instruments de mesure (thermomètre, baromètre, densimètre, lunettes astronomiques, capteurs...), et du matériel scientifique lourd (bands d'essais mécaniques et électroniques, rayons-X, diffusion de lumière, diffusion de neutrons, spectroscopies IF, UV et Raman, RMN et autres, réacteurs nucléaires, accélérateurs de particules...).

La physique est à l'interface avec plusieurs disciplines de la science : *chimie* (thermochimie, chimie quantique, cinétique chimique...), *mathématiques* (formulation mathématique des lois de la physique, analyse, algèbre...), *informatique* (expériences assistées par ordinateur, traitement des données, commande à distance en aréospace et en aéronautique, simulation...), *biologie* et *écologie* (modèles physiques pour l'étude du mouvement et de l'adhésion des cellules, conformation des cellules, dynamique de populations...), économie (*éconophysique* qui est une branche naissante utilisant des modèles physiques pour étudier l'évolution temporelle et les fluctuations des facteurs économiques et les lois de marché...), et *autres domaines connexes* (science sociale, astrologie...).

La physique se subdivise en *deux grandes branches* : la *physique macroscopique* et la

*physique microscopique* (physique de l'infiniment petit).

La première s'intéresse à l'étude des *propriétés macroscopiques* de la matière, comme l'électromagnétisme, la mécanique des solides, la mécanique des fluides, la thermodynamique, l'optique...

La deuxième vise l'étude des propriétés de la matière à l'échelle microscopique, comme l'électrodynamique du vide, la mécanique quantique, la physique de l'état solide, la physique nucléaire ou physique subatomique, la physique de l'état plasma, la physique statistique, la physique des hautes énergies ou physique des particules...

**La Mécanique Newtonienne.** C'est une sous-branche de la physique macroscopique qui s'intéresse à l'étude du mouvement des particules et des systèmes mécaniques. L'on parle de la *mécanique classique*, si les vitesses mises en jeu sont très faibles devant la vitesse de la lumière dans le vide ( $c = 3 \times 10^8 m/s$ ). Si ces vitesses sont comparables à la vitesse limite  $c$ , l'on parle de la *mécanique relativiste* (avec ses deux volets qui sont la relativité restreinte et la relativité générale).

La mécanique classique repose sur *quatre lois* : (1) équivalence entre la masse gravitationnelle et la masse inertielle, (2) principe fondamental de la dynamique, (3) loi d'action et de réaction, et (4) loi de la gravitation.

Pour l'étude mécanique des systèmes de particules (points matériels), l'on part du principe fondamental de la dynamique. Pour l'étude du mouvement des solides, en plus de ce principe, on fait usage des théorèmes généraux de la mécanique découlant de ce même principe.

On compte *quatre* domaines connexes de la mécanique classique : la mécanique du point matériel, la mécanique des corps non déformables (mécanique des solides), la mécanique des milieux continus (mécanique des solides déformables), et la mécanique des fluides (étude des écoulements des gaz et des liquides).

La mécanique classique est à l'interface avec plusieurs disciplines de la science : *mathématiques* (analyse, algèbre et géométrie), *informatique* (méthodes numériques, simulation), *électricité* et *électronique* (mécatronique s'intéressant aux dispositifs mécaniques commandés par l'électronique, comme les engins, les robots, les moteurs...), *énergies* (éner-

gie éolienne, turbines à gaz, centrales hydro-électriques, dynamos...), et *autres domaines connexes* (astronomie...).

La mécanique relativiste (restreinte), introduite par Einstein (en 1905), est basée sur *trois* postulats fondamentaux, à savoir :

(i) *Les lois de la physique gardent la même forme lorsqu'on passe d'un référentiel galiléen à un autre référentiel galiléen.*

(ii) *La valeur de la vitesse de la lumière dans le vide ne dépend pas du mouvement de la source.*

(iii) *Il existe une valeur limite des vitesses, qui est la vitesse de la lumière dans le vide,  $c = 3 \times 10^8 m/s$ .*

Notons qu'il existe deux approches équivalentes pour l'étude des systèmes mécaniques : La mécanique de Newton et la mécanique analytique qui nous intéresse ici.

**La Mécanique Analytique.** C'est une nouvelle formulation très élégante de la mécanique classique qui est physiquement équivalente à la dynamique newtonienne. Sa force est qu'elle est bien adaptée à la description des systèmes où les mouvements sont sujets à des contraintes représentant un cauchemar avec les formulations standard, et à l'utilisation des techniques de perturbations. En somme, cette mécanique jouit d'un usage infiniment plus pratique que les formulations plus élémentaires.

La mécanique analytique est une approche très fructueuse dans des domaines aussi variés de la physique, comme la mécanique classique, l'optique, la mécanique quantique, la physique statistique, la théorie quantique du champ... Elle est basée sur le *calcul variationnel*, largement développé en mathématiques, surtout par l'éminent mathématicien *Euler*.

En mécanique analytique, le point de départ est la construction d'une action (fonctionnelle des positions) qui est simplement l'intégrale sur le temps d'une fonction, appelée "fonction de Lagrange ou encore Lagrangien". L'esprit de cette méthode est basé sur le *Principe de Moindre Action*, selon lequel la trajectoire réellement suivie par le système mécanique est celle extrémalisant (voire minimisant) l'action (énergie moindre). Notons que ce principe est physiquement équivalent au *Principe de d'Alembert* ou encore *Théo-*

*rème de Travaux Virtuels*. Comme nous verrons plus loin, l'utilisation de ces principes permettra d'obtenir les équations de la dynamique ou encore *équations d'Euler-Lagrange*.

Le formalisme de la mécanique analytique qui a pris naissance vers la fin du XVIIIème siècle, est parfaitement adaptée aux approches modernes de la physique. En effet, ce nouveau formalisme joue un rôle essentiel en physique statistique, et il est à l'origine de la quantification des dynamiques classiques qui est fortement apparentée aux formulations modernes de la mécanique quantique, en termes d'*intégrales de chemins* ou encore *intégrales de Feynman*. Aussi, il est d'une grande utilité pour reformaliser l'électromagnétisme à partir de la relativité d'Einstein.

Avant d'aller plus loin, nous signalons que nous ne pouvons ignorer les contributions majeures au développement de la mécanique analytique des grands scientifiques, comme Lagrange, Hamilton, d'Alembert, Maupertuis, Jacobi et bien d'autres.

Notons, enfin, que les quatre formalismes de Newton, de Hamilton et de Hamilton-Jacobi sont équivalents pour la description de la physique.

**Mécanique Vibratoire.** Les systèmes vibratoires ou oscillatoires sont des systèmes mécaniques ayant tendance à revenir à leur position initiale, une fois abandonnés de cette position. Ils peuvent le faire d'une manière périodique (cas difficile à réaliser physiquement), quasi-périodique ou apériodique.

Ils sont généralement formés d'éléments oscillants, mais sujet d'amortissements ou pouvant même subir l'action d'excitations extérieures.

Nous distinguerons quatre sortes de systèmes mécaniques, à savoir les (i) *systèmes oscillants libres* (absence de frottements et de forces externes), (ii) les *systèmes amortis* (présence de frottements), (iii) les *systèmes forcés* (présence de forces extérieures) et (iv) les *systèmes à la fois amortis et forcés*.

Les amortissements, lorsqu'elles existent, atténuent les oscillations au cours du temps. Mais, les forces extérieures ont comme rôle de rétablir les oscillations ; ce qui va à l'encontre des amortissements.

Pour les systèmes oscillants libres, l'énergie mécanique totale est conservée dans le temps. Ce n'est pas le cas des trois autres. Les systèmes amorties sont le siège de dissipa-

tions d'énergie, par contre, pour les systèmes forcés, les excitations extérieures communiquent une énergie supplémentaire permettant de maintenir (ou provoquer) les oscillatoires.

L'un des buts majeurs de ce cours est une étude systématique du mouvement des systèmes mécaniques avec des oscillations libres, en présence de frottements ou forcées. Nous traiterons aussi bien les systèmes à un seul degré de liberté ou *systèmes linéaires* ou des systèmes à plusieurs degrés de liberté ou *systèmes couplés*. En particulier, pour les systèmes couplés, nous insisterons sur les modes d'oscillations propres.

Enfin, nous mettrons en relief le rôle important surtout du formalisme Lagrangien pour l'étude du mouvement des systèmes vibratoires.

Ce cours est composé de *cinq* chapitres principaux.

Au *premier chapitre*, nous présentons, d'une manière très détaillée, la formulation Lagrangienne de la mécanique analytique, aussi bien pour les référentiels galiléens que pour les référentiels non galiléens. En particulier, nous insistons sur la notion importante de coordonnées généralisées, qui permet de traiter de façon naturelle les contraintes.

Le *deuxième chapitre* est consacré à une revue étendue du formalisme Hamiltonien. En particulier, nous mettons l'accent sera sur les transformations canoniques et les liens avec la mécanique quantique.

Le *troisième chapitre* est dédié aux lois de conservation en mécanique analytique.

Au *quatrième chapitre*, nous décrivons les oscillations des systèmes à un *seul* degré de liberté ou *systèmes linéaires*.

Au *cinquième chapitre*, nous étudions les oscillations des systèmes à *plusieurs* degrés de liberté ou *systèmes couplés*.

Enfin, les *figures* portant des numéros, sont reléguées à la fin de l'ouvrage.

**Notes bibliographiques :** Pour savoir plus sur la Mécanique Analytique et Vibratoire, le lecteur pourra consulter les ouvrages suivants :

1. J.-L. Lagrange, *Mécanique Analytique*, Edition Jacques Gabay, 1989.
2. L. Landau, E. Lifchitz, *Physique Théorique, Tome 1 : Mécanique*, Edition Mir, Moscou,

1969.

3. R. Simon, *Mécanique Analytique*, Volume 2, Editions Derouaux, Liège, 1988.
4. J.W. Leech, *Éléments de Mécanique Analytique*, Monographies Dunod, 1961.
5. H. Goldstein, *Mécanique Classique*, Presses Universitaires de France, 1964.
6. T.W.B. Kibble, *Classical Mechanics*, World Scientific Publishing Company, 2004.
7. C. Potel, *Principes et Applications de Mécanique Analytique*, Edition Cépaduès, 2006.
8. P. Spindel, *Mécanique - Volume 2 - Mécanique Analytique*, Gordon and Breach, 2002.
9. A. Charlier, A. Bérard , M.-F. Charlier, *Mécanique Analytique : Du Cours aux Travaux Dirigés*, Editions Ellipses, Paris, 1989.
10. P. Brousse, *Mécanique Analytique : Puissances Virtuelles, Équations de Lagrange, Applications*, Editions Vuibert, Paris, 1981.
11. S. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver, *Vibration Problem in Engineering*, John Wiley and Sons, Inc., 1990.
12. K.G. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, London, Oxford University Press, 1991.
13. M. Géradin, D. Rixen, *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*, Paris, Wiley, 1994.
14. J. Den Hartog, *Mechanical Vibrations*, McGraw-Hill, New York, 1947.
15. G. Genta, *Vibration Dynamics and Control*, Springer, 2009.
16. P. Hagedorn, *Non-linear Oscillations*, Clarendon Press, Oxford, 1981.
17. M. Hussey, *Fundamentals of Mechanical Vibrations*, Macmillan, 1983.
18. M. Lalanne, P. Berthier, J. Der Hagopian, *Mécanique des Vibrations Linéaires*, Masson, Paris, 1980.
19. R. Mazet, *Mécanique Vibratoire*, Dunod, Paris, 1966.
20. L. Meirovitch, *Analytical Methods in Vibrations*, The Macmillan Company, New York, 1967.
21. L. Meirovitch, *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, 1975.
22. A.H. Nayfeh, D.T. Mook, *Nonlinear Oscillations*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979.
23. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1986.

**24.** Y. Rocard, *Dynamique Générale des Vibrations*, Masson, Paris, 1960.

**25.** M. Roseau, *Vibrations des Systèmes Mécaniques : Méthodes Analytiques et Applications*, Masson, Paris, 1984. ■

# Chapitre 1

## Mécanique de Lagrange.

Dans ce chapitre, nous présentons les principes de base de la Mécanique de Lagrange. En particulier, nous obtenons les équations d'Euler-Lagrange par deux méthodes, c'est-à-dire en utilisant le *Principe de d'Alembert* ou le *Principe de Moindre Action*.

D'entre de jeu, nous rappelons la définition des *coordonnées généralisées*, puis celles des *forces de contraintes* (ou de liaisons) et de *déplacements virtuels*, et enfin, la manière d'obtenir les équations d'Euler-Lagrange.

Nous clôturons ce chapitre par le formalisme de Lagrange dans des référentiels non inertiels (non galiléens).

### 1.1 Coordonnées généralisées.

#### 1.1.1 Contraintes ou liaisons.

**Définition.** Considérons un système constitué de  $N$  particules ponctuelles (points matériels), en mouvement dans l'espace Eulidien  $\mathbf{R}^d$  à  $d$  dimensions. Nous désignons par  $m_i$  la masse de la particule  $i$ , et par  $\mathbf{r}_i(t) \in \mathbf{R}^d$ , sa position instantanée. Il faut donc  $d \times N$  coordonnées pour spécifier totalement la configuration du système.

Supposons, en outre, que ces  $d \times N$  coordonnées ne sont pas indépendantes les unes des autres, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas libres d'évoluer indépendamment, mais qu'elles sont



reliées par un certain nombre de contraintes, en nombre de  $N_c$ . Ces contraintes peuvent s'exprimer comme un ensemble de relations mathématiques explicites,

$$C_a(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) = 0, \quad 1 \leq a \leq N_c, \quad (1.1a)$$

pour des contraintes (ou liaisons) *holonomes* (contraintes géométriques), ou

$$C_a(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) = 0, \quad 1 \leq a \leq N_c, \quad (1.1b)$$

pour des contraintes *non-holonomes* ou encore *semi-holonomes* (contraintes cinématiques). Notons que les contraintes (1.1a) définissent des *hypersurfaces* (variétés différentiables) dans l'espace Euclidien à  $d \times N$  dimensions. Dans les égalités (1.1b), nous avons utilisé la notation simplifiée

$$\dot{\mathbf{r}}_i \equiv \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}, \quad (1.1c)$$

pour désigner la vitesse instantanée de la particule  $i$ .

Notons aussi que dans certains cas, l'on peut avoir des contraintes holonomes de type

$$C_a(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) < 0, \quad 1 \leq a \leq N_c, \quad (1.1d)$$

ou des contraintes non-holonomes de type

$$C_a(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) < 0, \quad 1 \leq a \leq N_c. \quad (1.1e)$$

**Remarque.** Une contrainte holonome peut devenir non-holonome par simple dérivation par rapport au temps.

A titre d'exemple, pour une particule de position  $\mathbf{r}$  évoluant sur sphère de rayon  $R$ , on a la contrainte holonome :  $\mathbf{r}^2 - R^2 = 0$  (équation de la sphère). Par simple dérivation de cette équation par rapport au temps, l'on obtient :  $\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = 0$  (contrainte non-holonome).

**Exemple 1.** Comme premier exemple, nous considérons deux particules, de positions  $\mathbf{r}_1 \in \mathbf{R}^3$  et  $\mathbf{r}_2 \in \mathbf{R}^3$ , qui sont situées à une distance relative constante,  $d$ , l'une de l'autre. Pour ce système, il n'y a qu'une seule contrainte ( $N_c = 1$ ) s'exprimant comme suit :

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| - d = 0. \quad (1.2)$$

C'est une contrainte holonome.

**Exemple 2.** Comme second exemple, nous considérons deux particules, de positions  $\mathbf{r}_1 \in \mathbf{R}^3$  et  $\mathbf{r}_2 \in \mathbf{R}^3$ , qui évoluent à l'intérieur d'une sphère de rayon  $R$  (Figure 1.1). Dans ce cas, nous avons la contrainte holonome suivante :

$$|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| < 2R . \quad (1.3)$$

**Exemple 3.** Un autre exemple est fourni par un pendule simple contraint d'osciller dans le plan  $xOy$ , et suspendu à l'origine par une tige infiniment mince et rigide de longueur  $l$  (Figure 1.2). Nous avons alors deux contraintes holonomes ( $N_c = 2$ ) imposées sur la coordonnée  $r$  de la masselotte attachée au bout de la tige,

$$|\mathbf{r}| - l = 0 , \quad z = 0 . \quad (1.4)$$

La deuxième contrainte exprime que le mouvement se déroule sur le plan  $xOy$ , perpendiculaire à l'axe vertical, c'est-à-dire l'axe des  $z$ .

Soulignons que pour certains systèmes mécaniques, les contraintes peuvent dépendre aussi explicitement du temps. Ce serait le cas, par exemple, si le point de suspension d'un pendule oscillait autour d'une position moyenne, sous l'effet d'une force extérieure imposée au système considéré.

### 1.1.2 Coordonnées généralisées.

Notons que la présence des contraintes sur les positions des  $N$  particules rend l'utilisation directe de leurs coordonnées cartésiennes,  $\{\mathbf{r}_i\}$ , beaucoup moins pratique. C'est pourquoi il est souhaitable de procéder à un changement de variables, en introduisant  $d \times N$  variables qui peuvent être décomposées en deux groupes : un groupe de  $s = d \times N - N_c$  variables, notées,  $\{q_\alpha\}$  ( $\alpha = 1, \dots, s$ ), et un autre groupe de  $N_c$  variables, notées  $\{C_a\}$  ( $a = 1, \dots, N_c$ ). Ces  $d \times N$  nouvelles variables sont naturellement des fonctions connues des coordonnées des particules,  $\{\mathbf{r}_i\}$ , et pouvant dépendre explicitement du temps,

$$q_\alpha = q_\alpha(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) , \quad 1 \leq \alpha \leq s , \quad (1.5a)$$

$$C_a = C_a(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N; t) , \quad 1 \leq a \leq N_c . \quad (1.5b)$$

Par inversion, l'on peut exprimer les positions des particules, en fonction des nouvelles variables,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_\alpha, C_a; t) , \quad 1 \leq i \leq N . \quad (1.5c)$$

Notons que les  $N_c$  contraintes sont exprimées simplement par les relations :  $C_a = 0$  ( $1 \leq a \leq N_c$ ), alors que les  $s$  autres variables  $\{q_\alpha\}$  ne sont pas contraintes et donc libres de varier indépendamment les unes des autres. La quantité  $s = d \times N - N_c$  représente le nombre de degrés de liberté du système mécanique étudié, et les  $s$  variables,  $\{q_\alpha\}$ , sont appelées *coordonnées généralisées*. L'ensemble de toutes les valeurs possibles des coordonnées généralisées,  $(q_1, \dots, q_s)$ , est désigné sous le nom de *espace de configurations*, ayant  $s$  dimensions. Comme les  $N_c$  variables,  $\{C_a\}$ , sont toujours nulles, l'on peut simplement considérer les  $d \times N$  coordonnées comme des fonctions seulement des coordonnées généralisées et du temps. Soulignons que la dépendance explicite dans la variable temps,  $t$ , n'intervient que dans certaines situations. Nous écrivons

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_\alpha; t) , \quad 1 \leq i \leq N . \quad (1.6)$$

La mécanique de Lagrange est une formulation générale, permettant une obtention directe des équations différentielles pour les coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha\}$ , à partir d'une expression des énergies cinétique et potentielle, en fonction des coordonnées généralisées et de leurs dérivées par rapport au temps.

**Exemple 4.** Considérons une masselotte M de masse  $m$ , accrochée à l'extrémité d'une tige rigide, de longueur,  $l$ , et de masse négligeable (Figure 1.2). Supposons que la tige est suspendue de manière à empêcher tout mouvement du *pendule simple* hors du plan  $xOy$ . Ces deux contraintes réduisent le nombre de degrés de liberté à un seul. L'on peut choisir l'angle d'écartement,  $\varphi$ , comme coordonnée généralisée.

Les coordonnées cartésiennes,  $(x, y)$ , de la masselotte s'expriment, en termes de l'angle  $\varphi$ , comme

$$x = l \cos \varphi , \quad y = l \sin \varphi . \quad (1.7a)$$

Les trois variables  $q_\alpha$  et  $C_a$  sont alors

$$q_1 = \varphi = \arctan\left(\frac{x}{y}\right), \quad (1.7b)$$

$$C_1 = \sqrt{x^2 + y^2} - l, \quad (1.8)$$

$$C_2 = z. \quad (1.9)$$

Les *deux* contraintes imposées au système sont alors :  $C_1 = 0$  et  $C_2 = 0$ .

Nous avons donc un seul degré de liberté ( $s = 1$ ) :  $\varphi$ .

**Exemple 5.** Considérons un *pendule double* formé par deux masselottes, de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$  (Figure 1.3). Les deux tiges, de longueurs respectives  $l_1$  et  $l_2$ , sont rigides et supposées de masse négligeable. Aussi, elles sont contraintes de pivoter seulement dans le plan  $xOy$ . L'on désigne par  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , les angles d'écartement que font, respectivement, la première et la deuxième tiges, par rapport à la verticale.

Soient,  $(x_1, y_1, z_1)$  et  $(x_2, y_2, z_2)$ , les coordonnées cartésiennes des deux masselottes qui s'expriment, en termes d'angles  $(\varphi_1, \varphi_2)$ , comme

$$x_1 = l_1 \cos \varphi_1, \quad x_2 = l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2, \quad (1.10a)$$

$$y_1 = l_1 \sin \varphi_1, \quad y_2 = l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2. \quad (1.10b)$$

Les *six* variables  $q_\alpha$  et  $C_a$  sont alors

$$q_1 = \varphi_1 = \arctan\left(\frac{x_1}{y_1}\right), \quad (1.11a)$$

$$q_2 = \varphi_2 = \arctan\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right), \quad (1.11b)$$

$$C_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} - l_1, \quad (1.12)$$

$$C_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_2, \quad (1.13)$$

$$C_3 = z_1, \quad (1.14)$$

$$C_4 = z_2. \quad (1.15)$$

Les *quatre* contraintes sont :  $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ .

Nous avons deux degrés de liberté ( $s = 2$ ) :  $(\varphi_1, \varphi_2)$ .

## 1.2 Forces de contraintes et déplacements virtuels.

### 1.2.1 Forces de contraintes.

Les contraintes,  $C_a(\mathbf{r}_i; t) = 0$  ( $a = 1, \dots, N_c$ ), s'exerçant sur les  $N$  particules du système, sont imposées (ou maintenues) par des *forces de rappel* extrêmement fortes qui tendent toujours à ramener les particules sur les surfaces :  $C_a(\mathbf{r}_i, t) = 0$  ( $a = 1, \dots, N_c$ ). Supposons que ces forces de rappel proviennent d'un potentiel extrêmement serré, noté  $V^{(c)}(\mathbf{r}_i)$ . De tel potentiel a la propriété essentielle de dépendre seulement des variables,  $\{C_a\}$ , et non pas des coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha\}$ , et que son minimum serait situé au point de coordonnées  $(C_1, \dots, C_{N_c}) = (0, \dots, 0)$ . La force de contrainte agissant sur la particule  $i$  est alors

$$\mathbf{F}_i^{(c)} = -\frac{\partial V^{(c)}}{\partial \mathbf{r}_i} = -\sum_{a=1}^{N_c} \frac{\partial V^{(c)}}{\partial C_a} \frac{\partial C_a}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.16)$$

Posons

$$\lambda_a = -\left. \frac{\partial V^{(c)}}{\partial C_a} \right|_{C_a=0}, \quad 1 \leq a \leq N_c \quad (1.16a)$$

qui sont des constantes à priori inconnues. Comme le système est contraint, les forces de contraintes s'expriment par

$$\mathbf{F}_i^{(c)} = \sum_{a=1}^{N_c} \lambda_a \frac{\partial C_a}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.16b)$$

Ces relations suggèrent que les forces de contraintes sont des combinaisons linéaires des gradients des contraintes holonomes imposées au système.

**Exemple 5.** Pour une particule de position  $\mathbf{r}$  qui évolue sur une sphère de rayon  $R$ , la contrainte holonome associée étant :  $C(\mathbf{r}) : \|\mathbf{r}\| - R = 0$ . Nous obtenons aisément que

$$\mathbf{F}^{(c)} = \lambda \frac{\partial C}{\partial \mathbf{r}} = \lambda \left( \frac{x}{r} \mathbf{e}_x + \frac{y}{r} \mathbf{e}_y + \frac{z}{r} \mathbf{e}_z \right) = \lambda \mathbf{e}_r, \quad (1.16c)$$

avec la notation :  $\mathbf{e}_r = \mathbf{r} / \|\mathbf{r}\|$ . Cette force de rappel empêche la particule de quitter la sphère.

**Exemple 6.** Pour un pendule simple (Figure 1.2), nous avons *deux* contraintes holonomes qui sont :  $C_1 = \sqrt{x^2 + y^2} - l$  et  $C_2 = z$ . Nous démontrons aisément que la force de contraintes exercée sur la masselotte s'exprime dans la base cylindrique,  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z\}$ , comme

$$\mathbf{F}^{(c)} = \lambda_1 \frac{\partial C_1}{\partial \mathbf{r}} + \lambda_2 \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{r}} = \lambda_1 \mathbf{e}_r + \lambda_2 \mathbf{e}_z . \quad (1.16d)$$

Cette force qui est perpendiculaire au plan du mouvement du pendule,  $xOy$ , empêche alors la masselotte de quitter son plan du mouvement.

### 1.2.2 Déplacements virtuels.

**Définition.** Un *déplacement virtuel* est définie comme étant une variation de la position qui est compatible avec les contraintes, mais ne provient pas des forces extérieures appliquées au système (*forces vraies*). Le déplacement infinitésimale de la particule  $i$ , pendant l'intervalle de temps  $dt$ , prenant en compte les contraintes (1.1), peut s'écrire comme

$$d\mathbf{r}_i = \delta\mathbf{r}_i + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt , \quad 1 \leq i \leq N , \quad (1.17)$$

où le déplacement virtuel de la particule  $i$ ,  $\delta\mathbf{r}_i$ , est défini par

$$\delta\mathbf{r}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha , \quad 1 \leq i \leq N . \quad (1.17a)$$

Il s'agit, en fait, d'un déplacement à intervalle de temps nul ( $dt = 0$ ) entre deux chemins infiniment voisins,  $\mathbf{r}_i(t)$  et  $\mathbf{r}_i(t) + \delta\mathbf{r}_i(t)$ . Le second terme dans l'égalité (1.17) exprime un *déplacement réel*. Nous avons tenu compte du fait que les positions des particules,  $\{\mathbf{r}_i\}$ , sont fonction des coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha\}$ , et du temps,  $t$ .

La compatibilité des déplacements virtuels,  $\{\delta\mathbf{r}_i\}$ , avec les contraintes signifie que

$$C_a(\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N + \delta\mathbf{r}_N; t) = 0 , \quad 1 \leq a \leq N_c . \quad (1.17b)$$

**Vitesses virtuelles.** Nous pouvons réécrire le déplacement virtuel de la particule  $i$ ,  $\delta\mathbf{r}_i$ , comme

$$\delta\mathbf{r}_i = \mathbf{v}_i^* dt , \quad 1 \leq i \leq N , \quad (1.18)$$

où  $\mathbf{v}_i^*$  est sa *vitesse virtuelle*, définie par

$$\mathbf{v}_i^* = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.19)$$

C'est la vitesse nécessaire pour effectuer un déplacement virtuel. Nous avons la notation simplifiée,

$$\dot{q}_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt}, \quad 1 \leq \alpha \leq s. \quad (1.19a)$$

Pour un système conservatif, les vitesses des particules,  $\{\mathbf{v}_i\}$ , ne dépendent pas explicitement du temps, et elles s'identifient alors avec leurs vitesses virtuelles,  $\{\mathbf{v}_i^*\}$ . Dans ces conditions, nous avons

$$\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.20)$$

Il ressort de ces équations les propriétés suivantes

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha}, \quad 1 \leq i \leq N; \quad 1 \leq \alpha \leq s. \quad (1.20a)$$

**Puissances virtuelles.** Les *puissances virtuelles* des particules, notées  $\{\mathbf{P}_i^*\}$ , sont simplement les projections des forces de contraintes qu'elles subissent sur leurs vitesses virtuelles,  $\{\mathbf{v}_i^*\}$ ,

$$\mathbf{P}_i^* = \mathbf{F}_i^{(c)} \cdot \mathbf{v}_i^*, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.21)$$

La *puissance virtuelle totale*,  $\mathbf{P}^*$ , est la somme de puissances virtuelles partielles,

$$\mathbf{P}^* = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i^*, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.22)$$

**Exemple 7.** Pour un *pendule simple* (Figure 1.2), la force de contraintes sur la masselotte est donnée par la relation (1.16d) et sa vitesse virtuelle est alors

$$\mathbf{v}^* = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \dot{\varphi} = l \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi. \quad (1.23)$$

Donc, la puissance virtuelle de la masselotte est telle que

$$\mathbf{P}^* = (\lambda_1 \mathbf{e}_r + \lambda_2 \mathbf{e}_z) \cdot l \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi = 0 . \quad (1.23a)$$

Cette puissance est alors *nulle*. Comme nous verrons ci-dessous, cette tendance est une règle générale.

**Travaux virtuels élémentaires.** Le *travail virtuel élémentaire* d'une particule  $i$ , noté  $\delta W_i^*$ , est défini par

$$\delta W_i^* = \mathbf{F}_i^{(c)} \cdot \delta \mathbf{r}_i , \quad 1 \leq i \leq N . \quad (1.24)$$

Le *travail virtuel élémentaire total*,  $\delta W^*$ , est la somme suivante

$$\delta W^* = \sum_{i=1}^N \delta W_i^* = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(c)} \cdot \delta \mathbf{r}_i , \quad (1.25)$$

ou encore

$$\delta W^* = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(c)} \cdot \mathbf{v}_i^* dt = \sum_{i=1}^N \mathbf{P}_i^* \cdot dt = \mathbf{P}^* dt . \quad (1.25a)$$

### 1.2.3 Principe de d'Alembert.

**Enoncé.** *L'ensemble des forces de contraintes appliquées à un système mécanique ne travaille pas (ne consomme ni ne produit de l'énergie) lors d'un déplacement virtuel.*

Mathématiquement parlant, ce principe s'exprime par

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(c)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 . \quad (1.26)$$

C'est le *théorème des travaux virtuels*. L'égalité précédente indique donc que le travail des forces de contraintes (ou *travail virtuel*) est *nul*.

Pour montrer le résultat précédent, nous écrivons

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(c)} \cdot \delta \mathbf{r}_i = - \sum_{\alpha=1}^s \sum_{i=1}^N \frac{\partial V^{(c)}}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = - \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial V^{(c)}}{\partial q_\alpha} dq_\alpha = 0 , \quad (1.27)$$



puisque le potentiel fictif,  $V^{(c)}$ , ne dépend pas des coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha\}$ . La relation précédente est équivalente à écrire

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(c)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq s. \quad (1.28)$$

Notons que cette propriété générale est vérifiée pour un pendule simple.

## 1.3 Équations de Lagrange.

### 1.3.1 Cas des systèmes conservatifs.

La force totale s'exerçant sur la particule  $i$  est la somme d'une force extérieure appliquée,  $\mathbf{F}_i^{(a)}$ , supposée dérivant d'une certaine énergie potentielle,  $V$ , et d'une force de contrainte,  $\mathbf{F}_i^{(c)}$ .

L'équation du mouvement de la particule  $i$  est alors

$$m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{F}_i^{(a)} + \mathbf{F}_i^{(c)}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (1.29)$$

où

$$\mathbf{a}_i = \ddot{\mathbf{r}}_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (1.29a)$$

est son accélération.

Multiplions les équations du mouvement précédentes par  $\delta \mathbf{r}_i$  et sommions sur l'indice  $i$ , pour obtenir

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \delta \mathbf{r}_i. \quad (1.30)$$

Nous avons utilisé le théorème des travaux virtuels pour éliminer la contribution des forces de contraintes, relation (1.26). Le membre de gauche dans l'égalité précédente désigne le *travail des forces d'accélération*, alors que le second, est le *travail des forces extérieures appliquées*.

A présent, multiplions les équations du mouvement (1.29) par le vecteur  $\partial \mathbf{r}_i / \partial q_\alpha$ , et faisons une sommation sur l'indice  $i$ , pour trouver

$$\sum_{i=1}^N \left( m_i \mathbf{a}_i - \mathbf{F}_i^{(a)} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq s. \quad (1.31)$$

Notons que le premier terme de cette équation peut être réécrit comme suit

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \right]. \quad (1.32)$$

Cette égalité sera utilisée par la suite.

Quand aux vitesses,  $\{\mathbf{v}_i\}$ , elles peuvent s'exprimer en fonction uniquement des coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha\}$ , et de leurs dérivées par rapport au temps,  $\{\dot{q}_\alpha\}$ . Notons que pour les systèmes conservatifs, ces vitesses s'expriment par la relation (1.20).

Donc, l'expression (1.32) peut être réécrite comme

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{a}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \right), \quad (1.33)$$

pour toute coordonnée généralisée,  $q_\alpha$ .

En tenant compte de l'égalité (1.20a) et du fait que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha}, \quad (1.33a)$$

nous trouvons que

$$\sum_{i=1}^N \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \sum_{i=1}^N \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \quad (1.33b)$$

et

$$\sum_{i=1}^N \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \right) = \sum_{i=1}^N \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_\alpha} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}. \quad (1.33c)$$

Ici,  $T$  désigne l'énergie cinétique totale,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i^2. \quad (1.34)$$

Avant de conclure, notons d'abord que l'énergie cinétique,  $T$ , peut être exprimée en fonction des coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha\}$ , de leurs dérivées,  $\{\dot{q}_\alpha\}$ , et du temps,  $t$  :  $T(q, \dot{q})$ . Plus exactement, nous montrons aisément que

$$T(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^s m_{\alpha\beta}(q) \dot{q}_\alpha \dot{q}_\beta , \quad (1.34a)$$

avec les notations

$$q \equiv (q_1, \dots, q_s) , \quad \dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) , \quad (1.34b)$$

$$m_{\alpha\beta}(q) = \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} \right) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\beta} \right) . \quad (1.34c)$$

Les coefficients,  $\{m_{\alpha\beta}(q)\}$ , définissent une matrice carrée d'ordre  $s$ , notée  $M$ , appelée "matrice de masse". D'ailleurs, elle est *définie positive*, puisque l'énergie cinétique est une quantité toujours positive.

Il est possible de réécrire l'énergie cinétique totale, sous forme compacte, en introduisant le vecteur colonne,  $Q$ , et sa dérivée par rapport au temps,  $\dot{Q}$ , qui sont les suivants

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_s \end{pmatrix} , \quad \dot{Q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_s \end{pmatrix} . \quad (1.34d)$$

Donc, l'énergie cinétique a la forme compacte suivante

$$T(\dot{Q}) = \frac{1}{2} \dot{Q}^T \cdot M \dot{Q} . \quad (1.34e)$$

A l'aide de ces considérations, les équations du mouvement de Newton peuvent être réécrites comme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = 0 , \quad 1 \leq \alpha \leq s . \quad (1.35)$$

Supposons, en outre, que les forces extérieures appliquées,  $\{\mathbf{F}_i^{(a)}\}$ , dérivent d'une énergie potentielle, c'est-à-dire

$$\mathbf{F}_i^{(a)} = - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} , \quad 1 \leq i \leq N . \quad (1.36)$$

Les équations du mouvement deviennent alors

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = 0, \quad (1.37)$$

ou encore

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (1.37a)$$

Nous avons utilisé le fait que l'énergie potentielle,  $V$ , ne dépend pas des vitesses,  $\{\dot{q}_\alpha\}$ , et l'énergie cinétique,  $T$ , ne dépend pas des coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha\}$ .

Définissons alors la *fonction de Lagrange* ou encore *Lagrangien* par

$$L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q). \quad (1.38)$$

Les équations du mouvement de Newton sont alors équivalentes à l'ensemble d'équations suivantes, appelées *équations de Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq s. \quad (1.39)$$

Il s'agit de  $s$  équations différentielles aux dérivées partielles du second ordre qui sont couplées et souvent non linéaires. Leur résolution donne la trajectoire du système dans l'espace de configurations :  $\{(q_1(t), \dots, q_s(t))\}$ .

**Remarques.** Sans doute, l'avantage principal du formalisme Lagrangien réside dans le fait que les équations de Lagrange sont valables dans n'importe quel système de coordonnées. Par exemple, pour une particule de position,  $(x, y, z)$ , ces équations restent vraies lorsqu'on passe aux coordonnées sphériques,  $(r, \theta, \varphi)$ . Mais, d'une manière générale, comme nous l'avons noté ci-dessus, ces équations s'appliquent à n'importe quel système, pour lequel on peut définir une fonction de Lagrange.

Mais, l'inconvénient majeur du formalisme Lagrangien est que le Lagrangien n'est pas défini d'une manière unique. En fait, celui-ci est défini à une *dérivée totale* près d'une fonction arbitraire suffisamment différentiable,  $f(q)$ . En fait, le changement

$$L(q, \dot{q}) \rightarrow L(q, \dot{q}) + \frac{df(q)}{dt} \equiv L'(q, \dot{q}) \quad (1.40a)$$

n'affecte pas les équations de Lagrange.

Pour montrer la propriété précédente, nous partons de l'identité

$$\frac{df(q)}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \dot{q}_{\alpha} . \quad (1.40b)$$

Donc, l'on a

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left[ \frac{df(q)}{dt} \right] = \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} . \quad (1.40c)$$

Un calcul simple montre que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left[ \frac{df(q)}{dt} \right] \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial q_{\alpha}} \right) = \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left[ \frac{df(q)}{dt} \right] . \quad (1.40d)$$

Nous écrivons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_{\alpha}} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \left[ \frac{df(q)}{dt} \right] \right) - \frac{\partial}{\partial q_{\alpha}} \left[ \frac{df(q)}{dt} \right] \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_{\alpha}} = 0 . \end{aligned} \quad (1.40e)$$

La propriété désirée est alors démontrée.

### 1.3.2 Cas des systèmes non conservatifs.

Dans certains cas, la force extérieure appliquée, n'est pas totalement conservative et contient une partie,  $\mathbf{F}_i^{(nc)}$ , qui ne dérive pas d'une énergie potentielle. De telle force est appelée "force non conservative". Dans ce cas, la force appliquée totale sur une particule  $i$  s'écrit

$$\mathbf{F}_i^{(a)} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} + \mathbf{F}_i^{(nc)} , \quad 1 \leq i \leq N . \quad (1.41)$$

Dans ces conditions, les équations du mouvement prennent la forme suivante

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_{\alpha}} + \frac{\partial V}{\partial q_{\alpha}} - \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(nc)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} = 0 , \quad 1 \leq \alpha \leq s . \quad (1.42)$$

Nous définissons alors la *force généralisée* comme suit

$$Q_{\alpha} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(nc)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_{\alpha}} , \quad 1 \leq \alpha \leq s , \quad (1.43)$$

de sorte qu'on écrive une version plus générale des équations de Lagrange comme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha , \quad 1 \leq \alpha \leq s , \quad (1.44)$$

où  $L(q, \dot{q}) = T(q, \dot{q}) - V(q)$  est le Lagrangien.

Comme pour le cas des systèmes conservatifs, les équations de Lagrange sont des équations différentielles du second ordre, généralement couplées et non linéaires.

**Exemple 8.** Soit un ressort à une dimension accroché à une masse  $m$  qui est soumise à une force de frottement (non conservative),  $\mathbf{F}^{(nc)} = -\zeta \dot{x} \mathbf{e}_x$ , où  $x$  est la position instantanée de cette même masse et  $\zeta > 0$  est le coefficient de friction. Dans ce cas, le Lagrangien associé est

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 . \quad (1.44a)$$

Ici,  $k > 0$  est la constante de raideur. La force généralisée est alors

$$Q = \mathbf{F}^{(nc)} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = -\zeta \dot{x} . \quad (1.44b)$$

L'application des équations de Lagrange générales (1.44) à ce cas particulier donne l'équation de la dynamique de Newton d'un oscillateur harmonique avec friction,

$$m \ddot{x} = -kx - \zeta \dot{x} . \quad (1.44c)$$

Cet exemple fournit un test du formalisme de Lagrange avec des forces non conservatives.

### 1.3.3 Applications élémentaires.

Dans cette section, nous nous efforçons de donner quelques exemples d'applications de la méthode de Lagrange pour obtenir les équations du mouvement. Il est bien sûr beaucoup plus simple d'obtenir ces équations différentielles que de les résoudre!

**Application 1.** *Pendule simple.*

Considérons un pendule simple (Figure 1.2) et désignons par,  $(x, y, z)$ , les coordonnées cartésiennes de la masselotte qui sont fonction de la coordonnée généralisée,  $\varphi$ ,

$$x = l \sin \varphi , \quad y = l \cos \varphi , \quad z = 0 . \quad (1.45)$$

Notons que la variable  $y$  est défini positif (dirigé vers le bas). Donc, les composantes de la vitesse dépendent des variables  $\varphi$  et  $\dot{\varphi}$ , de la manière suivante

$$\dot{x} = \dot{\varphi} l \cos \varphi , \quad \dot{y} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi , \quad \dot{z} = 0 , \quad (1.45a)$$

L'énergie cinétique revêt la forme

$$T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 . \quad (1.46)$$

D'un autre côté, l'énergie potentielle de gravité (à une constante additive près) est telle que

$$U(\varphi) = -mgy = mgl(1 - \cos \varphi) . \quad (1.47)$$

Le Lagrangien d'un pendule simple est donc

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = T - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl(1 - \cos \varphi) . \quad (1.48)$$

Notons les résultats

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl \sin \varphi , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m l^2 \dot{\varphi} . \quad (1.48a)$$

L'équation de Lagrange prend alors la forme suivante

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = m l^2 \ddot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0 , \quad (1.49)$$

ou encore

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0 , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} . \quad (1.49a)$$

C'est l'équation bien connue gouvernant les oscillations d'un pendule simple. Sa solution s'exprime en terme de l'intégrale elliptique. Mais pour de très faibles oscillations ( $\varphi \ll 1$ ), la solution de l'équation de mouvement précédente est

$$\varphi(t) = a \cos(\omega t + \varphi_0) , \quad (1.49b)$$

où l'amplitude  $a$  et la phase  $\varphi_0$  sont fixées par les valeurs initiales  $\varphi(0)$  et  $\dot{\varphi}(0)$ .

**Application 2.** *Machine d'Atwood.*

Considérons deux masses  $m_1$  et  $m_2$  reliées par une corde inextensible de masse négligeable, qui passe autour d'une poulie (Figure 1.4). L'on suppose que cette corde glisse sans frottement sur la poulie.

Nous désignons par  $y$  et  $y'$ , les coordonnées verticales des deux masses, comptées positivement vers le bas, mais celles-ci ne sont pas indépendantes l'une de l'autre et reliées par la *contrainte holonome*

$$y + y' = l , \quad (1.50)$$

où  $l$  est la longueur totale du fil. Les vitesses des deux masses sont donc contraintes par la relation

$$\dot{y} + \dot{y}' = 0 . \quad (1.50a)$$

L'énergie potentielle totale peut s'exprimer uniquement en fonction de  $y$  et revêt la forme suivante

$$U(y) = -m_1gy - m_2gy' = -(m_1 - m_2)gy - m_2gl , \quad (1.51)$$

et l'énergie cinétique totale est donnée par

$$T(\dot{y}) = \frac{1}{2}m_1\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}'^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 . \quad (1.52)$$

Le Lagrangien associé est alors

$$L(y, \dot{y}) = T(\dot{y}) - U(y) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}^2 + (m_1 - m_2)gy + m_2gl , \quad (1.53)$$

d'où nous tirons les résultats

$$\frac{\partial L}{\partial y} = (m_1 - m_2)g , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = (m_1 + m_2)\dot{y} . \quad (1.53a)$$

L'équation de Lagrange est alors

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = (m_1 + m_2)\ddot{y} - (m_1 - m_2)g = 0 . \quad (1.53b)$$



Donc, l'accélération (constante) de la masse  $m_1$  (vers le bas) est

$$\ddot{y} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g . \quad (1.53c)$$

**Application 3.** *Pendule forcé.*

Revenons au pendule simple et supposons, maintenant, que le point d'attache  $P$  (sur l'axe vertical) est en mouvement et que sa hauteur  $y_P$  soit une fonction  $y_P(t)$  connue à l'avance. Le but est d'obtenir l'équation de Lagrange du système. Les coordonnées cartésiennes de la masselotte sont

$$x = l \sin \varphi , \quad y = l \cos \varphi + y_P(t) , \quad (1.54)$$

et les vitesses sont

$$\dot{x} = \dot{\varphi} l \cos \varphi , \quad \dot{y} = -l\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{y}_P . \quad (1.54a)$$

L'énergie cinétique de la masselotte prend alors la forme suivante

$$\begin{aligned} T(\varphi, \dot{\varphi}; t) &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + \frac{1}{2} m \dot{y}_P^2 - m l \dot{\varphi} \dot{y}_P \sin \varphi \\ &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_P^2 - m l \dot{\varphi} \dot{y}_P \sin \varphi . \end{aligned} \quad (1.55)$$

L'énergie potentielle de pesanteur a pour expression

$$U(\varphi; t) = -mgy = -mgl \cos \varphi - mgy_P . \quad (1.56)$$

Le Lagrangien associé est donc

$$\begin{aligned} L(\varphi, \dot{\varphi}; t) &= T(\varphi, \dot{\varphi}; t) - U(\varphi; t) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_P^2 \\ &\quad - m l \dot{y}_P \dot{\varphi} \sin \varphi + mgl \cos \varphi + mgy_P . \end{aligned} \quad (1.57)$$

Les termes de l'équation de Lagrange sont tels que

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m l \dot{y}_P \dot{\varphi} \cos \varphi - mgl \sin \varphi , \quad (1.57a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} - mly_P \sin \varphi , \quad (1.57b)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2 \ddot{\varphi} - ml\ddot{y}_P \sin \varphi - mly_P \dot{\varphi} \cos \varphi . \quad (1.57c)$$

Finalement, l'équation de Lagrange du pendule est

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi - \frac{1}{l} \ddot{y}_P \sin \varphi = 0 , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}} . \quad (1.58)$$

A présent, essayons de commenter cette équation du mouvement.

Soulignons que la seule différence avec l'équation du mouvement (1.49a) d'un pendule simple est le dernier terme. Celui-ci peut facilement s'interpréter en notant d'abord que  $\ddot{y}_P$  est l'accélération vers le bas du point d'attache et que  $\ddot{y}_P \sin \varphi$  représente la projection de cette accélération dans la direction du mouvement du pendule. Notons que ce terme supplémentaire peut être obtenu de l'équation du pendule à pivot fixe, en procédant à la substitution  $g \rightarrow g - \ddot{y}_P$ , c'est-à-dire en remplaçant le champ gravitationnel constant par un champ variable dans le temps, ce qui est entièrement compréhensible.

**Application 4.** *Pendule double.*

Le Lagrangien du pendule double (Figure 1.3) dépend des deux angles d'écartement,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , et de leurs dérivées. Les coordonnées cartésiennes des deux masselottes attachées sont alors les suivantes

$$x_1 = l_1 \sin \varphi_1 , \quad y_1 = l_1 \cos \varphi_1 , \quad (1.59a)$$

$$x_2 = l_2 \sin \varphi_2 + x_1 , \quad y_2 = l_2 \cos \varphi_2 + y_1 , \quad (1.59b)$$

et leurs vitesses sont telles que

$$\dot{x}_1 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 , \quad \dot{y}_1 = -l_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 , \quad (1.60a)$$

$$\dot{x}_2 = l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \dot{x}_1 , \quad \dot{y}_2 = -l_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{y}_1 . \quad (1.60b)$$

De sorte que l'énergie cinétique prenne la forme

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m_1 \mathbf{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \mathbf{v}_2^2 \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos (\varphi_1 - \varphi_2) , \end{aligned} \quad (1.61)$$

et l'énergie potentielle, la forme

$$U = -g(m_1 y_1 + m_2 y_2) = -(m_1 + m_2)gl_1 \cos \varphi_1 - m_2 gl_2 \cos \varphi_2 . \quad (1.62)$$

Donc, le Lagrangien du pendule double est tel que

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & + (m_1 + m_2)gl_1 \cos \varphi_1 + m_2gl_2 \cos \varphi_2 . \end{aligned} \quad (1.63)$$

Les termes des équations de Lagrange sont

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -(m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) , \quad (1.63a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -m_2gl_2 \sin \varphi_2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) , \quad (1.63b)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) , \quad (1.63c)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2l_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) , \quad (1.63d)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) = & (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) , \end{aligned} \quad (1.63e)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) = & m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ & + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 - \varphi_2) . \end{aligned} \quad (1.63f)$$

Les équations de Lagrange pour les deux coordonnées généralisées sont donc

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \\ m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2)gl_1 \sin \varphi_1 = 0 , \end{aligned} \quad (1.64a)$$

$$\begin{aligned} m_2l_2^2\ddot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ - m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + m_2gl_2 \sin \varphi_2 = 0 . \end{aligned} \quad (1.64b)$$

Celles-ci constituent alors un système de deux équations différentielles de deuxième ordre, couplées et non linéaires, n'ayant pas de solutions analytiques. Une simplification importante intervient si l'on suppose que les angles d'écartement  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont petits, de sorte que  $\sin \varphi_{1,2}$  soit approximé par  $\varphi_{1,2}$ , et  $\cos \varphi_{1,2}$  par 1. Dans cette approximation, nous obtenons alors l'équivalent de deux oscillateurs harmoniques couplés d'équations du mouvement

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \varphi_1 = 0 , \quad (1.64c)$$

$$m_2 l_2^2 \ddot{\varphi}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\varphi}_1 + m_2 g l_2 \varphi_2 = 0 . \quad (1.64d)$$

**Application 5.** *Lagrangien d'une particule en coordonnées sphériques.*

Commençons par écrire le Lagrangien d'une particule en coordonnées sphériques. Ses coordonnées cartésiennes sont reliées à ses coordonnées sphériques par les relations suivantes

$$x = r \sin \theta \cos \varphi , \quad y = r \sin \theta \sin \varphi , \quad z = r \cos \theta . \quad (1.65)$$

Donc, les composantes de sa vitesse sont

$$\dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \theta \sin \varphi , \quad (1.65a)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin \varphi + r \dot{\theta} \cos \theta \sin \varphi + r \dot{\varphi} \sin \theta \cos \varphi , \quad (1.65b)$$

$$\dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta . \quad (1.65c)$$

Le Lagrangien prend alors la forme suivante (après quelques simplifications élémentaires)

$$L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - U(r, \theta, \varphi) . \quad (1.66)$$

Ici,  $U(r, \theta, \varphi)$  est le potentiel extérieur auquel est soumise la particule.

**Application 6.** *Lagrangien d'une particule en coordonnées cylindriques.*

Les coordonnées cartésiennes de la particule sont reliées à ses coordonnées cylindriques par les relations suivantes

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi , \quad z = z . \quad (1.67)$$

Donc, les composantes de sa vitesse sont

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \varphi - r \dot{\varphi} \sin \varphi , \quad (1.67a)$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \varphi + r \dot{\varphi} \cos \varphi , \quad (1.67b)$$

$$\dot{z} = \dot{z} . \quad (1.67c)$$

Son Lagrangien prend donc la forme suivante

$$L(r, \varphi, z, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 - U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(r, \theta, \varphi) . \quad (1.68)$$

## 1.4 Principe de Moindre Action.

### 1.4.1 Lien à la dynamique de Newton.

Considérons un système de  $N$  particules, de masses,  $\{m_i\}$ , de positions,  $\{\mathbf{r}_i \in \mathbf{R}^d\}$ , et de vitesses,  $\{\mathbf{v}_i \in \mathbf{R}^d\}$ . Nous désignons par

$$T(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad (1.69)$$

son énergie cinétique totale, et par,  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ , son énergie potentielle qui rend compte des interactions à 1 corps, 2 corps et *plus*.

Les équations du mouvement de Newton associées, sont les suivantes

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} , \quad 1 \leq i \leq N . \quad (1.70)$$

Ici, il est supposé que les forces subies par les particules,  $\{\mathbf{F}_i\}$ , dérivent de l'énergie potentielle,  $U$ .

Introduisons la fonction suivante dépendant des positions et des vitesses des particules

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = T(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (1.71)$$

appelée “fonction de Lagrange” ou simplement “Lagrangien”. Il est facile de vérifier les égalités

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.72)$$

Les équations (1.70) sont les équivalentes des équations dites de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (1.73)$$

Notons que ces équations ne sont valables que pour les forces conservatives, c’est-à-dire dérivant d’une énergie potentielle.

En coordonnées généralisées, il est facile de montrer que le Lagrangien est défini par la relation (1.38), avec

$$V(q_1, \dots, q_s) = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \Big|_{\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_\alpha)}. \quad (1.74)$$

Les équations de Lagrange sont celles données par les équations (1.39).

Donc, les formalismes de Newton et de Lagrange sont équivalents pour la description de la physique.

## 1.4.2 Équations d’Euler-Lagrange.

### Définition de fonctionnelle.

Considérons un espace de fonctions,  $\mathbf{S}$ , dont les éléments sont des fonctions,  $\{\varphi(x)\}$ , à valeurs réelles ou complexes. Nous supposons que ces fonctions sont de classe  $C^\infty$ , c’est-à-dire infiniment différentiables, et que lorsque  $x \rightarrow \infty$ , elles tendent vers zéro, ainsi que leurs dérivées de tous les ordres, plus vite que toute puissance négative de  $|x|$ . (Les fonctions  $e^{-x^2}$  et  $x^n e^{-x^2}$  en sont des exemples). Les fonctions,  $\{\varphi(x)\}$ , seront appelées “fonctions test”.

Par définition, une fonctionnelle,  $F$ , est une application de  $\mathbf{S}^n$  dans  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Cela veut dire qu’à chaque suite de  $n$  fonctions,  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbf{S}^n$ , est associé un nombre réel ou complexe :  $F : (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbf{S}^n \longrightarrow F[\varphi] \in \mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

**Exemple 9.** Soit  $\varphi$  une fonction (à valeurs réelles), définie sur un intervalle  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ . Un exemple classique d'une fonctionnelle est l'application "aire hachurée",

$$F : \varphi \longrightarrow F[\varphi] = \int_a^b \varphi(x) dx . \quad (1.75)$$

Cette intégrale n'a de sens que si la fonction  $\varphi$  est intégrable.

**Exemple 10.** Soient  $\{\varphi_i\}$  une suite de  $n$  fonctions (à valeurs réelles ou complexes), définies sur un intervalle  $[a, b] \subset \mathbf{R}$ , supposées suffisamment différentiables. Nous construisons une fonctionnelle générale qui est la suivante

$$F[\varphi_1, \dots, \varphi_n] = \int_a^b \mathcal{L}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) dx , \quad (1.76)$$

où  $\mathcal{L}$  est une fonction des variables,  $\{\varphi_i(x)\}$ , supposée intégrable dans l'intervalle  $[a, b]$ . Cette fonction peut dépendre explicitement de la variable  $x$ .

### Dérivée de fonctionnelle.

Pour introduire cette dérivée spéciale, nous considérons la fonctionnelle générale (1.76). Faisons un déplacement élémentaire des fonctions  $\varphi_i(x)$ ,

$$\varphi_i(x) \rightarrow \varphi_i(x) + \delta\varphi_i(x) , \quad 1 \leq i \leq n . \quad (1.77)$$

Sous les transformations (1.77), la fonctionnelle  $F$  se transforme comme

$$F \rightarrow F + \delta F , \quad (1.78)$$

avec la variation

$$\begin{aligned} \delta F[\varphi_1, \dots, \varphi_n] &= F[\varphi_1 + \delta\varphi_1, \dots, \varphi_n + \delta\varphi_n] - F[\varphi_1, \dots, \varphi_n] \\ &= \int_a^b [\mathcal{L}(\varphi_1(x) + \delta\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) + \delta\varphi_n(x)) - \mathcal{L}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))] dx \end{aligned} \quad (1.79)$$

Faisons un développement limité, pour des déplacements,  $\{\delta\varphi_i(x)\}$ , infinitésimaux,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\varphi_1(x) + \delta\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x) + \delta\varphi_n(x)) &= \mathcal{L}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) + \\ &\quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i(x)} \delta\varphi_i(x) + \dots \end{aligned} \quad (1.80)$$

En utilisant les égalités (1.79) et (1.80), nous obtenons

$$\begin{aligned}\delta F [\varphi_1, \dots, \varphi_n] &= \sum_{i=1}^n \int_a^b dx \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i(x)} \delta \varphi_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b dx \frac{\delta F [\varphi_1, \dots, \varphi_n]}{\delta \varphi_i(x)} \delta \varphi_i(x) .\end{aligned}\quad (1.81)$$

Par définition, la *dérivée fonctionnelle* de  $F$  par rapport à la fonction,  $\varphi_i$ , est

$$\frac{\delta F [\varphi_1, \dots, \varphi_n]}{\delta \varphi_i(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i(x)} , \quad 1 \leq i \leq n . \quad (1.82)$$

Si, maintenant, la fonction,  $\mathcal{L}$ , dépend aussi des dérivées,  $\{\dot{\varphi}_i(x)\}$ , des fonctions,  $\{\varphi_i(x)\}$ , il est facile de montrer que la dérivée fonctionnelle de la nouvelle fonctionnelle,  $F [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$ , est

$$\frac{\delta F [\varphi_1, \dots, \varphi_n]}{\delta \varphi_i(x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i(x)} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_i(x)} \right) , \quad 1 \leq i \leq n . \quad (1.82a)$$

Le terme “dérivée première par rapport à la variable  $x$ ” a été obtenu, en faisant une intégration par parties et supposant que :  $\delta \varphi_i(a) = \delta \varphi_i(b) = 0$ , pour tout indice  $i$ .

### Équations d’Euler-Lagrange.

Un siècle après que Newton énonça sa fameuse loi fondamentale, Lagrange élaborait sa Mécanique Analytique (1787). Au lieu de chercher les positions,  $\{\mathbf{r}_j(t)\}$ , et les vitesses,  $\{\dot{\mathbf{r}}_j(t)\}$ , des particules, connaissant leurs positions et leurs vitesses initiales,  $\{\mathbf{r}_j(0)\}$  et  $\{\dot{\mathbf{r}}_j(0)\}$ , Lagrange se posa la question sous un autre angle. Quelle serait la trajectoire réellement suivie par le système, sachant qu’à l’instant initial,  $t_i$ , leurs positions sont  $\{\mathbf{r}_j(t_i)\}$ , et à l’instant final,  $t_f$ , leurs positions sont  $\{\mathbf{r}_j(t_f)\}$ ? A priori, l’on peut imaginer plusieurs chemins possibles, mais quelle serait la loi qui détermine la bonne trajectoire?

Pour ce faire, l’on suppose qu’il existe une fonction,  $L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t)$ , qui dépend des positions,  $\{\mathbf{r}_j\}$ , et des vitesses,  $\{\dot{\mathbf{r}}_j\}$ , et éventuellement du temps  $t$ , d’une ma-



nière explicite<sup>1</sup>. La quantité  $L$  est la fonction de Lagrange ou encore Lagrangien. A titre d'exemple, pour une force conservative, nous avons la relation simple reliant le Lagrangien  $L$  aux énergies cinétique  $T$  et potentielle  $U$  :  $L = T - U$ .

A toute trajectoire émaginée, l'on associe la quantité

$$A[\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] = \int_{t_i}^{t_f} L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) dt, \quad (1.83)$$

appelée "action", qui est une fonctionnelle des positions,  $\{\mathbf{r}_j\}$ .

La trajectoire effectivement suivie par le système de particules peut être déterminée en utilisant le

**Principe de Moindre Action.** *La trajectoire réellement suivie par le système de particules est celle qui rend l'action extrémale (voire minimale).*

Désignons par  $\{\mathbf{r}_j(t)\}$ , la trajectoire réellement suivie par les particules, et soit  $\{\mathbf{r}_i(t) + \delta\mathbf{r}_i(t)\}$  une trajectoire infiniment voisine de cette trajectoire réelle. Nous écrivons le passage

$$\mathbf{r}_j(t) \rightarrow \mathbf{r}_j(t) + \delta\mathbf{r}_j(t), \quad 1 \leq j \leq N. \quad (1.84)$$

Ce qui correspond au passage des vitesses suivant

$$\dot{\mathbf{r}}_j(t) \rightarrow \dot{\mathbf{r}}_j(t) + \delta\dot{\mathbf{r}}_j(t), \quad 1 \leq j \leq N. \quad (1.85)$$

Par la suite, nous admettrons la commutativité

$$\delta\dot{\mathbf{r}}_j(t) = \frac{d}{dt} [\delta\mathbf{r}_j(t)], \quad 1 \leq j \leq N. \quad (1.86)$$

Par hypothèse, nous avons

$$\delta\mathbf{r}_j(t_i) = \delta\mathbf{r}_j(t_f) = 0, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (1.87)$$

La variation de l'action s'écrit alors

$$\begin{aligned} \delta A[\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] &= A[\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N + \delta\mathbf{r}_N] - A[\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} \left[ L(\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N + \delta\mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1 + \delta\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N + \delta\dot{\mathbf{r}}_N; t) \right. \\ &\quad \left. - L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) \right] dt \end{aligned} \quad (1.88)$$

<sup>1</sup>C'est le cas, par exemple, d'une charge dans un champ électrique alternatif.

Par ailleurs,

$$L(\mathbf{r}_1 + \delta\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N + \delta\mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1 + \delta\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N + \delta\dot{\mathbf{r}}_N; t) = L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N; t) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_j} \cdot \delta\mathbf{r}_j + \sum_{j=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \cdot \delta\dot{\mathbf{r}}_j + \text{Ordres supérieurs} . \quad (1.89)$$

Soit

$$\delta A[\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] = \sum_{j=1}^N \int_{t_i}^{t_f} \left[ \delta\mathbf{r}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_j} + \delta\dot{\mathbf{r}}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \right] dt . \quad (1.90)$$

Par intégration par parties du deuxième terme du second membre de la relation (1.90), nous obtenons

$$\delta A[\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] = \sum_{j=1}^N \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_j} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \right) \right] \cdot \delta\mathbf{r}_j . \quad (1.91)$$

L'action étant stationnaire, c'est-à-dire que nous devons avoir :  $\delta A[\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N] = 0$ . Ceci doit avoir lieu, pour toutes variations,  $\{\delta\mathbf{r}_j\}$ , d'où les équations d'*Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_j} = 0 , \quad 1 \leq j \leq N . \quad (1.92)$$

Pour un système conservatif où  $L = T - U$ ,  $\partial L / \partial \mathbf{r}_j = -\partial U / \partial \mathbf{r}_j$  et  $\partial L / \partial \dot{\mathbf{r}}_j = \partial T / \partial \dot{\mathbf{r}}_j = m_j \dot{\mathbf{r}}_j$ , les équations (1.92) sont alors retrouvées.

Les équations d'Euler-Lagrange précédentes s'étendent aisément à un système à  $s$  degrés de liberté, de nature quelconque. Nous désignons par  $(q_1, \dots, q_s)$ , les coordonnées généralisées associées. Ainsi, pour un système à  $N$  particules, nous avons  $s = 3N$  degrés de liberté qui sont les coordonnées cartésiennes,  $\{(x_j, y_j, z_j)\}$ , de ces particules. Pour un pendule simple, par exemple, nous avons *un* seul degré de liberté, qui est l'angle d'écartement  $\varphi$  que fait le fil avec l'axe vertical. Pour l'étude de la mécanique d'un solide, l'on a besoin de 6 degrés de liberté, qui sont les 3 coordonnées,  $(x_G, y_G, z_G)$ , de son centre de masse,  $G$ , et les 3 angles d'Euler,  $(\theta, \varphi, \psi)$ .

Pour un système dynamique quelconque, on se donne une fonction de Lagrange :  $L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t)$ , et on construit une action par intégration sur la variable temps, qui est une fonctionnelle des coordonnées généralisées

$$A[q_1, \dots, q_s] = \int_{t_i}^{t_f} L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t) dt . \quad (1.93)$$

La loi du mouvement d'un tel système s'obtient par application du *principe de moindre action*, c'est-à-dire :  $\delta A [q_1, \dots, q_s] = 0$ . Ceci fournit donc les équations d'Euler-Lagrange généralisées,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq s. \quad (1.94)$$

L'on retrouve bien les équations de Lagrange (1.32), obtenues autrement en appliquant le *théorème des travaux virtuels* (*Principe de d'Alembert*).

### 1.4.3 Un exemple du Principe de Moindre Action : La brachistochrone.

Notons que le principe de moindre action est une application particulière d'une méthode plus générale appelée calcul des variations, qui permet de trouver les points stationnaires d'une fonctionnelle donnée. Historiquement parlant, ce genre de problème a été posé, pour la première fois, par Jean Bernoulli, en 1696, et étudié, ensuite, par de mathématiciens célèbres de l'époque (Jean et Jacques Bernoulli, Newton, L'Hôpital, Leibniz et Tschirnhaus). Le problème en question est celui de la *brachistochrone*, c'est-à-dire de la courbe de *moindre temps* au cours d'une descente.

Considérons un point matériel qui est abandonné à origine O et est contrainte de se déplacer sur une courbe descendante fixe (Figure 1.5). Ce point matériel est supposé soumis à un champ gravitationnel constant. Le but est de déterminer la courbe minimisant son temps de parcours entre l'origine et un point A donné (en bas).

Cette courbe peut être décrite à l'aide de deux fonctions,  $x(s)$  et  $y(s)$ , d'un paramètre  $s$  qui n'est rien d'autre que l'abscisse curviligne ou encore élément d'arc. Donc, le temps pris pour parcourir un arc infinitésimal  $ds$  de cette courbe est

$$dt = \frac{ds}{v}. \quad 1.95$$

Ici,  $v$  est la vitesse du mobile à cet endroit de la courbe. Introduisons les notations suivantes des dérivées paramétriques

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\phi}, \quad \dot{y} = \frac{dy}{d\phi}. \quad (1.96)$$

La longueur d'arc élémentaire est

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} d\phi . \quad (1.97)$$

Le temps total de descente est alors défini par l'intégrale

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{v} d\phi . \quad (1.98)$$

La vitesse s'obtient de la hauteur du point par rapport au point de départ,

$$\frac{m}{2}v^2 = mgy \quad \text{ou} \quad v = \sqrt{2gy} , \quad (1.99)$$

où  $y$  est positif vers le bas. Nous avons utilisé la loi de conservation de l'énergie, pour établir l'expression précédente de la vitesse à l'altitude  $y$ .

L'intégrale à minimiser est donc

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} d\phi = \int F(y, \dot{x}, \dot{y}) d\phi , \quad (1.100)$$

avec le "Lagrangien"

$$F(y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{\sqrt{2gy}} . \quad (1.100a)$$

L'extrémalisation de cette intégrale aboutit aux équations de Lagrange suivantes

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{d\phi} \left( \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} \right) = 0 . \quad (1.101)$$

Le fait que  $F$  ne dépend pas explicitement de  $x$ , le "moment conjugué"

$$p_x = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2gy}} \quad (1.102)$$

est indépendante du paramètre,  $\phi$ . La deuxième des équations (1.101) peut donc s'écrire comme

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2mgy}} \right) + \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{2\sqrt{2gy^3}} = 0 , \quad (1.103)$$

ou encore, en utilisant la conservation de  $p_x$ ,

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) + \frac{\dot{x}}{4p_x^2 g y} = 0 . \quad (1.104)$$

Introduisons, à présent, une constante  $a$ , telle que

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{4ga}} . \quad (1.105)$$

Par comparaison avec l'expression (1.102) de  $p_x$ , l'on déduit que  $2a$  est la valeur de  $y$  quand  $\dot{y} = 0$ ; ce qui correspond à la hauteur de la courbe à son minimum (vitesse parallèle à l'axe des  $x$ ). L'équation différentielle (1.104) devient donc

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) + a \frac{\dot{x}}{y^2} = 0 . \quad (1.106)$$

Il est facile de voir qu'un changement de variable :  $\phi \rightarrow \phi'$  ne change pas la forme de cette équation différentielle. C'est l'invariance par reparamétrisation qui donne une certaine liberté d'imposer certaines conditions, appelées "conditions de jauge", par analogie avec l'électromagnétisme.

En particulier, l'on impose la condition suivante

$$\dot{x} = y , \quad (1.107)$$

où la dérivée  $\dot{x}$  est maintenant par rapport à un autre paramètre de la courbe. A l'aide de ces considérations, l'équation différentielle (1.106) s'écrit

$$\frac{d}{d\phi} \left( \frac{\dot{y}}{y} \right) + \frac{a}{y} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2}{d\phi^2} \ln y + \frac{a}{y} = 0 . \quad (1.108)$$

L'étape suivante consiste à poser  $u = \ln y$ , et l'équation précédente devient

$$\ddot{u} + ae^{-u} = 0 . \quad (1.109)$$

L'on multiplie, ensuite, cette nouvelle équation par le facteur intégrant,  $\dot{u}$ , pour trouver

$$\dot{u}\ddot{u} + a\dot{u}e^{-u} = 0 , \quad (1.110)$$

ou encore

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\phi} (\dot{u}^2) - a \frac{d}{d\phi} (e^{-u}) = 0 , \quad (1.111)$$

dont la solution est

$$\dot{u}^2 = 2ae^{-u} + C , \quad (1.112)$$

ou

$$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^2 = \frac{2a}{y} + C , \quad (1.113)$$

où  $C$  est une constante d'intégration qui peut être déterminée en posant  $\dot{y} = 0$ , et, en même temps,  $y = 2a$ . L'on trouve que  $C = -1$ . Il reste donc

$$\dot{u} = \sqrt{2ae^{-u} - 1} , \quad (1.114)$$

ou

$$\frac{du}{\sqrt{2ae^{-u} - 1}} = d\phi . \quad (1.115)$$

En intégrant et en choisissant une constante d'intégration nulle (ce qui revient à choisir l'origine de la variable  $\phi$ ), l'on obtient

$$\begin{aligned} \phi &= \int \frac{du}{\sqrt{2ae^{-u} - 1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{2ay - y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{a^2 - (y - a)^2}} \\ &= \arccos \left( \frac{|y - a|}{a} \right) . \end{aligned} \quad (1.116)$$

Par inversion, nous trouvons deux solutions qui sont

$$y = a + a \cos \phi \quad (1.117)$$

ou

$$y = a - a \cos \phi . \quad (1.118)$$

L'on peut choisir l'une ou l'autre formes de la composante  $y$ . La solution globale est alors

$$x = a\phi - a \sin \phi , \quad y = a - a \cos \phi . \quad (1.119)$$

Il s'agit de l'équation paramétrique bien connue d'un *cycloïde* de rayon  $a$ .

#### 1.4.4 Extension aux systèmes contraints.

Supposons, maintenant, que les coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha\}$ , soient sujettes à  $N_c$  contraintes supplémentaires pouvant être *holonomes* ou *semi-holonomes*. En particulier, les dernières peuvent être exprimées par une relation entre les coordonnées généralisées et les vitesses généralisées

$$f_a(q, \dot{q}; t) = 0, \quad a = 1, \dots, N_c, \quad (1.120)$$

avec les notations collectives :  $q \equiv (q_1, \dots, q_s)$  et  $\dot{q} \equiv (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ .

Une manière peut être élégante de tenir compte de ces contraintes semi-holonomes est la méthode des *multiplicateurs de Lagrange* qui consiste à ajouter au Lagrangien original une combinaison linéaire des contraintes,

$$L(q, \dot{q}; t) \rightarrow L(q, \dot{q}; t) - \sum_{a=1}^{N_c} \lambda_a f_a(q, \dot{q}; t), \quad (1.121)$$

où on considère les  $N_c$  paramètres,  $\{\lambda_a\}$ , comme des paramètres variationnels, au même titre que les coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha(t)\}$ , et l'on applique le *principe de moindre action*, c'est-à-dire écrire

$$\delta \int dt \left( L - \sum_{a=1}^{N_c} \lambda_a f_a \right) = 0, \quad (1.122)$$

où à la fois les  $\{q_\alpha\}$  et les  $\{\lambda_a\}$  sont sujets à une variation. L'on obtient alors les équations dites d'Euler-Lagrange avec contraintes suivantes

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = \sum_{a=1}^{N_c} \left\{ \lambda_a \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_a}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial f_a}{\partial q_\alpha} \right] + \dot{\lambda}_a \frac{\partial f_a}{\partial \dot{q}_\alpha} \right\}. \quad (1.123)$$

( $\alpha = 1, \dots, s$ ).

La forme de ces équations suggèrent que les contraintes jouent le rôle de forces généralisées. Ces équations sont alors similaires aux équations d'Euler-Lagrange, en présence de forces non conservatives, définies par les relations (1.44). La résolution des équations précédentes donnent les coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha\}$ , en fonction naturellement du temps et de la collection des multiplicateurs de Lagrange,  $\{\lambda_a\} : q_\alpha = q_\alpha(t; \lambda_a)$ , et par utilisation des contraintes (1.120), l'on déduit immédiatement ces multiplicateurs.

**Exemple 11.** *Minimisation d'une fonction simple avec contraintes.*

Pour mieux saisir comment fonctionne la méthode des multiplicateurs de Lagrange, nous considérons un problème de minimisation ordinaire. Par exemple, soit la fonction (entropie) à deux variables :  $f(x, y) = x \ln x + y \ln y$ , où les variables  $x$  et  $y$  (probabilités) satisfont la contrainte  $x + y = 1$ . La manière la plus directe pour trouver le minimum de la fonction  $f$  consiste à éliminer la variable  $y$  tenant compte de la contrainte précédente. En termes de la seule variable  $x$ , la valeur de la fonction en question est :  $f(x) = x \ln x + (1 - x) \ln(1 - x)$ . En appliquant la condition de dérivée nulle, l'on trouve

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{et donc} \quad y = \frac{1}{2} . \quad (1.124)$$

Comme alternative, la méthode des multiplicateurs de Lagrange nous amène à considérer la fonction suivante à trois variables,  $(x, y, \lambda)$ ,

$$f(x, y) + \lambda(x + y - 1) = x \ln x + y \ln y + \lambda(x + y - 1) . \quad (1.125)$$

La condition de dérivée nulle sur chacune des trois variables fournit

$$1 + \ln x + \lambda = 0 , \quad 1 + \ln y + \lambda = 0 , \quad x + y - 1 = 0 . \quad (1.126)$$

Par conséquent,

$$x = e^{-1-\lambda} = \frac{1}{2} , \quad y = e^{-1-\lambda} = \frac{1}{2} , \quad \lambda = \ln 2 - 1 . \quad (1.127)$$

La méthode semble banale, mais indique bien que la symétrie entre  $x$  et  $y$  n'est pas brisée par la méthode. Par contre, la méthode des multiplicateurs de Lagrange peut être très utile dans des exemples plus complexes, où l'élimination d'une variable n'est pas possible.

**Exemple 12.** *Objet roulant sur un plan incliné.*

Considérons un objet de rayon  $R$  (disque ou cylindre) qui est susceptible de rouler sur un plan incliné, faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontal. La distance entre le point de contact du cylindre sur le plan et le haut du plan définit une première coordonnée généralisée,  $x$ . L'angle de rotation de l'objet par rapport à la verticale est noté  $\theta$ . La contrainte de roulement reliant la vitesse  $\dot{x}$  à la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ , est

$$R\dot{\theta} = \dot{x} \implies f(x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta}) = \dot{x} - R\dot{\theta} . \quad 1.128$$



Il s'agit d'une contrainte semi-holonyme, L'énergie cinétique est ici la somme de l'énergie cinétique de translation,  $m\dot{x}^2/2$ , et de l'énergie cinétique de rotation,  $I\dot{\theta}^2/2$ , où  $I$  représente le moment d'inertie de l'objet. L'énergie potentielle est  $V = -mgx \sin \alpha$ . Donc le Lagrangien, plus la fonction de contrainte, devient

$$L + \lambda f = \frac{m}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + mgx \sin \alpha + \lambda (\dot{x} - R\dot{\theta}) . \quad (1.129)$$

L'application des équations d'Euler-Lagrange (avec contrainte) (1.123) donne les équations du mouvement suivantes

$$m\ddot{x} - mg \sin \alpha = \dot{\lambda}, \quad (1.130)$$

$$I\ddot{\theta} = -\dot{\lambda}R , \quad (1.131)$$

$$\dot{x} = R\dot{\theta} . \quad (1.132)$$

La dernière équation peut être utilisée pour éliminer  $\theta$ , notamment en la dérivant par rapport au temps :  $\ddot{x} = R\ddot{\theta}$ . L'on obtient alors

$$m\ddot{x} - mg \sin \alpha = -\dot{\lambda} , \quad (1.133)$$

$$\frac{I}{R} = R\dot{\lambda} , \quad (1.134)$$

et donc, en combinant ces deux équations, l'on trouve

$$m\ddot{x} - mg \sin \alpha + \frac{I}{R^2}\ddot{x} = 0 \implies \left( m + \frac{I}{R^2} \right) \ddot{x} = mg \sin \alpha . \quad (1.135)$$

Si  $k$  désigne le rayon de giration de l'objet, alors  $I = mk^2$ , et l'équation ci-haut se réduit à

$$\ddot{x} = \frac{g \sin \alpha}{1 + k^2/R^2} , \quad (1.136)$$

avec

$$\dot{\lambda} = \frac{mgk^2 \sin \alpha}{R^2 + k^2} . \quad (1.137)$$

La dernière équation suggère que  $\dot{\lambda}$  est une force de contrainte appliquée vers le haut du plan.

L'un des avantages de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est précisément qu'elle donne accès à la valeur des forces de contraintes.

## 1.5 Formalisme Lagrangien dans des référentiels non galiléens.

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que les mouvements se rapportant à un référentiel galiléen (ou référentiel inertiel),  $\mathcal{R}_0$ . C'est seulement dans un tel système que la fonction de Lagrange se présente comme la différence de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle. Pour une particule, par exemple, le Lagrangien est

$$L_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 - U(\mathbf{r}_0) , \quad (1.138)$$

où  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{v}_0$  représentent, respectivement, la position et la vitesse de la particule, mesurées par un observateur lié au référentiel galiléen,  $\mathcal{R}_0$ . L'équation du mouvement associée est alors

$$m \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_0} . \quad (1.139)$$

Dans un référentiel non galiléen,  $\mathcal{R}$ , les équations du mouvement s'obtiennent, également, en appliquant le *principe de moindre action*, et en principe, les équations d'Euler-Lagrange gardent la même forme, lorsqu'on passe de  $\mathcal{R}_0$  à  $\mathcal{R}$  (ce passage est un changement de coordonnées), c'est-à-dire l'on a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 . \quad (1.140)$$

Ici,  $L$  est le nouveau Lagrangien, et  $\mathbf{r}$  et  $\mathbf{v}$  sont, respectivement, la position et la vitesse mesurées par un observateur lié au référentiel relatif,  $\mathcal{R}$ .

### 1.5.1 Cas des référentiels non galiléens en translation rectiligne.

Le point de départ est l'écriture de la loi de composition de vitesses,

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \mathbf{V}(t) , \quad (1.141)$$

où  $\mathbf{V}(t)$  est la vitesse d'entraînement ou encore vitesse de l'origine du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu. L'égalité (1.141) reportée dans l'expression (1.138) donne

le nouveau Lagrangien

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + m\mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + \frac{m}{2}\mathbf{V}^2 - U(\mathbf{r}) . \quad (1.142)$$

Mais,  $\mathbf{V}^2(t)$  est une fonction donnée du temps qui peut se présenter comme la dérivée totale par rapport à  $t$  d'une autre fonction, et par suite, on peut omettre le troisième terme de l'expression précédente. D'autre part,  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ , où  $\mathbf{r}$  est le vecteur position de la particule dans le référentiel relatif  $\mathcal{R}$ ; par conséquent,

$$m\mathbf{v} \cdot \mathbf{V}(t) = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \mathbf{V}(t) = \frac{d}{dt}(m\mathbf{r} \cdot \mathbf{V}) - m\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{V}}{dt} . \quad (1.143)$$

En reportant cette valeur dans la fonction de Lagrange (1.142) et en omettant à nouveau la dérivée totale par rapport au temps, nous obtenons, en définitive,

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m\mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{r} - U , \quad (1.144)$$

où  $\mathbf{W}(t) = d\mathbf{V}/dt$  désigne l'accélération du mouvement de translation du système de référence,  $\mathcal{R}$ .

En utilisant les équations de Lagrange (1.140) avec le nouveau Lagrangien, nous trouvons l'équation du mouvement dans le référentiel mobile,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{W}(t) . \quad (1.145)$$

Cette équation différentielle vectorielle montre clairement que le mouvement de translation accéléré du second système de référence est équivalent à l'apparition d'un champ de force homogène, la force qui agit dans ce champ étant égale au produit de la masse,  $m$ , de la particule par l'accélération,  $\mathbf{W}$ , et est dirigée dans le sens contraire de cette accélération.

**Remarque.** Si le second référentiel est en translation rectiligne et uniforme, c'est-à-dire  $W = 0$ , alors l'équation du mouvement garde la même forme que dans le référentiel absolu. En effet, cela n'est pas étonnant car, dans ce cas, le second référentiel est aussi un référentiel galiléen.

### 1.5.2 Cas des référentiels non galiléens tournants.

Soit  $\mathcal{R}$  un autre référentiel non galiléen, supposé de même origine que le repère galiléen,  $\mathcal{R}_0$ , mais tournant par rapport à ce dernier, avec une vitesse angulaire,  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ . Dans ce cas, les vecteurs position, relatives aux deux référentiels, coïcident, c'est-à-dire :  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$ .

La vitesse absolue de la particule,  $\mathbf{v}_0$ , est la somme de sa vitesse relative,  $\mathbf{v}$ , et de sa vitesse de rotation,  $\boldsymbol{\Omega}(t) \wedge \mathbf{r}$ ,

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega}(t) \wedge \mathbf{r} . \quad (1.146)$$

En reportant cette égalité dans l'expression (1.138), nous obtenons celle du Lagrangien, dans le référentiel tournant,  $R$ ,

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + m \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) + \frac{m}{2} (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 - U . \quad (1.147)$$

Telle est la forme générale de la fonction de Lagrange dans un référentiel non galiléen tournant.

Pour calculer les dérivées figurant dans les équations de Lagrange, nous écrivons la différentielle totale,

$$\begin{aligned} dL &= m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + m d\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) + m \mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge d\mathbf{r}) + m (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge d\mathbf{r}) - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} + m d\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) + m d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega}) + m [(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \wedge \boldsymbol{\Omega}] \cdot d\mathbf{r} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (1.148)$$

En réangeant les termes contenant  $d\mathbf{r}$  et  $d\mathbf{v}$ , l'on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = m (\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega}) + m (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) \wedge \boldsymbol{\Omega} - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} , \quad (1.149a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v} + m (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) . \quad (1.149b)$$

Reportées dans les équations de Lagrange (1.140), ces dérivées donnent l'équation du mouvement dans le référentiel non galiléen,  $\mathcal{R}$ ,

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} + m \mathbf{r} \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}} + 2m \mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega} + m \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\Omega}) . \quad (1.150)$$

Cette équation du mouvement appelle quelques commentaires.

Nous constatons d'abord que les forces d'inertie provenant de la rotation du système de référence se composent de trois parties. La force  $m\mathbf{r} \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}}$  est liée à la non-uniformité de la rotation, et les deux autres existent même si la rotation est uniforme. La force  $2m\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega}$  est appelée *force de Coriolis*. La force  $m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\Omega})$  est dite *centrifuge*. Cette dernière est dirigée dans le plan passant par  $\mathbf{r}$  et  $\boldsymbol{\Omega}$ , perpendiculairement à l'axe de rotation (c'est-à-dire à la direction de  $\boldsymbol{\Omega}$ ) et en s'éloignant de l'axe; elle a une valeur absolue  $m\rho\Omega^2$ , où  $\rho$  est la distance de la particule à l'axe de rotation.

Si, maintenant, le second référentiel est en mouvement de translation *non uniforme* et de rotation, le Lagrangien sera

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{v}; t) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - m\mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{r} + m\mathbf{v} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}) + \frac{m}{2}(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r})^2 - U, \quad (1.151)$$

et les équations du mouvement en découlant, sont

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\mathbf{W}(t) + m\mathbf{r} \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}} + 2m\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega} + m\boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{r} \wedge \boldsymbol{\Omega}). \quad (1.152)$$

Signalons que toutes les forces d'inertie évoquées précédemment sont bien présentes et elle s'ajoute une autre force d'inertie,  $m\mathbf{r} \wedge \dot{\boldsymbol{\Omega}}$ , qui exprime une rotation non uniforme correspondant à une vitesse angulaire,  $\boldsymbol{\Omega}(t)$ , dépendant du temps.

Nous aurions, dans ce cas, les mêmes conclusions qu'avant. ■

# Chapitre 2

## Mécanique d'Hamilton.

Dans ce chapitre, nous présentons le second formalisme de la Mécanique Analytique, à savoir le *formalisme Hamiltonien*. Ce dernier est intimement lié au formalisme Lagrangien présenté au Chapitre 1. L'objet de base sera la "fonction de Hamilton" ou simplement "Hamiltonien", fonction des coordonnées généralisées et des moments conjugués associés.

### 2.1 Énergie du système.

D'entrée de jeu, nous supposons que le système est conservatif, auquel cas :  $\partial L/\partial t = 0$ . Cela veut dire que le Lagrangien n'est pas une fonction explicite du temps, mais il en dépend implicitement à travers les coordonnées généralisées,  $\{q_\alpha\}$ , et leurs dérivées,  $\{\dot{q}_\alpha\}$ . Calculons alors la dérivée totale de  $L$  par rapport à  $t$ ,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right) \quad (2.1)$$

qui vaut, tenant compte des équations d'Euler-Lagrange (1.94) du Chapitre 1,

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \frac{d}{dt} \left( \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) . \quad (2.2)$$

Soit

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \right) = 0 . \quad (2.3)$$

Posons

$$E = \sum_{\alpha=1}^s \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} - L \quad (2.4)$$

qui est une *intégrale première du mouvement* (ou *constante du mouvement*). C'est l'énergie du système. Ceci nous conduit immédiatement au formalisme Hamiltonien.

Faisons remarquer, de passage, que la quantité  $E$  est une quantité *intrinsèque*. En effet, il est facile de voir que si l'on ajoute à  $L$  une dérivée totale, par rapport au temps, d'une fonction arbitraire,  $f(q_1, \dots, q_s)$ ,  $E$  ne changera pas,

$$L \rightarrow L + \frac{df}{dt}, \quad E \rightarrow E. \quad (2.5)$$

## 2.2 Moments conjugués.

Posons

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq s. \quad (2.6)$$

Ces quantités intervenant dans l'expression (2.4) de l'énergie, sont appelées *moments conjugués* des variables,  $\{q_\alpha\}$ . Ainsi, pour une particule de masse  $m$  et de position  $x$ ,  $p = m\dot{x}$ , c'est-à-dire que ce moment conjugué coïncide avec sa quantité du mouvement (ou impulsion). En revanche, si les forces s'exerçant sur le système, dépendent des vitesses (forces de frottement, etc.) ou si l'on se place dans un système de coordonnées autre que le système cartésien, le moment conjugué ne coïncide pas toujours avec la quantité du mouvement.

**Exemple 1.** *Pendule simple.*

Nous rappelons que le Lagrangien d'un pendule simple (Figure 1.2) est

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - m g l (1 - \cos \varphi). \quad (2.7)$$

Ici,  $m$  est la masse de la masselotte qui est attachée à un support fixe à l'aide d'un fil de longueur  $l$ . Dans ce cas, nous aurons un seul degré de liberté qui est l'angle d'écartement,

$\varphi$ , du pendule. Le moment conjugué associé, noté  $p_\varphi$ , est alors

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} . \quad (2.8)$$

Donc,  $p_\varphi$  est directement proportionnel à la vitesse angulaire,  $\dot{\varphi}$ .

**Exemple 2.** *Pendule double.*

Le Lagrangien d'un pendule double (Figure 1.3), de masses  $m_1$  et  $m_2$  et d'angles d'écartement  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , et dont les longueurs respectives des fils d'attache sont  $l_1$  et  $l_2$ , est

$$\begin{aligned} L(\varphi_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2) &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\varphi}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \\ &+ (m_1 + m_2)gl_1 \cos \varphi_1 + m_2gl_2 \cos \varphi_2 . \end{aligned} \quad (2.9)$$

Nous aurons donc deux moments conjugués, notés  $p_{\varphi_1}$  et  $p_{\varphi_2}$ , associés aux seuls degrés de liberté  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ . Un calcul simple donne

$$p_{\varphi_1} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = (m_1 + m_2)l_1^2\dot{\varphi}_1 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) , \quad (2.10)$$

$$p_{\varphi_2} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = m_2l_2^2\dot{\varphi}_2 + m_2l_1l_2\dot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) . \quad (2.11)$$

Ces moments conjugués font alors intervenir non seulement les vitesses angulaires  $\dot{\varphi}_1$  et  $\dot{\varphi}_2$  des deux pendules, mais aussi leurs angles d'écartement respectifs  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ .

**Exemple 3.** *Coordonnées sphériques.*

Dans ce système de coordonnées, le Lagrangien est

$$L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - U(r, \theta, \varphi) . \quad (2.12)$$

Nous aurons *trois* moments conjugués, notés  $p_r$ ,  $p_\theta$  et  $p_\varphi$ , associés, respectivement, aux coordonnées  $(r, \theta, \varphi)$ . Nous trouvons que

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} , \quad (2.13)$$

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} , \quad (2.14)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} . \quad (2.15)$$



**Exemple 4.** *Coordonnées cylindriques.*

Dans ce système de coordonnées, le Lagrangien est

$$L(r, z, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}, \dot{z}) = \frac{1}{2}m \left( \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - U(r, \theta, \varphi) . \quad (2.16)$$

Les moments conjugués, notés  $p_r$ ,  $p_\varphi$  et  $p_z$ , associés, respectivement, aux coordonnées  $(r, \varphi, z)$ , sont tels que

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} , \quad (2.17)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} , \quad (2.18)$$

$$p_z = m\dot{z} . \quad (2.19)$$

**Exemple 5.** *Particules chargées.*

Nous montrons que le Lagrangien d'une particule, de masse  $m$ , de charge  $q$ , et de vitesse  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ , est

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - qV , \quad (2.20)$$

où  $V$  et  $\mathbf{A}$  sont les potentiels scalaire et vecteur. Nous montrons aisément que le moment conjugué associé est

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A} . \quad (2.21)$$

Cet exemple montre que le moment conjugué ne coïncide pas toujours avec la quantité du mouvement,  $m\dot{\mathbf{r}}$ .

## 2.3 Fonction de Hamilton.

Avant de définir cette fonction, il est instructif de rappeler, ici, la notion de *transformée de Legendre*. Cette transformation mathématique est très utile, surtout en Mécanique Analytique, Thermodynamique, et en Théorie Quantique du Champ.

### 2.3.1 Transformée de Lengrendre.

#### Cas d'une seule variable.

Considérons une fonction  $f(x)$  de la variable réelle  $x$ . Pour fixer les idées, nous supposons que  $f(0) = 0$ . Soit  $x$  un point donné et désignons par  $p = f'(x)$ , qui est la tangente à la courbe en ce même point, comme l'indique la Figure 2.1.

La droite tangente (en pointillés) au point  $x$  coupe l'axe des  $y$  en un point  $J$ . Posons  $g(p) = OJ$ , qui est la distance séparant l'origine  $O$  du point  $J$ . Nous avons, manifestement,

$$g(p) = xp - f(x) , \quad (2.22)$$

avec les *conditions de stationnarité*

$$p = f'(x) , \quad x = g'(p) . \quad (2.23)$$

Lorsqu'elle existe, la fonction  $g(p)$  est appelée *transformée de Legendre* de la fonction  $f(x)$ , et  $x$  et  $p$  sont les *variables conjuguées de Legendre*. La fonction  $f(x)$  est la *transformée de Legendre inverse*.

**Exemple 6.** La transformée de Legendre de la parabole, décrite par la fonction  $f(x) = ax^2$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), est une autre parabole, décrite par  $g(p) = p^2/4a$ .

**Exemple 7.** La transformée de Legendre de la fonction  $f(x) = \sin(\omega x)$  ( $\omega \in \mathbf{R}$ ) est  $g(p) = (p/\omega) \arccos(p/\omega) - \sqrt{1 - p^2/\omega^2}$ . Remarquer que cette transformée de Legendre n'existe que si  $p \leq \omega$ .

#### Cas de plusieurs variables.

La définition précédente de la transformée de Legendre s'étend sans difficultés au cas des fonctions à plusieurs variables. La transformée de Legendre généralisée d'une fonction à plusieurs variables,  $f(x_1, \dots, x_n)$ , est

$$g(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i x_i - f(x_1, \dots, x_n) , \quad (2.24)$$

avec les *conditions de stationnarité*

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad x_i = \frac{\partial g}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.25)$$

Les variables  $\{x_i\}$  et  $\{p_i\}$  sont les variables conjuguées de Legendre.

**Exemple 8.** La transformée de Legendre de la fonction  $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2$  ( $a_i \in \mathbf{R}$ ) est  $g(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n a_i p_i^2 / 4$ .

### 2.3.2 Fonction de Hamilton.

Au lieu de travailler avec les coordonnées,  $(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ , il serait commode de travailler plutôt avec les variables  $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$  qui vont définir l'état du système. Ces variables sous-tendent l'*espace de phase*,  $\mathcal{E}_P$ , qui est une variété différentiable.

Lorsqu'on passe des premières coordonnées aux dernières, comment se transforme la fonction de Lagrange  $L$ ? La réponse est que cette fonction se transforme en lui appliquant une transformée de Legendre rappelée ci-haut. Nous regardons  $L$  comme une fonction des vitesses  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$  (les coordonnées généralisées sont fixées). Les variables conjuguées de Legendre de ces variables sont simplement les moments conjugués,  $(p_1, \dots, p_s)$ . La transformée de Legendre de  $L$  est alors

$$H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s; t) = \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha \dot{q}_\alpha - L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t), \quad (2.26)$$

où la fonction  $H$  est appelée *fonction de Hamilton* ou encore *Hamiltonien*. Pour un système conservatif, cette fonction coïncide avec l'énergie  $E$ , définie par l'expression (2.4). Nous avons les *conditions de stationnarité*

$$p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha}, \quad \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad 1 \leq \alpha \leq s. \quad (2.27)$$

**Exemple 9.** *Systèmes de particules conservatifs.*

Soit un ensemble de  $N$  particules, de positions  $(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ . Leur Lagrangien est

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i^2 \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (2.28)$$

Les moments conjugués (ou impulsions),  $(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ , sont donnés par

$$\mathbf{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (2.29)$$

Le Hamiltonien associé est alors

$$H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i - L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N). \quad (2.30)$$

Il est facile de montrer que pour les systèmes conservatifs, l'on a

$$H(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = T(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) + U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N), \quad (2.31)$$

avec l'expression équivalente de l'énergie cinétique,

$$T(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m_i}. \quad (2.32)$$

La conclusion est que le Hamiltonien d'un système conservatif est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

**Exemple 10.** *Particule chargée.*

Pour ce système, le moment conjugué est donné par la formule (2.21). La fonction de Hamilton associée est

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{r}} - L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = (m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}(\mathbf{r})) \cdot \dot{\mathbf{r}} - \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 - q\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} + qV(\mathbf{r}). \quad (2.33)$$

Un calcul trivial donne

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{p} - q\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2}{2m} + qV(\mathbf{r}). \quad (2.34)$$

Donc, l'énergie d'une particule chargée subissant l'action simultanée d'un potentiel vecteur et d'un potentiel scalaire, est l'équivalente de celle d'une charge électrique, dans un potentiel électrostatique unique,  $V$ , à condition de remplacer l'impulsion  $\mathbf{p}$  par  $\mathbf{p} - q\mathbf{A}$ .

**Exemple 6.** *Hamiltoniens d'une particule en divers systèmes de coordonnées.*

Sans détails, nous donnons simplement les résultats :

*Coordonnées cartésiennes :*

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z). \quad (2.35)$$

Coordonnées cylindriques :

$$H(r, \varphi, z, p_r, p_\varphi, p_z) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2 \right) + U(r, \varphi, z) . \quad (2.36)$$

Coordonnées sphériques :

$$H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(r, \theta, \varphi) . \quad (2.37)$$

## 2.4 Équations d'Hamilton.

En combinant les relations (2.24) à (2.27), nous déduisons la dérivée totale du Hamiltonien  $H$ ,

$$dH = \sum_{\alpha=1}^s (\dot{q}_\alpha dp_\alpha - \dot{p}_\alpha dq_\alpha) - \frac{\partial L}{\partial t} dt . \quad (2.38)$$

Soit

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} , \quad \dot{p}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha} , \quad 1 \leq \alpha \leq s \quad (2.39)$$

et

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} . \quad (2.40)$$

Les équations (2.39) sont appelées “équations d'Hamilton”. Elles sont du premier ordre en  $\{q_\alpha\}$  et  $\{p_\alpha\}$ , et symétriques (au signe – près) dans ces mêmes variables.

Nous faisons remarquer que les équations précédentes peuvent être obtenues également par un *Principe de Moindre Action*. En effet, d'après la relation (2.26), nous avons

$$Ldt = \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha dq_\alpha - Hdt . \quad (2.41)$$

L'action s'écrit alors

$$A[q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s] = \int_{t_i}^{t_f} \left( \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha dq_\alpha - Hdt \right) . \quad (2.42)$$

Exigeons que cette action soit stationnaire par rapport à ses variables,  $\{q_\alpha(t)\}$  et  $\{p_\alpha(t)\}$ , avec les conditions aux bords :  $\delta q_\alpha(t_i) = \delta q_\alpha(t_f) = 0$ . Aucune condition n'est imposée aux variables  $\{p_\alpha(t)\}$ . Nous avons alors la variation de l'action

$$\delta A [q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s] = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{\alpha=1}^s \left[ \delta p_\alpha \left( \dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) + \left( p_\alpha \frac{d\delta q_\alpha}{dt} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha \right) \right] dt . \quad (2.43)$$

Par intégration par parties des termes en  $d\delta q_\alpha/dt$ , nous trouvons

$$\delta A [q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s] = \int_{t_i}^{t_f} \sum_{\alpha=1}^s \left[ \delta p_\alpha \left( \dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} \right) - \delta q_\alpha \left( \dot{p}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \right) \right] . \quad (2.44)$$

L'action est stationnaire, auquel cas :  $\delta A = 0$ , et ceci pour toutes variations  $\{\delta q_\alpha\}$  et  $\{\delta p_\alpha\}$ ; d'où les équations d'Hamilton (2.39).

## 2.5 Évolution temporelle des grandeurs physiques.

Considérons une grandeur physique arbitraire,  $F(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s; t)$ , définie sur l'espace de phase,  $\mathcal{E}_P$ . Nous nous proposons d'étudier l'évolution dans le temps d'une telle grandeur. Sa dérivée totale s'écrit

$$dF = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} dp_\alpha \right) + \frac{\partial F}{\partial t} dt . \quad (2.45)$$

En utilisant les équations d'Hamilton (2.39), nous obtenons

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \right) + \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (2.46)$$

Par définition, le *crochet de Poisson* de deux grandeurs physiques  $F$  et  $G$  est la quantité

$$\{F, G\} = \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial G}{\partial q_\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \right) . \quad (2.47)$$

En termes du crochet de Poisson, la relation (2.46) se réécrit

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} + \frac{\partial F}{\partial t} . \quad (2.48)$$

C'est l'équation d'évolution de la grandeur  $F$ . Remarquer que cette évolution est régie par le Hamiltonien qui reflète la physique. Si la grandeur  $F$  ne dépend pas explicitement du temps et son crochet de Poisson avec le Hamiltonien est nul, alors elle est une *constante du mouvement*.

Les équations d'Hamilton peuvent se réécrire d'une manière symétrique, en termes du crochet de Poisson,

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \{q_\alpha, H\} , \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = \{p_\alpha, H\} , \quad 1 \leq \alpha \leq s . \quad (2.49)$$

Ce sont les *équations canoniques*.

Nous dressons ci-dessous (sans démonstrations) une liste de propriétés du crochet de Poisson :

$$\{F, G\} = -\{G, F\} , \quad \textit{Antisymétrie} , \quad (2.50a)$$

$$\{F, C\} = 0 , \quad C \text{ est une constante arbitraire} , \quad (2.50b)$$

$$\{\alpha F + \beta G, H\} = \alpha \{F, H\} + \beta \{G, H\} , \quad \textit{Bilinéarité} , \quad (2.50c)$$

$$\{FG, H\} = F \{G, H\} + \{F, H\} G , \quad (2.50d)$$

$$\{q_\alpha, F(p_\beta)\} = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} , \quad (2.50e)$$

$$\{F(q_\beta), p_\alpha\} = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha} , \quad (2.50f)$$

$$\{q_\alpha, q_\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0 , \quad \{q_\alpha, p_\beta\} = \delta_{\alpha\beta} , \quad \textit{Relations canoniques} , \quad (2.50g)$$

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{F, H\}\} + \{H, \{G, F\}\} = 0 , \quad \textit{Identité de Jacobi} , \quad (2.50h)$$

$$\frac{d}{dt} \{F, G\} = \left\{ \frac{dF}{dt}, G \right\} + \left\{ F, \frac{dG}{dt} \right\} . \quad (2.50i)$$

Notons qu'une grandeur physique ne dépendant pas explicitement du temps ( $\partial F/\partial t = 0$ ) est une constante du mouvement si et seulement si son crochet de Poisson avec l'Hamiltonien est indifféremment nul :  $\{F, H\} = 0$ .

**Théorème de Poisson.** *Le crochet de Poisson de deux invariants est lui-même un invariant.*

La démonstration est basée sur la relation (2.50i) : si  $F$  et  $G$  sont des invariants alors  $dF/dt = 0$  et  $dG/dt = 0$ , et donc  $d\{F, G\}/dt = 0$ .

## 2.6 Transformations canoniques.

### 2.6.1 Définition et propriétés.

Notons que le choix des coordonnées généralisées,  $(q_1, \dots, q_s)$ , n'est pas limité par aucune condition. Le bon choix est celui qui rend facile l'étude du mouvement du système dynamique. L'aspect formel des équations d'Euler-Lagrange (1.94), du chapitre précédent, ne dépend pas de ce choix, et dans ce sens, on peut dire que les équations d'Euler-Lagrange sont invariantes par rapport à la transformation qui fait passer les coordonnées,  $(q_1, \dots, q_s)$ , à d'autres coordonnées indépendantes,  $(Q_1, \dots, Q_s)$ . Ces nouvelles coordonnées sont fonctions des anciennes,  $(q_1, \dots, q_s)$ . De même, les moments conjugués correspondants,  $(p_1, \dots, p_s)$ , seront remplacés par de nouveaux moments conjugués,  $(P_1, \dots, P_s)$ . La transformation globale s'écrit alors

$$Q_\alpha = Q_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s; t) , \quad P_\alpha = P_\alpha(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s; t) , \quad 1 \leq \alpha \leq s . \quad (2.51)$$

En termes de ces nouvelles coordonnées, l'Hamiltonien original,  $H$ , fonction des variables  $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$ , se transforme en un nouveau,  $H'$ , fonction directement des nouvelles coordonnées,  $(Q_1, \dots, Q_s, P_1, \dots, P_s)$ . En plus, l'on a de nouvelles équations d'Hamilton

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha} , \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} , \quad 1 \leq \alpha \leq s . \quad (2.52)$$

Pour cette raison, la transformation (2.52) est appelée *transformation canonique*.

Aussi, les nouvelles variables satisfont les relations canoniques

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\}_{P,Q} = 0 , \quad \{P_\alpha, P_\beta\}_{P,Q} = 0 , \quad \{Q_\alpha, P_\beta\}_{P,Q} = \delta_{\alpha\beta} . \quad (2.53)$$



On peut démontrer, également, que les crochets de Poisson restent inchangés par transformation canonique, c'est-à-dire

$$\{F, G\}_{p,q} = \{F, G\}_{P,Q} . \quad (2.54)$$

En somme, *une transformation canonique est une transformation des variables de l'espace de phase qui préserve la forme des équations d'Hamilton et les crochets de Poisson.*

Pour montrer cela, écrivons, d'abord, les équations d'Hamilton (2.39) sous forme matricielle,

$$\dot{\eta} = J \frac{\partial H}{\partial \eta} , \quad \eta = (q, p) , \quad J = \begin{pmatrix} O_s & I_s \\ -I_s & O_s \end{pmatrix} . \quad (2.55)$$

Ici,  $O_s$  est la matrice carrée *nulle* d'ordre  $s$  et  $I_s$  est la matrice carrée *unité* d'ordre  $s$ . La notation compacte  $(q, p)$  signifie les  $2s$  coordonnées :  $(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$  et  $\dot{\eta} \equiv \partial \eta / \partial t$ .

En notations matricielles, le changement de variables  $q \rightarrow (Q, P)$  et  $p \rightarrow (Q, P)$  correspond au changement :  $\eta \rightarrow \eta'$ . Ce changement de variables fait intervenir la matrice jacobienne,  $M$ , de la transformation

$$M = \frac{\partial \eta'}{\partial \eta} , \quad M_{\alpha\beta} = \frac{\partial \eta'_\alpha}{\partial \eta_\beta} . \quad (2.56)$$

Nous avons alors

$$\dot{\eta}' = M \dot{\eta} = M J \frac{\partial H}{\partial \eta} . \quad (2.57)$$

Soit, en explicitant les indices,

$$\dot{\eta}'_\alpha = \sum_{\beta, \gamma} M_{\alpha\beta} J_{\beta\gamma} \frac{\partial H}{\partial \eta_\gamma} = \sum_{\beta, \gamma, \delta} M_{\alpha\beta} J_{\beta\gamma} \frac{\partial H}{\partial \eta'_\delta} \frac{\partial \eta'_\delta}{\partial \eta_\gamma} = \sum_{\beta, \gamma, \delta} M_{\alpha\beta} J_{\beta\gamma} M_{\gamma\delta}^T \frac{\partial H}{\partial \eta'_\delta} . \quad (2.58)$$

En revenant aux notations matricielles, nous avons donc

$$\dot{\eta}' = M J M^T \frac{\partial H}{\partial \eta'} . \quad (2.59)$$

De l'équation (2.59), l'on déduit que les équations d'Hamilton sont préservées :  $\dot{\eta}' = J \partial H' / \partial \eta'$ , à la condition que

$$M J M^T = J . \quad (2.60)$$

Une matrice  $M$  satisfaisant la condition (2.60) est dite *matrice symplectique*. Cette condition implique que la valeur absolue du jacobien de la transformation est égale à l'unité, c'est-à-dire :  $|\det M| = 1$ .

Nous avons le

**Théorème de Liouville.** *Une transformation canonique conserve le volume d'une région,  $\mathcal{D}$ , de l'espace de phase,*

$$\int_{\mathcal{D}} \prod_{\alpha=1}^s dQ_{\alpha} dP_{\alpha} = \int_{\mathcal{D}} |\det M| \prod_{\alpha=1}^s dq_{\alpha} dp_{\alpha} = \int_{\mathcal{D}} \prod_{\alpha=1}^s dq_{\alpha} dp_{\alpha} . \quad (2.61)$$

Prouvons, enfin, qu'une transformation canonique préserve le crochet de Poisson. Sous forme matricielle, ce dernier peut s'écrire comme

$$\{F, G\}_{p,q} = \frac{\partial F^T}{\partial \eta} J \frac{\partial G}{\partial \eta} , \quad (2.62)$$

où  $F$  et  $G$  sont deux fonctions de l'espace de phase. La transformation canonique :  $\eta \rightarrow \eta'$  implique alors que ce même crochet de Poisson peut s'écrire comme

$$\{F, G\}_{p,q} = \frac{\partial F^T}{\partial \eta'} M^T J M \frac{\partial G}{\partial \eta'} = \frac{\partial F^T}{\partial \eta'} J \frac{\partial G}{\partial \eta'} = \{F, G\}_{P,Q} , \quad (2.63)$$

où nous avons utilisé le fait que la matrice jacobienne est symplectique, relation (2.60). Donc, nous avons bien :  $\{F, G\}_{p,q} = \{F, G\}_{P,Q}$ .

**Exemples 7.** Nous donnons, ici, quelques exemples élémentaires de transformations canoniques :

- Des *changements d'échelle* :  $(q_{\alpha}, p_{\alpha}) \rightarrow (Q_{\alpha}, P_{\alpha}) = (\lambda q_{\alpha}, p_{\alpha}/\lambda)$ .
- Des échanges entre positions et impulsions :  $(q_{\alpha}, p_{\alpha}) \rightarrow (Q_{\alpha}, P_{\alpha}) = (p_{\alpha}, -q_{\alpha})$ .

## 2.6.2 Fonction génératrice.

Une autre manière d'aboutir aux formules de transformations canoniques est comme suit. Rappelons, d'abord, que les équations d'Hamilton ont été obtenues, par un *Principe*

de *Moindre Action*, en imposant

$$\delta \int \left( \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} - H dt \right) = 0 . \quad (2.64)$$

Pour que les nouvelles coordonnées,  $(Q, P)$ , satisfassent les équations d'Hamilton (2.52), l'on doit avoir le même principe,

$$\delta \int \left( \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} - H' dt \right) = 0 . \quad (2.65)$$

Mais les deux principes (2.64) et (2.65) ne sont équivalents qu'à condition que les expressions sous le signe "intégrale" diffèrent seulement par la différentielle totale d'une fonction arbitraire,  $S$ , dépendant des coordonnées, des impulsions et du temps. Nous écrivons donc

$$\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} - H dt = \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} - H' dt + dS . \quad (2.66)$$

Toute transformation canonique est caractérisée par sa fonction  $S$  qu'on appelle *fonction génératrice de la transformation* ou *fonction d'Hamilton principale*.

**Remarque.** L'autre possibilité pour conserver la forme des équations d'Hamilton, après transformation canonique, consiste à supposer que

$$\sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} - H dt = \lambda \left( \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} - H' dt \right) , \quad (2.67)$$

où  $\lambda$  est un nombre réel arbitraire. Il est facile de montrer que

$$Q_{\alpha} = q_{\alpha} , \quad P_{\alpha} = \lambda^{-1} p_{\alpha} , \quad H' = \lambda^{-1} H , \quad (2.67a)$$

ou

$$Q_{\alpha} = \lambda^{-1} q_{\alpha} , \quad P_{\alpha} = p_{\alpha} , \quad H' = \lambda^{-1} H , \quad (2.67b)$$

ou

$$Q_{\alpha} = \lambda^{-1/2} q_{\alpha} , \quad P_{\alpha} = \lambda^{-1/2} p_{\alpha} , \quad H' = \lambda^{-1} H , \quad \lambda > 0 . \quad (2.67c)$$

Revenons, maintenant, à la relation de base (2.66), que nous écrivons comme

$$dS = \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} dq_{\alpha} - \sum_{i=1}^s P_{\alpha} dQ_{\alpha} + (H' - H) dt . \quad (2.68)$$

Nous voyons que

$$p_{\alpha} = \frac{\partial S}{\partial q_{\alpha}} , \quad P_{\alpha} = -\frac{\partial S}{\partial Q_{\alpha}} , \quad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} . \quad (2.69)$$

Cela suggère que la fonction génératrice  $S$  est une fonction des anciennes et de nouvelles coordonnées (et du temps) :  $S(q, Q; t)$ . Pour une fonction  $S$  donnée, les formules (2.69) établissent la relation entre les anciennes variables  $(q, p)$  et les nouvelles  $(Q, P)$ , et exprimant également la nouvelle fonction d'Hamilton.

Il y a, essentiellement, quatre classes de fonctions génératrices intéressantes mêlant les deux jeux de coordonnées :

$$S_1(q, Q; t) \equiv S(q, Q; t) , \quad (2.70)$$

$$S_2(q, P; t) = S(q, Q; t) + \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} Q_{\alpha} , \quad (2.71)$$

$$S_3(Q, p; t) = S(q, Q; t) - \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} , \quad (2.72)$$

$$S_4(p, P; t) = S(q, Q; t) + \sum_{\alpha=1}^s P_{\alpha} Q_{\alpha} - \sum_{\alpha=1}^s p_{\alpha} q_{\alpha} . \quad (2.73)$$

Notons que le choix de la fonction génératrice dépend des circonstances. Donc, les trois dernières fonctions génératrices s'obtiennent à partir de la première,  $S_1 \equiv S$ , en faisant des transformations de Legendre successives. Nous avons les relations triviales suivantes :

$$p_{\alpha} = \frac{\partial S_1}{\partial q_{\alpha}} , \quad P_{\alpha} = -\frac{\partial S_1}{\partial Q_{\alpha}} , \quad H' = H + \frac{\partial S_1}{\partial t} , \quad (2.74a)$$

$$p_{\alpha} = \frac{\partial S_2}{\partial q_{\alpha}} , \quad Q_{\alpha} = \frac{\partial S_2}{\partial P_{\alpha}} , \quad H' = H + \frac{\partial S_2}{\partial t} , \quad (2.74b)$$

$$P_{\alpha} = -\frac{\partial S_3}{\partial Q_{\alpha}} , \quad q_{\alpha} = -\frac{\partial S_3}{\partial p_{\alpha}} , \quad H' = H + \frac{\partial S_3}{\partial t} , \quad (2.74c)$$

$$q_{\alpha} = -\frac{\partial S_4}{\partial p_{\alpha}} , \quad Q_{\alpha} = \frac{\partial S_4}{\partial P_{\alpha}} , \quad H' = H + \frac{\partial S_4}{\partial t} . \quad (2.74d)$$

### 2.6.3 Quelques transformations canoniques remarquables.

#### Identité.

Soit la transformation canonique suivante

$$S_2(q, P) = \sum_{\alpha=1}^s q_{\alpha} P_{\alpha} . \quad (2.75)$$

D'après les relations ci-dessus, l'on a

$$p_{\alpha} = \frac{\partial S_2}{\partial q_{\alpha}} = P_{\alpha} , \quad Q_{\alpha} = \frac{\partial S_2}{\partial P_{\alpha}} = q_{\alpha} , \quad H' = H + \frac{\partial S_2}{\partial t} = H . \quad (2.76)$$

On dit que  $S_2$  engendre la *transformation identité*.

#### Transformations ponctuelles.

Une transformation canonique, avec une fonction génératrice de la forme

$$S_2(q, P) = \sum_{\alpha=1}^s f_{\alpha}(q; t) P_{\alpha} , \quad (2.77)$$

fournit

$$p_{\alpha} = \frac{\partial S_2}{\partial q_{\alpha}} = \sum_{\beta=1}^s \left( \frac{\partial f_{\beta}(q; t)}{\partial q_{\alpha}} \right) P_{\beta} , \quad Q_{\alpha} = \frac{\partial S_2}{\partial P_{\alpha}} = f_{\alpha}(q; t) , \quad H' = H + \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (2.78)$$

et engendre une transformation ponctuelle, puisque les nouvelles coordonnées,  $\{Q_{\alpha}\}$ , ne dépendent pas des moments.

Les fonctions  $\{f_{\alpha}\}$  étant arbitraires, l'on en déduit que toute transformation ponctuelle est canonique (ce qui n'était pas évident).

## 2.7 Équation d'Hamilton-Jacobi.

Quelle que soit la transformation canonique considérée, la fonction génératrice,  $S$ , et les Hamiltoniens,  $H$  et  $H'$ , sont reliés par

$$H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} . \quad (2.79)$$

Cherchons des transformations canoniques,  $(Q, P)$ , dépendant du temps, telles que le nouveau Hamiltonien  $H'$  est nul, c'est-à-dire  $H' = 0$ . Dans ce cas, nous avons

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H'}{\partial P_\alpha} = 0, \quad \dot{P}_\alpha = -\frac{\partial H'}{\partial Q_\alpha} = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq s, \quad (2.80)$$

d'où les coordonnées  $\{P_\alpha\}$  et  $\{Q_\alpha\}$  sont données par

$$Q_\alpha = a_\alpha, \quad P_\alpha = b_\alpha, \quad 1 \leq \alpha \leq s, \quad (2.81)$$

où les  $\{a_\alpha\}$  et les  $\{b_\alpha\}$  sont des constantes dans le temps. Dans ce cas, on a la relation

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0, \quad (2.82)$$

ou encore

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H \left( \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_s}, q_1, \dots, q_s; t \right) = 0. \quad (2.83)$$

Cette équation aux dérivées partielles s'appelle *équation d'Hamilton-Jacobi*. Cette même équation dépend de  $s$  variables,  $(q_1, \dots, q_s)$ , des constantes  $(a_1, \dots, a_s)$  et du temps  $t$ . Sa solution est alors

$$S = S(q_1, \dots, q_s, a_1, \dots, a_s; t). \quad (2.84)$$

La forme de cette solution indique que

$$q_\alpha = q_\alpha(a_1, \dots, a_s, c_1, \dots, c_s; t), \quad 1 \leq \alpha \leq s, \quad (2.84a)$$

$$p_\alpha = p_\alpha(a_1, \dots, a_s, c_1, \dots, c_s; t), \quad 1 \leq \alpha \leq s, \quad (2.84b)$$

où  $(c_1, \dots, c_s)$  sont des constantes d'intégration.

Pour les systèmes conservatifs, l'énergie est une constante du mouvement, c'est-à-dire  $H = E$ . Dans ce cas, la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi est

$$S(q_1, \dots, q_s; t) = S_0(q_1, \dots, q_s) - Et, \quad (2.85)$$

où la fonction  $S_0(q_1, \dots, q_s)$  est solution de l'équation différentielle aux dérivées partielles implicite

$$H \left( \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S_0}{\partial q_s}, q_1, \dots, q_s \right) = E. \quad (2.85a)$$

Une remarque est que cette transformation canonique particulière indique, d'après l'expression (2.68), que

$$S(q_1, \dots, q_s; t) = \int_{t_i}^t \left( \sum_{\alpha=1}^s p_\alpha dq_\alpha - H dt \right) = \int_{t_i}^t L(q, \dot{q}; t) dt . \quad (2.86)$$

Donc, pour cette transformation canonique particulière, la fonction génératrice  $S$  coïncide avec l'action, avec des trajectoires,  $\{q_\alpha(t)\}$ , coïncidant à l'instant initial,  $t_i$ , c'est-à-dire que  $q_\alpha(t_i) = q_\beta(t_i)$ , pour  $\alpha \neq \beta$ . Mais, ces mêmes trajectoires sont ouvertes à l'instant considéré,  $t$ , c'est-à-dire  $q_\alpha(t) \neq q_\beta(t)$ .

La quantité

$$S_0(q) = \sum_{\alpha=1}^s \int_{q_i}^q p_\alpha dq_\alpha \quad (2.87)$$

est appelée *Action de Maupertuis*. Nous avons le

**Principe de Maupertuis.** *La trajectoire d'un système conservatif est déterminée par l'extrémisation de l'action réduite,  $S_0$ .*

Enfin, il faut noter que le formalisme d'Hamilton-Jacobi décrit ci-dessus est équivalent aux trois autres formalismes ceux de Newton, de Lagrange et d'Hamilton, autant choisir le formalisme adéquat pour la description de la dynamique des systèmes mécaniques.

## Quantification.

Le *Principe de Correspondance* stipule que le passage de la Mécanique Classique à la Mécanique Quantique se fait en remplaçant les positions,  $\{q_\alpha\}$ , et les impulsions,  $\{p_\alpha\}$ , par les opérateurs position,  $\{\hat{q}_\alpha\}$ , et les opérateurs impulsion,  $\{\hat{p}_\alpha\}$ , qui agissent sur l'espace d'Hilbert,  $\mathcal{E}_H$ .

Donc, toute grandeur physique classique,  $F(q_\alpha, p_\alpha)$ , définie sur l'espace de phase  $\mathcal{E}_P$  devient un opérateur,  $\hat{F}(\hat{q}_\alpha, \hat{p}_\alpha)$ , agissant sur  $\mathcal{E}_H$ . D'un autre côté, le crochet de Poisson devient un *commutateur*

$$\{F, G\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{G}] . \quad (2.88)$$

Ici,  $\hbar$  est la constante de Planck divisée par  $2\pi$  et  $i$  ( $i^2 = -1$ ) est l'imaginaire pur. L'équation d'évolution des grandeurs physiques (2.48) devient

$$i\hbar\dot{\hat{F}} = [\hat{F}, \hat{H}] + i\hbar\frac{\partial\hat{F}}{\partial t}, \quad (2.89)$$

ou encore *équation d'Heisenberg*. En particulier, l'on a les équations canoniques

$$i\hbar\dot{p}_\alpha = [\hat{p}_\alpha, \hat{H}], \quad i\hbar\dot{q}_\alpha = [\hat{q}_\alpha, \hat{H}], \quad \alpha = 1, \dots, s. \quad (2.90)$$

Nous signalons, enfin, que les propriétés précédentes du crochet de Poisson restent valables pour le commutateur. ■



# Chapitre 3

## Lois de conservation.

Le but est de rappeler, ici, les lois de conservation des systèmes mécaniques conservatifs dans le temps.

Ces lois sont une conséquence d'invariance sous des transformations en relation avec le temps et l'espace. Par exemple, sous une translation du temps, la quantité conservée est l'énergie mécanique totale, sous une translation d'espace, la quantité du mouvement totale est la quantité conservée, et sous une rotation d'espace, c'est le moment cinétique total qui est conservé. L'énergie mécanique totale, la quantité du mouvement totale et le moment cinétique total constituent les *sept intégrales premières du mouvement*.

La conservation de l'énergie mécanique totale signifie que le temps est *uniforme* (les résultats de l'expérience ne dépendent du temps).

La conservation de la quantité du mouvement totale est une conséquence de l'*homogénéité* de l'espace (les résultats de l'expérience ne dépendent pas de l'emplacement des appareils de mesure).

La conservation du moment cinétique total signifie que l'espace est *isotrope* (les résultats de l'expérience ne dépendent pas de l'orientation des appareils de mesure).

Généralement, l'on a un *théorème de Noether* qui stipule que *toute symétrie continue du Lagrangien entraîne une quantité physique conservée*.

### 3.1 Variables cycliques.

La forme générale des équations du mouvement Lagrangiennes (1.194), du Chapitre 1, montre clairement que le choix des coordonnées,  $(q_1, \dots, q_s)$ , adaptées à la symétrie du problème considéré, fait sortir d'une manière naturelle des lois de conservation.

Si le Lagrangien dépend de la vitesse,  $\dot{q}_k$ , d'une coordonnée mais pas de la coordonnée,  $q_k$ , même, nous aurons, pour cette coordonnée généralisée,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0, \quad (3.1)$$

ou bien

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \text{Constante}. \quad (3.2)$$

Il en ressort que le moment conjugué,  $p_k$ , associé à la coordonnée généralisée,  $q_k$ , dont le Lagrangien n'en dépend pas, est une quantité conservée dans le temps. La coordonnée,  $q_k$ , est appelée *variable cyclique*.

**Exemples 1.** *Oscillateur harmonique en deux dimensions.*

Le Lagrangien de ce système est

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2} m \Omega^2 (x^2 + y^2). \quad (3.3)$$

Ici,  $(x, y)$  est la position instantanée de l'oscillateur,  $m$  est sa masse et  $\Omega$  est sa pulsation. Notons, de passage, que l'énergie potentielle associée à ce système est centrale.

En coordonnée polaires,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (3.4)$$

ce Lagrangien devient

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} m \Omega^2 r^2. \quad (3.5)$$

L'on constate bien que le Lagrangien ne dépend pas de l'angle polaire,  $\varphi$ . Donc, ce dernier est une variable cyclique. Comme conséquence, le moment conjugué associé,  $p_\varphi$ , est conservée dans le temps,

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{Constante}. \quad (3.6)$$

En fait, la quantité  $p_\varphi$  représente le moment cinétique de l'oscillateur bidimensionnel.

## 3.2 Conservation de l'énergie mécanique totale.

### 3.2.1 Démonstration à travers le Lagrangien.

Pour ce faire, notons, d'abord, que le Lagrangien d'un système conservatif quelconque ne dépend pas explicitement du temps, c'est-à-dire

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 . \quad (3.7)$$

Evidemment, cela n'est vrai que si toutes les forces appliquées au système dérivent d'une énergie potentielle.

Pour démontrer qu'une invariance sous une translation du temps entraîne la conservation de l'énergie mécanique, il suffit de considérer une translation du temps infinitésimale,

$$t \rightarrow t + \epsilon , \quad (3.8)$$

où  $\epsilon$  est un petit paramètre homogène à un temps. Sous cette transformation, le Lagrangien devient

$$L \rightarrow L + \delta L , \quad (3.9)$$

avec la variation

$$\delta L = L(q_1(t + \epsilon), \dots, q_s(t + \epsilon), \dot{q}_1(t + \epsilon), \dots, \dot{q}_s(t + \epsilon); t + \epsilon) - L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s; t) . \quad (3.10)$$

L'étape suivante consiste à écrire, au premier ordre en  $\epsilon$ ,

$$q_\alpha(t + \epsilon) \simeq q_\alpha(t) + \epsilon \dot{q}_\alpha(t) , \quad \dot{q}_\alpha(t + \epsilon) \simeq \dot{q}_\alpha(t) + \epsilon \ddot{q}_\alpha(t) . \quad (3.11)$$

Donc, après un développement de Taylor du Lagrangien, au premier ordre en  $\epsilon$ , l'on obtient

$$\delta L = \epsilon \left[ \sum_{\alpha=1}^s \left( \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \ddot{q}_\alpha \right) + \frac{\partial L}{\partial t} \right] . \quad (3.12)$$

En notant la condition (3.7) et tenant compte des équations d'Euler-Lagrange (1.194), du chapitre précédent, l'on a

$$\delta L = \epsilon \left[ \frac{d}{dt} \left( \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) \right) \right] . \quad (3.13)$$

Mais

$$\delta L = L(t + \epsilon) - L(t) \simeq \epsilon \frac{dL}{dt} . \quad (3.14)$$

Donc, l'on a

$$\epsilon \frac{d}{dt} \left[ \left( \sum_{\alpha=1}^s \left( \dot{q}_\alpha \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - L \right) \right] = \epsilon \frac{dH}{dt} = 0 . \quad (3.15)$$

Ceci a lieu quelle que soit la valeur du paramètre infinitésimal  $\epsilon$ , et l'Hamiltonien est alors une quantité conservée le long de la trajectoire dans l'espace de phase,

$$\frac{dH}{dt} = 0 . \quad (3.16)$$

### 3.2.2 Démonstration à travers le formalisme canonique.

Pour un système conservatif, la fonction d'Hamilton,  $H$ , ne dépend pas explicitement du temps :  $\partial H / \partial t = 0$ . L'utilisation de l'équation d'évolution de  $H$ ,

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0 \quad (3.17)$$

implique que  $H$  est une *intégrale première du mouvement*.

## Conservation de la quantité du mouvement totale.

### 3.2.3 Démonstration à travers le Lagrangien.

Considérons, par exemple, une fonction de Lagrange, en coordonnées cartésiennes, de la forme

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = T(\dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (3.18)$$

où le potentiel est invariant par rapport à une translation globale de toutes les positions,

$$U(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \dots, \mathbf{r}_N + \mathbf{a}) = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) . \quad (3.19)$$

Comme le vecteur de translation  $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^d$  est supposé constant, les vitesses seront inchangées. Notons que la condition (3.19) est vérifiée pour des interactions (à 2 corps, 3 corps et *plus*) qui ne dépendent que des positions relatives des particules.

Pour le raisonnement qui va suivre, il suffira de considérer une translation infinitésimale d'un (petit) vecteur,  $\delta\mathbf{a}$ ,

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{a} , \quad 1 \leq i \leq N . \quad (3.20)$$

Sous cette transformation d'espace, la variation du Lagrangien est

$$\delta L = \delta\mathbf{a} \cdot \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \right) = 0 . \quad (3.21)$$

L'égalité précédente a lieu pour toute variation  $\delta\mathbf{a}$ . En utilisant les équations d'Euler-Lagrange, on peut donc conclure que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) = 0 . \quad (3.22)$$

Donc l'impulsion totale,  $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i$ , est conservée dans le temps,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i \right) = 0 . \quad (3.23)$$

### 3.2.4 Démonstration à travers le formalisme canonique.

Considérons un système de particules isolé, d'impulsion totale  $\mathbf{P} = (P_x, P_y, P_z)$ , avec

$$P_x = \sum_{i=1}^N p_{xi} , \quad P_y = \sum_{i=1}^N p_{yi} , \quad P_z = \sum_{i=1}^N p_{zi} . \quad (3.24)$$

Raisons sur la composante  $P_x$ . Nous avons

$$\frac{dP_x}{dt} = \sum_{i=1}^N \{p_{xi}, H\} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial H}{\partial x_i} = - \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} . \quad (3.25)$$

Nous avons supposé qu'il n'y a pas de potentiel central, car celui-ci brise l'invariance par translation dans l'espace. Notons que l'énergie potentielle,  $U$ , ne dépend que des distances relatives entre particules,  $\{r_{kl}\}$ , avec

$$r_{kl} = \|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_l\| = \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2 + (z_k - z_l)^2} . \quad (3.25a)$$

Donc, l'on a

$$\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{k>l} \sum_i \frac{\partial r_{kl}}{\partial x_i} \frac{\partial U}{\partial r_{kl}} = \sum_{k>l} \sum_i \frac{x_k \delta_{ki} - x_l \delta_{li}}{r_{kl}} \frac{\partial U}{\partial r_{kl}} = 0 . \quad (3.25b)$$

Notons l'identité

$$\sum_i \frac{x_k \delta_{ki} - x_l \delta_{li}}{r_{kl}} = 0 . \quad (3.25c)$$

Soit

$$\frac{dP_x}{dt} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial x_i} = 0 . \quad (3.26)$$

La composante  $P_x$  est donc une *intégrale première du mouvement*. Il en est de même pour  $P_y$  et  $P_z$ . Le fait que  $U$  ne dépend que des distances relatives traduit l'invariance par translation dans l'espace.

### 3.3 Conservation du moment cinétique total.

#### 3.3.1 Démonstration à travers le Lagrangien.

Nous considérons, maintenant, un potentiel qui est invariant sous une rotation globale de toutes les positions,

$$U(\mathcal{D}\mathbf{r}_1, \dots, \mathcal{D}\mathbf{r}_N) = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (3.27)$$

où  $\mathcal{D}$  est une rotation (une transformation orthogonale) :  $\mathcal{D}^T \mathcal{D} = I$ .

Il suffira de raisonner sur une rotation infinitésimale quelconque des positions qui peut être écrite sous la forme

$$\delta \mathbf{r}_i = \delta \boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i , \quad 1 \leq i \leq N , \quad (3.28)$$

où  $\delta\boldsymbol{\varphi}$  représente le vecteur rotation “virtuelle” dans un repère fixe du laboratoire qui reste parallèle à l’axe de rotation. Son module,  $\delta\varphi$ , étant l’angle de rotation infinitésimale. L’accroissement de la vitesse est donc

$$\delta\mathbf{v}_i = \delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{v}_i, \quad 1 \leq i \leq N. \quad (3.29)$$

A cause de la propriété d’invariance (3.27), l’on obtient

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left( \delta\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} + \delta\mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) = \sum_{i=1}^N \left( (\delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i) \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} + (\delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{v}_i) \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_i} \right) = 0, \quad (3.30)$$

Remplaçons les  $\partial L / \partial \mathbf{v}_i$  par les  $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$  et les  $\partial L / \partial \mathbf{r}_i$  par les  $\dot{\mathbf{p}}_i$ , compte tenu des équations d’Euler-Lagrange. Nous obtenons alors

$$\delta L = \sum_{i=1}^N \left( \dot{\mathbf{p}}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{r}_i) + \mathbf{p}_i \cdot (\delta\boldsymbol{\varphi} \wedge \mathbf{v}_i) \right) = \delta\boldsymbol{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^N \left( \mathbf{r}_i \wedge \dot{\mathbf{p}}_i + \mathbf{v}_i \wedge \mathbf{p}_i \right) = 0. \quad (3.31)$$

Ici, nous avons utilisé la propriété mathématique du produit mixte :  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a})$ . Si on demande que le potentiel soit invariant par rapport à une rotation quelconque d’angle,  $\delta\varphi$ , et il suit que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_i \right) = 0. \quad (3.32)$$

Donc, le moment cinétique total,  $\mathbf{L}$ , est conservée dans le temps,

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_i \right) = \mathbf{0}. \quad (3.33)$$

Notons que si le potentiel n’est invariant que sous une rotation, autour d’un axe fixe en direction d’un vecteur  $\mathbf{n}$ , la vitesse angulaire de la rotation virtuelle, exprimée par la matrice de rotation  $\mathcal{D}$ , a la forme  $\delta\boldsymbol{\varphi} = \delta\varphi \mathbf{n}$ . Il suit donc de l’expression auxiliaire (3.31) que la projection du moment cinétique total sur  $\mathbf{n}$  est conservée dans le temps,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{L} = \mathbf{n} \cdot \left( \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \wedge \mathbf{v}_i \right) = \text{Constante}. \quad (3.34)$$

### 3.3.2 Démonstration à travers le formalisme canonique.

#### Cas particulier.

D'entrée de jeu, considérons une particule de position,  $(x, y, z)$ , et d'impulsion,  $(p_x, p_y, p_z)$ , qui est soumise à un potentiel central,  $U(r)$ , avec  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . La fonction d'Hamilton associée est alors

$$H = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z) . \quad (3.35)$$

Raisonnons, d'abord, sur la troisième composante du moment cinétique

$$L_z = xp_y - yp_x . \quad (3.36)$$

Un simple calcul conduit au crochet de Poisson de  $L_z$  avec  $H$ ,

$$\{L_z, H\} = y \frac{\partial U}{\partial x} - x \frac{\partial U}{\partial y} . \quad (3.37)$$

Nous pouvons réécrire la relation précédente autrement en introduisant les coordonnées polaires

$$x = r \cos \varphi , \quad y = r \sin \varphi . \quad (3.38)$$

Notons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial U}{\partial y} = -r \sin \varphi \frac{\partial U}{\partial x} + r \cos \varphi \frac{\partial U}{\partial y} \\ &= x \frac{\partial U}{\partial y} - y \frac{\partial U}{\partial x} . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Soit

$$\{L_z, H\} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} . \quad (3.40)$$

Or un potentiel central est indépendant de  $\varphi$  et n'est fonction que de la distance  $r$ , par suite

$$\frac{dL_z}{dt} = \{L_z, H\} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 . \quad (3.41)$$

Donc,  $L_z$  est une intégrale première du mouvement. Il en est de même pour les deux premières composantes,  $L_x$  et  $L_y$ , du moment cinétique total,  $\mathbf{L} = (L_x, L_y, L_z)$ .



**Cas général.**

La conservation du moment cinétique total intervient, également, dans le cas d'un système de particules isolé. Pour ce système, la fonction d'Hamilton est donnée par

$$H = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2m_i} (p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2) + U(x_i, y_i, z_i) \right\} + V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (3.42)$$

où  $U$  est un potentiel central, et

$$V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{i>j} W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (3.43)$$

désigne l'énergie d'interaction inter-particules (à deux corps). L'indice  $i$  identifie les particules. Comme avant, nous allons raisonner sur la composante,  $L_z$ , du moment cinétique

$$L_z = \sum_{i=1}^N (x_i p_{y_i} - y_i p_{x_i}) . \quad (3.44)$$

Calculons le crochet de Poisson de  $L_z$  avec  $H$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dL_z}{dt} &= \{L_z, H\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \left( \frac{\partial L_z}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_{x_i}} - \frac{\partial L_z}{\partial p_{x_i}} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L_z}{\partial y_i} \frac{\partial H}{\partial p_{y_i}} - \frac{\partial L_z}{\partial p_{y_i}} \frac{\partial H}{\partial y_i} \right) \right\} . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Tout calcul fait, nous trouvons

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum_{i=1}^N \left\{ \left( y_i \frac{\partial U}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) + \left( y_i \frac{\partial V}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial V}{\partial y_i} \right) \right\} . \quad (3.46)$$

Introduisons les coordonnées cylindriques  $(r_i, \varphi_i, z_i)$ , avec

$$x_i = r_i \cos \varphi_i , \quad y_i = r_i \sin \varphi_i . \quad (3.47)$$

Nous avons alors

$$\frac{dL_z}{dt} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} . \quad (3.48)$$

Notons que  $V$  ne dépend que des distances relatives entre particules,

$$\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\| = \sqrt{\mathbf{r}_i^2 + \mathbf{r}_j^2 - 2\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j} , \quad (3.49)$$

avec

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j = z_i z_j + r_i r_j \cos(\varphi_i - \varphi_j) . \quad (3.50)$$

Cette relation montre clairement que  $V$  ne dépendant que des angles relatives  $\varphi_i - \varphi_j$ . Il est alors facile de voir que

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0 . \quad (3.51)$$

Comme  $\partial U / \partial \varphi_i = 0$ , alors  $dL_z / dt = 0$ . Donc,  $L_z$  est une intégrale première du mouvement. Il en est de même pour les premières composantes  $L_x$  et  $L_y$ . Le fait que  $U$  et  $V$  ne sont fonctions que des distances relatives inter-particules traduit l'invariance par rotation d'espace.

### 3.4 Lois d'échelle et similitude.

Considérons des systèmes de particules, pour lesquels l'énergie potentielle est une fonction homogène des positions, c'est-à-dire

$$U(\lambda \mathbf{r}_1, \dots, \lambda \mathbf{r}_N) = \lambda^h U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (3.52)$$

où  $\lambda > 0$  est un *facteur d'échelle* et  $h \in \mathbf{R}$  est le degré d'homogénéité.

Avec les transformations simultanées

$$\mathbf{r}_i \rightarrow \lambda \mathbf{r}_i \equiv \mathbf{r}'_i , \quad 1 \leq i \leq N , \quad (3.53)$$

$$t \rightarrow \mu t \equiv t' , \quad \mu > 0 , \quad (3.54)$$

l'énergie cinétique est multipliée par un facteur  $(\lambda/\mu)^2$ , et l'énergie potentielle, par un facteur  $\lambda^h$ . Nous voyons que le choix  $(\lambda/\mu)^2 = \lambda^h$ , ou encore  $\mu = \lambda^{1-h/2}$ , mène au changement suivant du Lagrangien

$$L \rightarrow \lambda^h L , \quad (3.55)$$

donc à des équations du mouvement géométriquement similaires.

Si  $\tau$  est le *temps caractéristique* du mouvement et  $l$  est l'*amplitude spatiale* correspondante, on aura alors

$$\frac{\tau'}{\tau} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{1-h/2}, \quad (3.56)$$

où  $\tau'$  et  $l'$  sont les quantités correspondantes du système décrit par les variables  $t'$  et  $\mathbf{r}'_i$ .

Afin d'illustrer l'utilité des lois d'échelle dérivées par les équations de Lagrange, nous considérons quelques applications.

(i) Pour un potentiel quadratique, l'on a  $h = 2$ , et par conséquent

$$\frac{\tau'}{\tau} = 1. \quad (3.57)$$

Donc, le temps caractéristique du mouvement ne dépend pas de son amplitude. Un exemple typique est celui d'une oscillation en une dimension, tel que  $U(x) = kx^2/2$ , avec  $k > 0$ . Dans ce cas, l'équation du mouvement est :  $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ , avec  $\omega = \sqrt{k/m}$ . La solution est périodique,  $x(t) = x(0) \cos(\omega t) + (\dot{x}(0)/\omega) \sin(\omega t)$ , et la période d'oscillations,  $T = 2\pi/\omega$ , ne dépend effectivement pas de son amplitude.

(ii) Si le potentiel est une fonction linéaire des positions, l'on a  $h = 1$ , et

$$\frac{\tau'}{\tau} = \sqrt{\frac{l'}{l}}. \quad (3.58)$$

C'est le cas de la chute libre près de la surface de la terre. Dans ce cas,  $U(z) = -mgz$ , où  $g$  est l'accélération de la pesanteur, et l'équation du mouvement est :  $\ddot{z}(t) = -g$ , avec la solution  $z(t) = z(0) - gt^2/2$ . Posons  $\dot{z}(0) = 0$  et  $z(0) = l$ . Le temps de chute,  $\tau$ , est défini par :  $z(\tau) = 0$ . Donc, l'on a  $\tau = \sqrt{2l/g}$ . Si l'on compare les temps  $\tau$  et  $\tau'$ , pour une chute libre à partir des hauteurs  $l$  et  $l'$ , respectivement, on obtient effectivement l'égalité (3.58).

(iii) Considérons, en dernier lieu, le mouvement d'une planète de masse  $M$ , dans un potentiel gravitationnel d'une étoile positionnée à  $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ , et dont la masse est supposée infinie. Si  $\mathbf{r}$  est la position de la planète, son énergie potentielle est  $U(r) = Gmr^{-1}$ , où  $G$  est la *constante gravitationnelle*. On voit que  $U$  est une fonction homogène de degré  $h = -1$ , et par conséquent

$$\frac{\tau'}{\tau} = \left(\frac{l'}{l}\right)^{3/2}. \quad (3.59)$$

Selon l'Astronome Kepler, le mouvement des planètes autour du soleil est elliptique. La relation (3.59) exprime la fameuse troisième loi de Kepler : *Le carré de la période sidérale d'une planète est directement proportionnelle au cube du demi-grand axe,  $a$ , de sa trajectoire elliptique autour du soleil.*

### 3.5 Théorème de viriel.

En coordonnées cartésiennes, l'énergie cinétique est une fonction quadratique des positions,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2, \quad (3.60)$$

et le Lagrangien a la forme

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N). \quad (3.61)$$

En termes de quantités du mouvement,  $\mathbf{p}_i = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$ , l'on a

$$\sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{r}}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} = 2T = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right\} - \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \dot{\mathbf{p}}_i. \quad (3.62)$$

L'utilisation des équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}_i} \quad (3.63)$$

montre que  $\dot{\mathbf{p}}_i = -\partial U / \partial \mathbf{r}_i$ , soit

$$2T = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right\} + \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (3.64)$$

A présent, nous prenons la moyenne temporelle de cette expression sur une période infinie. Rappelons que pour une fonction,  $f(t)$ , intégrable quelconque, la *moyenne temporelle* est définie par

$$\bar{f} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t) dt. \quad (3.65)$$

Remarquons que

$$\overline{\frac{df}{dt}} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{f(\tau) - f(0)}{\tau} = 0 . \quad (3.66)$$

En fait, cette propriété est vraie pour les fonctions bornées. Partant des forces “raisonnables” qui agissent sur le système considéré, on aura alors

$$2\overline{T} = \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} . \quad (3.67)$$

Cette égalité est connue sous le nom du *théorème de viriel*.

Si l'énergie potentielle est une fonction homogène de degré  $h$ , elle vérifie la relation d'Euler

$$\sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = hU(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) , \quad (3.68)$$

et avec la relation (3.67), nous avons

$$2\overline{T} = h\overline{U} . \quad (3.69)$$

Comme l'énergie est conservée pour le système considéré,  $T + U = E = \text{Constante}$ , nous pouvons conclure que

$$\overline{T} = \frac{h}{h+2} E , \quad \overline{U} = \frac{2}{h+2} E . \quad (3.70)$$

Pour un potentiel quadratique ( $h = 2$ ), on aura alors  $\overline{T} = \overline{U}$ , et pour un potentiel de Coulomb ou un potentiel de gravitation ( $h = -1$ ), on trouvera  $\overline{U} = -2\overline{T}$ .

### 3.6 Brisure de symétrie.

Dans certaines conditions, les systèmes mécaniques peuvent perdre intégralement ou en parties leurs symétries. A titre d'exemple, nous pouvons citer les systèmes dissipatifs, sujet de forces de frottement, lorsqu'ils sont en contact avec des milieux solides ou liquides visqueux.

Sur le plan modélisation de la dynamique, les forces de frottement, responsables du phénomène de dissipation d'énergie, sont supposées ne dépendre que des vitesses des différentes composantes en friction.

Ces effets conduisent alors à une perte d'énergie, et sur le plan formel, ils brisent la symétrie des équations de Lagrange, sous la transformation :  $t \rightarrow -t$  (*symétrie T*). Ceci indique la présence de *phénomènes irréversibles*.

Afin d'illustrer, quantitativement, le phénomène de dissipation, nous considérons une particule (point matériel) qui subit l'action d'une force de friction,  $\mathbf{F}(\dot{\mathbf{r}})$ , dont l'amplitude croît avec la vitesse. Dans le cas le plus simple, l'on suppose que l'amplitude croît d'une manière linéaire avec la vitesse,

$$F(\dot{\mathbf{r}}) = -m\gamma\dot{\mathbf{r}}, \quad (3.71)$$

où  $\gamma$  est le *coefficient de friction* ayant les dimensions de l'inverse d'un temps. En fait,  $\gamma^{-1}$  représente le *temps de relaxation* qui peut être interprété comme le temps au bout duquel le mouvement de la particule est complètement amorti.

Si, en plus, la particule subit l'action d'une force extérieure dérivant d'une énergie potentielle,  $U(\mathbf{r})$ , alors son équation du mouvement est

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} - m\gamma\dot{\mathbf{r}}. \quad (3.72)$$

En multipliant scalairement cette équation par  $\dot{\mathbf{r}}$ , l'on voit que

$$\left(m\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}\right) \cdot \dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2 + U(r)\right) = -m\gamma\dot{\mathbf{r}}^2, \quad (3.73)$$

ou bien

$$\frac{d}{dt}(T + U) = -2\gamma T < 0. \quad (3.74)$$

L'expression précédente montre bien une décroissance permanente de l'énergie mécanique totale,  $E = T + U$ . On note, également, que l'équation du mouvement (3.72) n'est pas invariante par la transformation  $t \rightarrow -t$  (inversion du sens du temps). Donc, il s'agit d'une *brisure de symétrie* qui fait qu'en présence d'une force de friction, l'énergie mécanique totale n'est plus conservée, et elle décroît plutôt avec le temps.

Notons, enfin, que le raisonnement précédent s'étend aisément à un système à plusieurs particules subissant des frictions. ■

# Chapitre 4

## Oscillations des systèmes linéaires.

Le but de ce chapitre est l'étude du mouvement des *systèmes oscillants linéaires*, pour lesquels un *seul* degré de liberté est suffisant pour décrire complètement leur dynamique. Les systèmes à plusieurs degrés de liberté seront traités au Chapitre 5.

Finalement, pour chaque système mécanique oscillant rencontré, nous étudions le bilan énergétique correspondant et donnons l'analogie électrique, plus exactement le circuit RLC équivalent.

### 4.1 Systèmes linéaires libres.

#### 4.1.1 Équation du mouvement.

Le Lagrangien associé est tel que

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2 - U(q) , \quad (4.1)$$

où  $m(q)$  est une fonction de la *coordonnée généralisée*,  $q$ . Si  $q$  est une coordonnée cartésienne (disons  $x$ ), alors le Lagrangien précédent devient

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x) . \quad (4.2)$$



Discutons, à présent, l'allure du potentiel d'interaction,  $U(q)$ , comme fonction de la coordonnée généralisée,  $q$ .

Soit un système à un seul degré de liberté,  $q$ . Par exemple,  $q = x$  (position), pour un ressort, et  $q = \varphi$  (angle d'écartement), pour un pendule simple. Soit  $U(q)$  un potentiel extérieur s'exerçant sur le système. La position d'équilibre, notée  $q_0$ , lorsqu'elle existe, est celle annulant la dérivée première de ce potentiel, c'est-à-dire

$$\left. \frac{dU}{dq} \right|_{q=q_0} = 0 . \quad (4.3)$$

Nous avons alors *trois* situations, en examinant le signe de la dérivée seconde du potentiel à la position d'équilibre (Figures 4.1 à 4.3) :

- (i) La position d'équilibre  $q_0$  est *stable* si :  $\left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_0} > 0$ .
- (ii) La position d'équilibre  $q_0$  est *instable* si :  $\left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_0} < 0$ .
- (iii) La position d'équilibre  $q_0$  est *métastable* si :  $\left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_0} = 0$ .

Maintenant, supposons que la position d'équilibre  $q_0$  est stable et faisons un développement du potentiel d'interaction autour de cette position,

$$U(q) = U(q_0) + \frac{1}{2}k(q - q_0)^2 + \dots , \quad (4.4)$$

avec la notation

$$k = \left. \frac{d^2U}{dq^2} \right|_{q=q_0} > 0 . \quad (4.5)$$

La constante  $k$  dépend, naturellement, des caractéristiques du système. Le premier terme  $U(q_0)$  est sans intérêt physique, et sera donc ignoré. Le second est le terme *harmonique*, et les termes d'ordres supérieurs ignorés constituent les termes *anharmoniques*. Aussi, nous développons le coefficient  $m(q)$  autour de  $q = q_0$  et nous ne gardons que le terme d'ordre *zéro*,  $m_0 \equiv a(q_0)$ , si l'on veut avoir un Lagrangien quadratique dans la variable  $q - q_0$  et de sa dérivée première par rapport au temps. Ainsi, la constante  $m_0$  s'identifie avec la masse  $m$ , pour un ressort, et au produit  $ml^2$ , pour un pendule ( $l$  étant sa longueur).

Si l'on pose  $x = q - q_0$ , qui est l'écart de la coordonnée généralisée,  $q$ , à sa valeur d'équilibre,  $q_0$ , alors le Lagrangien devient

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m_0\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2 . \quad (4.6)$$

L'application de l'équation d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (4.7)$$

donne l'équation du mouvement de l'oscillateur harmonique, qui n'est valable que pour de très petits écarts autour de la position d'équilibre stable ( $x = 0$ ),

$$m_0\ddot{x} + kx = 0 , \quad (4.8)$$

ou bien

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 , \quad (4.9)$$

où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}} \quad (4.10)$$

est la *pulsation*. La *période* des oscillations autour de la position d'équilibre stable est donnée par

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}} . \quad (4.11)$$

(L'indice 0 est pour *oscillations libres*).

La solution de l'équation différentielle du second ordre (4.8) (à coefficients constants) est sinusoïdale et est donnée par

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t - \varphi) , \quad (4.12)$$

ou d'une manière équivalente,

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) . \quad (4.13)$$

L'amplitude  $a$  et la phase  $\varphi$  ou les amplitudes  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions initiales (position et vitesse initiales). Nous avons les relations évidentes

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \tan \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}, \quad (4.14)$$

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega_0}. \quad (4.15)$$

**Remarque.** La période d'oscillations est indépendante de l'amplitude. Comme nous verrons plus loin, ceci ne sera pas le cas pour les oscillations amorties ou forcées ou les deux.

**Définition.** Un oscillateur harmonique est un oscillateur dont l'évolution dans le temps peut être décrite par une *fonction sinusoïdale*, pour laquelle la fréquence des oscillations ne dépend que des caractéristiques du système, à travers les constantes  $m_0$  et  $k$ .

Finalement, l'allure de la trajectoire est représentée sur la Figure 4.4.

### 4.1.2 Diagramme de phase position-vitesse.

L'énergie mécanique totale,  $E_m$ , est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,

$$E_m = \frac{1}{2}m_0\dot{x}^2 + \frac{k}{2}x^2 = \frac{k}{2}a^2, \quad (4.16)$$

ou encore

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dot{x}^2}{(a\omega_0)^2} = 1. \quad (4.17)$$

Le diagramme de phase dans le plan *position-vitesse* est alors une *ellipse* de demi-axes  $a$  et  $a\omega_0$ .

### 4.1.3 Bilan énergétique.

Reprenons l'expression de la solution (4.12) et calculons les énergies cinétique,  $E_c$ , et potentielle,  $E_p$ , associées. Nous trouvons que

$$E_c(t) = \frac{k}{2}a^2 \sin^2(\omega_0 t - \varphi), \quad E_p(t) = \frac{k}{2}a^2 \cos^2(\omega_0 t - \varphi). \quad (4.18)$$

L'énergie mécanique totale est alors une constante dans le temps et vaut

$$E_m = E_c(t) + E_p(t) = \frac{k}{2}a^2 . \quad (4.19)$$

Nous démontrons aisément que les valeurs moyennes temporelles (sur une période) des énergies cinétique et potentielle sont données par

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_c(t) dt = \frac{k}{4}a^2 , \quad \langle E_p \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E_p(t) dt = \frac{k}{4}a^2 . \quad (4.20)$$

Nous avons utilisé les résultats

$$\int_0^T \sin^2(\omega_0 t - \alpha) dt = \int_0^T \cos^2(\omega_0 t - \alpha) dt = \frac{T}{2} . \quad (4.21)$$

Donc,

$$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{\langle E_m \rangle}{2} = \frac{k}{4}a^2 . \quad (4.22)$$

Notons que ce résultat pourrait être retrouvé, en appliquant le *théorème de viriel* (relations (3.70) du Chapitre 3), sachant que le degré d'homogénéité de l'énergie potentielle étant  $h = 2$ .

#### 4.1.4 Ressorts.

**Loi de Hooke.** Considérons un ressort de constante de raideur,  $k$ , et de longueur à vide,  $l_0$ , sur lequel on accroche une masse  $m$ . L'ensemble est placé sur un support horizontale rigide, où le mouvement de la masse est supposé sans frottements. L'autre extrémité de la masse est accrochée à un support fixe (Figure 4.5).

Le ressort libre est décrit sur la Figure 4.5a ( $f = 0$ ), c'est-à-dire en l'absence de la force. La force de rappel subie par la masse  $m$  est positive ( $f > 0$ ) si  $x < 0$  (Figure 4.5b), et négative ( $f < 0$ ) si  $x > 0$  (Figure 4.5c). Nous avons donc l'expression suivante pour cette force,

$$f = -kx . \quad (4.23)$$

C'est la *loi de Hooke*. Ici,  $x = l - l_0$  est l'allongement du ressort, où  $l$  est sa longueur instantanée et  $l_0$  est sa longueur à vide.

Posons

$$k = \frac{A}{l_0}, \quad (4.24)$$

où  $A$  est le *module d'Young*. Nous écrivons

$$f = -A \frac{x}{l_0}. \quad (4.25)$$

Ici,

$$\frac{x}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad (4.25a)$$

est l'*allongement relatif* du ressort.

**Ressort vertical.** Considérons un ressort vertical auquel on attache une masse,  $m$ , et qui est représenté sur la Figure 4.6.

En plus de la force de rappel,  $F = -kx$ , il est soumis à son poids,  $P = mg$ . Son équation du mouvement est alors

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (4.26)$$

La variable  $x = X - X_0$  représente l'écart de la longueur instantanée du ressort,  $X$ , à sa longueur à l'équilibre,  $X_0$ , donnée par

$$0 = mg - kX_0. \quad (4.26a)$$

L'équation du mouvement (4.26) est celle d'un oscillateur harmonique pour la grandeur  $x = X - X_0$ . En fait, la pulsation reste la même,  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , seul le *point de fonctionnement* qui est décalé.

**Association des ressorts verticaux.** Il est bien établi que des ressorts (verticaux) associés en série ou en parallèle, sont équivalents à des ressorts uniques.

Ainsi, deux ressorts *montés en série*, de constantes de raideur respectives,  $k_1$  et  $k_2$ , sont équivalents à un seul ressort, de constante de raideur

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}. \quad (4.27)$$

Et si ces deux ressorts sont *montés en parallèle*, le ressort équivalent est de constante de raideur

$$k_p = k_1 + k_2 . \quad (4.28)$$

Dans le cas général de  $n$  ressorts verticaux, de constantes de raideur respectives,  $(k_1, \dots, k_n)$ , montés en série ou en parallèle, les relations précédentes se généralisent aisément, et l'on a

$$\frac{1}{k_s} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} , \quad \text{Montage en série} , \quad (4.29)$$

et

$$k_p = \sum_{i=1}^n k_i , \quad \text{Montage en parallèle} . \quad (4.30)$$

Finalement, notons le parallélisme avec les associations des condensateurs (en électricité) en série ou en parallèle.

### 4.1.5 Pendule simple.

Soit un pendule simple (Figure 1.2 du Chapitre 1), formé d'un fil inextensible de longueur,  $l$ , et d'angle d'écartement,  $\varphi$  (avec la verticale), sur lequel est accrochée une masse  $m$ . Nous désignons par  $\varphi_M$ , l'angle d'écartement maximal du pendule (amplitude).

Son Lagrangien est

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - U(\varphi) , \quad (4.31)$$

avec l'énergie potentielle

$$U(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi) . \quad (4.32)$$

L'équation du mouvement est

$$l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0 . \quad (4.33)$$

Il est facile de voir que la position d'équilibre stable minimisant ce potentiel est  $\varphi_0 = 0$  (sur une période). La dérivée seconde du potentiel à cette position est

$$\ddot{U}(0) = mgl > 0 . \quad (4.34)$$

Donc, pour de très faible oscillations ( $\varphi \ll 1$ ), l'on a

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mgl\varphi^2 \quad (4.35)$$

qui est un cas particulier du Lagrangien le plus général discuté avant, avec  $m_0 = ml^2$  et  $k = mgl$ . Pour les très faibles oscillations, l'équation du mouvement devient

$$l\ddot{\varphi} + g\varphi = 0, \quad (4.36)$$

ou encore

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (4.37)$$

avec la pulsation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.38)$$

La période du mouvement est alors

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.39)$$

Le fait que la période dépend seulement des caractéristiques du pendule, à travers les paramètres  $l$  et  $g$ , et non de son amplitude,  $\varphi_M$ , pour de faibles oscillations, ce système est bel et bien un oscillateur harmonique.

La solution est sinusoïdale

$$\varphi(t) = \varphi_M \cos(\omega_0 t - \varphi_0), \quad (4.40)$$

où l'amplitude  $\varphi_M$  et la phase  $\varphi_0$  sont déterminées par les conditions initiales.

Notons, finalement, que le bilan énergétique d'un pendule simple est un cas particulier de l'étude la plus générale faite avant, avec  $m_0 = ml^2$  et  $k = mgl$ .

#### 4.1.6 Oscillateurs électriques.

Considérons un circuit électrique en *court-circuit*, c'est-à-dire en l'absence de source de tension, formé par un condensateur, de charge  $Q$  et de capacité  $C$ , et par une bobine, d'inductance  $L$  (Figure 4.7).

Le bilan de tension est

$$L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 , \quad (4.41)$$

avec le courant

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} \quad (4.42)$$

traversant la bobine et le condensateur. Donc, l'on a

$$L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 . \quad (4.43)$$

Notons que le Lagrangien associé est

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}L\dot{Q}^2 - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} . \quad (4.44)$$

Le terme  $Q^2/2C$  n'est rien d'autre que l'énergie électrostatique (énergie potentielle) emmagasinée par le condensateur, de charge  $Q$  et de capacité  $C$ . La solution de l'équation différentielle (4.43) est immédiate,

$$Q(t) = Q_M \cos(\omega_0 t - \varphi_0) , \quad (4.45)$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} , \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC} . \quad (4.46)$$

Notons que le bilan énergétique d'un circuit LC en court-circuit est un cas particulier de l'étude la plus générale faite précédemment, avec  $m_0 = L$  et  $k = 1/C$ . Aussi, soulignons que la période d'oscillations ne dépend que des paramètres  $C$  et  $L$  du circuit et non de l'amplitude associée. Pour cette raison, ce circuit, pour de faibles charges, se comporte comme un oscillateur harmonique.

Finalement, l'analogie ressort-circuit LC est illustrée sur le Tableau 4.1.

## 4.2 Oscillateurs non harmoniques.

Soit un système libre linéaire de degré de liberté  $q$ . Le Lagrangien associé est

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2 - U(q) , \quad (4.47)$$



<b>Ressort oscillant</b>	<b>Circuit LC</b>
Équation du mouvement : $\ddot{x} + kx = 0$	Équation de la charge : $L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$
Masse $m$	Inductance $L$
Raideur $k$	Inverse de la capacité $C^{-1}$
Position $x$	Charge $Q$
Vitesse $\dot{x}$	Courant $i$
Énergie cinétique $\frac{m}{2}\dot{x}^2$	Énergie magnétique $Li^2/2 = LQ\dot{Q}/2$
Énergie potentielle $\frac{k}{2}x^2$	Énergie électrostatique $Q^2/2C$

TAB. 4.1 – Analogie électrique.

où  $U(q)$  est son énergie potentielle. Son énergie mécanique ou Hamiltonien est

$$E = \frac{1}{2}m(q)\dot{q}^2 - U(q) . \quad (4.48)$$

Comme l'énergie mécanique est une constante du mouvement, la relation précédente est une équation différentielle, de premier ordre, qui s'intègre par séparation de variables. De l'équation différentielle précédente, nous obtenons

$$dt = \sqrt{\frac{m(q)}{2}} \frac{dq}{\sqrt{E - U(q)}} . \quad (4.49)$$

Notons que  $E > U(q)$ , puisque l'énergie cinétique est positive. Par intégration, nous trouvons la trajectoire

$$t = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{q_0}^q \sqrt{\frac{m(q')}{E - U(q')}} dq' \quad (4.50)$$

donnant le temps  $t$  en fonction de la coordonnée  $q$ , connaissant le préfacteur,  $m(q)$ , et le potentiel,  $U(q)$ . Le signe *plus* dans l'égalité précédente est pour tous les instants tels que  $q(t) > q_0$ , et le signe *moins* est pour  $q(t) < q_0$ . Par inversion, l'on obtient alors  $q$  en fonction de  $t$ . Ici,  $q_0 = q(0)$  désigne la valeur de la coordonnée généralisée  $q(t)$  à l'instant initial  $t = 0$ . L'expression précédente est connue sous le nom du "portrait de phase".

Notons que si la coordonnée  $q$  est une coordonnée cartésienne (disons  $x$ ), l'expression précédente devient

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{E - U(x')}} . \quad (4.51)$$

Bien évidemment, l'intégrale (4.51) ne peut se résoudre sans avoir une idée sur l'allure de l'énergie d'interaction,  $U(q)$ . Typiquement, ce potentiel est ce lui décrit sur la Figure 4.8.

L'égalité  $U(q) = E$  définit alors deux valeurs particulières,  $q_1$  et  $q_2$ , de la coordonnée généralisée  $q$ , appelées *points d'arrêt* :  $U(q_1) = E$  et  $U(q_2) = E$  (Figure 4.8). Puisque  $E > U(q)$ , seul l'intervalle  $q_1 \leq q \leq q_2$  qui est concerné. Le mobile oscille donc entre  $q_1$  et  $q_2$  et effectue un mouvement de "va-et-vient" correspondant à une certaine période,  $T(E)$ , dépendant de l'énergie fixée  $E$ . Nous démontrons aisément que cette période est donnée par

$$T(E) = \sqrt{2} \int_{q_1(E)}^{q_2(E)} \sqrt{\frac{m(q)}{E - U(q)}} dq . \quad (4.52)$$

Cette expression découle de l'utilisation de la formule du portrait de phase (4.51) appliquée successivement aux temps d'occupation,  $t_1(E)$  et  $t_2(E)$ , des positions,  $q_1(E)$  et  $q_2(E)$ , et du fait que :  $T(E) = 2[t_2(E) - t_1(E)]$ .

Si  $q$  est une coordonnée cartésienne  $x$ , alors la période des oscillations est donnée par

$$T(E) = \sqrt{2m} \int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} , \quad (4.53)$$

avec  $U(x_1) = E$  et  $U(x_2) = E$ .

**Exemples 1.** *Oscillateur harmonique.*

Pour ce système, le potentiel d'interaction est

$$U(x) = \frac{k}{2} x^2 , \quad (4.54)$$

où  $x = q - q_0$  est l'écart de la coordonnée généralisée,  $q$ , à sa valeur d'équilibre stable,  $q_0$ . L'égalité  $U(x) = E$  donne les deux points d'arrêt :  $x_1(E) = -\sqrt{2E/k}$  et  $x_2(E) = \sqrt{2E/k}$ . La période d'oscillations étant

$$T(E) = \sqrt{2m_0} \int_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}} \frac{dx}{\sqrt{E - kx^2/2}} . \quad (4.55)$$

Un changement de variable :  $\sin \theta = \sqrt{k/2Ex}$  donne le résultat

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{k}} . \quad (4.56)$$

Nous retrouvons donc un résultat déjà obtenu au paragraphe 4.1. Pour un ressort,  $m_0 = m$  et  $T_0 = 2\pi \sqrt{m/k}$ , et pour un pendule simple,  $m_0 = ml^2$  et  $k = mgl$ , par suite,  $T_0 = 2\pi \sqrt{l/g}$ .

**Exemples 2.** *Pendule simple.*

Pour ce pendule, l'énergie potentielle générale s'exprime en fonction de l'angle d'écartement,  $\varphi$ , comme

$$U(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi) . \quad (4.57)$$

Les points d'arrêts,  $\varphi_{1,2} = \pm\varphi_M$ , sont tels que

$$E = mgl(1 - \cos \varphi_M) . \quad (4.58)$$

Explicitement,

$$\varphi_M = \arccos \sqrt{1 - \frac{E}{mgl}} . \quad (4.59)$$

Ici,  $\varphi_M$  est l'angle d'écartement maximal du pendule.

La période des oscillations est donnée par l'intégrale suivante

$$T(E) = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_M} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_M}} \quad (4.60)$$

ou encore

$$T(E) = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_M} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\frac{\varphi_M}{2}) - \sin^2(\frac{\varphi}{2})}} . \quad (4.61)$$

Nous avons remplacé l'énergie totale  $E$  par son expression (4.58), avec  $\varphi_1 = -\varphi_M$  et  $\varphi_2 = \varphi_M$ , et le fait que les intégrands précédents sont des fonctions paires de l'angle d'écartement,  $\varphi$ .

Pour calculer la dernière intégrale, faisons un changement de variable en posant :  $\sin \xi = \sin(\varphi/2) / \sin(\varphi_M/2)$ , et l'intégrale précédente devient alors

$$T(E) = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin\left(\frac{\varphi_M}{2}\right)\right) , \quad (4.62)$$

où

$$K(k') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \xi}} \quad (4.63)$$

est l'intégrale elliptique complète de première espèce. Si  $k' = \sin(\varphi_M/2) \simeq \varphi_M/2 \ll 1$  (petites oscillations), le développement au premier ordre de la fonction  $K(k')$  donne

$$K(k') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( 1 + \frac{1}{2} k'^2 \sin^2 \xi + \dots \right) d\xi = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} k'^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \xi d\xi + \dots \quad (4.64)$$

En utilisant la formule trigonométrique :  $2 \sin^2 \xi = 1 - \cos(2\xi)$ , le calcul d'intégrale est immédiat, et l'on trouve

$$T(E) = T_0 \left( 1 + \frac{\varphi_M^2}{16} + \dots \right), \quad (4.65)$$

avec la période pour des oscillations très faibles :  $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ .

Notons, comme il se doit, que la période d'oscillations du pendule,  $T(E)$ , est bien supérieure à sa période idéale,  $T_0$ .

Sans faire d'approximations, la période  $T(E)$  est donnée par la formule (4.62), où la dépendance dans l'énergie totale  $E$  est entièrement contenue dans l'angle  $\varphi_M(E)$ , relation (4.59).

### 4.3 Oscillations amorties.

Le phénomène d'oscillations libres, pour lesquelles les amplitudes d'oscillations sont indépendante du temps n'est pas physiquement réalisable, dans le sens qu'il y a toujours des dissipations d'énergie.

Les mécanismes de dissipation d'énergie peuvent être de natures différentes : viscosité, frottement sec, couplage avec un fluide... Nous nous restreignons dans cette étude aux seuls amortissements visqueux.

Les frottements s'opposent aux oscillations, en les atténuant ou même en les supprimant carrément. Comme conséquence, en présence de frottements, le mouvement est *pseudo-périodique*, si ces frottements sont faibles, ou *apériodique*, s'ils sont forts.

Nous adopterons le schéma suivant (Figure 4.9), pour désigner un oscillateur harmonique (un ressort, par exemple), en présence de frottements décrits par un amortisseur.

### 4.3.1 Équation du mouvement.

Considérons un ressort de masse  $m$  et de constante de raideur  $k$ , monté en parallèle avec un amortisseur de *coefficient de frottement*  $\alpha$  (Figure 4.9). En plus de la force de rappel,  $-kx$ , le ressort est soumis à une force de frottement,  $-\alpha\dot{x}$ . Son équation du mouvement est alors

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 , \quad (4.66)$$

où  $x$  est l'écart de la position instantanée de la masse  $m$  à sa position d'équilibre. Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre, à coefficients constants. Pour un pendule simple, nous aurons une équation du mouvement analogue, en faisant les substitutions suivantes :  $x \rightarrow \varphi$ ,  $m \rightarrow ml^2$  et  $k \rightarrow mgl$ .

Cette équation du mouvement suggère que les frottements "brisent" l'invariance par renversement du sens du temps :  $t \rightarrow -t$ . Comme conséquence, le mouvement cessera d'être complètement sinusoïdale, mais plutôt amorti, suite à une dissipation d'énergie.

Notons que l'équation de Newton précédente peut être retrouvée rapidement en appliquant l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \mathbf{F}^{nc} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} , \quad (4.67)$$

avec le Lagrangien  $L = (m/2)\dot{x}^2 - (k/2)x^2$  et la force non-conservative (de frottement)  $\mathbf{F}^{nc} = -\alpha\dot{x}\mathbf{e}_x$ . Le second membre vaut  $-\alpha\dot{x}$ , sachant que  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x$ , et l'on retrouve bien l'équation du mouvement (4.66).

### 4.3.2 Analogie électrique.

Le circuit électrique équivalent d'un ressort avec amortisseur est un circuit électrique RLC en *court-circuit*, représenté sur la Figure 4.10.

Les lois des mailles donnent

$$u_L + u_R + u_C = 0 , \quad (4.68)$$

avec

$$u_L = L \frac{di}{dt} = L\ddot{Q} , \quad u_R = Ri = R\dot{Q}, \quad u_C = \frac{Q}{C} . \quad (4.69)$$

Ressort oscillant	Circuit LC
Équation du mouvement : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$	Équation de la charge : $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$
Masse $m$	Inductance $L$
Pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$	Pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
Raideur $k$	Inverse de la capacité $C^{-1}$
Coefficient de frottement $\alpha$	Résistance $R$
Position $x$	Charge $Q$
Vitesse $\dot{x}$	Courant $i$
Énergie cinétique $m\dot{x}^2/2$	Énergie magnétique $Li^2/2 = L\dot{Q}^2/2$
Énergie potentielle $kx^2/2$	Énergie électrostatique $Q^2/2C$

TAB. 4.2 – Analogie électrique.

Ici,  $i = \dot{Q}$  est le courant électrique,  $L$  est l'inductance de la bobine,  $R$  est la résistance et  $C$  est la capacité du condensateur.

Donc, l'équation du circuit est telle que

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0 . \quad (4.70)$$

Finalement, l'analogie ressort amorti-circuit RLC est illustrée sur le Tableau 4.2.

### 4.3.3 Résolution de l'équation du mouvement.

Revenons à l'équation du mouvement (4.66) et posons

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} , \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m} , \quad (4.71)$$

où  $\omega_0$  est la *pulsation de l'oscillateur libre* et  $\lambda$  est le *coefficient d'amortissement*. L'inverse,  $\lambda^{-1}$ , est homogène à un temps, et peut s'interpréter comme le temps nécessaire pour l'arrêt complet du mouvement, à cause de la présence des frictions de l'oscillateur avec le milieu ambiant.

Avec ces notations, l'équation du mouvement (4.66) de l'oscillateur devient

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (4.72)$$

Signalons que cette équation du mouvement peut se réécrire en agissant sur le coefficient multipliant la vitesse  $\dot{x}$  :

(i) En électricité, on utilise une définition un peu différente du coefficient d'amortissement,  $\lambda$ . Au lieu de noter  $\lambda = \alpha/2m$ , nous notons

$$\lambda' = \frac{\alpha}{2m\omega_0} \quad (4.73)$$

qui est un coefficient sans dimension. Avec cette nouvelle notation, l'équation du mouvement est

$$\ddot{x} + 2\lambda'\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (4.74)$$

(ii) Nous pouvons poser

$$\tau = \frac{m}{\alpha} = \frac{1}{2\lambda} , \quad (4.75)$$

où le paramètre  $\tau$  est homogène à un temps, et l'équation du mouvement se réécrit alors comme

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (4.76)$$

(iii) Posons

$$Q = \omega_0\tau = \omega_0 \frac{\alpha}{m} \quad (4.77)$$

qui est le *facteur de qualité*, en langage de l'électricité. C'est un facteur sans dimension. Dans ce cas, l'équation du mouvement devient

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (4.78)$$

Maintenant, nous allons résoudre l'équation du mouvement de l'oscillateur, en présence de frottements. Pour cela, nous choisissons l'équation du mouvement (4.72).

Cherchons des solutions fondamentales de la forme

$$x(t) = e^{rt}. \quad (4.79)$$

Nous obtenons alors l'équation caractéristique pour la racine  $r$ ,

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \quad (4.80)$$

qui possède *deux* racines réelles ou complexes,  $r_1$  et  $r_2$ . Formellement, la solution est

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}. \quad (4.81)$$

Nous aurons plusieurs solutions à envisager en examinant le signe du discriminant de l'équation (4.80) :  $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$ .

**Régime pseudo-périodique.** Pour ce régime,  $\Delta' < 0$  ou encore  $\lambda < \omega_0$ . On est donc en présence de faibles frottements. Dans ce cas, les racines  $r_{1,2}$  sont des nombres complexes, conjuguées l'une de l'autre,

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\omega, \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}. \quad (4.82)$$

La solution est alors

$$x(t) = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.83)$$

ou encore

$$x(t) = e^{-\lambda t} [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]. \quad (4.84)$$

Les constantes  $a$  et  $\varphi$  et  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions initiales. Cette solution est alors sinusoïdale, mais enveloppée par les fonctions exponentielles  $\pm e^{-\lambda t}$ .

L'amplitude des oscillations  $ae^{-\lambda t}$  dépend alors du temps et décroît rapidement, d'une manière exponentielle.

L'allure de la trajectoire est présentée sur la Figure 4.11.



Bien que la trajectoire ne soit pas franchement périodique, néanmoins, l'on peut définir une "pseudo-période", qui est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \quad (4.85)$$

ou encore

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \lambda^2/\omega_0^2}}, \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (4.86)$$

Cette pseudo-période peut être définie comme étant l'intervalle du temps entre *trois* passages par la position d'équilibre  $x = 0$ .

Puisque  $\lambda < \omega_0$ , alors  $T$  est supérieure à la période de l'oscillateur libre,  $T_0$ . Les frottements provoquent alors l'augmentation de la période du mouvement.

Une autre quantité caractérisant l'atténuation de l'amplitude du mouvement dans le temps est ce qu'on appelle *décroissement logarithmique*.

Soit  $A(t) = ae^{-\lambda t}$  l'amplitude des oscillations à l'instant  $t$ . Il est tout à fait légitime de comparer cette amplitude à l'instant  $t$  à l'amplitude à l'instant  $t + T$ ,

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\lambda T}. \quad (4.87)$$

Incidentement, ce rapport est indépendant du temps et ne dépend alors que du produit sans dimensions  $\lambda T \equiv \delta$ , appelé *décroissement logarithmique*. Nous avons alors

$$\delta = \ln \left[ \frac{A(t)}{A(t+T)} \right] = \frac{1}{n} \ln \left[ \frac{A(t)}{A(t+nT)} \right]. \quad (4.88)$$

Le décroissement logarithmique caractérise la vitesse d'atténuation de l'amplitude des oscillations.

**Régime apériodique.** Pour ce régime,  $\Delta' > 0$  ou encore  $\lambda > \omega_0$ . C'est le régime de forts frottements. Dans ce cas, les racines  $r_{1,2}$  sont des nombres purement réels,

$$r_{1,2} = -\lambda \pm i\hat{\omega}, \quad \hat{\omega} = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}. \quad (4.89)$$

La solution est alors

$$x(t) = e^{-\lambda t} [A \cosh(\hat{\omega}t) + B \sinh(\hat{\omega}t)]. \quad (4.90)$$

Les amplitudes  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions initiales. Cette solution est alors hyperbolique.

Finalement, l'allure de la trajectoire, pour ce régime de forts frottements, est indiquée sur la Figure 4.12.

**Régime critique.** Ce régime correspond à  $\Delta' = 0$  ou encore  $\lambda = \omega_0$ . C'est le *régime critique*, où les oscillations sont modérément amorties. Dans ce cas, les racines sont doubles,

$$r_1 = r_2 = -\lambda . \quad (4.91)$$

La solution est alors

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A + Bt) . \quad (4.92)$$

Les amplitudes  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions initiales.

L'allure de la trajectoire correspondant au régime critique est illustrée sur la Figure 4.13.

**Remarque.** La solution de l'équation du mouvement étudiée précédemment peut être retrouvée rapidement, en faisant le changement de fonction :  $x(t) = e^{-\lambda t} y(t)$ , où la nouvelle fonction satisfait l'équation différentielle (sans le terme de friction) suivante

$$\ddot{y} + (\omega_0^2 - \lambda^2) y = 0 , \quad (4.93)$$

dont la solution dépendra du signe de la combinaison  $\omega_0^2 - \lambda^2$ . D'où les solutions précédentes, selon les trois régimes.

#### 4.3.4 Bilan énergétique.

Les énergies cinétique et potentielle sont données par

$$E_c(t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) , \quad (4.94)$$

$$E_p(t) = \frac{k}{2} x^2(t) . \quad (4.95)$$

Donc, l'énergie mécanique est

$$E_m(t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2(t) + \frac{k}{2} x^2(t) \quad (4.96)$$

qui est bien une fonction du temps, pour les trois régimes.

A la fin du Chapitre 3, nous avons démontré que la dérivée de l'énergie mécanique est telle que

$$\frac{dE_m}{dt} = -\alpha \dot{x}^2(t) < 0 . \quad (4.97)$$

Il en ressort que l'énergie mécanique se dégrade au cours du temps, en moyenne, comme  $e^{-2\lambda t}$ .

## 4.4 Oscillations forcées sans frottements.

### 4.4.1 Équation du mouvement.

Considérons, maintenant, le problème des oscillations d'un système linéaire, sujet d'une excitation extérieure dépendante du temps (Figure 4.14). L'on parle des *oscillations forcées*, à la différence des oscillations libres étudiées dans la section précédente.

Supposons que la force extérieure dérive d'une énergie potentielle,  $U_e(x; t)$ . Autour de la position d'équilibre  $x = 0$ , l'on peut écrire cette énergie comme

$$U_e(x; t) = U_e(0; t) + x \left. \frac{dU_e(x; t)}{dx} \right|_{x=0} . \quad (4.98)$$

La force extérieure est alors

$$F(t) = - \left. \frac{dU_e(x; t)}{dx} \right|_{x=0} . \quad (4.99)$$

Donc, l'énergie potentielle totale est

$$U(x; t) = \frac{k}{2} x^2 - xF(t) , \quad (4.100)$$

à une constante additive près.

Il en ressort que le Lagrangien de l'oscilleur subissant l'action d'une force extérieure dépendante du temps, est donné par

$$L(x, \dot{x}; t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2(t) + xF(t) . \quad (4.101)$$

Par application de l'équation d'Euler-Lagrange, l'on trouve

$$m\ddot{x} + kx = F(t) , \quad (4.102)$$

ou encore

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m} , \quad (4.103)$$

avec  $\omega = \sqrt{k/m}$ . Notons que si  $m$  est une masse, la fonction  $F(t)/m$  a les dimensions d'une accélération. Notons aussi que cette équation du mouvement peut être retrouvée par application directe du Principe Fondamental de la Dynamique.

#### 4.4.2 Analogie électrique.

Nous considérons un circuit LC (Figure 4.15), avec une source de tension extérieure,  $U(t)$ .

Nous avons la loi suivante du circuit

$$L \frac{di}{dt} + \frac{Q}{C} = U(t) , \quad (4.104)$$

ou encore

$$L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = U(t) . \quad (4.105)$$

Finalement, l'analogie ressort forcé-circuit LC est illustrée sur le Tableau 4.3.

#### 4.4.3 Solution de l'équation du mouvement.

Revenons, à présent, à l'équation du mouvement (4.103) décrivant la dynamique d'un système oscillant forcé.

Notons que la solution générale de cette équation est la somme de la solution de l'équation homogène,  $x_0(t)$ , et d'une solution particulière,  $x_p(t)$ . La solution de l'équation homogène est connue et étudiée précédemment, nous la rappelons simplement,

$$x_0(t) = a \cos(\omega t - \varphi) \quad \text{ou} \quad x_0(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t . \quad (4.106)$$

Ressort oscillant	Circuit LC
Équation du mouvement : $m\ddot{x} + kx = F(t)$	Équation de la charge : $L\ddot{Q} + \frac{Q}{C} = U(t)$
Masse $m$	Inductance $L$
Pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$	Pulsation $\omega = 1/\sqrt{LC}$
Raideur $k$	Inverse de la capacité $C^{-1}$
Position $x$	Charge $Q$
Vitesse $\dot{x}$	Courant $i$
Énergie cinétique $m\dot{x}^2/2$	Énergie magnétique $Li^2/2 = LQ\dot{Q}/2$
Énergie potentielle $kx^2/2$	Énergie électrostatique $Q^2/2C$

TAB. 4.3 – Analogie électrique.

Il reste à déterminer la solution particulière,  $x_p(t)$ , qui satisfait l'équation différentielle (4.106). Pour ce faire, nous remarquons que cette même équation se réécrit comme

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}_p + i\omega x_p) - i\omega(\dot{x}_p + i\omega x_p) = \frac{F(t)}{m} . \tag{4.107}$$

Cela suggère de poser

$$\xi(t) = \dot{x}_p(t) + i\omega x_p(t) . \tag{4.108}$$

Cette nouvelle fonction dynamique satisfait alors une équation différentielle du premier ordre,

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = \frac{F(t)}{m} . \tag{4.109}$$

Cherchons une solution de la forme (méthode de la variation de la constante)

$$\xi(t) = A(t) e^{i\omega t} , \tag{4.110}$$

avec

$$\frac{dA}{dt} = \frac{F(t)}{m} e^{-i\omega t} , \tag{4.111}$$

dont l'intégration donne

$$\xi(t) = e^{i\omega t} \frac{1}{m} \int_0^t F(t') e^{-i\omega t'} dt' . \tag{4.112}$$

Donc, la solution particulière est simplement la partie imaginaire de la fonction,  $\xi(t)$ , divisée par  $\omega$ ,

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(t') \sin(\omega(t-t')) dt' . \quad (4.113)$$

La solution globale de l'équation du mouvement est alors

$$x(t) = a \cos(\omega t - \varphi) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(t') \sin(\omega(t-t')) dt' . \quad (4.114)$$

**Remarque.** Si les oscillations sont provoquées uniquement par la force extérieure,  $F(t)$ , alors la solution est simplement

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(t') \sin(\omega(t-t')) dt' . \quad (4.115)$$

Ce qui correspond à imposer à la solution les conditions initiales :  $x_0 = 0$  et  $\dot{x}_0 = 0$ .

**Résonance.** Pour une excitation sinusoïdale :  $F(t) = F_0 \cos(\Omega t - \varphi_0)$ , l'on trouve comme solution globale sous forme

$$x(t) = a \cos(\omega t - \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} [\cos(\Omega t - \varphi_0) - \cos(\omega t - \varphi_0)] . \quad (4.116)$$

Il est tout à fait naturel de comparer les deux pulsations  $\omega$  (celle de l'oscillateur) et  $\Omega$  (celle de la force extérieure) entre elles. Lorsque  $\omega \rightarrow \Omega$ , on dit qu'on a *résonance*. Dans cette limite, le second terme (solution particulière) est une indétermination de type 0/0. D'après la *règle de l'Hospital*, nous trouvons la solution de l'équation du mouvement à la résonance,

$$x(t) = a \cos(\omega t - \varphi) + \frac{F_0 t}{2m\omega} \sin(\omega t - \varphi_0) . \quad (4.117)$$

En examinant le second terme du membre de droite, nous constatons que l'amplitude,  $F_0 t / 2m\omega$ , croît *linéairement* avec le temps. C'est bien la conséquence de la présence d'une

force extérieure (sinusoïdale). Faisons remarquer, aussi, que la solution globale (4.117) est bornée inférieurement et supérieurement, c'est-à-dire

$$-a - \frac{F_0 t}{2m\omega} < x(t) < a + \frac{F_0 t}{2m\omega} . \quad (4.118)$$

L'on parle du phénomène de *confinement* de la trajectoire (Figure 4.16).

#### 4.4.4 Bilan énergétique.

Supposons qu'initialement  $x_0 = 0$  et  $\dot{x}_0 = 0$ . Donc, les oscillations sont uniquement produites par la force extérieure.

L'énergie d'un système qui effectue des oscillations forcées ne se conserve pas, et le système acquiert alors de l'énergie aux dépens de la force.

Il est facile de voir que l'énergie mécanique communiquée par l'excitation extérieure, durant le temps  $t$ , est telle que

$$E_m(t) = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2} |\xi(t)|^2 . \quad (4.119)$$

Si l'on suppose, maintenant, que  $F = 0$ , pour  $t < 0$ , et  $F \neq 0$ , pour  $t > 0$ , alors l'énergie communiquée par la force  $F$ , durant un intervalle de temps très large ( $t \rightarrow \infty$ ), est

$$E_m = \frac{1}{2m} \left| \widehat{F}(\omega) \right|^2 \quad (4.120)$$

où

$$\widehat{F}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt \quad (4.121)$$

est la transformée (ou composante  $\omega$ ) de Fourier de la force,  $F(t)$ . C'est une quantité mesurable expérimentalement.

## 4.5 Oscillations forcées avec frottements.

L'existence d'une force de frottement donne naissance à une dissipation d'énergie sous forme de chaleur, et des amortissements prolongés provoquent alors un arrêt complet

du mouvement. Mais, pour contrarier ces amortissements, une manière est d'imposer une force extérieure, afin d'entretenir le mouvement.

Le système que nous voulons étudier est schématisé sur la Figure 4.17 comprenant un oscillateur harmonique (un ressort, par exemple), en parallèle avec un amortisseur et subissant l'action d'une force extérieure,  $F(t)$ .

### 4.5.1 Équation du mouvement.

Ce système subit alors l'action d'une force de rappel, d'une force de frottement et d'une force extérieure. Son équation du mouvement est alors

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m} , \quad (4.122)$$

avec les notations déjà utilisées,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} , \quad \lambda = \frac{\alpha}{2m} . \quad (4.123)$$

Le premier paramètre désigne la pulsation de l'oscillateur libre, et le second, le coefficient d'amortissement.

L'équation différentielle (4.122) est du second ordre, à coefficients constants et avec second membre.

### 4.5.2 Analogie électrique.

Nous considérons un circuit RLC (Figure 4.18), avec une source de tension extérieure,  $U(t)$ .

Nous avons la loi suivante du circuit

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{Q}{C} = U(t) , \quad (4.124)$$

ou encore

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U(t) . \quad (4.125)$$

Le terme  $R\dot{Q}$  représente la dissipation (effet joule).



Ressort oscillant	Circuit LC
Équation du mouvement : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F(t)$	Équation de la charge : $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = U(t)$
Masse $m$	Inductance $L$
Pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$	Pulsation $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$
Raideur $k$	Inverse de la capacité $C^{-1}$
Coefficient de frottement $\alpha$	Résistance $R$
Position $x$	Charge $Q$
Vitesse $\dot{x}$	Courant $i$
Énergie cinétique $m\dot{x}^2/2$	Énergie magnétique $Li^2/2 = L\dot{Q}^2/2$
Énergie potentielle $kx^2/2$	Énergie électrostatique $Q^2/2C$

TAB. 4.4 – Analogie électrique.

Finalement, l’analogie ressort amorti et forcé-circuit RLC est illustrée sur le Tableau 4.5.

### 4.5.3 Résolution de l’équation du mouvement.

Pour résoudre rapidement l’équation différentielle (4.122), nous faisons un changement de fonction :  $x(t) = e^{-\lambda t}y(t)$ , où la nouvelle fonction satisfait l’équation différentielle (sans le terme de friction) suivante

$$\ddot{y} + (\omega_0^2 - \lambda^2) y = F(t) e^{\lambda t} , \tag{4.126}$$

dont la solution dépendra du signe de la combinaison :  $\omega_0^2 - \lambda^2$ . Si, par exemple,  $\omega_0^2 - \lambda^2 > 0$ , cette équation décrit un oscillateur libre, de pulsation  $\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ , en présence d’une force extérieure,  $F(t) e^{\lambda t}$ .

Les solutions, selon les trois régimes, sont alors

(i) *Régime pseudo-périodique* :  $\lambda < \omega_0$  (frottements faibles),

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(t') e^{-\lambda(t-t')} \sin(\omega(t-t')) dt' , \tag{4.127}$$

avec la notation

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} . \quad (4.127a)$$

(ii) *Régime apériodique* :  $\lambda > \omega_0$  (frottements forts),

$$x(t) = e^{-\lambda t} \left( \widehat{A} \cosh(\widehat{\omega}t) + \widehat{B} \sinh(\widehat{\omega}t) \right) + \frac{1}{m\widehat{\omega}} \int_0^t F(t') e^{-\lambda(t-t')} \sinh(\widehat{\omega}(t-t')) dt' , \quad (4.128)$$

avec la notation

$$\widehat{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} . \quad (4.128a)$$

(iii) *Régime critique* :  $\lambda = \omega_0$  (frottements intermédiaires),

$$x(t) = e^{-\lambda t} (A + Bt) + \frac{1}{m} \int_0^t F(t') e^{-\lambda(t-t')} (t-t') dt' . \quad (4.129)$$

Si, maintenant, les oscillations sont provoquées uniquement par la force extérieure, les solutions sont

$$x(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t F(t') e^{-\lambda(t-t')} \sin(\omega(t-t')) dt' , \quad \lambda < \omega_0 , \quad (4.130)$$

$$x(t) = \frac{1}{m\widehat{\omega}} \int_0^t F(t') e^{-\lambda(t-t')} \sinh(\widehat{\omega}(t-t')) dt' , \quad \lambda > \omega_0 , \quad (4.131)$$

$$x(t) = \frac{1}{m} \int_0^t F(t') e^{-\lambda(t-t')} (t-t') dt' , \quad \lambda = \omega_0 . \quad (4.132)$$

#### 4.5.4 Cas d'une force extérieure oscillante.

Supposons que la force extérieure est de forme sinusoïdale,

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t . \quad (4.133)$$

Dans ce cas, l'équation du mouvement est

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \Omega t . \quad (4.134)$$

La solution particulière,  $x_p(t)$ , de cette équation différentielle se calcule aisément, en utilisant les relations générales précédentes, selon les trois régimes. Mais, nous allons procéder autrement en cherchant une solution de la forme

$$x_p(t) = A(\Omega) \cos(\Omega t - \varphi) , \quad (4.135)$$

où  $A$  est l'amplitude et  $\varphi$  est la phase. Comme nous verrons, par la suite, les deux quantités dépendent de la pulsation,  $\Omega$ , de la force extérieure.

Il est commode d'utiliser la méthode des complexes,

$$\bar{x}_p(t) = Ae^{i(\Omega t - \varphi)} = Ae^{-i\varphi} e^{i\Omega t} = \bar{X} e^{i\Omega t} , \quad (4.136)$$

$$g(t) = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} . \quad (4.137)$$

L'équation du mouvement devient alors

$$\ddot{\bar{x}}_p + 2\lambda\dot{\bar{x}}_p + \omega_0^2 \bar{x}_p = \frac{F_0}{m} . \quad (4.138)$$

Plus explicitement, nous avons

$$(-\Omega^2 \bar{X} + 2i\lambda\Omega \bar{X} + \omega_0^2 \bar{X}) e^{i\Omega t} = \frac{F_0}{m} e^{i\Omega t} , \quad (4.139)$$

et l'amplitude  $\bar{X}$  est alors donnée par

$$\bar{X} = \frac{F_0}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega} . \quad (4.140)$$

Donc, le module  $A = \sqrt{\bar{X} \cdot \bar{X}^*}$  et la phase  $\varphi$  sont telles que

$$A(\Omega) = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2 \Omega^2}} , \quad (4.141)$$

$$\tan \varphi = \frac{2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} . \quad (4.142)$$

Noter que  $\tan \varphi = -\operatorname{Im} \bar{X} / \operatorname{Re} \bar{X}$ .

Maintenant, étudions la variation de l'amplitude  $A$  et la phase  $\varphi$ , en fonction de la pulsation,  $\Omega$ , de la force extérieure.

On aura *résonance de l'amplitude*, lorsque celle-ci passe par un maximum,

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0, \text{ pour } \Omega = 0 \quad \text{ou} \quad \Omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2. \quad (4.143)$$

Le carré de la pulsation,  $\Omega^2$ , est positif ( $\Omega^2 > 0$ ), si et seulement si la condition  $\omega_0 > \sqrt{2}\lambda$  est remplie. Donc, la résonance n'a lieu que pour les faibles amortissements.

Avec la condition  $\omega_0 > \sqrt{2}\lambda$ , l'on a deux extrémums

$$\begin{cases} \Omega = 0, \\ \Omega = \Omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} < \omega_0. \end{cases} \quad (4.144)$$

À  $\Omega = 0$ , l'amplitude  $A(\Omega)$  est minimale, et à  $\Omega = \Omega_m$ , elle est maximale. Les amplitudes correspondant à ces valeurs sont alors

$$A(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}, \quad (4.145)$$

$$A(\Omega_m) = A_m = \frac{F_0}{m} \frac{1}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}. \quad (4.146)$$

Pour la phase  $\varphi(\Omega)$ , il est facile de voir qu'elle est une fonction monotone croissante et se sature à  $\varphi = \pi$ , lorsque  $\Omega \rightarrow +\infty$ . Sa valeur à  $\Omega = \omega_0$  est  $\varphi = \pi/2$ .

Pour les valeurs du coefficient d'amortissement telles que  $\omega_0 < \sqrt{2}\lambda$  (frottements forts), il y a un seul extrémum (maximum) de l'amplitude qui est  $\Omega = 0$ , et au-delà ( $\Omega > 0$ ), cette amplitude est monotone décroissante.

L'allure de l'amplitude est illustrée sur la Figure 4.19, pour les faibles amortissements.

**Remarque.** Notons que cette résonance d'amplitude est analogue à la résonance de tension aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC.

**Bande passante.** Elle est notée :  $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$ . C'est l'intervalle de pulsation où l'amplitude,  $A(\Omega)$ , reste supérieure à l'amplitude maximale,  $A_m$ , divisée par  $\sqrt{2}$  (*amplitude efficace*).

Les valeurs  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont alors solution de l'équation

$$A(\Omega_{1,2}) = \frac{A_m}{\sqrt{2}}. \quad (4.147)$$

Nous trouvons exactement que

$$\Omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\frac{\lambda^2}{\omega_0^2} - 2\frac{\lambda}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}, \quad \Omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 - 2\frac{\lambda^2}{\omega_0^2} + 2\frac{\lambda}{\omega_0} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega_0^2}}}. \quad (4.148)$$

Pour de faibles frottements ( $\lambda \ll \omega_0/\sqrt{2}$ ), l'on, au premier ordre,

$$\Omega_1 \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{\lambda}{\omega_0}\right), \quad \Omega_2 \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\omega_0}\right). \quad (4.149)$$

L'on déduit la bande passante approchée

$$\Delta\Omega = 2\lambda = \frac{\omega_0}{Q}, \quad (4.150)$$

où  $Q = \omega_0/2\lambda$  est le *facteur de qualité*. L'expression précédente donne une *autre définition* du facteur de qualité,

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\Omega} \quad (4.151)$$

qui n'est rien d'autre que le rapport de la pulsation de l'oscillateur libre à la bande passante.

#### 4.5.5 Bilan énergétique.

A présent, nous allons discuter l'énergie communiquée par la force extérieure au système pour qu'il puisse maintenir au mieux ses oscillations.

L'on suppose que les oscillations sont provoquées par la seule force extérieure. En suivant les mêmes démarches qu'avant, nous démontrons que, pour les trois régimes (pseudo-périodique, apériodique et critique), l'énergie communiquée décroît très rapidement avec le temps, comme  $e^{-2\lambda t}$ , pour  $t \gg \lambda^{-1}$  (temps de relaxation). ■

# Chapitre 5

## Oscillations des systèmes couplés.

Les systèmes mécaniques rencontrés en industrie peuvent être modélisés, sous certaines conditions, par des systèmes discrets à plusieurs degrés de liberté. Une représentation à partir des systèmes masses-ressorts-amortisseurs  $(m_i, k_i, \alpha_i)$ , couplés entre eux d'une manière plus ou moins simples peut être utilisée pour approcher les problèmes de vibrations.

Dans ce chapitre, nous traitons des systèmes à  $s$  degrés de liberté, avec  $s \geq 2$ . Bien évidemment, pour  $s = 1$ , nous retrouverons les résultats du chapitre précédent.

### 5.1 Oscillations libres.

#### 5.1.1 Fonction de Lagrange.

Soit un système mécanique conservatif formé par  $N$  particules (points matériels), de masses  $\{m_i\}$ , et de positions,  $\{\mathbf{r}_i\}$ . Si l'on désigne par,  $(q_1, \dots, q_s)$ , les coordonnées généralisées, alors ces positions vont en dépendre :  $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s)$ . Nous désignons par  $U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ , l'énergie potentielle totale du système.

Le Lagrangien associé est alors

$$L(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) . \quad (5.1)$$

En termes de coordonnées généralisées,  $(q_1, \dots, q_s)$ , celui-ci devient

$$L(q_1, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s a_{\beta\gamma}(q_1, \dots, q_s) \dot{q}_\beta \dot{q}_\gamma - V(q_1, \dots, q_s) , \quad (5.2)$$

avec les notations

$$a_{\beta\gamma}(q_1, \dots, q_s) = \sum_{l=1}^N M_l \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_\beta} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_l}{\partial q_\gamma} , \quad (5.3)$$

et

$$V(q_1, \dots, q_s) = U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \Big|_{\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1, \dots, q_s)} . \quad (5.4)$$

Notons bien la propriété de symétrie d'interchange d'indices,

$$a_{\beta\gamma}(q_1, \dots, q_s) = a_{\gamma\beta}(q_1, \dots, q_s) , \quad 1 \leq \beta, \gamma \leq s . \quad (5.5)$$

Supposons, à présent, que le potentiel  $V$  admet une position d'équilibre, notée  $(q_1^0, \dots, q_s^0)$ .

Nous avons alors les  $s$  conditions

$$\left. \frac{\partial V}{\partial q_\beta} \right|_{q=q^0} = 0 , \quad 1 \leq \beta \leq s . \quad (5.6)$$

Le but est d'étudier le mouvement du système, lorsqu'il effectue de petites oscillations autour de sa position d'équilibre. Pour ce faire, nous allons développer les coefficients,  $a_{\beta\gamma}(q_1, \dots, q_s)$ , et le potentiel,  $V(q_1, \dots, q_s)$ , autour de la position d'équilibre,  $(q_1^0, \dots, q_s^0)$ . Nous écrivons

$$a_{\beta\gamma}(q_1, \dots, q_s) = a_{\beta\gamma}(q_1^0, \dots, q_s^0) + \dots , \quad (5.7)$$

$$V(q_1, \dots, q_s) = V(q_1^0, \dots, q_s^0) + \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\beta \partial q_\gamma} \right|_{q=q^0} (q_\beta - q_\beta^0) (q_\gamma - q_\gamma^0) + \dots . \quad (5.8)$$

Les coefficients,  $a_{\beta\gamma}(q_1, \dots, q_s)$ , ont été développés à l'ordre *zero*, si l'on veut avoir une énergie cinétique quadratique dans les variables vitesses  $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s)$ . Le terme d'ordre zéro,  $V(q_1^0, \dots, q_s^0)$ , de l'énergie potentielle est sans intérêt physique, car il est constant. Posons alors

$$a_{\beta\gamma}(q_1^0, \dots, q_s^0) \equiv m_{\beta\gamma} , \quad \sum_{\beta, \gamma=1}^s \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_\beta \partial q_\gamma} \right|_{q=q^0} \equiv k_{\beta\gamma} . \quad (5.9)$$

Les coefficients  $\{m_{\beta\gamma}\}$  et  $\{k_{\beta\gamma}\}$  forment deux matrices carrées d'ordre  $s$ ,  $M = [m_{\beta\gamma}]$  et  $K = [k_{\beta\gamma}]$ , appelées, respectivement, *matrice de masse* et *matrice de rigidité* ou de *raideur*. Ces deux matrices sont *symétriques*, par construction :  $m_{\gamma\beta} = m_{\beta\gamma}$  et  $k_{\gamma\beta} = k_{\beta\gamma}$ . La matrice  $M$  est *définie positive* (valeurs propres positives), car l'énergie cinétique est une quantité toujours *positive*, par définition. La matrice  $K$  l'est aussi (valeurs propres positives), car l'énergie potentielle doit être *stable*. Ce qui impose alors des restrictions sur les coefficients  $\{m_{\beta\gamma}\}$  et  $\{k_{\beta\gamma}\}$ .

Maintenant, posons

$$x_\beta = q_\beta - q_\beta^0, \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.10)$$

Le vecteur de coordonnées,  $(x_1, \dots, x_s)$ , représente l'écart de la configuration,  $(q_1, \dots, q_s)$ , à sa valeur d'équilibre,  $(q_1^0, \dots, q_s^0)$ .

A l'aide de ces considérations, si nous ne retenons que les termes quadratiques dans les variables  $\{x_\beta\}$  et  $\{\dot{x}_\beta\}$ , le Lagrangien, au second ordre, s'écrit

$$L(x_1, \dots, x_s, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_s) = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s m_{\beta\gamma} \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma - \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s k_{\beta\gamma} x_\beta x_\gamma, \quad (5.11)$$

avec les notations simplifiées

$$\dot{x}_\beta(t) = \frac{dx_\beta(t)}{dt}, \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.12)$$

Il sera commode d'introduire les notations vectorielles,

$$\mathbf{X} = \sum_{\beta=1}^s x_\beta \mathbf{e}_\beta, \quad \dot{\mathbf{X}} = \sum_{\beta=1}^s \dot{x}_\beta \mathbf{e}_\beta, \quad (5.13)$$

où  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s\}$  est une base d'un espace à  $s$  dimensions. A l'aide de ces notations, le Lagrangien se réécrit sous forme compacte comme

$$L(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{X}} \cdot M \dot{\mathbf{X}} - \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot K \mathbf{X}. \quad (5.14)$$



### 5.1.2 Fonction d'Hamilton.

Pour déterminer le Hamilton du système,  $H$ , qui est simplement la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle décrites précédemment,  $H = T + V$ , nous devons d'abord calculer les moments conjugués,  $(p_1, \dots, p_s)$ , des variables dynamiques,  $(x_1, \dots, x_s)$ . Nous avons

$$p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\beta} = \sum_{\gamma=1}^s m_{\beta\gamma} \dot{x}_\gamma = [M\dot{\mathbf{X}}]_\beta, \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.15)$$

Par inversion, l'on a

$$\dot{x}_\beta = \sum_{\gamma=1}^s [M^{-1}]_{\beta\gamma} p_\gamma, \quad 1 \leq \beta \leq s, \quad (5.16)$$

ou sous forme matricielle,

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{X}}, \quad \dot{\mathbf{X}} = M^{-1}\mathbf{P}, \quad (5.17)$$

avec le vecteur

$$\mathbf{P} = \sum_{\beta=1}^s p_\beta \mathbf{e}_\beta. \quad (5.18)$$

Il est facile de voir que l'énergie cinétique est une forme quadratique des moments conjugués,

$$T(p_1, \dots, p_s) = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s [M^{-1}]_{\beta\gamma} p_\beta p_\gamma. \quad (5.19)$$

En définitive, le Hamiltonien est comme suit

$$H(x_1, \dots, x_s, p_1, \dots, p_s) = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s [M^{-1}]_{\beta\gamma} p_\beta p_\gamma + \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s k_{\beta\gamma} x_\beta x_\gamma, \quad (5.20)$$

ou sous forme matricielle,

$$H(\mathbf{X}, \mathbf{P}) = \frac{1}{2} \mathbf{P} \cdot M^{-1} \mathbf{P} + \frac{1}{2} \mathbf{X} \cdot K \mathbf{X}. \quad (5.21)$$

### 5.1.3 Équations du mouvement.

Pour obtenir ces équations, nous partons des équations d'Euler-Lagrange, écrites pour chaque variable  $x_\beta$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\beta} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\beta} = 0, \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.22)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_\beta} &= -\frac{1}{2} \sum_{\gamma, \delta=1}^s k_{\gamma\delta} \frac{\partial (x_\gamma x_\delta)}{\partial x_\beta} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{\gamma, \delta=1}^s k_{\gamma\delta} (\delta_{\gamma\beta} x_\delta + \delta_{\beta\delta} x_\gamma) = -\sum_{\gamma=1}^s k_{\beta\gamma} x_\gamma, \quad 1 \leq \beta \leq s. \end{aligned} \quad (5.23)$$

De la même la façons, nous trouvons

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\beta} = \sum_{\gamma=1}^s m_{\beta\gamma} \dot{x}_\gamma, \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.24)$$

Nous obtenons alors les équations du mouvement,

$$\sum_{\gamma=1}^s (m_{\beta\gamma} \ddot{x}_\beta + k_{\beta\gamma} x_\gamma) = 0, \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.25)$$

Ces équations forment un système différentiel linéaire du deuxième ordre, où les variables dynamiques,  $\{x_\beta\}$ , sont couplées, car, généralement,  $m_{\beta\gamma} \neq 0$  et  $k_{\beta\gamma} \neq 0$ , pour  $\beta \neq \gamma$ .

En termes de matrices de masse et de raideur, les équations précédentes revêtent une forme compacte,

$$M\ddot{\mathbf{X}} + K\mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (5.26)$$

Intéressons-nous, à présent, aux équations d'Hamilton que nous écrivons sous forme compacte,

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} = M^{-1}\mathbf{P}, \quad (5.27a)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{X}} = -K\mathbf{X}. \quad (5.27b)$$

Par simple dérivation de la première égalité par rapport au temps et par utilisation de la deuxième égalité, nous retrouvons les équations du mouvement (5.26).

### 5.1.4 Résolution des équations du mouvement.

Cherchons des solutions fondamentales des équations du mouvement (5.25) sous forme

$$x_\beta(t) = a_\beta e^{i\omega t}, \quad 1 \leq \beta \leq s, \quad (5.28)$$

ou sous forme compacte

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} e^{i\omega t}, \quad (5.29)$$

avec le *vecteur amplitude*

$$\mathbf{A} = \sum_{\beta=1}^s a_\beta \mathbf{e}_\beta. \quad (5.29a)$$

Ici,  $a_\beta$  étant l'amplitude relative à la composante,  $x_\beta$ , et  $\omega$  étant la pulsation. En injectant les solutions (5.28) dans les équations différentielles (5.25), nous trouvons les relations

$$\sum_{\gamma=1}^s (k_{\beta\gamma} - \omega^2 m_{\beta\gamma}) a_\gamma = 0, \quad 1 \leq \beta \leq s, \quad (5.30)$$

ou sous forme compacte,

$$K\mathbf{A} = \omega^2 M\mathbf{A}. \quad (5.31)$$

Les équations (5.30) constituent alors un système algébrique linéaire à  $s$  inconnues qui sont les  $s$  amplitudes,  $\{a_\beta\}$ .

Pour que le système linéaire (5.30) ait des solutions *non nulles*, il est nécessaire que son déterminant soit *nul*, c'est-à-dire

$$\det(K - \omega^2 M) = 0. \quad (5.32)$$

Ce déterminant est un polynôme de degré  $s$  dans la variable  $\omega^2$ . Ses  $s$  racines, notées  $\{\omega_\beta^2\}$ , sont appelées *valeurs propres* ou encore *pulsations propres*, correspondant aux  $s$  *vecteurs propres* associés,  $\{A_\beta\}$ . Nous écrivons

$$K\mathbf{A}_\beta = \omega_\beta^2 M\mathbf{A}_\beta, \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.33)$$

Les couples,  $(\omega_\beta, \mathbf{A}_\beta)$ , constituent les *modes propres de vibrations* et les  $s$  droites,  $\Delta_\beta$ , portées par ces vecteurs propres sont appelées *directions principales de vibrations*.

Notons bien que les  $s$  racines,  $\{\omega_\beta^2\}$ , sont *réelles*, car les matrices  $M$  et  $K$  sont symétriques. Pour montrer que ces racines sont positives, multiplions les équations (5.30) par  $a_\beta^*$  (complexe conjugué de  $a_\beta$ ) et sommons sur l'indice  $\beta$ , pour trouver

$$\omega^2 = \frac{\sum_{\beta,\gamma=1}^s k_{\beta\gamma} a_\gamma a_\beta^*}{\sum_{\beta,\gamma=1}^s m_{\beta\gamma} a_\gamma a_\beta^*} . \quad (5.34a)$$

Puisque les coefficients  $m_{\beta\gamma}$  et  $k_{\beta\gamma}$  sont réels et symétriques, les formes quadratiques au numérateur et au dénominateur de cette expression sont réelles. En effet,

$$\left( \sum_{\beta,\gamma=1}^s k_{\beta\gamma} a_\gamma a_\beta^* \right)^* = \sum_{\beta,\gamma=1}^s k_{\beta\gamma} a_\beta a_\gamma^* = \sum_{\beta,\gamma=1}^s k_{\gamma\beta} a_\beta^* a_\gamma = \sum_{\beta,\gamma=1}^s k_{\beta\gamma} a_\gamma a_\beta^* . \quad (5.34b)$$

Il en est de même pour la forme quadratique figurant au dénominateur de l'égalité (5.34a).

Notons que les  $\{\omega_\beta^2\}$ , d'après les relations (5.33), sont aussi des valeurs propres de la matrice  $M^{-1}K$ , avec les vecteurs propres,  $\{A_\beta\}$ . Donc, les valeurs propres,  $\omega_\beta^2$ , sont *strictement positives*, du fait que la matrice  $M^{-1}K$  est *définie positive*.

Notons que deux modes propres de vibrations distincts,  $(\omega_\beta, A_\beta)$  et  $(\omega_\gamma, A_\gamma)$ , avec  $\omega_\beta \neq \omega_\gamma$ , vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes, par rapport aux matrices  $M$  et  $K$ ,

$$\mathbf{A}_\beta \cdot K \mathbf{A}_\gamma = 0 , \quad \mathbf{A}_\beta \cdot M \mathbf{A}_\gamma = 0 , \quad \omega_\beta \neq \omega_\gamma . \quad (5.35)$$

Nous montrons facilement, à partir des équations aux valeurs propres (5.33), que si la première égalité est satisfaite, alors il en sera de même pour la deuxième.

Démontrons, maintenant, la première identité figurant dans les égalités précédentes. Pour ce faire, nous partons de l'équation

$$\mathbf{A}_\beta \cdot K \mathbf{A}_\gamma = \omega_\gamma^2 \mathbf{A}_\beta \cdot M \mathbf{A}_\gamma . \quad (5.36a)$$

Comme les matrices  $K$  et  $M$  sont symétriques, nous aurons

$$\mathbf{A}_\beta \cdot K \mathbf{A}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \cdot K \mathbf{A}_\beta = \omega_\beta^2 \mathbf{A}_\gamma \cdot M \mathbf{A}_\beta = \omega_\beta^2 \mathbf{A}_\beta \cdot M \mathbf{A}_\gamma . \quad (5.36b)$$

Par comparaison avec l'équation (5.36a), l'on a

$$(\omega_\beta^2 - \omega_\gamma^2) \mathbf{A}_\beta \cdot K \mathbf{A}_\gamma = 0 . \quad (5.36c)$$

Comme  $\omega_\beta \neq \omega_\gamma$ , pour  $\beta \neq \gamma$ , l'on a bien les propriétés (5.35).

Dans la nouvelle base formée par les vecteurs propres,  $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_s\}$ , les matrices  $M$  et  $K$  sont alors diagonales,

$$\mathbf{A}_\beta \cdot M \mathbf{A}_\gamma = m_\beta \delta_{\beta\gamma} , \quad \mathbf{A}_\beta \cdot K \mathbf{A}_\gamma = k_\beta \delta_{\beta\gamma} . \quad (5.37)$$

Le fait que les matrices  $M$  et  $K$  sont définies positives, leurs éléments diagonaux (valeurs propres) sont *strictement positifs*, c'est-à-dire  $m_\beta > 0$  et  $k_\beta > 0$  ( $\beta = 1, \dots, s$ ).

En combinant les relations (5.33) et (5.37), nous trouvons que les pulsations propres,  $\{\omega_\beta\}$ , sont reliées aux coefficients,  $\{m_\beta\}$  et  $\{k_\beta\}$ , par

$$\omega_\beta = \sqrt{\frac{k_\beta}{m_\beta}} , \quad 1 \leq \beta \leq s . \quad (5.38)$$

Notons que la collection des vecteurs propres,  $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_s\}$ , constituent une nouvelle base de l'espace à  $s$  dimensions, qui n'est pas nécessairement orthogonale. Nous pouvons donc décomposer, naturellement, la solution  $\mathbf{X}(t)$ , selon cette base,

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{\gamma=1}^s Q_\gamma(t) \mathbf{A}_\gamma . \quad (5.39)$$

Les  $(Q_1(t), \dots, Q_s(t))$  constituent les *composantes modales* ou encore *coordonnées normales*. Par projection sur la base initiale  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s\}$ , l'on trouve, pour les composantes,  $\{x_\beta(t)\}$ , l'expression formelle suivante

$$x_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^s c_{\beta\gamma} Q_\gamma(t) , \quad 1 \leq \beta \leq s , \quad (5.40)$$

où  $c_{\beta\gamma} = \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{A}_\gamma$  est la projection du vecteur propre,  $\mathbf{A}_\beta$ , sur l'élément de base  $e_\beta$ . Les composantes initiales,  $(x_1(t), \dots, x_s(t))$ , sont alors des combinaisons linéaires des coordonnées normales,  $(Q_1(t), \dots, Q_s(t))$ .

Les relations (5.40) peuvent se réécrire matriciellement comme

$$\mathbf{X}(t) = C \mathbf{Q}(t) , \quad (5.41)$$

avec la matrice carrée d'ordre  $s$ ,

$$C = [c_{\beta\gamma}] , \quad c_{\beta\gamma} = \mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{A}_\gamma , \quad (5.41a)$$

et la notation vectorielle,

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{\gamma=1}^s Q_\gamma(t) \mathbf{e}_\gamma . \quad (5.41b)$$

Noter que la matrice  $C$  n'est pas nécessairement symétrique.

De l'équation du mouvement écrite matriciellement (5.26), nous déduisons

$$\sum_{\beta=1}^s \left( m_\beta \ddot{Q}_\beta(t) + k_\beta Q_\beta(t) \right) \mathbf{A}_\beta = \mathbf{0} . \quad (5.42)$$

Comme la famille,  $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_s\}$ , est un *système libre*, nous devons avoir, nécessairement,

$$m_\beta \ddot{Q}_\beta(t) + k_\beta Q_\beta(t) = 0 , \quad 1 \leq \beta \leq s , \quad (5.42a)$$

ou encore

$$\ddot{Q}_\beta(t) + \omega_\beta^2 Q_\beta(t) = 0 , \quad 1 \leq \beta \leq s . \quad (5.43)$$

Ces équations peuvent découler directement du Lagrangien, exprimé en termes de coordonnées normales et de leur dérivées par rapport au temps,

$$L(Q_1, \dots, Q_s, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \left( m_\beta \dot{Q}_\beta^2 - k_\beta Q_\beta^2 \right) , \quad (5.44)$$

ou d'une manière compacte,

$$L(Q, \dot{Q}) = \frac{1}{2} \dot{Q}^T M Q - \frac{1}{2} Q^T K Q , \quad (5.44a)$$

avec les vecteurs colonnes

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_s \end{bmatrix} , \quad \dot{Q} = \begin{bmatrix} \dot{Q}_1 \\ \vdots \\ \dot{Q}_s \end{bmatrix} \quad (5.44b)$$

Ici,  $Q^T$  et  $\dot{Q}^T$  désignent leurs transposés. L'égalité (5.44a) peut se retrouver directement en combinant ensemble les relations (5.14), (5.37) et (5.39).

La forme (5.44) suggère que le système couplé, de coordonnées initiales,  $(x_1, \dots, x_s)$ , et de paramètres mécaniques,  $(m_{\beta\gamma}, k_{\beta\gamma})$ , est l'équivalent d'un système fictif *découplé*, de coordonnées normales,  $(Q_1, \dots, Q_s)$ , et de nouveaux paramètres mécaniques,  $(m_\beta, k_\beta)$ . Ces derniers sont naturellement fonctions des anciens, à travers les relations,

$$m_\beta = \mathbf{A}_\beta \cdot M \mathbf{A}_\beta, \quad k_\beta = \mathbf{A}_\beta \cdot K \mathbf{A}_\beta. \quad (5.45)$$

Donc, les nouveaux paramètres sont fournis par la connaissance des paramètres mécaniques initiaux,  $(m_{\beta\gamma}, k_{\beta\gamma})$ , et des vecteurs propres,  $\mathbf{A}_\beta$ .

Les solutions fondamentales des équations différentielles (5.43) se présentent sous la forme

$$Q_\gamma(t) = b_\gamma \cos(\omega_\gamma t - \varphi_\gamma), \quad 1 \leq \gamma \leq s \quad (5.46)$$

ou encore

$$Q_\gamma(t) = C_\gamma \cos(\omega_\gamma t) + D_\gamma \sin(\omega_\gamma t), \quad 1 \leq \gamma \leq s. \quad (5.47)$$

Donc, les solutions globales sont données par

$$x_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^s d_{\beta\gamma} \cos(\omega_\gamma t - \varphi_\gamma), \quad 1 \leq \beta \leq s, \quad (5.48a)$$

avec les coefficients  $d_{\beta\gamma} = b_\gamma c_{\beta\gamma}$ , ou encore

$$x_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^s [e_{\beta\gamma} \cos(\omega_\gamma t) + f_{\beta\gamma} \sin(\omega_\gamma t)], \quad 1 \leq \beta \leq s, \quad (5.48b)$$

avec les notations :  $e_{\beta\gamma} = C_\gamma c_{\beta\gamma}$  et  $f_{\beta\gamma} = D_\gamma c_{\beta\gamma}$ .

Les composantes originales,  $\{x_\beta(t)\}$ , sont alors une somme sur tous les *modes propres discrets*,  $\{\omega_\beta\}$ .

### 5.1.5 Bilan énergétique.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle que nous écrivons, en termes des coordonnées généralisées, comme

$$E_m = E_c(t) + E_p(t) = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \left( m_\beta \dot{Q}_\beta^2 + k_\beta Q_\beta^2 \right), \quad (5.49)$$

ou encore

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s m_{\beta} \left( \dot{Q}_{\beta}^2 + \omega_{\beta}^2 Q_{\beta}^2 \right) , \quad (5.50)$$

avec les pulsations propres,  $\omega_{\beta} = \sqrt{k_{\beta}/m_{\beta}}$ . En tenant compte des solutions (5.46), nous montrons aisément que

$$E_m = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s m_{\beta} b_{\beta}^2 . \quad (5.51)$$

Comme il se doit, cette égalité indique que l'énergie mécanique est bien une quantité physique *conservée* dans le temps, c'est-à-dire

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 . \quad (5.51a)$$

Intéressons-nous, maintenant, aux valeurs moyennes dans le temps des énergie cinétique et potentielle, comme des fonctions des coordonnées normales,  $(Q_1, \dots, Q_s)$ , et de leurs dérivées,  $(\dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_s)$ ,

$$E_c(t) = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s m_{\beta} \dot{Q}_{\beta}^2 , \quad E_p(t) = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s k_{\beta} Q_{\beta}^2 . \quad (5.52)$$

D'après le *théorème de viriel* esquissé au Chapitre 3 et du fait que l'énergie potentielle est une fonction homogène de degré 2 dans ses variables, nous trouvons aisément que

$$\langle E_c \rangle = \langle E_p \rangle = \frac{\langle E_m \rangle}{2} = \frac{1}{4} \sum_{\beta=1}^s m_{\beta} b_{\beta}^2 . \quad (5.53)$$

**Exemple 1.** *Deux masses couplées par des ressorts.*

Afin d'illustrer le formalisme général élaboré ci-dessus, nous considérons deux masses  $m_1$  et  $m_2$  connectées à deux supports fixes par deux ressorts de constantes de raideur respectives,  $k_1$  et  $k_2$ , et connectées entre elles moyennant un troisième ressort de constante de raideur  $k_c$  (l'indice  $c$  est pour *couplage*), comme indiqué sur la Figure 5.1. Ce système couplé, à deux degrés de liberté ( $s = 2$ ), est alors un cas particulier des systèmes oscillants décrits ci-dessus.



Lorsque les deux masses  $m_1$  et  $m_2$  sont découplées, auquel cas  $k_c = 0$ , chacune oscille avec une pulsation propre,

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}. \quad (5.54)$$

Nous désignons par  $x_1$  et  $x_2$ , les déplacements des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre. Les forces de rappel qui s'appliquent sur les deux masses sont :  $-k_1x_1$  et  $-k_c(x_1 - x_2)$ , pour la masse  $m_1$ , et  $-k_2x_2$  et  $-k_c(x_2 - x_1)$ , pour la masse  $m_2$ . Les équations du mouvement associées sont alors

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_c)x_1 - k_cx_2 = 0, \quad m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k_c)x_2 - k_cx_1 = 0. \quad (5.55)$$

Ce sont des équations différentielles linéaires couplées, en ce sens que le mouvement d'une masse dépend de celui de l'autre masse.

Notons que ces équations peuvent être obtenues aussi à partir du Lagrangien qui est la différence d'une énergie cinétique et d'une énergie potentielle,

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} (m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - \left( \frac{k_1}{2}x_1^2 + \frac{k_2}{2}x_2^2 + \frac{k_c}{2}(x_2 - x_1)^2 \right), \quad (5.56)$$

ou encore

$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2} (m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2) - \frac{1}{2} [(k_1 + k_c)x_1^2 + (k_2 + k_c)x_2^2 - 2k_cx_1x_2]. \quad (5.57)$$

Ce Lagrangien décrit donc deux oscillateurs de masses,  $m_1$  et  $m_2$ , de constantes de raideur,  $k_1 + k_c > 0$  et  $k_2 + k_c > 0$ , mais couplés avec un potentiel de type  $-k_cx_1x_2$ , avec  $k_c > 0$ .

Pour ce système, les matrices de masse et de raideur sont telles que

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_c & -k_c \\ -k_c & k_2 + k_c \end{pmatrix}. \quad (5.58)$$

Cela veut dire que leurs éléments de matrice sont

$$m_{11} = m_1, \quad m_{22} = m_2, \quad m_{12} = m_{21} = 0, \quad (5.59a)$$

$$k_{11} = k_1 + k_c, \quad k_{22} = k_2 + k_c, \quad k_{12} = k_{21} = -k_c. \quad (5.59b)$$

Ces matrices carrées d'ordre 2 sont bien *symétriques* et *définies positives* (leurs déterminants sont strictement positifs).

Il est facile de voir, en résolvant les équations aux valeurs propres (5.32) et (5.33), pour ce cas particulier avec  $s = 2$ , que les modes propres de vibrations,  $(\omega_1, \mathbf{A}_1)$  et  $(\omega_2, \mathbf{A}_2)$ , sont tels que

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{m_{11}k_{22} + m_{22}k_{11} \mp \sqrt{(m_{11}k_{22} + m_{22}k_{11})^2 - 4m_{11}m_{22}(k_{11}k_{22} - k_{12}^2)}}{2m_{11}m_{22}}, \quad (5.60)$$

$$\mathbf{A}_{1,2} = \frac{k_{12}}{\sqrt{(\omega_{1,2}^2 m_{22} - k_{22})^2 + k_{12}^2}} [(\omega_{1,2}^2 m_{22} - k_{22}) \mathbf{e}_1 + k_{12} \mathbf{e}_2]. \quad (5.61)$$

Les vecteurs propres,  $\mathbf{A}_{1,2}$ , ont été normalisés à l'*unité*.

Pour le cas symétrique, où  $m_1 = m_2 \equiv m$  et  $k_1 = k_2 \equiv k$ , les modes propres de vibrations sont tels que :

*Mode symétrique :*

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0, \quad \mathbf{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.62a)$$

*Mode asymétrique :*

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_c}{m}}, \quad \mathbf{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (5.62b)$$

Dans ces conditions, les déplacements  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , se décomposent, en termes des coordonnées normales, comme suit

$$x_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [Q_1(t) + Q_2(t)], \quad x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [Q_1(t) - Q_2(t)]. \quad (5.63)$$

Les coordonnées normales solutionnent les équations différentielles (5.43), et l'on a

$$Q_1(t) = b_1 \sqrt{2} \cos(\omega_1 t - \varphi_1), \quad Q_2(t) = b_2 \sqrt{2} \cos(\omega_2 t - \varphi_2). \quad (5.64)$$

Donc,

$$x_1(t) = c_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + c_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) , \quad (5.65)$$

$$x_2(t) = d_1 \cos(\omega_1 t - \varphi_1) + d_2 \cos(\omega_2 t - \varphi_2) . \quad (5.66)$$

Si l'on suppose, maintenant, que les coordonnées,  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , satisfont les conditions initiales suivantes :  $x_1(0) = a$ ,  $x_2(0) = 0$ , et  $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ , l'on a alors

$$x_1(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) , \quad x_2(t) = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) . \quad (5.67)$$

En utilisant les transformations trigonométriques usuelles,

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \left( \frac{a+b}{2} \right) \cos \left( \frac{a-b}{2} \right) , \quad (5.68a)$$

$$\cos a - \cos b = -2 \sin \left( \frac{a+b}{2} \right) \sin \left( \frac{a-b}{2} \right) , \quad (5.68b)$$

nous trouvons les formes définitives des trajectoires

$$x_1(t) = a \cos(\Omega t) \cos(\omega t) , \quad x_2(t) = a \sin(\Omega t) \sin(\omega t) , \quad (5.69)$$

avec les pulsations,

$$\Omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} , \quad \omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} . \quad (5.70)$$

Les formes des trajectoires (5.69) suggèrent que les solutions,  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$ , sont bornées, respectivement, par des fonctions sinusoïdales,  $\cos(\omega t)$  et  $\sin(\omega t)$ . L'on parle de *battements*, comme indiqué sur la Figure 5.2. La notation  $T_B = 2\pi/\omega$  signifie la période associée à la pulsation caractéristique  $\omega$ .

## 5.2 Oscillations forcées sans frottements.

### 5.2.1 Équations du mouvement.

Supposons, maintenant, que le système couplé, de coordonnées,  $(x_1(t), \dots, x_s(t))$ , et de

paramètres mécaniques,  $(m_{\beta\gamma}, k_{\beta\gamma})$ , est soumis à des forces extérieures,  $(F_1(t), \dots, F_s(t))$ , agissant sur ses composantes.

Pour ce système forcé, le Lagrangien dépendant explicitement du temps, est comme suit

$$L(x_1, \dots, x_s, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_s; t) = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s m_{\beta\gamma} \dot{x}_\beta \dot{x}_\gamma - \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^s k_{\beta\gamma} x_\beta x_\gamma + \sum_{\beta=1}^s F_\beta(t) x_\beta . \quad (5.71)$$

Ici,  $F_\beta(t)$  est la force extérieure agissant sur la composante,  $x_\beta$ . En utilisant la décomposition modale (5.40), nous montrons aisément que le dernier terme de ce Lagrangien se réécrit comme

$$\sum_{\beta=1}^s F_\beta(t) x_\beta = \sum_{\beta=1}^s f_\beta(t) Q_\beta , \quad (5.72)$$

où

$$f_\beta(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{A}_\beta , \quad 1 \leq \beta \leq s \quad (5.73)$$

est la projection de la force,  $\mathbf{F}$ , de composantes,  $(F_1(t), \dots, F_s(t))$ , sur le vecteur propre  $\mathbf{A}_\beta$  satisfaisant l'équation aux valeurs propres (5.33), et  $(Q_1, \dots, Q_s)$  désignent les *coordonnées normales*.

Il est facile de voir que les équations du mouvement découlant du Lagrangien précédent sont les suivantes

$$\sum_{\gamma=1}^s (m_{\beta\gamma} \ddot{x}_\gamma + k_{\beta\gamma} x_\gamma) = f_\beta(t) , \quad 1 \leq \beta \leq s , \quad (5.74)$$

ou sous forme matricielle,

$$M\ddot{X} + KX = F(t) . \quad (5.75)$$

En termes de coordonnées normales,  $(Q_1, \dots, Q_s)$ , nous montrons aisément que le Lagrangien se réécrit comme

$$L(Q_1, \dots, Q_s, \dot{Q}_1, \dots, \dot{Q}_s) = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s (m_\beta \dot{Q}_\beta^2 - k_\beta Q_\beta^2) + \sum_{\beta=1}^s f_\beta(t) Q_\beta . \quad (5.76)$$

Ces coordonnées normales satisfont alors les équations du mouvement découplées suivantes

$$\ddot{Q}_\gamma + \omega_\gamma^2 Q_\gamma = \frac{f_\gamma(t)}{m_\gamma}, \quad 1 \leq \gamma \leq s, \quad (5.77)$$

dont les solutions sont

$$Q_\gamma(t) = b_\gamma \cos(\omega_\gamma t - \varphi_\gamma) + \frac{1}{m_\gamma \omega_\gamma} \int_0^t f_\gamma(t') \sin(\omega_\gamma(t - t')) dt', \quad 1 \leq \gamma \leq s. \quad (5.77a)$$

Nous avons utilisé le fait que :  $\omega_\gamma = \sqrt{k_\gamma/m_\gamma}$ .

Les solutions globales sont alors régies par la décomposition en modes propres suivante,

$$x_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^s c_{\beta\gamma} \left[ b_\gamma \cos(\omega_\gamma t - \varphi_\gamma) + \frac{1}{m_\gamma \omega_\gamma} \int_0^t f_\gamma(t') \sin(\omega_\gamma(t - t')) dt' \right], \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.78)$$

Les composantes  $\{x_\beta(t)\}$  dépendent du temps, des modes propres de vibrations,  $(\omega_\beta, \mathbf{A}_\beta)$ , et des composantes des forces extérieures,  $f_\beta(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{A}_\beta$ .

Si, maintenant, l'on suppose que toutes les coordonnées,  $\{x_\beta\}$ , ainsi que leurs dérivées,  $\{\dot{x}_\beta\}$ , s'annulent à l'instant initial (les oscillations sont uniquement provoquées par les forces extérieures), c'est-à-dire  $x_\beta(0) = 0$  et  $\dot{x}_\beta(0) = 0$ , alors la trajectoire est donnée par

$$x_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^s c_{\beta\gamma} \frac{1}{m_\gamma \omega_\gamma} \int_0^t f_\gamma(t') \sin(\omega_\gamma(t - t')) dt', \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.79)$$

**Résonnance.** Comme cas particulier, supposons que les composantes de la force,  $\{f_\beta(t)\}$ , sont sinusoïdales, c'est-à-dire

$$f_\gamma(t) = f_\gamma^0 \sin(\Omega_\gamma t - \psi_\gamma), \quad 1 \leq \gamma \leq s. \quad (5.80)$$

Nous montrons qu'à la *résonnance*, où les pulsations propres s'indentifient avec les pulsations des forces  $f_\beta$  ( $\omega_\beta = \Omega_\beta$ ), la trajectoire du système forcé est alors donnée par

$$x_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^s c_{\beta\gamma} \left[ b_\gamma \cos(\omega_\gamma t - \varphi_\gamma) + \frac{f_\gamma^0 t}{2m_\gamma \omega_\gamma} \sin(\omega_\gamma t - \psi_\gamma) \right], \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.81)$$

Comme dans le cas des systèmes linéaires (un seul degré de liberté), les amplitudes associées aux différents croient linéairement en fonction du temps, et l'on assiste à un phénomène de *confinement*.

### 5.2.2 Bilan énergétique.

Supposons que les oscillations sont uniquement produites par les forces extérieures.

L'énergie mécanique totale d'un système qui effectue des oscillations forcées *ne se conserve pas*, et le système acquiert de l'énergie aux dépens de ces forces.

Il est facile de voir que, dans ce cas, l'énergie mécanique communiquée par l'excitation extérieure, durant l'intervalle de temps  $t$ , est additive et est donnée par

$$E_m(t) = \sum_{\beta=1}^s E_m^\beta(t) = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \left( m_\beta \dot{Q}_\beta^2 + k_\beta Q_\beta^2 \right), \quad (5.82)$$

où  $E_m^\beta(t)$  est l'énergie mécanique associée au mode  $\beta$ , de pulsation propre,  $\omega_\beta = \sqrt{k_\beta/m_\beta}$ . Si l'on suppose, maintenant, que :  $f_\beta = 0$ , pour  $t < 0$ , et  $f_\beta \neq 0$ , pour  $t > 0$ , alors l'énergie communiquée par la composante  $\beta$  de la force  $\mathbf{F}$ , durant un intervalle de temps très large ( $t \rightarrow \infty$ ), est

$$E_m^\beta = \frac{1}{2m_\beta} \left| \widehat{f}_\beta(\omega_\beta) \right|^2, \quad 1 \leq \beta \leq s, \quad (5.82a)$$

où

$$\widehat{f}_\beta(\omega_\beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_\beta(t) e^{-i\omega_\beta t} dt, \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.82b)$$

est la transformée (ou composante  $\omega_\beta$ ) de Fourier de la force  $f_\beta(t)$ .

Ayant calculé l'énergie mécanique communiquée par un mode donné, l'énergie mécanique totale communiquée est alors

$$E_m(t \rightarrow +\infty) = \sum_{\beta=1}^s \frac{1}{2m_\beta} \left| \widehat{f}_\beta(\omega_\beta) \right|^2 > 0. \quad (5.83)$$

Nous avons utilisé les résultats décrits au chapitre précédent.

### 5.3 Oscillations amorties.

Pour un système à plusieurs degrés de liberté, les forces de frottement généralisées,  $\{g_\beta\}$ , correspondant aux coordonnées,  $(x_1, \dots, x_s)$ , sont des fonctions des vitesses,  $(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_s)$ ,

$$g_\beta = - \sum_{\gamma=1}^s \alpha_{\beta\gamma} \dot{x}_\gamma, \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.84)$$

Les *coefficients du frottement*,  $\alpha_{\beta\gamma}$ , définissent une matrice carrée d'ordre  $s$ ,  $G = [\alpha_{\beta\gamma}]$ , appelée *matrice d'amortissement*. Celle-ci est *symétrique* et *définie positive*.

Dans ce cas, les équations du mouvement sont telles que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\beta} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_\beta} = g_\beta = - \sum_{\gamma=1}^s \alpha_{\beta\gamma} \dot{x}_\gamma, \quad 1 \leq \beta \leq s, \quad (5.85)$$

où le Lagrangien est défini par la relation (5.11). Explicitement, nous avons

$$\sum_{\gamma=1}^s (m_{\beta\gamma} \ddot{x}_\gamma + \alpha_{\beta\gamma} \dot{x}_\gamma + k_{\beta\gamma} x_\gamma) = 0, \quad 1 \leq \beta \leq s, \quad (5.86)$$

ou sous forme matricielle,

$$M\ddot{\mathbf{X}} + G\dot{\mathbf{X}} + K\mathbf{X} = 0. \quad (5.87)$$

Pour résoudre les équations du mouvement précédentes, nous cherchons des solutions sous forme

$$x_\gamma(t) = a_\gamma e^{rt}, \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{A}e^{rt}, \quad (5.88)$$

où les  $\{a_\gamma\}$  sont les amplitudes, composantes du vecteur amplitude,  $\mathbf{A}$ . En injectant ces solutions fondamentales dans les équations du mouvement (5.86), nous trouvons le système linéaire d'équations suivant,

$$\sum_{\gamma=1}^s (m_{\beta\gamma} r^2 + \alpha_{\beta\gamma} r + k_{\beta\gamma}) a_\gamma = 0, \quad 1 \leq \beta \leq s. \quad (5.89)$$

Notons que ce système n'a de solutions non nulles que si son déterminant est *nul*,

$$\det [Mr^2 + Gr + K] = 0 . \quad (5.90)$$

Ceci est une équation algébrique de degré  $2s$  dans la variable  $r$ . Les racines,  $\{r_\beta\}$ , sont les *valeurs propres* et les,  $\{\mathbf{A}_\beta\}$ , sont les *vecteurs propres* associés. Ces derniers satisfont le système algébrique linéaire suivant

$$(Mr_\beta^2 + Gr_\beta + K) \mathbf{A}_\beta = 0 , \quad 1 \leq \beta \leq s . \quad (5.91)$$

Ce sont les *équations aux vecteurs propres*.

Signalons que les vecteurs propres sont orthogonaux, par rapport aux 3 matrices  $(M, G, K)$ , c'est-à-dire

$$\mathbf{A}_\beta \cdot M \mathbf{A}_\gamma = m_\beta \delta_{\beta\gamma} , \quad \mathbf{A}_\beta \cdot G \mathbf{A}_\gamma = \alpha_\beta \delta_{\beta\gamma} , \quad \mathbf{A}_\beta \cdot K \mathbf{A}_\gamma = k_\beta \delta_{\beta\gamma} . \quad (5.92)$$

En multipliant scalairement les équations aux vecteurs propres (5.91), à gauche, par le vecteur,  $\mathbf{A}_\beta$ , et utilisant les propriétés précédentes, nous trouvons les équations suivantes pour les racines,

$$m_\beta r_\beta^2 + \alpha_\beta r_\beta + k_\beta = 0 , \quad 1 \leq \beta \leq s , \quad (5.93)$$

ou encore

$$r_\beta^2 + 2\lambda_\beta r_\beta + \omega_{0\beta}^2 = 0 , \quad 1 \leq \beta \leq s , \quad (5.94)$$

avec les pulsations,  $\omega_{0\beta} = \sqrt{k_\beta/m_\beta}$ , du système libre et les coefficients d'amortissement,  $\lambda_\beta = \alpha_\beta/2m_\beta$ , relatifs aux composantes,  $x_\beta$ .

En combinant les décompositions (5.40) et les équations du mouvement (5.86), nous trouvons que les coordonnées normales sont solutions des équations différentielles linéaires et non couplées suivantes

$$\ddot{Q}_\gamma(t) + 2\lambda_\gamma \dot{Q}_\gamma + \omega_{0\gamma}^2 Q_\gamma = 0 , \quad 1 \leq \gamma \leq s . \quad (5.95)$$

Dans ce cas, les équations d'Euler-Lagrange s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_\gamma} \right) - \frac{\partial L}{\partial Q_\gamma} = -\alpha_\gamma \dot{Q}_\gamma , \quad 1 \leq \gamma \leq s , \quad (5.96)$$



avec le Lagrangien

$$L = \frac{1}{2} \sum_{\beta=1}^s \left( m_{\beta} \dot{Q}_{\beta}^2 - k_{\beta} Q_{\beta}^2 \right) . \quad (5.97)$$

Cette forme suggère que le système couplé, de coordonnées initiales,  $(x_1, \dots, x_s)$ , et de paramètres mécaniques,  $(m_{\beta\gamma}, k_{\beta\gamma}, \alpha_{\beta\gamma})$ , est l'équivalent d'un système fictif *découplé*, de coordonnées normales,  $(Q_1, \dots, Q_s)$ , et de nouveaux paramètres mécaniques,  $(m_{\beta}, k_{\beta}, \alpha_{\beta})$ . Ces derniers sont naturellement fonctions des anciens.

Les solutions des équations du mouvement (5.97), en termes de coordonnées normales, sont alors

$$Q_{\gamma}(t) = e^{-\lambda_{\gamma}t} [a_{\gamma} \cos(\omega_{\gamma}t) + b_{\gamma} \sin(\omega_{\gamma}t)] , \quad \lambda_{\gamma} < \omega_{0\gamma} , \quad (5.98)$$

pour le régime *pseudo-périodique* (frottements faibles), avec la notation :  $\omega_{\gamma} = \sqrt{\omega_{0\gamma}^2 - \lambda_{\gamma}}$ ,

$$Q_{\gamma}(t) = e^{-\lambda_{\gamma}t} [\hat{a}_{\gamma} \cosh(\hat{\omega}_{\gamma}t) + \hat{b}_{\gamma} \sinh(\hat{\omega}_{\gamma}t)] , \quad \lambda_{\gamma} > \omega_{0\gamma} , \quad (5.99)$$

avec la notation :  $\hat{\omega}_{\gamma} = \sqrt{\lambda_{\gamma} - \omega_{0\gamma}^2}$ , pour le régime *apériodique* (frottements forts), et

$$Q_{\gamma}(t) = e^{-\lambda_{\gamma}t} (c_{\gamma} + d_{\gamma}t) , \quad \lambda_{\gamma} = \omega_{0\gamma} , \quad (5.100)$$

pour le régime *critique* (frottements intermédiaires).

Donc, les solutions globales sont

$$x_{\beta}(t) = \sum_{\gamma=1}^s c_{\beta\gamma} e^{-\lambda_{\gamma}t} [a_{\gamma} \cos(\omega_{\gamma}t) + b_{\gamma} \sin(\omega_{\gamma}t)] , \quad \lambda_{\gamma} < \omega_{0\gamma} , \quad (5.101)$$

pour le régime *pseudo-périodique*,

$$x_{\beta}(t) = \sum_{\gamma=1}^s c_{\beta\gamma} e^{-\lambda_{\gamma}t} [\hat{a}_{\gamma} \cosh(\hat{\omega}_{\gamma}t) + \hat{b}_{\gamma} \sinh(\hat{\omega}_{\gamma}t)] , \quad \lambda_{\gamma} > \omega_{0\gamma} , \quad (5.102)$$

pour le régime apériodique, et

$$x_i(t) = x_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^s c_{\beta\gamma} e^{-\lambda_\gamma t} (c_\gamma + d_\gamma t) , \quad \lambda_\gamma = \omega_{0\gamma} , \quad (5.103)$$

pour le régime critique.

### 5.3.1 Bilan énergétique.

Comme pour les systèmes linéaires, nous montrons aisément qu'en présence de frottements, il y a dissipation de l'énergie, et l'énergie mécanique totale décroît avec le temps comme  $e^{-at}$ , où  $a$  est une constante positive.

## 5.4 Oscillations amorties et forcées.

Soit un système à  $s$  degrés de liberté subissant des forces de frottements et en même temps des forces extérieures. Le Lagrangien associé est donnée par l'expression (5.71).

Nous trouvons que les équations du mouvement sont

$$\sum_{\gamma=1}^s (m_{\beta\gamma} \ddot{x}_\gamma + \alpha_{\beta\gamma} \dot{x}_\gamma + k_{\beta\gamma} x_\gamma) = F_\beta , \quad 1 \leq \beta \leq s , \quad (5.104)$$

ou sous forme matricielle,

$$M\ddot{\mathbf{X}} + G\dot{\mathbf{X}} + K\mathbf{X} = \mathbf{F} . \quad (5.105)$$

Les mêmes démarches qu'avant nous amènent aux équations satisfaites par les coordonnées normales,

$$\ddot{Q}_\gamma(t) + 2\lambda_\gamma \dot{Q}_\gamma + \omega_{0\gamma}^2 Q_\gamma = \frac{f_\gamma(t)}{m_\gamma} , \quad 1 \leq \gamma \leq s , \quad (5.106)$$

avec les notations :  $f_\gamma(t) = \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{A}_\gamma$ ,  $\lambda_\gamma = \alpha_\gamma/m_\gamma$  et  $\omega_{0\gamma} = \sqrt{k_\gamma/m_\gamma}$ . Les solutions de

ces équations (pour  $1 \leq \gamma \leq s$ ) sont alors

$$Q_\gamma(t) = e^{-\lambda_\gamma t} [a_\gamma \cos(\omega_\gamma t) + b_\gamma \sin(\omega_\gamma t)] + \frac{1}{m_\gamma \omega_\gamma} \int_0^t f_\gamma(t') e^{-\lambda_\gamma(t-t')} \sin(\omega_\gamma(t-t')) dt', \quad (5.107)$$

pour le régime *pseudo-périodique*,

$$Q_\gamma(t) = e^{-\lambda_\gamma t} [\hat{a}_\gamma \cosh(\hat{\omega}_\gamma t) + \hat{b}_\gamma \sinh(\hat{\omega}_\gamma t)] + \frac{1}{m_\gamma \hat{\omega}_\gamma} \int_0^t f_\gamma(t') e^{-\lambda_\gamma(t-t')} \sinh(\hat{\omega}_\gamma(t-t')) dt', \quad (5.108)$$

pour le régime *apériodique*, et

$$Q_\gamma(t) = e^{-\lambda_\gamma t} (c_\gamma + d_\gamma t) + \frac{1}{m_\gamma} \int_0^t f_\gamma(t') e^{-\lambda_\gamma(t-t')} (t-t') dt', \quad (5.109)$$

pour le régime *critique*.

Les solutions globales, pour  $1 \leq \beta \leq s$ , sont alors

$$x_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^s c_{\beta\gamma} \left[ \begin{array}{c} e^{-\lambda_\gamma t} [a_\gamma \cos(\omega_\gamma t) + b_\gamma \sin(\omega_\gamma t)] \\ + \frac{1}{m_\gamma \omega_\gamma} \int_0^t f_\gamma(t') e^{-\lambda_\gamma(t-t')} \sin(\omega_\gamma(t-t')) dt' \end{array} \right], \quad (5.110)$$

pour le régime *pseudo-périodique*,

$$x_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^s c_{\beta\gamma} \left[ \begin{array}{c} e^{-\lambda_\gamma t} [\hat{a}_\gamma \cosh(\hat{\omega}_\gamma t) + \hat{b}_\gamma \sinh(\hat{\omega}_\gamma t)] \\ + \frac{1}{m_\gamma \hat{\omega}_\gamma} \int_0^t f_\gamma(t') e^{-\lambda_\gamma(t-t')} \sinh(\hat{\omega}_\gamma(t-t')) dt' \end{array} \right], \quad (5.111)$$

pour le régime *apériodique*, et

$$x_\beta(t) = \sum_{\gamma=1}^s c_{\beta\gamma} \left[ e^{-\lambda_\gamma t} (c_\gamma + d_\gamma t) + \frac{1}{m_\gamma} \int_0^t f_\gamma(t') e^{-\lambda_\gamma(t-t')} (t-t') dt' \right], \quad (5.112)$$

pour le régime *critique*.

### **5.4.1 Bilan énergétique.**

Comme pour les systèmes linéaires, nous démontrons facilement qu'en présence de frottements et des forces extérieures, il y a dissipation de l'énergie, et l'énergie mécanique totale décroît avec le temps comme  $e^{-bt}$ , où  $b$  est une constante positive. ■

# FIGURES

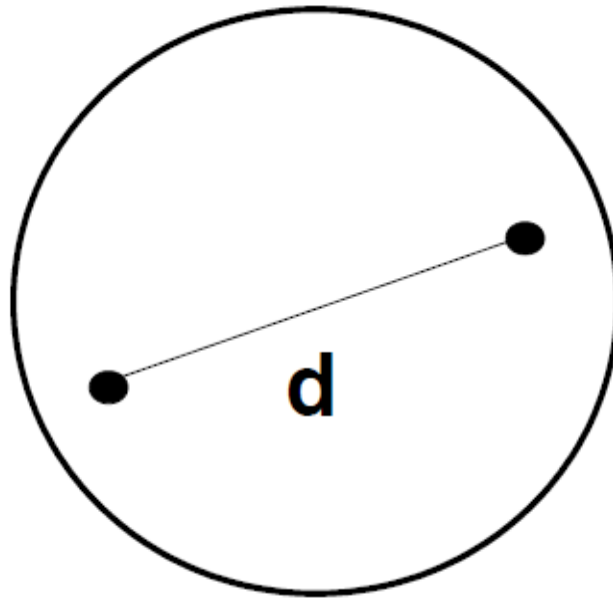


Figure 1.1: Deux particules à l'intérieur d'une sphère.

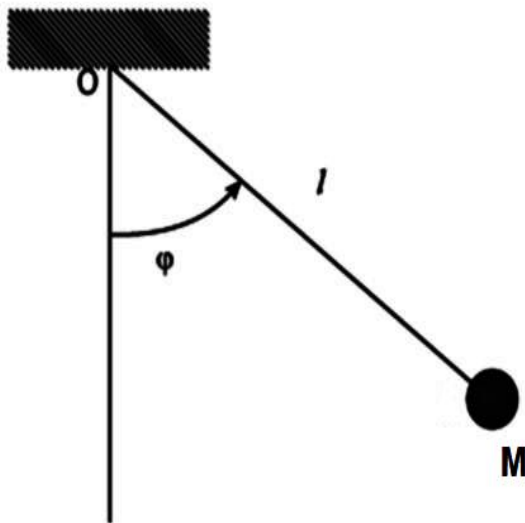


Figure 1.2: Pendule simple.

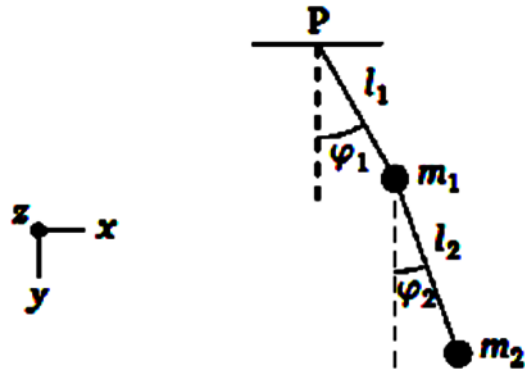


Figure 1.3: Pendule double.

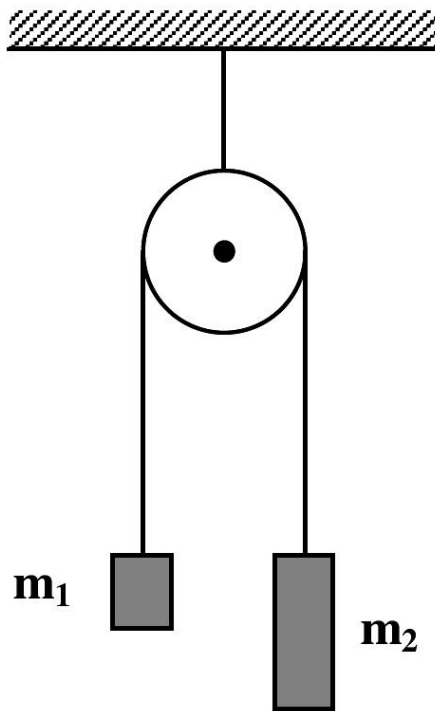


Figure 1.4: Schéma de la Machine d'Atwood.

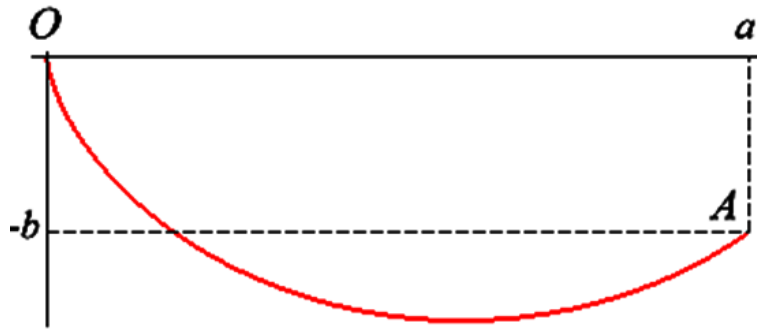


Figure 1.5: La brachistochrone.

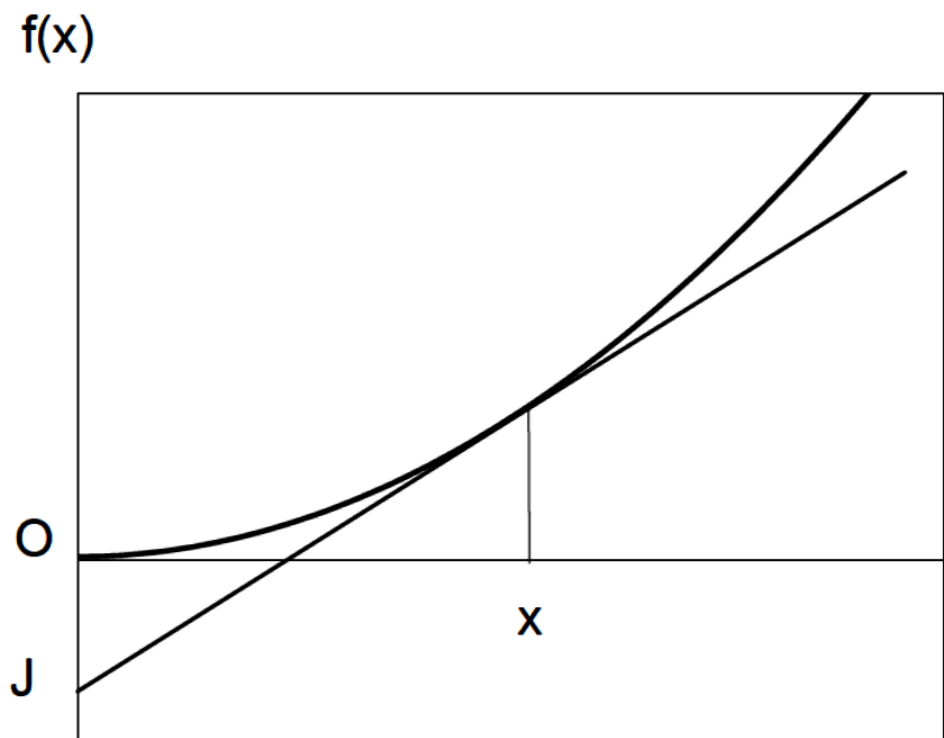


Figure 2.1: Transformée de Legendre.



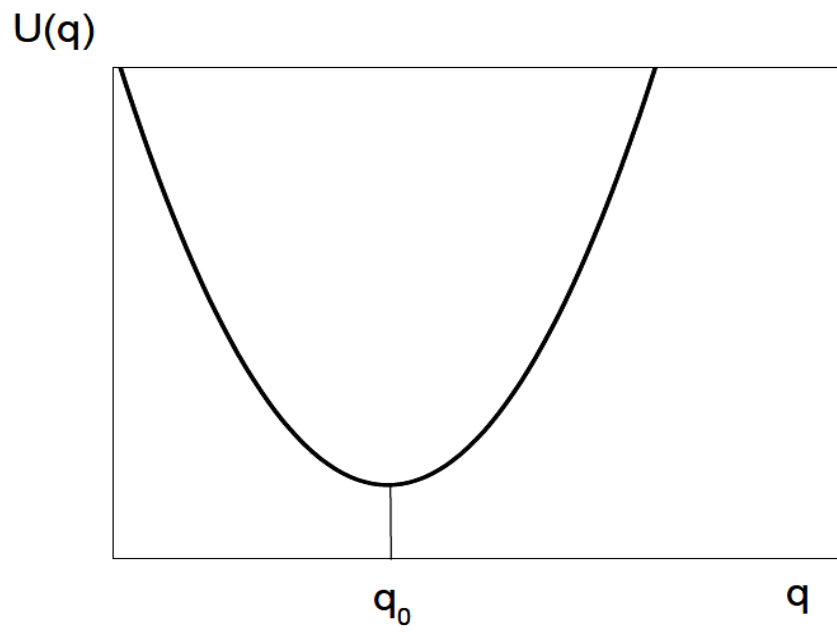


Figure 4.1: Allure du potentiel avec un point d'équilibre stable.

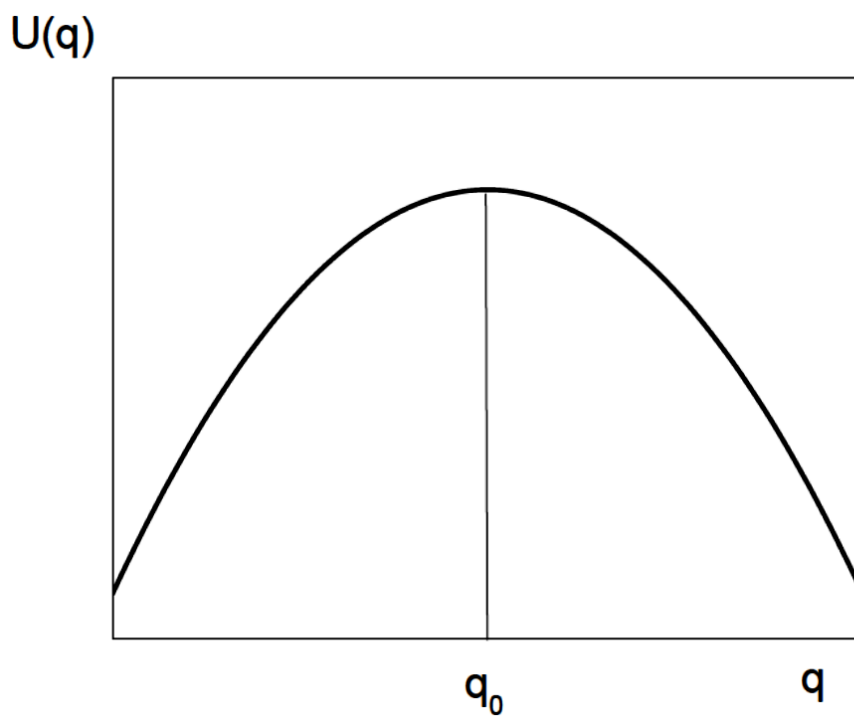


Figure 4.2: Allure du potentiel avec un point d'équilibre instable.

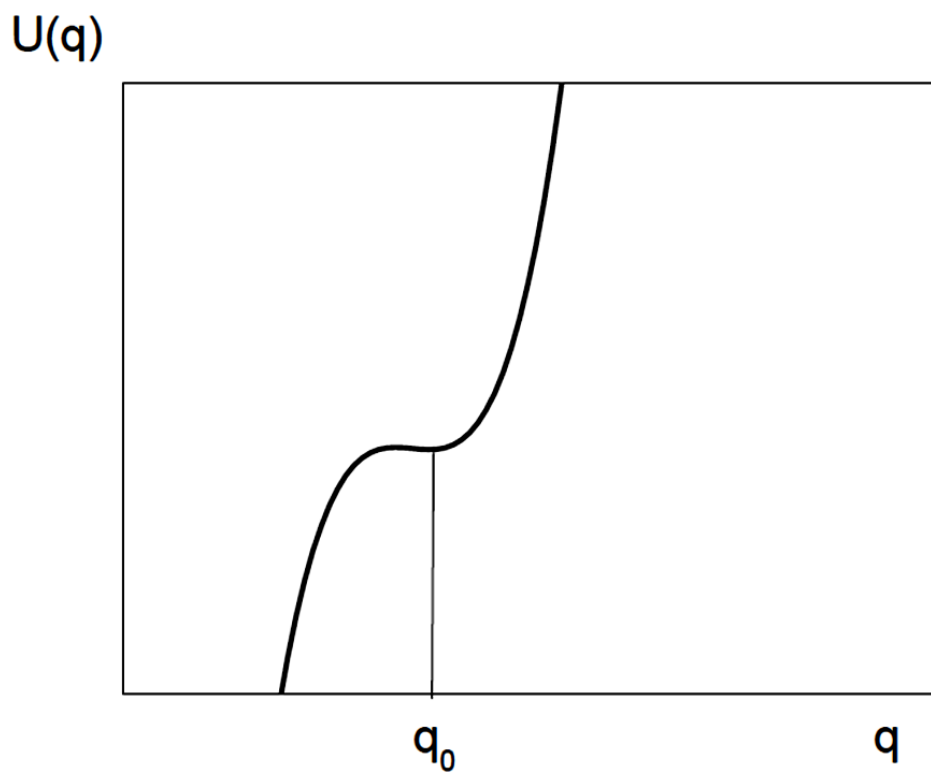


Figure 4.3: Allure du potentiel avec un point d'équilibre métastable.

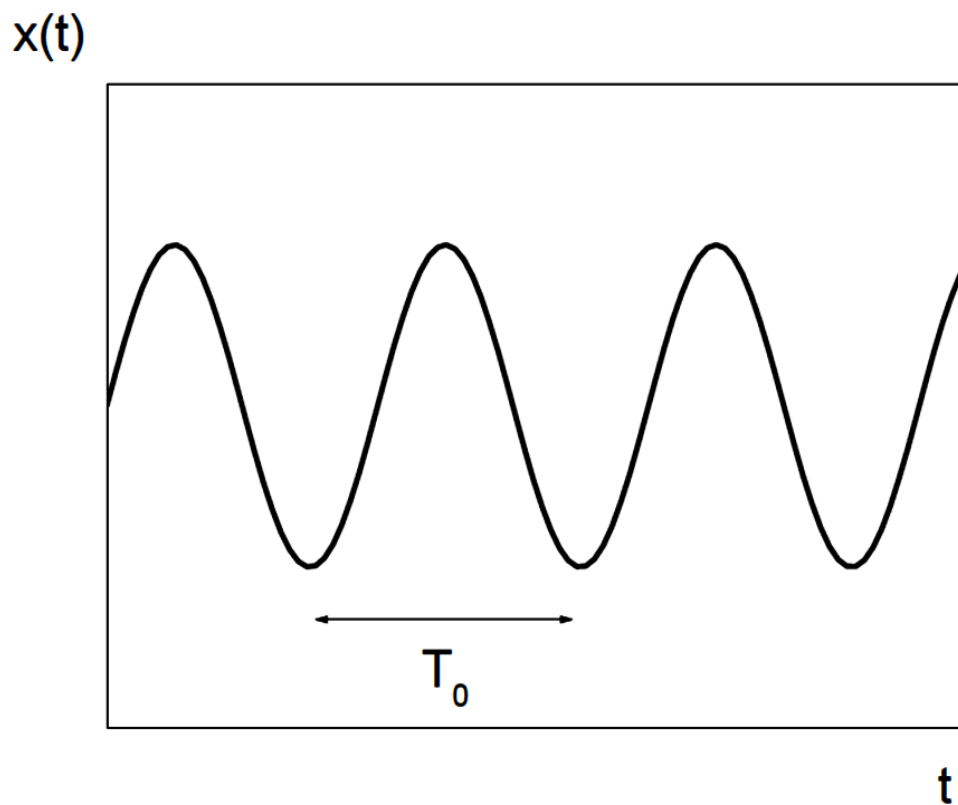


Figure 4.4: Allure de la trajectoire d'un oscillateur harmonique.

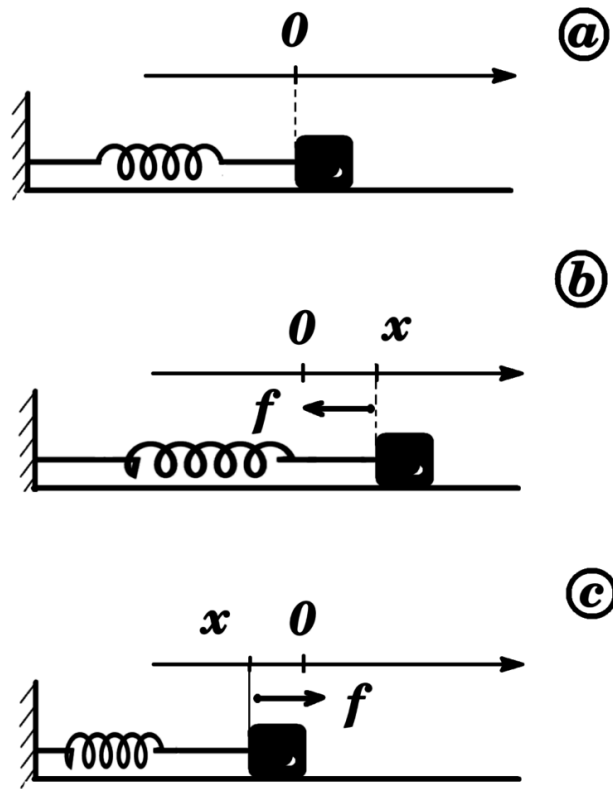


Figure 4.5: Schéma illustrant les déplacements d'un ressort horizontal autour de sa position d'équilibre stable.

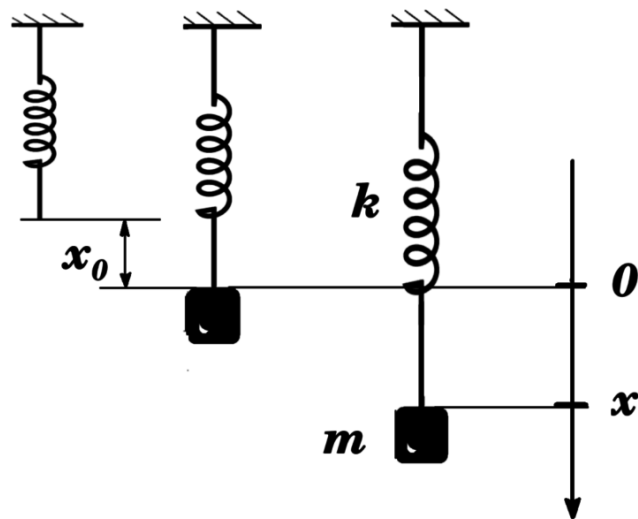


Figure 4.6: Schéma illustrant les déplacements d'un ressort vertical autour de sa position d'équilibre stable.

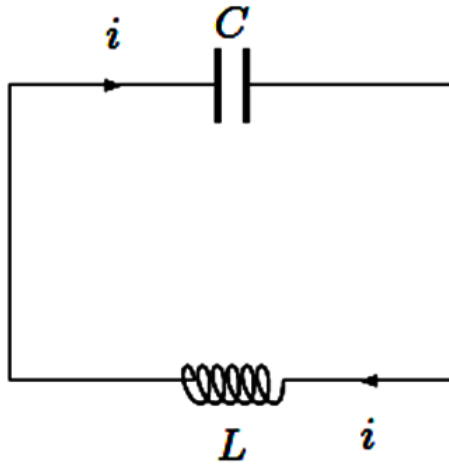


Figure 4.7: Circuit LC (en court-circuit) équivalent à un ressort libre.

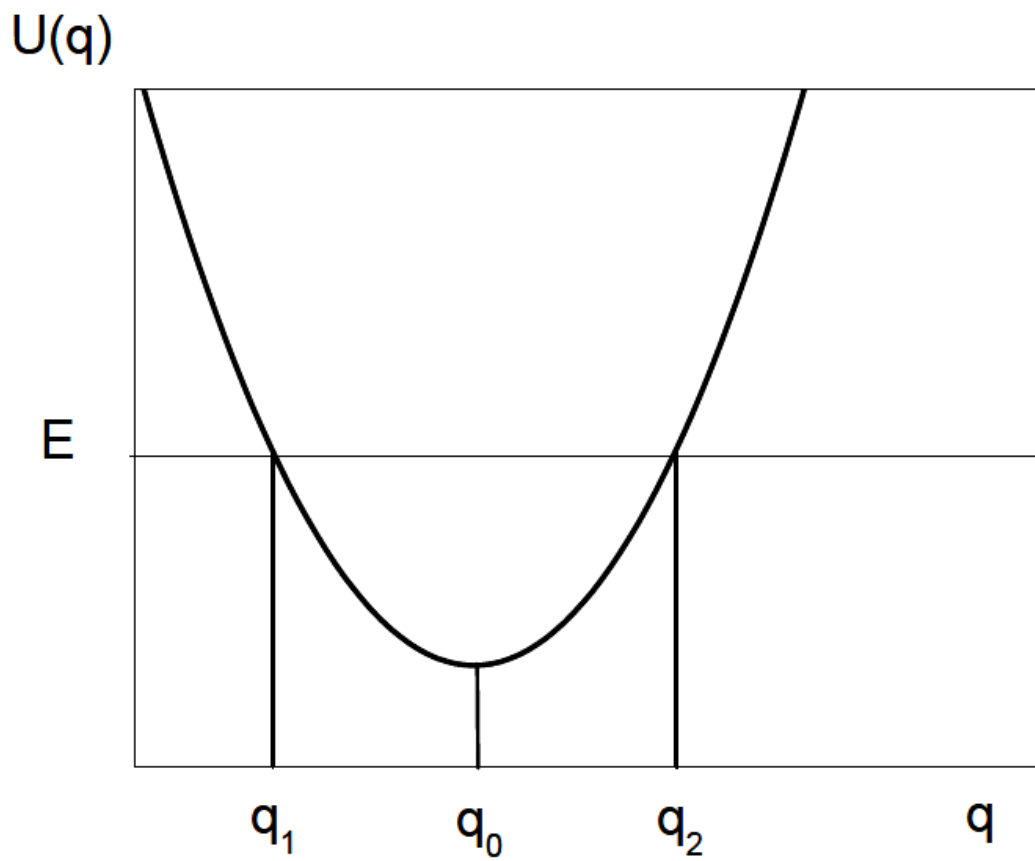


Figure 4.8: Allure du potentiel d'interaction avec deux points d'arrêts.

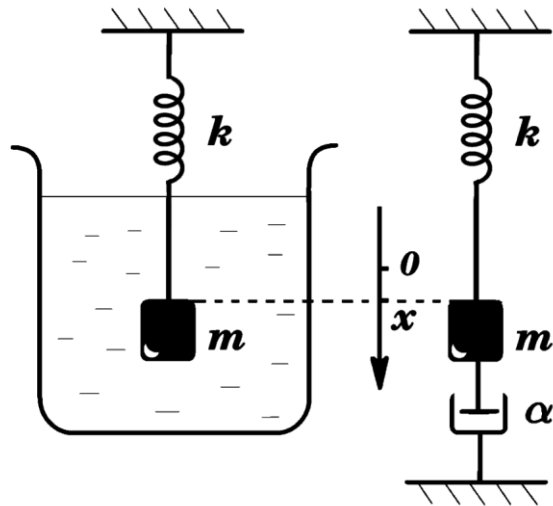


Figure 4.9: Schéma d'un oscillateur amorti.

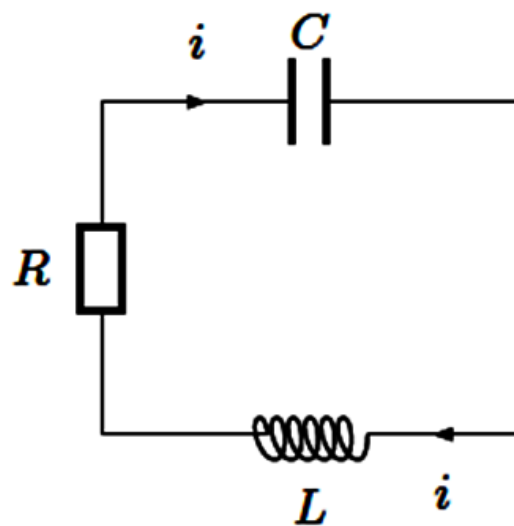


Figure 4.10: Circuit RLC (en court-circuit) équivalent à un ressort amorti.

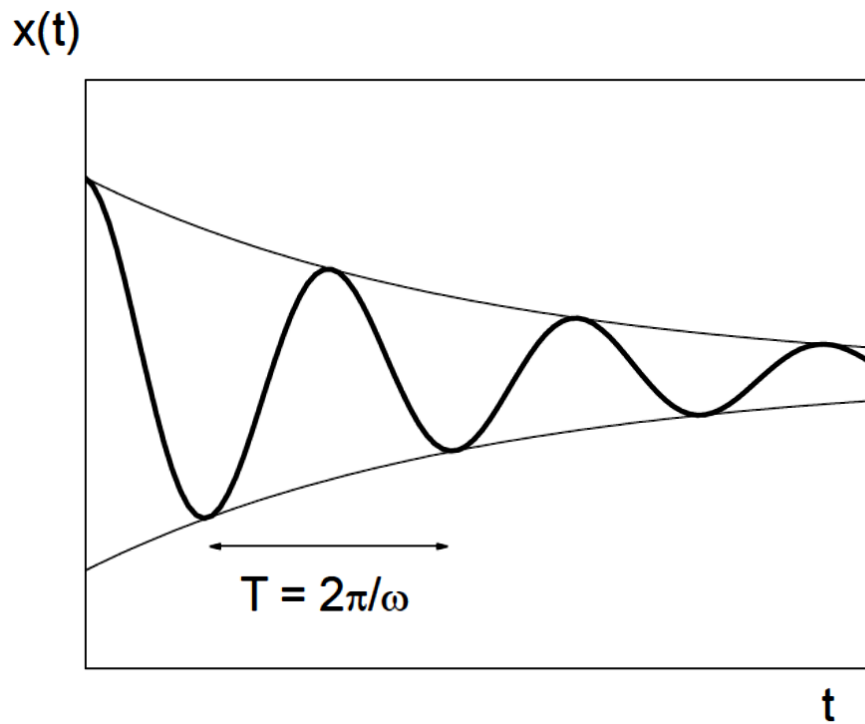


Figure 4.11: Trajectoire d'un ressort faiblement amorti.

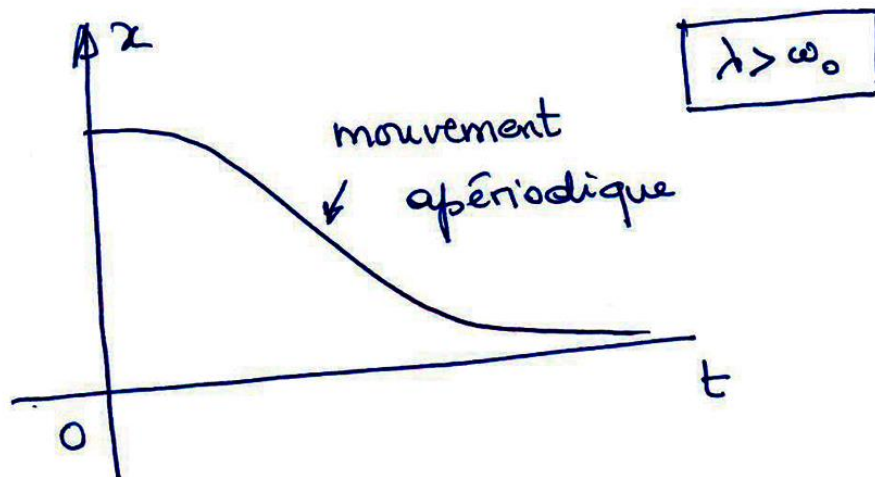


Figure 4.12: Trajectoire d'un ressort fortement amorti, avec  $\lambda > \omega_0$ .

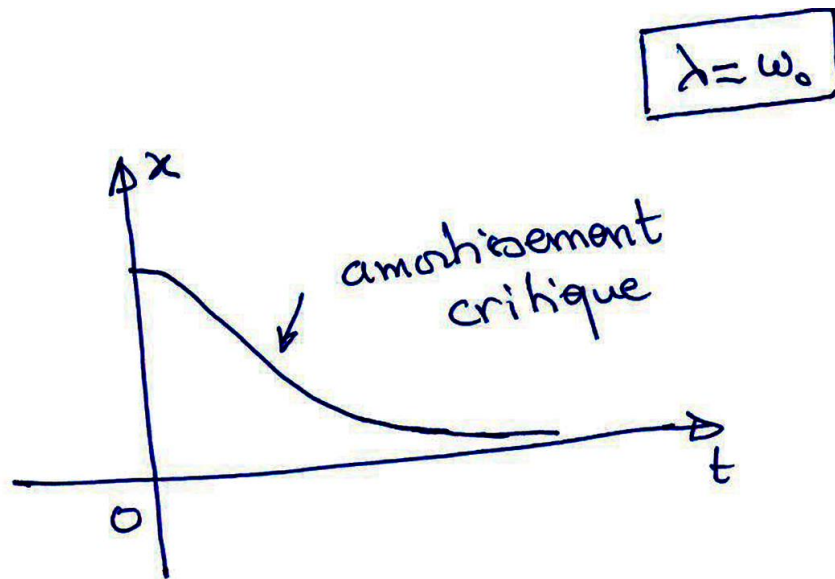


Figure 4.13: Trajectoire d'un ressort modérément amorti, avec  $\lambda = \omega_0$ .

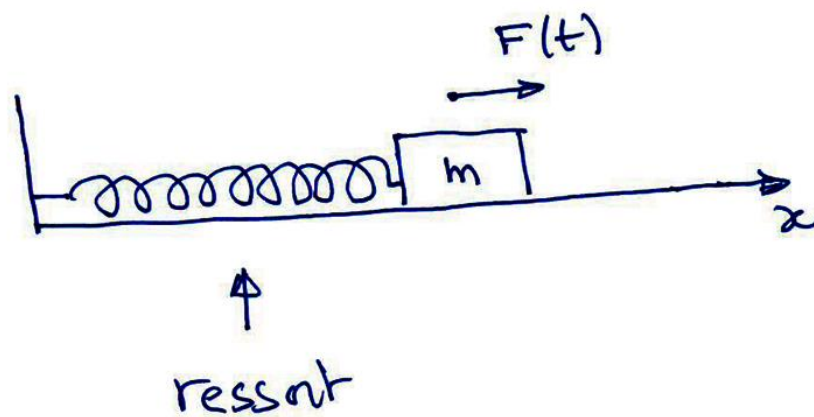


Figure 4.14: Schéma d'un oscillateur forcé.

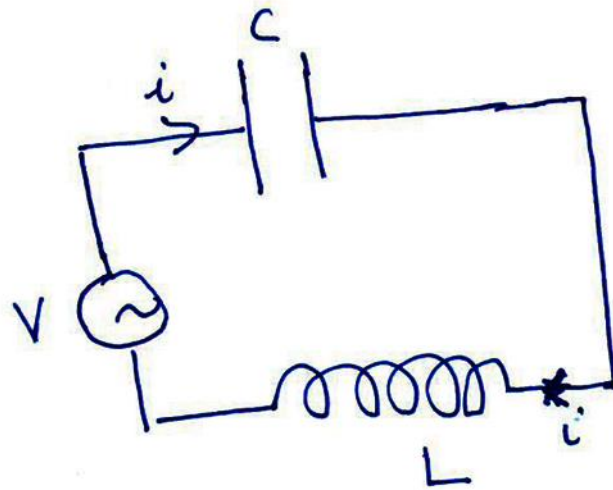


Figure 4.15: Circuit LC, avec source de tension, équivalent à un oscillateur forcé.

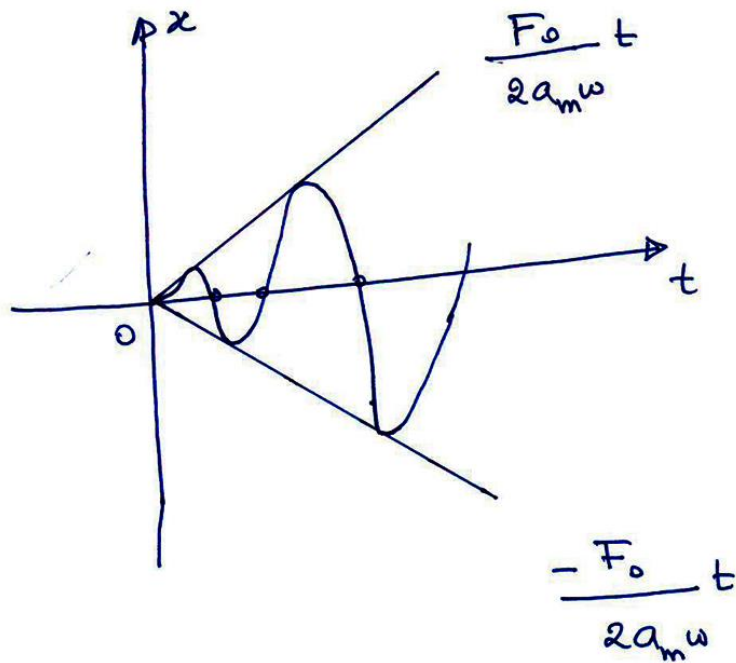


Figure 4.16: Trajectoire confinée d'un oscillateur forcé.



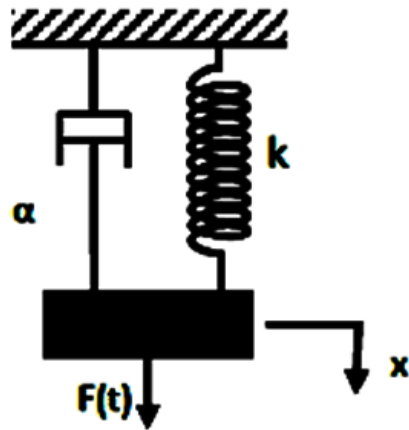


Figure 4.17: Schéma d'un oscillateur amorti et forcé.

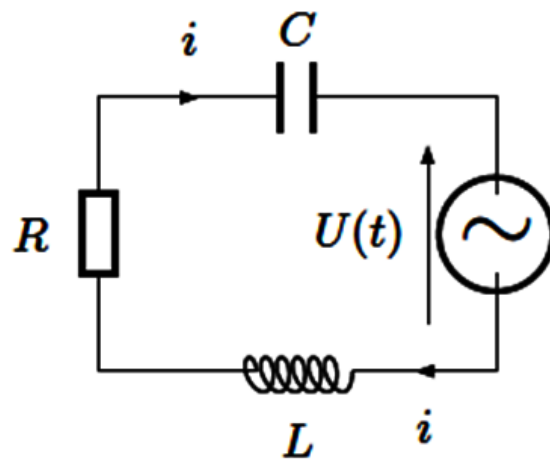


Figure 4.18: Circuit RLC, avec source de tension, équivalent à un oscillateur amorti et forcé.

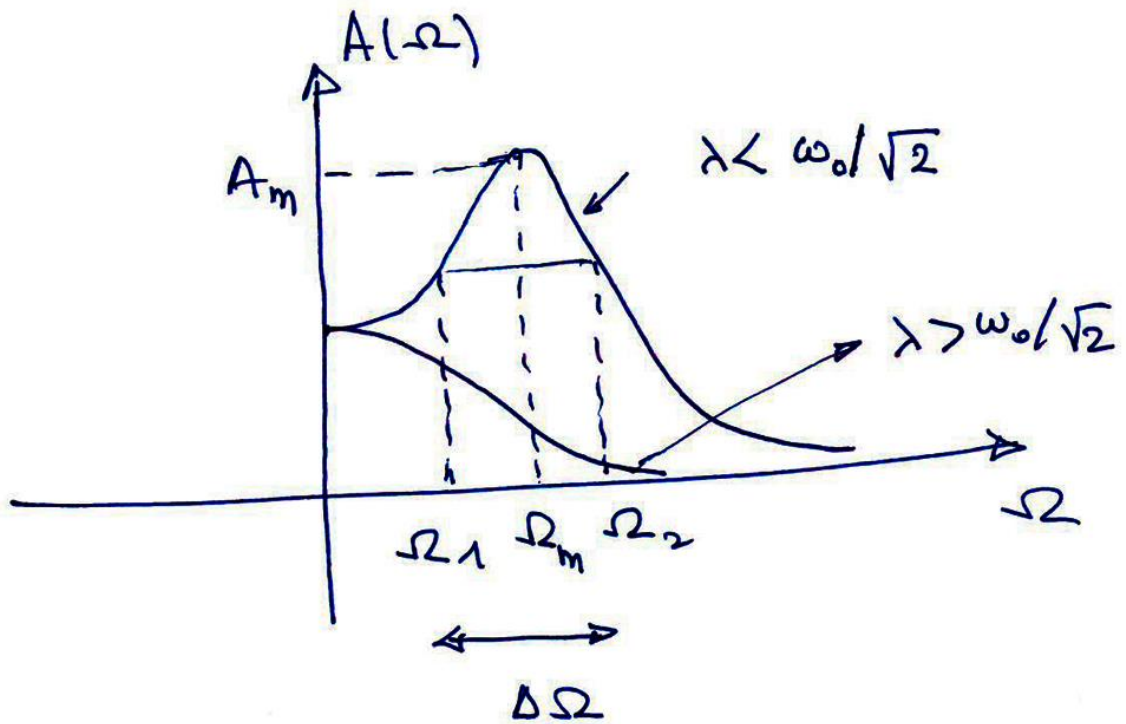


Figure 4.19: Variation de l'amplitude d'un oscillateur amorti et forcé, en fonction de la pulsation de la force extérieure.

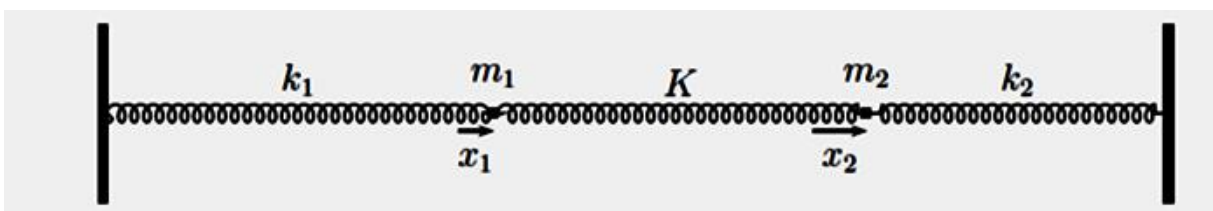
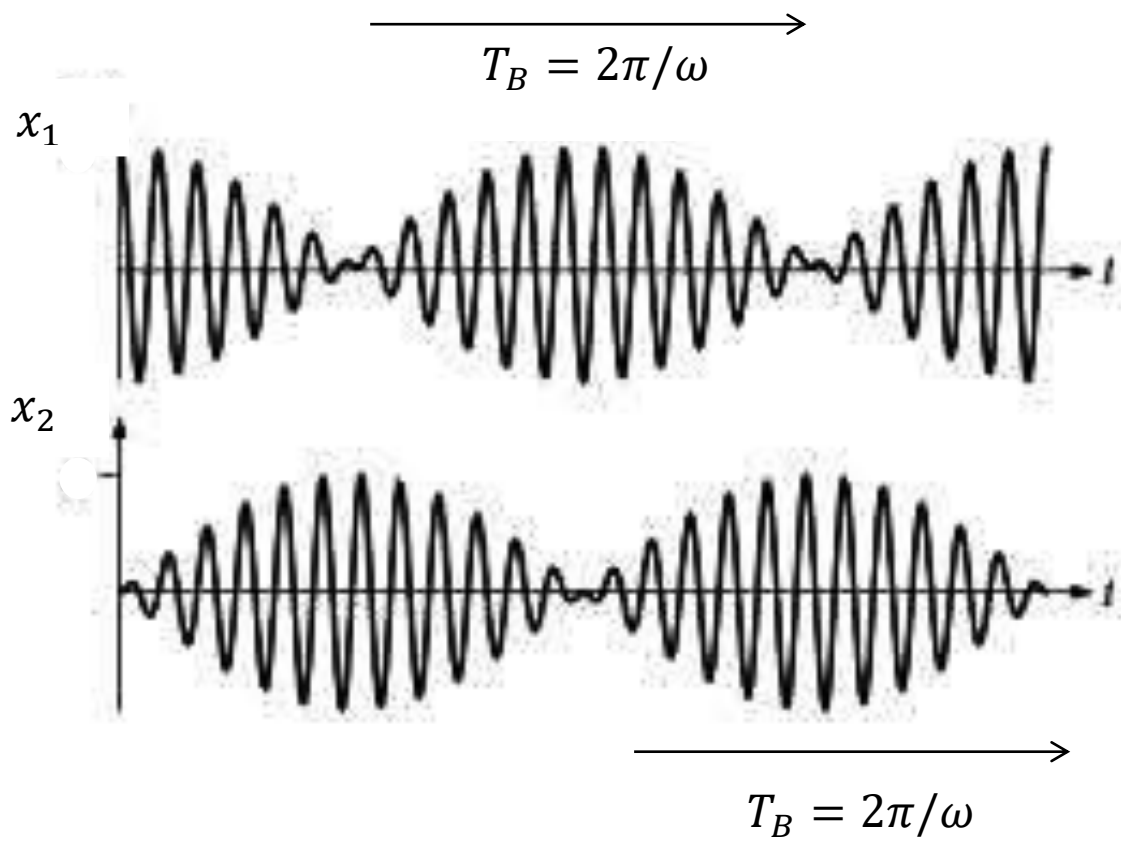


Figure 5.1: Deux masses couplées par trois ressorts.



**Figure 5.2: Trajectoire de deux masses identiques couplées (phénomène de battements).**